N° d'ordre : 02/2012-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne
Faculté des Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Équations Différentielles dans le Champ Complexe

Par : RABHI Azzedine

THÈME

Réduction des équations différentielles et monodromie

Soutenu publiquement, le 27/09/2012, devant le jury composé de :

Mr.	**K. Betina**	Professeur,	à l'USTHB	Président
Mr.	**D. Behloul**	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Directeur de Mémoire
Mr.	**M-S. Rezaoui**	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Examinateur
Mr.	**B. Abbaci**	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Examinateur

Remerciements

Je remercie avant tout DIEU de m'avoir donné la santé, la force et la volonté d'entreprendre et d'achever ce travail.

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire d'algèbre et théorie des nombres de la faculté de mathématiques de l'USTHB.

Je voudrais adresser mes vifs remerciements à Mr D.BEHLOUL, Maître de conférences à l'USTHB. D'abord, de m'avoir suggéré ce sujet de mémoire et de superviser l'état d'avancement des travaux. Ensuite, pour sa disponibilité, ses suggestions, ses encouragements et ses critiques constructives, sans lui ce travail n'aurait pu aboutir. Qu'il croit à ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier Mr K.BETINA, Professeur à l'USTHB, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse. Sa rigueur, sa pédagogie et son sens du travail ont profondément marqué mon cursus estudiantin aussi bien en graduation qu'en post-graduation. Toute ma gratitude et mon profond respect à lui.

De grand coeur je remercie Mr R.BOUCHENNA, Chargé de cours à l'USTHB, une personne attentive et communicative qui, par ses compétences et son expèrience a su orienter ma vocation scientifique. Pour ses enseignements, sa gentillesse, sa disponibilité et sa vivacité, je voudrais lui exprimer mon profond respect.

Aussi, je tiens à remercier Mr Y.AIT AMRANE, Maître de conférences à l'USTHB, qui nous a enrichit de sa culture scientifique notamment mathématique. Son esprit de jeune, perfectionniste et son fort potentiel de travail furent pour moi un exemple à suivre.

Je suis aussi redevable à Mr M-S.REZAOUI Maître de conférences à l'USTHB, Mr B.ABBACI, Maître de conférences à l'USTHB, d'avoir examiné le travail et d'avoir accepté de faire partie du jury. Qu'ils soient tous remerciés.

Je ne saurais oublier de remercier mes amis N.RABEHI et S.BEDROUNI qui se sont investis activement dans cette thèse. Je remercie Nassim de m'avoir aidé au fur et à mesure à lever l'ambiguïté linguistique des textes en anglais, pour les moments inoubliables que nous avons pu partager.
La contribution de mon ami Samir dans ce travail a été d'une grande importance, sans lui ce manuscrit n'aurait pu prendre cette forme. Je le remercie donc pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée, mais surtout pour les longues nuits qu'on a passé ensemble à travailler, pour les discussions enrichissantes que nous avons pu avoir, je lui serai très redevable.

Ce travail doit beaucoup à des personnes de mon entourage, je cite tout particulièrement ma mère Zakia qui a toujours été présente pour moi, notamment dans les circonstances les plus éprouvantes. Ces quelques lignes rédigées ne suffiront à t'exprimer mon éternelle gratitude et ma profonde admiration. Ta gentillesse, ton sens du sacrifice et ta patience témoignent de ta grandeur de valeur et de ta sainteté spirituelle, tout l'honneur et tout le bonnheur pour moi d'avoir une mère comme toi.

Je remercie fraternellement ma petite soeur Nadia d'avoir été si compréhensible durant ces années. Ton sourire et ton visage enthousiaste ont été pour moi une source de joie et de bonheur inépuisable.

Je remercie également mon frère ainé Nassim à qui ces mots modestes lui sont adressés. Malgré la distance, tes conseils et suggestions n'ont cependant pas cessé. Toujours soucieux de l'avancement de mon travail, au point de m'appeler plusieurs fois par jour, tu n'as épargné ni effort ni idée pour m'envoyer sur les pistes les plus sûres. Les longues conversations qu'on a eu ont été source de progrès et d'inspiration et les idées que tu m'as inculqué ont profondément forgé mon caractère. Pour toutes ces raisons et d'autres, je tiens à t'exprimer ma plus vive reconnaissance.

Enfin, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à mon oncle H.FAID qui m'a toujours soutenu tout au long de mes études, également à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation et à l'aboutissement de ce travail.

Réduction des équations différentielles et monodromie

Résumé

Dans ce mémoire, nous développons l'aspect analytique des équations différentielles linéaires homogènes ainsi que leur monodromie dans le champ complexe. Notre travail sera axé autour des équations fuchsiennes où à points singuliers réguliers en se focalisant sur des équations du deuxième ordre. Le but sera de calculer systématiquement le groupe de monodromie de l'équation hypergéométrique de Gauss que nous utiliserons par la suite pour réduire l'équation de Heun et l'équation hypergéométrique généralisée.

Mots-clés : Point singulier régulier, équation fuchsienne, équation de Gauss, schéma de Riemann, monodromie, solution uniforme, solution algébrique.

Table des matières

Introduction

L'objet de ce mémoire est l'étude de la monodromie des équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux, dans le champ complexe, suivantes :

$$p_0(z)\, y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(z)y^{(1)} + p_n(z)y = 0. \tag{E}$$

Soit z_0 un point de $\mathbb{C}$, si $p_0(z_0)$ est non nul, le théorème d'existence de Cauchy nous assure l'existence au voisinage de z_0 d'une solution de l'équation (E). Si $p_0(z_0)$ est nul ce théorème ne s'applique plus et z_0 est dit un point singulier de (E). Les singularités de (E) ne sont autres que les racines du polynôme $p_0(z)$. Le point z_0 est dit singulier régulier si les limites $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^i \dfrac{p_i(z)}{p_0(z)}$, existent et sont finies pour tout $i = 1, \dots, n$. L'équation (E) est dite dans la classe de Fuchs (ou *fuchsienne*) si elle n'a qu'un nombre fini de points singuliers et qui sont tous des points singuliers réguliers. Dans ce cas, la méthode de Frobenius (voir [Inc44, Chapitre 16]) permet de déterminer la solution générale de (E) sous forme d'une série.

Un exemple élémentaire montre que la solution générale de (E) n'est pas toujours uniforme autour des sigularités : la solution générale de l'équation différentielle

$$zy' - \lambda y = 0, (\lambda \in \mathbb{C}) \qquad (E_1)$$

est $y = cst.z^{\lambda}$ qui n'est pas uniforme autour de l'origine dès que λ n'est pas entier. Cela s'interprète de la façon suivante. Lorsque z décrit une courbe fermée γ n'entourant pas l'origine, la solution y part d'une certaine valeur soit $y(z)$ et revient à cette même valeur : la solution y reprend sa valeur initiale quand le point z reprend sa position initiale. Si le point z décrit une courbe fermée γ' entourant l'origine, la solution y suivie par continuité le long de γ' prend la valeur $y(z)$ multipliée par $\exp(2i\pi\lambda)$ quand le point z revient à son point de départ. Pour chaque chemin, on obtient donc une permutation de l'ensemble des solutions de l'équation $zy' - \lambda y = 0$, c'est le groupe de monodromie.

Plus généralement, le groupe de Poincaré du plan complexe privé des singularités de (E) opère linéairement sur l'espace des solutions de l'équation (E) sur tout petit domaine simplement connexe. On obtient ainsi une représentation linéaire du groupe fondamental appelée *représentation de monodromie*. Dans ce cas, le groupe de monodromie s'identifie à un sous groupe de $GL(n, \mathbb{C})$.

B. Riemann [Rie54], a décrit une méthode pour déterminer la monodromie de l'équation hypergéométrique de Gauss

$$z(z-1)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)y' - \alpha\beta y = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}. \tag{Gau}$$

Cette équation est fuchsienne sur $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, ayant trois points singuliers réguliers $0, 1$ et ∞ dont les exposants caractéristiques sont respectivement $(0, 1-\gamma), (0, \gamma-\alpha-\beta)$ et (α, β). Riemann a ensuite regroupé ces données locales dans la table suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{pmatrix},$$

dite *schéma de Riemann*. Ainsi, le groupe de monodromie de l'équation (Gau), *fini* dans ce cas, se calcule en utilisant la relation de Fuchs (i.e. la somme des exposants est égale à 1) et ce pour des valeurs arbitraires des exposants.

À l'aide de la monodromie, T. Kimura [Kim70] a réduit sous certaines conditions, l'équation hypergéométrique généralisée suivante :

$$w'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i}{z-z_i}\right) w' + \frac{\alpha\beta z^k + \rho_1 z^{k-1} + \ldots + \rho_k}{z(z-1)\prod_{i=1}^{k}(z-z_i)} w = 0, \tag{Hyp}$$

à l'équation hypergéométrique de Gauss (Gau).

L'équation (Hyp) possède $(k+3)$ points singuliers réguliers $0, 1, \infty, z_1, \ldots, z_k$. Elle est dite réductible si elle admet une solution w non triviale satisfaisant une équation de la forme $w' + \tilde{A}(z)w = 0$, où $\tilde{A}(z)$ est une fonction rationnelle. Sinon, l'équation (Hyp)

est dite irréductible. Alors, *d'après le théorème (3.6.5) de Kimura* [Kim70], si cette équation est irréductible dont chaque singularité z_i est apparente (i.e. la solution générale de l'équation (Hyp) est uniforme au voisinage de z_i), il existe une application linéaire qui transforme l'équation de Gauss (Gau) en l'équation (Hyp). Le mémoire sera présenté en trois chapitres. Le premier sera consacré à une introduction des concepts de base de la théorie analytique des équations différentielles linéaires singulières régulières sur la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$. On y développera l'algorithme de Frobenius qui permettera de rechercher des solutions sous forme de séries. Une large partie sera consacrée aux équations de Fuchs ainsi qu'aux équations algébriques.

Après avoir caractérisé les équations de Fuchs on étudiera dans le second chapitre les équations de Riemann ; étant du second degré avec trois singularités régulières, nous y appliquerons les théorèmes et résultats déjà obtenus dans le chapitre 1. Après avoir effectué des transformations de type homographiques on aboutira à l'équation hypergéométrique de Gauss que nous illustrerons comme exemple, celle-ci caractérise les équations fuchsiennes du second ordre à trois points singuliers réguliers sur la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$. Dans cette direction, elle sera étudiée en détail, la série hypergéométrique, qui contient comme cas particulier presque toutes les séries élémentaires et dont sa somme lorsqu'elle converge, définit la fonction hypergéométrique.

Dans le troisième chapitre on associe à une équation différentielle un groupe qui sera appelé le groupe de monodromie de cette équation. On y exposera d'abord le phénomène de la monodromie. Ensuite, on donnera une caractérisation des solutions algébriques par le groupe de monodromie. Puis, avec la relation de Fuchs on calculera la monodromie de l'équation hypergéométrique de Gauss et on l'appliquera pour réduire l'équation hypergéométrique généralisée (Hyp).

Dix exemples concrets, $((E_1), (E_2), ..., (E_{10}))$, d'équations différentielles sont illustrés le long de ce mémoire.

Chapitre 1

Singularités des équations différentielles linéaires

Dans ce premier chapitre, nous allons introduire quelques définitions de base, conjectures et préliminaires dans le but de dégager un language pour la dissertation.

1.1 Les équations différentielles linéaires ordinaires-Généralités

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(z)y^{(1)} + a_n(z)y = 0, \tag{1.1.1}$$

où $a_i(z)$ des fonctions rationnelles dans $\mathbb{C}(z)$, pour tout $i = 1, 2, ..., n$,
$y^{(j)} = \dfrac{d^j}{dz^j}(y)$: la $j - ème$ dérivée de y par rapport à z, avec $j = 1, 2, ..., n$.
Une telle équation est dite équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre n. L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, il reste inchangé si on multiplie l'équation (1.1.1) par un polynôme non nul dans $\mathbb{C}[z]$.
Ce polynôme peut être choisi de manière à obtenir une équation différentielle de la forme :

$$p_0(z)y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(z)y^{(1)} + p_n(z)y = 0, \tag{1.1.2}$$

avec les $p_i(z)$ sont des polynômes dans $\mathbb{C}[z]$ et leur plus grand commun diviseur égal à 1. Les $a_i(z)$ sont donc les $\dfrac{p_i(z)}{p_0(z)}$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.

Mais à quoi ressemble la solution ? Est-elle logarithmique, méromorphique, holomorphique ou polynomiale ? Cauchy a prouvé que les solutions sont localements holomorphes au voisinage de tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ qui n'est pas pôle des a_i. Ces points sont appelés les points réguliers. Sinon, ils sont dits singuliers, plus précisément

Définition 1.1.1 *Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dit régulier si les limites $\lim\limits_{z \to z_0} a_i(z)$ existent et sont finies pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Sinon, le point z_0 est dit singulier.*
Le point ∞ est dit régulier si les limites $\lim\limits_{z \to \infty} z^{2i} a_i(z)$ existent et sont finies pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

Remarque 1.1.1 *La définition d'un point singulier fini implique qu'un point singulier est un pôle d'au moins l'un des $(a_i(z))_{i=1,2,...,n}$, en particulier il doit être un zéro de $p_0(z)$. L'ensemble des zéros de $p_0(z)$ est fini, par conséquent, l'ensemble des points singuliers est fini.*

1.1.1 Classification des singularités

Commençons d'abord par introduire la notion de point singulier *apparent* ; terminologie que nous devons à T. Kimura, [Kim70] et très utile dans la suite, notamment dans le chapitre 3.

Définition 1.1.2 *Un point singulier $z_0 \in \mathbb{C}$ de l'équation* (1.1.1) *est dit apparent si, toute solution de* (1.1.1) *est uniforme, holomorphe ou méromorphe, au voisinage de z_0.*

Exemple 1.1.1 *L'équation différentielle*

$$y'' + \frac{2}{z} y' + y = 0, \qquad (E_2)$$

dont l'intégrale générale est $y(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, qui est prolongeable au voisinage de l'origine en une fonction holomorphe, admet l'origine pour point singulier apparent.

Exemple 1.1.2 *L'équation différentielle*

$$y' + \frac{1}{z} y = 0,$$

admet pour intégrale générale la fonction $y(z) = \dfrac{1}{z}$*, qui est une fonction uniforme, méromorphe au voisinage de l'origine. L'origine est donc un point singulier apparent pour cette équation.*

Définition 1.1.3 *Un point* $z_0 \in \mathbb{C}$ *est dit singulier régulier si toutes les limites* $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^i a_i(z)$ *existent et sont finies, pour tout* $i = 1, 2, ..., n$*, c'est à dire, si toutes les fonctions* $(z - z_0)^i a_i(z)$ *sont analytiques en* z_0*. Sinon, le point* z_0 *est dit singulier irrégulier.*
Le point ∞ *est dit singulier régulier si les limites* $\lim\limits_{z \to \infty} z^i a_i(z)$ *existent et finies pour tout* $i = 1, 2, ..., n$*.*

Remarque 1.1.2 *On peut ramener l'étude en un point* $z_0 \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ *à l'étude en* 0 *par un changement de variable.*
Si $z_0 \in \mathbb{C}$*, par une translation de la forme* $z \longmapsto z - z_0$*, on peut se ramener à une singularité à l'origine. La singularité à l'infinie peut être ramenée en zéro par le changement* $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$*.*
Dorénavant, on se placera en $0 \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$*.*

Il est possible maintenant de formuler le théorème de Cauchy mentionné précédemment, pour sa démonstration on se réfère à ([Poo36, page 5]).

Théorème de Cauchy *Soit* $0 \in P^1(\mathbb{C})$ *un point régulier pour l'équation* (1.1.1)*. Il existe* $n-$*solutions séries de Taylor linéairement indépendantes* $f_1, f_2, ..., f_n$ *de l'équation* (1.1.1)*, avec un rayon de convergence* ρ *strictement positif.*
De plus, toute solution série de Taylor au voisinage de 0 *est une combinaison linéaire de* $f_1, f_2, ..., f_n$*.*
Preuve (Voir [Poo36, page 5]). ■

Remarque 1.1.3 *La base des solutions au voisinage de l'origine est holomorphe.*

Théorème 1.1.1 *Les séries de Taylor peuvent être choisies de sorte que* $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f_i}{z^{i-1}}$ *soit finie et non nulle pour tout* $i = 1, 2, ..., n$*.*

1.1.2 L'opérateur d'Euler

Soit $0 \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ un point singulier régulier pour l'équation (1.1.1), et soit l'opérateur d'Euler $\theta = z\dfrac{d}{dz}$.

Lemme 1.1.1 *Il existe des entiers* $\alpha_{i,k} \in \mathbb{N}, \beta_{i,k} \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant i \leqslant k$ *tels que :*
$\forall k \geq 0, \theta^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} z^i \dfrac{d^i}{dz^i}$,
$\forall k \geq 0, z^k \dfrac{d^k}{dz^k} = \sum_{i=0}^{k} \beta_{i,k} \theta^i$,
$\forall k \geq 1, z^k \dfrac{d^k}{dz^k} = \theta(\theta - 1) \dots (\theta - k + 1)$.
De plus, $\forall k \geq 0, \alpha_{k,k} = \beta_{k,k} = 1$.

Preuve La troisième relation se démontre facilement par récurrence.

La deuxième relation découle de la première par résolution d'un système triangulaire.

Reste à prouver par récurrence la première, on prend d'abord $\alpha_{0,0} = 1$, puisque $\theta^0 = z^0 \dfrac{d^0}{dz^0}$.

Pour la récurrence, on compose à gauche par θ, d'où :

$$
\begin{aligned}
\theta^{k+1} &= \theta\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} z^i \partial^i\right), \quad \text{où } \partial = \frac{d}{dz} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} z \frac{d}{dz}\left(z^i \partial^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} z\left(i z^{i-1} \partial^i + z^i \partial^{i+1}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k}\left(i z^i \partial^i + z^{i+1} \partial^{i+1}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} z^{i+1} \partial^{i+1} + \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} i z^i \partial^i
\end{aligned}
$$

Avec la convention $\alpha_{i,k} = 0$ pour $i \notin \{0, 1, ..., k\}$ on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\theta^{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_{i-1,k} z^i \partial^i + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,k} i z^i \partial^i \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \left(\alpha_{i-1,k} + i\alpha_{i,k}\right) z^i \partial^i \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_{i,k+1} z^i \partial^i .
\end{aligned}
$$

On obtient donc la relation de récurrence :

$\forall k \geq 0, \forall i \in \{0, 1, ..., k\}, \alpha_{i,k+1} = \alpha_{i-1,k} + i\alpha_{i,k}$.

