

N° d'ordre : 07/2008 - M/MT

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا

Faculté de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER en

MATHEMATIQUES

Recherche Opérationnelle : Mathématiques de Gestion

Par : **KERDJOUDJ Samia**

***b*-colorations et produits de triangles**

Soutenu le 21 Septembre 2008, devant le jury composé de :

Mr- M. BOUDHAR	Maitre de Conférences, U.S.T.H.B	Président
Mr- A. BERRACHEDI	Professeur, U.S.T.H.B	Directeur de thèse
Mr- M. CHELLALI	Maitre de Conférences, U.S.D.B	Examineur
Mle- F. AFFIF CHAOUCHE	Chargée de Cours, E.S.C	Invitée

Remerciements

Le présent travail a été réalisé au Laboratoire d'Aide à la Décision par les Techniques de Recherche Opérationnelle, d'informatique et statistique (LAID 3) à l'USTHB, sous la direction du Professeur A.BERRACHEDI. Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour m'avoir accueillie dans son équipe, proposé ce thème de recherche et mis à ma disposition les moyens pour mener à bien ce travail.

Je remercie particulièrement Melle AFFIF CHAOUICHE, Docteur en Recherche Opérationnelle, qui m'a fait bénéficier de son expérience. Elle a manifesté un intérêt et un enthousiasme constants pour mes travaux. Ses remarques et ses suggestions ont constitué un précieux apport. Je suis fière de la compter parmi les membres du jury.

J'adresse mes vifs remerciements à Mr BOUDHAR, Maitre de Conférences à l'USTHB, pour avoir accepté d'examiner mon travail et de présider le jury de soutenance.

Mr CHELLALI, Maitre de conférences à l'Université Saad Dahleb de Blida a bien voulu examiner le travail. Ses critiques et ses remarques me seront sans doute très utiles pour la suite. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je remercie enfin tous mes amis et camarades pour leur soutien et leur aide pendant toutes ces années d'études.

Table des matières

Introduction	4
1 Définitions de base et notations	7
1.1 Définitions générales	7
1.1.1 Graphe	7
1.1.2 Notions de base	7
1.1.3 Lemme des poignées de mains	8
1.2 Terminologie	8
1.3 Quelques classes de graphes	10
1.4 Opérations classiques sur les graphes	13
1.4.1 Produit cartésien de deux graphes	13
1.4.2 Produit direct de deux graphes	14
1.4.3 Produit complet de deux graphes	14
1.5 Morphismes de graphes	15
1.5.1 Homomorphisme de graphes	15
1.5.2 Isomorphisme de graphes	15
1.5.3 Automorphisme de graphes	15
1.6 Quelques invariants de graphes	16
1.7 Notions de la théorie de complexité	17
2 Le nombre b-chromatique	19
2.1 Introduction	19
2.2 Graphes réguliers	21
2.3 Le nombre b -chromatique de certains graphes particuliers	23

2.4	Le nombre b -chromatique du produit cartésien de graphes	27
2.5	La b -coloration du graphe $K_n \square K_p$	30
2.6	Conclusion	33
3	b-coloration du produit cartésien de graphes	34
3.1	Introduction	34
3.2	Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{1,p}$	35
3.3	Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{2,p}$	37
3.4	Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{p,p}$	50
3.5	Conclusion	58
4	b-continuité des b-colorations de graphes	59
4.1	Introduction	59
4.2	Complexité du nombre b -chromatique	59
4.3	b -continuité de graphes	60
4.4	Conclusion	71
	Conclusion	71
	Bibliographie	73

Introduction

La théorie des graphes constitue une branche à part entière des mathématiques. Elle représente l'un des instruments les plus courants et les plus efficaces pour résoudre des problèmes discrets posés en Recherche Opérationnelle.

L'histoire de la théorie des graphes a commencé en 1736, avec les travaux d'Euler pour résoudre certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad), de la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage des cartes. Elle s'est ensuite développée au sein de disciplines diverses telles que la chimie (modélisation de structures), la biologie (génomique), les sciences sociales (modélisation des relations entre les populations) ou pour des applications industrielles (problème du voyageur de commerce).

La coloration des graphes est un problème ancien, elle constitue un champ majeur et très actif de la théorie des graphes avec un nombre important de conjectures. Son origine remonte au problème des quatre couleurs posé par Francis Guthrie en 1852 : *"Est-il possible de colorier toute carte géographique avec au plus quatre couleurs de sorte que deux régions qui ont une frontière en commun aient des couleurs différentes ?"*

La coloration de graphes permet de modéliser de nombreux problèmes réels, tels que problèmes d'ordonnancement ou encore d'allocation de fréquence.

Il existe plusieurs types de colorations : des sommets, des arêtes, des faces ou bien un mélange de ces éléments. A la coloration peuvent s'ajouter d'autres contraintes comme celle de la *propreté* qui consiste à affecter à deux éléments voisins des couleurs différentes.

La coloration des sommets a permis de définir un très grand nombre de paramètres.

Le *nombre chromatique* figure parmi les paramètres fondamentaux. Il sert à déterminer le nombre minimum de couleurs d'une coloration propre des sommets. Le problème de savoir si un graphe admet une k -coloration propre est *NP*-complet.

A partir du nombre chromatique, de nombreux autres paramètres ont été mis en évidence :

- *Le nombre achromatique*, introduit en 1967 par Harary et Hedetniem [10], il permet de déterminer le nombre maximum de couleurs possibles pour que la coloration d'un graphe soit propre et que chaque paire de couleurs apparaisse au moins sur les extrémités d'une des arêtes du graphe.
- *Le nombre b -chromatique* à été introduit en 1999, par Irving et Manlove [15], à partir du nombre achromatique. L'une des particularités de cette nouvelle coloration est l'existence d'une coloration dominante avec p et $p + 2$ couleurs, mais pas une de $p + 1$ couleur.

Dans ce présent travail, nous nous sommes intéressés à l'étude du nombre b -chromatique du produit cartésien de graphes.

Ce mémoire comporte quatre chapitres :

- le premier chapitre est consacré à la présentation des concepts fondamentaux, l'énoncé des définitions ainsi que les notations utilisées.
- Dans le deuxième chapitre, nous donnerons d'abord une définition complète du paramètre du nombre b -chromatique, puis un aperçu des principaux résultats de la littérature concernant la b -coloration et le nombre b -chromatique. Nous terminerons ce chapitre en proposant des bornes pour le nombre b -chromatique du produit cartésien de deux graphes complets différents .
- Après avoir défini les bornes inférieures pour le nombre b -chromatique du pro-

duit cartésien de quelques graphes, nous proposons des colorations permettant d'obtenir une valeur exacte de ce paramètre. Cela fera l'objet du troisième chapitre.

- Dans le chapitre quatre nous démontrerons la b -continuité des graphes étudiés. Nous nous intéresserons ensuite à la complexité algorithmique du nombre b -chromatique et de la b -continuité.

Chapitre 1

Définitions de base et notations

La terminologie adoptée est celle de Berge [4].

1.1 Définitions générales

1.1.1 Graphe

Un graphe simple, fini $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés *sommets* et l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés *arêtes*.

Une arête e de l'ensemble E est définie par une paire non-ordonnée de sommets, appelées *extrémités* de e .

Si l'arête e relie les sommets a et b , on dira que ces sommets sont *adjacents*, ou *incidents* à e , ou encore que l'arête e est incidente aux sommets a et b .

1.1.2 Notions de base

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et v un sommet de ce graphe. Le *degré* de v , noté $d(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v .

Lorsque $d(v) = 0$, on dit que le sommet v est *isolé*. Lorsque $d(v) = 1$, il est dit *pendant*. On notera le degré minimum des sommets de G par $\delta(G)$ et son degré maximum par $\Delta(G)$.

Un graphe simple est dit *régulier* de degré d , si tous ses sommets sont de degré d .

1.1.3 Lemme des poignées de mains

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, alors

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 | E |$$

En effet, chaque arête uv de E est comptée deux fois, une fois pour $d(v)$ et une seconde fois pour $d(u)$.

1.2 Terminologie

- **Sous-graphe** : Le graphe $G' = (V', E')$ est *un sous-graphe* du graphe $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.
- **Graphe partiel** : Le graphe $G' = (V', E')$ est *un graphe partiel* du graphe $G = (V, E)$ si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.
- **Sous-graphe induit** : Un *sous graphe induit* G' de G , est un sous graphe de G où $E(G')$ est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs extrémités dans $V(G')$.
- **Ordre d'un graphe** : L'*ordre* d'un graphe est défini par le nombre de ses sommets.
- **Chaîne** : Une *chaîne* dans G , est une séquence ayant pour éléments alternativement des sommets v_i et des arêtes e_i commençant et se terminant par un sommet, tel que les extrémités de e_i soient v_{i-1} et v_i , $i = 1, \dots, k$.
Si $v_0 = a$ et $v_k = b$, alors la chaîne relie a et b et est de longueur k ($k =$ le nombre d'arêtes de la chaîne).
- **Chaîne simple** : Une chaîne est dite *simple* si chaque arête apparaît au plus une fois.

- **Cycle** : Une chaîne simple est appelée *cycle* si seul le sommet de départ apparaît deux fois dans la chaîne. Autrement dit, les extrémités de la chaîne sont confondues ($v_0 = v_k$).
- **Graphe connexe** : Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si $\forall u, v \in V$, il existe une chaîne entre u et v .
- **Arbre** : On appelle *arbre* tout graphe connexe sans cycle.
- **Distance entre deux sommets** : On appelle *distance* entre deux sommets u et v (notée : $d(u, v) = d_G(u, v)$) dans G , la longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets.
- **Diamètre d'un graphe** : Le *diamètre* d'un graphe G (noté : $diam(G)$) est le maximum des distances entre les sommets du graphe.
- **Exentricité d'un sommet u** : L'*exentricité* d'un sommet u (notée : $e(u)$) représente la longueur de la plus grande des plus courtes chaînes issues de u .
- **Décomposition en niveaux** : La *décomposition en niveaux* d'un graphe G à partir d'un sommet u est la partition de $V(G)$ en N_0, N_1, \dots, N_p où $p = e(u)$ et $N_i = \{v \in V(G) / d(u, v) = i\}$, $i = 1, 2, \dots, p$.
L'ensemble N_i est appelé le i^{eme} niveau de u dans G .
- **Couplage d'un graphe** : Un *couplage* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ deux à deux non adjacents. Il est dit couplage parfait si tout sommet de G est une extrémité d'une arête de M .
- **Stable** : Un *stable* d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.

- **Clique** : Une *clique* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble de sommets $C \subseteq V$ tel que deux sommets quelconque sont adjacents.

1.3 Quelques classes de graphes

On distingue plusieurs classes de graphes :

1. **Graphe complémentaire** : Le graphe *complémentaire* de G (noté \overline{G}) est un graphe qui possède V comme ensemble de sommets et deux sommets sont adjacents dans \overline{G} si et seulement si, ils ne le sont pas dans G .

Exemple : (Fig 1.1).

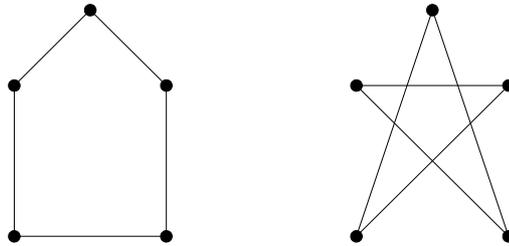


FIG. 1.1: G et \overline{G}

2. **Graphe complet** : Un graphe $G = (V, E)$ est dit *complet* si pour deux sommets quelconques u et v de V , $uv \in E$.

Un graphe complet de n sommets, noté K_n , est appelé une *n-clique*.

Exemple : Le graphe complet K_5 (Fig 1.2).

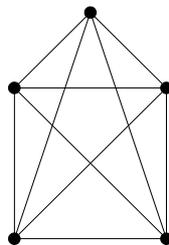


FIG. 1.2:

- 3. Graphe biparti :** Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 (dit *stable*) telle que chaque arête possède une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 .

Exemple : (Fig 1.3).

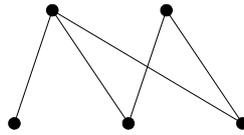


FIG. 1.3:

- 4. Graphe biparti complet :** Un graphe biparti est dit *biparti complet* si tout sommet de V_1 est adjacent à tout sommet de V_2 . Il est dans ce cas noté K_{n_1, n_2} où $n_1 = |V_1|$ et $n_2 = |V_2|$.

Exemple : Le graphe $K_{3,2}$ (Fig 1.4).

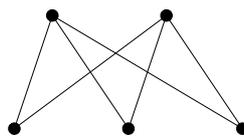


FIG. 1.4:

- 5. Graphe de l'hypercube :** [5] L'hypercube de dimension d (noté Q_d) est le graphe dont tous les sommets représentent les d -uplets de $\{0, 1\}^d$. Deux sommets sont adjacents si et seulement si, ils diffèrent exactement d'une composante.

Exemple : Le cube Q_3 (Fig 1.5).

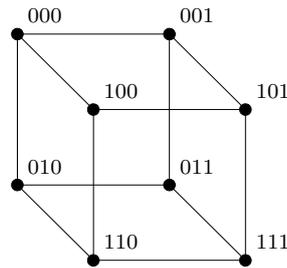


FIG. 1.5:

7. Graphe planaire : Un graphe est dit *planaire* s'il existe au moins une façon de le représenter dans un plan sans que deux arêtes ne se croisent.

Exemple : Le graphe biparti complet $K_{2,3}$ est planaire (Fig 1.6).

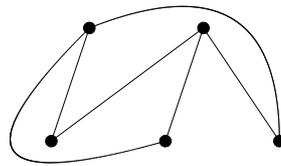


FIG. 1.6:

8. Graphe de Mulder : Un graphe G est dit de *Mulder* ou $(0, \lambda)$ – *graphe*, si toute paire de sommets admet exactement 0 ou bien λ voisins communs.

Exemple : Le cycle C_4 (Fig 1.7) est un $(0, 2)$ -graphe.

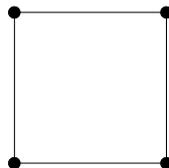


FIG. 1.7:

9. Graphe puissance : Un graphe p puissance d'un graphe G est le graphe obtenu à partir de G en joignant une arête entre toute paire de sommets à distance p ou moins, avec $p \geq 1$.

10. Graphe amplement régulier : Un graphe est dit *amplement régulier* de paramètres (n, k, λ, μ) lorsqu'il est :

- d'ordre n ,
- régulier de degré k ,
- toute paire de sommets à distance 1 possèdent λ voisins communs,
- toute paire de sommets à distance 2 possèdent μ voisins communs.

