



**Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene**

**Faculté des Sciences Mathématiques**

**Thèse**

Présentée Pour l'obtention du grade de

**Magister**

En Mathématiques

**Spécialité : Recherche opérationnelle**

**Option : Mathématiques de gestion**

Par

**Meddour Nardjes**

**Thème**

**Etude de quelques méthodes de résolution du problème**

**du stable maximum**

Soutenu le : 19 juin 2005

Devant le jury composé de :

MOULAI Mustapha

MC. USTHB

Président.

BERRACHEDI Abdelhafid

PR. USTHB

Directeur de thèse.

AIT HADADENE Hacène

MC. USTHB

Examineur.

BOUCHEMAKH Isma

MC. USTHB

Examinatrice.

BENMEZIANE Zineb

CC. USTHB

Examinatrice.

## *Remerciement*

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à ceux qui m'ont permis de mettre ce travail à jour, mon promoteur *Mr BERRACHEDI* ainsi qu'à *Mme BENMEZIANE*, pour leurs assistances, leurs conseils et leurs compréhensions.

Mes vifs remerciements pour *Mr MOULAI*, qui me fait l'honneur de présider le jury.

À *Mr AIT HADDADENE* et *Mme BOUCHEMAKH* qui ont accepté d'examiner ce modeste travail.

À tous ce qui m'ont aidé mille merci.

# ***J Sommaire k***

<b>Résumé</b> .....	3
<b>Introduction générale</b> .....	4
<b>1. Définitions et notations</b> .....	7
<b>2. Résolution du problème du stable maximum par la Struction</b> .....	16
1. Introduction .....	17
2. Description de la struction .....	20
2.1 Algorithme de construction de $G'$ à partir de $G$ .....	20
2.2 Inconvénients de la struction .....	22
3. Application de la struction à quelques classes de graphes .....	23
3.1 Les graphes sans CAN .....	24
3.2 Les graphes sans CN .....	26
3.3 La sous classe $\Gamma$ des graphes sans chaise, sans net .....	27
4. Généralisation de la struction : La struction totale .....	28
4.1 Algorithme de construction de $S(G, H, p)$ à partir de $G$ .....	28
4.2 Avantage de la struction totale .....	30
5. Application de la struction totale à quelques classes de graphes .....	32
5.1 Les graphes sans chaise, sans taureaux .....	32
<b>3. Résolution du problème du stable maximum par la méthode des graphes augmentants</b> .....	34
1. Introduction .....	35
2. Application de la méthode des graphes augmentants dans quelques classes de graphes .....	38
2.1 Les graphes sans étoile .....	38
2.2 Les graphes sans $P_4$ .....	38
2.3 Les graphes sans chaise .....	38
2.5 Les graphes sans $P_5$ .....	39

a. Réduction du problème .....	39
b. Application aux graphes sans $(P_5, K_{2m,-e})$ .....	41
2.6 Les graphes sans bannière $_2$ .....	42
2.7 Les graphes sans bannière .....	43
a. Graphes augmentants minimaux sans (bannière, $S_{l, 2,4}$ ) .....	43
b. Graphes augmentants minimaux sans (bannière, $P_8$ ) .....	44
3. Résumé des cas polynomialement résolus par la méthode des graphes augmentants dans les graphes sans $P_5$ et dans les graphes sans bannière .....	46
3.1 Dans les graphes sans $P_5$ .....	46
3.2 Dans les graphes sans bannière .....	47
<b>4. Nombre de stabilité dans la classe <math>\Gamma'</math> de graphes</b> .....	<b>48</b>
1. Introduction .....	49
2. Struction des graphes de la classe $\Gamma'$ .....	50
3. Fermeture de la classe $\Gamma'$ .....	56
4. Nombre de stabilité dans la classe $\Gamma'$ .....	64
5. Quelques domaines d'application du stable maximum .....	65
Conclusion générale .....	66
Références bibliographiques .....	67

# Résumé

Le problème du stable maximum est l'un des problèmes d'optimisation combinatoire difficiles, classé parmi les problèmes NP-dur.

En effet, il n'existe pas d'algorithme général qui peut résoudre le problème du stable maximum dans les graphes, ce qui a conduit les chercheurs à l'étude de ce problème dans des classes spéciales de graphes.

Plusieurs méthodes ont été établies afin de trouver des algorithmes permettant de calculer le nombre de stabilité en temps polynomial dans des classes particulières de graphes.

Nous nous sommes intéressés à l'étude de deux méthodes : la struction, et la méthode des graphes augmentants. Nous avons cité certaines classes de graphes où l'application de ces deux méthodes permet de donner le nombre de stabilité en temps polynomial.

Nous avons défini une classe de graphes  $\Gamma'$  : Cette classe est caractérisée par deux sous graphes induits interdits qui sont la chaise et le net et possédant la propriété que l'ensemble des centres d'étoiles est réunion de graphes complets. Cette classe généralise la classe  $\Gamma$ , introduite dans [1] et pour laquelle un algorithme polynomial pour la résolution du problème du stable maximum a été trouvé.

Nous avons montré que l'application de la struction avec quelques modifications, résout le problème du stable maximum en temps polynomial dans la classe  $\Gamma'$ .

# Introduction Générale

Le recours à la théorie des graphes a souvent pour objet de simplifier et de mieux comprendre certains problèmes de la vie courante. En fait plusieurs solutions efficaces ont été tirées à partir de schémas correspondants à des situations ou à des phénomènes du monde réel, et de figures géométriques simples qui sont des caractéristiques de la théorie des graphes.

Le mathématicien suisse Léonhard Euler est le premier à avoir donné un résultat formel de la théorie des graphes lorsqu'il a résolu le fameux problème « des sept ponts de Königsberg » en 1736, depuis la théorie des graphes ne cesse de se développer notamment au 20<sup>ème</sup> siècle grâce aux travaux de P.Hall [17], C.Shannon [26] et C.Berge [6].

L'évolution des mathématiques et le développement de l'outil informatique ont permis l'application de la théorie des graphes dans différents domaines tel que : l'industrie, l'économie, le transport . . . , en donnant des méthodes et des algorithmes de résolution de certains problèmes.

Parmi les problèmes de la théorie des graphes figurent les problèmes d'optimisation combinatoire. Un de ces problèmes d'optimisation est celui du stable de cardinalité maximum.

Le thème de notre thèse porte sur le problème du stable de cardinalité maximum : Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  ; trouver un ensemble  $S$  de sommets deux à deux non adjacents et de cardinalité maximum. La cardinalité d'un tel ensemble est appelée nombre de stabilité de  $G$  et est notée  $\alpha(G)$ . Le problème du stable de cardinalité maximum est un problème difficile, il a été démontré qu'il appartient à la classe des problèmes NP-dur.

Nous nous intéressons à l'étude de deux méthodes de résolution du problème du stable maximum dans des classes spéciales de graphes, nous verrons que l'application de ces méthodes dans certaines classes de graphes mène à des algorithmes polynomiaux pour le calcul du nombre de stabilité, Ainsi notre thèse est organisée en quatre principaux chapitres :

Outre ce premier chapitre qui est consacré à l'introduction des définitions nécessaires pour la compréhension de notre thèse, dans le deuxième chapitre, nous présentons une méthode générale permettant de calculer le nombre de stabilité dans un graphe, appelée la structure, introduite par Ebeneger et al [10] qui est basée sur un algorithme que nous citerons.

Cet algorithme s'applique à tous les graphes, mais en général le calcul du nombre de stabilité se fait en temps non polynomial, nous montrons que dans certaines classes de graphes l'application de cet algorithme avec quelques modifications peut résoudre le problème du stable maximum en temps polynomial, enfin nous citons la généralisation de cet algorithme et nous présentons l'application de cet algorithme généralisé dans une classe de graphes.

Dans le troisième chapitre nous abordons une autre méthode de calcul du nombre de stabilité, c'est la méthode des graphes augmentants. Cette méthode s'inspire de l'algorithme d'Edmonds [11] pour la résolution du problème du couplage maximum. Son application dans quelques classes de graphes mène à des algorithmes polynomiaux pour le calcul du nombre de stabilité à partir de la caractérisation des graphes augmentants dans ces classes de graphes.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du problème du stable maximum dans la classe de graphes  $\Gamma'$ , qui forme une généralisation de la classe définie dans [1].

Nous définissons d'abord la classe  $\Gamma'$ , puis nous donnons un algorithme basé sur la construction pour calculer le nombre de stabilité dans cette classe de graphes, ensuite nous prouvons la fermeture de cette classe pour cet algorithme et nous montrons que le problème du stable maximum est polynomiale dans cette classe de graphes. Nous citons enfin quelques domaines d'applications du stable maximum.



# *Chapitre 1*

## **Définitions et notations**

**1. Introduction** Afin d'éviter toute ambiguïté, la plus part des termes et des concepts de la théorie des graphes figurants le long de cette thèse sont ceux de l'ouvrage de C.Berge [7]. Cependant, nous précisons quelques autres notations et notions qui seront utilisées dans la suite.

## 2. Graphes, sous graphes

### 2.1 Définitions préliminaires

**Définition 1** Soit  $V$  un ensemble de  $n$  éléments et  $E$  une relation définie sur l'ensemble  $V$ .

L'ensemble  $\{(x, y) \in V \text{ tel que } (x, y) \in E\}$  est le *graphe* de la relation  $E$ , et est noté par  $G = (V, E)$ .

L'ensemble  $V = V(G)$  est appelé l'*ensemble des sommets* de  $G$ .

Toute paire de sommets  $(x, y) \in E$  est appelée *arête* de  $G$ , et est noté  $e = (x, y)$  ainsi  $E = E(G)$  est l'ensemble des arêtes de  $G$ .

$|V|$  est le nombre de sommets de  $G$ , si  $|V| = n$ ,  $G$  est dit *d'ordre*  $n$ .

$|E|$  est le nombre d'arêtes de  $G$ , si  $|E| = m$ ,  $G$  est dit de *taille*  $m$ .

La configuration géométrique du graphe  $G = (V, E)$  se fait en représentant les sommets Par des points et les arêtes qui les relie par des lignes pointillées comme l'illustre la figure 1.1.

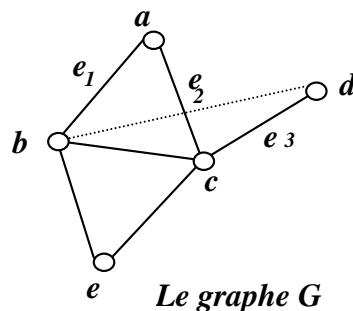


Figure 1.1

Deux sommets reliés par une arête sont dit *sommets adjacents* ou *sommets voisins*, c'est le cas des extrémités  $a$  et  $b$  qui sont reliées par l'arête  $e_1$  de la figure 1.1.

Deux arêtes possédant une extrémité commune sont dites *arêtes adjacentes*. Dans le cas contraire elles sont dites *disjointes*.

Dans la figure 1.1 les arêtes  $e_1$  et  $e_2$  sont des arêtes adjacentes puisque elles ont une extrémité commune  $a$ , contrairement aux arêtes  $e_1$  et  $e_3$  qui sont disjointes.

## Chapitre 1

### Définitions et notations

---

Une *boucle* est une arête dont les extrémités sont confondues.

Si plusieurs arêtes relient une même paire de sommets distincts alors ces arêtes sont dites *parallèles* ou *multi - arêtes*.

Un graphe ne contenant ni boucle ni arêtes parallèles est dit *graphe simple*.

**Définition 2** L'ensemble  $\{w \in V(G) \text{ tel que } (v, w) \in E(G)\}$  est appelé *voisinage de v* (ou *bien voisinage ouvert de v*), et il est noté par  $N(v)$ .

Le *voisinage fermé* de  $v$  noté par  $N[v]$  est l'ensemble défini par  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ .

Le *degré* d'un sommet  $v$  dans  $G$  noté  $d_G(v)$  est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

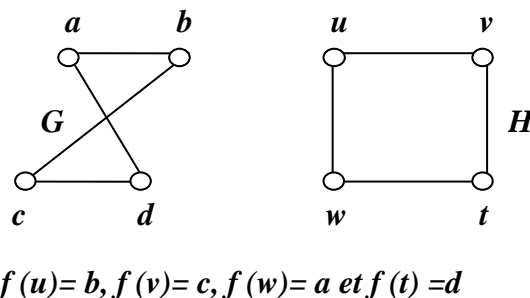
Dans un graphe simple il existe toujours deux sommets de même degré.

**Définition 3** Deux graphes  $H$  et  $G$  sont dits *isomorphes* s'il existe une application  $f$  *bijective* de l'ensemble de sommets  $V(G)$  dans l'ensemble de sommets  $V(H)$  qui préserve l'adjacence c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} f: V(G) &\rightarrow V(H) \\ (x, y) &\rightarrow (f(x), f(y)) \end{aligned}$$

telle que  $(x, y) \in E(G) \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E(H)$ , ainsi nous notons  $G \cong H$ .

Les deux graphes  $G$  et  $H$  illustrés sur la figure 1.2 sont isomorphes.



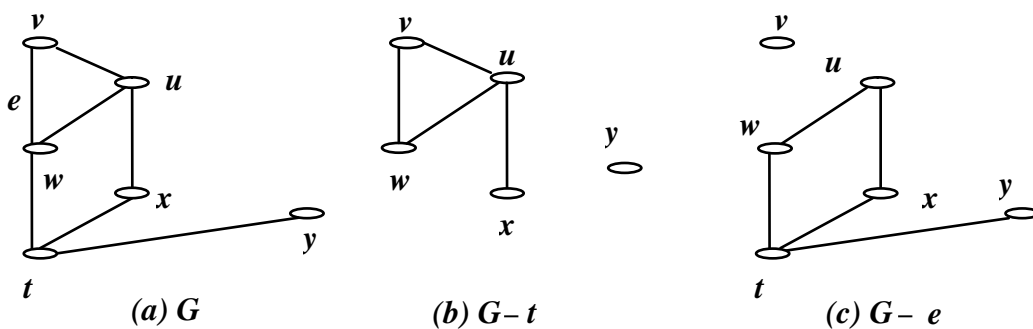
**Figure 1.2 : deux graphes  $G$  et  $H$  isomorphes**

**2. 2. Sous graphes**

**Définition 4** Un sous graphe  $H$  de  $G=(V, E)$  est un graphe ayant tous ses sommets et ses arêtes dans  $G$ .

Un *graphe partiel* de  $G$  est un graphe  $H = (V', E')$  tel que  $V' = V$  et  $E' \subset E$ .

Un *sous graphe induit* de  $G$  est un graphe  $H = (V', E')$  tel que  $V' \subset V$  et l'ensemble des arêtes  $E'$  est formé de toutes les arêtes de  $G$  reliant tous les sommets de  $H$ .  $H$  est dit aussi *le sous graphe engendré* par  $V'$  et est noté  $H = G(V')$ .



**Figure 1.3**

La figure 1.3 (b) représente le graphe  $G - t$  induit par  $V(G) - \{t\}$  c.a.d  $G - t = (V(G) - \{t\}, E)$  tandis que la figure 1.3 (c) représente le graphe partiel résultant de la suppression de l'arête  $e$  de  $G$  c.a.d  $G - e = (V(G), E - e)$ .

Un ensemble de sommets  $S \subseteq V(G)$  est dit *ensemble stable* ou *ensemble indépendant* si le sous graphe  $G(S)$  induit par  $S$  ne contient aucune arête c.a.d  $\forall x, y \in S, (x, y) \notin E$ .

Par abus de langage, nous dirons stable à la place d'ensemble stable.

**Exemple 1**

Dans la figure 1.4,  $S = \{x, w\}$  est un stable du graphe  $G$ .

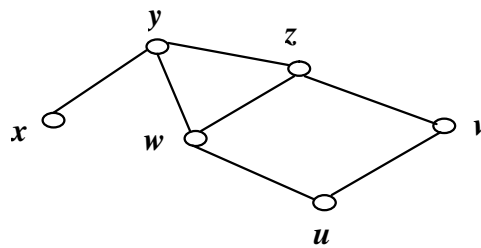


Figure 1.4

Le *nombre de stabilité* ou *nombre d'indépendance*, qui est noté  $\alpha(G)$  est la cardinalité du plus grand stable dans  $G$ .

Le plus grand stable dans le graphe  $G$  de la figure 1.4, est  $S = \{x, w, v\}$ , donc le nombre de stabilité est  $\alpha(G) = 3$ .

Un ensemble de sommets  $K \subseteq V(G)$  de  $G$  forme *une clique* dans  $G$  si chaque deux sommets distincts sont reliés par une arête ie  $\forall x, y \in K, (x, y) \in E$ .

Dans la figure 1.4, les sommets  $\{w, y, z\}$  forment une clique.

### 3. Chaîne, cycle et connexité

#### 3.1 Chaîne

**Définition 5** Une *chaîne* de longueur  $k$  est la séquence  $P = (u_0, u_1, \dots, u_k)$  de sommets distincts de  $V$  tels que pour tout  $i = 1, \dots, k - 1$ , deux sommets consécutifs  $u_i$  et  $u_{i+1}$  sont adjacents c'est-à-dire  $u_i u_{i+1} \in E$ .

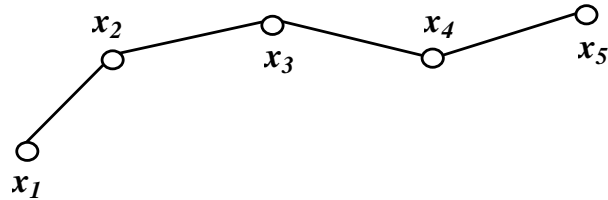
$P_{k+1}$  ou  $P(u_0, u_k)$  désigne la chaîne de longueur  $k$ , appelée aussi une  $\{u_0, u_k\}$ -chaîne.

Pour tous indices  $r$  et  $s$  tels que  $0 \leq r < s \leq k$ ,  $P(u_r, u_s) = \{u_r, \dots, u_s\}$  désigne la *sous chaîne* de  $P$ .

Une *chaîne impaire* (respectivement *paire*)  $P_k$  est une chaîne de longueur paire (respectivement de longueur impaire).

**Exemple 2**

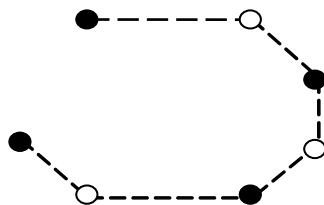
La figure 1.5, illustre la chaîne de longueur 4, notée  $P_5$ .



**Figure 1.5**

**Définition 6** Une chaîne alternée par rapport à un stable  $S$  est le sous graphe de  $G$  qui est une chaîne dont les sommets appartiennent alternativement à  $S$  et à  $V - S$ .

Dans la figure 1.6, les sommets noirs sont ceux de  $V - S$  et les sommets blancs ceux de  $S$ .



**Figure 1.6**

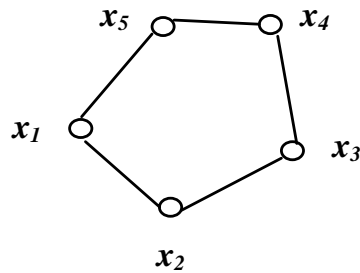
Un sommet  $x$  est insaturé par un stable  $S$  s'il est adjacent à un seul sommet de  $S$ .

Une chaîne augmentante par rapport à un stable  $S$  est une chaîne alternée joignant deux sommets insaturés.

**3.2 Cycles**

**Définition 7** Un cycle est la séquence  $C = (u_0, u_1, \dots, u_k)$  des sommets de  $V$  tel que  $u_i u_{i+1} \in E$  et  $u_0 u_k \in E$ .

$C_k$  désigne le cycle de longueur  $k$ , (figure 1.7)



**Figure 1.7** : Le cycle de longueur 5,  $C_5$

Un cycle *impair* (resp. *pair*) est un cycle de longueur impair (resp. *pair*).

### 3.3 Connexité

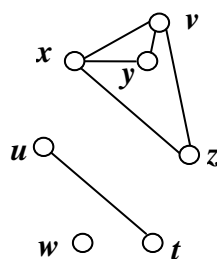
**Définition8** Un graphe  $G = (V, E)$  est *connexe* si pour tous sommets  $u, v$  de  $V$  il existe une chaîne reliant entre eux.

**Définition9** Une *composante connexe* est un sous graphe connexe maximal.

Un graphe est dit *non connexe* s'il contient au moins deux composantes connexes.

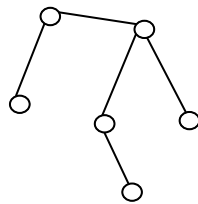
#### Exemple 3

Le graphe de la figure 1.8 est non connexe puisqu'il est formé des trois composantes connexes  $\{x, y, z, v\}$ ,  $\{u, t\}$  et  $\{w\}$ .



**Figure 1.8**

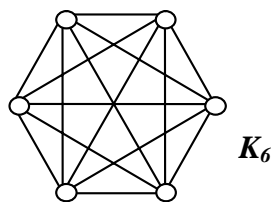
Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle induit (figure 1.9).



**Figure 1.9 : Un arbre**

Un *graphe complet* d'ordre  $n$ , noté  $K_n$  est un graphe dans lequel toute paire de sommets est reliée par une arête.

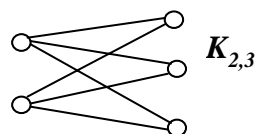
**Exemple 4**  $K_6$  est le graphe complet d'ordre 6 (figure 1.10).



**Figure 1.10**

**Définition10** Un graphe  $G$  est *biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous ensembles  $V_1$  et  $V_2$  tels que toute arête de  $G$  relie un sommet de  $V_1$  à un sommet de  $V_2$ , ainsi  $V_1$  et  $V_2$  sont des ensembles stables disjoints de  $G$ .

Un graphe  $G$  est *biparti complet* si tout sommet de  $V_1$  est relié à tout sommet de  $V_2$ ,  $|V_1| = p$  et  $|V_2| = q$ , le graphe  $G$  est noté  $K_{p,q}$ . Un exemple de graphe biparti est illustré par la figure 1.11.



**Figure 1.11**



## 4. Opérations sur les graphes

### 4.1 Couplage

**Définition 11** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. L'ensemble  $E_0 \subset E$  tel que deux arêtes quelconques de  $E_0$  sont non adjacentes est appelé *couplage* du graphe  $G$ . (figure 1.12).

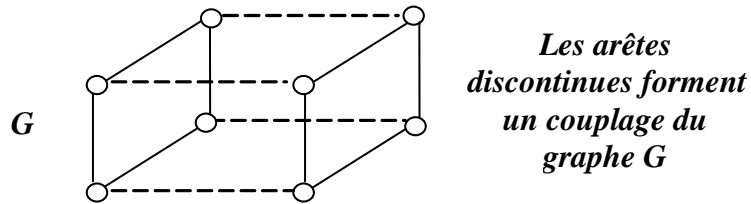


Figure 1.12

### 4.2 Recouvrement

**Définition 12** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. La famille  $F \subset E$ , telle que tout sommet  $v \in V$  soit l'extrémité d'au moins une arête de  $F$  est appelé *recouvrement* du graphe  $G$ .

Le long de ce qui suit, nous considérons que les graphes sont simples, connexes et non orientés.

## *Chapitre 2*

### **Résolution du problème du stable maximum par La Struction**

Cette approche a été introduite par Ebeneger et al en 1984 [9], et a pour origine les méthodes de calculs booléens. C'est un algorithme qui à chaque étape réduit le nombre de stabilité dans un graphe quelconque d'une unité, d'où l'appellation « *Struction* » tirée de l'abréviation Stability Number Reduction.

Nous donnons une propriété que possède certaines classes de graphes pour cet algorithme, dite *fermeture* des classes de graphes pour l'algorithme de la struction. Puis nous citons un inconvénient de la struction qui rend, en général le calcul du nombre de stabilité non polynomial, mais nous montrons que son application à quelques classes particulières de graphes, avec quelques modifications permet de calculer le nombre de stabilité en temps polynomial.