■

Soit

$$D = \partial^n + a_1\partial^{n-1} + ... + a_n,$$

avec $a_i \in \mathbb{C}(z)$ et $\partial = \dfrac{d}{dz}$, alors :

quitte à multiplier D par z^n, on peut écrire formellement :

$$\begin{aligned}
z^n D &= z^n\partial^n + (za_1) z^{n-1}\partial^{n-1} + ... + z^n a_n \\
&= \theta(\theta-1)...(\theta-n+1) + za_1\theta(\theta-1)...(\theta-n+2) + ... + z^n a_n \\
&= \theta^n + (za_1 - 1 - 2 - ... - n + 1)\theta^{n-1} + ... \\
&= \theta^n + \left(za_1 - \frac{n(n-1)}{2}\right)\theta^{n-1} + ... \\
&= \theta^n + b_1\theta^{n-1} + ... + b_{n-1}\theta + b_n.
\end{aligned}$$

D'où l'équation (1.1.1) peut être mise sous la forme :

$$\theta^n y + b_1(z)\theta^{n-1} y + ... + b_n(z) y = 0, \tag{1.1.3}$$

avec $b_i(z) \in \mathbb{C}(z), i \in \{1, 2, ..., n\}$.

1.1.3 Méthode de Frobenius pour résoudre une équation différentielle

Soit L un opérateur différentiel :

$$L = \sum_{i=0}^{n} b_i(z)\theta^{n-i}, \qquad b_0(z) = 1$$

avec $b_1(z), b_2(z), ..., b_n(z)$ des fonctions rationnelles.

Nous supposerons que cet opérateur présente une singularité régulière en 0, i.e les b_i sont holomorphes pour tout $i = 1, ..., n$. On pose

$$b_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} z^j, \quad 0 \leq i \leq n.$$

En particulier $b_{00} = 1$, $b_{0j} = 0$ $(j \geq 1)$.

La méthode de Frobenius consiste à rechercher des solutions de l'équation différentielle $L(y) = 0$ sous la forme,

$$y = z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k \ , \qquad g_0 = 1$$

En appliquant l'opérateur L à la série formelle y, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
L(y) &= \sum_{i=0}^{n} b_i(z)\, \theta^{n-i} \left(z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} z^j \theta^{n-i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{\mu+k} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} z^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k)^{n-i} g_k z^{\mu+k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(b_{ij} (\mu+k)^{n-i} g_k z^{\mu+k+j} \right) \\
&= z^{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} b_{i,m-k} (\mu+k)^{n-i} g_k \right) z^m, \qquad \text{où : } m = k + j
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
f_j(\mu) &= \sum_{i=0}^{n} b_{ij} \mu^{n-i}, \ j \geq 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \mu^{n-i}, \ b_{0j} = 0 \qquad \text{pour } j \geq 1 \\
f(\mu) &= f_0(\mu) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,0} \mu^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i(0)\, \mu^{n-i} \\
R_0 &:= 0 \\
R_m &:= R_m(g_1, g_2, ..., g_{m-1}, \mu) := \sum_{k=0}^{m-1} f_{m-k}(\mu+k)\, g_k \ , \ m \geq 1
\end{aligned}$$

D'où :

$$L(y) = z^{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(R_m + f(\mu+m)\, g_m \right) z^m.$$

$y(z, \mu)$ satisfera l'équation $L(y) = 0$ si les g_m vérifient les relations :

$f(\mu+m)\, g_m + R_m = 0, \qquad$ pour tout $m \geq 0$

Cela se traduit par le système triangulaire (S)

$$(S)\begin{cases} f_0(\mu)\,g_0 = 0 \\ f_0(\mu+1)\,g_1 + f_1(\mu)\,g_0 = 0 \\ \ldots \\ f_0(\mu+m-1)\,g_{m-1} + \ldots + f_m(\mu+1)\,g_1 + f_{m-1}(\mu)\,g_0 = 0 \\ f_0(\mu+m)\,g_m + g_{m-1}f_1(\mu+m-1) + \ldots + g_0 f_m(\mu) = 0 \end{cases}$$

et le système d'équations récurrentes :

$$(P) \qquad g_i f_0(\mu+i) + \ldots + g_{i-m} f_m(\mu+i-m) = 0, \qquad \text{pour } i > m$$

L'équation $f_0(\mu+1)\,g_1 + f_1(\mu)\,g_0 = 0$ conduit à prendre pour la valeur de g_1 la valeur suivante :

$$g_1 = -g_0 \frac{f_1(\mu)}{f_0(\mu+1)},\ g_0 \neq 0$$

Notons que μ étant pour le moment une indéterminée, g_1 est alors une fraction rationnelle en μ. Ainsi, de proche en proche on peut déterminer formellement $g_1, g_2, \ldots, g_m$ qui sont des fractions rationnelles en μ, et à partir de l'équation récurrente (P) on détermine tous les g_i pour $i \geq m$. Reste alors :

$$L\left(z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k\right) = g_0 f_0(\mu)\, z^\mu = 0,\ g_0 \neq 0.$$

On déduit que μ doit être une racine de l'équation $f_0(\mu) = 0$, appelée équation indicielle de l'opérateur différentiel L en la singularité 0.

1.1.4 Description des solutions

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ les solutions de l'équation indicielle $f_0(\mu) = 0$. Supposons que $\mathrm{Re}(\mu_1) > \mathrm{Re}(\mu_2) > \ldots > \mathrm{Re}(\mu_n)$, alors $f_0(\mu_1 + m) \neq 0$ pour $m \geq 1$, donc $y(z, \mu_1)$ est solution de l'équation $L(y) = 0$.

Nous supposerons dans la suite que $n = 2$.

Nous dirons que nous sommes dans le cas générique si μ_1 et μ_2 ne diffèrent pas d'un entier. Dans ce cas $y_1(z) = y(z, \mu_1)$ et $y_2(z) = y(z, \mu_2)$ sont deux solutions linéairement indépendantes.

Pour le cas non générique i.e. $(\mu_1 - \mu_2) \in \mathbb{N}$:

Nous distinguons d'abord le cas $\mu_1 = \mu_2$. Dans ce cas nous avons une première solution $y_1 = y(z, \mu_1)$ et pour obtenir une deuxième solution, on dérive par rapport à μ les deux membres de l'équation $L(y(z,\mu)) = f_0(\mu)\, g_0 z^{\mu}$.

Ce qui donne :

$$L\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) = z^{\mu} g_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mu}(\mu) + z^{\mu} f_0(\mu)\, g_0 \log(z).$$

Comme μ_1 est solution double de f_0 :

$$f_0(\mu_1) = \frac{\partial f_0}{\partial \mu}(\mu_1) = 0,$$

alors $L\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)|_{\mu=\mu_1} = 0$, i.e. $\frac{\partial y}{\partial \mu}|_{\mu=\mu_1}$ est donc la deuxième solution recherchée.

Concrètement, en posant

$$y(z,\mu) = z^{\mu}\sum_{i=0}^{\infty} g_i(\mu)\, z^i$$

et en dérivant par rapport à μ, nous aurons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mu} y(z,\mu) &= z^{\mu}\log z \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\mu)\, z^i + z^{\mu}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \mu} g_i(\mu)\, z^i \\ &= y(z,\mu)\log z + z^{\mu}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial g_i}{\partial \mu}(\mu)\, z^i\end{aligned}$$

$y_2(z,\mu_1) = \frac{\partial}{\partial \mu} y(z,\mu)|_{\mu=\mu_1} = y(z,\mu_1)\log z + z^{\mu_1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \mu} g_i(\mu_1)\, z^i$, est une solution de l'équation $L(y) = 0$.

Le terme logarithmique dans $y_2(z)$ garantit l'indépendance linéaire des deux solutions $y_1(z)$ et $y_2(z)$.

Supposons maintenant que $(\mu_1 - \mu_2) \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas nous avons une première solution $y_1 = y(z,\mu_1)$, g_0 étant arbitraire nous pouvons le choisir sous la forme :

$$g_0 = (\mu - \mu_2)\, C_0,\ \ C_0 \neq 0$$

L'équation $L(y) = g_0 f_0(\mu)\, z^{\mu}$ s'écrit alors :

$$L(y) = (\mu - \mu_2)\, C_0 f_0(\mu)\, z^{\mu},$$

Remarquons que μ_2 est racine double de $(\mu - \mu_2)\, f_0(\mu)$, nous dérivons par rapport à μ la dernière équation :

$$L\left(\frac{\partial}{\partial \mu} y(z,\mu)\right) = C_0(f_0(\mu)\, z^{\mu} + f_0'(\mu)(\mu - \mu_2)\, z^{\mu} + \big(\mu - \mu_2) f_0(\mu)\, z^{2\mu}\log z\big),$$

Nous remplaçons μ par μ_2, nous aurons :

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\mu}y\left(z,\mu\right)\right)\left|_{\mu=\mu_2}\right. = 0$$

Cela signifie que $\frac{\partial}{\partial\mu}y\left(z,\mu\right)\left|_{\mu=\mu_2}\right.$ est une deuxième solution de $L\left(y\right)=0$:

$$y_2\left(z\right)=\frac{\partial}{\partial\mu}y\left(z,\mu\right)\left|_{\mu=\mu_2}\right. = z^{\mu_2}\left(\log z\right)\sum_{i=0}^{+\infty}g_i\left(\mu_2\right)z^i+z^{\mu_2}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\mu}g_i\left(\mu\right)\left|_{\mu=\mu_2}\right. z^i.$$

1.1.5 L'équation indicielle

Définition 1.1.4 $f_0\left(\mu\right)=0$ *s'appelle l'équation indicielle de l'opérateur différentiel* L *en la singularité* 0 *dont les racines sont appelées exposants en* 0.
Le membre gauche de l'équation indicielle est appelé l'indice polynomial.

Définition 1.1.5 *Soit* $z_0\in\mathbb{C}$ *un point singulier régulier pour l'équation* (1.1.1). *On définit* $\alpha_i=\lim\limits_{z\to z_0}\left(z-z_0\right)^i a_i\left(z\right)$, $i\in\{1,2,...,n\}$. *L'équation indicielle de l'équation* (1.1.1) *en* z_0 *est donnée par :*

$$X\left(X-1\right)...\left(X-n+1\right)+\alpha_1X\left(X-1\right)...\left(X-n+2\right)+...+\alpha_{n-1}X+\alpha_n=0.$$

Si ∞ *est un point régulier ou singulier régulier, alors l'équation indicielle de* (1.1.1) *en* ∞ *est donnée par :*

$$X\left(X+1\right)...\left(X+n-1\right)-\alpha_1X\left(X+1\right)...\left(X+n-2\right)+...+\left(-1\right)^{n-1}\alpha_{n-1}X+\left(-1\right)^n\alpha_n=0,$$

où $\alpha_i=\lim\limits_{z\to\infty}z^ia_i(z)$ *pour* $i\in\{1,2,...,n\}$.

Donnons maintenant quelques résultats qui nous seront utiles par la suite.
L'opérateur θ satisfait la relation :

$$\theta^kz^\mu=\mu z^\mu\ ,\ \forall k=1,2,...,n$$

L'expression $L\left(z^\mu\right)=0$ est égale à :

$$z^\mu\left(\mu^n+b_1\left(z\right)\mu^{n-1}+...+b_{n-1}\left(z\right)\mu+b_n\left(z\right)\right)=0,$$

l'équation indicielle de L en 0 est alors donnée par :

$$X^n + b_1(0) X^{n-1} + ... + b_{n-1}(0) X + b_n(0) = 0.$$

Si l'on veut étudier l'équation en ∞, on opère le changement de variable $z = \dfrac{1}{t}$ et en tenant compte de la remarque :

$$\theta_t := t\frac{d}{dt} = -\theta,$$

l'équation (1.1.3) se transforme au signe près à :

$$\theta^n - b_1\left(\frac{1}{t}\right)\theta^{n-1} + ... + (-1)^n b_n\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

l'équation caractéristique en ∞ est donc :

$$X^n - b_1(0) X^{n-1} + ... + (-1)^{n-1} b_{n-1}(0) X + (-1)^n b_n(0) = 0.$$

Proposition 1.1.1 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si on remplace y par $(z - z_0)^{\mu} y$ $(\mu \in \mathbb{C})$ dans l'équation* (1.1.1)*, alors les exposants caractéristiques seront diminués de μ en z_0. Ceux en ∞ seront augmentés de μ, et ailleurs restent inchangés.*

Soit $0 \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ un point régulier pour l'équation $L(y) = 0$. Il existe, d'après le théorème de Cauchy, $f_1, f_2, ..., f_n$, n-solutions holomorphes tels que :

$f_1(z) = z^0 g_1(z),$

$f_2(z) = z^1 g_2(z),$

...

$f_n(z) = z^{n-1} g_n(z),$

où $g_1, g_2, ..., g_n$ sont des séries holomorphes en z de rayon de convergence $\rho > 0$, $g(0) \neq 0$. Donc les exposants en 0 sont $0, 1, ..., n-1$, qui sont des solutions de l'équation indicielle $X(X-1)...(X-n+1) = 0$.

Proposition 1.1.2 *L'indice polynomial en un point régulier est donné par $X(X-1)...$ $(X-n+1)$.*

Remarque 1.1.4 *La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple donné par l'équation différentielle $y'' - \dfrac{1}{z}y = 0$, dont 0 est un point singulier régulier d'exposants 0 et 1.*

Si 0 est un point singulier apparent alors, les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Tous les exposants en 0 sont entiers,

(2) La singularité 0 n'est pas logarithmique.

Inversement, si (1) et (2) sont vérifiées alors, 0 est un point singulier apparent.

Définition 1.1.6 *Un exposant μ est dit non résonnant si aucun $\mu + i$, $i \in \mathbb{N}^*$ n'est un exposant. Autrement dit, si aucun $\mu + i$, $i \in \mathbb{N}^*$ n'est racine de l'équation indicielle. Dans ce cas, $g_1, g_2, ...$, peuvent être déterminés d'une manière unique en fonction de g_0.*

Théorème de Fuchs *Soit $0 \in P^1(\mathbb{C})$ un point singulier régulier pour l'équation (1.1.1). Supposons que μ soit un exposant en 0 telle que $f(\mu + i) \neq 0$, $i \geq 1$. Alors, il existe une série de puissances holomorphe $y(z)$ en z avec $y(0) \neq 0$ telle que $z^\mu y(z)$ soit une solution de l'équation (1.1.1).*

Preuve (Voir [Poo36, V§16 - 17]). ■

1.1.6 Condition de croissance modérée dans les secteurs

Définition 1.1.7 *Soit $\triangle_\epsilon^* = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < \epsilon\}$ et soit $\tilde{\triangle}_\epsilon^*$ son revêtement universel. On dit qu'une fonction $f : \tilde{\triangle}_\epsilon^* \longrightarrow \mathbb{C}$ est à croissance modérée (où polynomiale) si :*
$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \exists N > 0$ *telle que :* $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ \theta_1 < \arg z < \theta_2}} z^N |f(z)| = 0.$

Proposition 1.1.3 *-Fuchs*
L'équation (1.1.1) est singulière régulière en 0 si, et seulement si dans tout secteur de sommet 0 il existe une base de solutions de l'équation (1.1.1) à croissance modérée.

Preuve (Voir [Inc44, §15.3],[Poo36, IV§15]). ■

1.2 Les équations différentielles fuchsiennes

Cette partie du chapitre est consacrée aux équations différentielles linéaires ayant seulement des points réguliers ou singuliers réguliers.

Définition 1.2.1 *On dit qu'une équation différentielle linéaire est fuchsienne ou de Fuchs si tout point de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ est au plus singulier régulier.*

Pour une équation de Fuchs donnée, il existe une relation entre son degré et la somme de tout ses exposants, elle est connue par la *relation de Fuchs*.

Théorème 1.2.1 ***(relation de Fuchs)***
Soit α un point de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$. $\rho_1(\alpha), \rho_2(\alpha), ..., \rho_n(\alpha)$ les exposants en α d'une équation différentielle fuchsienne d'ordre n, alors on a :

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})} \left(\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + ... + \rho_n(\alpha) - \binom{n}{2} \right) = -2\binom{n}{2},$$

où $\binom{n}{2} = 1 + 2 + ... + (n-1)$.

Preuve Notons que la somme dans le théorème est en effet finie.
Soit α dans $\mathbb{C}$, la somme des exposants $(\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + ... + \rho_n(\alpha))$ est égale, au signe près, au coefficient de X^{n-1} dans l'équation indicielle :

$$\begin{aligned} \rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + ... + \rho_n(\alpha) &= -(-1 - 2 - ... - (n-1) + \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha)\, a_1(z)) \\ &= \binom{n}{2} - \underset{\alpha}{res}(a_1(z)) \end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{C}} \left(\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + ... + \rho_n(\alpha) - \binom{n}{2} \right) = -\sum_{\alpha \in \mathbb{C}} (\underset{\alpha}{res}(a_1(z))) \tag{1.2.1}$$

avec $\underset{\alpha}{res}(a_1(z))$ désigne le résidu de $a_1(z)$ en α.
De la même manière, la somme des exposants en ∞ est :

$$\begin{aligned} \rho_1(\infty) + \rho_2(\infty) + ... + \rho_n(\infty) &= -\binom{n}{2} - \underset{\infty}{res}(a_1(z)) \\ \rho_1(\infty) + \rho_2(\infty) + ... + \rho_n(\infty) - \binom{n}{2} &= -2\binom{n}{2} - \underset{\infty}{res}(a_1(z)) \qquad (1.2.2) \end{aligned}$$

(1.2.1) et (1.2.2), on a :

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})} \left(\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + ... + \rho_n(\alpha) - \binom{n}{2} \right) = -2\binom{n}{2} - \sum_{\alpha \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})} \underset{\alpha}{res}(a_1(z))$$

or la somme des résidus sur $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ est nulle : $\sum_{\alpha \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})} \underset{\alpha}{res}(a_1(z)) = 0$,
Donc :

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})} \left(\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + ... + \rho_n(\alpha) - \binom{n}{2} \right) = -2\binom{n}{2}.$$

■

Lemme 1.2.1 *L'équation différentielle :*

$$\theta^n y + b_1(z)\,\theta^{n-1} y + ... + b_n(z)\, y = 0,$$

est singulière régulière en 0 *si, et seulement si les* $b_i(z)\,(1 \leq i \leq n)$ *sont holomorphes en* 0.

Proposition 1.2.1 ***(caractérisation des équations de Fuchs)***

L'équation (1.1.1) *est fuchsienne avec des points singuliers réguliers en* $z_1, z_2, ..., z_m, z_{m+1} = \infty$, *si et seulement si les coefficients* $a_i(z)$, *sont de la forme suivante :*

$$a_i(z) = \frac{p_i(z)}{\prod_{j=1}^{m} (z - z_j)^i},\ i = 1, 2, ..., n,$$

dont chaque p_i *est un polynôme de degré au plus égal à* $(m-1)\,i$.