1.4 Opérations classiques sur les graphes

1.4.1 Produit cartésien de deux graphes

Le produit cartésien des graphes G et H est le graphe noté $G \square H$, dont l'ensemble des sommets est $V(G) \times V(H)$ et où le sommet (u, v) est adjacent au sommet (u', v') si et seulement si :

$$uu' \in E(G) \text{ et } v = v' \text{ ou } vv' \in E(H) \text{ et } u = u'$$

Exemple : Le graphe $K_2 \square K_3$ (Fig 1.8).

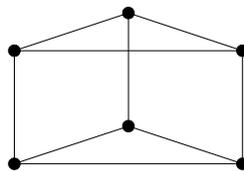


FIG. 1.8:

1.4.2 Produit direct de deux graphes

Le produit direct des graphes G et H est le graphe noté $G \times H$, dont l'ensemble des sommets est $V(G) \times V(H)$ et où le sommet (u, v) est adjacent au sommet (u', v') si et seulement si :

$$uu' \in E(G) \text{ et } vv' \in E(H)$$

Exemple : Le graphe $K_3 \times K_2$ (Fig 1.9).

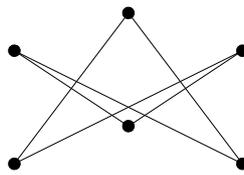


FIG. 1.9:

1.4.3 Produit complet de deux graphes

Le produit complet (ou produit total) des graphes G et H est le graphe $G \boxtimes H$, tel que l'ensemble des sommets est $V(G) \times V(H)$ et le sommet (u, v) est adjacent au sommet (u', v') si et seulement si

$$uu' \in E(G) \text{ et } v = v' \text{ ou } vv' \in E(H) \text{ et } u = u' \text{ ou } uv \in E(G) \text{ et } u'v' \in E(H)$$

Exemple : Le graphe $K_3 \boxtimes K_2$ (Fig 1.10).

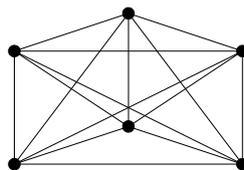


FIG. 1.10:

Le produit cartésien est le plus connu et le plus étudié de ces produits, car de nombreux graphes classiques peuvent être définis en terme de ce produit :

- ◇ La **grille d -dimensionnelle** M_{n_1, n_2, \dots, n_d} est le produit cartésien de d chaînes.
- ◇ La **grille torique d -dimensionnelle** $TM_{n_1, n_2, \dots, n_d}$ est le produit cartésien de d cycles.
- ◇ Le graphe de **Hamming** K_n^d est le produit cartésien de K_n par lui même d fois. L'hypercube Q_d est le graphe K_2^d .

1.5 Morphismes de graphes

Un graphe G peut symboliser la structure algébrique définie par l'ensemble V muni de la relation d'adjacence. Ainsi les notions algébriques classiques de morphismes restent identiques.

1.5.1 Homomorphisme de graphes

Soient deux graphes simples $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$. Un *homomorphisme* de G dans H est défini par l'application $f : V \rightarrow V'$, tel que :

$$uv \in E \implies f(u)f(v) \in E'.$$

1.5.2 Isomorphisme de graphes

Soient deux graphes simples $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$, un *isomorphisme* φ de G dans H est une bijection de V sur V' tel que deux sommets v_i dans v_j sont adjacents dans G si et seulement si leurs images $\varphi(v_i)$ et $\varphi(v_j)$ sont adjacents dans H .

1.5.3 Automorphisme de graphes

Un automorphisme de G est un isomorphisme de G dans lui même. En d'autres termes, un automorphisme est une permutation g de $V(G)$ ayant la propriété : pour $u, v \in V(G)$, u est adjacent v si et seulement si $g(u)$ est adjacent $g(v)$.

1.6 Quelques invariants de graphes

Un invariant d'un graphe G est un paramètre associé à G qui est le même pour tout graphe isomorphe à G . Nous citerons dans ce qui suit les invariants liés à la coloration de sommets ou d'arêtes les plus élémentaires.

- **Nombre de stabilité** : Le *nombre de stabilité* d'un graphe G , noté $\alpha(G)$, est la cardinalité d'un stable maximum dans G .
- **Nombre chromatique** : Le *nombre chromatique* d'un graphe G , noté $\chi(G)$, est le nombre minimal de couleurs permettant de colorier les sommets d'un graphe, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.
- **Nombre achromatique** : Le *nombre achromatique* d'un graphe G , noté $\psi(G)$, est le plus grand entier k tel que G admet une partition de sommets V en au plus k ensembles disjoints V_1, V_2, \dots, V_k tels que pour chaque paire d'ensembles distincts V_i et V_j , $V_i \cup V_j$ ne soit pas un ensemble stable.
- **Taille d'une clique maximum** : la *taille d'une clique maximum* de G est la taille de la plus grande clique de G , noté par $W(G)$.
- **Nombre b -chromatique** : La b -coloration d'un graphe G par k couleurs est une k -coloration propre des sommets de G telle que pour toute classe de couleurs il existe un sommet ayant un voisin dans tous les $k - 1$ autres classes de couleurs. Le *nombre b -chromatique*, noté $\varphi(G)$, est le nombre maximum k pour lequel G admet une b -coloration avec k couleurs.
- **Nombre domatique** : Le problème du nombre domatique consiste à déterminer si V peut être partitionné en $l \leq k$ ensembles disjoints V_1, V_2, \dots, V_k tel que chaque V_i est un ensemble b -dominant pour G .

1.7 Notions de la théorie de complexité

La complexité d'un algorithme évalue un majorant du nombre d'opérations élémentaires maximum qu'on doit effectuer pour obtenir le résultat cherché. La complexité est exprimée en fonction de la taille des données. On appelle bon algorithme une suite d'opérations dont le temps de calcul croît d'une façon polynomiale. Certains problèmes d'optimisation combinatoire disposent d'algorithmes polynomiaux, tandis que d'autres n'en ont toujours pas.

Existe-t-il réellement une classe de problèmes combinatoires pour lesquels on ne trouvera jamais d'algorithmes polynomiaux ($P \neq NP$) ? Ou plutôt les problèmes difficiles ont de tels algorithmes, mais non encore découverts ($P = NP$) ?

La théorie de la complexité n'a pu obtenir jusqu'ici une réponse complète à cette question. Elle conjecture jusqu'à présent que $P \neq NP$; elle s'intéresse alors aux problèmes de reconnaissance qui sont en fait des problèmes de décision, pour lesquels la réponse est de la forme Oui-Non ou Vrai-Faux. Ces derniers sont étudiés avec les outils de la logique mathématique. Tout problème est au moins aussi difficile que son problème de reconnaissance associé.

La conjecture posée est qu'il existe une classe de problèmes difficiles. La théorie de la complexité distingue *deux* classes de problèmes. La classe P et la classe NP-complet.

- Les classes de problèmes P et NP : L'ensemble des problèmes qui admettent des algorithmes polynomiaux forme la classe P. La classe NP regroupe l'ensemble des problèmes pouvant être résolus en un temps polynomial par un algorithme non déterministe. Autrement dit, on peut vérifier en un temps polynomial qu'une solution proposée ou devinée permet d'affirmer la réponse Oui.

Les algorithmes non déterministes diffèrent des algorithmes déterministes en ce qu'ils ne peuvent être mis en œuvre sur ordinateur. Sur le plan théorique, les algorithmes non déterministes permettent de caractériser la classe NP.

Comme tout problème de la classe possède un algorithme polynomial pour sa résolution, on en déduit que $P \subset NP$.

- Les problèmes NP-complets : Il s'agit des problèmes les plus difficiles de la classe NP. La notion de problèmes NP-complet est basée sur celle de la réduction polynomiale définie comme suit.

Un problème de reconnaissance (P_1) se réduit polynomialement à un autre (P_2), s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution pour (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est considérée comme une opération élémentaire.

Un problème NP-complet est un problème de NP en lequel se réduit polynomialement tout autre problème de NP. Signalons que le terme NP-difficile est différent du terme NP-complet. En effet, un problème d'optimisation combinatoire est NP-difficile si le problème de reconnaissance associé est NP-complet. Un problème NP-complet appartient à la classe NP-difficile et à la classe NP.

Signalons que si on arrive à déterminer un algorithme polynomial pour un seul problème NP-complet, on pourra en déduire un autre pour tout autre problème difficile de NP.

Chapitre 2

Le nombre b -chromatique

2.1 Introduction

Le nombre b -chromatique a été introduit par Irving et Manlove [15] en 1999. Il a été défini à partir du nombre achromatique ([10],[12]).

Définition : Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une k -coloration propre de ses sommets est une fonction c , définie dans $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ dans l'ensemble de couleurs $C = \{1, 2, \dots, k\}$ tel que deux sommets adjacents $u, v \in V(G)$ aient des couleurs différentes.

Une k -coloration propre dominante est une k -coloration propre utilisant k couleurs satisfaisant la propriété P suivante : Pour tout i , $1 \leq i \leq k$, il existe un sommet u_i de couleur i tel que, pour tout j , $1 \leq j \leq k$, $i \neq j$, il existe un sommet v_j de couleur j adjacent à u_i . Le sommet u_i est dit *sommet b -dominant* de couleur i .

Une coloration c satisfaisant la propriété P est dite *coloration dominante* ou encore *une b -coloration*.

Le *nombre b -chromatique* $\varphi(G)$ d'un graphe G est le nombre maximum k pour lequel G admet une b -coloration par k -couleurs. On dira que l'ensemble $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ est un *système b -dominant*.

Exemple :

Le graphe G de la figure (2.1) est un exemple de graphe biparti 3-régulier.

Son nombre b -chromatique $\varphi(G) = 4$.

La coloration c est présentée dans la figure (2.1), où à chaque sommet i correspond l'étiquette c_i .

Le système b -dominant dans ce cas est donné par l'ensemble des sommets ayant les étiquettes c_1^*, c_2^*, c_3^* et c_4^* .

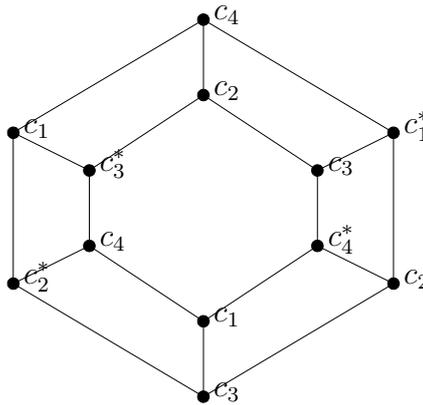


FIG. 2.1:

Un des résultats les plus importants concernant la b -coloration est que pour tout graphe G , on a :

$$\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + 1. \quad (2.1)$$

Remarque 2.1.1 (*Kouider et Mahéo [16]*).

Les bornes inférieures de $\chi(G)$ restent valables pour $\varphi(G)$.

A titre d'exemple, nous pouvons citer les bornes suivantes : $\frac{n}{\alpha}$; $\frac{n^2}{n^2-2m}$; $\frac{n}{n-\delta}$, où n est l'ordre, α est le nombre de stabilité et δ est le degré minimum du graphe G .

Proposition 2.1.1 (*Kouider et Mahéo [16]*).

Soit G un graphe connexe d'ordre n et α son nombre de stabilité. Alors

$$\varphi(G) \leq n + 1 - \alpha.$$

Une borne supérieure de $\varphi(G)$ peut être donnée aussi en fonction du nombre d'arêtes dans la proposition suivante :

Proposition 2.1.2 (*Kouider et Mahéo [16]*).

Pour tout graphe $G = (V, E)$, tel que : $|E| = m$, on a :

$$\varphi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Un ensemble $S \subseteq V$ est dit *stable b -dominant* du graphe $G = (V, E)$, si S est à la fois un ensemble b -dominant et un ensemble de stables.

Les graphes admettant des systèmes stables dominants ont des propriétés particulières. Le graphe de degré 3, donné dans la figure (2.1), admet un 4-système stable dominants. En effet, le système b -dominant S donné dans l'exemple, constitue un système stable dominant pour ce graphe.

2.2 Graphes réguliers

L'inégalité (2.1) dans le cas d'un graphe régulier de degré k devient :

$$\chi(G) \leq \varphi(G) \leq k + 1. \quad (2.2)$$

En appliquant la proposition 2.1.2, où $m = \frac{nk}{2}$, on obtient :

$$\varphi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{4nk + 1}}{2}. \quad (2.3)$$

La borne donnée dans (2.3) n'est atteinte que dans le cas des graphes complets, on en déduit alors que l'inégalité donnée dans (2.2) reste meilleure.

Dans le théorème suivant, Kratochvil, Tuza et Voigt [18], ont donné la valeur du nombre b -chromatique d'un graphe G sous une condition sur la distance.

Théorème 2.2.1 (*Kratochvil, Tuza et Voigt [18]*).

Soit G un graphe contenant les sommets $v_1, v_2, \dots, v_{\Delta+1}$, tel que $d(v_i) = \Delta$, où $\Delta = \Delta(G)$ pour tout i et $d(v_i, v_j) \geq 4$ pour tout $i \neq j$. Alors

$$\varphi(G) = \Delta + 1.$$

Du théorème 2.2.1, découle le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1 (*Kratochvil, Tuza et Voigt [18]*).

Si G est un graphe d -régulier, où $d \leq 2$, avec au moins d^4 sommets. Alors

$$\varphi(G) = d + 1.$$

Corollaire 2.2.2 (Kouider [13]).

Soit G un graphe régulier de degré d , avec $\text{Diam}(G) \geq 4d$, alors

$$\varphi(G) = d + 1.$$

El Sahili et Kouider [7], se sont intéressés au nombre b -chromatique des graphes réguliers ayant un cycle minimum d'au moins 5 sommets.

Proposition 2.2.1 (El Sahili et Kouider [7]).

Tout graphe G , d -régulier dont la longueur d'un plus petit cycle est 6, vérifie

$$\varphi(G) = d + 1.$$

Théorème 2.2.2 (El Sahili et Kouider [7]).

Soit G un graphe d -régulier avec un plus petit cycle d'au moins 5 sommets et ne contenant aucun cycle d'ordre 6. Alors

$$\varphi(G) = d + 1.$$

Proposition 2.2.2 (El Sahili et Kouider [7]).