Enfin nous indiquons la généralisation de la struction appelée «*Struction Totale*» établie par Alexe et al [2], et nous comparons l'avantage de cet algorithme par rapport à celui de la struction, ainsi que l'application de cet algorithme généralisé dans une classe de graphes.

**1. Introduction**

Il est bien connu que la recherche d'un stable maximum dans un graphe quelconque est un problème difficile, cependant il a été démontré [10], que la recherche d'un stable maximum est équivalent à la maximisation d'une fonction pseudo booléenne c'est-à-dire une fonction de variables booléennes à valeur dans  $\mathbb{N}$ , définie comme suit :

$$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p T_i \text{ où } T_i = \prod_{j \in A_i} x_j \prod_{k \in B_i} \bar{x}_k \text{ avec } A_i, B_i \subseteq \{1, \dots, n\}$$

tels que  $A_i \cap B_i = \emptyset$  et  $\bar{x}_j = 1 - x_j$ .

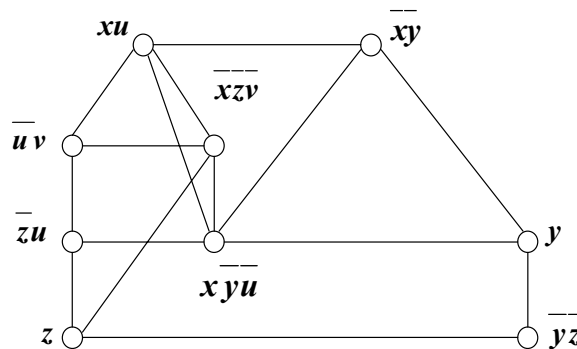
Ebeneger et al [10] ont montré que chaque fonction pseudo booléenne peut lui être associé un graphe  $G$  et réciproquement. En effet, soit  $f$  une fonction pseudo booléenne, le graphe  $G = (V, E)$  qui lui est associé est construit comme suit :

- À chaque  $T_i$  est associé un sommet  $a_i$ . L'ensemble des sommets est  $V = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ .
- L'ensemble des arêtes est :  $E = \{(a_i, a_j) : (A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset\}$  c'est à dire un sommet  $a_i$  est adjacent à un sommet  $a_j$  si dans les termes  $T_i$  et  $T_j$  qui leurs correspondent,  $x_i$  figure dans  $T_i$  et  $\bar{x}_i$  figure dans  $T_j$  (ou  $x_j$  est dans  $T_j$  et  $\bar{x}_j$  est dans  $T_i$ ).

L'exemple suivant illustre cette construction.

**Exemple 1**

Soit  $f(x, y, z, u, v) = xu + \bar{x}\bar{y} + \bar{u}\bar{v} + \bar{x}\bar{z}\bar{v} + \bar{z}\bar{u} + \bar{x}\bar{u}\bar{y} + y + z + \bar{y}\bar{z}$



**Figure 2.1: Le graphe  $G$  associé à  $f$**

## Chapitre 2

### Résolution du problème du stable maximum par la struction

---

Réciproquement si  $G$  est un graphe arbitraire, la fonction pseudo booléenne qui lui correspond est donnée par :

- Initialement  $A_i = B_i = \emptyset$

Soit  $G_j = (V_{1,j}, V_{2,j}, E_j)$ ,  $j = 1, \dots, q$ , l'ensemble des sous graphes bipartis complets recouvrants toutes les arêtes de  $G$ , alors la fonction pseudo booléenne associée est:

- $f = \sum_{i \in V} T_i$  en posant  $T_i = \prod_{j \in A_i} x_j \prod_{k \in B_i} \bar{x}_k$  ou  $A_i = \{j : a_i \in V_{1,j}\}$  et  $B_i = \{j : a_i \in V_{2,j}\}$

La construction de  $f$  est illustrée par l'exemple 2

#### Exemple 2 [10]

Soit  $G$  le graphe suivant

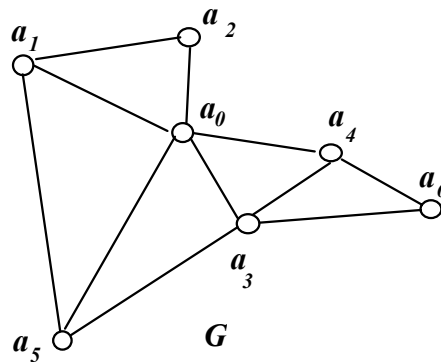


Figure 2.2

La fonction  $f$  associée au graphe  $G$  est :

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + x_1 + \bar{x}_1 x_2 + x_3 + \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_5 + \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_6$$

Exploitant cette relation entre ces deux problèmes, les auteurs de [10] ont établi un algorithme qui réduit le nombre de stabilité d'un graphe  $G$  d'une unité, cet algorithme a été appelé «Struction» de l'abréviation «*stability number reduction*». Le graphe résultant de cette transformation est noté  $G'$ .

En répétant l'application de la struction, le nombre de stabilité peut être calculé en au plus  $n$  étapes ; mais malheureusement le nombre de sommets peut augmenter exponentiellement durant son calcul, ce qui rend cet algorithme non polynomial.

## Chapitre 2

### Résolution du problème du stable maximum par la struction

---

Afin d'éviter une telle augmentation de sommets, plusieurs versions de la struction ont été décrites et dont l'idée consiste à appliquer l'algorithme de la struction avec quelques modifications, ce qui conduit à des algorithmes polynomiaux de calcul du nombre de stabilité dans certaines classes de graphes.

Récemment Alexe et al [2], ont donné une généralisation de la struction appelée *Struction Totale*. C'est un algorithme plus fort que la struction due au fait que le nombre de stabilité est réduit d'une constante positive  $p \geq 1$ , ce qui fait que le nombre d'étapes nécessaires pour calculer le nombre de stabilité est plus petit que celui de la struction.

Les même auteurs ont montré que l'application de la struction totale dans certaines classes de graphes en combinaisons avec quelques transformations permet non seulement de réduire le nombre de stabilité mais aussi le nombre de sommets ce qui rend la détermination du nombre de stabilité possible en un temps polynomial dans ces classes de graphes.

## 2. Description de la struction

### 2.1 Algorithme de construction de $G'$ à partir de $G$ [10]

Soit  $G$  un graphe arbitraire simple, non orienté et d'ordre  $n$  et de nombre de stabilité  $\alpha(G)$  et soit  $a_0$  un sommet de  $G$  ayant  $p$  voisins  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ , la construction du graphe  $G'$  vérifiant  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$  à partir du graphe  $G$  est donnée par l'algorithme suivant :

#### Algorithme de construction de $G'$ [10]

**Entrée** : un graphe quelconque  $G = (V, E)$  de nombre de stabilité  $\alpha(G)$ .

**Sortie** : Un graphe  $G'$  de nombre de stabilité  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$ .

**(0)** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple, non orienté et d'ordre  $n$   
et de nombre de stabilité  $\alpha(G)$  ;

**(1)** Choisir un sommet  $a_0$  arbitraire de  $V(G)$  ;

**(2)** Supprimer  $a_0$  et tous ses voisins  $N(a_0) = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  ;

**(3)** Soit  $R = G - N[a_0]$

Soit  $E(G(R))$  l'ensemble des arêtes du sous graphe  $R$

**(4)** Pour toute paire de sommets non adjacents  $(a_i, a_j)$ , ( $i < j \leq p$ )  
dans  $G$ , associer un *nouveau sommet*  $a_{ij}$  ;

**(5)** Partitionner l'ensemble des nouveaux sommets ayant  $i$  comme  
premier indice en couches  $L_i = (a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_k})$  ;

**(6)** Relier tous les nouveaux sommets  $a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}$  ( $i_1 \neq i_2$ )  
appartenant à deux couches différentes ;

**(7)** Relier des nouveaux sommets  $a_{ij_1}, a_{ij_2}$  si et seulement si les  
sommets  $a_{j_1}$  et  $a_{j_2}$  sont adjacents dans  $G$  ;

**(8)** Relier un nouveau sommet  $a_{ij}$  à un sommet  $a_r$  ( $r > p$ ) si  $a_r$  est  
relié à  $a_i$  ou bien à  $a_j$  dans  $G$  ;

Noter  $G'$  le graphe obtenu par cette construction.

Le graphe  $G'$  est dit obtenu à partir de la struction de  $G$  centrée en  $a_0$ . Le sommet  $a_0$  est appelé *centre de la struction*.

Les propositions suivantes résultent de l'application de l'algorithme précédant.

**Proposition 1 [10]** *Etant donné un stable  $S$  dans  $G$  alors il existe un stable  $S'$  dans  $G'$  tel que  $|S'| = |S| - 1$ .*

## Chapitre 2

### Résolution du problème du stable maximum par la struction

---

**Preuve.** Soit  $S$  un stable maximum dans  $G$

Si  $S \cap N[a_0] = \emptyset$  alors  $S' = S - \{a_r\}$  où  $a_r$  est un sommet quelconque de  $S'$  est un stable de  $G'$  vérifiant  $|S'| = |S| - 1$ .

Si  $S \cap N[a_0] = \{a_i\}$  alors  $S' = S - \{a_i\}$  est un stable de  $G'$  vérifiant  $|S'| = |S| - 1$ .

Si  $S \cap N[a_0] = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}\}$ , alors  $S' = (S - \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}\}) \cup (a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_1}, a_{i_3}), \dots, (a_{i_1}, a_{i_t})$  est un stable de  $G'$  vérifiant  $|S'| = |S| - 1$ .

Dans tous les cas  $|S'| = |S| - 1 = \alpha(G) - 1 \leq \alpha(G')$ .

**Proposition 2 [10]** *Etant donné un stable  $S'$  dans  $G'$  alors il existe un stable  $S$  dans  $G$  vérifiant  $|S| = |S'| + 1$ .*

**Preuve.** Soit  $S'$  un stable maximum dans  $G'$

Si  $S'$  ne contient pas de nouveaux sommets alors  $S = S' \cup \{a_0\}$  est un stable dans  $G$  vérifiant  $|S| = |S'| + 1$ .

Si  $S'$  contient des nouveaux sommets alors ils sont de la forme  $\{a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_t}\}$  et  $S = (S' - \{a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_t}\}) \cup (a_{i_1}, a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_t})$  est un stable dans  $G$  vérifiant  $|S| = |S'| + 1$ .

Dans tous les cas  $|S| = |S'| + 1 = \alpha(G') + 1 \leq \alpha(G)$ .

Le corollaire suivant est la conséquence des deux propositions précédentes.

**Corollaire1 [10]** *Si  $G'$  est le graphe construit à partir de la struction du graphe  $G$  alors  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$ .*

L'exemple 3 illustre la construction du graphe  $G'$

Exemple 3

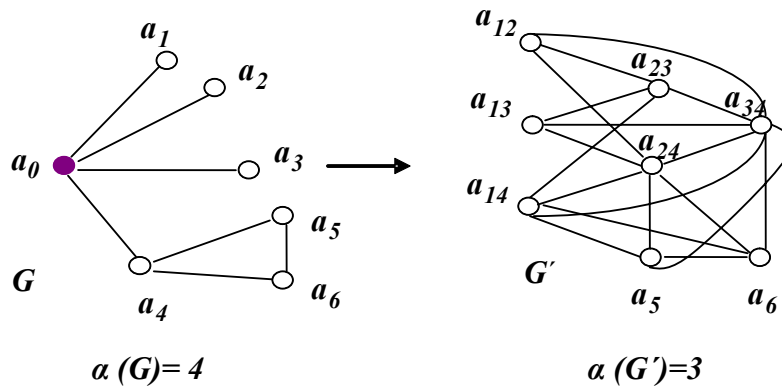


Figure 2.3

2.2 Inconvénient de la struction

Bien que la struction soit un algorithme qui s'applique à tout graphe  $G$ , elle possède un inconvénient majeur, qui fait que le calcul du nombre de stabilité se fait en général en temps non polynomial.

Le nombre de sommets peut augmenter en général pendant l'application de la struction, de plus que l'application répétée de la struction peut entraîner une croissance exponentielle du nombre de sommets. L'exemple 4 illustre ce fait.

Exemple 4

Le graphe  $G$  possède sept sommets, tandis que le graphe  $G'$  en a huit, si nous répétons l'application de la struction, nous obtiendrons un graphe  $G''$  ayant dix sommets.

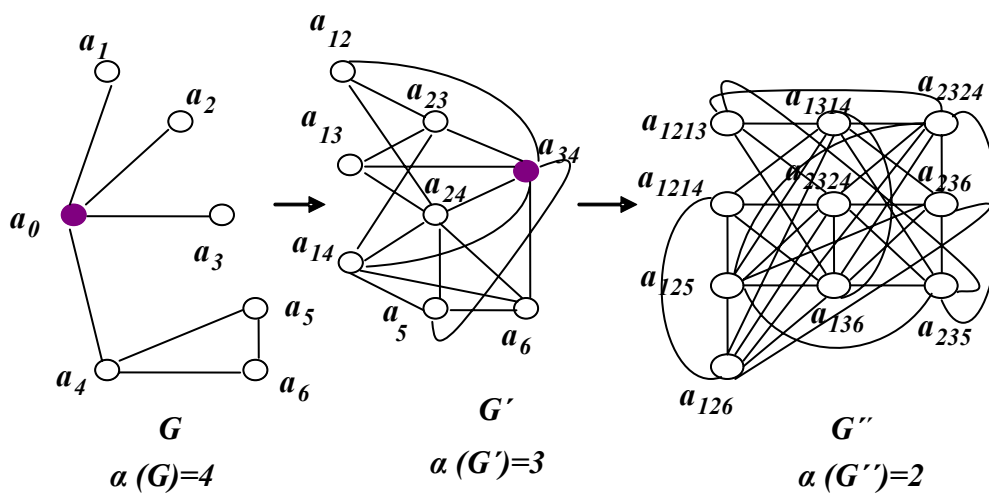


Figure 2.4



### 3. Application de la struction à quelques classes de graphes

En général, l'algorithme de la struction donne à partir du graphe  $G$  un graphe  $G'$  ayant plus de sommets que  $G$ , néanmoins pour quelques classes de graphes le nombre de stabilité peut être calculé en temps polynomial et ceci en appliquant la struction avec quelques modifications.

Nous citons quelques classes de graphes pour lesquelles l'algorithme de la struction modifié est non seulement polynomial mais possède aussi la propriété suivante :

Si  $G$  est un graphe appartenant à une classe de graphes  $F$ , alors le graphe  $G'$  résultant de la struction de  $G$  appartient à la classe  $F$ .  $G$  est dit fermé pour la struction.

Généralement la struction ne conserve pas la fermeture des classes de graphes, c'est-à-dire si  $G$  est un graphe appartenant à une classe de graphes  $F$  alors le graphe  $G'$  résultant de la struction de  $G$  n'est pas forcément dans la classe  $F$ , comme l'illustre l'exemple 5 où  $G$  est un graphe sans étoile mais le graphe  $G'$  obtenu par la struction de  $G$  n'est pas sans étoile.

#### Exemple 5

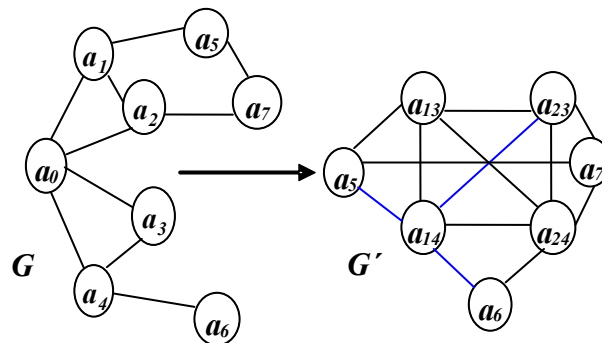


Figure 2.5

### 3.1 Les graphes sans CAN [15]

La classe des graphes sans CAN est caractérisée par trois sous graphes induits interdits : l'étoile (C), le net (N) et l'antenne (A) (figure 2.6).

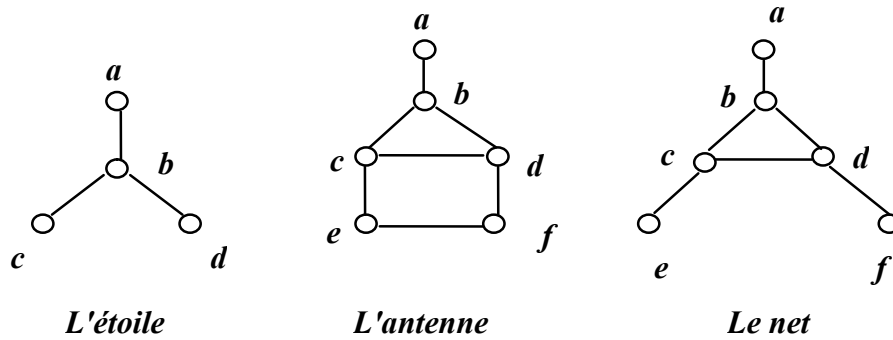


Figure 2.6

Hammer et al [15], ont établi un algorithme polynomial pour calculer le nombre de stabilité dans cette classe de graphes en modifiant l'algorithme de la struction.

Nous rappelons cet algorithme.

**Algorithme de Construction de  $G'$  [15]**

**Entrée :** Un graphe  $G$  sans CAN de nombre de stabilité  $\alpha(G)$ .

**Sortie :** Un graphe  $G'$  sans CAN de nombre de stabilité  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$ .

(1) Soit  $G$  un graphe sans CAN,

Pour tous sommets  $i$  et  $j$  non adjacents tel que  $i < j$ , associer une non arête  $[\overline{i, j}]$  ;

(2) Choisir un sommet quelconque  $0$  de  $G$  avec

$N(0) = \{1, \dots, p\}$  est l'ensemble de ses voisins ;

(3) À chaque non – arête  $[\overline{i, j}]$  dans  $N(0)$  associer un ensemble de sommets

$N[\overline{i, j}] = (N(i) \cup N(j) \setminus N(0))$ ;

(4) Pour toute non arête dans  $N(0)$  Définir l'ordre partiel

$[\overline{i, j}] \geq [\overline{k, l}] \Leftrightarrow N[\overline{i, j}] \supseteq N[\overline{k, l}]$ ,

Poser  $I^* = \text{Min} \{[\overline{i, j}]\}$  ;

Si plusieurs non arêtes  $[\overline{i, j}]$  de  $I^*$  ont le même  $N[\overline{i, j}]$  alors mettre une seule d'entre elles dans  $I^*$  ;

(5) Introduire dans  $G'$  le sous graphe  $R$  de  $G$  induit par  $V - (N(0) \cup \{0\})$

i) A chaque non – arête  $[\overline{i, j}]$  dans  $I^*$  associer un nouveau sommet  $(i, j)$

ii) Relier chaque paire de nouveaux sommets ;

iii) Relier un nouveau sommet  $(i, j)$  à un sommet  $r$  de  $R$  si  $i$  ou bien  $j$  était relié à  $r$  dans  $G$ .

L'exemple 7 illustre ce qui précède.

**Exemple**

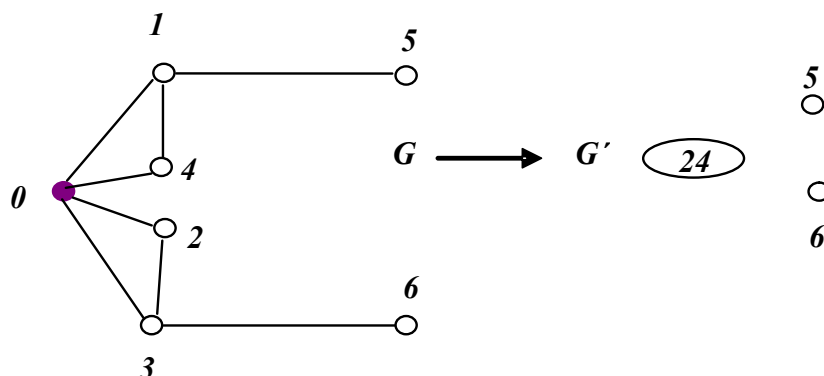


Figure 2.7

## Chapitre 2

### Résolution du problème du stable maximum par la struction

---

Le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en appliquant cet algorithme possède au plus  $\lfloor |N(\theta)| \rfloor$  nouveaux sommets, ce qui fait que  $\alpha(G)$  peut être obtenu en temps polynomial. De plus la classe des graphes sans CAN est fermée pour cet algorithme.

**Théorème 1 [15]** *Le nombre de stabilité peut être calculé en temps polynomial dans les graphes sans CAN.*

### 3.2 Les graphes sans CN [16]

Cette classe de graphes est caractérisée par deux sous graphes induit interdits l'étoile et le net et contient la classe des graphes sans CAN. Elle a été étudiée par les même auteurs de [15], ils ont donné l'algorithme [16], qui résout le problème du stable maximum dans cette classe de graphes en un temps polynomial en modifiant la struction, nous citons cet algorithme.

#### Algorithme de Construction de $G'$ [16]

**Entrée :** Un graphe  $G$  sans CN de nombre de stabilité  $\alpha(G)$ .

**Sortie :** Un graphe  $G'$  sans CN de nombre de stabilité  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$ .

**(1) Choisir un sommet quelconque  $\theta$  dans  $G = (V, E)$  ;**

**Soit  $N(\theta)$  les voisins de  $\theta$ , munis d'un pré ordre partiel défini par**

$$N_\theta(a) \subseteq N_\theta(b) \Rightarrow a \leq b, \quad a \leq b \text{ et } b \leq a \Rightarrow a \equiv b$$

**(2) Enumérer les sommets dans  $N(\theta)$  de 1 à  $|N(\theta)|$  tel que**

**i) Si  $a \leq b$  et  $a \geq b$  alors  $a < b$**

**ii) Si  $a \equiv b$ ,  $a \leq x$ ,  $a \geq x$  et  $a < b$  alors  $x < a$  ou  $x > b$**

**(3) Soit  $I^* = \{i \in N(\theta) / \exists j \in N(\theta) \text{ avec } j > i \text{ et } \overline{[i, j]}\}$  ;**

**(4) Introduire le sous graphe  $R$  induit par  $V \setminus N[\theta]$  ;**

**(5) Pour tout  $i \in I^*$  introduire un nouveau sommet  $i^*$  ;**

**(6) Relier toute paire de nouveaux sommets ;**

**(7) Relier un nouveau sommet  $i^*$  à un sommet  $r$  de  $R$  si  $[i, r]$  ou**

**bien  $[j, r]$  dans  $G$ ,  $\forall j > i$  avec  $j \in \overline{N(i)} \cap N(\theta)$ .**

L'exemple suivant illustre cette construction.

Exemple 8 [16]

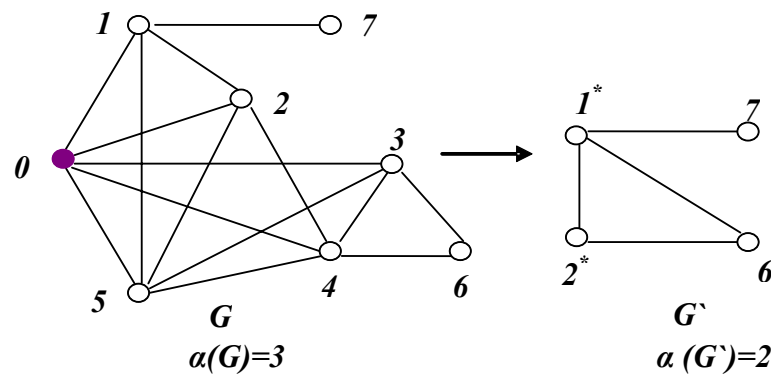


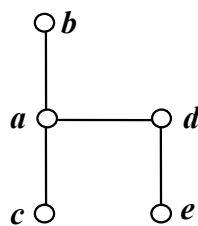
Figure 2.8

Le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en appliquant cet algorithme possède au plus  $|V(G)| - 2$  sommets, ce qui fait que  $\alpha(G)$  peut être obtenu en temps polynomial. De plus la classe des graphes sans CN est fermée pour cet algorithme.

