Chapitre 1 : Rappels sur la théorie des polyèdres

Dans ce chapitre, mous allons énoncer des définitions classiques et des résultats importants associés à la notiondes polyèdres, des matrices totalement unimodulaires, des polyèdres presque entiers, des matrices parfaites et des graphes en particulier les graphes parfaits.

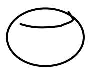
I. <u>Notion de Polyèdres</u> :

Soit x un élément de IR^n défini par : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ où x_i est un réel pour tout $i = 1,...,n$

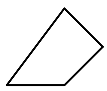
1°)<u>Définition</u> : Un sous ensemble A de IR^n est convexe si :

$$(\forall x \in A, \forall y \in A, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in A)$$

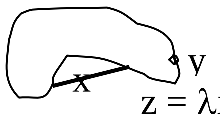
***<u>Exemple</u>** :



C(convexe)



C’(convexe)



D (non convexe)

$z = \lambda x + (1-\lambda) y$

2°)<u>Définition</u> : L’enveloppe convexe d’un sous ensemble A de IR^n est le plus petit convexe contenant A, notée conv(A) définie par :

$$\mathrm{conv}(A) = \left\{ x \in IR^n \;/\; x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \;, x_i \in A \,,\ \lambda_i \geq 0 \,,\ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1 \text{ et } 1 \leq t < \infty \right\}$$

3°) <u>Définition</u> : Soient A un convexe non vide et F une partie de A, on dit que F est une face de A si :

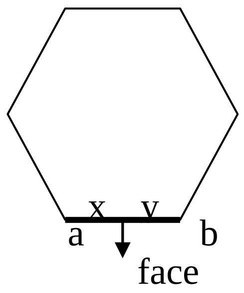
$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in F \\ \forall x', x'' \in A \\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ \ \lambda x' + (1-\lambda)\, x'' \in F \end{array}\right\} \Rightarrow x', x'' \in F$$

La dimension de F est la dimension de la plus petite variété affine contenant F.

En particulier, un point extrémal est une face de dimension zéro.

Remarque : $\emptyset$ et A sont des faces évidentes

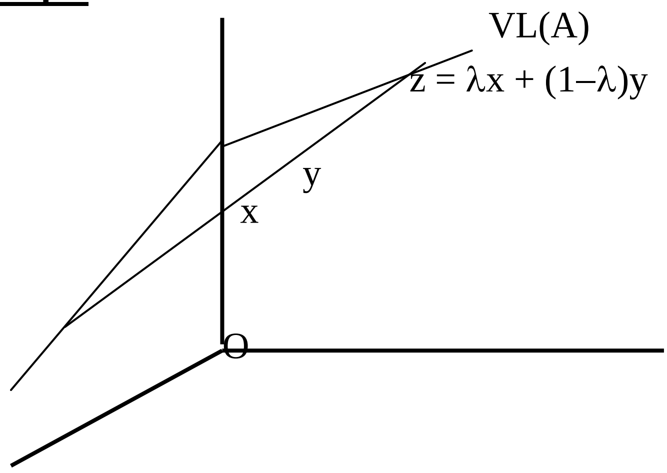
Exemple :



4°) Définition : On appelle variété linéaire engendrée par une partie A de IR^n, l'ensemble noté VL(A) défini par :

$$VL(A) = \left\{ x \in IR^n \;/\; x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \;, x_i \in A \,,\; \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1 \text{ et } 1 \le t < \infty \right\}$$

Exemple :



On note 0_{IR^n} l'élément nul de IR^n

5°) Définition : Les éléments $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de A sont dits affinement indépendants si : $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$,…, $x_n - x_0$ sont linéairement indépendants.

6°) Définition : Soit une variété linéaire VL(A) engendrée par A, la dimension de VL(A) est le nombre maximum de vecteurs de A qui sont affinement indépendants, notée dim VL(A) = dim A

7°) Définition : H est un hyperplan si :

$$\exists\, a \neq 0_{IR^n}, \exists\, b \in IR \;/\; H = \{ x \in IR^n \;/\; a^t.x = b \}$$

***Cas particulier** : dim VL(A) = n – 1 $\Rightarrow$ VL(A) est un hyperplan.

8°) Définition : A est un cône de IR^n si :

$$\forall x_1, x_2 \in A, \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 : \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$$

***Exemples** :

a) On appelle demi-droite passant par a un élément non nul de IR^n l'ensemble :

$$(a) := \left\{ \lambda a \in IR^n \;/\; \lambda \geq 0 \right\}$$

(a) est un cône de IR^n

b) Dans IR^n, si I est un sous ensemble de {1, 2,…, n}, on pose :

$$Q^I = \{ x \in IR^n \;/\; x_i \geq 0 \text{ si } i \in I,\; x_i < 0 \text{ si } i \notin I \}$$

Un tel ensemble est appelé quartier ; il y a 4 quartiers dans IR^2, 8 dans IR^3 et 2^n dans IR^n. Un quartier est un cône de IR^n

9°) Définition : A tout sous ensemble A de IR^n, on fait correspondre un sous ensemble $\overline{A}$ de IR^n. On dit que la correspondance $A \rightarrow \overline{A}$ est une fermeture si elle vérifie :

a) $A \subset \overline{A}$

b) $B \subset A \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Les ensembles A tels que A = $\overline{A}$ sont dits fermés.

10°) __Définition__ : On appelle cône asymptotique d'un convexe fermé A noté A_∞ défini par :

$$A_\infty = \left\{ y \in IR^n \ / \ \forall\, x \in A\,,\ \forall \lambda > 0 \ : x + \lambda y \in A \right\}$$

11°) __Définition__ : P est un polyèdre de IR^n si P est l'intersection de demis espaces.

12°) __Définition__ : Une partie P de IR^n est un polyèdre s' il existe au moins une matrice A d'ordre $m \times n$ et un vecteur b de IR^m tels que :

$$P = \{ x \in IR^n / \ A.x \le b \}$$

***__Remarque__ :** $$P_\infty = \left\{ t \in IR^n \ / \ A.t \le 0 \ \text{ et } \ t \ge 0 \right\}$$

***__Cas particulier__** : Si $P = \{ x \in IR^n / A.x \le b\ , 0 \le x_j \le k\ , \forall\, j = 1,\ldots,n \}$ alors P est dit polytope et $P_\infty = \{0_{IR^n}\}$

13°) __Définition__ : L'enveloppe cônique de P est définie par :

$$\text{cône}(P) = \left\{ x \in IR^n \ / \ x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i\, x_i \ \ ,\ \lambda_i \ge 0\,, x_i \in P\ ,\ i = \overline{1, t} \ \ \text{ et } \ 1 \le t < \infty \right\}$$

14°) __Définition__ : (x) est un rayon extrémal (direction extrémale) d'un cône P si :

(i) $(x) \subset P$ et $(-x) \not\subset P$.