Preuve (Voir [Kim91, page 11]). ■

Définition 1.2.2 ***(le schéma de Riemann)***

Les points singuliers réguliers $z_1, z_2, ..., z_{m+1}$ *ainsi que leurs exposants associés* $\mu_i^1, \mu_i^2, ..., \mu_i^n$ *en* z_i *sont regroupés et représentés dans une table appelée le schéma de Riemann de l'équation* (1.1.1).

$$\begin{pmatrix} z_1 & ... & z_{m+1} \\ \mu_1^1 & ... & \mu_{m+1}^1 \\ ... & ... & ... \\ \mu_1^n & ... & \mu_{m+1}^n \end{pmatrix}$$

Le schéma de Riemann

Théorème 1.2.2 ***(critère de croissance de Fuchs)***

L'équation différentielle (1.1.3) *admet une base de solutions à croissance modérée si, et seulement si elle est fuchsienne, i.e les* b_i *sont holomorphes en* 0.

1.2.1 Exemples

1) L'équation homogène d'Euler

Définition 1.2.3 *L'équation différentielle fuchsienne de la forme :*

$$z^n y^{(n)} + c_1 z^{n-1} y^{(n-1)} + ... + c_{n-1} z y^{(1)} + c_n y = 0, \tag{1.2.3}$$

avec $c_1, c_2, ..., c_n$ *sont des constantes dans* $\mathbb{C}$*, est appelée équation homogène d'Euler ou équation d'Euler d'ordre* n*.*

Proposition 1.2.2 *L'équation* (1.2.3) *possède exactement deux points singuliers réguliers :* 0 *et* ∞*.*

Une base de l'espace des solutions en 0 *de l'équation* (1.2.3) *est donnée de la manière suivante:*

si ρ *est un exposant en* 0 *de multiplicité* r*, alors on a* r*-solutions linéairement indépendantes* $z^{\rho}, z^{\rho}\log(z), ..., z^{\rho}\log^{r-1}(z)$*. De telles solutions existent pour chaque exposant* ρ*, l'ensemble donne une base de l'espace des solutions de dimension* n*.*

2) L'équation hypergéométrique de Gauss

L'étude détaillée de l'équation hypergéométrique de Gauss sera reprise dans le chapitre 2.

Définition 1.2.4 *L'équation différentielle fuchsienne définie par :*

$$z\,(z-1)\,y^{''} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)\,z)\,y^{'} - \alpha\beta y = 0, \qquad \text{(Gau)}$$

est appelée équation hypergéométrique de Gauss,
où : α, β *et* γ *sont des nombres complexes et* $' := \dfrac{d}{dz}$*.*
Elle admet $0, 1$ *et* ∞ *pour points singuliers réguliers.*

1.3 Les solutions algébriques

Définition 1.3.1 *On dit qu'une fonction* f *est algébrique sur* $\mathbb{C}\,(z)$*, si elle satisfait une équation polynomiale irréductible en* T *:*

$$T^m + c_1\,(z)\,T^{m-1} + ... + c_m\,(z) = 0,$$

avec $c_1\,(z)\,, ..., c_m\,(z)$ *des coefficients dans* $\mathbb{C}\,(z)$*, et* m *un entier dans* $\mathbb{N}$*.*

Problème 1.3.1 *Dans quel cas une équation différentielle linéaire admet* n *solutions algébriques linéairement indépendantes ?*

Une réponse partielle à ce problème est donnée dans la conjecture de Grothendieck.

1.3.1 La conjecture de Grothendieck

Considérons un opérateur différentiel linéaire :

$$G(y) = y^{(n)} + a_1(z)\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(z)\, y^{(n)} + a_n(z)\, y,$$

avec : $a_i(z) \in \mathbb{Q}(z), i = 1, 2, ..., n.$

Soit p un nombre premier, notons $a_{i,p}(z)$ la réduction modulo p des $a_i(z)$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Les $a_{i,p}$ appartiennent au corps $F_p(z)$ des fonctions rationnelles sur le corps à p éléments F_p.

La réduction de G modulo p induit un autre opérateur qu'on note $G_p(y)$; c'est un opérateur différentiel linéaire sur $F_p(z)$. La conjecture de Grothendieck consiste à faire le lien entre les solutions de $G(y) = 0$ et celles de $G_p(y) = 0$.

Conjecture de Grothendieck *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(1) *L'équation $G(y) = 0$ admet n-solutions linéairement indépendantes* (sur $\mathbb{Q}$) $y_1, y_2, ..., y_n$, *algébriques sur $\mathbb{Q}(z)$.*
(2) *L'équation $G_p(y) = 0$ admet n-solutions linéairement indépendantes (sur le corps $F_p(z^p)$) dans $F_p(z)$.*

Preuve L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) est vraie, (voir [Vdp]).
La validité de l'implication inverse reste un problème ouvert, toutefois, elle est vraie pour l'équation de Picard-Fuchs, (voir [Kat72]). ■

Théorème 1.3.1 *-Puiseux*
Soit $P(T) = T^m + c_1(z)T^{m-1} + ... + c_m(z)$ un polynôme irréductible de degré m sur $\mathbb{C}(z)$, alors $\mathbb{C}\{\{\sqrt[m]{z}\}\}$ est le corps de décomposition de $P(T)$ sur $\mathbb{C}\{\{z\}\}$.

Preuve (Voir [For81]). ■

Proposition 1.3.1 *Supposons que l'équation* (1.1.1) *possède que des solutions algébriques, alors elle est fuchsienne et ses exposants caractéristiques sont rationnels.*

Preuve Soit $y(z)$ une solution algébrique de l'équation différentielle (1.1.1) au voisinage de l'origine. Il s'en suit du théorème de Puiseux (théorème (1.3.1)) qu'il existe un entier $N > 0$

telle que : $y(z) = O\left(z^N\right)$, l'origine est alors un point singulier régulier (voir proposition (1.1.3)). Par conséquent, l'équation (1.1.1) est fuchsienne.

Reste à prouver que tous ses exposants sont rationnels. En effet, soit ρ un exposant de l'équation (1.1.1) en la singularité 0 de telle sorte aucun autre exposant λ en 0 ne diffère de ρ d'un entier. i.e $(\lambda - \rho) \notin \mathbb{N}^*$.

La solution $y(z)$ s'écrit formellement au voisinage de 0 : $y(z) = z^\rho g(z)$, où g est une série holomorphe en $z, g(0) \neq 0$ (voir théorème de Fuchs).

L'extension $\mathbb{C}\{\{z\}\}(y(z)) = \dfrac{\mathbb{C}\{\{z\}\}(z^\rho)}{\mathbb{C}\{\{z\}\}}$, est une extension algébrique de $\mathbb{C}\{\{z\}\}$ (appelée extension par adjonction), donc finie. Si ρ est irrationnel, l'extensiosn est infinie, ce qui est en contradiction avec $y(z)$ algébrique.

En concluion, ρ est rationnel et chaque exposant en 0 qui diffère de ρ d'un entier est aussi rationnel. ■

1.4 Le déterminant Wronskien

Définition 1.4.1 *Soit $f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes dans un ouvert non vide V de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$. Le déterminant wronskien, noté W, de $f_1, f_2, ..., f_n$ est défini par :*

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant wronskien $W(f_1, f_2, ..., f_n)$ exprime s'il existe ou non une relation $\mathbb{C}$-linéaire entre les fonctions $f_1, f_2, ..., f_n$. Plus précisément, si V est connexe alors une telle relation existe si, et seulment si le wronskien $W(f_1, f_2, ..., f_n)$ est nul, (voir [Poo36, §1.4]).

Supposons que $f_1, f_2, ..., f_n$ est une base de solutions de l'équation (1.1.1). Le wronskien $W(f_1, f_2, ..., f_n)$ est un outil très utile pour détecter l'indépendance linéaire des solutions. Soit $\triangle_i$ le déterminant $\triangle_i(f_1, f_2, ..., f_n)$ de la matrice d'ordre $n \times n$ obtenue en supprimant la colonne de la $i-ème$ dérivée dans la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & ... & f_n^{'} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & ... & f_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

alors, $W(y, f_1, f_2, ..., f_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \triangle_i y^{(i)}$. Le coefficient de la $n-ème$ dérivée $y^{(n)}$ est $(-1)^n \triangle_n$, il est non nul car $\triangle_n$ est le wronskien de $f_1, f_2, ..., f_n$. D'où :

$$a_0(z) = (-1)^n \triangle_n.$$

Et pour les autres coefficients on déduit que :

$$a_{n-i}(z) = (-1)^{n-i} \frac{\triangle_i}{\triangle_n} \quad , \ i = 1, 2, ..., n,$$

d'où la proposition suivante :

Proposition 1.4.1 *Les coefficients $a_i(z)$ des dérivées dans l'équation* (1.1.1) *satisfont la relation :*

$$a_{n-i}(z) = (-1)^{n-i} \frac{\triangle_i}{\triangle_n},$$

pour tout $i = 1, 2, ..., n$.
En particulier :

$$a_1(z) = \frac{-\triangle_{n-1}}{\triangle_n}$$

D'où :

$$a_1(z) = \frac{-W^{'}(f_1, f_2, ..., f_n)}{W(f_1, f_2, ..., f_n)}.$$

Proposition 1.4.2 ***(la formule d'Abel-Liouville)***
Soit z_0 dans $\mathbb{C}$, on a :

$$W(f_1, f_2, ..., f_n)(z) = W(f_1, f_2, ..., f_n)(z_0) \exp(-\int_{z_0}^{z} a_1(t)\, dt).$$

Cette dernière est appelée la formule d'Abel-Liouville.

Théorème 1.4.1 *-Heine*
Soit l'équation différentielle linéaire suivante :

$$y^{''}(z) + p(z)\, y^{'}(z) + q(z)\, y(z) = 0, \tag{1.4.1}$$

et soient f_1 et f_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(1.4.1)$ *, alors on a l'équivalence entre :*
f_1 et f_2 sont algébriques si, et seulement si $W(f_1, f_2)(z)$ et $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(z)$ les sont aussi.

Preuve Soient f_1 et f_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.4.1).
Supposons que f_1 et f_2 sont algébriques, alors la dérivée $f_1^{'}, f_2^{'}$ et $\frac{f_1}{f_2}$ sont aussi algébriques.
On en déduit que $W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1^{'} & f_2^{'} \end{vmatrix} = f_1 f_2^{'} - f_1^{'} f_2$ est algébrique.
Inversement, si $W(f_1, f_2)$ et $\frac{f_1}{f_2}$ sont algébriques alors la dérivée $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{'}$ est algébrique.
De la relation $f_2^2 = \dfrac{W(f_1, f_2)}{\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{'}}$ on déduit que f_2 est algébrique.
De plus, $f_1 = f_2 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)$, comme $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ et f_2 sont algébriques cela implique que f_1 l'est aussi.
■

1.5 Les solutions algébriques de l'équation hypergéométrique

Dans son article [Sch73], H.A.Schwarz $(1843 - 1921)$ déduisait les conditions pour lesquelles l'équation hypergéométrique (Gau) soit algébrique.

Théorème 1.5.1 *L'équation hypergéométrique* (Gau) *admet une base de solutions algébriques (y_1, y_2) si, et seulement si le quotient $\frac{y_1}{y_2}$ est algébrique et α, β et γ sont rationnels.*

Preuve Soit (y_1, y_2) une base de solutions de l'équation hypergéométrique (Gau).
Les exposants caractéristiques de l'équation hypergéométrique en 0 sont 0 et $1 - \gamma$. Ceux en ∞ sont α et β. En vertu de la proposition (1.3.1), les nombres α, β et γ sont rationnels si, y_1 et y_2 sont algébriques. Dans ce cas, le quotient $\frac{y_1}{y_2}$ est évidemment aussi une fonction algébrique.

Inversement, supposons que les nombres α, β et γ sont rationnels et que le quotient $\dfrac{y_1}{y_2}$ est algébrique.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, d'après la formule d'Abel-Liouville, le wronskien de y_1 et y_2 est :

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(z) &= C \exp\left(\int_{z_0}^{z} \frac{(\alpha+\beta+1)\,t-\gamma}{t\,(t-1)} dt\right) \\ &= C \exp\left(\int_{z_0}^{z} \frac{-\gamma}{t} + \frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{t-1} dt\right) \\ &= Dz^{-\gamma}\,(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta-1} \end{aligned}$$

où l'on a posé $C = W\,(y_1, y_2)\,(z_0)$ et $D = Cz_0^{\gamma}\,(z_0-1)^{1+\alpha+\beta-\gamma} \in \mathbb{C}$.

$W(y_1, y_2)$ est une fonction algébrique sur $\mathbb{C}\,(z)$, car $-\gamma$ et $\gamma-\alpha-\beta-1$ sont rationnels. Finalement, le théorème de Hein (1.4.1) complète la démonstration. ■

Chapitre 2

L'équation hypergéométrique de Gauss

2.1 Introduction

L'exemple principal dans la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires à points singuliers réguliers d'une variable complexe est sans aucun doute l'équation différentielle hypergéométrique

$$z\,(z-1)\,\frac{d^2y}{dz^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)\,z)\,\frac{dy}{dz}-\alpha\beta y=0, \qquad \text{(Gau)}$$

qui est une forme normalisée de Gauss, avec trois points singuliers réguliers dans la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$(on considère le point à l'infini dans la sphère de Riemann comme une singularité).
L'ensemble des travaux réalisés sur cette équation par Euler, Gauss, Kummer et essentiellement par Riemann ont inspiré Fuchs $(1833-1902)$ à concevoir le concept de la singularité régulière des équations différentielles ordinaires dans le domaine complexe. Depuis la théorie de Fuchs, les équations différentielles ont été développées dans diverses directions, par exemple, l'expression des solutions en des points singuliers, l'étude de la relation entre un système fondamental de solutions en un point singulier et un autre point singulier (problème de connexion), l'étude de la monodromie des équations différentielles linéaires et la construction des équations différentielles linéaires pour une monodromie assignée (problème

de Riemann-Hilbert).

La théorie a été aussi développée pour différentes classes d'équations de Fuchs, par exemple, les équations de Jordan-Pochhammer, les équations hypergéométriques généralisées ${}_pF_q$ et les équations hypergéométriques à plusieurs variables.

L'équation hypergéométrique de Gauss apparaît dans différentes situations comme, dans la théorie des applications conformes, la théorie des représentations d'algébres de Lie et la théorie des équations aux $q-$différences.

Le présent chapitre est entièrement dévoué à la discussion des différents aspects de l'équation hypergéométrique ainsi que ses solutions.

2.2 L'équation de Riemann

Définition 2.2.1 ***(l'équation de Riemann)***

L'équation de Riemann ; étant une équation de Fuchs du second ordre ayant trois points singuliers réguliers a_1, a_2, a_3 *dans la sphère de Riemann* $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, *et soit le schéma de Riemann suivant*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{2.2.1}$$

où : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ *sont des nombres complexes satisfont la relation de Fuchs :*

$$\sum_{i=1}^{3} (\alpha_i + \beta_i) = 1. \tag{2.2.2}$$

Proposition 2.2.1 *Pour tout schéma de Riemann* (2.2.1), *il existe une seule et unique équation de Riemann* $E(a, \alpha, \beta)$ *admettant* a_1, a_2, a_3 *pour points singuliers réguliers ainsi que les exposants* $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)$ *respectivement.*

Preuve Supposons que $a_3 = \infty$ et appliquons le résultat de la proposition (1.2.1) du chapitre (1). Une équation de Fuchs à trois points singuliers réguliers $\{a_1, a_2, \infty\}$ étant de la forme :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + q_1(z)\frac{du}{dz} + q_2(z)u = 0, \tag{2.2.3}$$

où :

$$q_1 = \frac{p_1}{(z-a_1)(z-a_2)}, \qquad q_2 = \frac{p_2}{(z-a_1)^2 (z-a_2)^2}$$

et p_1, p_2 étant deux polynômes en z de degré ≤ 2. Ainsi,

$$q_1(z) = \frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} \ , A_1, A_2 \in \mathbb{C}$$

$$q_2(z) = \frac{B_1}{(z-a_1)^2} + \frac{B_2}{(z-a_2)^2} + \frac{B_3}{(z-a_1)(z-a_2)}, \ B_1, B_2, B_3 \in \mathbb{C}$$

Les équations caractéristiques relatives aux trois points a_1, a_2 et ∞ sont données par :

$$\begin{aligned} s^2 + (A_1 - 1)s + B_1 &= 0, \\ s^2 + (A_2 - 1)s + B_2 &= 0, \\ s^2 + (-A_1 - A_2 + 1)s + B_1 + B_2 + B_3 &= 0, \end{aligned}$$

respectivement. Les exposants (α_i, β_i) en $a_i \, (i = 1, 2, 3)$ sont, par définition, solutions des trois équations quadratiques ci-dessus, par conséquent :

$$\begin{aligned} A_1 - 1 &= -\alpha_1 - \beta_1, & B_1 &= \alpha_1 \beta_1, \\ A_2 - 1 &= -\alpha_2 - \beta_2, & B_2 &= \alpha_2 \beta_2, \\ -A_1 - A_2 + 1 &= -\alpha_3 - \beta_3, & B_1 + B_2 + B_3 &= \alpha_3 \beta_3. \end{aligned}$$

La relation de Fuchs (2.2.2) permet de déterminer les constantes A_i et B_i d'une façon unique, en conséquence l'équation de Riemann (2.2.3) entièrement définie par les points a_i et les exposants $(\alpha_i, \beta_i) \, (i = 1, 2, 3)$ est unique.
Lorsque $a_3 \neq \infty$, on opère le changement de variable fractionnel $z \longmapsto \dfrac{1}{z - a_3}$ pour renvoyer a_3 sur ∞. ■

L'importance de l'étude de cette équation prend origine dans le théorème suivant, que l'on doit à Papperitz.

Théorème 2.2.1 -*Papperitz* [1889]
Toute équation différentielle linéaire homogène du seccond ordre ayant trois singularités régulières (y compris le point à l'infini), peut être transformée en l'équation hypergéométrique du second ordre.

Preuve La démonstration de ce théorème se compose de deux parties. D'abord, nous allons construire une équation du second ordre qui vérifie l'énoncé du théorème.
Posons
$$\frac{d^2y}{dz^2}+f(z)\frac{dy}{dz}+g(z)\,y=0, \tag{2.2.4}$$
cette équation et notons a_1, a_2, a_3 trois points distincts, finis, singuliers réguliers pour l'équation (2.2.4) d'exposants respectifs $(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2),(\gamma_1,\gamma_2)$.
$f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes en tout point de $\mathbb{C}-\{a_1,a_2,a_3\}$. Si l'on pose $z=\frac{1}{t}$, on obtient l'équation
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t^4}g\left(\frac{1}{t}\right)y=0,$$
qui doit être singulière réguliére en $t=0$, il s'ensuit que, $2z-z^2f(z)$ et $z^4g(z)$ doivent être analytiques en ∞. L'équation (2.2.4) est donc fuchsienne et ses coefficients $f(z)$ et $g(z)$ s'écrivent alors sous la forme :

$$f(z)=\frac{p(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)},\qquad g(z)=\frac{q(z)}{(z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2}$$

où : $p(z)$ et $q(z)$ étant deux polynômes de degré au plus égal à 2.
D'où :
$$f(z)=\frac{A}{z-a_1}+\frac{B}{z-a_2}+\frac{C}{z-a_3},\quad A+B+C=2$$
et
$$(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\,g(z)=\frac{D}{z-a_1}+\frac{E}{z-a_2}+\frac{F}{z-a_3}.$$

L'équation caractéristique en a_1 est donnée par : $s^2+(1-A)\,s+\dfrac{D}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=0$, comme α_1 et α_2 sont racines de cette équation, alors :

$$\alpha_1+\alpha_2=1-A,\ \text{ et } \alpha_1.\alpha_2=\frac{D}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)},$$

donc :

$$A=1-\alpha_1-\alpha_2,\ D=\alpha_1\alpha_2(a_1-a_2)(a_1-a_3),$$

de même :
$$\begin{aligned} B=&\ 1-\beta_1-\beta_2, & E=&\ \beta_1\beta_2(a_2-a_1)(a_2-a_3),\\ C=&\ 1-\gamma_1-\gamma_2, & F=&\ \gamma_1\gamma_2(a_3-a_1)(a_3-a_2).\end{aligned}$$

La condition $A+B+C=2$, permet de tirer une relation entre les exposants : $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1$, dite *relation de Fuchs*.