**Théorème 2 [16]** *Soit  $G$  un graphe sans CN, le nombre de stabilité du graphe  $G$  peut être calculé en temps polynomial.*

### 3.3 La sous classe $\Gamma$ des graphes sans chaise, sans net [1]

Introduite par Ainouche et Benmeziane [1], c'est une sous classe de la classe des graphes sans chaise, sans net. Étant caractérisée par deux sous graphes induits interdits la chaise et le net et possède la propriété que l'ensemble des centres d'étoiles est un ensemble stable.



La chaise

Figure 2.9

Les même auteurs ont donné [1], un algorithme polynomial pour calculer le nombre de stabilité dans cette sous classe de graphes en modifiant la struction, leur algorithme est inspiré de celui de [16], sauf que le centre de la struction est un sommet qui n'est pas centre d'étoile appelé *sommet spécial*.

**Théorème 3** [1] *Le nombre de stabilité d'un graphe  $G \in \Gamma$  peut être obtenu en temps polynomial.*

#### 4. Généralisation de la struction : Struction Totale [2]

Récemment Alexe et al [2], ont donné une généralisation de la struction appelée *Struction Totale*. C'est un algorithme qui s'inspire de la struction à la différence que la struction totale ne s'opère plus en un sommet, mais autour d'un sous graphe  $H$  d'un graphe arbitraire  $G$  ce qui le rend plus puissant puisque il réduit le nombre de stabilité du graphe  $G$  par une constante positive  $p$  où  $1 \leq p \leq \alpha(H)$ . Dans [2], le graphe résultant de l'algorithme de la struction totale est noté  $S(G, H, p)$  et dont le nombre de stabilité vérifie  $\alpha(S(G, H, p)) = \alpha(G) - p$  ou  $p \leq \alpha(H)$ . Nous rappelons l'algorithme de la struction totale.

##### 4.1 Construction de $S(G, H, p)$ à partir de $G$ [2]

**Algorithme de construction de  $S(G, H, p)$  à partir de  $G$  [2]**

**Entrée :** Un graphe  $G$  de nombre de stabilité  $\alpha(G)$ .

**Sortie :** Un graphe  $S(G, H, p)$  de nombre de stabilité  $\alpha(S(G, H, p)) = \alpha(G) - p$ .

**(0) Soit  $G = (V, E)$  un graphe donné**

**(1) Choisir un sous graphe  $H$  de  $G$  tel que  $p \leq \alpha(H)$  ;**

**(3) Supprimer  $H$  ainsi que tous ses voisins  $N(V(H))$  ;**

**(4) Poser  $R = V - N[V(H)]$**

**Soit  $E(G(R))$  l'ensemble des arêtes du sous graphe  $R$**

**(5) Soit  $A_i$  un ensemble stable de cardinalité  $p+1$  dans le sous graphe induit  $N[V(H)]$  ;**

**Poser  $W_i = \{A_i / \alpha(A_i) = p+1\}$  ensemble des nouveaux sommets  $A_i$  ;**

**(6) Soit  $m(A)$  le sommet de nombre maximum dans le sous ensemble  $A_i$  et  $A_i^- = A_i - \{m(A_i)\}$  ;**

**(7) Relier deux nouveaux sommets  $A$  et  $B$  si  $A^- \neq B^-$  ou  $(m(A), m(B)) \in E(G)$  ;**

**(8) Relier un nouveau sommet  $A$  à un sommet  $v \in R$  si  $v$  possède un voisin dans le sous ensemble  $A$  du graphe  $G$ .**

**Noter  $S(G, H, p)$  le graphe obtenu par cet algorithme.**

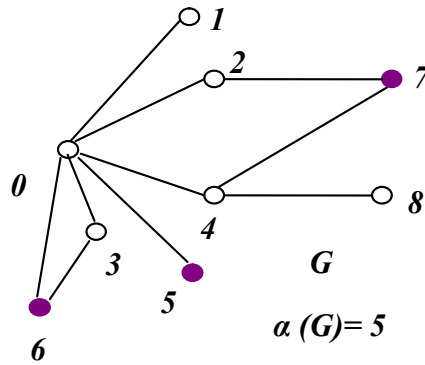
**Chapitre 2**  
**Résolution du problème du stable maximum par la struction**

---

L'exemple 9 illustre la construction de  $S(G, H, p)$ .

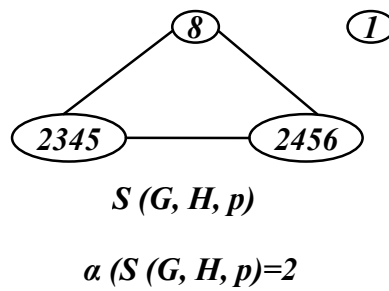
**Exemple 9**

Considérons le graphe  $G$  suivant



**Figure 2.10**

Le graphe  $S(G, H, p)$  obtenu par la struction centrée en le sous graphe  $H = \{5, 6, 7\}$  du graphe  $G$  tel que  $p=3$ , est illustré par la figure 2.11.



**Figure 2.11**

**Théorème 4 [2]**  $\alpha(S(G, H, p)) = \alpha(G) - p$ .

Dans le cas où  $H$  est un singleton la struction totale n'est autre que la struction classique.

#### 4.2 Avantage de la struction totale

L'application de la struction totale permet de réduire le nombre de stabilité d'une constante entière positive, et même le nombre de sommets dans certaines classes de graphes, à chaque étape de son application.

Le graphe de l'exemple 9, est un cas où le nombre de sommets diminue en appliquant la struction totale.

L'application de la struction au graphe  $G$  donne un graphe  $G'$  dont le nombre de sommets est égal à seize (figure 2.12), tandis que le graphe  $S(G, H, p)$  obtenu par la struction totale du même graphe en possède quatre (figure 2.11), le nombre de stabilité du graphe  $G$  peut être alors calculé en temps polynomial en appliquant la struction totale dans certaines classes de graphes.



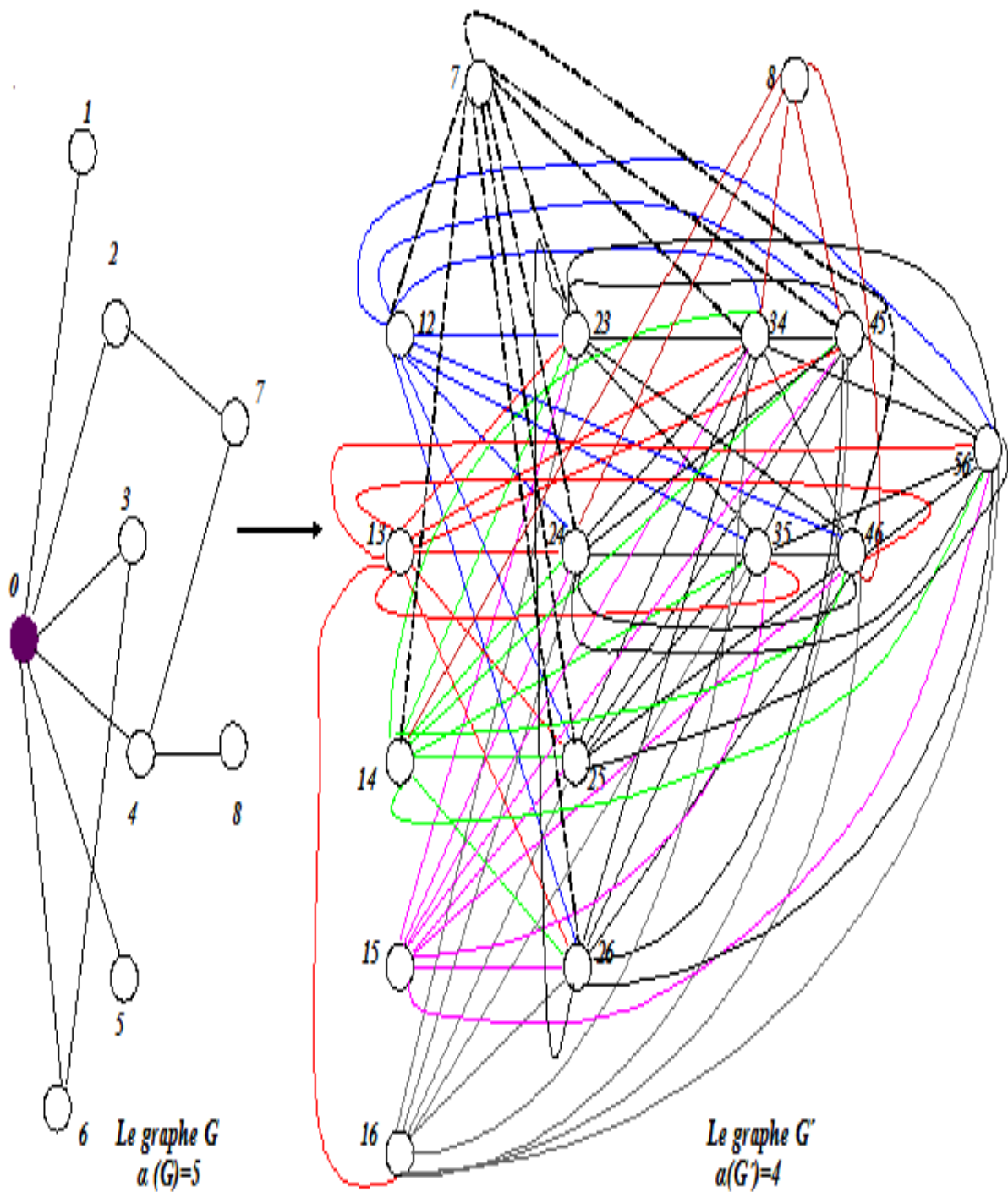


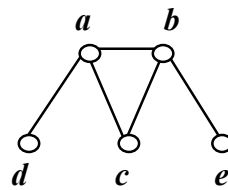
Figure 2.12

## 5. Application de la struction totale à quelques classes de graphes

Nous citons comme exemple où l'application de la struction totale résout le problème du stable maximum, la classe de graphes suivante :

### 5.1 Les graphes sans chaise, sans taureau [25]

Introduite par De Simone et Sassano [25], cette classe est caractérisée par deux sous graphes induits interdits la chaise et le taureau (figure 2.13).



*Le taureau*

**Figure 2.13**

De Simone et Sassano [25], ont donné un algorithme permettant de calculer le nombre de stabilité dans cette classe de graphes en temps polynomial.

En fait, c'est une application de la struction totale dont le centre est une clique vérifiant certaines conditions, dite *clique réductible*.

**Définition 1 [25]** Une clique  $K$  d'un graphe  $G$  est dite réductible si:

$S$  est un ensemble stable dans  $G \setminus K$  si et seulement s'il existe un sommet  $u \in K$  tel que

$S \cup \{u\}$  est un ensemble stable de  $G$ .

L'algorithme proposé par De Simone et Sassano est basé sur le fait que dans un graphe sans chaise, sans taureau, toute clique  $K$  est réductible.

Nous rappelons cet algorithme.

**Algorithme [25]**

**Entré :** Un graphe  $G$  sans chaise, sans taureau de nombre de stabilité  $\alpha(G)$ .

**Sortie :** Un graphe sans chaise, sans taureau de nombre de stabilité  $\alpha(G)-1$ .

**Etape 0 :** Soit  $G$  un graphe sans chaise, sans net ;

**Poser**  $G_1 = G$

**Etape 1 :** Choisir une clique arbitraire  $K_1$  dans  $G_1$  ;

**poser**  $G_2 = G_1 \setminus K_1$

**i) Si**  $G_2 \neq \emptyset$  :

$G_2$  est de nombre de stabilité  $\alpha(G_1) - 1$

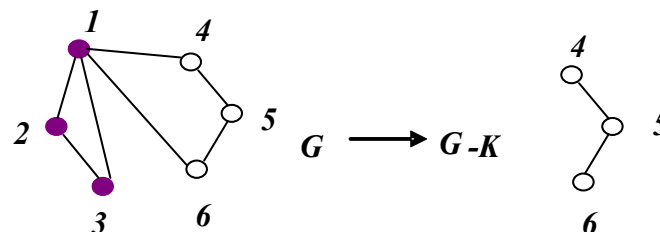
**ii) Si**  $G_2 = \emptyset$  ;

$G_1$  est une clique, donc  $\alpha(G_1) = 1$

L'exemple suivant illustre l'algorithme précédent.

**Exemple 10**

Soit  $G$  un graphe sans chaise, sans taureau.  $K = \{1, 2, 3\}$  une clique dans  $G$ .



**Figure 2.14**

**Théorème 5 [25]** Soit  $G$  un graphe et soit  $K$  une clique dans  $G$ . Si  $G$  est sans chaise, sans taureau, alors le graphe  $G \setminus K$  satisfait les propriétés suivantes :

- 1-  $G \setminus K$  est sans chaise.
- 2-  $G \setminus K$  est sans taureau.
- 3-  $\alpha(G - K) = \alpha(G) - 1$ .

**Théorème 6 [25]** Si  $G$  est sans taureau, sans chaise à  $n$  sommets alors  $\alpha(G)$  peut être calculé en temps polynomial.

## *Chapitre 03*

### **Résolution du problème du stable maximum par la méthode des graphes augmentants**

La méthode des graphes augmentants a été inspirée de l'algorithme d'Edmonds [11] pour les couplages maximums. Minty [21] et Sbihi [24] sont les premiers à avoir utilisé la technique des graphes augmentants pour résoudre le problème du stable maximum dans les graphes sans étoile.

Durant plus de vingt ans cette méthode resta sans utilisation. Récemment Alekseev [4] a appliqué cette technique pour calculer le nombre de stabilité en temps polynomial dans les graphes sans chaise.

Actuellement cette méthode est utilisée par différents auteurs pour calculer en temps polynomial le nombre de stabilité dans des classes de graphes généralisant les graphes sans étoile.

Nous définissons d'abord la notion de graphe augmentant puis nous rappelons les principaux résultats concernant les graphes augmentants, et enfin nous citons quelques classes de graphes où l'application de cette méthode mène à des algorithmes polynomiaux pour la résolution du problème du stable maximum à partir de la caractérisation des graphes augmentants dans ces classes.

#### 1. Introduction

Claude Berge [6], est le premier à avoir introduit la notion de *graphes augmentants* lorsqu'il affirma qu'un ensemble stable  $S$  est maximum si et seulement si il n'existe aucune chaîne augmentante par rapport à  $S$ .

Edmonds [11], a exploité l'idée de Berge pour établir un algorithme polynomial de la résolution du problème du couplage maximum dans les graphes, en remarquant que le problème du couplage maximum dans un graphe  $G$  est un cas spécial du problème du stable maximum, lorsqu'il est restreint au line graphe  $L(G)$ .

En effet, en 1965 Edmonds [11], a établi le premier algorithme de recherche des chaînes augmentantes en temps polynomial dans les lines graphes, ce qui a permis de résoudre le problème du couplage maximum dans les graphes et par conséquent le problème du stable maximum dans les lines graphes.

Les chaînes augmentantes étant un cas spécial des graphes augmentants définis comme suit:

**Définition 1** Soit  $G$  un graphe,  $S$  un stable de  $G$ . Les sommets de  $S$  seront appelés sommets blancs et ceux de  $V-S$  sommets noirs.

Un graphe biparti  $H = (W, B, E(H))$  ou  $W \cup B$  forment l'ensemble des sommets et  $E(H)$  l'ensemble d'arêtes, est dit graphe augmentant pour le stable  $S$  si:

- i.  $W \subseteq S, B \subseteq V(G) - S$
- ii.  $N(B) \cap (S - W) = \emptyset$
- iii.  $|B| > |W|$

Si  $H$  est un graphe augmentant pour  $S$ , alors l'ensemble  $S' = (S - W) \cup B$  est un stable tel que taille plus grande que  $|S'| > |S|$ .

$S'$  est dit obtenu par une  $H$  – augmentation de  $S$ .

Le nombre  $|B| - |W| = |S'| - |S|$  est appelé l'incrément de  $H$ .

Un exemple de graphes augmentants est donné par la figure 3.1.

Exemple 1

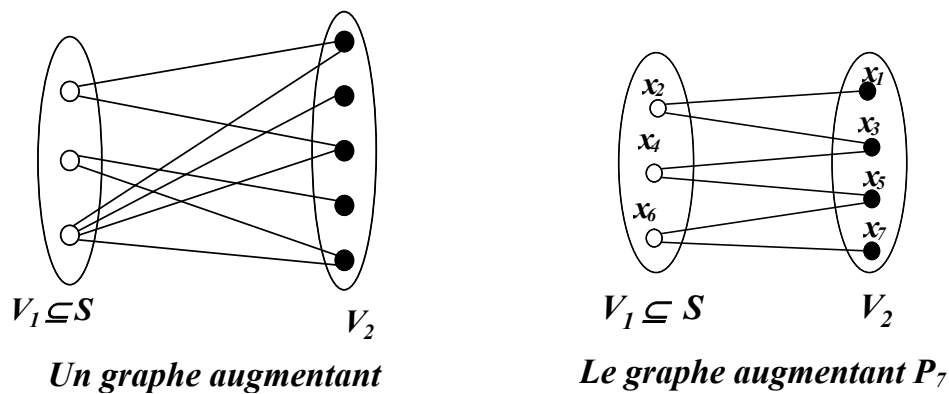


Figure 3.1

Si aucun graphe augmentant n'existe par rapport à  $S$ , alors  $S$  est de cardinalité maximum d'où le théorème :

**Théorème1 "Théorème des graphes augmentants"** *Un stable  $S$  dans un graphe  $G$  est maximum si et seulement s'il n'existe pas de graphe augmentant par rapport  $S$ .*

Vu l'importance de ce théorème nous reprenons sa démonstration.

**Preuve.**

*Condition nécessaire*

Evidente, par définition d'un graphe augmentant.

*Condition suffisante*

Montrons que si  $S$  n'est pas un stable maximum alors  $G$  possède un graphe augmentant par rapport à  $S$ .

Soit  $G$  un graphe et  $S$  un stable de  $G$ ,  $S$  n'est pas maximum alors il existe un autre stable  $S'$  tel que  $|S'| > |S|$ , mais ainsi  $H = (S - S', S' - S, E(H))$  est un graphe augmentant par rapport à  $S$ . □

D'après le théorème précédent, il résulte que la recherche d'un ensemble stable maximum dans un graphe  $G$  se réduit à la recherche d'un graphe augmentant par rapport à un ensemble stable  $S$  de  $G$ .

### Chapitre 3

#### Résolution du problème du stable maximum par les graphes augmentants

---

Comme le problème du stable maximum est NP- dur, alors le problème de la recherche des graphes augmentants est aussi NP- dur. Cependant dans des classes de graphes spéciales, la recherche des graphes augmentants se fait en temps polynomial. La recherche des graphes augmentants se fait en temps polynomial s'il est possible de:

(a) Caractériser tous les graphes augmentants.

(b) Trouver des algorithmes polynomiaux pour détecter tous les graphes augmentants.

Minty [21] et Sbihi [24], sont les premiers à avoir utilisé en 1980 la méthode des graphes augmentants de deux manières différentes pour établir un algorithme calculant le nombre de stabilité en temps polynomial dans les graphes sans étoile qui contiennent les lignes graphes. Leurs algorithmes sont des extensions de l'algorithme d'Edmonds pour les couplages maximums, aux graphes sans étoile.

Durant plus de vingt ans, cette idée resta sans utilisation. En 1999, Alekseev [4], a réappliqué la technique des graphes augmentants, pour calculer le nombre de stabilité en temps polynomial dans la classe des graphes sans chaise qui forment une généralisation des graphes sans étoile en caractérisant les graphes augmentants minimaux dans cette classe de graphes. A présent, cette méthode est utilisée dans différentes classes de graphes pour calculer le nombre de stabilité en temps polynomial.

En effet, la recherche des graphes augmentants minimaux permet de résoudre le problème du stable maximum en temps polynomial dans certaines classes de graphes.

**Définition 2** *Un graphe augmentant minimal dans un graphe  $G$  est le plus petit (au sens de l'inclusion) graphe augmentant de  $G$ .*

Le lemme suivant donne les conditions nécessaires pour qu'un graphe augmentant soit minimal.

**Lemme 1 [4]** *Soit  $H = (W, B, E(H))$  un graphe augmentant. Si  $H$  est un graphe augmentant minimal pour un stable  $S$  alors:*

- i.  $H$  est connexe.
- ii.  $|W| = |B| - 1$ .
- iii. Pour tout sous ensemble  $A \subseteq W$ ,  $|A| < |N_B(A)|$ .

## Chapitre 3

### Résolution du problème du stable maximum par les graphes augmentants

---

Nous citons quelques classes de graphes où la caractérisation des graphes augmentants minimaux mène à des algorithmes polynomiaux pour le calcul du nombre de stabilité.

## 2. Application de la méthode des graphes augmentants dans quelques classes de graphes

La caractérisation complète des graphes augmentants minimaux, ainsi que l'existence d'algorithmes pouvant détecter ces graphes augmentants permet de calculer le nombre de stabilité en temps polynomial dans certaines classes spéciales de graphes.

Dans certaines classes de graphes, la caractérisation des graphes augmentants minimaux est basée sur la description des graphes bipartis.

Nous rappelons quelques classes de graphes où la description des graphes bipartis a permis de déduire les graphes augmentants minimaux.

### 2.1 Les graphes sans étoile

Il est clair que le degré des sommets de tout graphe biparti dans un graphe sans étoile est au plus deux. Ainsi tout graphe connexe biparti sans étoile est soit un cycle de longueur paire ou bien une chaîne.

Les cycles de longueur paire et les chaînes de longueur impaire ne peuvent pas être des graphes augmentants puisqu'ils possèdent un nombre égal de sommets blancs et noirs. Alors tout graphe augmentant minimal sans étoile est une chaîne de longueur paire.

### 2.2 Les graphes sans $P_4$

Un graphe biparti connexe dans un graphe sans  $P_4$  est un graphe biparti complet. Donc tout graphe augmentant minimal sans  $P_4$  est biparti complet de la forme  $K_{n, n+1}$ .

### 2.3 Les graphes sans chaise [4]

Alekseev [4] a caractérisé les graphes bipartis connexes dans les graphes sans chaise comme suit : Un graphe biparti connexe dans un graphe sans chaise est soit une chaîne ou bien un graphe presque biparti complet.

Un graphe presque biparti complet est un graphe biparti tel que tout sommet  $x$  d'une partie a au plus un non voisin dans la partie opposée.



## Chapitre 3

### Résolution du problème du stable maximum par les graphes agmentants

---

À présent, nous présentons deux classes de graphes où la caractérisation des graphes augmentant est un problème non résolu.

#### 2.4 Les graphes sans $P_5$

Cette classe est caractérisée par un seul sous graphe induit interdit qui est la chaîne de longueur quatre noté  $P_5$ .

Plusieurs travaux ont démontré que tout graphe biparti connexe dans un graphe sans  $P_5$ , est sans  $2K_2$ . Malheureusement la description des graphes bipartis connexes dans cette classe de graphes ne permet pas de caractériser les graphes augmentants minimaux.

La caractérisation des graphes augmentants minimaux dans les graphes sans  $P_5$  est inconnue, et la complexité du problème du stable maximum dans les graphes sans  $P_5$ , demeure une question ouverte.

Boliac et Lozin [8], ont montré que le problème du stable maximum dans les graphes sans  $P_5$  est polynomialement équivalent à la recherche de graphes augmentants contenant un  $P_4$ . Ils ont appliqué ce résultat pour détecter une nouvelles sous classe de graphes où le problème possède une solution en temps polynomial par la caractérisation des graphes augmentants minimaux dans cette sous classe de graphes.