(ii) $\forall\, x_1\,, x_2 \in P\ ,\ \forall \lambda \in \left]0\,,1\right[\ / \ x = \lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \ \Rightarrow (x) = (x_1) = (x_2)$

15°) __Définitions__ : Soient A une mxn matrice à composantes entières et b un vecteur entier de IR^m. On définit les polyèdres P et P_I par :

$$P = P(A,b) = \{x \in IR^n / \ \ Ax \le b\ ,\ \ x \ge 0\}$$

$$P_I = P_I(A,b) = \text{conv}(\ P \cap Z^n).$$

Soit y un élément de IR^n et c un réel :

$y^t.x \leq c$ est une coupe du polyèdre P_I si :

$$P_I \subseteq P \cap \{x \in IR^n / \; y^t.x \leq c\}$$

b) $y^t.x \leq c$ est une facette de P_I si :

(i) $x \in P_I \Rightarrow y^t.x \leq c$ est une coupe de P_I

(ii) $\exists\, (x^0,\ldots, x^k)$: $k + 1$ vecteurs affinement indépendants de P_I

tels que : $y^t.x^i = c$ où $i = 1,\ldots, k$

c) $y^t.x \leq b_i$ est un support de P(A , b) si et seulement si :

$$P(A,b) \cap \{x \in IR^n \; / \; y^t.x = b_i\} \neq \emptyset$$

16°) <u>Définition</u> : Une matrice A à composantes entières est totalement unimodulaire si toutes les sous matrices carrées non singulières de A ont un déterminant égal à ± 1.

Dans ce qui suit , on va définir les polyèdres presque entiers qui sont utiles pour caractériser les matrices parfaites du point de vue polyèdral où A est une mxn matrice à éléments « 0,1 » et e un vecteur de IR^m tel que $e = (1,\ldots,1)^t$, $P(A) = P(A, e)$ et $P_I(A) = \text{conv}(P(A) \cap Z^n)$

17°) <u>Définition</u> : P (A) est un polyèdre presque entier si :

$P(A) \neq P_I(A)$ et les n polyèdres de la forme $P_j = P(A) \cap \{x \in IR^n / x_j = 0\}$

possèdent des points extrémaux entiers pour $j = 1,\ldots, n$

18°) <u>Définition</u> : Soit A une mxn matrice à éléments « 0,1 » et P(A) le polyèdre défini par : $P(A) = \{x \in IR^n / \; A.x \leq e\}$.

Une matrice A associée à un polyèdre P(A) presque entier est dite presque parfaite .

19°) <u>Définition</u> : Une matrice A est parfaite si $P(A) = P_I(A)$

II. <u>Les matrices totalement unimodulaires</u> :

Hoffman et Kruskal ont donné une réponse à la question suivante :

« Soient A une m x n matrice et b un vecteur de IR^m. Sous quelles conditions a-t-on $P(A, b) = P_I(A, b)$? »

Plus précisément, quelles sont les conditions pour lesquelles on a :

$\max \{ cx / Ax \leq b, \ x \geq 0, x \text{ entier}\} = \max \{ cx / Ax \leq b, \ x \geq 0 \}$

1°) <u>Théorème 1</u> : [14]

Soit A une m x n matrice à coefficients entiers, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est totalement unimodulaire .

(ii) $P(A, b) = P_I(A, b) \quad \forall\, b \in Z^m$

****<u>Preuve</u>** : Montrons i) $\Rightarrow$ ii)

Par la convexité de P (A , b) et la définition de $P_I(A, b)$, on a :

$P_I(A, b) \subset P(A, b)$

Si $P(A, b) = \emptyset$ alors $P_I(A, b) = \emptyset$.

Supposons maintenant que $P(A, b) \neq \emptyset$. Soit le système de contraintes $A.x \leq b$ qui définit P(A,b). Supposons, sans perte de généralités, que le rang du système des contraintes de P(A ,b) est m , il s'ensuit, d'après le théorème suivant [7] : « toute solution réalisable de base d'un polyèdre est un point extrémal de ce polyèdre » , que P(A ,b) a un point extrémal. Soit I_m la matrice identité d'ordre m , on voit que la matrice (A, I_m) est aussi totalement unimodulaire et par suite, en utilisant la règle de Cramer, tout point extrémal de P(A ,b) a des composantes entières.

Ainsi les points extrémaux de P(A ,b) et de P_I(A ,b) coïncident.

Si P(A ,b) est un polytope alors on a ii).

Sinon, soit d le vecteur direction d'un rayon extrémal de P(A ,b) . Puisque A et b ont des composantes entières, il s'ensuit que d a des composantes rationnelles et par suite d est le vecteur d'un rayon extrémal de P_I(A ,b) . En effet, l'ensemble des rayons extrémaux de P(A ,b) et de P_I(A ,b) coïncident du fait du théorème de Weyl [27] : « Tout point d'un polyèdre peut s'écrire comme combinaison convexe de ses points extrémaux et combinaison non négative des vecteurs directions de ses rayons extrémaux ». Ainsi, on a P(A ,b) = P_I(A ,b)

b)Montrons ii) $\Rightarrow$ i)

Soit B une matrice carrée non singulière de taille m extraite de la matrice (A,I_m) et $y \in Z^n$ tels que $y + B^{-1}.u^i \geq 0$ et $u^i \in Z^n$ et $u_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$

Posons $z = y + B^{-1}.u^i$, on a $B.z = B\,y + u^i \in Z^m$, d'où z définit les composantes non nulles d'un point extrémal de $\{x \in IR^n / Ax \leq b , x \geq 0\}$ où $b = By + u^i$ et par (ii) on a $z \in Z^n$ et en variant i de 1 à m, B^{-1} est une matrice à composantes entières, d'où det B et det B^{-1} sont entiers satisfaisant(det B) (det B^{-1}) = 1, ainsi det B = ± 1 et donc A est

totalement unimodulaire.*

***Remarque** : Puisque l'unimodularité de A entraine et est entrainée par

l'unimodularité totale de 2(m+n) x n matrices dont les lignes

correspondent respectivement à A , - A , I_m , - I_m , la condition (ii) du

théorème 1 peut être formulée par :

$$\text{(ii')}\ Q(A,b^1,b^2,d^1,d^2) = Q_I(A,b^1,b^2,d^1,d^2),\ \forall b^i \in Z^m,\ \forall d^i \in Z^n,\ \text{où}\ i=1,2,$$
$$Q(A,b^1,b^2,d^1,d^2) = \left\{x \in IR^n \,/\, b^1 \le Ax \le b^2\ ,d^1 \le x \le d^2\right\} \text{ et}$$
$$Q_I(A,b^1,b^2,d^1,d^2) = \left\{x \in Z^n \,/\, b^1 \le Ax \le b^2\ ,d^1 \le x \le d^2\right\}$$

2°) Définition : Soient x un élément de $\{0,1\}^n$ et y un élément de $\{0, \pm1\}^n$

on dit que y congrue x modulo 2 noté $y \equiv x\ [2]$ si :

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = 0 \\ \pm 1 & \text{si } x_i = 1 \end{cases}$$

3°) Théorème 2 : [21], [22]

Soit A une mxn matrice. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) A est totalement unimodulaire.