L'équation désirée prend alors la forme suivante :

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-a_1}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-a_2}+\frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{z-a_3}\right)\frac{dy}{dz}-$$

$$\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{(z-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{\beta_1\beta_2}{(z-a_2)(a_3-a_1)}+\frac{\gamma_1\gamma_2}{(z-a_3)(a_1-a_2)}\right)\frac{(a_1-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_3)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}y=0, \tag{2.2.5}$$

appelée équation de *Papperitz* ou de *Riemann*.

Puis, nous allons transformer l'équation (2.2.5) en introduisant une nouvelle variable t tels que

$$t=\frac{(a_3-a_2)(z-a_1)}{(a_3-a_1)(z-a_2)},\ y=t^{\alpha_1}(1-t)^{\gamma_1}w.$$

Par une telle transformation fractionnelle on envoie les points $z=a_1,a_2,a_3$ sur les points $t=0,\infty,1$ respectivement, nous pouvons ainsi substituer à l'équation (2.2.5) une autre équation du même type pour laquelle les singularités seront $0,1$ et ∞. Ses exposants sont diminués de α_1 (resp γ_1) en 0 (resp en 1), et augmentés de $(\alpha_1+\gamma_1)$ en ∞, i.e les paires $(0,\alpha_2-\alpha_1),(0,\gamma_2-\gamma_1)$ et $(\beta_1+\alpha_1+\gamma_1,\beta_2+\alpha_1+\gamma_1)$ seront les exposants en $0,1$ et ∞ respectivement de la nouvelle équation en w et t.

Via cette transformation homographique l'équation (2.2.5) sera transformée en l'équation suivante :

$$\frac{d^2w}{dt^2}+\left(\frac{1-\alpha_2+\alpha_1}{t}+\frac{1-\gamma_2+\gamma_1}{1-t}\right)\frac{dw}{dt}+\frac{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)(\alpha_1+\beta_2+\gamma_1)}{t(t-1)}w=0, \tag{2.2.6}$$

En posant $a=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$, $b=\alpha_1+\beta_2+\gamma_1$, $c=1+\alpha_1-\alpha_2$, et en utilisant la relation de Fuchs (2.2.2), la dernière équation (2.2.6) se réduit à :

$$t(1-t)\frac{d^2w}{dt^2}+(c-(a+b+1)t)\frac{dw}{dt}-abw=0. \tag{2.2.7}$$

■

Conclusion 2.2.1 *Nous pouvons donc ramener l'étude générale des équations de Riemann à celles des équations pour lesquelles $\alpha_0=\beta_0=0$. Explicitement, toute équation du second ordre n'ayant que trois singularités régulières se ramène à la forme* (2.2.7).

2.2.1 Notation de Riemann

Riemann note $y = P\begin{bmatrix} a & b & c & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & ;z \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \end{bmatrix}$ une équation du second ordre sur $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, fuchsienne en a, b, c d'exposants respectifs $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2), (\lambda_3, \mu_3)$ et régulière sur $\mathbf{P}^1 - \{a, b, c\}$.

En adoptant cette notation, on vérifie comme précédemment que la forme explicite associée au schéma $y = P\begin{bmatrix} a & \infty & b & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & ;z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{bmatrix}$ est l'équation différentielle qui a pour points singuliers réguliers a, b et ∞, donnée par :

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-a}+\frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{z-b}\right)\frac{dy}{dz}+\left(\frac{\alpha_1\alpha_2(a-b)}{z-a}+\beta_1\beta_2+\frac{\gamma_1\gamma_2(b-a)}{z-a}\right)\frac{y}{(z-a)(z-b)}=0.$$

Prenons $a = 0, b = 1$ et soit le schéma suivant :

$$\begin{aligned} y &= P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_\infty & ;z \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_\infty & \end{pmatrix} \\ &= z^{\alpha_0}(1-z)^{\alpha_1} P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha_\infty+\alpha_0+\alpha_1 & ;z \\ \beta_0-\alpha_0 & \beta_1-\alpha_1 & \beta_\infty+\alpha_0+\alpha_1 & \end{pmatrix} \\ &= z^{\alpha_0}(1-z)^{\alpha_1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & ;z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où l'on a posé : $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_\infty, \beta = \alpha_0 + \alpha_1 + \beta_\infty, \gamma = 1 + \alpha_0 - \beta_0$.

L'équation de Riemann associée à ce dernier schéma, est appelée équation hypergéométrique de Gauss. En d'autres termes, l'équation hypergéométrique est définie comme étant une équation de Riemann avec trois points singuliers réguliers $0, 1$ et ∞, de sorte que l'un des exposants en chaque point singulier fini soit nul.

2.3 L'équation hypergéométrique de Gauss

Définition 2.3.1 ***(l'équation de Gauss)***
L'équation différentielle hypergéométrique de Gauss est définie par :

$$z\,(1-z)\,\frac{d^2y}{dz^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)\,z)\,\frac{dy}{dz}-\alpha\beta y=0,$$

où α,β,γ *étant des paramètres réels ou complexes. Elle est fuchsienne sur* $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$*, ses seules singularités sont* $0, 1$ *et* ∞*.*

2.3.1 Solutions de l'équation hypergéométrique de Gauss

La méthode de Frobenius permet de rechercher une solution formelle y de l'équation hypergéométrique (Gau) sous la forme :

$$y=z^{\mu}\sum_{n\geq 0}c_n z^n\ ,\ c_0=1$$

pour cela, il sera utile de l'exprimer à l'aide de l'opérateur d'Euler $\theta=z\dfrac{d}{dz}$.
D'où : $\theta^2-\theta=z^2\dfrac{d^2}{dz^2}$,

$$\begin{aligned}
(Gau) &\iff \left[(1-z)\,z^2\frac{d^2}{dz^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)\,z)\,z\frac{d}{dz}-\alpha\beta z\right]y=0\\
&\iff \left[(1-z)\left(\theta^2-\theta\right)+(\gamma-(\alpha+\beta+1)\,z)\,\theta-\alpha\beta z\right]y=0\\
&\iff \left[\left(1-\frac{1}{z}\right)\theta^2+\left(\alpha+\beta+\frac{1-\gamma}{z}\right)\theta+\alpha\beta\right]y=0\\
&\iff \left[\left(\theta^2+(\alpha+\beta)\,\theta+\alpha\beta\right)-\left(\frac{1}{z}\theta^2-\left(\frac{1-\gamma}{z}\right)\theta\right)\right]y=0\\
&\iff \left[(\theta+\alpha)\,(\theta+\beta)-\frac{1}{z}\theta\,(\theta+\gamma-1)\right]y=0
\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

En appliquant l'opérateur θ à la solution y, on obtient :

$$(\theta+\alpha)\,y=z^{\mu}\sum_{n\geq 0}(\mu+\alpha+n)\,c_n z^n.$$

La substitution de y dans (2.3.1) permet de tirer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(\theta+\alpha)\,(\theta+\beta)\,y &= z^{\mu}\sum_{n\geq 0}(n+\mu+\alpha)\,(n+\mu+\beta)\,c_n z^n,\\
\frac{1}{z}\theta\,(\theta+\gamma-1)\,y &= z^{\mu}\sum_{n\geq 0}(n+\mu)\,(n+\mu+\gamma-1)\,c_n z^{n-1},
\end{aligned}$$

ainsi :

$$
\begin{aligned}
(2.3.1) \iff & z^{\mu}\sum_{n\geq 0}(n+\mu+\alpha)(n+\mu+\beta)c_n z^n - z^{\mu}\sum_{n\geq 0}(n+\mu)(n+\mu+\gamma-1)c_n z^{n-1} = 0 \\
\iff & c_0\mu(\mu+\gamma-1)z^{\mu-1} + \\
& \sum_{n\geq 0}\left[(n+\mu+1)(n+\mu+\gamma)c_{n+1} - (n+\mu+\alpha)(n+\mu+\beta)c_n\right]z^{\mu+n} = 0
\end{aligned}
$$

Puisque cette dernière équation est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors les coefficients de toutes les puissances de z doivent être nuls. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (Gau) admette cette solution formelle est :

$$\mu(\mu+\gamma-1) = 0 \iff \mu = 0,\ 1-\gamma$$

et

$$(n+\mu+1)(n+\mu+\gamma)c_{n+1} - (n+\mu+\alpha)(n+\mu+\beta)c_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

c'est à dire :

$$
\begin{aligned}
\mu &= 0,\ 1-\gamma \\
c_{n+1} &= \frac{(n+\mu+\alpha)(n+\mu+\beta)}{(n+\mu+1)(n+\mu+\gamma)}c_n
\end{aligned}
\tag{2.3.2}
$$

Remarque 2.3.1 *De l'équation* (2.3.2) *on voit que si* $c_0 = 0$, *alors* $c_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $y(z) = 0$ *serait une solution triviale de l'équation* (2.3.1)*. Pour obtenir une solution non triviale on doit supposer que* $c_0 \neq 0$.

Cas 2.3.1 $\mu = 0$:
Le coefficient de z^n *dans le développement précédent vérifie donc la relation de récurrence :*

$$(n+1)(n+\gamma)c_{n+1} - (n+\alpha)(n+\beta)c_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

pour les valeurs entières non négatives de γ, *on aura :*

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)},\ \forall n \in \mathbb{N};\ \gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

c'est à dire :

$$\frac{c_n}{c_0} = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},\ c_0 = 1$$

d'où :

$$c_n = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n}, \ \gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

où l'on a posé pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(x)_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ x(x+1)\dots(x+n-1), & n > 0 \end{cases}$, *dite fonction factorielle ou symbole de Pochhammer.*

Finalement, on obtient une solution de l'équation (Gau) *au voisinage de* 0,

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n := {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z).$$

Cas 2.3.2 $\mu = 1 - \gamma$:

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$\begin{aligned} \theta\left(z^{\lambda} y\right) &= z \frac{d}{dz}\left(z^{\lambda} y\right) \\ &= z\left(\lambda z^{\lambda-1} y + z^{\lambda} \frac{d}{dz} y\right) \\ &= z^{\lambda} (\lambda + \theta) y. \end{aligned}$$

En tenant compte de cette dernière formule, on réécrit l'équation $(2.3.1)$ *de la manière suivante :*

$$z^{1-\gamma}\left[(\theta + \alpha - \gamma + 1)(\theta + \beta - \gamma + 1) - \frac{1}{z}\theta(\theta - \gamma + 1)\right]\left(z^{1-\gamma} w\right) = 0,$$

de là on voit que la deuxième solution au voisinage de 0 *est :*

$$w(z) = z^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z).$$

Les deux solutions y *et* w *sont linéairement indépendantes (utiliser le wronskien), et le rayon de convergence de ces séries est égal à* 1, *donc elles forment une base de l'espace des solutions de l'équation* (Gau) *sur l'ouvert* $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

De la même manière, on peut trouver les solutions de l'équation (Gau) *pour les autres singularités régulières. En résumé.*

- Solutions au voisinage de 0 : *si* $\gamma \notin \mathbb{Z}$

$$f_0^1(z) = {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z), \ f_0^2(z) = z^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z)$$

$D :=$ *Domaine de convergence* $= \{z \in \mathbb{C}/ |z| < 1\}$.

- Solutions au voisinage de 1 : *si* $\gamma - \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$

$$f_1^1(z) = {}_2F_1(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z), \; f_1^2(z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta; 1 - z)$$

$D = \{z \in \mathbb{C}/ |z - 1| < 1\}$.

- Solutions au voisinage de ∞ : *si* $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$

$$f_\infty^1(z) = z^{-\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{z}\right), \; f_\infty^2(z) = z^{-\beta} {}_2F_1\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{z}\right)$$

$D = \{z \in \mathbb{C}/ |z| > 1\}$.

2.4 Les homographies

Définition 2.4.1 *Soient* a, b, c *et* d *des nombres complexes telle que* $ad - bc \neq 0$, *l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \\ z & \longmapsto & \dfrac{az + b}{cz + d} \end{array}$$

est une transformation homographique.
Le point $\dfrac{-d}{c}$ *est transformé en* ∞ *et* ∞ *est transformé en* $\dfrac{a}{c}$ *(si* $c \neq 0$*). C'est donc une bijection de* $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ *sur* $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Proposition 2.4.1 *Soient* a, b, c *des nombres complexes distincts. Il existe une unique homographie* φ *qui envoie le triplet* (a, b, c) *sur* $(0, 1, \infty)$, *à savoir*

$$\varphi(z) = \frac{(b - c)(z - a)}{(b - a)(z - c)}.$$

Proposition 2.4.2 *Étant donnés deux triplets* (a, b, c) *et* (a', b', c') *de* $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, *il existe une unique homographie qui transforme* a *en* a', b *en* b', c *en* c'.

Preuve (Voir [Rud75]). ■

2.4.1 Symétrie de l'équation hypergéométrique

D'après ce qui précède, si l'on fait une transformation homographique φ sur la variable z, toute équation de Riemann est transformée en une équation de Riemann par l'application φ :

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & ;z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) & \\ \alpha & \beta & \gamma & ;\varphi(z) \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix},\ \text{où } \varphi \in Aut\left(\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\right)$$

En particulier, considérons le sous-groupe A de $Aut\left(\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\right) = PGL_2(\mathbb{C})$ formé des homographies qui laissent $\{0, 1, \infty\}$ invariant, appelé groupe anharmonique :

$$A = \left\{z, 1-z, \frac{1}{z}, \frac{z}{z-1}, 1-\frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}\right\},$$

l'équation hypergéométrique est formellement invariante par l'action des éléments du groupe anharmonique A.

En appliquant cela à l'équation hypergéométrique et utilisant de plus les règles de conjugaison par z^α, on note, par exemple quelques cas particuliers :

$$\begin{aligned}
P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & ;z \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{Bmatrix} &= P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & ;1-z \\ \gamma-\alpha-\beta & \beta & 1-\gamma & \end{Bmatrix} \\
&= P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & \alpha & ;\dfrac{z}{z-1} \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix} \\
&= (1-z)^{-\alpha} P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & ;\dfrac{z}{z-1} \\ 1-\gamma & \gamma-\beta & \beta-\alpha & \end{Bmatrix} \\
&= P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & 0 & 0 & ;\dfrac{1}{z} \\ \beta & 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= z^{-\alpha} P \left\{ \begin{array}{llll} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & ; \dfrac{1}{z} \\ \beta-\alpha & 1-\gamma+\alpha & \gamma-\alpha-\beta & \end{array} \right\}$$

$$= z^{-\beta} P \left\{ \begin{array}{llll} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta & 0 & ; \dfrac{1}{z} \\ \alpha-\beta & 1-\gamma+\beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{array} \right\}$$

$$= z^{\gamma-\alpha-\beta} P \left\{ \begin{array}{llll} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \gamma-\alpha & 0 & ; z \\ 1-\gamma & \gamma-\beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{array} \right\}$$

$$= z^{1-\gamma} P \left\{ \begin{array}{llll} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 1+\alpha-\gamma & 0 & ; z \\ \gamma-1 & 1+\beta-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \end{array} \right\}.$$

2.5 La fonction Gamma d'Euler

Définition 2.5.1 *Pour tout nombre complexe z telle que* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on définit la fonction Gamma notée* Γ, *par :*

$$\Gamma : z \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Elle admet un prolongement analytique en une fonction méromorphe sur l'ensemble des nombres complexes, excépté pour les valeurs de $z \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ qui représentent des pôles simples. Une intégration par parties montre que cette intégrale vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En particulier $\Gamma(1) = 1$, *et on montre par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

Proposition 2.5.1 (i) *L'intégrale est absolument convergente sur le demi plan complexe où la partie réelle est strictement positive.*
(ii) $\Gamma(z)$ *est une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$, *avec des pôles simples en* $(-n), n \in \mathbb{N}$, *dont le résidu est égal à* $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Preuve (ii) Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \\ &= \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \Psi(z)\end{aligned}$$

Ψ est analytique car les bornes de l'intégration de la fonction à intégrer ne contiennent pas de singularités.

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt &= \int_0^1 t^{z-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!}\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}\right)dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}\end{aligned}$$

D'où : $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \Psi(z)$.

La dernière égalité montre que les singularités de $\Gamma(z)$ sont des pôles simples en $z = 0, -1, -2, ...$, et le résidu en 0 est égal à $\frac{(-1)^n}{n!}$. ■

2.5.1 Formule asymptotique de Stirling

La formule de Stirling donne un équivalent de la factorielle au voisinage de l'infini, et plus généralement de la fonction Gamma :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Et pour la fonction Gamma, on a :

Théorème 2.5.1 $\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}$, $|\arg z| \leq \pi - \delta$, *pour un certain* $\delta > 0$.

2.6 La série hypergéométrique de Gauss

Définition 2.6.1 *Une série hypergéométrique est une série* $\sum_{n\geq 0} c_n$ *tel que le rapport* $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ *est une fraction rationnelle en* n.

Définition 2.6.2 *Notons pour tout complexe* α :

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ \alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1) = \prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i), & si\ n > 0 \end{cases}$$

$(\alpha)_n = \dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$ *pourvu que* α *ne soit pas entier négatif.*
La série hypergéométrique d'Euler ou de Gauss est :

$$_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n}z^n,\ \ \gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

définie comme solution de l'équation hypergéométrique. Si de plus $\gamma \notin \mathbb{Z}$, *c'est son unique solution uniforme. Sa somme notée* $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *est la fonction hypergéométrique.*

Définition 2.6.3 *La fonction hypergéométrique* $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *est définie par la série hypergéométrique* $\sum_{n\geq 0}\dfrac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n$ *pour* $|z| < 1$, *et par prolongement analytique ailleurs.*

Proposition 2.6.1 (i) *La série hypergéométrique* $_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *est symétrique en* α *et* β.
(ii) *Si* α *ou* $\beta \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ *alors,* $_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *est polynômiale en* z.