##### **a. Réduction du problème**

Introduisant la notion de *graphe auxiliaire* qui a été déjà utilisée par Minty [21], Boliac et Lozin [8], ont montré que le problème de la recherche du stable maximum dans la classe des graphes sans  $P_5$  se réduit aux deux problèmes suivants :

**(P<sub>1</sub>)** Trouver un graphe augmentant contenant un  $P_4$ .

**(P<sub>2</sub>)** Trouver un stable de poids maximum dans le *graphe auxiliaire*  $\Gamma$ .

où  $\Gamma$  est le graphe construit comme suit :

**Construction du graphe auxiliaire  $\Gamma$**

(1) Soit  $B = \{v \in V - S\}$

(2) Soit  $R$  une relation d'équivalence définie sur l'ensemble des sommets  $B$  comme suit:

$x R y \Leftrightarrow N_S(x) = N_S(y)$ ,  $x$  et  $y$  sont alors appelés similaires;

Partitionner  $B$  en classe d'équivalences  $C_i, i \geq 1$ , appelées classes de similarité;

(3) Soit  $\overline{G[C_i]}$  le complémentaire de  $G[C_i], i \geq 1$ ;

Soit  $Q_i$  une composante connexe dans  $\overline{G[C_i]}, i \geq 1$  appelée classe de sommets;

Partitionner  $C_i$  en classes de sommets  $Q_i, i \geq 1$ ;

(4) Poser  $V(\Gamma) = \{Q_i\}$ ;

(5) Relier deux sommets  $Q_i, Q_j$  si

(i) chaque sommet de  $Q_i$  est adjacent a chaque sommet de  $Q_j$

ou bien

(ii)  $N_S(Q_i) \subseteq N_S(Q_j)$  ou  $N_S(Q_j) \subseteq N_S(Q_i)$ .

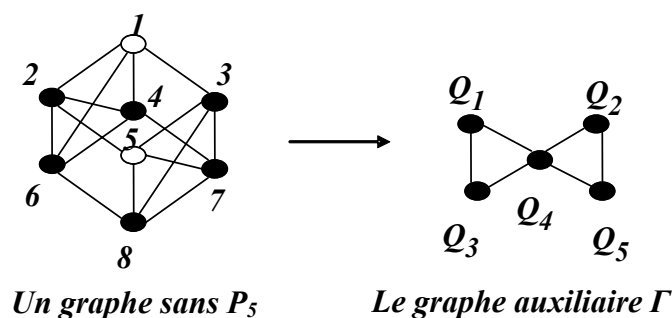
Un exemple de construction d'un graphe auxiliaire est donné par la figure 3.2.

**Exemple 2**

Soit  $G$  le graphe de la figure 3.2, où les sommets blancs forment un stable maximum et donc maximal dans  $G$ , et les sommets noirs appartiennent à  $V - S$ .

L'ensemble des sommets du graphe auxiliaire associé au graphe  $G$  est formé par :

$Q_1 = \{4\}, Q_2 = \{7\}, Q_3 = \{6\}, Q_4 = \{2, 3\}$  et  $Q_5 = \{8\}$ .



**Figure 3.2**

## Chapitre 3

### Résolution du problème du stable maximum par les graphes augmentants

---

L'algorithme récursif proposé par Boliac et Lozin [8] pour calculer le nombre de stabilité dans les graphes sans  $P_5$  est comme suit :

#### ALPHA (G)

**Entrée :** Un graphe  $G$  sans  $P_5$

**Sortie :** Un stable de cardinalité maximum

- (1) **Trouver un ensemble arbitraire stable maximal dans  $G$ . Si  $S = V(G)$  aller en 7.**
- (2) **Itérer une  $H$  – augmentation à  $S$ , avec  $H$  contenant  $P_4$ .**
- (3) **Partitionner les sommets de  $V(G) \setminus S$  en classes de sommets  $Q_1, \dots, Q_k$ .**
- (4)  **$\forall j = 1, \dots, k$ , trouver un stable maximum  $B_j = ALPHA(G[Q_j])$ .**
- (5) **Construire Le graphe auxiliaire  $\Gamma$  et trouver un stable  $Q = \{Q_1, \dots, Q_k\}$  de poids maximum dans  $\Gamma$ .**
- (6) **Si le poids de  $Q$  est positif ; augmenter  $S$  en changeant  $N_S(Q_i)$  par  $B_i, \forall i = 1, \dots, k$ .**
- (7) **Changer  $S$  et arrêter.**

Chaque étape de l'algorithme est polynomial, sauf l'étape 2, d'où le problème du stable maximum dans les graphes sans  $P_5$  est équivalent à la recherche des graphes augmentants contenant un  $P_4$ . Nous avons alors le théorème suivant :

**Théorème 2 [8]** *Le problème du stable maximum dans les graphes sans  $P_5$  est polynomialement équivalent au problème de la recherche d'un graphe augmentant contenant un  $P_4$ .*

Cependant pour certaines classes de graphes sans  $P_5$ , l'étape 2 est polynomiale et le problème du stable maximum se résout en temps polynomial par application de l'algorithme  $Alpha(G)$ .

#### **2. Application aux graphes sans $(P_5, K_{2,m} - e)$**

Un graphe  $G$  est dit sans  $(P_5, K_{2,m} - e)$  s'il ne possède pas de sous graphe isomorphe à  $P_5$ , et à  $K_{2,m} - e$ .

Le graphe  $K_{2,m} - e$  est le graphe biparti complet  $K_{2,m}$  auquel il a été retranché une arête. Cette classe généralise les classes définies dans [19,22], et pour lesquelles le problème du stable maximum a été résolu par la méthode des graphes augmentants.

## Chapitre 3

### Résolution du problème du stable maximum par les graphes agmentants

---

**Lemme 2 [8]** *Dans la classe des graphes sans  $(P_5, K_{2, m} - e)$  tout graphe augmentant minimal contenant un  $P_4$  possède au plus  $2m - 5$  sommets blancs.*

Le lemme suivant donne une caractérisation importante des graphes auxiliaires associés aux graphes sans  $(P_5, K_{2, m} - e)$ .

**Lemme 3 [8]** *Soit  $S$  un stable maximal dans un graphe  $G$  sans  $(P_5, K_{2, m} - e)$ . Si toute classe de sommet de  $G$  possède au moins  $m-1$  paires de sommets non adjacents, alors le graphe auxiliaire  $\Gamma$  correspondant associé à  $G$  et  $S$  est sans  $(P_4, C_4)$ .*

Corneil et al [9], ont montré qu'un stable de poids maximum dans les graphes sans  $(P_4, C_4)$  peut être trouvé en temps linéaire.

Le théorème suivant est une conséquence de ce qui précède.

**Théorème 3 [8]** *Soit  $m \geq 3$  un entier fixé. Etant donné un graphe  $G$  sans  $(P_5, K_{2, m} - e)$  à  $n$  sommets, le stable maximum peut être trouvé en un temps  $O(n^{2m-2})$ .*

L'algorithme *Alpha* ( $G$ ), a été utilisé par Hertz et Lozin [20], qui ont montré que le problème du stable maximum dans la classe des graphes sans bannière<sub>2</sub> qui généralise la classe des graphes sans  $P_5$ , est polynomialement équivalent à la recherche des graphes augmentants contenant un  $P_4$ .

### 2.5 Les graphes sans bannière<sub>2</sub> [20]

Cette classe est caractérisée par le sous graphe induit interdit qui est noté bannière<sub>2</sub>.

Le graphe bannière<sub>2</sub> est le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet adjacent aux deux sommets qui sont à distance un de l'unique sommet de degré trois de l'arbre  $S_{1, 1, 2}$ .

Le graphe  $S_{1, 1, 2}$  est l'arbre ayant exactement trois sommets de degré un à distance 1, 1, 2 de l'unique sommet de degré trois (figure 3.3).

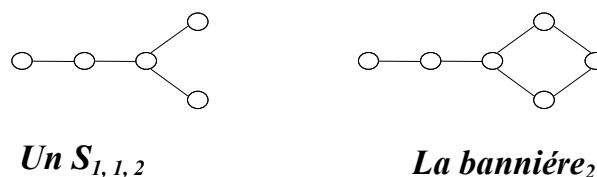
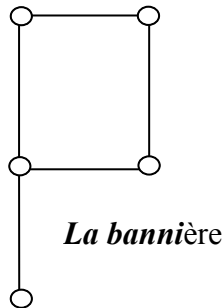


Figure 3.3

**Théorème 4 [20]** *Le problème du stable maximum dans la classe des graphes sans bannière<sub>2</sub> est polynomialement équivalent au problème de la recherche des graphes augmentants contenant un  $P_4$ .*

## 2.6 Les graphes sans bannière

Cette classe est caractérisé par le sous graphe induit interdit qui est la bannière (figure 3.4).



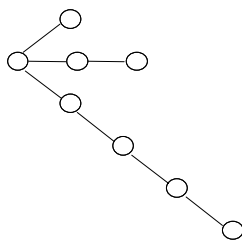
**Figure 3.4**

Alekseev [3], a montrer que Le problème du stable maximum est un problème NP-dur lorsqu'il est restreint à la classe des graphes sans bannière.

Gerber, et al [14], ont essayé de résoudre le problème du stable dans deux sous classes des graphes sans bannière en donnant la caractérisation complète des graphes augmentants minimaux. En se basant sur cette caractérisation ils ont prouvé que le problème du stable se résout en temps polynomial dans ces sous classes de graphes.

### **a. Les graphes sans (bannière, $S_{1,2,4}$ )**

Cette classe est caractérisée par deux sous graphes induits interdits, la bannière et  $S_{1,2,4}$ . Le graphe  $S_{1,2,4}$  est l'arbre ayant exactement trois sommets de degré un étant à distance 1, 2, 4 de l'unique sommet de degré trois (figure 3.4).



**Figure 3.5 : Un  $S_{1,2,4}$**

### Chapitre 3

#### Résolution du problème du stable maximum par les graphes augmentants

---

Le théorème suivant caractérise les graphes augmentants minimaux dans les graphes sans (bannière,  $S_{1,2,4}$ ).

**Théorème 5 [14]** *Un graphe augmentant minimal dans un graphe sans (bannière,  $S_{1,2,4}$ ) est l'un des graphes suivants :*

- *Un graphe biparti complet.*
- *Une chaîne impair  $P_k$  avec  $k \geq 7$ .*
- *Un arbre augmentant simple.*
- *Une plante*
- *L'un des graphes  $F_1, \dots, F_9$ .*

Chacun des graphes augmentants minimaux précédant peut être trouvé en un temps polynomial, sauf la chaîne impair  $P_k$  avec  $k \geq 7$ .

Hertz et al [18], ont résolu ce problème, en réduisant le problème de la recherche de chaînes augmentantes dans les graphes sans (bannière,  $S_{1,2,4}$ ) aux graphes sans étoile. Ils ont donné une généralisation de la recherche des graphes augmentants minimaux dans les graphes sans (bannière,  $S_{1,2,4}$ ), en introduisant la notion de *paire candidates de chaînes*.

**Définition 3** *Soit  $G$  un graphe sans (bannière,  $S_{1,2,4}$ ). Soit  $L = (x_0, x_1, x_2)$  et  $R = (x_{k-m}, x_{k-m+1}, \dots, x_k)$  où  $m = 2 \lfloor i/2 \rfloor$  deux chaînes telle que aucun sommet de  $L$  n'est adjacent à un sommet de  $R$  et chaque sommet  $x_j$  de  $R$  est un sommet noir si et seulement si  $j$  est un nombre pair. La paire  $(L, R)$  est dite *paire candidate de chaînes*.*

**Théorème 6 [18]** *Etant donné un graphe  $G$  sans (bannière,  $S_{1,2,i}$ ) et un stable  $S$  dans  $G$ , déterminer si  $S$  admet ou non une chaîne augmentante se fait en temps  $O(n^{(i+14)/2})$ .*

**Théorème 7 [18]** *Etant donné un graphe  $G$  sans (bannière,  $S_{1,2,4}$ ) de  $n$  sommets, un stable maximum peut être trouvé en temps  $O(n^{11})$ .*

#### **b. Les graphes sans (bannière, $P_7$ ) [14]**

Cette classe est caractérisée par deux sous graphes induits interdits la bannière et la chaîne de longueur sept.

La caractérisation des graphes augmentants minimaux dans cette classe est donnée par le théorème suivant :

### Chapitre 3

#### Résolution du problème du stable maximum par les graphes agmentants

---

**Théorème 8 [14]** *Un graphe augmentant minimal dans un graphe sans (bannière,  $P_8$ ) est l'un des graphes suivants*

- Un graphe biparti complet  $K_{r, r+1}$  avec  $r \geq 0$ .
- Un  $L_{r,s}$  ou un  $L_{R,s}^2$  avec  $r \geq 2$  et  $s \geq 0$ .
- Un  $M_{r,s}$  avec  $r \geq 1$  et  $r \geq s \geq 0$ .
- Un  $N_s$  avec  $s \geq 0$ .
- L'un des graphes  $F_2, F_3, F_4, F_5$ .

Chacun des graphes augmentants minimaux précédant peut être calculé en temps polynomial, d'où le théorème suivant :

**Théorème 7 [14]** *Le problème du stable maximum peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans (bannière,  $P_8$ ).*

Notons que Les deux résultats précédents généralisent ceux de [4, 5, 12, 19, 21, 23], où le calcul du nombre de stabilité se fait en temps polynomial.

Enfin nous résumons les cas polynomialement résolus dans les graphes sans  $P_5$  et dans les graphes sans bannière.

3. Résumé des cas polynomialement résolus dans les graphes sans  $P_5$  et dans les graphes sans bannière

3.1 Dans les graphes sans  $P_5$

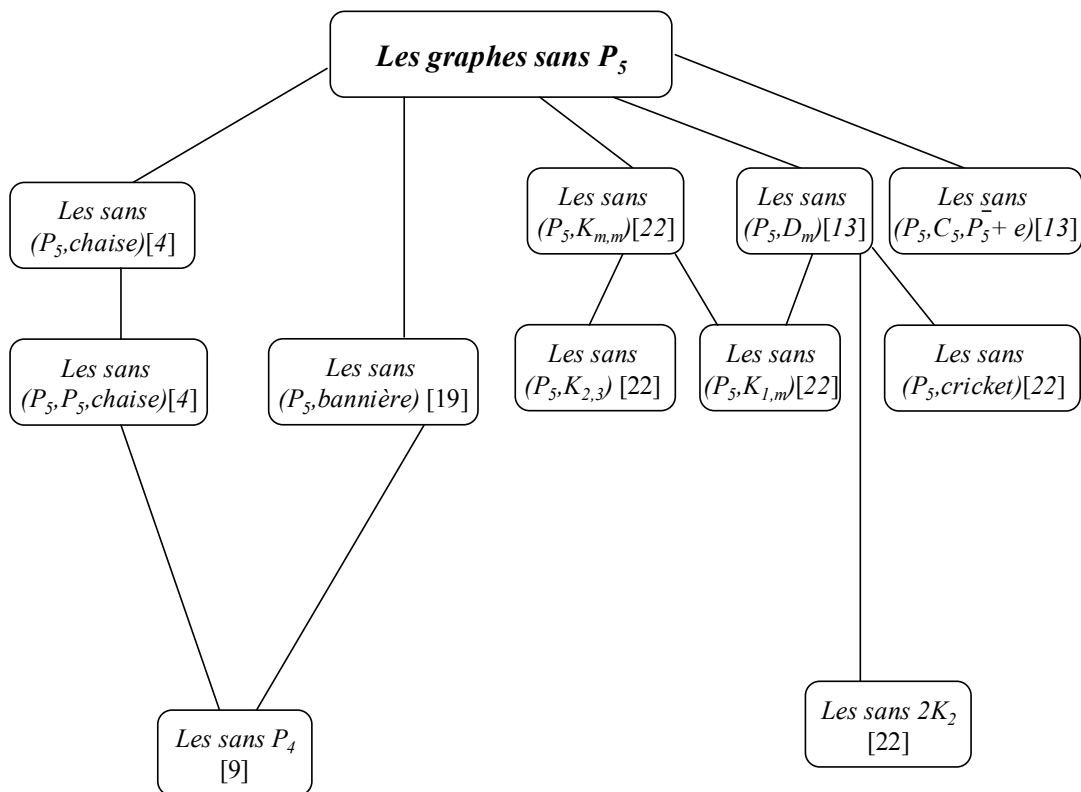


Figure 3.6



### 3.2 Dans les graphes sans bannière

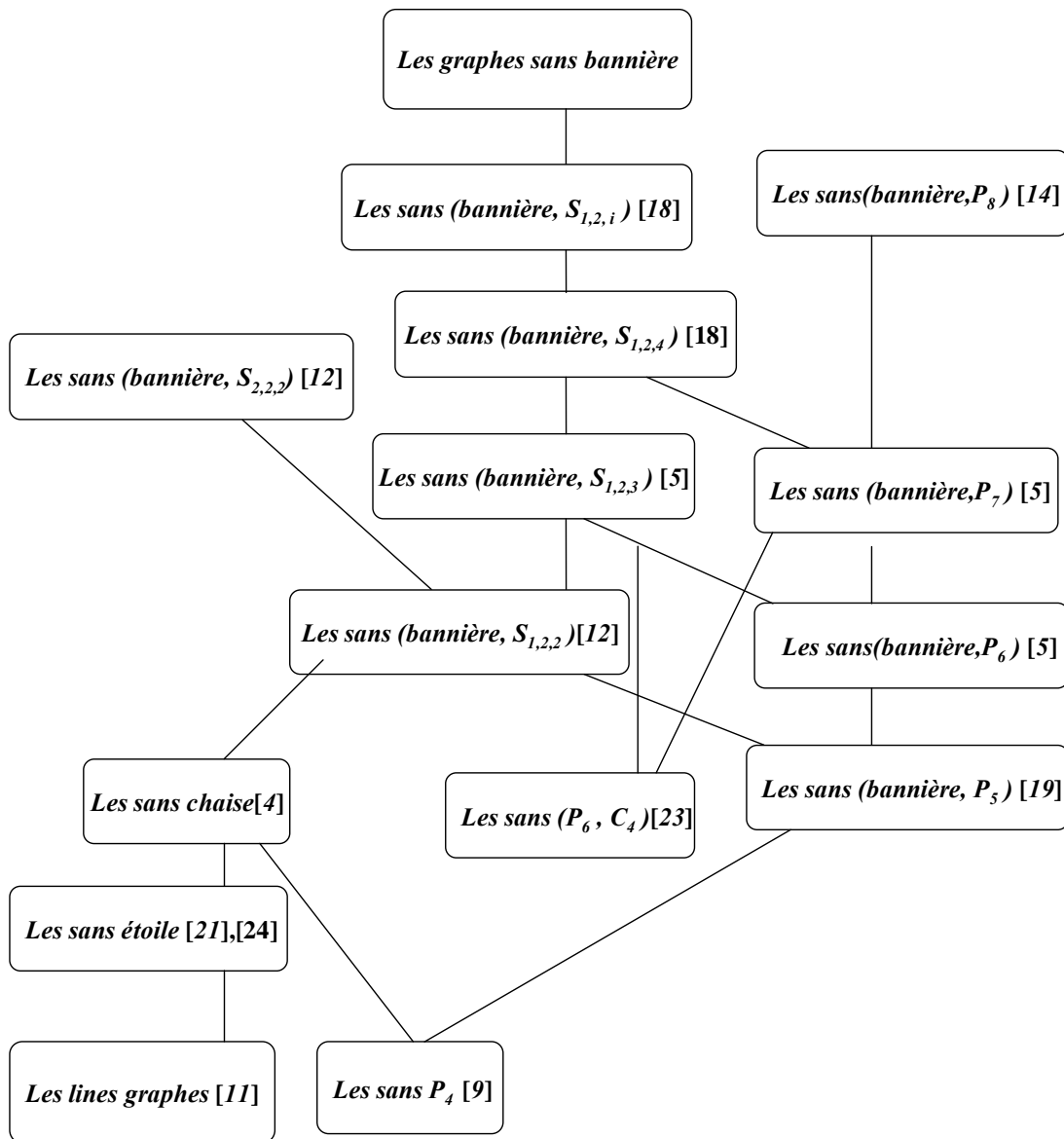


Figure 3.7

# *Chapitre 4*

## **Nombre de stabilité dans la classe $\Gamma'$ de graphes**

Nous définissons une nouvelle classe de graphes  $\Gamma'$ , pour laquelle le nombre de stabilité peut être trouvé en temps polynomial.

Cette classe est une sous classe des graphes sans chaise, sans net, et généralise la classe définie dans [1].

Nous donnons d'abord la définition de cette classe de graphes, puis nous décrivons l'algorithme de la construction des graphes de la classe  $\Gamma'$ .

Nous prouvons que cette classe est fermée pour cet algorithme, puis nous montrons que le nombre de stabilité dans la classe  $\Gamma'$  peut être calculé en temps polynomial.

Nous terminons ce travail en citant quelques domaines d'application du stable maximum.

## 1. Introduction

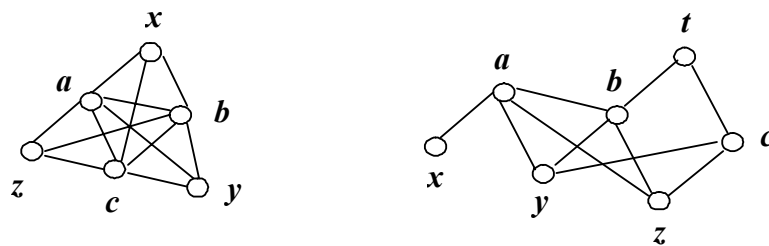
Nous montrons dans cette partie, que l'application de l'algorithme de la struction avec quelques modifications permet de calculer le nombre de stabilité en temps polynomial, dans la sous classe  $\Gamma'$  des graphes sans chaise, sans net qui est définie comme suit :

### Définition 1

Un graphe  $G$  appartient à la classe  $\Gamma'$  si

- (i)  $G$  est sans chaise
- (ii)  $G$  est sans net
- (iii) L'ensemble des centres d'étoiles est réunion de graphes complets.

### Exemple1



**Figure 4.1 : deux graphes de la classe  $\Gamma'$**

Cette classe de graphes est une généralisation de la sous classe  $\Gamma$  [1], elle contient les graphes sans CAN [15], et les graphes sans CN [16].

Dans la section 2, nous décrivons l'algorithme de la struction des graphes de la classe  $\Gamma'$ , en s'inspirant de la struction particulière des graphes de la classe  $\Gamma$ , cette struction centrée en un sommet 0 qui n'est pas centre d'étoile appelé *sommet spécial*. Le sommet spécial existe à chaque étape de la transformation de  $G$ , et  $\alpha(G) = \alpha(G') + 1$ .

Dans la section 3, nous montrons que la classe des graphes  $\Gamma'$  est fermée pour la struction, c'est-à-dire que le graphe  $G'$  est dans la classe  $\Gamma'$ .

Dans la section 4, nous confirmons que puisque  $|V(G')| \leq |V(G)| - 2$ , le nombre de stabilité dans la classe  $\Gamma'$  peut être calculé en temps polynomial.

Nous terminons notre travail, en citant quelques domaines d'application du stable maximum.

**2. Struction des graphes de la classe  $\Gamma'$** 

Nous écrivons  $[a, b]$  pour dire que les sommets  $a$  et  $b$  sont reliés par une arête tandis que  $[\overline{a, b}]$  désigne l'absence d'une arête (ou bien présence d'une *non arête*). Le voisinage ouvert

et le voisinage fermé de  $u$  sont notés respectivement  $N(u) = \{x \in V / xu \in E\}$  et

$N[u] = N(u) \cup \{u\}$ . Etant donné un sommet spécial  $\theta$ , nous définissons:

$N_0[a] = N[a] \cap N(\theta)$  pour tout  $a \in V - \{\theta\}$ .

Dans ce qui suit nous considérons la struction centrée en un sommet  $\theta$  spécial.

Soit  $\leq$  une relation de préordre partiel définie sur  $N(\theta)$  comme suit :

$a \leq b$  si  $N_0(a) \subseteq N_0(b)$ , nous écrivons  $a \equiv b$  si  $a \leq b$  et  $a \geq b$ . Nous énumérons les sommets de  $N(\theta)$  de 1 jusqu'à  $|N(\theta)|$  et il serait commode de designer ces sommets par les numéros qui leurs sont associés ; alors un ordre total  $\prec$  est créé en les sommets de  $N(\theta)$ .