Soit G un graphe d -régulier. Si $V(G)$ peut être décomposé en $d+1$ stables S_1, S_2, \dots, S_{d+1} tels que pour tout i, j il existe un couplage parfait entre S_i et S_j , alors

$$\varphi(G) = d + 1.$$

En interdisant une chaîne d'ordre 7 (P_7), on obtient une borne inférieure donnée dans la proposition suivante :

Proposition 2.2.3 (El Sahili et Kouider [7]).

Pour tout graphe G sans P_7 de plus petit cycle d'au moins 5 sommets, on a :

$$\varphi(G) > \frac{\delta-3}{4},$$

où δ est le degré minimum de G .

2.3 Le nombre b -chromatique de certains graphes particuliers

Plusieurs études ont été menées pour borner ou donner la valeur exacte du nombre b -chromatique pour des classes particulières de graphes. Kouider et Mahéo [16] ont donné dans les propositions 2.3.1 et 2.3.2 la valeur exacte du nombre b -chromatique de certains graphes élémentaires.

Proposition 2.3.1 (*Kouider et Mahéo*[16]).

Si S_n , K_n , P_n et C_n sont respectivement, un stable, un graphe complet, une chaîne et un cycle de n sommets. Alors $\varphi(S_n) = 1$, $\varphi(K_n) = n$ et $\varphi(P_n) = \varphi(C_n) = 3$, $\forall n \geq 5$.

Proposition 2.3.2 (*Kouider et Mahéo* [16]).

Soient $n, p \in \mathbb{N}^$, si $K_{n,p}$ est un graphe complet biparti, alors :*

$$\varphi(K_{n,p}) = 2.$$

Effantin et Kheddouci [6] ont donné une valeur exacte du nombre b -chromatique des graphes puissance d'une chaîne.

Théorème 2.3.1 (*Effantin et Kheddouci* [6]).

Soit P_n une chaîne de n sommets. Le nombre b -chromatique du graphe puissance d'une chaîne P_n^p , avec $p \geq 1$ est :

$$\varphi(P_n^p) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq p + 1. \\ p + 1 + \lfloor \frac{n-p-1}{3} \rfloor & \text{si } p + 2 \leq n \leq 4p + 1 \\ 2p + 1 & \text{si } n \geq 4p + 2. \end{cases}$$

Pour le cas des graphes puissance de cycle, à l'exception d'un cas particulier où seule une borne inférieure a été établie, les auteurs ont donné une valeur exacte pour ce paramètre.

Théorème 2.3.2 (*Effantin et Kheddouci* [6]).

Soit C_n un cycle de n sommets. Le nombre b -chromatique du graphe puissance d'un

cycle C_n^p , avec $p \geq 1$ est :

$$\varphi(C_n^p) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 2p + 1. \\ p + 1 & \text{si } n = 2p + 2. \\ (\geq) \min(n - p - 1, p + 1 + \lfloor \frac{n-p-1}{3} \rfloor) & \text{si } 2p + 3 \leq n \leq 3p. \\ p + 1 + \lfloor \frac{n-p-1}{3} \rfloor & \text{si } 3p + 1 \leq n \leq 4p \\ 2p + 1 & \text{si } n \geq 4p + 1. \end{cases}$$

Affif Chaouche et Berrachedi [3], se sont intéressés à l'étude de la b -coloration des graphes amplement réguliers .

Soit u un sommet du graphe G . Si H_u est le sous graphe de G induit par l'ensemble des sommets $N[u] \cup N_2(u)$, on obtient alors la proposition suivante :

Proposition 2.3.3 (Affif Chaouche et Berrachedi [3]).

Soit G un graphe amplement régulier de paramètres (n, k, λ, μ) et sans $K_4 - e$, alors,

$$\lambda + 2 \leq \varphi(G) \leq d(\lambda + 1) + 1 \text{ avec } d(\lambda + 1) = k.$$

Rappelons que, d'après la proposition 2.2.1, $\varphi(C_n) = 3, \forall n \geq 5$, Affif Chaouche et Berrachedi [3], ont par la suite signalé que ce graphe est amplement régulier de paramètres $(n, 2, 0, 1)$ avec $\varphi(G) = 3$.

Les graphes amplement réguliers sont introduits pour généraliser les graphes de Hamming, qui ne sont que des graphes sans $K_4 - e$ et sans C_5 induit. On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.3.4 (Affif Chaouche et Berrachedi [3]).

Soit G un graphe amplement régulier de paramètres $(n, k, 0, 1)$ et sans C_5 induit. Si $k \geq 4$, alors

$$\varphi(H_u) = k + 1.$$

Remarque 2.3.1.

Si G est un graphe amplement régulier de paramètres $(n, k, 0, 1)$ et ne contenant pas de C_5 induit avec $k \geq 4$, alors la longueur d'un plus court cycle de G au moins égale à 6. Ainsi d'après la proposition 2.2.2, $\varphi(G) = k + 1$.

Dans ce cas, $\forall v \in V(G), \varphi(H_u) = \varphi(G)$.

Kouider et Zaker [17], se sont penchés sur la b -coloration des graphes sans $K_{1,s}$, des graphes ayant une partition en nombre minimum de cliques donnée et des graphes biparti.

Théorème 2.3.3 (Kouider et Zaker [17]).

Soit G un graphe sans $K_{1,s}$ où $s \geq 3$, alors

$$\varphi(G) \leq (s-1)(\chi(G) - 1) + 1.$$

Théorème 2.3.4 (Kouider et Zaker [17]).

Soit G un graphe avec une partition en nombre minimum de cliques $\theta(G) = k$ et la taille d'une clique maximum $\omega(G) = \omega$, alors

$$\varphi(G) \leq \frac{k^2\omega}{2k-1}$$

De ce théorème, il découle le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.1 (Kouider et Zaker [17]).

Pour tout graphe G , avec la taille d'une clique maximum $\omega(G)$,

$$\varphi(G) \leq \frac{\chi^2(\overline{G})}{2\chi(\overline{G}) - 1} \omega(G).$$

Si G est un graphe biparti, alors tout sous graphe biparti complet de G est appelé une *biclique* de G . Le *nombre biclique* d'un graphe G est le nombre minimum de bicliques disjointes qui couvre les sommets de G .

Théorème 2.3.5 (Kouider et Zaker [17]).

Soit $G = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti, tel que $|X \cup Y| = n$ et c le nombre biclique de G , alors

$$\varphi(G) \leq \lfloor \frac{n-c+4}{2} \rfloor.$$

Proposition 2.3.5 (Kouider et Zaker [17]).

Pour tout entier $t \geq 3$, il existe un graphe biparti G avec $n = 3t - 4$ sommets et un nombre biclique $c = t - 1$ tel que $\varphi(G) = t = \lfloor \frac{n-c+4}{2} \rfloor$.

Kouider [13], a établi une comparaison entre le nombre b -chromatique d'un graphe et un sous graphe H de G .

Proposition 2.3.6 (Kouider [13]).

Soit G un graphe et H un sous graphe induit de G .

1. *Si $\varphi(H) = \Delta(G) + 1$, alors $\varphi(G) = \varphi(H)$.*
2. *S'il n'existe pas de sommet de degré au moins $\varphi(G)$ à l'exception de H , alors $\varphi(G) \geq \varphi(H)$.*

Proposition 2.3.7 (Kouider [13]).

Soit G un graphe et H un sous graphe induit de G . Si pour tout $x, x' \in V(G)$, $\min[d_G(x), d_G(x')] \geq \varphi(H) - 1$, on a $d(x, x') \geq 3$. Alors

$$\varphi(G) \geq \varphi(H).$$

Pour le cas des graphes avec un plus petit cycle d'au moins égal à cinq, les auteurs ont donné une comparaison entre le nombre b -chromatique et d'autres paramètres de graphe.

Théorème 2.3.6 (Kouider [13]).

Soit G un graphe avec un plus petit cycle d'au moins égal cinq et soit H un sous graphe induit de G . Si H admet un système b -dominant $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(H)}\}$ tel que tout sommets x_i, x_j de S on a $d(x_i, x_j) \geq 6$, alors $\varphi(G) \geq \varphi(H)$.

Corollaire 2.3.2 (Kouider [13]).

Soit G un graphe avec un plus petit cycle d'au moins cinq et $\text{Diam}(G)$ son diamètre. On obtient :

$$\varphi(G) > \min(\delta(G), \frac{\text{diam}(G)}{6}).$$

avec $\delta(G)$ degré minimum de G .

2.4 Le nombre b -chromatique du produit cartésien de graphes

Le produit cartésien de deux graphes est une opération qui permet d'obtenir de nouveaux graphes à partir d'anciens. Il devient alors intéressant de chercher le nombre b -chromatique de graphe en fonction d'éléments du produit cartésien.

Proposition 2.4.1 (*Kouider et Mahéo [16]*).

Soient deux graphes G et H , alors $\varphi(G \square H) \geq \max(\varphi(G), \varphi(H))$.

Sous certaines conditions, cette borne peut être améliorée selon le théorème suivant

Théorème 2.4.1 (*Kouider et Mahéo [16]*).

Soient G et H deux graphes tels que G et H admettent respectivement, $\varphi(G)$ -système stable dominant et $\varphi(H)$ -système stable dominant, alors $\varphi(G \square H) \geq \varphi(G) + \varphi(H) - 1$. De plus, le graphe $G \square H$ admet un $(\varphi(G) + \varphi(H) - 1)$ -système stable dominant.

Remarque 2.4.1 (*Kouider et Mahéo [16]*).

L'inégalité du théorème 2.4.1 reste aussi valable si le système b -dominant de G n'est pas un ensemble stable et $2 \leq \varphi(G) < \varphi(H)$.

Affif Chaouche et Berrachedi [3] se sont inspirés du théorème 2.4.1, pour énoncer la proposition suivante, qui permet d'établir des bornes inférieures de plusieurs graphes de Hamming et de Hamming généralisés.

Proposition 2.4.2 (*Affif Chaouche et Berrachedi [3]*).

Soient G et H deux graphes tels que G (respectivement H) admet un $b(G)$ -système stable dominant (respectivement un $b(H)$ -système stable dominant), alors $G \square H$ admet une $(b(G) + (b(H) - 1))$ -coloration dominante. De plus, ce graphe admet un système stable dominant. Ainsi $\varphi(G \square H) \geq b(G) + b(H) - 1$.

Remarque 2.4.2 (*Affif Chaouche et Berrachedi [3]*).

L'inégalité de la proposition précédente reste aussi valable si le système b -dominant de G n'est pas un ensemble stable et $2 \leq b(G) < b(H)$.

Le nombre b -chromatique du produit cartésien de quelques graphes tels que $K_{1,n} \square K_{1,n}$ et $K_{1,n} \square P_k$, a été étudié par Kouider et Mahéo [16].

Proposition 2.4.3 (*Kouider et Mahéo [16]*).

Si $K_{1,n}$ et P_k sont respectivement des graphes complets bipartis à $n+1$ sommets et une chaîne de k sommets, alors :

- a) $\varphi(K_{1,n} \square K_{1,n}) = n + 2$ si $n \geq 2$.
- b) $\varphi(K_{1,n} \square P_k) = \min(k, n + 3)$, $n \geq 3$, $k \geq 4$ sauf les cas $k = n + 3$, $k = n + 4$, où $\varphi(K_{1,n} \square P_k) = n + 2$.

Pour le cas des graphes $C_n \square C_{n'}$, $C_n \square P_k$ et $P_k \square P_{k'}$, nous obtenons :

Corollaire 2.4.1 (*Kouider et Mahéo [16]*).

Soient $n, n' \geq 6$ et $k, k' \geq 7$, on a :

$$\varphi(C_n \square C_{n'}) = \varphi(C_n \square P_k) = \varphi(P_k \square P_{k'}) = 5$$

Le cas des hypercubes est donné par le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.2 (*Kouider et Mahéo [16]*).

$\varphi(Q_1) = \varphi(Q_2) = 2$ et $\varphi(Q_n) = n + 1$, $\forall n \geq 3$.

Proposition 2.4.4 (*Omoomi et Javadi [20]*).

Soient G et H deux graphes. Si H' est le graphe obtenu à partir de H en substituant une arête de H par une chaîne de longueur 3, alors :

$$\varphi(G \square H') \geq \varphi(G \square H)$$

A partir de la proposition 2.4.4, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.3 (*Omoomi et Javadi [20]*).

Soient m et n des entiers positifs non nuls, on a

$$\varphi(K_m \square C_{n+2}) \geq \varphi(K_m \square C_n) \text{ et } \varphi(K_m \square P_{n+2}) \geq \varphi(K_m \square C_n).$$

Une *coloration propre partielle* de G est une assignation de couleurs pour quelques sommets de G tels que deux sommets adjacents possèdent deux couleurs différentes.

Omoomi et Javadi [20] se sont, eux aussi, intéressés à la b -coloration d'autres produits cartésiens de graphes tels que $K_m \square C_n$ et $K_m \square P_n$. Ils ont donné des valeurs exactes de ce paramètre pour ces graphes. Ils ont d'abord proposé des algorithmes de colorations partielles pour le graphe $K_m \square C_n$, qui suivant les conditions du lemme 2.4.1, peuvent être étendues à des colorations propres.

Lemme 2.4.1 (*Omoomi et Javadi [20]*).

Soit G un graphe et m un entier positif avec $m \geq 2\Delta(G)$. Si c est une coloration propre partielle du graphe $K_m \square G$ par m couleurs telle que toute colonne n'admet pas de sommets non coloriés ou bien que toute colonne admet au moins $2\delta(G)$ sommets non coloriés. Alors, on peut étendre la coloration propre partielle c de $K_m \square G$ par m couleurs.

Théorème 2.4.2 (*Omoomi et Javadi [20]*).

Pour tous entiers $n, m \geq 4$

$$\varphi(K_m \square C_n) = \begin{cases} m & \text{si } m \leq 2n. \\ m + 1 & \text{si } m = 2n - 1. \\ m + 2 & \text{si } m \leq 2n - 2. \end{cases}$$

Pour le cas du nombre b -chromatique du graphe $K_m \square P_n$, un algorithme de coloration avec $\varphi(G)$ couleurs est donné.

Théorème 2.4.3 (*Omoomi et Javadi [20]*).

Pour tout entiers $n, m \geq 4$

$$\varphi(K_m \square P_n) = \begin{cases} m & \text{si } m \leq 2n - 2. \\ m + 1 & \text{si } 2n - 5 \leq m \leq 2n - 3. \\ m + 2 & \text{si } m \leq 2n - 6. \end{cases}$$

Dans le cas du produit cartésien d'un graphe biparti avec une chaîne ou un cycle, des bornes inférieures du nombre b -chromatique sont données.