Preuve (ii) Supposons que $\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, et posons $\alpha = (-m)$ avec $0 < m < n$.
On a :

$$\begin{aligned}(\alpha)_{m+1} &= (-m)_{m+1} = (-m)(-m+1)...(-m+m+1-1) \\ &= (-m)(-m+1)...(0) = 0\end{aligned}$$

De même, tous les termes $(\alpha)_k$, $k \geq m+1$ contiennent un facteur nul, donc s'en vont.

$$\begin{aligned} _2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}z^n \\ &= \sum_{n=0}^{m}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}z^n + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n\end{aligned}$$

Or $(\alpha)_n = 0$ à partir de $n \geq m+1$,
d'où : $_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z) = 1 + \dfrac{\alpha\beta}{\gamma}z + ... + \dfrac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m m!}z^m$.
La série $_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ est donc finie, c'est à dire $_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ est réduite à un polynôme en z. ■

Théorème 2.6.1 *Lorsque ni α, ni β ne sont des entiers positifs non nuls, on a :*
(i) Le rayon de convergence de la série ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ est égal à l'unité.
(ii) Si $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$, alors la série ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ converge absolument dans le cercle unité $\{z\in\mathbb{C}/\,|z|=1\}$.

La démonstration de ce théorème repose sur les deux lemmes dits de d'Alembert et de Raabe.

Lemme 2.6.1 *-d'Alembert*
La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge (respectivement diverge) si :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1\ \ (\textit{respectivement}\ >1)\,.$$

Lemme 2.6.2 *-Raabe*
La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge s'il existe une constante $c>1$ et un réel positif $\epsilon>0$ telle que :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1-\frac{c}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right),$$

pour n assez grand.
où o désigne le symbole de Landau.
La condition signifie aussi qu'il existe un réel $M>0$ telle que :
$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-1-\frac{c}{M}\right|<\frac{M}{n^{1+\epsilon}}$*, pour un certain n assez grand.*

Preuve -du théorème
(i) On applique le lemme de d'Alembert sur la série ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$, on aura :

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}(1)_{n+1}}z^{n+1}.\frac{(\gamma)_n(1)_n}{(\alpha)_n(\beta)_n z^n}\right|\\ &= \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)}|z|\\ &= \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}{\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}|z|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}|z|\end{aligned}$$

Si $|z|<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ et la série ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ converge.

(ii) On applique le lemme de Raabe sur la série de terme général $a_n=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n}z^n$, on aura:
Dans le cercle unité $|z|=1$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)}\right| \\
&= \left|\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}{\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right| \\
&= \left|\frac{1+\frac{\alpha+\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{\gamma+1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right| \\
&= \left|\left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{\gamma+1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right| \\
&= \left|1-\frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \\
&= 1-\frac{1+\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

La série de terme général a_n converge pour vu que $c=1+\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)$ soit >1, c'est à dire, $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$, et le théorème est ainsi démontré.

Une autre démonstration consiste à utiliser la formule de Stirling. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n} &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1+n)} \\
&\sim \frac{n^\alpha n^\beta}{n^\gamma n}=\frac{1}{n^{\gamma-\alpha-\beta+1}}.
\end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^{\gamma-\alpha-\beta+1}}$ converge absolument pour les valeurs de $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$, le théorème d'équivalence conclut le théorème. ■

2.6.1 L'identité de Gauss-Kummer

L'identité de Gauss-Kummer permet de déterminer la valeur explicite de la fonction hypergéométrique en $z=1$.

Théorème 2.6.2 -*Gauss* [1812]

Si $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$*, alors :*

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}.$$

Preuve (voir [Hil76, page 206]). ■

Dans le cas où l'un des paramètres α ou β est un entier négatif, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.6.1 -*Chu-Vandermonde*

$$F(-n, \beta, \gamma; 1) = \frac{(\gamma - \alpha)_n}{(\gamma)_n}, n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 2.6.3 $F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma; \dfrac{z}{z - 1}\right)$ *(Pfaff)*
$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; z)$ *(Euler)*

Le membre à droite dans la transformation de Pfaff converge pour $\left|\dfrac{z}{z - 1}\right| < 1$. Cette condition implique que $\operatorname{Re}(z) < \dfrac{1}{2}$, ainsi on a un prolongement de la série ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z)$ au demi-plan $\operatorname{Re}(z) < \dfrac{1}{2}$ donné par la formule de Pfaff.

Chapitre 3

Groupe de monodromie et solutions algébriques

« Monodromie », en grec, signifie « sens unique ». Mais là on emploie ce mot dans l'acception exactement opposée : la monodromie va caractériser ce qui change quand on fait un tour autour de l'origine, donc ce qui n'est pas univoque. Le mot a été complètement détourné de son sens primitif.

Bernard Malgrange, leçons de mathématiques d'aujourd'hui (2000).

3.1 Rappel sur le groupe fondamental de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\}$

Soit D un domaine dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Nous rappelons ici quelques propriétés du groupe fondamental $\pi_1(D,b)$ de D en un point base $b\in D$. (voir [Spa81])

Définition 3.1.1 *On appelle chemin ou arc toute application $\alpha:[0,1]\longrightarrow D$ continue, d'origine $\alpha(0)=y$ et d'extrimité $\alpha(1)=z$. On dit que α est un chemin reliant y à z.*

Définition 3.1.2 *Un chemin fermé γ dans D en un point-base b est une courbe $\gamma:[0,1]\longrightarrow D$ continue, vérifiant $\gamma(0)=\gamma(1)=b$.*
On note $L(D,b)$ l'ensemble de tous les chemins fermés dans D d'origine et d'extrimité b (lacets).

Définition 3.1.3 *Soient α_0 et α_1 deux chemins tels que :*

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = \alpha_1(0) = y \\ \alpha_0(1) = \alpha_1(1) = z \end{cases}$$

On dit que α_0 et α_1 sont homotopes s'il existe une application $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow D$ continue tels que :

$$\forall t \in [0;1] : \begin{array}{c} H(t,0) = \alpha_0(t) \\ H(t,1) = \alpha_1(t) \end{array}$$

$$\forall s \in [0;1] : \begin{array}{c} H(0,s) = y \\ H(1,s) = z \end{array}$$

On dit alors que H est une homotopie.

Définition 3.1.4 *Deux chemins $\gamma_0, \gamma_1 \in L(D,b)$ sont dits homotopiquement équivalents si, et seulement si γ_0 se déforme continuement en γ_1, et on note $\gamma_0 \sim \gamma_1$.*
On vérifie facilement que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Définition 3.1.5 *Soit $S \subseteq D$. S est dit simplement connexe si : $\forall y, z \in S$, et pour tous chemins α_0, α_1 reliant y à z, α_0 et α_1 sont homotopes.*

Définition 3.1.6 *Le groupe fondamental, noté $\pi_1(D,b)$, est l'ensemble des classes d'équivalences des arcs fermés dans $L(D,b)$, i.e,*

$$\pi_1(D,b) = L(D,b) / \sim$$

Notation 3.1.1 *La classe d'homotopie qui contient $\gamma \in L(D,b)$ sera notée $[\gamma]$.*

Définition 3.1.7 *Le produit $\gamma_1.\gamma_0$ de deux arcs fermés γ_1 et $\gamma_0 \in L(D,b)$ est défini comme étant l'arc parcouru le long de γ_0 dans un sens donné, et γ_1 dans le sens inverse. Ce produit est compatible avec la relation d'équivalence $\sim$ i.e :*

$$si \quad \begin{array}{c} \gamma_0 \sim \gamma_0' \\ \gamma_1 \sim \gamma_1' \end{array} \qquad Alors : \gamma_1.\gamma_0 \sim \gamma_1'.\gamma_0'$$

Ainsi, le produit est naturellement défini dans $\pi_1(D,b)$.

Définition 3.1.8 ***(concaténation des arcs)***

Soient α et β deux chemins telle que : $\alpha(1) = \beta(0)$. On définit $\gamma = \beta \circ \alpha$ par :

$$\gamma(t) = (\beta \circ \alpha)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

L'application $\gamma : [0;1] \longrightarrow D$ est continue.

Définition 3.1.9 *Le groupe $\pi_1(D,b)$ est appelé le groupe fondamental de D basé au point b. C'est un groupe pour la "concaténation" des arcs.*

Proposition 3.1.1 *Si D est connexe par arcs alors :*
pour tous $a, b \in D$, $\pi_1(D,a)$ et $\pi_1(D,b)$ sont isomorphes.

D'après la proposition précédente, on constate que le groupe fondamental ne dépend pas du point de base choisi lorsque D est connexe par arcs. On notera alors $\pi_1(D)$ au lieu de $\pi_1(D,a)$.

Proposition 3.1.2 *Soit D un domaine connexe par arcs. D est simplement connexe si, et seulement si $\pi_1(D) = \{e\}$,*
où : e est un arc constant, c'est à dire l'élément neutre du groupe.

Théorème 3.1.1 *Soient D et C deux domaines connexes par arcs. Si D et C sont homéomorphes alors leurs groupes fondamentaux $\pi_1(D)$ et $\pi_1(C)$ sont isomorphes.*

Théorème 3.1.2 *Soit D un domaine connexe par arcs. On suppose que $D = D_1 \cup D_2$ avec D_1 et D_2 deux ouverts simplement connexe telles que : $D_1 \cap D_2$ est non vide et connexe par arcs, alors D est simplement connexe, c'est à dire que son groupe fondamental est trivial.*

Définition 3.1.10 *On appelle groupe libre à n générateurs, dont les éléments sont appelés les "mots", tout ensemble F défini par :*
$a \in F \Longleftrightarrow a = \alpha_{i_1}^{\varepsilon_1}\alpha_{i_2}^{\varepsilon_2}...\alpha_{i_k}^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, les α_i sont des symboles. C'est un groupe pour la concaténation des mots.

Proposition 3.1.3 *On a les isomorphismes de groupes suivants :*
$\pi_1(\mathbb{C} - \{a\}) \approx (\mathbb{Z}, +)$,
$\pi_1(\mathbb{C}) \approx \pi_1(\mathbf{P}^1) \approx \pi_1(\mathbf{S}^2) \approx \{1\}$ *(trivial),*
$\pi_1(\mathbb{C} - \{a_1, a_2, ..., a_n\}) \approx F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$,
$\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{a_1, a_2, ..., a_n\}) \approx \pi_1(\mathbf{S}^2 - \{b_1, b_2, ..., b_n\}) \approx \pi_1(\mathbb{C} - \{c_1, c_2, ..., c_{n-1}\})$.

3.2 Représentation de monodromie

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre n suivante :

$$y^{(n)}(z) + a_1(z) y^{(n-1)}(z) + ... + a_n(z) y(z) = 0, \tag{3.2.1}$$

où $a_j(z)$ sont des fractions rationnelles dans $\mathbb{C}(z)$.

Pour décrire les solutions multiformes de l'équation $(3.2.1)$, nous allons associer à celle-ci la classe conjuguée d'un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$ qui sera appelé le groupe de monodromie ou la monodromie de l'équation (3.2.1). Tout au long de ce chapitre nous développerons cette théorie pour des équations différentielles de type Fuchs (avec des points singuliers réguliers seulement).

Soit $S = \{p_1, p_2, ..., p_m, (\text{éventuellement } p_{m+1} = \infty)\}$ l'ensemble des points singuliers de l'équation (3.2.1) dans la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Étant donné un point régulier $z_0 \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \backslash S$, soit U un voisinage simplement connexe de z_0. D'après le *théorème de Cauchy*, il existe une base de solutions holomorphes, $\mathcal{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ de l'équation (3.2.1) dans U.

Soit $[\gamma_j] \in \pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \backslash S, z_0)$, choisissons un représentant $\gamma_j \in L(\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \backslash S, z_0)$ basé en z_0 et entourant uniquement un seul point p_j $(j = 1, ..., m+1)$ dans le sens positif, et notons ${}^{\gamma_j}\mathcal{F}$ le prolongement analytique de $\mathcal{F}$ le long de γ_j dans $\mathbf{P}^1 \backslash S$ d'origine et d'extrimité z_0. En veru du théorème de *monodromie pour le prolongement analytique*, ${}^{\gamma_j}\mathcal{F}$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma_j]$ contenant l'arc γ_j.

On note $\tilde{f}_i$ le prolongement de f_i, $i = 1, 2, ..., n$ le long de γ_j. Les fonctions ainsi obtenues restent des solutions linéairement indépendantes de l'équation (3.2.1) dans U, qui sont en fait des combinaisons linéaires des éléments de la base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)$. Donc, il existe une unique matrice inversible notée $M_{\mathcal{F}}^{[\gamma_j]} \in GL(n, \mathbb{C})$ vérifiant :

$$\left(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ..., \tilde{f}_n\right)^T = M_{\mathcal{F}}^{[\gamma_j]} (f_1, f_2, ..., f_n)^T.$$

Il est clair que $M_{\mathcal{F}}^{[\gamma_j]}$ dépend de l'équation différentielle donnée car $\mathcal{F}$ l'est aussi, dorénavant on notera $M^{[\gamma]}$ au lieu de $M_{\mathcal{F}}^{[\gamma_j]}$.

Si γ est un lacet n'entourant aucun point singulier, alors $M^{[\gamma]}$ est la matrice identité (ce résultat découle du théorème du prolongement analytique). La matrice $M^{[\gamma]}$ est en effet déterminée par la classe $[\gamma]$ de γ dans le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{P}^1\backslash S, z_0)$ de $\mathbf{P}^1\backslash S$ basé en z_0, et on a :

$$M_{\mathcal{F}}(e) = I, \text{ où : } e \in \pi_1\left(\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\backslash S, z_0\right) \text{ est l'arc constant,}$$
$$M_{\mathcal{F}}^{[\gamma\beta]} = M_{\mathcal{F}}^{[\gamma]}.M_{\mathcal{F}}^{[\beta]}$$

L'application :

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\mathcal{F}} : \pi_1(\mathbf{P}^1\backslash S, z_0) & \longrightarrow & GL\left(n, \mathbb{C}\right) \\ [\gamma] & \longmapsto & M^{[\gamma]} \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes ; on a donc une représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1\backslash S, z_0)$ de rang n (c'est à dire à chaque élément générateur du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{P}^1\backslash S, z_0)$ est associé une matrice inversible M dans $GL\left(n, \mathbb{C}\right)$, et à la classe du chemin constant z_0 la matrice identité I_n).

Définition 3.2.1 *L'application $\rho_{\mathcal{F}}$ est appelée représentation de monodromie et l'image du groupe $\rho_{\mathcal{F}}\left(\pi_1\left(\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\backslash S, z_0\right)\right) \subset GL\left(n, \mathbb{C}\right)$ le groupe de monodromie de l'équation* (3.2.1) *relativement à la base $\mathcal{F}$.*

Notation 3.2.1 *Soit f dans l'espace des solutions de l'équation* (3.2.1). *L'action naturelle de la matrice de monodromie $\gamma \in M_f$ sur f sera aussi notée ${}^{\gamma}f$. Par construction, la fonction ${}^{\gamma}f$ est le prolongement analytique de f le long d'un lacet correspondant à γ, elle satisfait : ${}^{\gamma}f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left({}^{\gamma}\mathcal{F}^T\right)_i$.*

Remarque 3.2.1 *Naturellement cette représentation dépend du choix de la base $\mathcal{F}$ et le point de base z_0.*

3.2.1 Exemples

a) $y'' = 0 \qquad (E_3)$

(E_3) est une équation sans points singuliers sur $\mathbf{P}^1$,

On a : $\pi_1(\mathbf{P}^1) \approx \{1\}$, d'où : $MG_{(E_3)} \approx \{1\}$ (groupe trivial).

b) $y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (E_4)$

Le seul point singulier sur $\mathbf{P}^1$ de (E_4) est ∞,

$\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{\infty\}) \approx \pi_1\left(\mathbb{C}\right) \approx \{1\}$, d'où : $MG_{(E_4)} \approx \{1\}$.

Proposition 3.2.1 *Le groupe de monodromie est trivial pour les équations différentielles linéaires avec au plus un point singulier sur* $\mathbf{P}^1$.

c) $zy' - \alpha y = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ $\quad (E_5)$

Les points singuliers sur $\mathbf{P}^1$ de (E_5) sont 0 et ∞,

On a $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) \approx \mathbb{Z}$, et soit $\chi = (f_1(z) = z^\alpha)$ un système fondamental de solutions de (E_5) au voisinage de 1 (et de tout point de $\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}$).

En faisant un tour autour de 0 : $f_1(ze^{2i\pi}) = f_1(z)\, e^{2i\pi\alpha}$, d'où :

$$\begin{array}{rccl} \rho: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*. \\ & 1 & \longmapsto & e^{2i\pi\alpha} \end{array}$$

Le groupe de monodromie de (E_5) est :

$$MG_{(E_5)} = \left\{ e^{2i\pi\alpha n} / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) $zy'' + y' = 0$ $\quad (E_6)$

Les points singuliers sur $\mathbf{P}^1$ de (E_6) sont 0 et ∞ et on a : $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) \approx \mathbb{Z}$.

$\chi = (f_1(z) = 1, f_2(z) = \ln z)$ est un système fondamental de solutions de (E_6) au voisinage de $a_0 = 1$.

Un tour autour de 0 donne $(f_1(ze^{2i\pi}), f_2(ze^{2i\pi})) = (f_1(z), f_2(z)) \begin{pmatrix} 1 & 2i\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où :

$$\begin{array}{rccl} \rho: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & GL(2, \mathbb{C}) \\ & 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2i\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

Le groupe de monodromie de (E_6) est :

$$MG_{(E_6)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2i\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n / n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2i\pi n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\} \approx (\mathbb{Z}, +).$$

e) $6z^2y'' + zy' + y = 0$ $\quad (E_7)$

Les points singuliers sur $\mathbf{P}^1$ de (E_7) sont 0 et ∞, on a $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) \approx \mathbb{Z}$ et $\chi = (f_1(z) = \sqrt{z}, f_2(z) = \sqrt[3]{z})$ un système fondamental de solutions de (E_7) au voisinage de

$a_0 = 1$ (et de tout point de $\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}$).

Tourner autour de 0 : $\quad \left(f_1\left(ze^{2i\pi}\right), f_2\left(ze^{2i\pi}\right)\right) = \left(f_1(z), f_2(z)\right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}$, d'où :

$$\begin{array}{rcl} \rho: \ \mathbb{Z} & \longrightarrow & GL(2, \mathbb{C}) \\ 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}, \end{array}$$

Le groupe de monodromie de (E_7) est :

$$MG_{(E_7)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}^n / n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi n}{3}} \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3.2.2 Changement de système fondamental de solutions

Définition 3.2.2 *Deux représentations ρ, ρ' : $\pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\backslash S, z_0) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ sont dites conjuguées si, et seulement si, il existe une matrice $C \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que :*

$$\rho'(\gamma) = C^{-1}.\rho(\gamma).C \ , \ \gamma \in \pi_1\left(\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\backslash S, z_0\right)$$

La relation de conjugaison est une relation d'équivalence.