S'inspirant de l'algorithme de la struction donné dans [1], nous décrivons la struction des graphes de la sous classe  $\Gamma'$  comme suit :

**Algorithme de construction de  $G'$  à partir de  $G$**

**Entrée :** Un graphe  $G \in \Gamma'$  de nombre de stabilité  $\alpha(G)$

**Sortie :** Un graphe  $G' \in \Gamma'$  de nombre de stabilité  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$

- (1) Choisir un sommet spécial  $\theta$  ;
- (2) Enumérer les sommets de  $N(\theta)$  de 1 jusqu'à  $|N(\theta)|$  tels que
  - (i) si  $a \leq b$  et  $a \not\geq b$  alors  $a \prec b$
  - (ii) si  $a \equiv b, a \not\prec x, x \not\prec b$  et  $a \prec b$  alors soit  $x \prec a$  ou  $x \succ b$
- (3) Soit  $J = \{i \in N(\theta) \mid \exists j \in N(\theta), j \succ i \text{ et } [\overline{i, j}]\}$  ;
- (4) Pour chaque sommet  $i \in J$ , introduire un nouveau sommet  $i^*$  ;
- (5) Pour tout sous graphe  $H_i$  de  $G$ , tel que  $V(H_i)$  est formé de centres d'étoiles  
choisir un sommets  $a_i$  ;  
Supprimer tout les sommets  $a_j \in V(H_i)$  ,  $\forall i \neq j$  ;  
Supprimer les sommets de  $N[\theta]$  et poser  $R = V(G) - N[\theta]$
- (6) Soit  $N$  l'ensemble des nouveaux sommets ;  
Relier tout les nouveaux sommets de  $N$  ;
- (7) Relier un sommet  $r$  de  $R$  à un sommet  $i^*$  de  $N$  si soit  $[i, r]$  ou  $[j, r]$   
pour tout  $j \succ i$  tel que  $[\overline{i, j}]$  dans  $G$ .

Un sommet  $b$  est un *suivant* d'un sommet  $a$  si  $[\overline{a, b}]$ ,  $a, b \in N(\theta)$  et  $b \succ a$

Nous supposons le long de cet article que :

- (1)  $G$  est un graphe sans chaise, sans net ayant un sommet spécial  $\theta$ .
- (2)  $G'$  le graphe obtenu par struction centrée en un sommet spécial  $\theta$ .
- (3) si  $a, b, c, \dots$ , sont des nouveaux sommets, alors  $a', b', c', \dots$  sont les correspondants de  $a, b, c, \dots$ , et  $a'', b'', c'', \dots$  sont leurs suivants .

Dans ce qui suit nous énonçons quelques résultats, qui sont des conséquences de l'application de l'algorithme de la struction précédent.

**Proposition 1** Soit  $G$  un graphe de  $\Gamma'$  avec  $\alpha(G) > 1$  ;  $G'$  le graphe obtenu par struction centrée en un sommet spécial  $\theta$ , alors on a  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$ .

**Preuve.**

a) D'abord nous montrons que si  $S \neq \emptyset$  est un stable dans  $G$ , il existe un stable  $S'$  dans  $G'$  avec  $|S'| = |S| - 1$ . Comme 0 est spécial, nous avons  $|S \cap N(0)| \leq 2$ .

Si  $S \cap N(0) = \emptyset$ , il suffit de prendre  $S' = S - \{x\}$ , ou  $x$  est un sommet quelconque de  $S \cap R$ .

Si  $S \cap N(0) = \{i\}$ , il suffit de prendre  $S' = S - \{i\}$ .

Si  $S \cap N(0) = \{i, j\}$ , alors supposons  $0 < i < j$ ,  $[\overline{i, j}]$  et posons  $S' = (S - \{i, j\}) \cup \{i^*\}$  où  $i^*$  est le nouveau sommet correspondant à  $i$ .

Montrons que  $S'$  ainsi choisi est un stable de  $G'$ .

Supposons par l'absurde que  $S'$  n'est pas un stable donc  $[i^*, r]$  pour un sommet  $r$  de  $S \cap R$ . Puisque  $[\overline{i, r}]$  dans  $G$  alors  $[j, r]$  pour tout suivant de  $i$ , en particulier  $j$ . Ceci est une contradiction puisque  $[\overline{i, r}]$ ,  $[\overline{j, r}]$  dans  $G$ . Donc (a) est vérifiée et  $\alpha(G') \geq \alpha(G) - 1$ .

b) Nous montrons à présent que pour tout stable  $S'$  de  $G'$ , il existe un stable  $S$  dans  $G$  tel que  $|S| = |S'| + 1$ . Comme  $N$  est une clique alors  $|S' \cap N| \leq 1$ .

Si  $S' \cap N = \emptyset$  alors  $S' \subseteq R$ , il suffit de prendre  $S = S' \cup \{0\}$ .

Si  $S' \cap N = \{a\}$

Soit  $a'$  le correspondant de  $a$  dans  $G$ , montrons qu'il existe un suivant  $a''$  de  $a'$  tel que  $S = (S' - \{a\}) \cup \{a', a''\}$  est un stable dans  $G$ . Par construction  $a'$ ,  $a''$  sont non adjacents,  $[\overline{a', r}]$  dans  $G$ , pour tout  $r$  de  $S' - \{a\}$  sinon nous aurons  $[a, r]$  dans  $G'$ . Donc  $N(a') \cap (S' - \{a\}) = \emptyset$ .

Supposons d'abord  $N(a'') \cap (S' - \{a\}) = \emptyset$ , pour un  $a''$ . Alors  $S = (S' - \{a\}) \cup \{a', a''\}$  est un stable dans  $G$  et c'est l'ensemble voulu.

A présent s'il existe  $r, s \in (S' - \{a\}) \cup \{a', a''\}$  alors  $(a''; r, s, 0, a')$  est une chaise. Une autre contradiction est facilement obtenue si deux suivants  $a''$ ,  $a'''$  existent tels que  $[a'', a''']$  car  $(0; a', a'', a''')$  n'est pas une étoile et par conséquent  $(0, a'', a''' ; a', r, s)$  est un net (en supposant  $[a'', r]$  et  $[a''', s]$ ).

Il reste à considérer le cas où  $a'$  possède un seul suivant  $a''$ . D'une part  $a''$  doit être adjacent à un seul sommet  $r$  de  $R$  et de l'autre si  $[a'', r]$  dans  $G$  alors  $[a, r]$  dans  $G'$  car

## Chapitre 4

### Nombre de stabilité dans la classe de graphes $\Gamma'$

---

$a''$  est le seul suivant de  $a'$ . Cette dernière contradiction prouve  $b)$  et ainsi  $\alpha(G) \leq \alpha(G') + 1$ .

En combinant  $a)$  et  $b)$  nous avons  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$  □

**Proposition 2** Soit  $G$  un graphe de  $\Gamma'$ , et soit  $G'$  le graphe obtenu par la struction centrée en un sommet spécial  $0$ , alors  $|V(G')| \leq |V(G)| - 2$ .

La proposition 2, découle du fait que le sommet  $0$  sera supprimé et le dernier sommet  $|N(0)|$  ne lui correspond aucun nouveau sommet  $|N(0)|^*$  dans  $G'$ .

Les lemmes suivants sont utiles pour démontrer les propositions qui vont suivre.

**Lemme 1** soit  $G$  un graphe sans chaise, sans net,  $G'$  le graphe obtenu par struction centrée en un sommet spécial  $0$ , supposons que  $a \in N$ ,  $a'$  est le correspondant de  $a$  dans  $G$  alors,

(i) Si  $[a, x]$  dans  $G'$  alors  $[a', x]$  ou bien  $[a'', x]$  pour tout suivant  $a''$  de  $a'$ .

(ii) Si  $[\overline{a, x}]$  dans  $G'$  alors  $[\overline{a', x}]$  et  $[\overline{a'', x}]$  pour un suivant  $a''$  de  $a'$ .

(iii) Si  $[\overline{a, x}]$ ,  $[\overline{x, y}]$  et  $[\overline{y, a}]$  dans  $G'$  alors  $[\overline{a', u}]$  et  $[\overline{a'', u}]$  pour  $u = x, y$  et pour un suivant  $a''$  de  $a'$  dans  $G$ .

**Preuve.** (i) et (ii) sont des conséquences de la définition de la struction.

(iii) Par définition de la struction,  $[\overline{a', x}]$ ,  $[\overline{a', y}]$ ,  $[\overline{a'', x}]$  pour un suivant  $a''$  de  $a'$  et  $[\overline{a''', y}]$  pour un suivant  $a'''$  de  $a'$ .

Si  $a'' = a'''$  alors (iii) est vérifiée. Supposons alors que  $a'' \neq a'''$  et que  $[a'', y]$  et  $[a''', x]$ .  $0$  est un sommet spécial alors  $[a'', a''']$ , mais ainsi  $(0, a'', a'''; a', x, y)$  est un net. Donc ce cas est impossible. □

**Lemme 2** Soit  $G$  un graphe sans chaise, sans net,  $0$  un sommet spécial.

Si  $B = (r, a, b, 0, x, s)$  (figure 4.2) est un sous graphe induit de  $G$ , alors  $a \leq b$ .

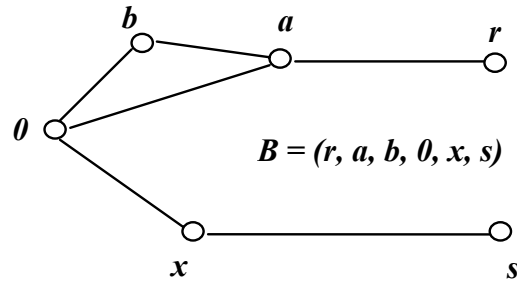


Figure 4.2

**Preuve.** Pour montrer  $a \leq b$ , supposons par l'absurde qu'il existe un sommet  $v \in N_0(a) - N_0(b)$  dans  $G$  (rappelons que  $a \leq b$  si  $N_0(a) \subseteq N_0(b)$ ). Posons  $H := B + v$ . Puisque  $(0 ; x, b, v)$  n'est pas une étoile, nous avons  $[x, v]$ . Aussi  $[v, r]$  sinon  $H - \{0, s\}$  est une chaise et  $[\overline{v, s}]$  sinon  $H - \{a, x\}$ . Mais alors  $H - \{a\}$  est un net.  $\square$

**Lemme 3** Soit  $G$  un graphe sans chaise, sans net.  $0$  un sommet spécial et soit  $G'$  le graphe obtenu par struction centrée en  $0$ . Supposons que  $G'$  contient une étoile induite  $(a; x, y, z)$  et supposons que  $N \cap \{a, x, y, z\} \neq \emptyset$  alors on a ce qui suit :

- (i)  $a \in N$
- (ii)  $a', a'', x', x''$  sont tous distincts si  $x \in N$ , ou  $a''$  est un suivant quelconque de  $a'$  et  $x''$  est un suivant de  $x'$  choisi tel que  $[\overline{x'', y}]$  et  $[\overline{x'', z}]$
- (iii) Sous les conditions de (ii),  $[a', v]$  et  $[a'', v]$  pour  $v = x', x''$
- (iv)  $a'$  et ses suivants sont des centres d'étoiles dans  $G$ .

**Preuve.**

(i) Par l'absurde, supposons sans perte de généralité que  $N \cap \{x, y, z\} = \{x\}$ , par le lemme 1(iii), il existe un suivant  $x''$  de  $x'$  dans  $G$  tel que  $[\overline{x'', y}]$  et  $[\overline{x'', z}]$ .

Ainsi  $\{x', x'', y, z\}$  est un stable dans  $G$ . Puisque  $[a, x]$  dans  $G'$  nous avons dans  $G$   $[a', x]$  ou bien  $[a'', x]$  Mais alors  $(a, y, z, u, 0)$  avec  $u \in \{x', x''\}$  est une chaise, ce qui est absurde (noter que  $[\overline{0, y}]$  et  $[\overline{0, z}]$  puisque  $y, z \notin N$ ). Comme  $N \cap \{a, x, y, z\} \neq \emptyset$ , il s'en suit que  $a \in N$ .

(ii) Puisque  $a, x \in N$  et  $N$  est par construction une clique, nous avons  $y, z \notin N$ . Par le lemme 1(iii), nous pouvons choisir  $x''$  tel que  $[\overline{x'', u}]$  pour  $u = y, z$ . Supposons (ii) fausse, au



moins deux sommets de l'ensemble  $\{a', a'', x', x''\}$  sont confondus. Comme  $a' \neq a''$  et  $x' \neq x''$ , nous considérons seulement les deux cas suivants :

(1)  $a' \in \{x', x''\}$

Comme  $[a, y]$  et  $[a, z]$  dans  $G'$  et  $[\overline{a'}, y]$  et  $[\overline{a'}, z]$  puisque  $a' \in \{x', x''\}$ , il résulte que  $[a'', y]$  et  $[a'', z]$ . Mais alors  $(a'' ; y, z, \theta, a')$  est une chaise dans  $G$ , ce qui est absurde.

(2)  $a'' \in \{x', x''\}$

En interchangeant les rôles de  $a'$  et  $a''$  nous obtenons le cas précédent.

(iii) Par (ii), nous pouvons choisir  $a'', x''$  tels que sont  $a', a'', x', x''$  tous distincts et  $\{x', x'', y, z\}$  est un stable dans  $G$ . Soit  $F$  le sous graphe induit par  $\{0, a', a'', x', x'', y, z\}$  dans  $G$  où  $0$  est le centre de la structure.

D'abord nous montrons que  $[a', x']$ . Supposons par l'absurde que  $[\overline{a'}, x']$ , alors  $[a'', x']$  et  $[a', x'']$  sinon  $(0 ; a', x', a'')$  ou  $(0 ; a', x', x'')$  est une étoile. Nous ne pouvons pas avoir  $[a', y]$  et  $[a', z]$  sinon  $F - \{a'', x''\}$  est une chaise. D'une manière similaire, nous ne pouvons pas avoir  $[a'', y]$  et  $[a'', z]$  sinon si  $[a'', x'']$  alors  $(a'' ; x', u, x'', a')$  avec  $u \in \{y, z\}$  est une chaise (rappelons que  $|N(a') \cap \{y, z\}| \leq 1$ ) ou bien si  $[\overline{a'', x''}]$  alors  $(a'' ; y, z, \theta, x'')$  est une chaise. Puisque  $[a, y]$  et  $[a, z]$  dans  $G'$ , nous pouvons supposer sans perte de généralité  $[a', y], [\overline{a'}, z], [a'', z]$  et  $[\overline{a'', y}]$ . Par le lemme 2, appliquer à la configuration  $(y, a', x', \theta, a'', z)$ , nous obtenons  $a'' \leq x''$  d'où  $a' \leq a'' \leq x'$ . Donc  $[x', z]$  dans  $G$  ce qui est absurde. Comme  $x', x''$  jouent un rôle symétrique pour les arguments précédents, nous pouvons supposer aussi bien  $[a', x'']$ .

Pour terminer la preuve de (iii) nous avons à montrer seulement  $[a'', x'']$ , puisque nous pouvons déduire  $[a'', x']$  par symétrie. Supposons par l'absurde que  $[\overline{a'', x''}]$ . Comme

$(0 ; a'', x', x'')$  n'est pas une étoile, nous avons  $[a'', x']$ . Il est clair que nous ne pouvons pas avoir  $[a'', y]$  et  $[a'', z]$  sinon  $F - \{a', x'\}$  est une chaise. Si  $[a'', z]$  alors  $[\overline{a'', y}]$  d'où  $[a', y]$ . Mais ainsi  $F - \{0, z\}$  est une chaise. Si  $[\overline{a'', z}]$  alors  $[a'', y]$  d'où  $[a', z]$ . Mais ainsi  $F - \{0, y\}$  est une chaise dans  $G$  ce qui est absurde.

## Chapitre 4

### Nombre de stabilité dans la classe de graphes $\Gamma'$

---

(iv) Par (i),  $a \in N$  et par construction,  $N$  est une clique. Alors nous considérons les deux cas suivants :

$$(1) N \cap \{a, x, y, z\} = \{a\}$$

Soit  $a'$  le correspondant de  $a$  dans  $G$  et choisissons un suivant quelconque, disons  $a''$ , de  $a'$ . Supposons, par l'absurde qu'au moins un des sommets  $a'$ ,  $a''$  (disons  $a''$ ) ne centre pas une étoile. Comme  $[a, u]$  pour  $u = x, y, z$  dans  $G$ , nous avons soit  $[a', u]$  ou  $[a'', u]$ . Par supposition,  $|N(a'') \cap \{x, y, z\}| \leq 1$  sinon  $(a''; \emptyset, x, y)$  est une étoile. Alors supposons, sans perte de généralité,  $[a', x]$ ,  $[a', y]$ ,  $[\overline{a''}, x]$ ,  $[\overline{a''}, y]$ . Mais alors  $(a'; x, y, \emptyset, a'')$  est une chaise dans  $G$ , ce qui est absurde. Ainsi (1) est rejeté.

$$(2) N \cap \{a, x, y, z\} = \{a, x\}$$

Soit  $x'$  le correspondant de  $x$  dans  $G$  et choisissons  $x''$  tel que  $[\overline{x''}, y]$  et  $[\overline{x''}, z]$ .

Par (ii),  $a', a'', x', x''$  sont tous distincts. Comme dans (1), supposons que  $a''$  ne centre pas une étoile. D'après (iii),  $[a'', x']$  et  $[a'', x'']$ . Donc  $[\overline{a''}, y]$  et  $[\overline{a''}, z]$ , ce qui implique  $[a', y]$  et  $[a', z]$  puisque  $[a, y]$  et  $[a, z]$  dans  $G'$ . Mais alors  $(a'; y, z, \emptyset, a'')$  est une chaise dans  $G$  ce qui est absurde.  $\square$

### 3. Fermeture de la classe $\Gamma'$

Montrons que si  $G$  est un graphe de  $\Gamma'$ , alors le graphe  $G'$  obtenu par la struction précédente est dans  $\Gamma'$ , donc  $G'$  est sans chaise, sans net et l'ensemble des centres d'étoiles de  $G'$  est réunion de graphes complets.

**Proposition 3** Soit  $G$  un graphe de  $\Gamma'$ ,  $G'$  le graphe obtenu par la struction centrée en un sommet spécial  $\emptyset$ ; alors  $G'$  est sans chaise.

#### Preuve.

Supposons que  $G'$  contient une chaise  $(a; b, c, d, e)$ . Au moins un des sommets  $a, b, c, d, e$  est un nouveau sommet, sinon cette chaise existe dans  $G$ . Par le lemme 3(i) appliqué à l'étoile  $(a; b, c, d)$ , aucun des sommets  $b, c, d$  n'est le seul nouveau sommet, en particulier nous ne pouvons pas avoir  $d, e \in N$ . Alors nous considérons trois cas seulement.

## Chapitre 4

### Nombre de stabilité dans la classe de graphes $\Gamma'$

---

$$(1) N \cap \{a, b, c, d\} = \{a\}$$

Soit  $a'$  le correspondant de  $a$  et choisir  $a''$  tel que  $[\overline{a''}, e]$ . Comme soit  $[a', d]$  ou  $[a'', d]$ , supposons sans perte de généralité  $[a', d]$ . Si  $u = b, e$  alors  $[\overline{a'}, u]$  sinon  $(a' ; 0, u, d, e)$  est une chaise dans  $G$ . Comme  $[a, u]$  dans  $G'$ , nous devons avoir  $[a'', b]$  et  $[a'', c]$ . Mais ainsi  $(a'' ; b, c, 0, a')$  est une chaise dans  $G$  ce qui est absurde. Alors (1) est impossible.

$$(2) N \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$$

Soit  $a'$  le correspondant de  $a$  et soit  $a''$  un suivant de  $a'$  choisi tel que  $[\overline{a''}, e]$ .

Soit  $b'$  le correspondant de  $b$  et soit  $b''$  un suivant de  $b'$  choisi tel que  $[\overline{b''}, c]$  et  $[\overline{b''}, d]$ . Par le lemme 3(ii),  $a', a'', b', b''$  sont tous distincts. Comme  $[\overline{b'}, e]$  dans  $G'$  alors d'après le lemme 1(iii), nous avons  $[\overline{b'}, e]$ . Supposons  $[a', d]$ . par le lemme 3(iii) appliqué à l'étoile  $(a ; b, c, d)$ , nous avons  $[a', u]$ ,  $[a'', u]$  pour  $u = b', b''$ .

Observons que  $[b'', e]$  sinon  $(a' ; b', b'' d, e)$  est une chaise. Après, nous voyons que  $[\overline{a'}, c]$  sinon  $(a', b', c, d, e)$  est une chaise. Donc  $[a'', c]$  puisque  $[a, c]$  dans  $G'$ .

Mais alors  $(a'' ; b', c, b'', e)$  est une chaise dans  $G$ . Par des arguments similaires, le cas  $[\overline{a'}, d]$  est éliminé, par conséquent  $[a'', d]$ . Ainsi (2) ne peut pas avoir lieu.

$$(3) N \cap \{a, b, c, d\} = \{a, d\}$$

Considérons  $a'$  et  $a''$  comme dans (2) et soit  $d'$  le correspondant de  $d$  et choisissons  $d''$  tel que  $[\overline{d''}, b]$  et  $[\overline{d''}, c]$ . Par le lemme 3(ii),  $a', a'', d', d''$  sont tous distincts. Supposons d'abord  $[a', c]$ . Par le lemme 3(iii),  $[a', u]$ ,  $[a'', u]$  pour  $u = d', d''$ . D'autre part nous avons que  $[\overline{a'}, b]$  sinon  $(a' ; b, c, u, e)$  est une chaise, avec  $u \in \{d', d''\}$  choisi tel que  $[u, e]$  (puisque  $[d, e]$  dans  $G'$ , nous avons soit  $[d', e]$  ou bien  $[d'', e]$ ). Donc  $[a'', b]$  puisque  $[a, b]$  dans  $G'$ . Mais maintenant  $(u ; e, a', a'', b)$  est une chaise. Les mêmes arguments conduisent à une contradiction si  $[\overline{a'}, c]$  et par conséquent  $[a'', c]$ .

La preuve de la proposition 3 est achevée.  $\square$

**Proposition 4** Soit  $G$  un graphe de  $\Gamma'$ ,  $G'$  le graphe obtenu par la struction centrée en un sommet spécial  $0$  ; alors  $G'$  est sans net.

**Preuve.** Supposons que  $(a, b, c ; d, e, f)$  est un net induit dans  $G'$  et au moins un de ses sommets est nouveau. Nous avons les quatre cas suivants:

## Chapitre 4

### Nombre de stabilité dans la classe de graphes $\Gamma'$

---

$$(1) N \cap \{a, b, c, d, e, f\} = \{d\}$$

Soit  $d'$  le correspondant de  $d$ , alors  $[\overline{d', u}]$  pour  $u = b, c, e, f$ . Par le lemme 1(iii) nous pouvons choisir  $d''$  tel que  $[\overline{d'', c}]$  et  $[\overline{d'', e}]$ . A présent  $[\overline{d'', a}]$  sinon  $(a, b, c; d', e, f)$  est un net. Comme  $[d, a]$  dans  $G'$ , nous avons  $[d'', a]$ . Observons que  $[\overline{d'', f}]$  sinon  $(d''; a, f, \theta, d')$  est une chaise. Mais alors  $(a, b, c; d'', e, f)$  est un net dans  $G$ , ce qui est absurde. Ainsi (1) est impossible.

$$(2) N \cap \{a, b, c\} = \{a\}$$

Soit  $a'$  le correspondant de  $a$ . Alors  $[\overline{a', u}]$  pour  $u = e, f$ . Par le lemme 1(iii), nous pouvons choisir  $a''$  tel que  $[\overline{a'', e}]$  et  $[\overline{a'', f}]$ . Supposons sans perte de généralité que  $[a', c]$ , alors  $[a', b]$  sinon  $(c; f, a', b, e)$  est une chaise. A présent  $(a', b, c; \theta, e, f)$  est un net dans  $G$ , ce qui est absurde. Ainsi (2) est rejeté. Notons que les arguments pour la preuve du cas (2) n'utilisent pas le sommet  $d$ . Ainsi aucune autre considération n'est nécessaire si  $N \cap \{a, b, c\} = \{a, d\}$ . Evidemment ce cas recouvre ceux où  $b$  ou  $c$  est un nouveau sommet.

$$(3) N \cap \{a, b, c\} = \{a, b\}$$

Soient  $a', b'$  les correspondants de  $a$  et  $b$ . Alors  $[\overline{a', u}]$  pour  $u = e, f$  et  $[\overline{b', v}]$  pour  $v = d, f$ . Par le lemme 1(iii), il existe  $a''$  et  $b''$  tel que  $[\overline{a'', u}]$  et  $[\overline{b'', v}]$ .