(ii) Pour tout $x \in \{0,1\}^n$, il existe un vecteur $y \in \{0, \pm1\}^n$ tels que :
$y \equiv x\,[2]$ et $A^i y = 0$ si $A^i x = 0$ et $A^i y = 1$ ailleurs, où A^i est la ième ligne de A.

****Preuve** :

a) (i) ⇒ (ii)

Soit $x \in \{0,1\}^n$ et a =Ax.

Définissons $d^1 = 0$ et $d^2 = x$ et b^v pour v = 1,2 par :

$$b_i^v = \begin{cases} \frac{1}{2}\, a_i & \text{si } a_i \equiv 0[2] \\ \frac{1}{2}(a_i - 1) & \text{si } a_i \equiv 1[2] \text{ et } v = 1 \\ \frac{1}{2}(a_i + 1) & \text{si } a_i \equiv 1[2] \text{ et } v = 2 \end{cases}$$

On a $\frac{1}{2}x \in Q(A, b^1, b^2, d^1, d^2) \Rightarrow Q \neq \emptyset$.

Le théorème 1 $\Rightarrow \exists\, x' \in Z^n \cap Q$ et $y = x - 2x'$ vérifie (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Par induction sur k (qui est la taille des sous matrices carrées de A), choisissons: x = u' où u' = $(0,\dots,0,1,0,\dots,0) \in Z^n$ et 1 se trouve à la jème composante, alors y = u' et par suite toutes les composantes de A sont 0 , ± 1.

Soit B une sous matrice non singulière de A de taille k + 1 . Sans perte de généralités, on suppose que les colonnes de B coïncident avec les (k+1) premières colonnes de A, et les lignes de B avec les (k+1) premières lignes de A.

Par l'hypothèse d'induction et la règle de Cramer, les composantes de $B^* = dB^{-1}$ où d = det B, sont égales à 0 ou ± 1.

Soit b la première colonne de B*. On définit : $x^t = (|\, b^t \,| , 0)$ où 0 est le vecteur nul à n-k-1 composantes . Comme $b \neq 0$ alors $x \neq 0$ de plus $x \in \{ 0 , 1\}^n$.

Maintenant, soit q = B |b| à composantes q_i avec i = 1 ,…, k+1 et donc : $q_i \equiv 0[2]$ pour i = 2,…,k+1 .

Supposons que q_1 est pair, donc par (ii) on a : $\exists\ y \in \{0, \pm 1\}^{k+1}$, $y \neq 0$

tel que : $By = 0$, ce qui contredit la non singularité de B ; et par suite q_1

est impair.

(ii) $\Rightarrow \exists\ y^1 \in \{0,1\}^{k+1}$ tel que : $By = \pm u^1 = (1, 0,\ldots\ldots,0) \in Z^{k+1}$

Mais alors, nous avons : $Bb = dBy^1$ et par conséquent $b = dy^1$, comme

b et y^1 sont dans $\{0, \pm 1\}^{k+1}$ et $b \neq 0$ alors $d = \pm 1$.*

4°) <u>Corollaire</u> : [9]

Soit A une mxn matrice à composantes 0 , ± 1. Alors, les deux

assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est totalement unimodulaire

(ii') Pour tout sous ensemble $J \subset \{1,\ldots, n\}$, il existe un partitionnement de J en deux ensembles J_1 et J_2 tels que :

$$\left| \sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \right| \leq 1 \ \text{pour}\ i = 1, \ldots, m$$

<u>Preuve</u> : a) Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (ii')

Soit $x \in \{0\,1\}^n$, d'après la condition (ii), $\exists\, y \in \{0,\pm 1\}^n$ tel que : $y \equiv x[2]$.

$$J = \{j \in N / x_j = 1\},\ J_1 = \{j \in N / y_j = 1\}, J_2 = \{j \in N / y_j = -1\}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} = A^i.x$$

Si $\sum_{j \in J} a_{ij} = 0$ alors $A^i y = 0 = \sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij}$

Sinon : $A^i y = \pm 1 = \sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \Rightarrow 1 = \left| \sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \right| \leq 1$

b)Montrons (ii') $\Rightarrow$(ii)

On définit x et y de la manière suivante : $x_j = 1\ \ \forall\ j \in J$ et $x_j = 0$ sinon,

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \in J_1 \\ -1 & i \in J_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{, on a donc} \quad y \equiv x\,[2]$$

Soit i tel que : $\sum_{j \in J} a_{ij} = A^i x = \sum_{j \in J_1} a_{ij} + \sum_{j \in J_2} a_{ij}$

• •<u>Cas 1</u> : $A^i x = 2k$ et $k \in Z$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} = 2k \Rightarrow \sum_{j \in J_1} a_{ij} = 2k - \sum_{j \in J_2} a_{ij}$$

or : $\left| \sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \right| = \left| 2k - 2 \sum_{j \in J_2} a_{ij} \right| \le 1 \Rightarrow \left| k - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \right| \le \frac{1}{2}$

or $a_{ij} \in \{0, \pm 1\}$ et $k \in Z$ donc $k - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \in Z \Rightarrow k = \sum_{j \in J_2} a_{ij}$

et par suite $\sum_{j \in J_1} aij = \sum_{j \in J_2} aij \Rightarrow \sum_{j \in J_1} aij - \sum_{j \in J_2} aij = A^i y = 0$

• •<u>Cas 2</u> : $A^i x = 2k + 1$ et $k \in Z$, $a_{ij} \in \{0, \pm 1\}$, d'où $\sum_{j \in J_1} aij = 2k + 1 - \sum_{j \in J_2} aij$

or : $\left| \sum_{j \in J_1} aij - \sum_{j \in J_2} aij \right| = \left| 2k + 1 - 2 \sum_{j \in J_2} aij \right| \le 1 \Rightarrow -1 \le 2k + 1 - 2 \sum_{j \in J_2} aij \le 1 \Rightarrow$

$$-2 \le 2k - 2 \sum_{j \in J_2} aij \le 0 \Rightarrow -1 \le k - \sum_{j \in J_2} aij \le 0$$

or : $a_{ij} \in \{0, \pm 1\}$, $k \in Z$, on a soit $k - \sum_{j \in J_2} aij = 0 \Rightarrow Aix = 2k + 1 = \sum_{j \in J_1} aij - \sum_{j \in J_2} aij$

d'où : $\sum_{j \in J_1} aij = \sum_{j \in J_2} aij + 1 \Rightarrow \sum_{j \in J_1} aij - \sum_{j \in J_2} aij = 1$

sinon : $k - \sum_{j \in J_2} aij = -1 \Rightarrow k = -1 + \sum_{j \in J_2} aij$, on a alors $\sum_{j \in J_1} aij = -1 + \sum_{j \in J_2} aij \Rightarrow A^i y = -1.$ *

II.1 <u>Matrice presque totalement unimodulaire</u> :

Pour caractériser les matrices totalement unimodulaires en termes de structure interdites, il est utile de caractériser les matrices qui sont, en un sens, minimales non totalement unimodulaires.