Lemme 3.2.1 *Soit G un autre système fondamental de solutions en z_0, alors il existe une matrice $C \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que :*

$$M_{\mathcal{F}}^{[\gamma]} = C^{-1} M_G^{[\gamma]} C, \tag{3.2.2}$$

c'est à dire, les deux matrices de monodromie $M_{\mathcal{F}}^{[\gamma]}$ et $M_G^{[\gamma]}$ sont liées par une relation de conjuguaison. La matrice C représente le changement de bases de $\mathcal{F}$ vers G.

Preuve Si on prend G un autre système fondamental de solutions au voisinage de z_0, elle va exister une matrice inversible $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que $G = \mathcal{F}.P$, on aura

$$^{\gamma}G = G.M_G^{[\gamma]}, \qquad M_G^{[\gamma]} \in GL(n, \mathbb{C})$$

donc :

$$G^{-1}.{}^{\gamma}G = M_G^{[\gamma]} = P^{-1}.\mathcal{F}^{-1}.{}^{\gamma}\mathcal{F}.P = P^{-1}.M_{\mathcal{F}}^{[\gamma]}.P$$

c'est à dire que M_G est une matrice équivalente à $M_{\mathcal{F}}^{\gamma}$. ■

Lemme 3.2.2 *Soit λ une constante dans $\mathbb{C}^*$, λf une base ordonnée $(\lambda f_1, \lambda f_2, ..., \lambda f_n)$, alors on a :*

$$M_{\lambda f}\left(\pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)\right) = M_f\left(\pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)\right).$$

Preuve Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, d'après le lemme (3.2.1) il existe une matrice inversible C telle que :

$$M_{\lambda f}\left(\pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)\right) = C^{-1}.M_f\left(\pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)\right).C, \quad C = \lambda I_n$$

d'où :

$$\begin{aligned} M_{\lambda f}\left(\pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)\right) &= \lambda^{-1} I_n.M_f\left(\pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)\right).\lambda I_n \\ &= M_f\left(\pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)\right). \end{aligned}$$

■

3.2.3 Choix non canonique

Soient z_1 un autre point $\in \mathbf{P}^1 \backslash S$ et B une base de solutions locale au voisinage de z_1. On a alors l'application de monodromie :

$$\begin{array}{rcl} M_B : \pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_1) & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{C}) \\ {[v]} & \longmapsto & M_B^{[\nu]}. \end{array}$$

Si λ est un chemin joignant z_0 et z_1, la conjuguaison par $\overline{\lambda}$ définit un isomorphisme de groupes fondamentaux :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_1) \\ {[\gamma]} & \longmapsto & \left[\lambda^{-1}.\gamma.\lambda\right] \end{array}$$

et les éléments de la base $\mathcal{F}$ seront des combinaisons linéaires des éléments de B après prolongement le long de λ.

On note $D \in GL(n, \mathbb{C})$ la matrice de passage de $\mathcal{F}$ vers B. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0) & \xrightarrow{M_{\mathcal{F}}} & GL(n, \mathbb{C}) \\ \phi \downarrow & & \downarrow C_D \\ \pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_1) & \xrightarrow{M_B} & GL(n, \mathbb{C}) \end{array}$$

où : $C_D(A) = D.A.D^{-1}$.

Remarque 3.2.2 *La représentation de monodromie dépend seulement de l'équation différentielle et de son système fondamental de solutions. Cependant, la relation* (3.2.2) *montre que deux représentations de monodromie sont conjuguées, ainsi la classe conjuguée de la représentation de monodromie est uniquement déterminée par l'équation différentielle. On appelle cette classe conjuguée la monodromie de cette équation.*

Définition 3.2.3 *La classe conjuguée de* $M_{\mathcal{F}}\left(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0\right)$ *dans* $GL\left(n, \mathbb{C}\right)$ *est appelée le groupe de monodromie noté* MG *de l'équation* $(3.2.1)$.

3.2.4 Caractérisation du groupe de monodromie

Proposition 3.2.2 *Le groupe de monodromie de l'équation différentielle* (3.2.1) *est engendré par* m *matrices* $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ *satisfaisant la relation :* $\gamma_1.\gamma_2...\gamma_{m+1} = I_n$ *(on ne prend pas* γ_{m+1} *puisque* $\gamma_1.\gamma_2...\gamma_{m+1} = I_n$*).*

Preuve Soit $[1] \in \pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)$ l'élément neutre du groupe. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)$ est engendré par les lacets $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{m+1}$ orientés positivement contenant un seul point singulier. Ces lacets vérifient la propriété : $\left[\gamma_1.\gamma_2...\gamma_{m+1}\right] = [1]$.
Le groupe de monodromie de l'équation (3.2.1) est engendré par les matrices $M_f\left(\gamma_1\right), M_f\left(\gamma_2\right), ...,$ $M_f\left(\gamma_{m+1}\right)$, pour toute base f de solution, par construction ces matrices satisfont :
$M_f\left(\gamma_1\right).M_f\left(\gamma_2\right)....M_f\left(\gamma_{m+1}\right) = I_n$. ■

Supposons pour simplifier que $0 \in \mathbf{P}^1$ est un point singulier régulier pour l'équation (3.2.1), et soient $f_1, f_2, ..., f_n$, n-solutions linéairement indépendantes :

$$\begin{cases} f_1\left(z\right) = z^{\rho_1} g_1\left(z\right), \\ f_2\left(z\right) = z^{\rho_2} g_2\left(z\right), \\ \qquad ... \\ f_n\left(z\right) = z^{\rho_n} g_n\left(z\right), \end{cases}$$

où $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ sont les exposants en 0,

$g_1, g_2, ..., g_n$ des séries de puissanes holomorphes en z.

Après avoir fait un tour le long d'un lacet γ dans $\mathbf{P}^1 \backslash S$ qui ne contient pas de singularités (excépté le point 0), les fonctions $f_1, f_2, ..., f_n$ se transformeront en $f_1 e^{2i\pi\rho_1}$, $f_2 e^{2i\pi\rho_2}, ...,$

$f_n e^{2i\pi\rho_n}$, respectivement, et la matrice de monodromie $M(\gamma)$ n'est autre que la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i\rho_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\rho_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{2\pi i\rho_n} \end{pmatrix},$$

qui à $e^{2\pi i\rho_1}, e^{2\pi i\rho_2}, ..., e^{2\pi i\rho_n}$ pour valeurs propres. En effet, soit γ un lacet dans $\mathbf{P}^1 \backslash S$ entourant le point 0 et posons $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$. Le système f se prolonge analytiquement en ${}^{\gamma}f = {}^{\gamma}(z^{\rho_1}g_1, ..., z^{\rho_n}g_n)$.

$$\begin{aligned} {}^{\gamma}f &= \begin{pmatrix} z^{\rho_1}e^{2\pi i\rho_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & z^{\rho_2}e^{2\pi i\rho_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & z^{\rho_n}e^{2\pi i\rho_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ ... \\ g_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2\pi i\rho_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\rho_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{2\pi i\rho_n} \end{pmatrix} f. \end{aligned}$$

D'où : à une conjugaison près la matrice $M(\gamma)$ n'est autre que la matrice diagonale ayant $e^{2\pi i\rho_1}, ..., e^{2\pi i\rho_n}$ pour valeurs propres.

Corollaire 3.2.1 *La monodromie en un point régulier est la matrice identité.*

3.3 Groupe de monodromie et solutions algébriques

Dans cette section nous montrerons que la finitude du groupe de monodromie d'une équation différentielle fuchsienne est équivalent à l'existence d'une base de solutions algébriques.

Lemme 3.3.1 *Soit $g(z)$ une fonction algébrique sur $\mathbf{P}^1$. Soit S l'ensemble des points critiques et pôles de $g(z)$ et choisissons une branche de $g(z)$ dans un ouvert $U \subset \mathbf{P}^1 \backslash S$.*
Soit $z_0 \in U$ et supposons que le prolongement analytique de $g(z)$ le long de tout chemin fermé dans $\pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash S, z_0)$ est la fonction $g(z)$ elle même, alors $g(z) \in \mathbb{C}(z)$.

Lemme 3.3.2 *Soit f une solution algébrique de l'équation* $(3.2.1)$. *Alors tout conjugué algébrique de f sur $\mathbb{C}(z)$ est aussi une solution. En particulier, ${}^{\gamma}f$ est une solution algébrique de* $(3.2.1)$, *pour toute matrice de monodromie γ.*

Preuve Soit f une solution algébrique de (3.2.1), il existe un polynôme $P(T) = T^m + c_1(z)T^{m-1} + ... + c_m(z)$ dans $\mathbb{C}(z)[T]$, telle que : $P(f) = 0$.
Soit σ un élément de Galois dans $\overline{\mathbb{C}(z)}/\mathbb{C}(z)$, ${}^{\sigma}f$ est aussi une racine de $P(T)$, donc ${}^{\sigma}f$ est algébrique. De plus, on a : ${}^{\sigma}(L(f)) = L({}^{\sigma}f) = 0$.
Soit γ la matrice de monodromie de l'équation et notons $P({}^{\gamma}f)$ le prolongement analytique de $P(f)$ le long de γ, d'où $P({}^{\gamma}f) = 0$ et la fonction ${}^{\gamma}f$ est aussi une conjuguée algébrique de f. ■

Théorème 3.3.1 *L'équation différentielle fuchsienne* (3.2.1) *est algébrique si, et seulement si son groupe de monodromie est fini.*

Preuve $\Longrightarrow$)Soit M le groupe de monodromie de l'équation (3.2.1) et supposons que $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ est une base de solutions algébriques de cette équation.
Si f est une solution algébrique alors, le prolongement analytique de f le long de tout lacet dans $\mathbf{P}^1\backslash S$ est un conjugué. Les conjugués de f sont en nombres finis, d'où l'image de l'ensemble $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ sous l'action de la matrice de monodromie est finie, i.e M est fini.

$\Longleftarrow$)Inversement, supposons que M est fini, et soit f une solution de l'équation (3.2.1). On peut donc construire le polynôme $P(T) := \prod_{\gamma \in M} (T -{}^{\gamma} f)$ en T dont les racines sont des fonctions algébriques. Chaque coefficient de $P(T)$ est un polynôme symétrique en les racines de $P(T)$. Ainsi, $P(T)$ est invariant sous l'action de $M \subset \pi_1(\mathbf{P}^1\backslash S, z_0)$. Un point $z \in \mathbb{C}$ qui a la propriété ${}^{\gamma}f(z) = \infty$ pour $\gamma \in M$, est contenu dans S. D'après le lemme (3.1.1), chaque coefficient est une fonction rationnelle. f qui est une solution de $P(T) = 0$ est donc aussi rationnelle, cela signifie que f est algébrique. ■

3.4 Classification des représentations de rang 2 d'un groupe libre à deux générateurs

La représentation de monodromie d'une équation de Riemann est une représentation de rang 2 d'un groupe libre à deux générateurs $F(\alpha_1, \alpha_2)$. On classifie donc les représentations de rang 2 d'un groupe libre à deux générateurs comme suivant :
soient

$G = \langle \mu, \nu \rangle$: un groupe libre engendré par μ et ν,

V : un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2,

$\rho : G \longrightarrow GL(V)$: une représentation de rang 2,

et

$$\begin{aligned} \{\lambda_1, \lambda_2\} &: \text{ l'ensemble des valeurs propres de } \rho(\mu), \\ \{\mu_1, \mu_2\} &: \text{ l'ensemble des valeurs propres de } \rho(\nu), \\ \{\nu_1, \nu_2\} &: \text{ l'ensemble des valeurs propres de } \rho(\mu\nu). \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

L'égalité $\det \rho(\mu\nu) = \det \rho(\mu) . \det \rho(\nu)$ entraîne la relation suivante entre les valeurs propres :

$$\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 = \nu_1 \nu_2. \tag{3.4.2}$$

On peut alors penser que la classe de la représentation ρ est déterminée par les valeurs propres (3.4.1), mais elle est seulement vraie si la représentation ρ est "irréductible".

Définition 3.4.1 *Un sous-espace $W \subset V$ est dit ρ-invariant si, et seulement si $\rho(G) W \subset W$. W est appelé propre s'il est différent de $\{0\}$ et de V.*

Définition 3.4.2 *La représentation ρ est dite irréductible s'il n'existe aucun sous-espace propre et ρ-invariant.*

Théorème 3.4.1 (*i*) *ρ est irréductible si et seulement si*

$$\lambda_i \mu_j \neq \nu_k \quad \textit{pour tout } i, j, k = 1, 2. \tag{3.4.3}$$

(ii) Si ρ est irréductible, alors il existe une base de V telles que $\rho(\mu)$ et $\rho(\nu)$ soient représentées par les matrices

$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ (\nu_1+\nu_2) - (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2) & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Toute autre représentation donnée en permutant λ_1 et λ_2 et/ou μ_1 et μ_2 sont mutuellement conjuguées. En particulier, si la classe conjuguée est irréductible, alors elle est uniquement déterminée par les valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2\}, \{\mu_1, \mu_2\}$ et $\{\nu_1, \nu_2\}$.

(iii) Si ρ est réductible, alors la classe conjuguée de ρ n'est plus déreminée par les valeurs propres, plusieurs cas à distinguer.

1^{er}*cas :* $\lambda_1 \neq \lambda_2, \mu_1 \neq \mu_2$ *et* $\nu_1 \neq \nu_2$.

On indexe les indices i, j, k de sorte que

$$\lambda_1\mu_1 = \nu_1 \Longleftrightarrow (\lambda_2\mu_2 = \nu_2).$$

Il existe trois classes conjuguées données par

$$\begin{aligned}
\rho(\mu) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \\
\rho(\mu) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 1 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \\
\rho(\mu) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_2 & 1 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$*cas :* $\lambda_1 = \lambda_2 (:= \lambda), \mu_1 \neq \mu_2$ *et* $\nu_1 \neq \nu_2$.

Il existe trois classes conjuguées

$$\begin{aligned}
\rho(\mu) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \\
\rho(\mu) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \\
\rho(\mu) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$3^{\text{ème}}$*cas* : $\lambda_1 \neq \lambda_2, \mu_1 = \mu_2 \,(:= \mu)$ *et* $\nu_1 \neq \nu_2$.

Il existe trois classes conjuguées

$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$
$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$
$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

$4^{\text{ème}}$*cas* : $\lambda_1 \neq \lambda_2, \mu_1 \neq \mu_2$ *et* $\nu_1 = \nu_2 \,(:= \nu)$.

Il existe trois classes conjuguées

$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & \lambda_1^{-1} \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \rho(\mu\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix},$$
$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_2 & \lambda_2^{-1} \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \rho(\mu\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix},$$
$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \rho(\mu\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

$5^{\text{ème}}$*cas* : $\lambda_1 = \lambda_2 \,(:= \lambda), \mu_1 = \mu_2 \,(:= \mu)$ *et* $\nu_1 = \nu_2 \,(:= \nu)$.

Il existe une famille paramétrée de classes conjuguées

$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix} (b \in \mathbb{C}),$$

et les deux classes

$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu & \delta \\ 0 & \mu \end{pmatrix} (\delta = 0, 1).$$

Preuve (Voir [Kim91, page 82]). ■

Lemme 3.4.1 *Soit P une matrice 2×2 non-singulière.*
(i) Si P commute avec $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, *alors P est de la forme* $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$,

et on a : $P.\begin{pmatrix} \mu_1 & \delta \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.P^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & pq^{-1}\delta \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$.

(ii) *Si* P *commute avec* $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, *alors* P *est de la forme* $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$, *et on a :*

$$P.\begin{pmatrix} \mu_1 & \delta \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.P^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & p^{-1}q(\mu_2 - \mu_1) + \delta \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

3.5 Monodromie de l'équation hypergéométrique

3.5.1 Calcul du groupe de monodromie par la relation de Fuchs

Considérons l'équation de Riemann $E(\rho, \sigma, \tau)$ associée au schéma de Riemann

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \rho_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \rho_2 & \sigma_2 & \tau_2 \end{pmatrix},$$

L'objet de cette section sera de déterminer la monodromie de l'équation de Riemann $E(\rho, \sigma, \tau)$ en utilisant les propriétés locales (exposants) et la relation de Fuchs. Bien que, dans cette méthode, la représentation de monodromie ne soit pas donnée, toutefois nous pouvons connaître la monodromie pour des valeurs arbitraires des exposants caractéristiques $\rho_i, \sigma_j, \tau_k\,(i, j, k = 1, 2)$. En particulier, une représentation de rang 2 peut être vue comme la monodromie d'une équation de Riemann donnée (voir corollaire 3.6.1). Notons que la monodromie dépend uniquement de l'équation de Riemann, celle-là dépend uniquement des exposants caractéristiques, d'où, sa monodromie peut être caractérisée uniquement en terme de ses exposants caractéristiques.

Soient $G = \pi_1(\mathbf{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}, b)$ et b un point de $\mathbf{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$. Soient γ_0, γ_1 et γ_∞ trois lacets basés en b. On peut aisément démontrer que le groupe fondamental G est isomorphe au groupe libre engendré par γ_0 et γ_1, γ_∞ est donné par : $\gamma_\infty^{-1} = \gamma_1\gamma_0$.

Remarque 3.5.1 $\gamma_1\gamma_0$ *et* $\gamma_0\gamma_1$ *sont conjugués en effet,* $\gamma_0\gamma_1 = \gamma_0(\gamma_1\gamma_0)\gamma_0^{-1} = \gamma_1^{-1}(\gamma_1\gamma_0)\gamma_1$.

Soit $\rho : G \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$ la représentation de monodromie de l'équation de Riemann $E(\rho, \sigma, \tau)$. On a : $\rho(\gamma_1\gamma_0) = \rho(\gamma_\infty)^{-1}$.
Posons

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(\rho_1), \varepsilon(\rho_2)\} &: \text{ l'ensemble des valeurs propres de } \rho(\gamma_0), \\ \{\varepsilon(\sigma_1), \varepsilon(\sigma_2)\} &: \text{ l'ensemble des valeurs propres de } \rho(\gamma_1), \\ \{\varepsilon(-\tau_1), \varepsilon(-\tau_2)\} &: \text{ l'ensemble des valeurs propres de } \rho(\gamma_0\gamma_1), \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

où $\varepsilon(.) = \exp(2\pi i.)$. Ainsi, en posant $\lambda_j = \varepsilon(\rho_j), \mu_j = \varepsilon(\sigma_j)$ et $\nu_j = \varepsilon(-\tau_j)$, on tombe dans le cas du théorème précédent (*section* 3.4, *théorème* 3.4.1). D'après ce théorème la monodromie de $E(\rho, \sigma, \tau)$ est complètement déterminée par l'ensemble des valeurs propres (3.5.1) si celle-ci est irréductible.