**(3.1)  $a', a'', b', b''$  sont tous distincts**

Nous ne pouvons pas avoir  $[u, c]$  et  $[u, d]$  pour  $u \in \{a', a''\}$  sinon  $(u; \theta, d, c, f)$  est une chaise dans  $G$ . Similairement nous ne pouvons pas avoir  $[v, c]$  et  $[v, e]$  pour  $v \in \{b', b''\}$  sinon  $(v; \theta, e, c, f)$  est une chaise dans  $G$ . Puisque  $[a, c]$  et  $[a, d]$ ,  $[b, c]$  et  $[b, e]$  dans  $G'$ , nous supposons sans perte de généralité  $[a', c]$ ,  $[a'', d]$ ,  $[\overline{a', d}]$ ,  $[\overline{a'', c}]$ ,  $[b', e]$ ,  $[b'', c]$ ,  $[\overline{b', c}]$ ,  $[\overline{b'', e}]$ .

Supposons maintenant que  $[\overline{a'', b'}]$ . Alors  $[a', b']$ ,  $[a'', b'']$  puisque  $\theta$  ne centre pas une étoile. Notons que  $[\overline{a'', b'}]$  sinon  $(b'; e, a'', a', c)$  est une chaise. Par le lemme 2, appliqué au sous graphe induit par  $\{d, a''; \theta, a', c, b'\}$  nous avons  $a' \leq b'$ . Donc  $a' \prec b' \prec b''$  et par conséquent  $b''$  est un suivant de  $a'$ . Du fait que  $[\overline{a', d}]$  dans  $G$ , alors  $[a'', d]$  pour tout suivant  $a''$  de  $a'$ , donc  $[b'', d]$  ce qui est absurde. Pour des raisons symétriques, nous avons  $[a'', b']$ . A présent  $[\overline{a', b'}]$  sinon  $(b'; e, a'', a', c)$  est une chaise. Mais maintenant

## Chapitre 4

### Nombre de stabilité dans la classe de graphes $\Gamma'$

---

$(0, b', a''; a', e, d)$  est un net dans  $G$ , ce qui est absurde.

**(3.2)  $a'' = b''$**

Comme 0 ne peut centrer une étoile, nous avons  $[a', b']$  avec  $a' \neq b'$ . Puisque  $b'' = a''$  et  $[\overline{a''}, e]$  nous devons avoir  $[b', e]$  car  $[b, e]$  dans  $G'$ . Similairement  $[a', d]$  car  $[\overline{a''}, d] = [\overline{b''}, d]$ . Mais a présent  $(0, a', b'; a'', d, e)$  est un net.

**(3.3)  $a' = b''$  (ou bien  $a'' = b'$ )**

Comme 0 ne centre pas une étoile, nous avons  $[a'', b']$ . Comme  $[b, e]$  dans  $G'$  et  $b'' = a'$ , nous avons  $[b', e]$ . Similairement  $[a'', d]$  puisque  $a' = b''$  et  $[\overline{b''}, d]$ . Mais alors  $(0, a'', b'; a', d, e)$  est un net.

**(4)  $N \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$**

Soit  $a', b', c'$  les correspondants de  $a, b$  et  $c$ . Alors  $[\overline{a'}, u]$  pour  $u = e, f$ ,  $[\overline{b'}, v]$  pour  $v = d, f$   $[\overline{c'}, w]$  pour  $w = e, d$ . Par le lemme 1(iii), ils existent  $a'', b''$  et  $c''$  tel que  $[\overline{a''}, u]$ ,  $[\overline{b''}, v]$  et  $[\overline{c''}, w]$ . Soit  $\alpha \in \{a', a''\}$ ,  $\beta \in \{b', b''\}$  et  $\gamma \in \{c', c''\}$ . Par supposition et de la définition de  $G'$ , nous pouvons choisir  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tel que  $N(\alpha) \cap \{d, e, f\} = \{d\}$ ,  $N(\beta) \cap \{d, e, f\} = \{e\}$  et  $N(\gamma) \cap \{d, e, f\} = \{f\}$ . Nous rappelons que  $[0, \alpha]$ ,  $[0, \beta]$  et  $[0, \gamma]$ .

**(4.1)  $\alpha, \beta, \gamma$  sont tous distincts.**

Si  $[\alpha, \beta]$ ,  $[\beta, \gamma]$  et  $[\gamma, \alpha]$  alors  $(\alpha, \beta, \gamma; d, e, f)$  est un net. Si  $[\alpha, \beta]$ ,  $[\beta, \gamma]$  et  $[\overline{\gamma}, \alpha]$  alors  $(\beta; \gamma, e, \alpha, d)$  est une chaise. Si  $[\alpha, \beta]$ ,  $[\overline{\beta}, \gamma]$  et  $[\overline{\gamma}, \alpha]$  alors  $(0, \alpha, \beta; \gamma, d, e)$  est un net. Si  $[\overline{\alpha}, \beta]$ ,  $[\overline{\beta}, \gamma]$  et  $[\overline{\gamma}, \alpha]$  alors  $(0; \alpha, \beta, \gamma)$  est une étoile.

**(4.2)  $\alpha = \beta \neq \gamma$**

Si  $[\overline{\gamma}, \alpha]$  alors  $(\alpha; d, e, 0, \gamma)$  est une chaise. Si  $[\gamma, \alpha]$  alors  $(\alpha; d, e, \gamma, f)$  est une chaise.

**(4.3)  $\alpha = \beta = \gamma$**

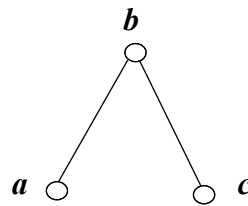
Supposons, sans perte de généralité, que  $\alpha = a'$ . À présent considérons  $a''$ . Nous savons que  $[\overline{a'}, a'']$ ,  $[a'', e]$ ,  $[a'', f]$ . Une contradiction surgit puisque  $(\alpha; e, f, 0, a'')$  est une chaise.

La preuve de la proposition 4 est achevée. □

**Proposition 5** Soit  $G$  un graphe de  $\Gamma'$ ,  $G'$  le graphe obtenu par la struction centrée en un sommet spécial  $0$ ; alors l'ensemble des centres d'étoiles de  $G'$  est réunion de graphes complets.

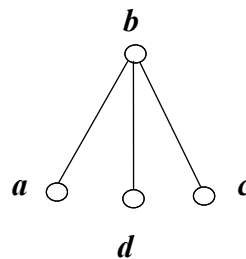
**Preuve.**

Par l'absurde supposons que l'ensemble des centres d'étoile n'est pas réunion de graphes complets. Donc il existe au moins trois sommets du graphe qui sont des centres d'étoiles  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tel que  $ab \in E$ ,  $bc \in E$  et  $ac \notin E$  ( figure 4.3).



**Figure 4.3**

Comme  $b$  est un centre d'étoile alors il existe un sommet  $d$  (qui n'est pas forcément centre d'étoile) tel que  $(b; d, a, c)$  est une étoile centrée en  $b$  dans  $G'$ .



**Figure 4.4**

L'ensemble des nouveaux sommets  $N$  étant par construction une clique alors trois cas se présentent.

**Cas 1.**  $N \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$  (ou bien  $\{b, c\}$ )

$a$  et  $b$  deux nouveaux sommets.

Soient  $a', b'$  les correspondants de  $a$  et  $b$  dans  $G$  et  $a'', b''$  leurs suivants, d'après le lemme 3 (iv)  $a', b'$  et leurs suivants centrent des étoiles dans  $G$ . Comme  $[\overline{a, c}]$  dans  $G'$  alors  $[\overline{a', c}]$  et  $a''$  un suivant de  $a'$  choisi tel que  $[\overline{a'', c}]$  dans  $G$ .

les sommets  $a', b', a'', b''$  ne sont pas forcément distincts, trois sous cas se présentent:

**Sous cas 1:**  $a'' = b''$

$[b, c]$  dans  $G'$  alors  $[b', c]$  ou  $[b'', c]$  pour tout suivant  $b''$  de  $b'$ , mais comme  $a'' = b''$  dans  $G$  alors  $[\overline{b''}, c]$  pour tout suivant  $b''$  de  $b'$ , et donc  $[b', c]$ .

0 est un sommet spécial alors  $[a', b']$  dans  $G$ ; mais ainsi  $b'$  est un centre d'étoile relié à deux centres d'étoiles non adjacents  $a''$  et  $c$  dans  $G$  ce qui est absurde.

**Sous cas 2:**  $a' = b''$  (ou bien  $a'' = b'$ )

$[b, c]$  dans  $G'$  alors  $[b', c]$  ou  $[b'', c]$  pour tout suivant  $b''$  de  $b'$ , mais comme  $a' = b''$  dans  $G$  alors  $[b', c]$  dans  $G$ .

0 est un sommet spécial alors  $[a'', b']$  dans  $G$ ; mais ainsi  $b'$  est un centre d'étoile relié à deux centres d'étoiles non adjacents  $a'$  et  $c$  ce qui est absurde.

**Sous cas 3:** les sommets  $a', b', a'', b''$  sont tous distincts.

0 est un sommet spécial alors parmi chaque trois sommets de l'ensemble  $\{a', a'', b', b''\}$  deux d'entre eux seront adjacents; mais ainsi  $b'$  (respectivement  $b''$ ) centre une étoile  $(b'; 0, u, c)$  (respectivement une étoile  $(b''; 0, u, c)$ ) où  $u = a', a''$  et il est relié à deux centres d'étoiles non adjacents  $a', c$  (ou bien  $a'', c$ ) ce qui est une contradiction. Donc le cas 2 est impossible.

**Cas 2.**  $N \cap \{a, b, c, d\} = \{b, d\}$

Soit  $d'$  le correspondant de  $d$  dans  $G$ . Comme  $[\overline{a}, t]$ ,  $[\overline{t}, c]$  et  $[\overline{a}, c]$  dans  $G'$  alors d'après le lemme 1(iii),  $[\overline{a}, d'']$  et  $[\overline{c}, d'']$  pour un suivant  $d''$  de  $d'$  dans  $G$ .

Soit  $b'$  le correspondant de  $b$  dans  $G$  et  $b''$  le suivant de  $b'$ . D'après le lemme 3(ii),  $b', b'', d'$  et  $d''$  sont tous distincts. Aussi du lemme 3(iii),  $[b', u]$  et  $[b'', u]$  pour  $u = d', d''$ .

Si  $[a, b']$  et  $[b', c]$  (respectivement  $[a, b'']$  et  $[b'', c]$ ), alors  $b'$  (respectivement  $b''$ ) est un centre d'étoile relié deux centres d'étoiles non adjacents  $a$  et  $c$  dans  $G$ , ce qui est absurde.

Supposons  $[\overline{a}, b'']$  et  $[\overline{b'}, c]$ .

Soit  $(a; x, y, z)$  l'étoile centrée en  $a$ . D'après le lemme 3, aucun des sommets  $x, y$  et  $z$  n'est un nouveau sommet. A présent deux sommets au moins parmi  $\{x, y, z\}$  est adjacent à  $b$ , sinon  $(a; x, y, b', 0)$  ou  $(a; x, z, b', 0)$  ou  $(a; y, z, b', 0)$  est une chaise dans  $G$ . Supposons

## Chapitre 4

### Nombre de stabilité dans la classe de graphes $\Gamma'$

---

$[b', y]$  et  $[b', z]$ , alors  $[b'', y]$  ou  $[b'', z]$  sinon  $(b', y, z, 0, b'')$  est une chaise dans  $G$ .

Supposons  $[b'', z]$ , alors  $[b'', y]$  ou  $[b'', x]$  sinon  $(a; x, y, z, b'')$  est une chaise dans  $G$ .

Supposons sans perte de généralité que  $[b'', y]$ , trois sous cas se présentent.

**Sous cas 1:**  $[\overline{c, y}]$  et  $[\overline{c, z}]$

Dans ce cas  $[d', y]$  et  $[d', z]$  (respectivement  $[d'', y]$  et  $[d'', z]$ ), sinon  $(b'', d', c, y, a)$  et  $(b'', d', c, z, a)$  sont des chaises dans  $G$ . Ainsi  $(d'; y, z, 0)$  (respectivement  $(d''; y, z, 0)$ ) est une étoile centrée en  $d'$  (respectivement en  $d''$ ). Mais dans ce cas  $b'$  (respectivement  $b''$ ) est un centre d'étoile relié à trois centres d'étoiles non adjacents  $d', d''$  et  $a$  (respectivement  $d', d''$  et  $c$ ) dans  $G$ , ce qui est absurde.

**Sous cas 2:**  $[\overline{c, y}]$  et  $[\overline{d', z}]$

Alors  $[d', y]$  et  $[c, z]$ , ainsi  $[d', x]$  sinon  $(a; x, z, y, d')$  est une chaise dans  $G$ . Par conséquent  $(d'; x, y, 0)$  est une étoile centrée en  $d'$ , ainsi  $b'$  (respectivement  $b''$ ) est un centre d'étoile relié à deux centres d'étoiles non adjacents  $a$  et  $d'$  (respectivement  $c$  et  $d'$ ) dans  $G$ , ce qui est absurde.

**Sous cas 3:**  $[\overline{d', y}]$  et  $[\overline{d', z}]$  (ou bien  $[\overline{d'', z}]$  et  $[\overline{d'', z}]$ )

Donc  $[c, y]$  et  $[c, z]$ , et  $[d'', y]$  et  $[d'', z]$ , sinon  $(b'; d', d'', y, c)$  et  $(b'; d', d'', z, c)$  sont des chaises dans  $G$ . Par conséquent  $(d''; y, z, 0)$  est une étoile centrée en  $d''$ , ainsi  $b'$  (respectivement  $b''$ ) est un centre d'étoile relié à deux centres d'étoiles non adjacents  $d''$  et  $a$  (respectivement  $c$  et  $d''$ ) dans  $G$ , ce qui est absurde.

**Cas 3.**  $N \cap \{a, b, c, d\} = \{b\}$

Soit  $b'$  le correspondant de  $b$  dans  $G$  et  $b''$  le suivant de  $b'$ .

$a$  centre une étoile  $(a, x, y, z)$  dans  $G'$ . Le cas où l'un des sommets  $x, y, z$  est un nouveau sommet ne peut avoir lieu d'après le lemme 3(i).  $[a, b]$  dans  $G'$  alors d'après le lemme 1(i)  $[a, b']$  ou  $[a, b'']$  dans  $G$  pour tout suivant  $b''$  de  $b'$ .  $[b, c]$  dans  $G'$  alors d'après le lemme 1(i)  $[b', c]$  ou  $[b'', c]$  dans  $G$  pour tout suivant  $b''$  de  $b'$ .  $[b, d]$  dans  $G'$  alors d'après le lemme 1(i)  $[b', d]$  ou  $[b'', d]$  dans  $G$  pour tout suivant  $b''$  de  $b'$ .



## Chapitre 4

### Nombre de stabilité dans la classe de graphes $\Gamma'$

---

Nous ne pouvons pas avoir  $[a, b']$  et  $[b', c]$  (respectivement  $[a, b'']$  et  $[b'', c]$ ) car sinon  $b'$  (respectivement  $b''$ ) serait un centre d'étoile reliant deux centres d'étoiles non adjacents  $a$  et  $c$ .

Supposons  $[\overline{a, b''}]$  et  $[\overline{b', c}]$ , deux sommets au moins parmi  $\{x, y, z\}$  doivent être adjacents à  $b'$  car sinon  $(a; x, z, b', 0)$  ou  $(a; x, y, b', 0)$  ou  $(a; y, z, b', 0)$  est une chaise dans  $G$ .

Supposons que  $[b', y]$  et  $[b', z]$ . Alors dans ce cas  $[y, b'']$  ou bien  $[z, b'']$  sinon  $(b'; y, z, b'', 0)$  est une chaise dans  $G$ . Supposons alors  $[z, b'']$ . Mais ainsi  $[z, c]$  sinon  $(b''; 0, c, z, a)$  est une chaise dans  $G$ , par suite  $[y, c]$ , sinon  $(b'; 0, y, z, c)$  est une chaise dans  $G$ . Donc,  $[x, b'']$  ou  $[y, b'']$  sinon  $(a; y, x, z, b'')$  est une chaise dans  $G$ .

Supposons que  $[y, b'']$ .

$[b, d]$  dans  $G'$  alors  $[b', d]$  ou  $[b'', d]$  dans  $G$ . Si  $[b', d]$  alors  $[b'', d]$  sinon  $(b'; a, d, 0, b'')$  est une chaise dans  $G$ , de plus  $[d, y]$  et  $[d, z]$  sinon  $(b'; d, 0, y, c)$  et  $(b'; d, 0, z, c)$  sont des chaises dans  $G$ .

D'autre part dans le cas où  $[\overline{b', x}]$  alors  $[d, x]$ , sinon  $(b'; d, 0, a, x)$  est une chaise dans  $G$ . Par conséquent  $(d; x, y, z)$  est une étoile centrée par  $d$ , ainsi  $b'$  (respectivement  $b''$ ) est un centre d'étoile relié à deux centres d'étoiles non adjacents  $d$  et  $a$  (respectivement  $c$  et  $d$ ) dans  $G$ , ce qui est absurde.

Dans le cas où  $[b', x]$ , nous avons les deux sous cas suivants:

**Sous cas 1:**  $[c, x]$ , alors  $[d, x]$ , sinon  $(b'; d, 0, x, c)$  est une chaise dans  $G$ . Par conséquent  $(d; x, y, z)$  est une étoile centrée en  $d$ , ainsi  $b'$  (respectivement  $b''$ ) est un centre d'étoile relié à deux centres d'étoiles non adjacents  $d$  et  $a$  (respectivement  $c$  et  $d$ ) dans  $G$ , ce qui est absurde.

**Sous cas 2:**  $[\overline{c, x}]$ , alors  $[d, x]$  sinon  $(z; d, c, a, x)$  et  $(y; d, c, a, x)$  sont des chaises dans  $G$ . Par conséquent  $(d; x, y, z)$  est une étoile centrée en  $d$ , ainsi  $b'$  (respectivement  $b''$ ) est un centre d'étoile relié à deux centres d'étoiles non adjacents  $d$  et  $a$  (respectivement  $c$  et  $d$ ) dans  $G$ , ce qui est absurde.

Ainsi la démonstration de la proposition 5 est achevée. □

**4. Nombre de stabilité de la classe  $\Gamma'$** 

**Théorème 1** *Le nombre de stabilité d'un graphe  $G$  dans la classe  $\Gamma'$  peut être obtenu en temps polynomial.*

**Preuve.**

D'après les propositions 1 et 2, à chaque étape de la struction l'ordre du graphe et le nombre de stabilité diminuent. En répétant l'application de la struction, nous obtenons une séquence de graphes  $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots$ . Nous nous arrêtons lorsque nous obtenons un graphe  $G^{(k)}$  ( $1 \leq k \leq n-2$ ) pour lequel le nombre de stabilité peut être calculé facilement. Alors  $\alpha(G) = k + p, (p \geq 1)$  si  $\alpha(G^{(k)}) = p$ .

D'après (iii) un sommet spécial existe à chaque étape de la struction, par conséquent l'existence d'un algorithme polynomial qui donne le nombre de stabilité pour tout graphe  $G$  de  $\Gamma'$ .

Comme la transformation de  $G$  en  $G'$  s'applique au plus  $O(n)$  fois et que la construction de  $G'$  se fait en  $O(n^2)$ , alors la complexité de l'algorithme est  $O(n^3)$ . □

## **5. Quelques domaines d'applications du stable maximum**

La notion du stable maximum, joue un rôle important dans la résolution de plusieurs problèmes de différents domaines.

Les applications du stable maximum sont diverses, nous citons comme exemples:

- Le domaine de la chimie
- Le domaine de l'informatique
- Le domaine des télécommunications

Notons, qu'une copie de ce travail en anglais figure dans l'annexe.

## Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de deux approches pour la résolution du problème du stable maximum : La struction et la technique des graphes augmentants. Nous avons vu que l'application de ces deux approches à quelques classes de graphes permet de trouver des algorithmes polynomiaux pour la résolution du problème du stable maximum.

Nous avons défini une nouvelle classe de graphes  $\Gamma'$  qui généralise la classe définie dans [1]. Nous avons décrit un algorithme pour calculer le nombre de stabilité dans la classe  $\Gamma'$ , en s'inspirant de l'algorithme de [1], puis nous avons prouvé que cet algorithme est fermé pour cette classe de graphes et enfin nous avons montré que le calcul du nombre de stabilité se fait en temps polynomial dans cette classe de graphes.

Ce travail peut être étendu à l'étude des problèmes suivants :

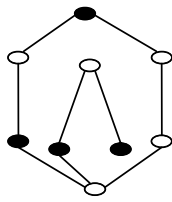
- Étudier le problème du stable maximum dans la classe de graphes sans chaise et dont l'ensemble des centres d'étoiles est réunion de graphes complets, qui représente une généralisation de la classe  $\Gamma'$ .
- En général, le nombre de sommets augmente exponentiellement pendant l'application de la struction ce qui fait que le calcul du nombre de stabilité se fait en temps non polynomial. Récemment un algorithme généralisant la struction appelé *la struction totale* a été établi [2]. L'avantage de cet algorithme est que le nombre de stabilité diminue à chaque étape de son application d'une constante entière positive  $p \geq 1$ , ce qui le rend plus fort que la struction, il est alors intéressant d'essayer de voir comment l'appliquer dans les classes de graphes, même pour celles dont un algorithme polynomial de résolution du nombre de stabilité existe, pour obtenir des algorithmes plus efficaces.
- L'approche des graphes augmentants semble très prometteuse, et dans ce domaine nous pouvons nous intéresser à résoudre le problème dans des sous classes des graphes sans bannière tels que les graphes sans (bannière,  $S_{l, 3, i}$ ) pour  $i \geq 3$ , qui généralise les des graphes sans (bannière,  $S_{l, 2, i}$ ) pour  $i \geq 3$  pour laquelle le problème du stable maximum a été résolu et les graphes sans (bannière,  $S_{2, 2, 3}$ ), en caractérisant les graphes augmentants minimaux dans ces classes de graphes.

## *Références bibliographiques*

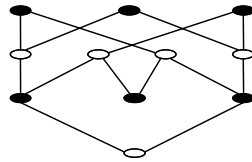
- [1] A.Ainouche and Z.Benmeziane, Stability Number of a Subclass of Chair- Free, Net- Free Graphs, *J. Combin Math and Combin Computing*, 25.(1997) 79-90. 05c75.
- [2] G.Alexe, P.L.Hammer, V.V.Loizin and D.de Werra, Struction Revisited, *Discrete Appl Math* 132 (2004)27-46.
- [3] V.E.Alekseev, On the Local Restrictions Effect on The Complexity of Finding the Graph Independence Number, *Combinatorial-Algebraic Method In Applied Mathematics*, Gorkiy University (1983) 3-13 (In Russian).
- [4] V.E.Alekseev, A Polynomial Algorithm for Finding Maximum Independent Set in Fork-Free Graphs, *Discrete Analysis and Operations Research, Ser. 1, Vol. 6, No.4* (1999) 3-19.
- [5] V.E.Alekseev and V.V.Loizin, Augmenting Graphs for Independent Sets, *Discrete Appl Math*, To Appear.
- [6] C.Berge, Two Theorems in Graph Theory, *Proc. Nat. Acad. Sci.USA* 43 (1957) 842-844.
- [7] C.Berge, *Graphs and hypergraphs*, Dunod, Paris 1983.
- [8] R.Boliac and V.V.Loizin, An Augmenting Graph Approach to the Stable Set Problem in  $P_5$ -Free Graphs, *Discrete Appl Math* 131 (2003) 567-575.
- [9] D.G.Corneil, Y.Pearl and L.K.Stewart, A Linear Recognition Algorithm for Cographs, *SIAM J. Comput* 14 (1985) 926-934.
- [10] Ch.Ebeneger, P.L.Hammer and D.de Werra, Pseudo Boolean Functions and Stability of Graphs, *Ann. Discrete Math* 19 (1984) 83-98.
- [11] J.Edmonds, Maximum Matching and a Polyhedron with (0, 1) Vertices, *J. Res. Bureau Stand* 65 B (1, 2) (1965) 125-130.