1°) <u>Définition</u> : Une matrice $C \in \{0,\pm1\}^{nxn}$ est dite presque totalement unimodulaire si :

(i) det $C \notin \{0,\pm1\}$ et (ii) det $C' \in \{0,\pm1\}$, pour toute sous matrice carrée propre C' de C.

***<u>Remarque 1</u>**:

Toute matrice non totalement unimodulaire où $A \in \{0,\pm1\}^{nxn}$ contient une $k \times k$ sous matrice qui est presque totalement unimodulaire où $k \geq 2$.

***<u>Exemple</u>** :

$$\text{Une matrice } C_n = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & L_3 & L_4 & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & L_5 & L_6 & 0 & \dots & & 0 \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ 0 & & & & 0 & & L_{2n-3} & L_{2n-2} \\ L_{2n} & 0 & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & & 0 & L_{2n-1} \end{pmatrix}$$

ou $Li = \pm 1$ pour $i = 1,\dots, n$ et $\prod_{i=1}^{i=2n} L_i = (-1)^{n-1}$.

Les matrices C_n ainsi que toutes les matrices obtenues à partir de C_n en permutant les lignes et les colonnes sont presque totalement unimodulaires. Il existe exactement $(n - 1)!\ 2^{n-1}$ matrices distinctes dans cette famille.

Considérons cependant les deux matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ A_1 et A_2 sont

presque totalement unimodulaires. Cependant, par des opérations élémentaires sur les lignes, A_1 peut être ramenée à la forme de C_4 et A_2 à la forme de C_7 (modulo ligne et colonne permutation).

2°) <u>Lemme 1</u> : [21] , [22]

Si $C \in \{0, \pm 1\}^{nxn}$ est presque totalement unimodulaire, alors det C = ±2

****<u>Preuve</u> :** Prenons d'abord toute matrice carrée de taille 2 non nulle avec des composantes 0 , ±1 ayant un déterminant égal à 0 , ± 1 ou 2.

Soit : $$C = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \xi_1 \in \{-1, 1\}$$

Alors : $$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ -\xi_1\xi_3 & 1 \end{pmatrix} . C = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1\xi_2 \\ 0 & \xi_4 - \xi_1\xi_2\xi_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \pm(\xi_4 - \xi_1\xi_2\xi_3)$$

Par conséquent, $\det C = \pm 2$, pour toute matrice carrée presque totalement unimodulaire de taille 2

Considérons maintenant : $n \geq 3$.

Alors, la sous matrice des n – 2 premières colonnes de C est de rang n – 2

En effet, il existe une sous matrice carrée D de taille n – 2 dans les n – 2 premières colonnes de C. Sans pertes de généralités, partitionnons C de la manière suivante :

$C = \begin{pmatrix} D & H \\ F & G \end{pmatrix}$ où $\det D = \pm 1$ car C est presque totalement unimodulaire.

Soit : $U = \begin{pmatrix} D^{-1} & H \\ -FD^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$, on a $\det U = \pm 1$

Comme $UC = \begin{pmatrix} I_{n-2} & D^{-1}H \\ 0 & G - FD^{-1}H \end{pmatrix}$, alors $G - FD^{-1}H$ a toutes les composantes égales à 0 ou ± 1.

Supposons le contraire, il existe alors une composante différente de 0 et de ± 1 à la ligne i et la colonne j. Notons cette composante correspondante dans G, g_{ij} , la colonne correspondante de H, h^j , et la ligne associée à F, f^i

On calcule : $$\begin{pmatrix} I_{n-2} & D^{-1}h^j \\ 0 & g_{ij} - f^i D^{-1} h^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ -f^i D^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & h^j \\ f^i & g_{ij} \end{pmatrix}$$

Ainsi C possède une sous matrice carrée de taille n – 1 qui est :

$\begin{pmatrix} D & h^j \\ f^i & g_{ij} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est différent de 0 et ± 1, ce qui contredit la nature de C et donc $\det C = \pm \det UC = \pm \det (G - FD^{-1}H) = \pm 2$.*

3°) <u>Théorème 3</u> : [5] , [10]

$A \in \{0,1\}^{nxn}$ est totalement unimodulaire si et seulement si A ne contient aucune sous matrice carrée A' telle que $\det A' = \pm 2$.

****Preuve**** :

a) *La condition nécessaire* est évidente

b) *Condition suffisante* : A ne contient aucune sous matrice carrée A' telle que $\det A' = \pm 2$ et A non totalement unimodulaire. Par la remarque 1, il s'ensuit que A contient une sous matrice carrée A' d'ordre k presque totalement unimodulaire et donc $\det A' = \pm 2$, impossible.*

4°) <u>Définition</u> : Soit $A \in \{0,\pm 1\}^{mxn}$ et $e_k = (1,\ldots,1)^t$ à k composantes.

Si $e_m^t.A \equiv 0\ [2]$ et $A.e_n \equiv 0\ [2]$, alors A est dite matrice eulérienne

***<u>Remarque 2</u>** : Si $A\in\{0,\pm 1\}^{m\times n}$ contient une sous matrice eulérienne alors A n'est pas totalement unimodulaire .

****<u>Preuve</u> :** Conséquence immédiate du théorème 1. En effet, soit A' une sous matrice non singulière de A qui est eulérienne.

Soit $A'.e_n \equiv 0\ [2]$ ($\exists h \in Z^m / A'.e_n = 2h$)

Si on résoud le programme linéaire en entier : $\max \{cx / x \in P(A, h)\}$

où $P(A, h) = \{x\in IR^n / Ax \leq h\ ,\ x \geq 0\}$; alors on a : $A'((1/2)\ e_n) = h$ et comme A' est non singulière, on a donc $(1/2)e_n$ est un point extrémal du polyèdre P(A, h) où h est entier ; du fait que ce point extrémal n'est pas entier et par le théorème 1, A serait donc non totalement unimodulaire .

5°) <u>Lemme 2</u> : [21] , [22]

Si $C\in\{0,\pm 1\}^{nxn}$ est presque totalement unimodulaire, alors C est eulérienne et $C^{-1} = (1/2)E - X$ où $X\in\{0,1\}^{nxn}$ et E une matrice carrée d'ordre n dont toutes les composantes sont égales à 1.