Théorème 2.4.4 (*Faik[8]*).

Soit $G = (U \cup V, E)$ un graphe biparti tel que $b(G) \geq 3$ et soit P_n une chaîne d'ordre n . Si $n \geq 5$, alors :

$$\varphi(G \square P_n) \geq \varphi(G) + 2.$$

Proposition 2.4.5 (*Faik*[8]).

Soit $G = (U \cup V, E)$ un graphe biparti tel que $b(G) \geq 3$ et soit C_n un cycle d'ordre n .

Si $n \geq 5$, alors :

$$\varphi(G \square C_n) \geq \varphi(G) + 2.$$

2.5 La b -coloration du graphe $K_n \square K_p$

Dans cette section nous nous intéresserons à la b -coloration du graphe $K_n \square K_p$.

On sait que :

$$\chi(K_n \square K_p) \geq n$$

et

$$\Delta(K_n \square K_p) = n + p - 2.$$

En appliquant l'inégalité (2.1), on obtient :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_p) \leq n + p - 1. \quad (2.4)$$

Donner une coloration pour le graphe $K_n \square K_p$ revient à affecter à toute case du tableau $n \times p$ une couleur, de sorte que dans toute ligne une couleur ne peut pas figurer plus d'une fois. De même, que dans toute colonne une couleur ne peut pas apparaître plus d'une fois,

Lemme 2.5.1.

Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_p$ par $n + p - 1$ couleurs. Si les sommets (i, j) et (i, t) sont des sommets b -dominants dans la coloration c , alors il n'y a aucun autre sommet b -dominant dans les colonnes j et t .

Preuve.

$K_n \square K_p$ est un graphe régulier de degré $n + p - 2$. Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_p$ par $n + p - 1$ couleurs.

Si le sommet (x, y) est un sommet b -dominant dans la coloration c , alors ses $n + p - 2$ sommets voisins ont tous des couleurs différentes. Donc les couleurs des sommets de la ligne x et de la colonne y sont différentes.

Supposons qu'il existe trois sommets b -dominants (i, j) , (i, t) et (i', j) avec $i \neq i'$: les couleurs des sommets de la ligne i et de la colonne t sont toutes différentes.

Sans perte de généralités, posons $c(i', t) = a$. Alors aucun sommet de la ligne i ne possède la couleur a . Comme le sommet (i, j) est b -dominant, alors dans la colonne j la couleur a doit nécessairement apparaître. Il apparaît une contradiction car dans la ligne i' et la colonne j il existe déjà un sommet de couleur a .

On en déduit alors que si les sommets (i, j) et (i, t) sont des sommets b -dominants dans la coloration c , alors les colonnes i et t ne contiennent pas un sommet b -dominant.

□

Théorème 2.5.1.

Soient n et p des entiers positifs non nuls tels que $n, p \geq 2$, on a :

$$\varphi(K_n \square K_p) \leq n + p - 2$$

Preuve.

D'après (2.1) :

$$\varphi(K_n \square K_p) \leq n + p - 1.$$

Supposons que

$$\varphi(K_n \square K_p) = n + p - 1$$

et considérons une b -coloration c avec $n + p - 1$ couleurs.

Il est évident qu'une ligne quelconque de $(K_n \square K_p)$ contient au moins deux sommets b -dominants ou bien au plus un sommet b -dominant. Soient s et r deux entiers positifs.

Sans perte de généralités, supposons que :

- i)* les r premières lignes ont au moins deux sommets b -dominants.
- ii)* les lignes de $r + 1$ à n ont au plus un sommet b -dominant.
- iii)* les sommets b -dominants des r premières lignes sont dans les s premières colonnes.

D'après le lemme 2.5.1, pour toute colonne j telle que $1 \leq j \leq s$, il n'existe qu'un seul sommet b -dominant.

Par ailleurs, le nombre de sommets b -dominants dans la coloration c est

$$S \leq s + (n - r)$$

- si $r = 0$ on a alors au plus n sommets b -dominants. Contradiction car $n < n+p-1$.
- si $s = p$ on a alors exactement p sommets b -dominants. Contradiction car $n < n + p - 1$.
- si $r > 0$ et $s < p$, dans ce cas le nombre de sommets b -dominants est au plus $s + (n - r)$.

On obtient :

$$s + (n - r) \leq n + p - 1 - r < n + p - 1$$

D'où la contradiction.

On déduit alors que :

$$\varphi(K_n \square K_p) \neq n + p - 1$$

Par conséquent :

$$\varphi(K_n \square K_p) \leq n + p - 2.$$

□

Kouider et Mahéo [16], ont montré que le nombre b -chromatique du produit cartésien des graphes complets $K_n \square K_p$ vérifie l'inégalité :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_p) \leq p(p - 1) \quad \text{si} \quad p \leq n < p(p - 1).$$

La borne donnée dans le théorème 2.5.1 améliore ce résultat dans le cas où

$$n < (p - 1)^2 + 1.$$

En effet,

$$p(p - 1) \leq n + p - 2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1 + (p - 1)^2.$$

On peut alors énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 2.5.1. [1]

Soient n et p deux entiers positifs non nuls.

on a :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varphi(K_n \square K_p) \leq n + p - 2 & \text{si} & n < (p - 1)^2 + 1 \\ n \leq \varphi(K_n \square K_p) \leq p(p - 1) & \text{si} & (p - 1)^2 + 1 \leq n < p(p - 1) \\ \varphi(K_n \square K_p) = n & \text{si} & n \geq p(p - 1) \end{array} \right.$$

Remarque 2.5.1.

Le cas où $n = p$ a été traité par Omoomi et Javadi [20]. Il a été démontré que :

$$2n - 3 \leq \varphi(K_n \square K_n) \leq 2n - 2.$$

De plus, ces auteurs ont proposé la conjecture suivante :

Conjecture 2.5.1 (Omoomi et Javadi [20]).

Pour tout entier positif $n \geq 5$,

$$\varphi(K_n \square K_n) = 2n - 3.$$

2.6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons réalisé une mise au point bibliographique qui nous a permis de situer le thème de notre recherche et de circonscrire les objectifs de notre travail. Nous avons notamment défini le paramètre du nombre b -chromatique et rappelé quelques résultats connus dans la littérature pour ce paramètre. Ceci nous a permis d'attribuer une borne pour le graphe $K_n \square K_p$.

Chapitre 3

b -coloration du produit cartésien de graphes

3.1 Introduction

Etant donné deux graphes G_1 et G_2 où $|V(G_1)| = n$ et $|V(G_2)| = p$, nous considèrerons dans tout ce qui suit, l'ensemble des sommets du graphe $G_1 \square G_2$, comme étant un tableau $n \times p$, dans lequel, la case (i, j) correspond au sommet (u_i, v_j) , avec $u_i \in V(G_1)$ et $v_j \in V(G_2)$. Toute colonne de ce tableau induit une copie du graphe G_1 et toute ligne induit une copie du graphe G_2 .

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude de la b -coloration du produit cartésien d'un graphe complet avec des graphes bipartis complets $K_{1,p}$, $K_{2,p}$ et $K_{p,p}$.

Proposition 3.1.1 (*Omoomi et Javadi [20]*).

Soit c une b -coloration du graphe $K_m \square G$ par φ couleurs, avec $\varphi > m$.

Si $v \in V(G)$, alors la colonne correspondant au sommet v , contient au plus $d_G(v)$ sommets b -dominants.

Preuve.

Si $\varphi > m$ et v est un sommet de G , alors dans la b -coloration c , il y a au moins une couleur qui n'apparaît pas dans la colonne correspondant au sommet v . Notons cette colonne par K_m^v .

Les couleurs manquantes doivent obligatoirement apparaître dans les voisins de tous les sommets b -dominants dans K_m^v . Ces couleurs sont nécessairement présentes dans les différentes autres colonnes K_m^u et donc le nombre de sommets b -dominants dans K_m^v est au plus $d_G(v)$. \square

Si $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ est une séquence de degré du graphe G ayant n sommets, d'après la proposition 3.1.1 dans le graphe $K_m \square G$ toute colonne, notée $K_m^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, contient au plus d_i sommets b -dominants. Donc tout système b -dominant de G contient au plus $\sum_{i=1}^n d_i$ sommets. Ceci permet d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1 (*Omoomi et Javadi [20]*).

Si $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ est une séquence de degré du graphe G avec n sommets et e arêtes, alors

$$\varphi(K_m \square G) \leq \sum_{i=1}^n d_i = 2e.$$

3.2 Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{1,p}$

Dans cette section nous déterminerons la valeur exacte de $\varphi(K_n \square K_{1,p})$.

On sait que :

$$\chi(K_n \square K_{1,p}) \geq n$$

et que

$$\Delta(K_n \square K_{1,p}) = n + p - 1.$$

D'après (2.1), on obtient :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_{1,p}) \leq n + p \tag{3.1}$$

Théorème 3.2.1. [1]

Soient n et p deux entiers positifs non nuls, tels que $n, p \geq 3$.

On a :

$$\varphi(K_n \square K_{1,p}) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 2p \\ n + 1 & \text{si } n < 2p \end{cases}$$

Preuve.

◇ Soit $n \geq 2p$:

D'après le corollaire 3.1.1,

$$\varphi(K_n \square K_{1,p}) \leq \sum_{i=1}^n d_{K_{1,p}}(v_i) = 2p \leq n.$$

D'autre part et d'après (3.1),

$$\varphi(K_n \square K_{1,p}) \geq n.$$

D'où

$$\varphi(K_n \square K_{1,p}) = n.$$

◇ Soit $n < 2p$:

Dans ce cas, on a :

$$\varphi(K_n \square K_{1,p}) \leq n + 1.$$

car dans le graphe $K_n \square K_{1,p}$ il y a n sommets de degré $n + p - 1$ et le reste (soit np) de degré n .

Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_{1,p}$ par $n + 1$ couleurs définie comme suit :

Si $n > p$:

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } (i, j) = (i, 1), \quad 1 \leq i \leq n. \\ c(i, j - 1) + 1 & \text{si } c(i, j - 1) \leq n, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 2 \leq j \leq p. \\ 2 & \text{si } c(i, j - 1) = n + 1, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 2 \leq j \leq p. \\ n + 1 & \text{si } (i, j) = (1, p + 1). \\ i + 1 & \text{si } (i, j) = (i, p + 1), \quad 2 \leq i \leq n - 1. \\ 2 & \text{si } (i, j) = (n, p + 1). \end{cases}$$

La coloration c ainsi définie est une coloration dominante pour le graphe $K_n \square K_{1,p}$. L'ensemble $S = \{(1, j); \quad 1 \leq j \leq p + 1, \quad (i, 1); \quad p + 1 \leq i \leq n\}$ est son système b -dominant.

Dans la figure (3.1)(a), nous donnons un exemple de coloration pour le graphe $K_6 \square K_{1,4}$.

Les sommets b -dominants sont $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (5, 1), (6, 1)\}$

Si $n \leq p$:

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } (i, j) = (i, 1), \quad 1 \leq i \leq n \\ c(i, j-1) + 1 & \text{si } c(i, j-1) \leq n, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 2 \leq j \leq n \\ 2 & \text{si } c(i, j-1) = n+1, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 2 \leq j \leq n \\ n+1 & \text{si } (i, j) = (1, j); \quad n+1 \leq j \leq p+1 \\ i+1 & \text{si } 2 \leq i \leq n-1 \text{ et } n+1 \leq j \leq p+1 \\ 2 & \text{si } (i, j) = (n, j), \quad n+1 \leq j \leq p+1 \end{cases}$$

Dans ce cas le système b -dominant est $S = \{(1, j); \quad 1 \leq j \leq n+1\}$.

L'exemple de la figure (3.1)(b) correspond à $n = 6$ et $p = 7$. Son système b -dominant est $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)\}$ \square

1*	2*	3*	4*	7*
2	3	4	5	3
3	4	5	6	4
4	5	6	7	5
5*	6	7	2	6
6*	7	2	3	2

(a) $K_6 \square K_{1,4}$

1*	2*	3*	4*	5*	6*	7*	7
2	3	4	5	6	7	3	3
3	4	5	6	7	2	4	4
4	5	6	7	2	3	5	5
5	6	7	2	3	4	6	6
6	7	2	3	4	5	2	2

(b) $K_6 \square K_{1,7}$

FIG. 3.1:

Remarque 3.2.1.

- * Pour $n = 1$ ou $p = 1$, on a : $\varphi(K_1 \square K_{1,p}) = 2$ et $\varphi(K_n \square K_{1,1}) = n$ si $n \neq 1$.
- * Pour $n = 2$ ou $p = 2$, on a : $\varphi(K_n \square K_{1,2}) = n$, $\varphi(K_2 \square K_{1,p}) = 3$ si $p \geq 2$.

3.3 Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{2,p}$

Dans cette section nous déterminerons la valeur exacte de $\varphi(K_n \square K_{2,p})$.

On sait que :

$$\chi(K_n \square K_{2,p}) \geq n$$

et que

$$\Delta(K_n \square K_{2,p}) = n + p - 1.$$

D'après (2.1), on obtient :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq n + p. \quad (3.2)$$

Lemme 3.3.1. [1]

Soient n et p deux entiers positifs non nuls. Si $\varphi(K_n \square K_{2,p}) \geq n + 3$, alors tous les sommets b -dominants sont dans les deux premières colonnes du graphe $K_n \square K_{2,p}$.

Preuve.

Dans le graphe $K_n \square K_{2,p}$, il y a exactement $2n$ sommets dans les deux premières colonnes de degré $n + p - 1$, le reste des sommets est de degré $n + 1$. \square

Lemme 3.3.2. [1]

Soient n et p deux entiers positifs non nuls tels que $p \leq n < 4p$. On a :

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \geq n + 2$$

Preuve.

On propose une b -coloration c du graphe $K_n \square K_{2,p}$ par $(n + 2)$ -couleurs.