- [12] M.U.Gerber and V.V.Loizin, Robust Algorithms for the Stable Set Problem, *Graphs and Combinatorics*, 19 (2003) 347-356.
- [13] M.U.Gerber and V.V.Loizin, On the Stable Set Problem in Special Classes of  $P_5$  -Free Graphs, *Discrete Appl Math* 125 (2003) 215-224.
- [14] M.U.Gerber, A.Hertz and V.V.Loizin, Stable Sets in Two Subclasses of Banner-Free Graphs, *Discrete Appl Math* 132 (2004) 121-136.
- [15] P.L.Hammer, N.V.R.Mahadev and D.de Werra, Stability in CAN-Free Graphs, *J. Combin Theory. B* 38 (1985) 23-30.
- [16] P.L.Hammer, N.V.R.Mahadev and D.de Werra, the Struction of a Graph: Application to CN-Free Graphs, *Combinatorica* 5 (1985) 141-147.
- [17] P.Hall, On Representatives of Subsets, *J. London Math. Sco* 10 (1935) 233-239.
- [18] A.Hertz,V.Loizin and D.Schindle, On Finding Augmenting Chains in Extensions of Claw- Free Graphs , *Information Processing Letters* 86 (2003) 311-316.
- [19] V.V.Loizin, Stability in  $P_5$  and Banner-Free Graphs, *European J. Oper. Research* 125 (2) (2000) 292-297.
- [20]V.V.Loizin and A.Hertz, The Maximum Independent Set Problem And Augmenting Graphs, Prepublication.
- [21] G.J.Minty, On Maximal Independent Set of Vertices in Claw Free Graphs, *J.Combin Theory Ser. B* 28 (1980) 284-304.
- [22] R.Mosca, Polynomial Algorithms for the Maximum Stable Set Problem on Particular Classes of  $P_5$  -Free Graphs, *Processing Letters* 61 (1997) 137-143.
- [23] R.Mosca, Stable Sets in Certain  $P_6$  - Free Graphs, *Discrete Appl. Math.* 92 (1999) 177-191.
- [24] N.Sbihi, Algorithme de Recherche d'un Stable de Cardinalité Maximum Dans un Graphe Sans Etoile, *Discrete Math* 29 (1980) 53-76.
- [25] C. De Simone, A.Sassano, Stability Number Of Bull And Chair Free Graphs, *Discrete Applied Math.* 41 (1993), 121-129.
- [26] C.Shannon, The Zero Error Capacity of a Noisy Channel, *IRE Trans. Inform Theory.* IT 25 (1979) 1-7.

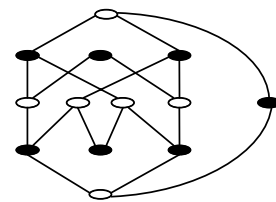
# **ANNEXE**



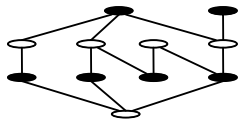
$F_1$



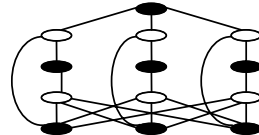
$F_2$



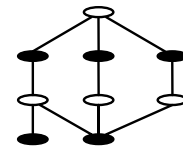
$F_3$



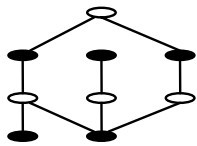
$F_4$



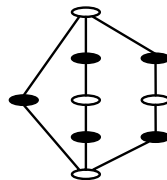
$F_5$



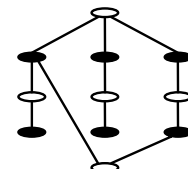
$F_6$



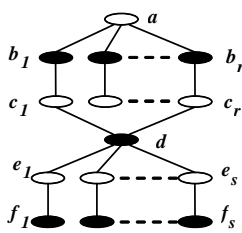
$F_7$



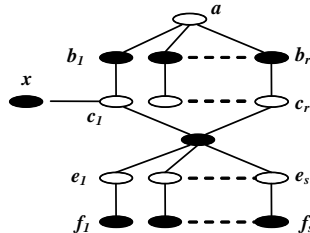
$F_8$



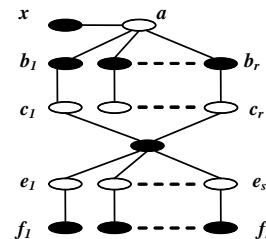
$F_9$



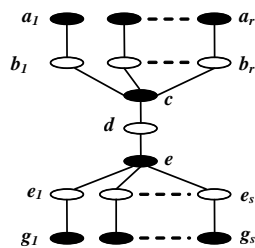
$L_{r,s}$



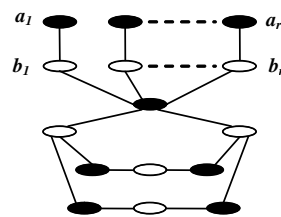
$L^1_{r,s}$



$L^2_{r,s}$



$M_{r,s}$



$N_s$

**Graphes augmentants minimaux dans les graphes sans (bannière,  $S_{1,2,4}$ ) et les graphes sans (bannière,  $P_8$ )**



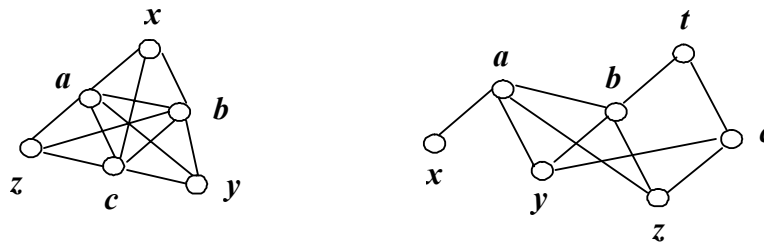
## 1. Introduction

We show in this part, that the application of the struction algorithm with some modifications makes it possible to compute the stability number in polynomial time, in the subclass  $\Gamma'$  of the chair free, net free graphs, which is defined as follows:

**Definition 1** *A graph  $G$  belongs to the class  $\Gamma'$  if*

- (i)  *$G$  is chair free*
- (ii)  *$G$  is net free*
- (iii) *The set of claw centers is union of complete graphs.*

### Exemple1



**Figure 4.1 : Two graphs of the class  $\Gamma'$**

This class of graphs generalizes the class  $\Gamma$  [1], it contains the CAN free graphs [15], and the CN free graphs [16].

In the next section, we describe the struction algorithm for the graphs of the class  $\Gamma'$ , inspired from the particular struction of the graphs of the class  $\Gamma$ , this struction is centered at a vertex  $\theta$  which is not a claw center called *special vertex*, the graph obtained by this algorithm realize  $\alpha(G) = \alpha(G') + 1$ .

In section 3, we show that the class  $\Gamma'$  of graphs is closed for the struction.

In section 4, we show that since the special vertex exists at each stage of the transformation and like  $|V(G')| \leq |V(G)| - 2$ , the stability number in the class  $\Gamma'$  can be computed in polynomial time.

## **2. Struction of the graphs of the class $\Gamma'$**

Following [1], we shall use the following notations:

$[a, b]$  means that vertices  $a$  and  $b$  are joined by an edge while  $[\overline{a, b}]$  indicates the absence of an edge between  $a$  and  $b$  (or the presence of a *non-edge*).

The *open neighborhood* and the *closed neighborhood* of a vertex  $u$  are denoted respectively  $N(u) = \{x \in V / xu \in E\}$  and  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ . Given a special vertex  $\theta$ , we define  $N_0[a] = N[a] \cap N(\theta)$  for all  $a \in V - \{\theta\}$ .

Along this article, we consider the struction centered at a special vertex  $\theta$ .

Let  $\leq$  be a relation of partial preorder defined on  $N(\theta)$  as follows:

$a \leq b$  if  $N_0(a) \subseteq N_0(b)$ ,  $a \equiv b$  if  $a \leq b$  and  $b \leq a$ .

The vertices of  $N(\theta)$  are numbered from 1 to  $|N(\theta)|$  and it will be convenient to refer to these vertices with their associated numbers, then a total order  $<$  is created on the vertices of  $N(\theta)$ .

Inspired from the algorithm given in [1], we describe an algorithm to the graphs of the class  $\Gamma'$  as follows:

**Construction Algorithm of  $G'$**

**In put:** A graph  $G \in \Gamma'$  of stability number  $\alpha(G)$

**Out put:** A graph  $G' \in \Gamma'$  of stability number  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$

- (1) **Choose a special vertex  $\theta$ ;**
- (2) **Number the vertices of  $N(\theta)$  from 1 to  $|N(\theta)|$  so that**
  - (i) **if  $a \leq b$  and  $a \not\leq b$  then  $a < b$**
  - (ii) **if  $a \equiv b, a \not\leq x, x \leq b$  and  $a < b$  then  $x < a$  or  $x > b$**
- (3) **Let  $J = \{i \in N(\theta) / \exists j \in N(\theta), j > i \text{ and } [\overline{i, j}]\}$ ;**
- (4) **For each vertex  $i \in J$ , introduce a new vertex  $i^*$ ;**
- (5) **Remove the vertices of  $N[\theta]$  and set  $R = V(G) - N[\theta]$**
- (6) **Let  $N$  be the set of the new vertices;**  
**Link every pair of new vertices of  $N$ ;**
- (7) **Link a vertex  $r$  in  $R$  to a vertex  $i^*$  if in  $G$  we have  $[i, r]$  or  $[j, r]$  for any  $j > i$  so that  $[\overline{i, j}]$ .**

A vertex  $b$  is a *follower* of another vertex  $a$  if  $[\overline{a, b}]$ ,  $a, b \in N(\theta)$  and  $b > a$ .

Throughout followings, we suppose that:

- (1)  $G$  is a chair free, net free graph, containing a special vertex  $\theta$ .
- (2)  $G'$  is the graph obtained by the struction centered at a special vertex  $\theta$ .
- (3) If  $a, b, c, \dots$ , are new vertices, then  $a', b', c', \dots$  are the vertices corresponding to  $a, b, c, \dots$ , in  $G$  and  $a'', b'', c'', \dots$  are the followers of  $a', b', c', \dots$ .

Now we state some results, which are consequences of the application of the above struction algorithm.

**Proposition 1** *Let  $G$  be a graph of  $\Gamma'$  with  $\alpha(G) > 1$ ;  $G'$  the graph obtained by the struction centered at a special vertex  $\theta$ , then  $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$*

**Proof.**

a) First we show that if  $S \neq \emptyset$  is a stable set in  $G$ , there is a stable set  $S'$  in  $G'$  so that  $|S'| = |S| - 1$ . Since  $\theta$  is special, then  $|S \cap N(\theta)| \leq 2$ .

**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

If  $S \cap N(0) = \emptyset$ , take  $S' = S - \{x\}$ , where  $x$  is any vertex in  $S \cap R$ .

If  $S \cap N(0) = \{i\}$ , take  $S' = S - \{i\}$

If  $S \cap N(0) = \{i, j\}$ , then assume  $0 < i < j$ ,  $[\overline{i, j}]$ , and take  $S' = (S - \{i, j\}) \cup \{i^*\}$  where  $i^*$  is the new vertex corresponding to  $i$  in  $G$ . Let us show that  $S'$  is a stable set of  $G'$ . Suppose by contradiction that  $S'$  is not a stable set of  $G'$ , so  $[i^*, r]$  for some vertex  $r$  of  $S \cap R$ . Since  $[\overline{i, r}]$  in  $G$  then  $[j, r]$  for every follower of  $i$ , in particular  $j$ . This is a contradiction since  $[\overline{i, r}], [\overline{j, r}]$  in  $G$ . Thus (a) holds and  $\alpha(G') \geq \alpha(G) - 1$ .

b) Next we prove that for any stable set  $S'$  of  $G'$ , there is a stable set  $S$  in  $G$  so that  $|S| = |S'| + 1$ .

Since  $N$  is clique then  $|S' \cap N| \leq 1$ . If  $S' \cap N = \emptyset$  then  $S' \subseteq R$ , take  $S = S' \cup \{0\}$ .

If  $S' \cap N = \{a\}$ , take  $S = (S' - \{a\}) \cup \{a', a''\}$ . Let  $a'$  corresponds to  $a$  in  $G$ , we prove that there exists a follower  $a''$  of  $a'$  so that  $S = (S' - \{a\}) \cup \{a', a''\}$  is a stable set in  $G$ . By construction  $a', a''$  are nonadjacent.

Note that  $[\overline{a', r}]$  in  $G$  for any  $r$  of  $S' - \{a\}$ , otherwise  $[a, r]$  in  $G'$ . Thus  $N(a') \cap (S' - \{a\}) = \emptyset$ .

If  $N(a'') \cap (S' - \{a\}) = \emptyset$  for some  $a''$ , then  $S = (S' - \{a\}) \cup \{a', a''\}$  is the required stable set in  $G$ . If there exist  $r, s \in (S' - \{a\}) \cup \{a', a''\}$  then  $(a''; r, s, 0, a')$  is a chair. Another contradiction is easily obtained if two followers  $a'', a'''$  of  $a'$  exist, since  $(0; a'', a', a''')$  is not a claw then  $[a'', a''']$ , but now  $(0, a'', a'''; a', r, s)$  is a net (when we suppose  $[a'', r]$  and  $[a''', s]$ ). So it remains to consider the case where  $a'$  has only one follower  $a''$ . On the one hand  $a''$  must be adjacent to only one vertex  $r$  of  $R$  and on the other hand if  $[a'', r]$  in  $G$  then  $[a, r]$  in  $G'$  since  $a''$  is the unique follower of  $a'$ . This last contradiction proves b), hence  $\alpha(G) \leq \alpha(G') + 1$ .

Combining a) and b) we obtain  $\alpha(G) = \alpha(G') - 1$ . □

**Proposition 2** *Let  $G$  be a graph of  $\Gamma'$  containing a special vertex  $0$ , and  $G'$  the graph obtained by the struction centered at  $0$ , then  $|V(G')| \leq |V(G)| - 2$ .*

Proposition 2, arises from the fact that vertex  $0$  will be removed and no new vertex  $|N(0)|^*$  in  $G'$  corresponds to the last vertex  $|N(0)|$  in  $G'$ .

The following lemmas, will be useful to prove the propositions that will follow.

**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

**Lemma 1** Let  $G$  be a chair free, net free graph,  $G'$  the graph obtained by the struction centered at a special vertex  $0$ , assume that  $a \in N$  and  $a'$  corresponds to  $a$  in  $G$ . Then

- (i)  $[a, x]$  in  $G'$  then  $[a', x]$  or  $[a'', x]$  for very follower  $a''$  of  $a'$ .
- (ii)  $[\overline{a}, x]$  in  $G'$  then  $[\overline{a'}, x]$  and  $[\overline{a''}, x]$ , for some follower  $a''$  of  $a'$ .
- (iii)  $[\overline{a}, x]$ ,  $[\overline{x}, y]$  and  $[\overline{y}, a]$  in  $G'$  then  $[\overline{a'}, u]$  and  $[\overline{a''}, u]$  for  $u = x, y$  and for some follower  $a''$  of  $a'$  in  $G$ .

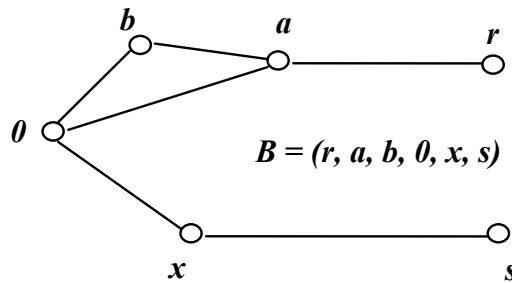
**Proof.** (i) and (ii) are consequences of the definition of the struction.

(iii) By definition of the struction,  $[\overline{a'}, x]$ ,  $[\overline{a'}, y]$ ,  $[\overline{a''}, x]$  for some follower  $a''$  of  $a'$  and  $[\overline{a'''}, y]$  for some follower  $a'''$  of  $a'$ .

If  $a'' = a'''$  then (iii) holds.

Suppose that  $a'' \neq a'''$  and  $[a'', y], [a''', x]$ ,  $0$  is a special vertex then  $[a'', a''']$ , but now  $(0, a'', a'''; a', x, y)$  is a net. Hence, this case is impossible  $\square$

**Lemma 2** Let  $G$  be a chair free, net free graph, containing a special vertex  $0$ . If  $B = (r, a, b, 0, x, s)$  (figure 4.2) is an induced subgraph of  $G$ , then  $a \leq b$ .



**Figure 4.2**

**Proof.** To prove  $a \leq b$ , assume by contradiction that there is a vertex  $v \in N_0(a) - N_0(b)$  in  $G$  (recall that  $a \leq b$  if  $N_0(a) \subseteq N_0(b)$ ).

Set  $H := B + v$ . Since  $(0; x, b, v)$  is not a claw, we have  $[x, v]$ , also  $[v, r]$  otherwise  $H - \{0, S\}$  is a chair and  $[\overline{v}, s]$  otherwise  $H - \{a, x\}$  is a chair, but now  $H - \{a\}$  is an induced net in  $G$ , which is a contradiction.  $\square$

**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

**Lemma 3** *Let  $G$  be a chair free, net free graph,  $0$  a special vertex,  $G'$  the graph obtained by the struction centered at  $0$ . Assume that  $G'$  contains an induced claw  $(a;x,y,z)$  and let us suppose that  $N \cap \{a,x,y,z\} \neq \emptyset$  then:*

- (i)  $a \in N$ .
- (ii)  $a', a'', x', x''$  are all distinct if  $x \in N$ , where  $a''$  is any follower of  $a'$  and  $x''$  is a follower of  $x'$  chosen so that  $[\overline{x''}, y]$  and  $[\overline{x''}, z]$
- (iii) Under the conditions of (ii),  $[a', v]$  and  $[a'', v]$  for  $v = x', x''$ .
- (iv)  $a'$  and its followers center claws in  $G$ .

**Proof.**

(i) By contradiction, suppose without loss of generality that  $N \cap \{x, y, z\} = \{x\}$ , by the lemma 1(iii), there is a follower  $x''$  of  $x'$  in  $G$  so that  $[\overline{x''}, y]$  and  $[\overline{x''}, z]$ . Thus  $\{x'' x', y, z\}$  is a stable set in  $G$ . Since  $[a, x]$  in  $G'$ , then  $[a', x]$  or  $[a'', x]$  in  $G$ , but  $(a, y, z, u, 0)$  with  $u \in \{x', x''\}$  is a chair, which is a contradiction (note that  $[\overline{0}, y]$  and  $[\overline{0}, z]$  since  $y, z \notin N$ ). Since  $N \cap \{a, x, y, z\} \neq \emptyset$ , it follows that  $a \in N$ .

(ii) Since  $a, x \in N$  and  $N$  is by construction a clique, then  $y, z \notin N$ . By the lemma (iii), we can choose  $x''$  so that  $[\overline{x''}, u]$  for  $u=y, z$ .

Assume (ii) false, at least two vertices among  $\{a'', a', x', x''\}$  are not distinct. As  $a' \neq a''$  and  $x' \neq x''$ , we consider only the two following cases :

(1)  $a' \in \{x', x''\}$

Since  $[a, y]$  and  $[a, z]$  in  $G'$  and  $[\overline{a'}, y], [\overline{a'}, z]$  because  $a' \in \{x', x''\}$ , it follows that  $[a'', y]$  and  $[a'', z]$ . But now  $(a'; a'' y, z, 0)$  is a chair in  $G$ , which is a contradiction.

(2)  $a'' \in \{x', x''\}$

By interchanging the roles of  $a'$  and  $a''$  we obtain the case 1.

(iii) By (ii), we can choose  $a''$  so that  $a', a'', x', x''$  all distinct and  $\{x', x'', y, z\}$  is a stable set in  $G$ . Let  $F$  be the subgraph induced by  $\{0, a', a'', x', x'', y, z\}$  in  $G$ , where  $0$  is the center of the struction. First, we prove that  $[a', x']$ .

**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

Assume by contradiction that  $[\overline{a',x'}]$ , then  $[a'',x']$  and  $[a',x'']$  otherwise either  $(0; a', a'', x')$  or  $(0; a', x'', x')$  is a claw. Note that we cannot have  $[a',y]$  and  $[a',z]$  otherwise  $F - \{a'',x''\}$  is a chair. Similarly we cannot have  $[a'',y]$  and  $[a'',z]$  otherwise for either  $[a'',x'']$  and  $(a''; x', u, a', x'')$  with  $u \in \{y, z\}$  is a chair (recall that  $|N(a') \cap \{y, z\}| \leq 1$ ) or  $[\overline{a'',x''}]$  and  $(a''; y, z, 0, x'')$  is a chair. Since  $[a, y]$  and  $[a, z]$  in  $G'$ , we can suppose, without loss of generality  $[a', y]$ ,  $[\overline{a',z}]$ ,  $[a'',z]$  and  $[\overline{a'',y}]$ . By lemma 2, applied to the configuration  $(y, a', x', 0, a'', z)$ , we will have  $a'' \leq x''$  hence  $a' < a'' \leq x'$ . Thus  $[x', z]$  in  $G$ , which is a contradiction.

Since  $x'$ ,  $x''$  play symmetrical role for the above arguments, we can suppose as well  $[a', x'']$ .

To finish the proof of (iii) we need only to show  $[a'', x'']$ , since we can deduce  $[a'', x']$  by symmetry.

Suppose by contradiction  $[\overline{a'',x''}]$ . Since  $(0; a'', x'', x')$  is not a claw, we have  $[a'', x']$ . It is clear that we cannot have  $[a'', y]$  and  $[a'', z]$  otherwise  $F - \{a', x'\}$  is a chair. If  $[a'', z]$  then  $[\overline{a'',y}]$  hence  $[a', y]$ , but then  $F - \{0, z\}$  is a chair. If  $[\overline{a'',z}]$  then  $[a'', y]$  hence  $[a', z]$ . Now  $F - \{0, y\}$  is a chair in  $G$ , which is a contradiction.

(iv) By (i),  $a \in N$  and by construction,  $N$  is a clique. Then we will have to consider the two following cases:

$$(1) N \cap \{a, x, y, z\} = \{a\}$$

Let  $a'$  be the correspondent of  $a$  in  $G$  and choose any follower  $a''$  of  $a'$ . Assume by contradiction that at least one of  $a', a''$  (let us say  $a''$ ), does not center a claw. Since  $[a, u]$  for  $u = x, y, z$  in  $G$ , we have either  $[a', u]$  or  $[a'', u]$ .

By assumption  $|N(a'') \cap \{x, y, z\}| \leq 1$  otherwise  $(a''; 0, x, y)$  is a claw. Assume, without loss of generality  $[a', x]$ ,  $[a', y]$ ,  $[\overline{a'',x}]$  and  $[\overline{a'',y}]$ . But then  $(a'; x, y, 0, a'')$  is a chair.

Thus (1) is rejected.

(2)  $N \cap \{a, x, y, z\} = \{a, x\}$  Let  $x'$  be the correspondent of  $x$  in  $G$  and choose  $x''$  so that  $[\overline{x'',y}]$  and  $[\overline{x'',z}]$ . By (ii)  $a', a'', x', x''$  are all distinct. As in (1), assume that  $a''$  does

**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

not center a claw. According to (iii),  $[a'', x']$  and  $[a'', x'']$ . Thus  $[\overline{a''}, y]$  and  $[\overline{a''}, z]$ , which implies  $[a', y]$  and  $[a', z]$

since  $[a, y]$  and  $[a, z]$  in  $G'$ . But now  $(a' ; y, z, 0a'')$  is a chair in  $G$  which is absurd.