****<u>Preuve</u>** : Considérons $C^* = 2C^{-1}$. Par le lemme 1 et la règle de Cramer, la matrice C* a des composantes égales à 0, ±1. Supposons que C* a une composante égale à 0 et sans aucune restriction de généralités que cette composante se trouve dans la première colonne de C*. Soit c cette colonne et |c | le vecteur obtenu de c en prenant les valeurs absolues des composantes de c ; on a : C| c | $\equiv$ 2 | c | $\equiv$ 0 [2]. Puisque | c | est un vecteur non nul à composantes 0 et 1 avec au moins une composante égale à 0 et C est presque totalement unimodulaire, il s'ensuit par (ii) du théorème 2 qu'il existe $y \in \{0, \pm 1\}^n$, $y \neq 0$ tel que $Cy = 0$, ce qui contredit que C est non singulière et donc : $C^{-1} = (1/2)E - X$ est vérifiée et $CE = 2(I_n + CX)$ et $EC = 2(I_n + XC)$, ce qui prouve que C est eulérienne.*

6°) <u>Théorème 4</u> : [5]

$A \in \{0, \pm 1\}^{mxn}$ est totalement unimodulaire si et seulement si toute sous matrice carrée eulérienne de A est singulière.

****<u>Preuve</u>** :

a) *Condition nécessaire* : A est totalement unimodulaire, par la remarque 2, chaque sous matrice eulérienne de A est singulière.

b) *Condition suffisante*: Toute sous matrice eulérienne de A est singulière et supposons que A est non totalement unimodulaire, alors A contient une sous matrice carrée qui est presque totalement unimodulaire ; or par le théorème 2, cette sous matrice est eulérienne dont le déterminant est ± 2 , impossible.*

7°) <u>Lemme 3</u> : [21] , [22]

Si $C \in \{0, \pm 1\}^{nxn}$ est presque totalement unimodulaire, alors $e_n^t.Ce \equiv 2$ [4]

****<u>Preuve</u>** : Par le lemme 2 , on a $C^{-1} = (1/2)E - X \Rightarrow X = (1/2)E - C^{-1}$

$CX = (1/2)\, CE - I_n$ où $X \in \{0,1\}^{n\times n} \Rightarrow 2 \det X = \pm \det((1/2)\, CE - I_n)$

Soit : $Ce_n = 2h$ où $h \in Z^n$; posons : $H = (h,\dots,h)$ et par des opérations sur les lignes et les colonnes on calcule :

$$\det\left(\frac{1}{2}CE - I_n\right) = \det(H - I_n) = \pm\left(\sum_{i=1}^{n} h_i - 1\right) \text{ où } h_i \text{ sont les composantes de } h$$

$$\text{et donc : } 2\det X = \pm\left(\frac{1}{2}e_n^t Ce_n - 1\right) \Rightarrow e_n^t Ce_n = 2 \pm 4\det X \Rightarrow e_n^t Ce_n \equiv 0\,[2]*$$

8°) <u>Théorème 5</u> : [5]

$A \in \{0,\pm1\}^{mxn}$ est totalement unimodulaire si et seulement si toute sous matrice carrée eulérienne A' de A satisfait $e_k^t A' e_k \equiv 0\ [4]$ où k est la taille de A' .

****<u>Preuve</u>** :**

a) *Condition nécessaire* : A est totalement unimodulaire et soit A' une sous matrice carrée eulérienne de A de taille k. Par la condition (ii) du théorème 2, il existe $y \in \{+1,-1\}^k$ tel que : $A'y = 0$ (du fait que A' est eulérienne, d'où : $A'e_k \equiv 0\ [2]$ et $e_k \in \{1\}^k \Rightarrow y \equiv e_k\ [2]$).

Définissons :

$y' = (1/2)\,(e_k + y)$, où $y' \in \{0,1\}^k \Rightarrow A'e_k = A'(2y' - y) = 2A'y'$

$e_k^t A'e_k = 2\, e_k^t A'y'$; or A' est eulériene, on a alors $e_k^t.A' \equiv 0\ [2]$

d'où : $e_k^t A'e_k = 4h\, y'$ où $h \in Z^k$ et donc : $e_k^t A'e_k \equiv 0\ [4]$

b)*Condition suffisante* : Supposons que A n'est pas totalement unimodulaire ; par la remarque 1, A contient une sous matrice carrée eulérienne A' de A presque totalement unimodulaire de taille k ($k \geq 2$)

et par le lemme 3, on a $e_k^t A'e_k \equiv 2$ [4] , impossible.*

9°) <u>Lemme 4</u> : [5] , [21]

Soit $A \in \{0,\pm1\}^{mxn}$ une matrice eulérienne satisfaisant :

$e_m^t.Ae_n \equiv 2$ [4], alors il existe une sous matrice carrée eulériene A' de A de taille k telle que : $e_k^t A'e_k \equiv 2$ [4] et $2 \leq k \leq \min\{m, n\}$.

****<u>Preuve</u>** : Si A est totalement unimodulaire alors nous raisonnons comme dans la première partie du théorème 5 tel que : $e_m^t Ae_n \equiv 0$ [4]

Si A n'est pas totalement unimodulaire alors la preuve est déduite du théorème 5, car A n'est pas totalement unimodulaire, donc A contient une sous matrice carrée A' presque totalement unimodulaire et par suite A'est eulérienne. Or A n'est pas totalement unimodulaire et le théorème 5 dit qu'il existe une matrice eulérienne A' de A telle que : $e_k^t A'e_k \neq 0$[4] ;

A'est eulérienne, alors on a : $e_k^t A'e_k \equiv 2$ [4] .*

***<u>Remarque</u>** : Dans la définition des matrices eulériennes, on n'a pas exigé qu'elles soient carrées, nous pouvons donc énoncer le théorème 5 comme suit :

10°) <u>Théorème 6</u> : [5] , [21]

$A \in \{0,\pm1\}^{mxn}$ est totalement unimodulaire si et seulement si toute sous matrice eulérienne A'de A satisfait : $e_p^t.A'e_q \equiv 0$ [4], et $A' \in \{0,\pm1\}^{pxq}$

Preuve : comme dans le théorème 5 .

III. Les polyèdres presque entiers:

Soient les polyèdres : $P(A) = \{x \in IR^n / Ax \leq e ; x \geq 0\}$ où A est une mxn matrice à éléments 0 et 1 et $e = (1,\ldots,1)^t$ à m composantes et

$$P_I(A) = \text{conv}(P(A) \cap Z^n).$$

Soient $b^1,\ldots,b^r$ les points extrémaux de $P_I(A)$ et B la matrice ayant pour lignes $b^1,\ldots,b^r$ de taille rxn et $Q(B) = \{y \in IR^n / By \leq e ; y \geq 0\}$; e de taille r ; on définit $Q_I(B) = \text{conv}(Q(B) \cap Z^n)$

1°) Définition : Q(B) est dit l'antibloquant de $P_I(A)$ et la paire Q(B).

$P_I(A)$ est dite paire de polyèdres antibloquants

2°) Proposition 1 :[16]

Si $y^t.x \leq 1$ est une facette non triviale de $P_I(A)$ alors y est un point extrémal de Q (B).