Définition 3.5.1 *L'équation de Riemann $E(\rho, \sigma, \tau)$ est dite (ir)réductible si sa monodromie est (ir)réductible.*

a) Le cas irréductible

Comme conséquence immédiate du théorème (3.4.1) (i) et (ii), on obtient le résultat suivant,

Théorème 3.5.1 *L'équation de Riemann $E(\rho, \sigma, \tau)$ est irréductible si, et seulement si*

$$\rho_i + \sigma_j + \tau_k \notin \mathbb{Z} \quad (i, j, k = 1, 2).$$

Dans ce cas, l'application ρ est représentée, à une conjuguaison près, par les matrices :

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho_1) & 1 \\ 0 & \varepsilon(\rho_2) \end{pmatrix}, \ \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma_1) & 0 \\ b & \varepsilon(\sigma_2) \end{pmatrix},$$

où : $b = \varepsilon(-\tau_1) + \varepsilon(-\tau_2) - \varepsilon(\rho_1 + \sigma_1) - \varepsilon(\rho_2 + \sigma_2)$,
$\varepsilon(.) = \exp(2i\pi.)$.

b) Le cas réductible

Traitons maintenant le cas réductible qui est plus compliqué que le cas irréductible. Rappelons que la classe d'une représentation réductible ne peut être déterminée seulement par les valeurs propres, ainsi la monodromie de l'équation $E(\rho,\sigma,\tau)$ ne peut être déterminée par les exponentiels des exposants caractéristiques ρ_i,σ_j,τ_k $(i,j,k=1,2)$. Bien évidemment, la monodromie est déterminée en terme des exposants caractéristiques ρ_i,σ_j,τ_k car l'équation de Riemann est uniquement déterminée par ceux-là, l'idée de base est de savoir quand est ce que une singularité est logarithmique ou non ?.

Notons : $\langle m\rangle = \begin{cases} \varnothing \text{ si } m=0 \\ \{1,2,...,m\} \text{ si } m\in\mathbb{N} \end{cases}$,
$\varepsilon(.) = \exp(2\pi i.)$.

Théorème 3.5.2 *Supposons que l'équation de Riemann $E(\rho,\sigma,\tau)$ est réductible i.e, $\rho_i+\sigma_j+\tau_k\in\mathbb{Z}$ $(i,j,k=1,2)$, alors $\rho(\gamma_0)$ et $\rho(\gamma_1)$ sont données par les matrices suivantes (voir les cas suivants) :*

1^er cas : $\rho_1-\rho_2,\sigma_1-\sigma_2,\tau_1-\tau_2\notin\mathbb{Z}$.

On pourra étiqueter les exposants telle que

$$\rho_1+\sigma_1+\tau_1\in\mathbb{Z}_{\lneqq 0}$$

ce qui est équivalent par la relation de Fuchs à

$$\rho_2+\sigma_2+\tau_2\in\mathbb{N}.$$

La représentation ρ est donnée par

$$\rho(\gamma_0)\longleftrightarrow\begin{pmatrix}\varepsilon(\rho_1) & 0\\ 0 & \varepsilon(\rho_2)\end{pmatrix},\ \rho(\gamma_1)\longleftrightarrow\begin{pmatrix}\varepsilon(\sigma_1) & 1\\ 0 & \varepsilon(\sigma_2)\end{pmatrix}.$$

2^ème cas : $\rho_1-\rho_2\in\mathbb{Z},\sigma_1-\sigma_2\notin\mathbb{Z},\tau_1-\tau_2\notin\mathbb{Z}$.

On pourra étiqueter les exposants en $x=0$ telle que

$$\rho_1-\rho_2\in\mathbb{N}^*.$$

(i) Si $\rho_1+\sigma_i+\tau_j\notin\langle\rho_1-\rho_2\rangle$ $(i,j=1,2)$ i.e, $x=0$ est logarithmique, on peut étiqueter les exposants en $x=1$ et ∞ telle que

$$\rho_1+\sigma_1+\tau_1\in\mathbb{Z}_{\lneqq 0}.$$

ρ est donnée par :

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho) & 1 \\ 0 & \varepsilon(\rho) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\sigma_2) \end{pmatrix}$$

où : $\varepsilon(\rho) := \varepsilon(\rho_1) = \varepsilon(\rho_2)$.

(ii) Si $\rho_1 + \sigma_i + \tau_j \in \langle \rho_1 - \rho_2 \rangle$ $(i, j = 1, 2)$ *i.e,* $x = 0$ *est non-logarithmique,* ρ *est donnée par*

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\rho) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\sigma_2) \end{pmatrix}.$$

3èmecas : $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}, \sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z}, \tau_1 - \tau_2 \notin \mathbb{Z}$.

On peut étiqueter les exposants en $x = 1$ *telle que*

$$\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{N}^*$$

(i) Si $\rho_i + \sigma_1 + \tau_j \notin \langle \sigma_1 - \sigma_2 \rangle$ $(i, j = 1, 2)$ *i.e,* $x = 1$ *est logarithmique.*

On peut étiqueter les exposants en $x = 0$ *et* ∞ *telle que*

$$\rho_1 + \sigma_1 + \tau_1 \in \mathbb{Z}_{\lneqq 0}.$$

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\rho_2) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma) & 1 \\ 0 & \varepsilon(\sigma) \end{pmatrix},$$

où : $\varepsilon(\sigma) := \varepsilon(\sigma_1) = \varepsilon(\sigma_2)$.

(ii) Si $x = 1$ *est non-logarithmique i.e,* $\rho_i + \sigma_1 + \tau_j \in \langle \sigma_1 - \sigma_2 \rangle$ $(i, j = 1, 2)$

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\rho_2) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\sigma) \end{pmatrix}.$$

4èmecas : $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}, \sigma_1 - \sigma_2 \notin \mathbb{Z}, \tau_1 - \tau_2 \in \mathbb{Z}$.

Nous étiquetons les exposants en $x = \infty$ *telle que*

$$\tau_1 - \tau_2 \in \mathbb{N}^*,$$

(i) Si $\rho_i + \sigma_j + \tau_1 \notin \langle \tau_1 - \tau_2 \rangle$ $(i, j = 1, 2)$ *i.e,* $x = \infty$ *est logarithmique.*

On peut étiqueter les exposants en $x = 0$ *et* 1 *telle que*

$$\rho_1 + \sigma_1 + \tau_1 \in \mathbb{Z}_{\lneqq 0}.$$

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\rho_2) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma_1) & \varepsilon(\rho_1)^{-1} \\ 0 & \varepsilon(\sigma_2) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_0\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\tau) & 1 \\ 0 & \varepsilon(\tau) \end{pmatrix},$$

où : $\varepsilon(\tau) := \varepsilon(\tau_1) = \varepsilon(\tau_2)$.

(ii) *Si* $x = \infty$ *est non-logarithmique, i.e* $\rho_i + \sigma_j + \tau_1 \in \langle \tau_1 - \tau_2 \rangle \,(i, j = 1, 2)$.

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\rho_2) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\sigma_2) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_0\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\tau) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\tau) \end{pmatrix}.$$

$5^{ème}$*cas :* $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}, \sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z}, \tau_1 - \tau_2 \in \mathbb{Z}$.

Nous étiquetons les exposants telle que

$$\rho_1 - \rho_2, \sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{N}^*,$$

On pose, $\varepsilon(\rho) := \varepsilon(\rho_1) = \varepsilon(\rho_2)$ *et* $\varepsilon(\sigma) := \varepsilon(\sigma_1) = \varepsilon(\sigma_2)$.

(i) $x = 0$ *et* 1 *sont logarithmiques*

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho) & 1 \\ 0 & \varepsilon(\rho) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma) & -\varepsilon(\sigma - \rho) \\ 0 & \varepsilon(\sigma) \end{pmatrix},$$

(ii) $x = 0$ *logarithmique et* $x = 1$ *est non-logarithmique.*

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho) & 1 \\ 0 & \varepsilon(\rho) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\sigma) \end{pmatrix},$$

(iii) $x = 0$ *est non-logarithmique et* $x = 1$ *est logarithmique.*

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\rho) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma) & 1 \\ 0 & \varepsilon(\sigma) \end{pmatrix},$$

(Vi) $x = 0$ *et* $x = 1$ *sont non-logarithmiques.*

$$\rho(\gamma_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\rho) \end{pmatrix}, \rho(\gamma_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma) & 0 \\ 0 & \varepsilon(\sigma) \end{pmatrix},$$

Corollaire 3.5.1 *Excepté les cas mentionnés ci-dessous, toute classe conjuguée d'une représentation de rang 2 d'un groupe libre à deux générateurs peut être réalisée comme la monodromie d'une équation de Riemann.*

Les cas exclus ce sont les cas dont les classes sont déterminées par les représentations suivantes :

$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

où : $\lambda_i,\ \mu_j \in \mathbb{C}^*,\ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu_1 \neq \mu_2,\ \lambda_1\mu_1 \neq \lambda_2\mu_2$;

et

$$\rho(\mu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \rho(\nu) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

où : $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}$ *et* $b \neq -\dfrac{\mu}{\lambda}$.

Lemme 3.5.1 *(i) Supposons que* $\mathrm{Re}(\rho_1) \geq \mathrm{Re}(\rho_2)$. *L'équation de Riemann* $E(\rho, \sigma, \tau)$ *admet une singularité logarithmique en* $x = 0$ *si, et seulement si la condition suivante est vérifiée :*

$$\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_1 + \sigma_i + \tau_j \notin \langle \rho_1 - \rho_2 \rangle \quad (i, j = 1, 2).$$

(ii) Supposons que $\mathrm{Re}(\sigma_1) \geq \mathrm{Re}(\sigma_2)$. *L'équation de Riemann* $E(\rho, \sigma, \tau)$ *admet une singularité logarithmique en* $x = 1$ *si, et seulement si la condition suivante est vérifiée :*

$$\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_i + \sigma_1 + \tau_j \notin \langle \sigma_1 - \sigma_2 \rangle \quad (i, j = 1, 2).$$

Preuve (Voir [Kim91, page 92]). ■

3.5.2 Exemples

a) $z(1-z)y'' + \frac{1}{2}y' + 2y = 0, \qquad (E_8)$ (hypergéométrique de Gauss)

$1^{\text{ère}}$Méthode : Le calcul de $\mathrm{MG}_{(E_8)}$ se fait directement

Les points singuliers sur $\mathbf{P}^1$ de (E_8) sont $0, 1$ et ∞;

Soit $\chi = \left(f_1(z) = 8z^2 - 12z + 3, f_2(z) = (z-1)\sqrt{z}\sqrt{z-1}\right)$ un système fondamental de solutions de (E_8) au voisinage de $a_0 = \dfrac{1}{2}$ (et de tout point de $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$).

On a $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \approx F(\alpha_1, \alpha_2)$ le groupe libre à deux générateurs.

On associe au générateur α_1 le lacet γ_0 qui consiste à faire un tour autour de 0 (remplacer z par $ze^{2i\pi}$).

$(f_1(ze^{2i\pi}), f_2(ze^{2i\pi})) = (f_1(z), f_2(z)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d'où :

$$\begin{array}{llll} \rho: & F(\alpha_1,\alpha_2) & \longrightarrow & GL(2,\mathbb{C}) \\ & \alpha_1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_1, \end{array}$$

On associe au générateur α_2 le lacet γ_1 qui consiste à faire un tour autour de 1 (remplacer $(z-1)$ par $(z-1)e^{2i\pi}$).

$(f_1((z-1)e^{2i\pi})+1, f_2((z-1)e^{2i\pi})+1) = (f_1(z), f_2(z)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d'où :

$$\begin{array}{llll} \rho: & F(\alpha_1,\alpha_2) & \longrightarrow & GL(2,\mathbb{C}) \\ & \alpha_2 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_2, \end{array}$$

Le groupe de monodromie de (E_8) est le sous-groupe de $GL(2,\mathbb{C})$ engendré par M_1 et M_2, il est donné par :

$$MG_{(E_8)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n / n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \approx \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, + \right).$$

$2^{ème}$ Méthode : Le calcul de $MG_{(E_8)}$ par la méthode de Riemann.

On a : $a = 1, b = -2, c = \frac{1}{2}$, le schéma de Riemann de (E_8) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \rho_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \rho_2 & \sigma_2 & \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-b-a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

On a : $\rho_1 + \sigma_1 + \tau_1 = 1 \in \mathbb{Z}$: c'est le cas réductible.

$\rho_1 - \rho_2 = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ et $\sigma_1 - \sigma_2 = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ et $\tau_1 - \tau_2 = 3 \in \mathbb{Z}$.

On est dans le sous-cas $(4)(ii)$ car $\rho_1 + \sigma_1 + \tau_1 = 1 \in \langle \tau_1 - \tau_2 \rangle = \{1, 2, 3\}$.

La matrice de monodromie autour de 0 est : $M_1 = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\rho_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice de monodromie autour de 1 est : $M_2 = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\sigma_1} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\sigma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le groupe de monodromie de (E_8) est le sous-groupe de $GL(2,\mathbb{C})$ engendré par M_1 et M_2, il est donné par :

$$MG_{(E_8)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n / n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) $z(1-z)y'' + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}z\right)y' + \frac{1}{18}y = 0, \qquad (E_9)$ (hypergéométrique de Gauss).

$1^{ère}$ Méthode : Le calcul de $MG_{(E_9)}$ par la méthode de Riemann.

On a : $a = \dfrac{1}{3}, b = -\dfrac{1}{6}, c = \dfrac{1}{2}$, et le schéma de Riemann de (E_9) est alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \rho_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \rho_2 & \sigma_2 & \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-b-a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

On a : $\rho_i + \sigma_j + \tau_k \notin \mathbb{Z}$ pour tous $i, j, k = 0, 1$: c'est le cas irréductible.

La matrcie de monodromie autour de 0 est $M_1 = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\rho_1} & 1 \\ 0 & e^{2i\pi\rho_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrcie de monodromie autour de 1 est $M_2 = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\sigma_1} & 0 \\ b & e^{2i\pi\sigma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}$.

avec : $b = e^{-2i\pi\tau_1} + e^{-2i\pi\tau_2} - e^{2i\pi(\rho_1+\sigma_1)} - e^{2i\pi(\rho_2+\sigma_2)} = -1 + e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Le groupe de monodromie de (E_9) est le sous groupe de $GL(2,\mathbb{C})$ engendré par M_1 et M_2.

$2^{ème}$ Méthode : Le calcul de $MG_{(E_9)}$ se fait directement.

Soit $\chi = \left(f_1(z) = (1+\sqrt{z})^{\frac{1}{3}}, f_2(z) = (1-\sqrt{z})^{\frac{1}{3}} \right)$ un système fondamental de solutions de (E_9) au voisinage de $a_0 = \frac{1}{2}$.

On a $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}) \approx F(\alpha_1, \alpha_2)$ le groupe libre à deux générateurs.

On associe au générateur α_1 le lacet γ_0 qui consiste à faire un tour autour de 0 (remplacer z par $ze^{2i\pi}$)

$$(f_1(ze^{2i\pi}), f_2(ze^{2i\pi})) = (f_1(z), f_2(z)) . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{array}{llll}\rho: & F(\alpha_1,\alpha_2) & \longrightarrow GL(2,\mathbb{C}) & \\ & \alpha_1 & \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{M}_1, & \end{array}$$

On associe au générateur α_2 le lacet γ_1 qui consiste à faire un tour autour de 1 (remplacer $(z-1)$ par $(z-1)\,e^{2i\pi}$)

$(f_1((z-1)\,e^{2i\pi}+1), f_2((z-1)\,e^{2i\pi}+1)) = (f_1(z), f_2(z)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}$

car au voisinage de 1, on a la série de Puisseux suivante :

$(1-z)^{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt[3]{z-1}}{\sqrt[3]{2}}\left(1-\frac{1}{12}(z-1)+\frac{5}{144}(z-1)^2-\frac{13}{648}(z-1)^3+...\right)$

d'où :

$$\begin{array}{llll}\rho: & F(\alpha_1,\alpha_2) & \longrightarrow GL(2,\mathbb{C}) & \\ & \alpha_2 & \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix} = \tilde{M}_2, & \end{array}$$

Le groupe de monodromie de (E_9) est le sous groupe de $GL(2,\mathbb{C})$ engendré par $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$.

Remarque 3.5.2 *Les matrices $\tilde{M}_1$ et M_1 sont conjuguées ainsi que $\tilde{M}_2$ et M_2.*

$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .M_1. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .M_2. \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$

3.6 Application : Réduction des équations différentielles fuchsiennes

Cette partie du chapitre est une application de ce qui a été fait précédemment, notamment dans les sections (3.2) et (3.5), sur des équations de type Fuchs réductibles en l'équation hypergéométrique de Gauss par des transformations linéaires (voir [Kim70]).

3.6.1 Introduction

Nous rappelons que l'équation différentielle hypergéométrique de Gauss écrite sous la forme

$$y^{''}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y^{'}+\frac{\alpha\beta}{z\left(z-1\right)}y=0,$$

où $y'=\dfrac{d}{dz}(y)$ et $y''=\dfrac{d^2}{dz^2}(y)$, est caractérisée comme une équation de Fuchs du second ordre ayant trois singularités régulières en $z=0,1$ et ∞ et des exposants $(0,1-\gamma)\,,(0,1-\delta)\,,(\alpha,\beta)$ en $z=0,1,\infty$ respectivement, où :

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta+1=0.$$

On considère l'équation différentielle fuchsienne d'ordre 2 définie par les données locales suivantes :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & z_1 & ... & z_k & \infty \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon_1 & ... & 1-\varepsilon_k & \beta, \end{array}$$

où les exposants sont liés par la relation de Fuchs :

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta-\varepsilon_1-...-\varepsilon_k+1=0.$$

Une telle équation dépend exactement des k paramètres $\rho_1,...,\rho_k$, et peut être mise sous la forme explicite suivante :

$$w^{''}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon_i}{z-z_i}\right)w^{'}+\frac{\alpha\beta z^k+\rho_1 z^{k-1}+...+\rho_k}{z\left(z-1\right)\prod\limits_{i=1}^{k}\left(z-z_i\right)}w=0. \tag{Hyp}$$

Lorsque $k=1$, cette équation est appelée équation de *Heun*.

Notant que même dans le cas où $k\geq 1$, l'équation (Hyp) contient formellement l'équation hypergéométrique de Gauss comme un cas spécial. En effet, l'équation (Hyp) n'est rien d'autre que l'équation de Gauss précisément quand $\varepsilon_i=0$, $i=1,2,...,k$, et $\alpha\beta z^k+\rho_1 z^{k-1}+...+\rho_k=\alpha\beta\prod\limits_{i=1}^{k}\left(z-z_i\right)$. Ces deux conditions signifient que tous les points z_i sont effectivement réguliers pour l'équation (Hyp), elles sont équivalentes aux conditions suivantes :

$(1)_0$ $\varepsilon_i=0$, $i=1,2,...,k$, i.e, les deux exposants en z_i sont 0 et 1,

(2) Aucune des singularités $z_1, ..., z_k$ n'est logarithmique.

On remplace la condition $(1)_0$ par une autre moins restrictive :

(1) Chaque ε_i est un entier.