Soit $c : V(K_n \square K_{2,p}) \longrightarrow \{1, 2, \dots, n + 2\}$ représenté par :

$$c(i, j) = \begin{cases} j & si \quad (i, j) = (1, j), \quad 1 \leq j \leq p \\ n + 1 & si \quad (i, j) = (1, p + 1) \\ n + 2 & si \quad (i, j) = (1, p + 2) \\ 2 & si \quad (i, j) = (2, 1) \\ 1 & si \quad (i, j) = (2, 2) \\ i & si \quad 3 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq 2 \\ c(i - 1, j) + 1 & si \quad 2 \leq i \leq n, \quad 3 \leq j \leq p + 2, \\ & c(i - 1, j) \leq n + 1, (i, j) \neq (n, p + 1), (i, j) \neq (2, p + 1) \\ 3 & si \quad 2 \leq i \leq n, \quad 3 \leq j \leq p + 2, \\ & c(i - 1, j) = n + 2, (i, j) \neq (n, p + 1), (i, j) \neq (2, p + 1) \\ n + 2 & si \quad (i, j) = (n, p + 1) \\ 3 & si \quad (i, j) = (2, p + 1) \end{cases}$$

La coloration c ainsi proposée est une coloration propre. En effet, dans toute colonne j tous les sommets ont des couleurs différentes et dans toute ligne i , les deux premiers sommets ont des couleurs différentes par rapport aux p derniers sommets.

Le système b -dominant est $S = \{(1, j); 1 \leq j \leq p + 2, (i, 1); p + 1 \leq i \leq n\}$.

Un exemple est donné dans la figure (3.2) où $n = 7$ et $p = 4$. Le système b -dominant est $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (5, 1), (6, 1), (7, 1)\}$

□

1*	2*	3*	4*	8*	9*
2	1	4	5	3	3
3	3	5	6	4	4
4	4	6	7	5	5
5*	5	7	8	6	6
6*	6	8	9	7	7
7*	7	9	3	9	8

FIG. 3.2: $K_7 \square K_{2,4}$

Considérons le cas où $K_n \square K_{2,p}$ admet une b -coloration tel que $\varphi(K_n \square K_{2,p}) \geq n + 3$. D'après le lemme 3.3.1, tous les sommets b -dominants sont dans les deux premières colonnes.

Notations :

Nous utiliserons les notations suivantes :

- ◇ m est le nombre de lignes où les deux premiers sommets sont b -dominants.
- ◇ k est le nombre de lignes où seulement le premier sommet est b -dominant.
- ◇ k' est le nombre de lignes où seulement le deuxième sommet est b -dominant.
- ◇ $n - m - k - k'$ est le nombre de lignes où il n'existe aucun sommet b -dominant dans les deux premières colonnes.

Sans perte de généralités, on suppose que :

- ◇ Les lignes de 1 à m ont deux sommets b -dominants.
- ◇ Les lignes de $m + 1$ à $m + k$ ont uniquement le premier sommet b -dominant.
- ◇ Les lignes de $m + k + 1$ à $m + k + k'$ ont uniquement le deuxième sommet b -dominant.
- ◇ Les lignes de $m + k + k' + 1$ à $n - m - k - k'$ n'ont aucun sommet b -dominant.

Lemme 3.3.3. [1]

Soient n et p deux entiers positifs, tels que $n \geq p \geq 3$.

Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_{2,p}$ par φ couleurs, et S son système b -dominant.

Si

- ◇ $m > 0$, $k = 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' > 0$.

ou bien

- ◇ $m > 0$, $k > 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' > 0$.

ou bien

- ◇ $m > 0$, $k > 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' = 0$.

alors $\varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq n + 2$.

Preuve.

Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_{2,p}$ par φ couleurs.

Supposons que $\varphi \geq n + 3$.

Dans ce cas tous les sommets b -dominants sont dans les 2 premières colonnes (lemme 3.3.1).

Cas 1 : $m > 0$, $k = 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' > 0$.

Dans ce cas :

$$\varphi = 2m.$$

Tous les sommets b -dominants de la première colonne (respectivement, la deuxième colonne) doivent être reproduits dans la deuxième colonne (respectivement, la première colonne), d'où

$$2m \leq n.$$

En remplaçant $2m$ par φ , on obtient :

$$\varphi \leq n.$$

Ceci constitue une contradiction car $\varphi \geq n + 3$.

D'où si $m > 0$, $k = 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' > 0$, alors $\varphi \leq n + 2$.

Cas 2 : $m > 0$, $k > 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' > 0$.

Dans ce cas :

$$\varphi = 2m + k.$$

D'où

$$2m = \varphi - k.$$

Tous les sommets b -dominants de la deuxième colonne doivent être reproduits dans la première colonne, donc :

$$m \leq n - m - k.$$

Ainsi

$$2m \leq n - k.$$

Comme $2m = \varphi - k$, on obtient :

$$\varphi - k \leq n - k.$$

Par conséquent

$$\varphi \leq n.$$

Ceci constitue une contradiction car $\varphi \geq n + 3$.

On conclue alors que, si $m > 0$, $k > 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' > 0$, alors $\varphi \leq n + 2$.

Cas 3 : $m > 0$, $k > 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' = 0$.

Dans ce cas tous les sommets de la première colonne sont b -dominants. Il apparaît

clairement que les m sommets b -dominants de la deuxième colonne ne peuvent être reproduits, ni dans la première colonne, ni dans les m premiers sommets des p dernières colonnes.

Donc les m sommets de la première colonne, ont des couleurs voisines manquantes, d'où la contradiction car ces sommets sont des sommets b -dominants.

Ainsi, si $m > 0$, $k > 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' = 0$, alors $\varphi \leq n + 2$. \square

Théorème 3.3.1. [1]

Soient n et p deux entiers positifs, tels que $n \geq 9$ et $p \geq 6$.

On a :

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 4p \\ n + 2 & \text{si } n < p \\ \lceil \frac{4n}{3} \rceil & \text{si } p \leq n < \frac{3p}{2} \\ 2p & \text{si } \frac{3p}{2} \leq n \leq 2p - 3 \\ n + 2 & \text{si } 2p - 2 \leq n < 4p \end{cases}$$

Preuve.

Posons :

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) = \varphi$$

◇ Soit $n \geq 4p$:

D'après le corollaire 3.1.1

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq 4p \leq n.$$

D'après (3.2),

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \geq n.$$

Par conséquent

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) = n.$$

Rappelons que dans le graphe $K_n \square K_{2,p}$ il y a exactement $2n$ sommets de degré $n+p-1$ et le reste $(pn-1)$ de degré $n+1$.

◇ Soit $n < 4p$:

1. Si $2n < n+p$ alors $n < p$:

Dans ce cas il y a au moins un sommet b -dominant dans les p dernières colonnes. Comme tous les sommets de ces colonnes sont de degré $n+1$, alors :

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq n+2.$$

Une $(n+2)$ -coloration dominante c est donnée ci-dessous pour le graphe $K_n \square K_{2,p}$:

$$c(i, j) = \begin{cases} n+j & \text{si } (i, j) = (1, j), \quad 1 \leq j \leq 2 \\ j-2 & \text{si } (i, j) = (1, j), \quad 3 \leq j \leq n+2 \\ 1 & \text{si } (i, j) = (1, j), \quad n+3 \leq j \leq p+2 \\ 1 & \text{si } (i, j) = (i, i+2), \quad 2 \leq i \leq n \\ i & \text{si } 2 \leq i \leq n, \quad 3 \leq j \neq i+2 \leq p+2 \\ n+2 & \text{si } (i, j) = (2, 1) \\ n+1 & \text{si } (i, j) = (2, 2) \\ i-1 & \text{si } 1 \leq j \leq 2, \quad 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

Cette coloration est propre dominante avec $n+2$ couleurs. Le système b -dominant S est $S = \{(1, j); \quad 1 \leq j \leq n+2\}$.

On conclue que si $n < p$ alors $\varphi(K_n \square K_{2,p}) = n+2$.

Dans la figure (3.3), une 6-coloration dominante est donnée pour le graphe $K_4 \square K_{2,5}$.

Le système b -dominant associé est $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$.

2. Si $2n \geq n+p$ alors $n \geq p$:

Dans ce cas tous les sommets b -dominants sont dans les deux premières colonnes.

D'après la proposition 3.1.1, on a

$$\varphi \leq 2p \tag{3.3}$$

De plus, d'après (3.2),

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq n+p.$$

5^*	6^*	1^*	2^*	3^*	4^*	1
6	5	2	1	2	2	2
2	2	3	3	1	3	3
3	3	4	4	4	1	4

 FIG. 3.3: $K_4 \square K_{2,5}$

Il existe alors au moins m lignes telles que les deux premiers sommets sont b -dominants.

Trois cas apparaissent :

1. $m > 0, k = 0, k' = 0$ et $n - m - k - k' > 0$.
2. $m > 0, k > 0, k' = 0$ et $n - m - k - k' \geq 0$.
3. $m > 0, k > 0, k' > 0$ et $n - m - k - k' \geq 0$.

Cas.1 : $m > 0, k = 0, k' = 0$ et $n - m - k - k' > 0$.

D'après le lemme 3.3.2 et le lemme 3.3.3, on a :

$$\varphi = n + 2.$$

Cas.2 : $m > 0, k > 0, k' = 0$ et $n - m - k - k' \geq 0$.

D'après le lemme 3.3.2 et le lemme 3.3.3, on a :

$$\varphi = n + 2.$$

Cas.3 : $m > 0, k > 0, k' > 0$ et $n - m - k - k' \geq 0$.

Dans ce cas,

$$\varphi = 2m + k + k'$$

Il vient alors :

$$k + k' = \varphi - 2m$$

Tous les sommets b -dominants de la première colonne (respectivement de la deuxième colonne) doivent être reproduits dans la deuxième colonne (respectivement de la première colonne), et par conséquent

$$m \leq n - m - k \quad \text{ainsi} \quad 2m \leq n - k \quad (3.4a)$$

$$m \leq n - m - k' \quad \text{ainsi} \quad 2m \leq n - k' \quad (3.4b)$$

De (3.4a)+(3.4b), on tire :

$$4m \leq 2n - (k + k')$$

En remplaçant, $k + k'$ par $\varphi - 2m$, on obtient

$$2m \leq 2n - \varphi. \quad (3.5)$$

Comme,

$$m + k + k' \leq n$$

Alors :

$$k + k' \leq n - m$$

En remplaçant, $k + k'$ par $\varphi - 2m$, on obtient

$$\varphi - 2m \leq n - m.$$

Alors :

$$\varphi - n \leq m. \quad (3.6)$$

De (3.5) et (3.6) on obtient :

$$\varphi - n \leq \frac{2n - \varphi}{2}.$$

Ainsi,

$$\varphi \leq \frac{4n}{3}. \quad (3.7)$$

De (3.3) et (3.7), on conclue que :

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq \min \left\{ \frac{4n}{3}, 2p \right\}.$$

Comme, d'après le lemme 3.3.2, on a

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \geq n + 2.$$

Alors,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq \frac{4n}{3} & \text{si } p \leq n < \frac{3p}{2} \\ \varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq 2p & \text{si } \frac{3p}{2} \leq n \leq 2p - 2 \end{array} \right.$$

Le résultat précédent est meilleur dans le cas où $\varphi \geq n + 3$, car il existe déjà une

$(n + 2)$ -coloration dominante (lemme 3.3.2). On obtient alors

$$\begin{cases} \varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq \frac{4n}{3} & \text{si } p \leq n < \frac{3p}{2} \\ \varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq 2p & \text{si } \frac{3p}{2} \leq n \leq 2p - 3 \end{cases}$$

* Si $p \leq n < \frac{3p}{2}$:

On propose la b -coloration c par $\lceil \frac{4n}{3} \rceil$ couleurs pour le graphe $K_n \square K_{2,p}$ suivante :

Pour les lignes de 1 à $\lceil \frac{n}{3} \rceil$:

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } (i, j) = (i, 1) \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + i & \text{si } (i, j) = (i, 2), \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + j - (i + 1) & \text{si } 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i \leq p + 1 \text{ et } i + 2 \leq j \leq 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i + 1 \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + j - (i + 1) & \text{si } 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i > p + 1 \text{ et } i + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + j + p - (i + 1) & \text{si } 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i > p + 1 \text{ et } 3 \leq j \leq 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i - p + 1 \\ i + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les lignes de $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ à $2\lceil \frac{n}{3} \rceil$:

$$c(i, j) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil + i & \text{si } (i, j) = (i, 1) \\ i - \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{si } (i, j) = (i, 2), \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + j - (i + 1) & \text{si } 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i \leq p + 1 \text{ et } \lceil \frac{n}{3} \rceil + i + 2 \leq j \leq 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i + 1 \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + j - (i + 1) & \text{si } 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i > p + 1 \text{ et } \lceil \frac{n}{3} \rceil + i + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + j + p - (i + 1) & \text{si } 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i > p + 1 \text{ et } 3 \leq j \leq 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + i - p + 1 \\ & \text{et } 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + j + p - (i + 1) \geq 3\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 \\ i - \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les lignes de $2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ à $3\lceil \frac{n}{3} \rceil$:

$$c(i, j) = \begin{cases} i - \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{si } (i, j) = (i, 1) \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + i & \text{si } (i, j) = (i, 2), \\ 3\lceil \frac{n}{3} \rceil + j - (i + 1) & \text{si } i \leq p + 1 \text{ et } i - \lceil \frac{n}{3} \rceil + 2 \leq j \leq i + 1 \\ 3\lceil \frac{n}{3} \rceil + j - (i + 1) & \text{si } i > p + 1 \text{ et } i - \lceil \frac{n}{3} \rceil + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 3\lceil \frac{n}{3} \rceil + j + p - (i + 1) & \text{si } i > p + 1 \text{ et } 3 \leq j \leq i - p + 1 \\ 1 & \text{si } i - p + 2 \leq j \leq i - \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 \text{ et } i = \lceil \frac{n}{3} \rceil \\ i - \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les lignes de $3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ à n :

$$c(i, j) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + i & \text{si } (i, j) = (i, 1) \text{ et } (i, j) = (i, 2), \\ 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + j - (i + 1) & \text{si } i \leq p + 1 \text{ et } i - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2 \leq j \leq i + 1 \\ 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + j - (i + 1) & \text{si } i > p + 1 \text{ et } i - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + j + p - (i + 1) & \text{si } i > p + 1 \text{ et } 3 \leq j \leq i - p + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 \\ 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + j - (i + 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette coloration est une coloration propre dominante et le système b -dominant est :

$$S = \{(i, 1); 1 \leq i \leq 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, (i, 2); 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 \leq i \leq n\}.$$

Dans la figure (3.4) par exemples on donne une 13-coloration propre dominante pour le graphe $K_{10} \square K_{2,8}$. Le système b -dominant correspond à l'ensemble des sommets portant les étiquettes $\{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*\}$.