Preuve : Si $y^t.x \leq 1$ est une facette non triviale, alors il existe n points extrémaux linéairement indépendants, d'où on peut partitionner B telle que $B = (B_1, B_2)^t$ où rang $B_1 = n$; or $By \leq e$ et B_1 est une matrice de base, on a donc $B_1y= e_1$ et $B_2y=e_2$ avec $e = (e_1, e_2)$, d'où y est un point extrémal de Q(B).

3°) Proposition 2 : [16]

Si y est un point extrémal de Q(B), alors $y^t.x \leq 1$ est une coupe de $P_I(A)$.

Preuve :

$P_I(A) \subset P(A)$.

Il suffit de montrer que $P_I(A) \subset P(A) \cap \{x \,/\, y^t.x \le 1\}$

Soit $x \in P_I(A) \Rightarrow \exists\, \alpha_i \ge 0$ et $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$; $\exists\, d_i \ge 0$ tels que

$x = \sum_{i=1}^{r} \alpha i\, b^i + \sum_{i=1}^{k} d_i\, t^i$, $1 \le k \le \infty$, où t^i est un rayon extrémal de $P_I(A)$;

or : $P_I(A)$ est un polytope alors $t^i = 0$. Donc :

$y^t.x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, y^t.b^i$, et $y^t.b^i \le 1 \Rightarrow y^t.x \le \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1 \Rightarrow x \in \{x \,/\, y^t.x \le 1\}$.

4°) <u>Propositon 3</u>: [16]

Si $x^t.y \le 1$ est une facette non triviale de $Q_I(B)$ alors x est un point extrémal de P(A).

****<u>Preuve</u>** :

a) Montrons d'abord que : $x \in P(A)$

(1) Soit a une ligne de A, on a : $ab^i \le 1$ $\forall\, i = 1,\ldots\ldots,r$ et $a^t \in \{0,1\}^n$

et par définition de B, on a : $a^t \in Q_I(B) \subset Q(B)$.

(2) $x^t.y \le 1$ est une facette de $Q_I(B)$, on a alors $x^t.a^t \le 1$ car $x^t.y \le 1$ est une coupe de $Q_I(B)$ et donc $a^t \in Q_I(B)$

$\forall$ a une ligne de A : $x^t.a^t \le 1$, on a donc $Ax \le e$

(3) $x \ge 0$ par l'absurde et la non trivialité de la facette, d'où $x \in P(A)$.

Supposons que x n'est pas un point extrémal de P(A), donc ils existent x_1, x_2 tels que : $x_1 \ne x \ne x_2$ et $0 < \lambda < 1$ / $x = \lambda\, x_1 + (1-\lambda) x_2$; or : $x^t.y \le 1$ est une facette de $Q_I(B)$, alors ils existent $y_1,\ldots,y_n$ point extrémaux linéairement indépendants de $Q_I(B)$ tels que : $x^t.Y = e^t$ où

$Y=(y_1,\ldots,y_n)$ et donc $[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]^t.Y = e^t$;
mais $x_1^t.Y \leq e^t$ et $x_2^t.Y \leq e^t$, on a donc $x_1^t.Y = e^t$ et $x_2^t.Y = e^t$ d'où

$x_1 = x_2$ car rang(Y) = n , contradiction.*

Par conséquence et analogie de ce qui précède, on a :

5°) <u>Proposition 4</u> : [16]

Si x est un pont extrémal de P(A) alors : $x^t.y \leq 1$ est une coupe de $Q_I(B)$.

6°) <u>Propriétés</u> : [23]

<u>(P1)♦</u> Si P(A) est un polyèdre presque entier, alors tout point extrémal $\overline{x}$ non entier de P(A) satisfait $0 < \overline{x_j} < 1$ pour $j = \overline{1,n}$.

****<u>Preuve</u>** :

Par définition de polyèdre presque entier, on a $\overline{x_j} > 0$ pour $j = 1,\ldots,n$.
Supposons $\overline{x_k} = 1$. Soit le vecteur $\overline{\overline{x}}$, tel que $\overline{\overline{x_j}} = \overline{x_j}$ pour $j \neq k$ et $\overline{\overline{x_k}} = 0$, est un point extrémal de P_k où $P_k = P(A) \cap \{x \in IR^n / x_1 = 0\}$ car $\overline{x}$ est un point extrémal de P(A) et à cause des définitions de $\overline{x}$ et P_k.
De (ii) de la définition du polyèdre presque entier, $\overline{\overline{x}}$ est un point extrémal entier, mais $\overline{x}$ est non entier de P(A), impossible.*

Définissons : $Q_j = Q(B) \cap \{y \in IR^n / y_j = 0\}$

<u>(P2)♦</u> Si P(A) est un polyèdre presque entier , alors Q_j et P_j constituent une paire de polyèdres antibloquants pour $j = 1,\ldots,n$

****<u>Preuve</u>** :

Pour tout point extrémal de P_j satisfaisant $\overline{x}_j = 0$, alors, par définition de l'antibloquant, Q_j est l'antibloquant de P_j pour $j = 1,\ldots,n$.

Dans l’autre sens : puisque $x \in P_j$, on a $y^t .x = 1$ et donc $y^{j\,t} .x = 1$,

où y^j est obtenu de y en enlevant la jème composante de y égale à 0 ;

et par suite, toute facette de P_j définit un point extrémal de Q_j pour

$j = 1,\ldots,n$. Or, tout point extrémal de Q_j définit un support de P_I et

$P_j \subset P_I(A)$ pour $j = 1,\ldots,n$, alors (P2) est démontrée.*

(P3)♦ Si P(A) est un polyèdre presque entier, alors la matrice B est à composantes 0 et 1 et les n polyèdres Q_j ont des points extrémaux entiers pour $j = 1,\ldots,n$

****Preuve** : de (P2) on a immédiatement (P3).

(P4)♦ Si P(A) est un polyèdre presque entier, alors on a :

soit (i) Q (B) a un point extrémal $\overline{y_j} = 1$, $j = 1,\ldots,n$

soit (ii) Q (B) est un polyèdre presque entier.

****Preuve** :

Par (P3), tout point extrémal de Q_j est entier pour $j = 1,\ldots,n$. Or P(A) est un polyèdre presque entier et Q(B) est l’antibloquant de $P_I(A)$ qui est différent de P(A) ; d’où Q(B) a au moins un point extrémal y qui n’est pas un point extrémal d’aucun Q_j ($j = 1,\ldots,n$). Donc, si Q(B) a seulement des points extrémaux entiers alors (i) est vraie, soit en alternant, (ii) est vraie.

***Remarque** : (P4) implique dans le cas (i) que :

$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ est l'unique facette non triviale de $P_I(A)$; d'où toutes les contraintes défini - ssant P(A) ne sont pas essentielles pour définir $P_I(A)$

(P5)♦ Si P(A) est un polyèdre presque entier tel que (ii) de (P4) est vérifiée, alors $Q_I(B)$ est l'antibloquant de P(A).