This achieves the proof of the lemma 3. □

**3. Closedness of the class  $\Gamma'$**

Let us show that if  $G$  is a graph of  $\Gamma'$ , then the graph  $G'$  obtained by the previous struction belongs to  $\Gamma'$ , so  $G'$  is chair free, net free graph and the set of claw centers of  $G'$  is union of complete graphs.

**Proposition 3** *Let  $G$  be a graph of  $\Gamma'$ ,  $G'$  the graph obtained by the struction centered at a special vertex  $0$ ; then  $G'$  is chair free.*

**Proof.** Assume that  $G'$  contains a chair  $(a; b, c, d, e)$ . At least one of the vertices  $a, b, c, d, e$  is a new vertex, otherwise this chair exists in  $G$ . By the lemma 3(i) applied to the claw  $(a; b, c, d)$ , no one of the vertices  $b, c, d$  is the only new vertex, in particular we cannot have  $d, e \in N$ . Then we have only to consider three cases.

**(1)**  $N \cap \{a, b, c, d\} = \{a\}$

Let  $a'$  correspond to  $a$  in  $G$  and choose  $a''$  so that  $[\overline{a''}, e]$ . Since  $[a, d]$  in  $G'$  then  $[a', d]$  or  $[a'', d]$  in  $G$ , suppose without loss of generality  $[a', d]$  then  $[\overline{a'}, u]$  for  $u = b, e$  otherwise  $(a' ; 0, u, d, e)$  is a chair in  $G$ . Since  $[a, u]$  in  $G'$ , we must have  $[a'', b]$  and  $[a'', c]$ . But then  $(a'' ; b, c, 0, a')$  is a chair in  $G$ . Then (1) is impossible.

**(2)**  $N \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$

Let  $a'$  correspond to  $a$  and choose  $a''$  so that  $[\overline{a''}, e]$  and let  $b'$  correspond to  $b$  and choose  $b''$  so that  $[\overline{b''}, c]$  and  $[\overline{b''}, d]$ . Note that  $[\overline{b'}, e]$ , this is possible by the lemma 1(iii). By the lemma 3(ii)  $a', a'', b', b''$  are all distinct. Assume first that  $[a', d]$ , by the lemma 3(iii) applied to the claw  $(a; b, c, d)$ , we have  $[a', u], [a'', u]$  for  $u = b', b''$ .

Observe that  $[\overline{b''}, e]$  otherwise  $(a' ; b', b'', d, e)$  is a chair, and  $[\overline{a'}, c]$  otherwise  $(b' a', c, d, e)$  is a chair in  $G$ , hence  $[a'', c]$  since  $[a, c]$  in  $G'$ . But then  $(a'' ; b', c, b'', e)$  is a chair in  $G$ . By similar arguments, a contradiction arises if  $[\overline{a'}, d]$  and consequently  $[a'', d]$ . Thus, (2) cannot occur.



**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

$$(3) N \cap \{a, b, c, d\} = \{a, d\}$$

Consider  $a'$  and  $a''$  as in (2) and let  $d'$  correspond to  $d$  and choose  $d''$  so that  $[\overline{d''}, b]$  and  $[\overline{d''}, c]$ . By the lemma 3(ii)  $a', a'', d', d''$  are all distinct. Assume first  $[a', c]$ . By the lemma 3(iii),  $[a', u], [a'', u]$  for  $u = d', d''$ . We claim that  $[\overline{a'}, b]$  otherwise  $(a'; b, c, u, e)$  is a chair in  $G$ , with  $u \in \{d', d''\}$  chosen so that  $[u, e]$  (since  $[d, e]$  in  $G'$ , we have either  $[d', e]$  or  $[d'', e]$ ). Thus  $[a'', b]$  since  $[a, b]$  in  $G'$ . But now  $(u; e, a', a'', b)$  is a chair in  $G$ . The same arguments lead to a contradiction if  $[\overline{a'}, c]$  and consequently  $[a'', c]$ . The proof of proposition 3 is now achieved.  $\square$

**Proposition 4** *Let  $G$  be a graph of  $\Gamma'$ ,  $G'$  the graph obtained by the struction centered at a special vertex  $0$ ; then  $G'$  is net free.*

**Proof.** Assume that  $(a, b, c, d, e, f)$  is an induced net in  $G'$ , at least one of its vertices is new. Four cases will be considered.

$$(1) N \cap \{a, b, c, d, e, f\} = \{d\}$$

Let  $d'$  correspond to  $d$ , then  $[\overline{d'}, u]$  for  $u = b, c, e, f$ . By the lemma 1(iii) we can choose  $d''$  so that  $[\overline{d''}, c]$  and  $[\overline{d''}, e]$ . Now  $[\overline{d''}, a]$  otherwise  $(a, b, c; d', e, f)$  is a net. Since  $[d, a]$  in  $G'$ , then  $[d'', a]$ . Observe that  $[\overline{d''}, f]$  otherwise  $(d''; a, f, 0, d')$  is a chair. But then  $(a, b, c; d'', e, f)$  is a net. Thus (1) is impossible.

$$(2) N \cap \{a, b, c\} = \{a\}$$

Let  $a'$  correspond to  $a$ , so  $[\overline{a'}, u]$  for  $u = e, f$ . By the lemma 1(iii), we can choose  $a''$  such that  $[\overline{a''}, e]$  and  $[\overline{a''}, f]$ .

Suppose without loss of generality that  $[a', c]$  then  $[a', b]$  otherwise  $(c; f, a', b, e)$  is a chair. But then  $(a', b, c; 0, e, f)$  is a net. Hence (2) is rejected.

Note that the arguments of the proof of (2) do not use the vertex  $d$ . So no further considerations are needed if  $N \cap \{a, b, c\} = \{a, d\}$ . Obviously, this case covers those where  $b$  or  $c$  is a new vertex.

**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

**(3)**  $N \cap \{a, b, c\} = \{a, b\}$

Let  $a'$ ,  $b'$  correspond to  $a$  and  $b$  then  $[\overline{a', u}]$  for  $u = e, f$  and  $[\overline{b', v}]$  for  $v = d, f$ . By the lemma 1(iii), there exists  $a''$  and  $b''$  so that  $[\overline{a'', u}]$  and  $[\overline{b'', v}]$ , we have to consider three subcases.

**(3.1)**  $a', a'', b', b''$  are all distinct

We cannot have  $[u, c]$  and  $[u, d]$  for  $u \in \{a', a''\}$  otherwise  $(u; 0, d, c, f)$  is a chair. Similarly we cannot have  $[v, c]$  and  $[v, e]$  for  $v \in \{b', b''\}$  otherwise  $(v; 0, e, c, f)$  is a chair. Since  $[a, c]$ ,  $[a, d]$ ,  $[b, c]$  and  $[b, e]$  in  $G'$ , we may assume without loss of generality that  $[\overline{a', c}]$ ,  $[\overline{a'', d}]$ ,  $[\overline{a', d}]$ ,  $[\overline{a'', c}]$ ,  $[\overline{b', e}]$ ,  $[\overline{b'', c}]$ ,  $[\overline{b', c}]$ ,  $[\overline{b'', e}]$ .

Assume now that  $[\overline{a'', b''}]$ , then  $[a', b']$ ,  $[a'', b'']$  since 0 does not center a claw.

Note that  $[\overline{a'', b'}]$  otherwise  $(b'; e, a'', a', c)$  is a chair. By lemma 2, applied to the subgraph induced by  $(d, a''; 0, a', c, b')$  we have  $a' \leq b'$  therefore  $a' \leq b' < b''$ , hence  $b''$  is a follower of  $a'$ . Since  $[a, d]$  in  $G'$  and  $[\overline{a', d}]$  in  $G$ , then we must have  $[b'', d]$ , a contradiction which implies  $[a', b'']$ . For symmetrical reasons, we have

$[a'', b']$ . Now  $[\overline{a', b'}]$  otherwise  $(b'; e, a'', a', c)$  is a chair. But now

$(0, b', a''; a', e, d)$  is a net.

**(3.2)**  $a'' = b''$

Since 0 does not center a claw, then  $[a', b']$  with  $a' \neq b'$ . Since  $b'' = a''$  and  $[\overline{a'', e}]$  then  $[b', e]$ . Similarly  $[a', d]$  since  $[\overline{a'', d}] = [\overline{b'', d}]$ . But now

$(0, a', b'; a'', d, e)$  is a net.

**(3.3)**  $a' = b''$  (or  $a'' = b'$ )

Since 0 does not center a claw, then  $[a'', b']$ . Since  $[b, e]$  in  $G'$  and  $b'' = a'$ , we have  $[b', e]$ . Similarly  $[a'', d]$  since  $a' = b''$  and  $[\overline{b'', d}]$ . But now  $(0, a'', b'; a', d, e)$  is a net.

**(4)**  $N \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

Let  $a', b', c'$  correspond to  $a, b$  and  $c$ . Then  $[\overline{a', u}]$  for  $u = e, f$ ,  $[\overline{b', v}]$  for  $v = d, f$ ,  $[\overline{c', w}]$  for  $w = e, d$ . By the lemma 1(iii), there exists  $a''$ ,  $b''$  and  $c''$  so that  $[\overline{a'', u}]$ ,  $[\overline{b'', v}]$  and  $[\overline{c'', w}]$ .

**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

Let  $\alpha \in \{a', a''\}$ ,  $\beta \in \{b', b''\}$  and  $\gamma \in \{c', c''\}$  by assumption and the definition of  $G'$ , we can choose  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  so that  $N(\alpha) \cap \{d, e, f\} = \{d\}$ , and  $N(\gamma) \cap \{d, e, f\} = \{f\}$ . We recall that  $[0, \alpha]$ ,  $[0, \beta]$  and  $[0, \gamma]$ .

**(4.1)**  $\alpha, \beta, \gamma$  are all distinct.

If  $[\alpha, \beta]$ ,  $[\beta, \gamma]$  and  $[\gamma, \alpha]$  then  $(\alpha, \beta, \gamma; d, e, f)$  is a net.

If  $[\alpha, \beta]$ ,  $[\beta, \gamma]$  and  $[\overline{\gamma, \alpha}]$  then  $(\beta; \gamma, e, \alpha, d)$  is a chair.

If  $[\alpha, \beta]$ ,  $[\overline{\beta, \gamma}]$  and  $[\overline{\gamma, \alpha}]$  then  $(0, \alpha, \beta, \gamma, d, e)$  is a net.

If  $[\overline{\alpha, \beta}]$ ,  $[\overline{\beta, \gamma}]$  and  $[\overline{\gamma, \alpha}]$  then  $(0; \alpha, \beta, \gamma)$  is a claw.

**(4.2)**  $\alpha = \beta \neq \gamma$

If  $[\overline{\gamma, \alpha}]$  then  $(\alpha; d, E, 0, \gamma)$  is a chair.

If  $[\gamma, \alpha]$  then  $(\alpha; d, e, \gamma, f)$  is a chair.

**(4.3)**  $\alpha = \beta = \gamma$

Assume without loss of generality that  $\alpha = a'$ . Now let us consider  $a''$ . We know that  $[\overline{a', a''}]$ ,  $[a'', e]$ ,  $[a'', f]$ . A contradiction arises since  $(\alpha; e, f, 0, a'')$  is a chair.

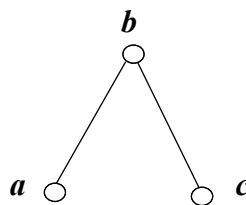
The proof of proposition 4 is now achieved. □

**Proposition 5** *Let  $G$  be a graph of  $\Gamma'$ ,  $G'$  the graph obtained by the struction centered at a special vertex  $0$ ; then the set of the claw centers of  $G'$  is union of complete graphs.*

**Proof.**

Assume by contradiction that the set of the claw centers is not union of complete graphs.

Thus there exist at least three vertices  $a, b, c$  of the graph, which are claw centers such that  $ab \in E$ ,  $bc \in E$  and  $ac \notin E$  (figure 4.3).

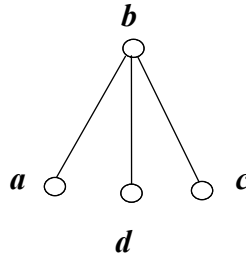


**Figure 4.3**

**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

Since  $b$  is a claw center, then there is vertex  $d$  (which is not necessarily a claw center) such that  $(b; d, a, c)$  is a claw in  $G'$  centered on  $b$ .



**Figure 4.4**

Since the set of new vertices  $N$  is by construction a clique, then three cases can arise.

**Case 1.**  $N \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$  (or  $\{b, c\}$ )

$a$  and  $b$  are two new vertices.

Let  $a', b'$  correspond to  $a$  and  $b$  in  $G$  and  $a'', b''$  their followers, according to lemma 3 (iv)  $a', b'$  and their followers center claws in  $G$ . As  $[\overline{a, c}]$  in  $G'$  then  $[\overline{a', c}]$  and there exists a follower  $a''$  of  $a'$  chosen such that  $[\overline{a'', c}]$  in  $G$ .

The vertices  $a', b', a'', b''$  are not necessarily distinct, then three subcases are possible:

**Subcase 1:**  $a' = b'$  (or  $a'' = b''$ )

Since  $[b, c]$  in  $G'$  then  $[b', c]$  or  $[b'', c]$  for very follower  $b''$  of  $b'$ ; but like  $a' = b'$  in  $G$  then  $[b'', c]$  for very follower  $b''$  of  $b'$ .

Since 0 is a special vertex then  $[a'', b'']$  in  $G$ ; thus  $b''$  is a claw center adjacent to two nonadjacent claw centers  $a''$  and  $c$  in  $G$ , which is a contradiction.

**Subcase 2:**  $a' = b''$  (or  $a'' = b'$ )

Since  $[b, c]$  in  $G'$  then  $[b', c]$  or  $[b'', c]$  for very follower  $b''$  of  $b'$ ; but like  $a' = b''$  in  $G$  then  $[b', c]$  in  $G$ .

Since 0 is a special vertex then  $[a'', b']$  in  $G$ ; thus  $b'$  is a claw center adjacent to two nonadjacent claw centers  $a'$  and  $c$  in  $G$ , which is a contradiction.

**Subcase 3:** all the vertices  $a', b', a'', b''$  are distinct.

Since  $0$  is a special vertex then among each three vertices of the set  $\{a'', a', b', b''\}$  two of them must be adjacent; thus  $b'$  (respectively  $b''$ ) centers a claw  $(b'; 0, u, c)$  (respectively a star  $(b''; 0, u, c)$ ) where  $u = a', a''$  and it is adjacent to two nonadjacent claw centers  $a', c$  (or  $a'', c$ ), which is a contradiction. Thus case 2 is impossible.

**Case 2.**  $N \cap \{a, b, c, d\} = \{b, d\}$

Let  $d'$  corresponds to  $d$  in  $G$ . Since  $[\overline{a, t}]$ ,  $[\overline{t, c}]$  and  $[\overline{a, c}]$  in  $G'$  then according to the lemma 1(iii),  $[\overline{a, d''}]$  and  $[\overline{c, d''}]$  for a follower  $d''$  of  $d'$  in  $G$ .

Let  $b'$  corresponds to  $b$  in  $G$  and  $b''$  the follower of  $b'$ . According to the lemma 3(ii),  $b', b'', d'$  and  $d''$  are all distinct. Also by the lemma 3(iii),  $[b', u]$  and  $[b'', u]$  for  $u = d', d''$ .

If  $[a, b']$  and  $[b', c]$  (respectively  $[a, b'']$  and  $[b'', c]$ ), then  $b'$  (respectively  $b''$ ) is a claw center adjacent to two nonadjacent claw centers  $a$  and  $c$  in  $G$ , which is a contradiction.

Assume that  $[\overline{a, b''}]$  and  $[\overline{b', c}]$ .

Let  $(a; x, y, z)$  the claw centered on  $a$ . According to the lemma 3, none of the vertices  $x, y$  and  $z$  is a new vertex. Now at least two vertices among  $\{x, y, z\}$  are adjacent to  $b$ , otherwise  $(a; x, y, b', 0)$  or  $(a; x, z, b', 0)$  or  $(a; y, z, b', 0)$  is a chair in  $G$ . Let us suppose  $[b', y]$  and  $[b', z]$ , then  $[b'', y]$  or  $[b'', z]$  otherwise  $(b', y, z, 0, b'')$  is a chair in  $G$ . suppose that  $[b'', z]$ , then  $[b'', y]$  or  $[b'', x]$  otherwise  $(a; x, y, z, b'')$  is a chair in  $G$ .

Let us suppose without loss of generality that  $[b'', y]$ , then, three subcases can arise.

**Subcase 1:**  $[\overline{c, y}]$  and  $[\overline{c, z}]$

Then  $[d', y]$  and  $[d', z]$  (respectively  $[d'', y]$  and  $[d'', z]$ ), otherwise  $(b'', d', c, y, a)$  and  $(b'', d', c, z, a)$  are a chairs in  $G$ . Thus  $(d'; y, z, 0)$  (respectively  $(d''; y, z, 0)$ ) is a claw centered on  $d'$  (respectively on  $d''$ ). But now  $b'$  (respectively  $b''$ ) is a claw center adjacent to three nonadjacent claw centers  $d', d''$  and  $a$  (respectively  $d', d''$  and  $c$ ) in  $G$ , which is a contradiction.

**Subcase 2:**  $[\overline{c, y}]$  and  $[\overline{d', z}]$

Then  $[d', y]$  and  $[c, z]$ , thus  $[d', x]$  otherwise  $(a; x, z, y, d')$  is a chair in  $G$ . Consequently  $(d'; x, y, 0)$  is a claw centered in  $d'$ , thus  $b'$  (respectively  $b''$ ) is a claw center adjacent to

**Annexe**  
**Stability number in the class  $\Gamma'$  of graphs**

---

two nonadjacent claw centers  $a$  and  $d'$  (respectively  $c$  and  $d'$ ) in  $G$ , which is a contradiction.

**Subcase 3:**  $[\overline{d',y}]$  and  $[\overline{d',z}]$  (or  $[\overline{d'',z}]$  and  $[\overline{d'',z}]$ )

Then  $[c,y]$  and  $[c,z]$ , and  $[d'',y]$  and  $[d'',z]$ , otherwise  $(b';d',d'',y,c)$  and  $(b';d',d'',z,c)$  are chairs in  $G$ . Consequently  $(d'';y,z,0)$  is a star centered in  $d''$ , thus  $b'$  (respectively  $b''$ ) is a claw center adjacent to two nonadjacent claw centers  $d''$  and  $a$  (respectively  $c$  and  $d''$ ) in  $G$ , which is a contradiction.

**Case 3.**  $N \cap \{a,b,c,d\} = \{b\}$

Let  $b'$  corresponds to  $b$  in  $G$  and  $b''$  the follower of  $b'$ .

$a$  centers a claw  $(a; x, y, z)$  in  $G'$ . The case where one of the vertices  $x, y, z$  is a new vertex cannot arise according to the lemma 3(i).

Since  $[a,b]$  in  $G'$  then according to the lemma 1(i),  $[a,b']$  or  $[a,b'']$  in  $G$  for every follower  $b''$  of  $b'$ . Since  $[b,c]$  in  $G'$  then according to the lemma 1(i),  $[b',c]$  or  $[b'',c]$  in  $G$  for every follower  $b''$  of  $b'$ .  $[b,d]$  in  $G'$  then according to the lemma 1(i),  $[b',d]$  or  $[b'',d]$  in  $G$  for every follower  $b''$  of  $b'$ .

Observe that we cannot have  $[a,b']$  and  $[b',c]$  (respectively  $[a,b'']$  and  $[b'',c]$ ) otherwise  $b'$  (respectively  $b''$ ) will be a claw center adjacent to two nonadjacent claw centers  $a$  and  $c$ .

Suppose that  $[\overline{a,b''}]$  and  $[\overline{b',c}]$ , then at least two vertices among  $\{x, y, z\}$  must be adjacent to  $b'$  otherwise  $(a; x, z, b', 0)$  or  $(a; x, y, b', 0)$  or  $(a; y, z, b', 0)$  are a chairs in  $G$ .

Assume that  $[b',y]$  and  $[b',z]$ . Then  $[y,b'']$  or  $[z,b'']$  otherwise  $(b';y,z,b'',0)$  is a chair in  $G$ . Suppose that  $[z,b'']$ . But now  $[z,c]$  otherwise  $(b'';0,c,z,a)$  is a chair in  $G$ , consequently  $[y,c]$ , otherwise  $(b';0,y,z,c)$  is a chair in  $G$ . Therefore,  $[x,b'']$  or  $[y,b'']$  otherwise  $(a;y,x,z,b'')$  is a chair in  $G$ .

Assume that  $[y,b'']$ .

Since  $[b,d]$  in  $G'$  then  $[b',d]$  or  $[b'',d]$  in  $G$ . If  $[b',d]$  then  $[b'',d]$  otherwise  $(b';a,d,0,b'')$  is a chair in  $G$ , moreover  $[d,y]$  and  $[d,z]$  otherwise  $(b';d,0,y,c)$  and  $(b';d,0,z,c)$  are a chairs in  $G$ .

## Annexe

### Stability number in the class $\Gamma'$ of graphs

---

If  $[\overline{b',x}]$  then  $[d,x]$ , otherwise  $(b';d,0,a,x)$  is a chair in  $G$ . Consequently  $(d;x,y,z)$  is a claw centered on  $d$ , thus  $b'$  (respectively  $b''$ ) is a claw center adjacent to two nonadjacent claw centers  $d$  and  $a$  (respectively  $c$  and  $d$ ) in  $G$ , which is a contradiction.

If  $[b',x]$ , we have the two following subcases:

**Subcase 1:**  $[c,x]$ , then  $[d,x]$ , otherwise  $(b';d,0,x,c)$  is a chair in  $G$ . Consequently  $(d;x,y,z)$  is a claw centered on  $d$ , thus  $b'$  (respectively  $b''$ ) is a claw center adjacent to two nonadjacent claw centers  $d$  and  $a$  (respectively  $c$  and  $d$ ) in  $G$ , which is a contradiction.

**Subcase 2:**  $[\overline{c,x}]$ , then  $[d,x]$  otherwise  $(z;d,c,a,x)$  and  $(y;d,c,a,x)$  are chairs in  $G$ . Consequently  $(d;x,y,z)$  is a claw centered on  $d$ , thus  $b'$  (respectively  $b''$ ) is a claw center adjacent to two nonadjacent claw centers  $d$  and  $a$  (respectively  $c$  and  $d$ ) in  $G$ , which is a contradiction.

The proof of proposition 5 is achieved. □

## 4. Stability number of the class $\Gamma'$

**Theorem 1** *The stability number of a graph  $G$  in the class  $\Gamma'$  can be obtained in polynomial time.*

### Proof.

By the propositions 1 and 2, at each stage of the struction the order and the stability number of  $G'$  decrease. Repeating the application of the struction, we obtain a sequence  $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots$  of graphs, we stop when we obtain a graph  $G^{(k)}$  ( $1 \leq k \leq n-2$ ) for which the stability number can be easily computed. Then  $\alpha(G) = k + p, (p \geq 1)$ , if  $\alpha(G^{(k)}) = p$ . According to (iii) a special vertex exists at each stage of the struction. From where the existence of a polynomial algorithm, which gives the stability, number for any graph  $G$  of  $\Gamma'$ .

As the transformation of  $G$  into  $G'$  is applied in at most  $O(n)$  time and the construction of  $G'$  is done in  $O(n^2)$  [ 3 ], then the total complexity of the algorithm is  $O(n^3)$ . □

## **5. Some applications of the maximum stable set**

The notion of the maximum stable set, plays an important role in the resolution of several problems of various fields.

The applications of the maximum stable set are varied, we give as examples:

- The field of chemistry
- The field of data processing
- The field of telecommunications