1*	4*	7	8	9	10	11	12	2	2
2*	5*	3	7	8	9	10	11	12	3
3*	6*	4	4	7	8	9	10	11	12
7*	1	12	2	2	2	2	2	10	11
8*	2	11	12	3	3	3	3	3	10
9*	3	10	11	12	4	4	4	4	4
4	10*	5	5	5	7	8	9	5	5
5	11*	6	6	6	6	7	8	9	6
6	12*	1	1	1	1	1	7	8	9
13	13*	9	10	11	12	5	6	7	8

FIG. 3.4: $K_{10} \square K_{2,8}$

* Si $\frac{3p}{2} \leq n \leq 2p - 3$:

Pour le graphe $K_n \square K_{2,p}$, on propose la b -coloration c par $2p$ couleurs suivante :

Pour les lignes de 1 à $2p - n$:

$$c(i, j) = \left\{ \begin{array}{lll} i & \text{si} & (i, j) = (i, 1) \\ 2p - n + i & \text{si} & (i, j) = (i, 2), \\ 2(2p - n) + j - (i + 1) & \text{si} & i + 2 \leq j \leq 2p - n + i + 1 \\ p + j - (i + 1) & \text{si} & 2(2p - n) + i \leq p + 1 \\ & & \text{et } 2p - n + i + 2 \leq j \leq 2(2p - n) + i + 1 \\ p + j - (i + 1) & \text{si} & 2(2p - n) + i > p + 1 \\ & & 2p - n + i + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 2p + j - (i + 1) & \text{si} & 2(2p - n) + i > p + 1 \\ & & \text{et } 3 \leq j \leq 2(2p - n) - p + i + 1 \\ i + 1 & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

Pour les lignes de $2p - n + 1$ à p :

$$c(i, j) = \left\{ \begin{array}{lll} 2p - n + i & \text{si} & (i, j) = (i, 1) \\ 2p - n + i & \text{si} & (i, j) = (i, 2) \text{ et } 2(2p - n) + 1 \leq i \leq p \\ i - 2p + n & \text{si} & (i, j) = (i, 2) \text{ et } 2p - n + 1 \leq i \leq 2(2p - n) \\ p + j - (i + 1) & \text{si} & 2(2p - n) + i \leq p + 1 \\ & & \text{et } 2p - n + i + 2 \leq j \leq 2(2p - n) + i + 1 \\ p + j - (i + 1) & \text{si} & 2(2p - n) + i > p + 1 \\ & & \text{et } 2p - n + i + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 2p + j - (i + 1) & \text{si} & 2(2p - n) + i > p + 1 \text{ et } 3 \leq j \leq 2(2p - n) - p + i + 1 \\ & & \text{et } 2p + j - (i + 1) \geq 3p - n + 1 \\ i - 2p + n + 1 & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

Pour les lignes de $2(2p - n) + 1$ à n :

$$c(i, j) = \left\{ \begin{array}{lll} i + p - n & si & (i, j) = (i, 1) \text{ et } p + 1 \leq i \leq 3p - n \\ 2p - n + i & si & (i, j) = (i, 2) \text{ et } p + 1 \leq i \leq n \\ 2p - n + i & si & (i, j) = (i, 1) \text{ et } 3p - n + 1 \leq i \leq n \\ 3p - n + j - (i + 1) & si & 3p - 2n + i \leq p + 1 \\ & & \text{et } i + 2 - (n - p) \leq j \leq 3p - 2n + i + 1 \\ 3p - n + j - (i + 1) & si & 3p - 2n + i > p + 1 \\ & & i + 2 - (n - p) \leq j \leq p + 2 \\ 4p - n + j - (i + 1) & si & 3p - 2n + i > p + 1 \\ & & \text{et } 3 \leq j \leq 2p - 2n + i + 1 \\ 1 & si & i = 3(2p - n) \text{ et } 8p - 5n > 0 \\ & & \text{et } 8p - 5n + 2 \leq j \leq 7p - 4n + 1 \\ 1 & si & i = 3(2p - n) \text{ et } 8p - 5n \leq 0 \\ & & \text{et } 3 \leq j \leq 7p - 4n + 1 \text{ et } 9p - 5n + 2 \leq j \leq p + 2 \\ n - p + i & si & i - (n - p) - 1 > p \text{ et } 3 \leq j \leq i - (n - p) + 1 \\ & & \text{et } 3p - 2n + i + 2 \leq j \leq p + 2 \\ & & \text{et } 3(2p - n) + 1 \leq i \leq 3p - n \\ n - p + i & si & i - (n - p) - 1 \leq p \\ & & \text{et } 3(2p - n) + 1 \leq i \leq 3p - n \\ & & \text{et } 2p - 2n + i + 2 \leq j \leq i + 2 - (n - p) - 1 \\ 3p - 2n + i & si & i - (n - p) - 1 > p \text{ et } 3 \leq j \leq i + 2 - (n - p) - 1 \\ & & \text{et } 3p - 2n + i + 2 \leq j \leq p + 2 \\ & & \text{et } 3(2p - n) + 1 \leq i \leq 3p - n \\ 3p - 2n + i & si & i - (n - p) - 1 \leq p \\ & & \text{et } 2p - 2n + i + 2 \leq j \leq i + 1 - (n - p) \\ & & \text{et } 3p - n + 1 \leq i \leq n \\ i - 2p + n + 1 & sinon & \end{array} \right.$$

Le système b -dominant est $S = \{(i, 1); 1 \leq i \leq p, (i, 2); p + 1 \leq i \leq n\}$.

Dans la figure (3.5) est un exemple d'une telle coloration donnée pour le graphe $K_{11} \square K_{2,7}$. Le système b -dominant est l'ensemble des sommets portant les étiquettes i^* ,

$i = 1, 2, \dots, 14$.

□

1*	4*	7	8	9	11	12	13	2
2*	5*	3	7	8	9	11	12	13
3*	6*	13	4	7	8	9	11	12
7*	1	12	13	2	2	2	2	11
8*	2	11	12	13	3	3	3	3
9*	3	4	11	12	13	4	4	4
10*	10	5	5	11	12	13	5	5
4	11*	6	6	6	7	8	9	6
5	12*	1	1	1	1	7	8	9
6	13*	9	14	14	14	14	7	8
14	14*	8	9	10	10	10	10	7

FIG. 3.5: $K_{11} \square K_{2,7}$

Remarque 3.3.1.

* $\varphi(K_1 \square K_{2,1}) = 2$ et $\varphi(K_n \square K_{2,1}) = n$ si $n \neq 1$.

* si $2 \leq n \leq 8$ ou $2 \leq p \leq 5$ alors,

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 4p \\ n + 2 & \text{si } n < 4p \end{cases}$$

3.4 Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{p,p}$

Dans cette section nous nous intéresserons au nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{p,p}$.

On sait que :

$$\chi(K_n \square K_{p,p}) \geq n.$$

De plus, le graphe est régulier de degré $n + p - 1$.

En appliquant l'inégalité (2.1), on obtient :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq n + p. \quad (3.8)$$

Théorème 3.4.1.

Soient n et p des entiers positifs non nuls tels que $n \geq p$, on a :

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 2p^2 \\ n + p & \text{si } n \leq p(2p - 1) \\ 2p^2 & \text{si } p(2p - 1) \leq n < 2p^2 \end{cases}$$

Preuve.

◇ Soit $n \geq 2p^2$:

D'après le corollaire 3.1.1,

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq \sum_{i=1}^n d_i = 2p^2 \leq n.$$

D'autre part et d'après les inégalités (3.8),

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \geq n.$$

D'où

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) = n.$$

◇ Soit $n < 2p^2$:

D'après l'inégalité (3.8) :

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq n + p$$

De plus et d'après le corollaire 3.1.1 :

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq 2p^2$$

Alors

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq \begin{cases} n + p & \text{si } n \leq p(2p - 1) \\ 2p^2 & \text{si } p(2p - 1) \leq n < 2p^2 \end{cases}$$

* Si $n \leq p(2p - 1)$:

On propose pour le graphe $K_n \square K_{p,p}$ la b -coloration c par $n + p$ couleurs suivante :

Cas où $n+p$ est pair : On pose $s = \left\lceil \frac{n+p}{2p} \right\rceil$.

Pour la colonne 1 :

$$c(i, j) = \begin{cases} 2i & si & 1 \leq i \leq p+1 \\ 2[(i-p)p+1] & si & p+2 \leq i \leq p+s-1 \\ 2rp+4 & si & i = r(p-1) + s+1; \quad 1 \leq r \leq s-1 \\ 2p+1 & si & (i, j) = \left(\frac{n+p+2}{2}, 1\right) \\ c(i-1, j) + 2 & sinon \end{cases}$$

Pour les colonnes de 2 à p :

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & si & 1 \leq i \leq p; \quad c(i, j-1) \leq 2p-2 \\ 2 & si & 1 \leq i \leq p; \quad c(i, j-1) = 2p \\ c(i, j-1) + 2 & si & p+1 \leq i \leq p+s-1; \quad c(i, j-1) \leq n+p-2 \\ n+p & si & p+1 \leq i \leq p+s-1; \quad c(i, j-1) = n+p \\ c(i, j-1) + 2 & si & p+s \leq i \leq \frac{n+p}{2}; \\ & & c(i, j-1) \leq n+p-2 \text{ et } c(p+s-1, j) \neq c(i, j-1) + 2 \\ 2p+2 & si & p+s \leq i \leq \frac{n+p}{2}; \text{ et} \\ & & c(i, j-1) = n+p \text{ ou } c(p+s-1, j) = c(i, j-1) + 2 \\ c(i, j-1) & sinon \end{cases}$$

Pour la colonne $p+1$:

$$c(i, j) = \begin{cases} 2(i-1)p+1 & si & 1 \leq i \leq s \\ 3 & si & (i, j) = (s+1, p+1) \\ c(i-1, j) + 2 & si & s+2 \leq i \leq s+p-1 \\ 2rp+3 & si & i = r(p-1) + s+1; \quad 1 \leq r \leq s-1 \\ 2p+2 & si & (i, j) = \left(\frac{n+p+2}{2}, p+1\right) \\ c(i-1, j) + 2 & sinon \end{cases}$$

Pour les colonnes de $p + 2$ à $2p$:

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j - 1) + 2 & si & 1 \leq i \leq s; c(i, j - 1) \leq n + p - 3 \\ n + p - 1 & si & 1 \leq i \leq s; c(i, j - 1) = n + p - 1 \\ c(i, j - 1) + 2 & si & s + 1 \leq i \leq p + s - 1; c(i, j - 1) \leq 2p - 3 \\ 1 & si & s + 1 \leq i \leq p + s - 1; c(i, j - 1) = 2p - 1 \\ c(i, j - 1) + 2 & si & p + s \leq i \leq \frac{n+p}{2}; \\ & & c(i, j - 1) \leq n + p - 3 \text{ et } c(s, j) \neq c(i, j - 1) + 2 \\ 2p + 1 & si & p + s \leq i \leq \frac{n+p}{2}; \\ & & c(i, j - 1) = n + p - 1 \text{ ou } c(s, j) = c(i, j - 1) + 2 \\ c(i, j - 1) & sinon & \end{cases}$$

Cas où $n+p$ est impair : On pose $s = \left\lceil \frac{n+p-1}{2p} \right\rceil$, $t = \left\lceil \frac{n+p+1}{2p} \right\rceil$.

Pour la colonne 1 :

$$c(i, j) = \begin{cases} 2i & si & 1 \leq i \leq p + 1 \\ 2[(i - p)p + 1] & si & p + 2 \leq i \leq p + s - 1 \\ 2rp + 4 & si & i = r(p - 1) + s + 1; 1 \leq r \leq s - 1 \\ 2p + 3 & si & (i, j) = \left(\frac{n+p+1}{2}, 1\right) \\ 2p + 1 & si & (i, j) = \left(\frac{n+p+3}{2}, 1\right) \\ 2p + 5 & si & (i, j) = \left(\frac{n+p+5}{2}, 1\right) \\ c(i - 1, j) + 2 & sinon & \end{cases}$$

Pour la colonne $p + 1$:

$$c(i, j) = \begin{cases} 2(i - 1)p + 1 & si & 1 \leq i \leq t \\ 3 & si & (i, j) = (t + 1, p + 1) \\ c(i - 1, j) + 2 & si & t + 2 \leq i \leq t + p - 1 \\ 2rp + 3 & si & i = r(p - 1) + t + 1; 1 \leq r \leq t - 1 \\ 2p + 2 & si & (i, j) = \left(\frac{n+p+3}{2}, p + 1\right) \\ c(i - 1, j) + 2 & sinon & \end{cases}$$

Pour les colonnes de 2 à p :

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & \text{si} & 1 \leq i \leq p; \quad c(i, j-1) \leq 2p-2 \\ 2 & \text{si} & 1 \leq i \leq p; \quad c(i, j-1) = 2p \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si} & p+1 \leq i \leq p+s-1; \quad c(i, j-1) \leq n+p-3 \\ n+p-1 & \text{si} & p+1 \leq i \leq p+s-1; \quad c(i, j-1) = n+p-1 \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si} & p+s \leq i \leq \frac{n+p-1}{2}; \\ & & c(i, j-1) \leq n+p-3 \text{ et } c(p+s-1, j) \neq c(i, j-1) + 2 \\ 2p+2 & \text{si} & p+s \leq i \leq \frac{n+p-1}{2}; \text{ et} \\ & & c(i, j-1) = n+p-1 \text{ ou } c(p+s-1, j) = c(i, j-1) + 2 \\ c(i, j-1) & \text{sinon} & \end{cases}$$

Pour les colonnes de $p+2$ à $2p$:

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & \text{si} & 1 \leq i \leq t; \quad c(i, j-1) \leq n+p-2 \\ n+p & \text{si} & 1 \leq i \leq t; \quad c(i, j-1) = n+p \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si} & t+1 \leq i \leq p+t-1; \quad c(i, j-1) \leq 2p-1 \\ 1 & \text{si} & t+1 \leq i \leq p+t-1; \quad c(i, j-1) = 2p-1 \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si} & p+t \leq i \leq \frac{n+p-3}{2}; \quad c(i, j-1) < n+p-2 \\ 2p+3 & \text{si} & p+t \leq i \leq \frac{n+p-3}{2}; \quad c(i, j-1) = n+p-2 \\ n+p & \text{si} & i = \frac{n+p+1}{2}, \quad c(t, j) \neq n+p \\ 2p+1 & \text{si} & i = \frac{n+p+1}{2}, \quad c(t, j) = n+p \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si} & i = \frac{n+p-1}{2}, \quad c(t, j) + 2 = n+p; \quad c(i, j-1) + 2 \neq n+p \\ 2p+1 & \text{si} & i = \frac{n+p-1}{2}, \quad c(t, j) \neq n+p \\ 2p+3 & \text{si} & i = \frac{n+p-1}{2}, \quad c(t, j) = n+p \\ c(i, j-1) & \text{sinon} & \end{cases}$$

Dans les deux cas le système b -dominant S est $S = \{(1, j); 1 \leq j \leq 2p, (i, j); p+1 \leq i \leq p+s-1, 1 \leq j \leq p, (i, j); 2 \leq i \leq s-1, p+1 \leq j \leq 2p\}$.