Preuve :

a) $\tilde{B}$ une $\tilde{r}$xn matrice dont les lignes sont les points extrémaux de P(A); en particulier, $\tilde{r} > r$, et $\tilde{B}$ contient B comme sous matrice propore. Pour simplifier les notations, on considère les r premières lignes de $\tilde{B}$ comme étant la matrice B

Soit x un point extrémal de P(A) et soit x^j le vecteur obtenu de x en enlevant la $j^{ème}$composante de x égale à 0 ; on a $x^j \in P_j$ et donc par le lemme de Farkas [26] :

" Une ligne a^i de la matrice A n'est pas essentielle pour définir P(A) si et seulement si a^i est dominée par une combinaison convexe des autres lignes de A, i.e., si et seulement si :

$$a^i \le \sum_{j=1}^{m} \alpha_j a^j \quad \text{où} \quad \alpha_1 \ge 0, \ldots\ldots, \alpha_m \ge 0 \quad \text{tels que} : \alpha_i = 0 \ \text{ et } \ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1 \text{ " },$$

on a :

$$x^j \le \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \, b^k \quad \text{où} \quad \lambda_k \ge 0 \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1 \ \text{ et } \ b^k \ \text{ est la kième ligne de } \ \tilde{B}.$$

Soit $y \in Q_I(B)$; comme (ii) de (P4) est vérifiée, on a donc : $y \in Q_j$ où $j \in \{1,\ldots,n\}$

Comme $Q_I(B) \subset Q(B)$, on a : $x^t.y = (x^j)^t.y \le \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \, b^k.y \le 1 \Rightarrow y \in Q(\tilde{B})$ lorsque $Q(\tilde{B})$ est l'antibloquant de P(A); d'où $Q_I(B) \subset Q_j(B) \subset Q(B)$.

b)*Réciproquement* : - Tout point extrémal de $Q(\tilde{B})$ définissant une facette de P(A) est nécessairement entier et donc un point extrémal de $Q_I(B)$.

- Tout point extrémal de Q_j ne définissant pas une facette de P(A) définit un support de P(A) qui est dominé par une combinaison convexe de toutes les facettes de P(A). Ainsi, on a encore qu'un tel point extrémal est aussi un point extrémal de $Q_I(B)$; d'où $Q_j \subset Q_I(B)$, ce qui veut dire que $Q_I(B)$ est l'antibloquant de $P(A)$.

7°) <u>Lemme 1.1</u> : [23]

Si $\bar{x}$ est un point extrémal non entier d'un polyèdre presque entier, alors pour toute sous matrice A_1 d'ordre $m\times n$ de A telle que $A_1 \bar{x} = e_n$, il existe une sous matrice B_1 de taille $n\times n$ de B satisfaisant :

$$B_1 A_1^t = E - I_n \quad (1)$$

De plus on a : $\bar{x} = (1 / (n-1))\, B_1^t.e_n$

****<u>Preuve</u>** : Soit $\bar{x}$ un point extrémal non entier de P(A) et pour $i = \overline{1,n}$, on pose : x^i tel que : $x^i_j = \begin{cases} \bar{x}_j & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Puisque $x^i \in P_i \subseteq P_I(A)$, il s'ensuit que le point $\tilde{x} = ((n-1)/n)\,\bar{x}$ est un élément de $P_I(A)$ car $P_I(A)$ est convexe. En effet :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x^i &= \frac{1}{n}\left[\left(0, x^1_2, x^1_3, \dots, x^1_n\right) + \left(x^2_1, 0, x^2_3, \dots, x^2_n\right) + \dots + \left(x^n_1, x^n_2, \dots, x^n_{n-1}, 0\right)\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\left(0, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n\right) + \left(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n\right) + \dots + \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, 0\right)\right] \\ &= \frac{n-1}{n}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n\right) = \frac{n-1}{n}\bar{x}\end{aligned}$$

Or $\bar{x} \notin P_I(A)$ et $\tilde{x}$ est un multiple scalaire de $\bar{x}$, il existe donc une facette non triviale F de $P_I(A)$ telle qu'il existe au moins s où $((n-1) / n) \leq s \leq 1$ et $s\,\bar{x} \in F$.

Or : $\dim F = n - 1$ et $0 \notin F$, alors il existe une sous matrice carrée B_1 d'ordre n de B telle que : $s.\bar{x} = \gamma\, B_1$ où

$$\gamma \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \gamma i = 1 \text{ et } \frac{n-1}{n} \leq s \leq 1 \quad (2)$$

Or, F est générée par n vecteurs linéairement indépendants, nous pouvons donc supposer sans perte de généralités que la matrice B_1 définie

dans (2) est non singulière. Soit A_1 une sous matrice carrée d'ordre n de A telle que : $A_1 \overline{x} = e_n$

Par conséquent : $s\,(A_1\overline{x})^t = s\, e_n^t = \gamma\, B_1 .A_1^t$ (3)

Posons $D = B_1 .A_1^t$, alors D est à composantes 0 et 1. Cependant, D ne

peut pas contenir une ligne formée seulement de 1 , car sinon, soit b la

ligne de B_1 telle que : $b\, A_1^t = e_n^t$; d'où $A_1 b = e_n$ et par suite $\overline{x} = b^t$,

ce qui contredit le fait que $\overline{x}$ n'est pas entier. Ainsi, en notant d_i la

somme des composantes de la ligne D, on a : $d_i \le n - 1$ pour $i = 1,\dots,n$.

Comme : $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i d_i = s.n \ge n - 1$ et si $\gamma_i > 0$ alors $d_i = n - 1$.

De plus, on a : $s = (n - 1 / n)$ car $\gamma_i \ge 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1$

Supposons maintenant que : $\gamma_1 \le \dots \le \gamma_k$ avec $k < n$ tels que : $\gamma_1 > 0$ et

$\gamma_i = 0$ pour tout $i = k+1,\dots, n$.

Comme D n'est pas singulière, on peut ranger les colonnes de D de telle

sorte qu'elle ait la forme suivante :

$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$ où D_1 est une matrice carrée de taille k ayant des zéros seulement sur la diagonale principale et les autres composantes égales à 1 et D_2 une k x (n - k) matrice à composantes toutes égales à 1

Si $k < n$, alors $\{(n - 1) / n\}\, e^t = \gamma\, D$ (4) et on ne peut pas avoir une solution telle que : $\gamma \ge 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1$

Réciproquement on a :

$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1 \Rightarrow k \ge 1$, d'où $k = n$ et D a la forme générale $E - R$ où R est une nxn matrice de permutation. On a $R^t.R = I_n$ et par une suite d'arrangement des lignes de B_1, on déduit (1) .