D'où les conditions (1) et (2) peuvent être mises sous la suivante :

(3) Toutes les singularités z_i sont *apparentes.*

Remarque 3.6.1 *Si y désigne la solution générale d'une équation différentielle hypergéométrique, alors la fonction définie par :*

$$(4) \qquad Y = P_0(z)\,y + P_1(z)\,y',$$

où P_0 et P_1 sont des fractions rationnelles, satisfait une équation de Fuchs du second ordre dont les singularités, autres que $0, 1$ et ∞, sont toutes apparentes.

De ce fait, une question est alors soulevée : si la condition (3) est satisfaite, l'équation (Hyp) est-elle obtenue à partir d'une équation hypergéométrique par une transformation de la forme (4) ?. On montre par la suite que la réponse à cette question n'est pas toujours affirmative.

M.Hukuhara propose le problème suivant : quelles sont les conditions pour lesquelles l'équation (Hyp) soit obtenue à partir d'une équation hypergéométrique par une transformation de la forme (4), et trouvons de manière explicite cette transformation ?.

L'objet de ce paragraphe est de répondre à ce problème.

3.6.2 Équations équivalentes

Étant donnée deux équations fuchsiennes :

(A) $\qquad y'' + A_1(z)\,y' + A_2(z)\,y = 0,$

(B) $\qquad w'' + B_1(z)\,w' + B_2(z)\,w = 0.$

Théorème 3.6.1 *Supposons que les deux hypothèses suivantes sont vérifées :*

(I) (A) admet le même ensemble de singularités que (B) (certaine singularités peuvent être des points réguliers pour (A) et certaine d'autres des points réguliers pour (B)),

(II) (A) admet le même groupe de monodromie que (B) (étant donné un système fondamental de solutions w_1, w_2 de l'équation (B), il existe un système fondamental de solutions

y_1, y_2 de (A) tel que le groupe de monodromie de (A) relativement à la base y_1, y_2 coincide avec celui de (B) relativement à la base w_1, w_2).
Alors, il existe des fonctions rationnelles $P_0(z)$ et $P_1(z)$ données par :

$$P_0(z) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & w_1^{'} \\ y_2 & w_2^{'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_1 & w^{1} \\ w_2 & w_2^{'} \end{vmatrix}}, \; P_1(z) = \frac{\begin{vmatrix} w_1 & y_1 \\ w_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_1 & w_1^{'} \\ w_2 & w_2^{'} \end{vmatrix}},$$

telle que l'équation (A) est obtenue à partir de (B) par la transformation

$$(P) \qquad y = P_0(z)\, w + P_1(z)\, w^{'}.$$

Inversement, si à partir de l'équation (B) on obtient (A) par la transformation (P), alors les conditions (I) et (II) sont vérifiées.

Remarque 3.6.2 *Il est évident que si y_1, y_2 satisfait la condition (II) du théorème, alors $cy_1, cy_2\,(c \neq 0)$ la satisfait aussi. La fonction $y = cP_0 w + cP_1 w'$, vérifie l'énoncé du théorème et la transformation (P) n'est donc pas unique.*

Définition 3.6.1 *L'équation (A) est dite réductible si elle admet une solution y non triviale satisfaisant une équation de la forme*

$$y^{'} + \tilde{A}(z)\, y = 0,$$

où $\tilde{A}(z)$ est une fraction rationnelle. Autrement, on dit que (A) est irréductible.

Corollaire 3.6.1 *L'équation (A) est irréductible si et seulement si son groupe de monodromie est irréductible.*

Théorème 3.6.2 *Sous les conditions (I) et (II) susmentionnées, supposons de plus que (A) et (B) sont irréductibles. Alors la transformation (P) est unique à une constante multiplicative près.*

Remarque 3.6.3 *Une condition nécessaire et suffisante pourque l'équation de Gauss soit irréductible est que, aucun des paramètres $\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta$ ne soit un entier.*

3.6.3 Calcul du groupe de monodromie

Retournons au problème posé dans l'introduction. En considérant l'équation (Hyp), on supposera encore que :

(a) les singularités z_i, $i = 1, 2, ..., k$, sont toutes apparentes,

(b) l'équation (Hyp) est irréductible.

Théorème 3.6.3 *Sous les conditions (a) et (b), le groupe de monodromie de l'équation* (Hyp) *est engendré par les deux matrices*

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - e^{-2i\pi\alpha} & e^{-2i\pi\gamma} \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2i\pi\beta} - 1 \\ 0 & e^{-2i\pi\delta} \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.6.4 *La condition (b) est équivalente à la condition (b') suivante :*

$$(b^{'}) \quad \alpha \not\equiv 0, \beta \not\equiv 0, \gamma - \alpha \not\equiv 0, \gamma - \beta \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 1)\,.$$

Soit l'équation hypergéométrique définie par les paramètres $\alpha^{'}, \beta^{'}, \gamma^{'}, \delta^{'}$, suivante :

$$y^{''} + \left(\frac{\gamma^{'}}{z} + \frac{\delta^{'}}{z-1}\right) y^{'} + \frac{\alpha^{'}\beta^{'}}{z\,(z-1)} y = 0 \qquad \left(\alpha^{'} + \beta^{'} - \delta^{'} - \gamma^{'} + 1 = 0\right). \tag{3.6.1}$$

On sait que si (3.6.1) est irréductible alors, elle admet les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - e^{-2i\pi\alpha^{'}} & e^{-2i\pi\gamma^{'}} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & e^{-2i\pi\beta^{'}} - 1 \\ 0 & e^{-2i\pi\delta^{'}} \end{pmatrix}$ pour générateurs de son groupe de monodromie, d'où :

Théorème 3.6.5 *Supposons que les hypothèses (a) et (b) sont satisfaites. Si on a :*

$$\alpha^{'} \equiv \alpha, \;\; \beta^{'} \equiv \beta, \;\; \gamma^{'} \equiv \gamma \qquad (\mathrm{mod}\, 1)\,,$$

alors, il existe une application de la forme (P) *transformant l'équation* (3.6.1) *en* (Hyp).

3.6.4 Transformation à coefficients polynômiaux

On continue d'étudier l'équation (Hyp) sous les conditions (a) et (b). Sans perte de généralité on peut supposer que les ε_i sont des entiers négatifs, on pose

$$\varepsilon_i = -n_i, \;\; i = 1, ..., k$$

L'équation (Hyp) s'ecrit donc

$$w^{''}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{z-z_i}\right)w^{'}+\frac{\alpha\beta z^k+\rho_1 z^{k-1}+...+\rho_k}{z\left(z-1\right)\prod\limits_{i=1}^{k}\left(z-z_i\right)}w=0. \tag{E}$$

Si on pose

$$n=n_1+...+n_k,$$

alors, la relation de Fuchs devient

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta+n+1=0. \tag{3.6.2}$$

Soient l et m deux entiers telle que $l+m=n$, et soit l'équation hypergéométrique dont la relation de Fuchs coincide avec celle de l'équation $(3.6.2)$. Elle est donc de la forme

$$y^{''}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y^{'}+\frac{\left(\alpha+l\right)\left(\beta+m\right)}{z\left(z-1\right)}y=0, \tag{3.6.3}$$

Le théorème $(3.6.5)$ assure l'existence d'une transformation de la forme

$$(P)\qquad w=P_0\left(z\right)y+P_1\left(z\right)y^{'}$$

qui transforme l'équation $(3.6.3)$ en (E).

Théorème 3.6.6 *Sous les hypothèses ci-dessus,* $P_0\left(z\right)$ *et* $P_1\left(z\right)$ *sont polynomiaux tels que* $\deg P_1\geq 2$ *et* $P_1\left(0\right)=P_1\left(1\right)=0$.

On va se restreindre au choix particulier où $l=0$, $m=n$. D'où le théorème suivant :

Théorème 3.6.7 *Sous les hypothèses (a) et (b), l'équation* (E) *est obtenue soit à partir de l'équation*

$$y^{''}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y^{'}+\frac{\left(\alpha\right)\left(\beta+n\right)}{z\left(z-1\right)}y=0,$$

via la transformation

$$w=\left(\alpha z^n+p_1 z^{n-1}+...+p_n\right)y+z\left(z-1\right)\left(z^{n-1}+q_2 z^{n-2}+...+q_n\right)y^{'},$$

si $\alpha-\beta\neq 1,2,...,n-1,$ *ou à partir de l'équation*

$$y^{''}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y^{'}+\frac{\left(\alpha+n\right)\left(\beta\right)}{z\left(z-1\right)}y=0,$$

via la transformation

$$w = \left(\beta z^n + p_1^{'} z^{n-1} + ... + p_n^{'}\right) y + z\left(z-1\right)\left(z^{n-1} + q_2^{'} z^{n-2} + ... + q_n^{'}\right) y^{'},$$

si $\beta - \alpha \neq 1, 2, ..., n-1$.

Exemple 3.6.1 *Soit l'équation*

$$y^{''} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} - \frac{1}{z-z_1}\right) y^{'} + \frac{\alpha\beta z + \rho}{z\left(z-1\right)\left(z-z_1\right)} y = 0, \qquad (E_{10})$$

correspondant au cas $k = 1$, $n = 1$ *dans l'équation* (E) *et où,* $\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2 = 0$. *La condition* $z = z_1$ *est non-logarithmique est donnée par :*

$$\left(\alpha\beta z_1 + \rho\right)^2 + \left(\left(\alpha+\beta\right) z_1 - \gamma + 1\right)\left(\alpha\beta z_1 + \rho\right) + \alpha\beta z_1\left(z_1 - 1\right) = 0.$$

La transformation linéaire suivante :

$$w = \left(\alpha z + p\right) y + z\left(z-1\right) y^{'}$$

transforme l'équation de Gauss

$$y^{''} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1}\right) y^{'} + \frac{\alpha\left(\beta+1\right)}{z\left(z-1\right)} y = 0$$

en l'équation de Heun (E_{10}). *On obtient :*

$$\begin{array}{rcl} p & = & \alpha\beta z_1 + \rho + \beta z_1 - \gamma + 1 \\ a & = & \dfrac{-p\left(p+\gamma-1\right)}{\left(\alpha-\beta\right) p - \alpha\left(\beta-\gamma+1\right)} \\ \rho & = & \dfrac{\alpha\left(p+\gamma-1\right)\left(\left(\beta+1\right) p - \left(\beta-\gamma+1\right)\right)}{\left(\alpha-\beta\right) p - \alpha\left(\beta-\gamma+1\right)} \end{array}$$

Remarque 3.6.4 *Si l'équation* (E) *est réductible, alors elle ne peut en général être obtenue à partir d'une équation différentielle hypergéométrique. Toutefois, il existe une classe d'équations réductibles qui sont obtenues à partir d'une classe spéciale d'équations hypergéométrique dite d'Euler et définie par :* $z^2 y^{''} + b_1 z y^{'} + b_2 y = 0$, b_1 *et* b_2 *constantes.*

Note historique

Le mot « monodrome » était utilisé par Cauchy pour qualifier une fonction holomorphe *univaluée.* Une fonction multivaluée admet en dehors de ses points de branchement différentes déterminations (différentes « monodromies »). Par prolongement analytique autour d'un point de branchement z_0, on passe d'une détermination à une autre. Ces changements de détermination (ou « de monodromie») forment un groupe : le groupe (des transformations) de monodromie de f en z_0. On a pris l'habitude de dire qu'il « n'y a pas de monodromie » quand ce groupe n'a pas d'autre élément que l'identité, i.e. quand la fonction est « monodrome » au sens de Cauchy! Bref, on a identifié les « monodromies » et les *changements* de « monodromie ». (Il est d'ailleurs arrivé la même chose au mot « permutation ».).

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons traité la monodromie des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients polynomiaux dans le champ complexe, dont l'équation hypergéométrique de Gauss, l'équation de Heun et l'équation hypergéométrique généralisée. Le groupe de monodromie est le groupe des permutations des solutions d'une équation différentielle, il consiste à déterminer le comportement des solutions autour des singularités. En effet, l'uniformité des solutions est équivalente à la trivialité de ce groupe, et l'algébricité des solutions se traduit par la finitude de ce groupe (pour les équations fuchsiennes).

Les perspectives que ce travail pourrait apporter sont nombreuses en l'occurrence, l'étendre aux équations linéaires d'ordre supérieur ainsi qu'aux équations aux q-différence.

Bibliographie

[AAR99] G.E.Andrews, Richard Askey and Ranjan Roy. *Special functions*, Cambridge University Press, 1999.

[AG29] Paul Appell et Edouard Goursat. *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.* Paris, Gauthier-Villars et C^{ie}, Editeurs, 1929.

[Bal80] F.Baldassarri. *On second-order linear differential equations with algebraic solutions on algebraic curves. Amer.J.Math*, 102 (3): 517-535, 1980.

[Bal81] F.Baldassarri. *On algebraic solutions of Lamé's differential equation. J. Differential Equations*, 41 (1): 44-58, 1981.

[Bal87] F.Baldassarri. *Algebraic solutions of the Lamé equation and torsion of elliptic curves* (italian).*In Proceesings of the Geometry Conference* (Milan and Gargnano, 1987), volume 57, pages 203-213 (1989), 1987.

[BD79] F.Baldassarri and B. Dwork. *On second order linear differential equations with algebraic solutions. Amer. J. Math.*, 101 (1): 42-76, 1979.

[Beh06] D.Behloul, *Solutions polynomiales et solutions rationnelles de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Thèse de doctorat d'état, Faculté de mathématiques, USTHB, 2006.

[Beu98] Frits Beukers. *The Diophantine equation* $Ax^p + By^q = Cz^r$. *Duke Math. J*, 91(1): 61-88, 1998.

[Bir94] Bryan Birch. *Noncongruence subgroups*, covers and drawings. *In The Grothendieck theory of dessins d'enfants (Lumminy, 1993)*, pages 25-46. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[Bur55] W.Burnside. *Theory of groups of finite order.* Dover Publications Inc, New York, 1955. 2d ed.

[Chi95] Bruno Chiarellotto. *On Lamé operators wich are pull-backs of hypergeometric ones. Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(8): 2753-2780, 1995.

[Mal00] B. Malgrange : *Monodromie, phase stationnaire et polynôme de Bernstein-Sato.* Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, volume 1, leçon 6 (2000), pp. 145-170.

[Coh76] Arjeh M. Cohen. *Finite complex reflection groups. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4), 9(3): 379-436, 1976.

[For81] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces.* Springer-Verlag, New-York, 1981. Translated from the German by Bruce Gilligan.

[For75] L. Fuchs. *Ueber die linearen Differentialgleichingen zweiter Ordnung welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. J. Reine Angew. Math.*, 81: 97-142, 1875.

[Fuc78] L. Fuchs. *Ueber die linearen Differentialgleichingen zweiter Ordnung welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie, zweite Abhandlung. J. Reine Angew. Math.*, 85: 1-25, 1878.

[Gra86] Jeremy Gray. *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré.* Brkhäuser Boston Inc., MA, 1986.

[Gou81] Édouard Goursat. *Sur l'équation différentielle linéaire, qui admet pour intégrale la série hypergéométrique.* Annales scientifiques de l'E.N.S. 2[e] série, tome 10 (1881), p. 3-142 (supplément).

[Hil76] Einar Hille. *Ordinary differential equations in the complex domain.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons] , New-York, 1976. Pure and Applied Mathematics.

[Inc44] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations.* Dover Publications, New-York, 1944.

[Isa94] I. Martin Isaacs. *Character theory of finite groups.* Dover Publications Inc., New-York, 1944. Corrected reprint of the 1976 original [Academic Press, New-York] .

[Kat72] Nicholas M. Katz. *Algebraic solutions of differential equations (pcurvature and the Hodge filtration). Invent Math.*, 18: 1-118, 1972.

[Kim91] Hironobu Kimura and al. *From Gauss to Painlevé*, Aspects of mathematics (16), 1991.

[Kim70] Tosihusa Kimura. *On Fuchsian Differential Equations Reducible to Hypergeometric Equations by Linear Transformations.* Funkcialaj Ekvacioj, 13 (1970), 213 - 232.

[Kle84] Felix Klein. *Vorlesungen über das Ikosaeder.* B. G. Teubner, Leipzing, 1884.

[Kle56] Felix Klein. *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree.* Dover Publications Inc., New York, N.Y., revised edition, 1956. Translated into English by George Gavin Morrice.

[Kov86] Jerald J. Kovacic. *An algorithm for solving second order linear homogeneous dofferential equations. J. Symbolic Comput.*, 2 (1): 343, 1986.

[MR99] Juan J. Morales Ruiz. *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[Olv74] F.W.J Olver. *Asymptotic and special functions.* Academic Press INC, New-York, 1974.

[Poo36] E. G. C. Poole. *Introduction to the Theory of Linear Differential Equations.* Oxford Univ. Press, London, 1936.

[Rie54] B. Riemann : *Contribution à la théorie des fonctions représentables par la série de Gauss* F(α,β, γ; x), 1854.

[Rud75] Walter Rudin : *Analyse réelle et complexe*. MASSON C[ie], Paris, 1975. Traduit de l'Américain par N.DHOMBRES et F.HOFFMAN.

[Sau09] J.Sauloy : Equations fonctionnelles analytiques dans le champ complexe (cours de troisième cycle, premier niveau, 2004/2005), 2009.

[Sch73] H. A. Schwarz. *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstell*t. *J. Reine Angew. Math.*, 75: 292-335, 1873.

[Sil86] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*. Springer Verlag, New-York, 1986.

[Spa81] E. Spanier. *Algebraic topology*, Tata McGraw-Hill, 1981.

[ST54] G. C. Shephard and J. A. Todd. *Finite unitary reflection groups*. *Canadian J. Math.*, 6: 274-304, 1954.

[SU97] Michael F. Singer and Felix Ulmer. *Linear differential equations and products of linear forms*. *J. Pure Appl. Algebra*, 117/118: 549-563, 1997. Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996).

[Tou87] E.Tournier. *Solutions formelles d'équations différentielles*, Thèse de doctorat d'état, Université de Grenoble I, 1987.

[Vdp98] Marius van der Put and Felix Ulmer. *Differential equations and finite groups*. *MSRI preprint* 1998-058, 1998.

[Vdp] Marius van der Put. *Grothendieck's conjecture for the Risch equation* $y' = ay + b$. Preprint Department of Mathematics, University of Groningen, (http://www.math.rug.nl/~vdput/).

[HRUW99] Mark van Hoeij, Jean-François Ragot, Felix Ulmer, and Jacques-Arthur Weil. *Liouvillian solutions of linear differential equations of order three and higher*. *J. Symbolic Comput.*, 28 (4-5): 589-609, 1999. Differential algebra and differential equations.

[vHW97] Mark van Hoeij and Jacques-Arthur Weil. *An algorithm for computing invariants of differential Galois groups. J. Pure Appl. Algebra,* 117/118: 353-379, 1997. Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996).

[WW50] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1950. Reprint of the 1927 fourth eddition.