Un exemple est donné dans les figures (3.6)(a) et (3.6)(b). Le système b -dominant est constitué par l'ensemble des sommets portant les étiquettes i^* , $i = 1, 2, \dots, 10$ pour le graphe $K_7 \square K_{3,3}$ et $i = 1, 2, \dots, 11$ pour le graphe $K_8 \square K_{3,3}$.

2^*	4^*	6^*	1^*	3^*	5^*
4	6	2	7^*	9^*	9
6	2	4	3	5	1
8^*	10^*	10	5	1	3
10	8	8	9	7	7
7	7	7	8	8	8
9	9	9	10	10	10

(a) $K_7 \square K_{3,3}$

2^*	4^*	6^*	1^*	3^*	5^*
4	6	2	7^*	9^*	11^*
6	2	4	3	5	1
8^*	10^*	10	5	1	3
10	8	8	9	7	9
9	9	9	11	11	7
7	7	7	8	8	8
11	11	11	10	10	10

(b) $K_8 \square K_{3,3}$

FIG. 3.6:

* Si $p(2p - 1) < n < 2p^2$:

La b -coloration c de $K_n \square K_{p,p}$ reste la même que celle proposée dans le cas où $n + p$ est pair. Dans ce cas on remplace $s = \left\lceil \frac{n+p}{2p} \right\rceil$ par $s = p$.

De plus :

$$c(i, j) = \begin{cases} 1 & si \quad (i, j) = (2p^2 - p + 1, 1) \\ 2 & si \quad (i, j) = (2p^2 - p + 1, p + 1) \end{cases}$$

Le système b -dominant dans ce cas reste inchangé. (figure 3.8)

2^*	4^*	6^*	1^*	3^*	5^*
4	6	2	7^*	9^*	11^*
6	2	4	13^*	15^*	17^*
8^*	10^*	12^*	3	5	1
14^*	16^*	18^*	5	1	3
10	12	14	9	11	13
12	14	16	11	13	15
16	18	8	15	17	9
18	8	10	17	9	11
7	7	7	8	8	8
9	9	9	10	10	10
11	11	11	12	12	12
13	13	13	14	14	14
15	15	15	16	16	16
17	17	17	18	18	18
1	1	1	2	2	2

 Fig. 3.8 : $K_{16} \square K_{3,3}$

□

Proposition 3.4.1.

Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_{p,p}$ par $n + p$ couleurs telles que $n < p$. Alors il n'existe pas de sommets (i, j) et (i, t) avec $1 \leq j \leq p$ et $p + 1 \leq t \leq 2p$ dans la coloration c tels que (i, j) et (i, t) soient b -dominants.

Preuve.

Soit c une coloration du graphe $K_n \square K_{p,p}$ par $n + p$ couleurs.

Supposons qu'il existe deux sommets b -dominants (i, j) et (i, t) dans la coloration c tels que $1 \leq j \leq p$ et $1 \leq t \leq 2p$.

Tous les sommets dans la ligne i ont des couleurs différentes car le sommet (i, j) est un sommet b -dominant. De plus, le sommet (i, t) étant aussi un sommet b -dominant, il doit être adjacent à toutes les $n + p - 1$ couleurs. Ainsi toutes les couleurs de la ligne

i et des colonnes j , $p + 2 \leq j \leq p$, doivent être obligatoirement reproduits dans la colonne $p + 1$. Ceci constitue une contradiction car $n < p$. \square

Proposition 3.4.2.

Soient n et p des entiers positifs non nuls tels que $n < p$, on a :

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \geq 2n$$

Preuve.

On propose la b -coloration c par $2n$ couleurs suivante pour le graphe $K_n \square K_{p,p}$:

$$c(i, j) = \begin{cases} i & si & 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ c(i, j - 1) + 1 & si & 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq n; c(i, j - 1) \leq n - 1 \\ 1 & si & 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq n; c(i, j - 1) = n \\ n + i & si & 1 \leq i \leq n; j = p + 1 \\ c(i, j - 1) + 1 & si & 1 \leq i \leq n; p + 2 \leq j \leq p + n; c(i, j - 1) \leq 2n - 1 \\ n + 1 & si & 1 \leq i \leq n; p + 2 \leq j \leq p + n; c(i, j - 1) = 2n \\ c(i, j - 1) & sinon \end{cases}$$

Le système b -dominant est $S = \{(1, j), 1 \leq j \leq n, p + 1 \leq j \leq p + n\}$ (figure 3.7)

\square

1*	2*	3*	4*	4	4	5*	6*	7*	8*	8	8
2	3	4	1	1	1	6	7	8	5	5	5
3	4	1	2	2	2	7	8	5	6	6	6
4	1	2	3	3	3	8	5	6	7	7	7

FIG. 3.7: $K_4 \square K_{6,6}$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé la valeur exacte du nombre b -chromatique des graphes $K_n \square K_{1,p}$ et $K_n \square K_{2,p}$. En ce qui concerne le graphe $K_n \square K_{p,p}$, à l'exception du cas particulier où, seule une borne inférieure a été déterminée, le résultat obtenu constitue une valeur exacte pour ce paramètre.

Chapitre 4

b -continuité des b -colorations de graphes

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons principalement à la b -continuité des b -colorations de graphes. Nous commencerons par rappeler quelques résultats connus dans la littérature concernant la NP-complétude du nombre b -chromatique et la b -continuité des graphes. Ensuite nous prouverons la b -continuité des graphes étudiés dans le chapitre 3.

4.2 Complexité du nombre b -chromatique

On considère les deux problèmes suivants :

Nom : b -coloration

Instance : Un graphe $G = (V, E)$ et k un entier

Question : Existe-t-il une b -coloration de G par k couleurs ?

Nom : nombre b -chromatique

Instance : Un graphe $G = (V, E)$ et k un entier

Question : est ce que $\varphi(G) \geq k$?

Irving et Manlove [15], ont montré que le problème du nombre b -chromatique défini ci-dessus est NP-complet dans le cas général. Pour le prouver, les auteurs [15] ont proposé une réduction depuis le problème de 3-couverture exacte ($x3c$) connu déjà comme NP-complet (Garey et Johnson [9]), et défini comme suit :

Nom : 3-couverture exacte ($x3c$)

Instance : L'ensemble $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, où $n = 3k$ pour certain k . Une famille $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ un sous ensemble de S , où $|T_i| = 3$ pour tout i .

Question : Existe-t-il une sous famille de T_i deux à deux disjoints qui couvre tout S ?

Les auteurs [15] donnent cependant un algorithme polynomial permettant de calculer ce paramètre pour les arbres.

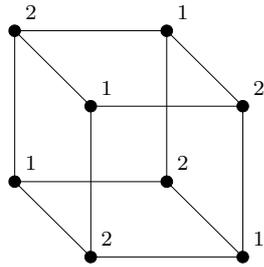
D'autres auteurs se sont intéressés au problème de décision concernant la b -coloration de certains graphes particuliers. Kratochvil, Tuza et Voigt [18] ont prouvé que le problème de savoir si un graphe G admet une b -coloration utilisant k couleurs, avec $k = \Delta(G) + 1$, pour tout graphe biparti connexe est NP-complet.

Ils ont aussi montré (voir [18]) que pour le cas où $k = 3$:

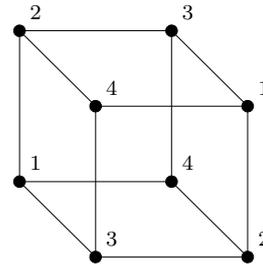
- le nombre b -chromatique est polynomial pour les graphes biparti.
- la b -coloration est polynomiale pour les graphes connexes planaires bipartis.

4.3 b -continuité de graphes

L'une des particularités intéressantes de la b -coloration est que certains graphes possèdent des b -colorations utilisant respectivement p et q couleurs, avec $p < q$ alors qu'ils n'admettent pas de b -coloration intermédiaire (Kouider et Mahéo [16]). Par exemple, le cube Q_3 admet une b -coloration avec 2 et 4 couleurs, mais n'admet aucune b -coloration avec 3 couleurs (figure 4.1).



(a) 2-coloration du cube



(b) 4-coloration du cube

FIG. 4.1:

Définition 4.3.1.

Un graphe G est dit b -continu s'il admet une b -coloration, pour tout k , avec :

$$\chi(G) \leq k \leq \varphi(G).$$

Définition 4.3.2.

On appelle b -spectre, noté $S_b(G)$, d'un graphe G , l'ensemble des entiers k , tel qu'il existe une b -coloration avec k couleurs de G .

Exemple 4.3.1.

- Le cube Q_3 n'est pas b -continu.
- Le b -spectre de ce cube est $\{2, 4\}$.

Proposition 4.3.1 (Faik[8]).

Soient $K_{1,n}$ et P_n respectivement, un graphe biparti complet et une chaîne d'ordre n .

Alors :

1. Si $m \geq n \geq 2$, alors le graphe $K_{1,m} \square K_{1,n}$ est b -continu.
2. Si $n \geq 3$ et $m \geq 2$, alors le graphe $K_{1,n} \square P_m$ est b -continu.

Proposition 4.3.2 (Faik[8]).

Soient P_n et P_m les chaînes d'ordre $n \geq 2$ et $m \geq 2$ respectivement. Le graphe $P_n \square P_m$ est b -continu.

Proposition 4.3.3 (Faik[8]).

Soient C_n et C_m des cycles d'ordre $n \geq 2$ et $m \geq 2$ respectivement. Le graphe $C_n \square C_m$ est b -continu.

Théorème 4.3.1 (Faik[8]).

Pour tout n , $n \neq 3$, l'hypercube de dimension n est b -continu.

Nous proposons le théorème 4.2.2 pour le graphe $K_n \square K_{1,p}$

Théorème 4.3.2.

Soient n et p des entiers positifs non nuls, le graphe $K_n \square K_{1,p}$ est b -continu.

Preuve.

On a :

$$\chi(K_n \square K_{1,p}) = n,$$

une telle coloration est montrée dans la figure (4.2).

1	n	n
2	$n - 1$	$n - 1$

	
$n - 1$	2	2
n	1	1

FIG. 4.2: $K_n \square K_{1,p}$

◇ $n \geq 2p$:

D'après le théorème 3.2.1,

$$\varphi(K_n \square K_{1,p}) = n.$$

On peut écrire :

$$\chi(K_n \square K_{1,p}) = \varphi(K_n \square K_{1,p}) = n.$$

Donc le graphe $K_n \square K_{1,p}$ est b -continu.

◇ $n < 2p$:

D'après le théorème 3.2.1,

$$\varphi(K_n \square K_{1,p}) = n + 1.$$

Nous avons :

$$\chi(K_n \square K_{1,p}) = n \leq k \leq n + 1 = \varphi(K_n \square K_{1,p}).$$

Donc le graphe $K_n \square K_{1,p}$ est b -continu.

□

Théorème 4.3.3.

Soient n et p des entiers positifs non nuls tels que $n \geq p$, le graphe $K_n \square K_{p,p}$ est b -continu.

Preuve.

On a :

$$\chi(K_n \square K_{p,p}) = n,$$

une telle coloration est montrée dans la figure (4.3).

1	1	...	1	n	..	n	n
2	2	..	2	$n - 1$...	$n - 1$	$n - 1$

$n - 1$	$n - 1$..	$n - 1$	2	...	2	2
n	n	...	n	1	...	1	1

FIG. 4.3: $K_n \square K_{p,p}$

On distingue 3 cas :

1. $n \geq 2p^2$.

D'après le théorème 3.4.1, on a :

$$\chi(K_n \square K_{p,p}) = \varphi(K_n \square K_{p,p}) = n,$$

Donc le graphe $K_n \square K_{p,p}$ est b -continu.

2. $n \leq p(2p - 1)$.

D'après le théorème 3.4.1

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) = n + p,$$

Pour montrer la *b*-continuité du graphe $K_n \square K_{p,p}$, il suffit de donner une *k*-coloration dominante pour tout k , $n \leq k \leq n + p$.

Pour $n \leq k \leq n + p$, nous proposons pour le graphe $K_n \square K_{p,p}$ la *k*-coloration dominante *c* suivante :

◊ Si $k > 2p + 1$.

On pose :

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\alpha = \left\lceil \frac{1}{p} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right\rceil.$$

$$\beta = \left\lceil \frac{1}{p} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right\rceil.$$

Pour la colonne 1 :

$$c(i, j) = \begin{cases} 2i & \text{si } 1 \leq i \leq p + 1 \\ 2[(i - p)p + 1] & \text{si } p + 2 \leq i \leq p + \alpha - 1 \\ 2rp + 4 & \text{si } i = r(p - 1) + \alpha + 1; \quad 1 \leq r \leq \alpha - 1, \quad i \neq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 \\ k - \gamma & \text{si } (i, j) = (n, 1) \\ c(i + 1, j) - 2 & \text{si } \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n - 1 \\ c(i - 1, j) + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les colonnes de 2 à *p* :

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & \text{si} & 1 \leq i \leq p; \quad c(i, j-1) \leq 2p-2 \\ 2 & \text{si} & 1 \leq i \leq p; \quad c(i, j-1) = 2p \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si} & p+1 \leq i \leq p+\alpha-1; c(i, j-1) < k \\ k+1-\gamma & \text{si} & p+1 \leq i \leq p+\alpha-1; c(i, j-1) = k+1-\gamma \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si} & p+\alpha \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor; \\ & & c(i, j-1) \leq k-3+\gamma \text{ et } c(p+\alpha-1, j) \neq c(i, j-1) + 2 \\ 2p+2 & \text{si} & p+\alpha \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor; \text{ et} \\ & & c(i, j-1) = k+\gamma-1 \text{ ou } c(p+\alpha-1, j) = c(i, j-1) + 2 \\ c(i, j-1) & \text{sinon} & \end{cases}$$

Pour la colonne $p+1$:

$$c(i, j) = \begin{cases} 2(i-1)p+1 & \text{si} & 1 \leq i \leq \beta \\ 3 & \text{si} & (i, j) = (\beta+1, p+1) \\ c(i-1, j) + 2 & \text{si} & \beta+2 \leq i \leq p+\beta-1 \\ 2rp+3 & \text{si} & i = r(p-1) + \beta+1; \quad 1 \leq r \leq \beta-1 \\ k - (\gamma+1) & \text{si} & (i, j) = (n, p+1) \\ c(i+1, j) - 2 & \text{si} & \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n-1 \\ c(i-1, j) + 2 & \text{sinon} & \end{cases}$$

Pour les colonnes de $p+2$ à $2p$:

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & \text{si} & 1 \leq i \leq \beta; \quad c(i, j-1) \leq k - (\gamma+2) \\ k - \gamma & \text{si} & 1 \leq i \leq \beta; \quad c(i, j-1) = k - \gamma \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si} & \beta+1 \leq i \leq p+\beta-1; c(i, j-1) \leq 2p-3 \\ 1 & \text{si} & \beta+1 \leq i \leq p+\beta-1; c(i, j-1) = 2p-1 \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si} & p+\beta \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor; \\ & & c(i, j-1) \leq k - (\gamma+2) \text{ et } c(\beta, j) \neq c(i, j-1) + 2 \\ 2p+1 & \text{si} & p+\beta \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor; \\ & & c(i, j-1) = k - \gamma \text{ ou } c(\beta, j) = c(i, j-1) + 2 \\ c(i, j-1) & \text{sinon} & \end{cases}$$

Le système b -dominant S est $S = \{(1, j); 1 \leq j \leq 2p, (i, j); p + 1 \leq i \leq p + \alpha - 1, (i, j); 2 \leq i \leq \alpha - 1\}$.

◇ Si $k \leq 2p + 1$.

Cas 1 : k est pair.

Pour la colonne 1 :

$$c(i, j) = \begin{cases} 2i & si & 1 \leq i \leq \frac{k}{2} \\ 1 & si & (i, j) = (\frac{k}{2} + 1, 1) \\ c(i - 1, j) + 2 & sinon \end{cases}$$

Pour la colonne $p + 1$:

$$c(i, j) = \begin{cases} 2i - 1 & si & 1 \leq i \leq \frac{k}{2} \\ 2 & si & (i, j) = (\frac{k}{2} + 1, 1) \\ c(i - 1, j) + 2 & sinon \end{cases}$$

Pour les colonnes de 2 à p :

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j - 1) + 2 & si & 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; c(i, j - 1) < k; 2 \leq j \leq \frac{k}{2} \\ 2 & si & 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; c(i, j - 1) = k; 2 \leq j \leq \frac{k}{2} \\ c(i, j - 1) & sinon \end{cases}$$

Pour les colonnes de $p + 2$ à $2p$:

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j - 1) + 2 & si & 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; c(i, j - 1) \leq k - 3; p + 2 \leq j \leq p + \frac{k}{2} \\ 1 & si & 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; c(i, j - 1) = k - 1; p + 2 \leq j \leq p + \frac{k}{2} \\ c(i, j - 1) & sinon \end{cases}$$

Cas 2 : k est impair.

Pour la colonne 1 :

$$c(i, j) = \begin{cases} 2i & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k-1}{2} \\ k & \text{si } (i, j) = (\frac{k+1}{2}, 1) \\ 1 & \text{si } (i, j) = (\frac{k+3}{2}, 1) \\ c(i-1, j) + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la colonne $p+1$:

$$c(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) = (1, p+1) \\ k & \text{si } (i, j) = (2, p+1) \\ 2i-3 & \text{si } 3 \leq i \leq \frac{k+1}{2} \\ 2 & \text{si } (i, j) = (\frac{k+3}{2}, p+1) \\ c(i-1, j) + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les colonnes de 2 à p :

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}; c(i, j-1) < k-1, 2 \leq j \leq \frac{k-1}{2} \\ 2 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}; c(i, j-1) = k-1, 2 \leq j \leq \frac{k-1}{2} \\ c(i, j-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les colonnes de $p+2$ à $2p$:

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & \text{si } p+2 \leq j \leq p + \frac{k-1}{2}; (i, j) = (1, j) \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si } 3 \leq i \leq \frac{k+1}{2}; c(i, j-1) < k-2, p+2 \leq j \leq p + \frac{k-1}{2} \\ 1 & \text{si } 3 \leq i \leq \frac{k+1}{2}; c(i, j-1) = k-2, p+2 \leq j \leq p + \frac{k-1}{2} \\ c(i, j-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc si $n \leq p(2p-1)$ le graphe $K_n \square K_{p,p}$ est b -continu.

3. $p(2p-1) \leq n < 2p^2$.

D'après le théorème 3.4.1, nous avons :

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) = 2p^2,$$

Pour montrer la b -continuité du graphe $K_n \square K_{p,p}$, il suffira de donner une k -coloration dominante pour tout k , $n \leq k \leq 2p^2$.

Pour $n \leq k \leq 2p^2$, la k -coloration dominante c proposée précédemment pour le graphe $K_n \square K_{p,p}$ dans le cas où $k > 2p + 1$, reste valable.

Donc si $p(2p - 1) \leq n < 2p^2$ le graphe $K_n \square K_{p,p}$ est b -continu. \square

2*	4*	6*	8*	8	1*	3*	5*	7*	7
4	6	8	2	2	3	5	7	1	1
6	8	2	4	4	5	7	1	3	3
8	2	4	6	6	7	1	3	5	5
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	6	6	6	6	6

(a) 8-coloration de $K_7 \square K_{5,5}$

2*	4*	6*	8*	8	1*	3*	5*	7*	7
4	6	8	2	2	9*	9	9	9	9
6	8	2	4	4	3	5	7	1	1
8	2	4	6	6	5	7	1	3	3
9	9	9	9	9	7	1	3	5	5
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4

(b) 9-coloration $K_7 \square K_{5,5}$

2*	4*	6*	8*	10*	1*	3*	5*	7*	9*
4	6	8	10	2	3	5	7	9	1
6	8	10	2	4	5	7	9	1	3
8	10	2	4	6	7	9	1	3	5
10	2	4	6	8	9	1	3	5	7
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4

(c) 10-coloration $K_7 \square K_{5,5}$

2*	4*	6*	8*	10*	1*	3*	5*	7*	9*
4	6	8	10	2	11*	11	11	11	11
6	8	10	2	4	3	5	7	9	1
8	10	2	4	6	5	7	9	1	3
10	2	4	6	8	7	9	1	3	5
11	11	11	11	11	9	1	3	5	7
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2

(d) 11-coloration $K_7 \square K_{5,5}$

FIG. 4.4:

Proposition 4.3.4.

Soient n et p , deux entiers positifs non nuls, alors :

- ★ Si $n \geq 4p$, alors le graphe $K_n \square K_{2,p}$ est b -continu.
- ★ Si $n < p$, alors le graphe $K_n \square K_{2,p}$ est b -continu.
- ★ Si $2p - 2 \leq n < 4p$, alors le graphe $K_n \square K_{2,p}$ est b -continu.

Preuve.

La coloration donnée dans la figure (4.5) implique que :

$$\chi(K_n \square K_{2,p}) = n,$$

1	1	n	n
2	2	$n - 1$	$n - 1$
...
...
$n - 1$	$n - 1$	2	2
n	n	1	1

FIG. 4.5: $K_n \square K_{2,p}$

1. $n \geq 4p$.

D'après le théorème 3.3.1, on peut écrire :

$$\chi(K_n \square K_{2,p}) = \varphi(K_n \square K_{2,p}) = n,$$

donc le graphe $K_n \square K_{2,p}$ est *b*-continu.

2. $n < p$.

D'après le théorème 3.3.1, on a

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) = n + 2,$$

Pour monter la *b*-continuité du graphe $K_n \square K_{2,p}$, il suffira de montrer que le graphe admet une $(n + 1)$ -coloration dominante.

Pour $k = n + 1$, nous proposons pour le graphe $K_n \square K_{2,p}$ la *k*-coloration dominante *c* suivante :

$$c(i, j) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } (i, j) = (1, j), \quad j = \{1, 2\} \\ j - 2 & \text{si } (i, j) = (1, j), \quad 3 \leq j \leq n + 2 \\ i - 1 & \text{si } 2 \leq i \leq n, \quad j = \{1, 2\} \\ c(i, j - 1) + 1 & \text{si } 2 \leq i \leq n, \quad 3 \leq j \leq n + 1, \quad c(i, j - 1) \leq n - 1 \\ 1 & \text{si } 2 \leq i \leq n, \quad 3 \leq j \leq n + 1, \quad c(i, j - 1) = n \\ n - 1 & \text{si } (i, j) = (2, n + 2) \\ c(i, j - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système *b*-dominant *S* est , $S = \{(1, j), \quad 1 \leq j \leq n + 2\}$. (figure 4.6).

5*	5	1*	2*	3*	4*	4
1	1	2	3	4	3	3
2	2	3	4	1	1	1
3	3	4	1	2	2	2

FIG. 4.6: $K_4 \square K_{2,5}$

3. $2p - 2 \leq n \leq 4p$.

D'après le théorème 3.3.1, on a :

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) = n + 2,$$

Une $(n + 1)$ -coloration dominante pour le graphe $K_n \square K_{2,p}$, est donnée comme suit :

$$c(i, j) = \begin{cases} i & si & 1 \leq i \leq n, j = \{1, 2\} \\ n + 1 & si & (i, j) = (1, j), 3 \leq j \leq n + 2 \\ 2 & si & (i, j) = (n, j), 3 \leq j \leq n + 2 \\ i + 1 & sinon \end{cases}$$

Le système b -dominant S est , $S = \{(i, 1), 1 \leq i \leq n \ (2, 3)\}$. (figure 4.7).

□

1*	1	11*	11	11	11
2*	2	3	3	3	3
3*	3	4	4	4	4
4*	4	5	5	5	5
5*	5	6	6	6	6
6*	6	7	7	7	7
7*	7	8	8	8	8
8*	8	9	9	9	9
9*	9	10	10	10	10
10*	10	2	2	2	2

FIG. 4.7: $K_{10} \square K_{2,4}$

4.4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous nous sommes intéressés principalement à la *b*-continuité des *b*-colorations de graphes. Nous avons étudié la *b*-continuité du produit cartésien de quelques graphes particuliers. Pour justifier cette étude et les résultats obtenus, nous avons présenté des résultats tirés de la littérature et relatifs à la complexité algorithmique de la *b*-coloration.

Conclusion et perspectives

Les résultats de NP-complétude du problème b -chromatique présentés par Irving et Manlove [15] et Kratochvíl et al [18] nous ont amené à nous intéresser au problème de la b -coloration de certaines classes de graphes notamment celle du produit cartésien de graphes.

Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéressés principalement aux problèmes de la b -coloration du produit cartésien de graphes. Après avoir déterminé des bornes inférieures pour le graphe $K_n \square K_p$, puis donné une valeur exacte à ce paramètre pour les graphes $K_n \square K_{1,p}$, $K_n \square K_{2,p}$ et $K_n \square K_{p,p}$ nous avons étudié la b -continuité des b -colorations de ces graphes et déterminé les cas pour lesquels ils sont continus.

Ce travail demande à être poursuivi et complété. Il s'agira particulièrement :

- D'entreprendre la résolution de la conjecture de Omoomi et Javadi [19].
- De rechercher la valeur exacte du nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_p$.
- De déterminer la b -continuité du graphe $K_n \square K_p$ et du graphe $K_n \square K_{2,p}$ dans le cas où $p \leq n \leq 2p - 3$.

Bibliographie

- [1] F.Affif Chaouche, S.Kerdjoudj, A.Berrachedi, *The b-chromatic number of cartesian product of some graphs*, (communication COSI'08). Tizi-Ouzou 08-10 juin 2008. Acte du colloque COSI'08 34-45.
- [2] F.Affif Chaouche, *Problèmes d'existence en structure discrtes*, Thèse de doctorat, USTHB, 2008.
- [3] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi. *Some bounds for the b-chromatic number of a generalized Hamming graphs*. Far East Journal of Applied Mathematics. Volume 26, No.3 (2007) 375-391.
- [4] C.Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod University 1973.
- [5] A.Berrachedi, *Sur quelques propriétés métriques des graphes de type hypercube*, Thèse de doctorat es sciences, USTHB, 1997.
- [6] Brice Effantin and Hamamache Kheddouci, *The b-chromatic number of some power graphs*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 6, 2003, 0045-054.
- [7] Amine El Sahili and Mekkia Kouider. *About b-coloring of regular graphs*. Rapport de Recherche N : 1432. Unité mixte de recherche 8623. CNRS-Université Paris Sud- LRI 02/2006.
- [8] T.Faik, *La b-continuité des b-colorations : complexité, propriétés structurelles et algorithmes*. Thèse de doctorat en sciences, Université Paris XI Orsay, France, 2005.
- [9] M.R.Garey and D.S.Johnson. *Computers and Intractability*. Freeman, San Francisco, CA., 1979.

- [10] F.Harary and S.Hedetniemi, *The achromatic number of a graph*, Journal of Combinatorial Theory 8 (1970) 154-161.
- [11] I.Holyer. *The NP-completeness of edge-coloring*, SIAM J.Comput.10(1981) 718-720.
- [12] F.Hughes and G.MacGillivray, *The achromatic number of graphs : A survey and some new results*, Bull.Inst.Comb.Appl. 19 (1977) 27-56.
- [13] M.Kouider, *b-chromatic number of a graph, subgraph and degrees*. Rapport interne LRI. 1392.
- [14] C.T.Hoàng, Mekkia Kouider. *On the b-dominating coloring of graphs*. Discrete Applied Mathematics 152 (2005) 176-186.
- [15] Robert W.Irving and David F.Manlove, *The b-chromatic number of a graph*. Discrete Applied Mathematics 91 (1999) 127-141.
- [16] Mekkia Kouider, Maryvonne Mahèo. *Some bounds for the b-chromatic number of a graph*. Discrete Mathematics 256 (2002) 267-277.
- [17] M.Kouider and M.Zaker. *Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs*. ar Xiv :math.Co/0506167 v1 9 Jun 2005.
- [18] J.Kratochvil, Z.Tuza and M.voigt. *On the b-chromatic number of graphs. Lecture notes in Computer Science*, Springer Berlin 2573, 310-320, (2002).
- [19] B.Omoomi, R.Javadi. *On b-coloring of the Kneser graphs*. submitted. (2007)
- [20] B.Omoomi, R.Javadi. *On the b-coloring of cartesian product of graphs*.to appear in Ars Combinatoria.