En effet : $\gamma = [(n-1)/n]\, e_n^t.D^{-1} = (1/n)\, e_n^t$ (5) car $D = E - I_n$ et
$D^{-1} = (1/n-1)\, I_n$; et de (2) on a :

$$(\bar{x})^t = \frac{1}{n-1} e_n^{\,t}.B_1 \qquad (6) \qquad \text{car : } s = \frac{1}{n-1}.*$$

8°) <u>Remarque 1.2</u> : Si P(A) est un polyèdre presque entier et le cas (i) de (P4) est vérifié, alors : $B = B_1 = I$ et par le lemme 1.1, on a : $A_1 = E - I$.

Toute autre ligne de A n'appartenant pas à A_1 doit être soit identique à une ligne de A_1 (une telle ligne a $n-1$ composantes égales à 1), soit dominée (dans le sens vectoriel) par une certaine ligne de A_1.

9°) <u>Lemme 1.3</u> : [23]

Tout point extrémal non entier d'un polyèdre presque entier possède exactement n points extrémaux adjacents.

****<u>Preuve</u>** : Soit $\bar{x}$ un oint extrémal non entier de P(A) et A_1 est telle que

$A_1\,\bar{x} = e_n$ où A_1 est non singulière.

Soit a une ligne de A n'appartenant pas à A_1 et supposons que $a^t.x = 1$.

Par le lemme 1 .1, il s'ensuit que $A_1^{-1} = \overline{X} - B_1^t$ où $\bar{X}$ est la matrice à n colonnes toutes égales à $\bar{x}$. Par conséquent : $z^t = a^t.A_1^{-1} = e_n^t - a^t.B_1^t \geq 0$;

et par (6) : $z^t.e_n = n - (n-1)\, a^t.\bar{x} = 1.$

Donc : $a^t.x \leq 1$ est un support de P(A) et donc non essentiel pour définir P(A) ; d'où, il existe n contraintes essentielles de : $A.x \leq e_n$ qui sont pointées en $\bar{x}$, et tout point extrémal, qui est adjacent à un point extrémal $\bar{x}$ non entier de P(A) qui est presque entier, appartient à un polyèdres P_j où $j \in \{1,\ldots,n\}$.*

10°) <u>Lemme 1.4</u> : [23]

Si $\bar{x}$ est un point extrémal d'un polyèdre presque entier P(A) et $A_1 \bar{x} = e_n$,

alors $\bar{y}^t = (1 / n - 1)\, e_n^t.A_1$ (7) est un point extrémal de Q(B) satisfaisant : $\bar{x}_j\, \bar{y}_j = (1 / n - 1)$ (8) pour $j = 1,\ldots,n$

De plus : $y^t.x \leq 1$ est une facette de $P_I(A)$.

<u>Preuve</u> : Pour montrer que $\bar{y}$ défini dans (7) est un point extrémal de Q(B), on rappellera que B_1 est une matrice carrée d'ordre n non singulière.

De plus : $B\,\bar{y} = (1/(n-1))\, B_1 A_1.e_n^t = e_n$; d'où $\bar{y}$ est un point extrémal de Q(B). Soit b^t une ligne de B non contenue dans B_1, alors :

$b^t.\bar{y} = (1/(n-1))\, b^t A^t e_n \leq 1$ car $b^t.A_1^t \leq e_n^t$ avec une inégalité stricte pour au moins une composante.

Par définition de B, ceci entraîne que : $\bar{y}^t.\bar{x} \leq 1$ est une facette de $P_I(A)$.

Pour montrer (8), on utilisera les formules (1), (6) et (7) ;

d'où : $\bar{x}^t.\bar{y} = (1 / n - 1)$. De plus, soit y^i tel que :

$$y_j^i = \begin{cases} \overline{y}_j & \text{pour } j \neq i \\ 0 & \text{pour } j = i \end{cases} \qquad \text{avec } j = \overline{1,n}$$

d'où $(y^i)^t.x \leq 1$ est un support de P(A) car $P(A) \cap \{x \,/\, (y^i)^t.x \leq 1\} \neq \emptyset$.

Parconséquent : $\overline{y}^i . \overline{x}^i \geq \dfrac{1}{n-1}$ pour $i = 1,\dots,n$.

Puisque $x^t.y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^i . \overline{y}^i = \dfrac{n}{n-1}$ d'où (8) est démontrée.*

11°) <u>Théorème 1.5</u> : [23]

Si P(A) est un polyèdre presque entier, alors P(A) possède exactement un seul point extrémal non entier et :

$P_I(A) = P(A) \cap \{x \in IR^n \,/\, \overline{y}^t.x \leq 1\}$ où $\overline{y}$ est un point extrémal de Q(B) donné par (7) .

****<u>Preuve</u>** : Soient $\overline{x}$, x* deux points extrémaux différents de P(A), alors il existe deux points extrémaux $\overline{y}$ et y* tels que : $\overline{y} \neq y^*$ de Q(B) donnés par la formule (7) et tels que (8) est vérifiée pour les points $(\overline{x}, \overline{y})$ et (x*,y*) ; par le lemme 1.2, on a : $\overline{x}^t.y^* \leq 1$.

Dans l'autre sens et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$(\overline{x}^t.y^*)(\overline{y}^t.x^*) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1} \frac{x_j}{x^*_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1} \frac{x^*_j}{\overline{x}_j}\right) \geq \frac{n^2}{(n-1)^2} \geq 1$$

Par conséquent, P(A) ne peut pas avoir deux points extrémaux non entiers différents. De plus, par le lemme 1.3, $\overline{y}^t.x \leq 1$ est une facette de $P_I(A)$ qui n'est pas une facette de P(A). Par le lemme 1.2, $\overline{x}$ est un point extrémal de P(A) qui est presque entier avec x non entier possédant exactement n points extrémaux entiers adjacents et comme $\bar{x}$ est unique

alors : $P_I(A) = P(A) \cap \{x \in IR^n \,/\, y^t.x \leq 1\}$.

Par le lemme 1.3, la matrice B a n lignes ; d'où : $B.\bar{y} \leq 1$; or les n lignes de B sont linéairement indépendantes, par définition de B et on a n points extrémaux adjacents alors le théorème 1.5 est démontré.*

12°) <u>Remarque 1.6</u> : Il s'ensuit du théorème 1.5 que Q(B) a aussi exactement un point extrémal non entier si P(A) est un polyèdre presque entier tel que (ii) de (P4) est vérifiée.

13°) <u>Théorème 1.7</u> :[23]

Si P(A) est un polyèdre presque entier, alors le point extrémal non entier de P(A) satisfait : $\bar{x} = v.e_n$ où $v = (\det A_1)^{-1}$ et le point extrémal de Q(B) donné par (7) satisfait à $\bar{y} = w.e_n$ où $w = (\det B_1)^{-1}$; de plus : $v\,w = (1 / n - 1)$.

****<u>Preuve</u>** : De la formule (1) $B_1A_1 = E - I_n \Rightarrow (vw)^{-1} = n - 1$.

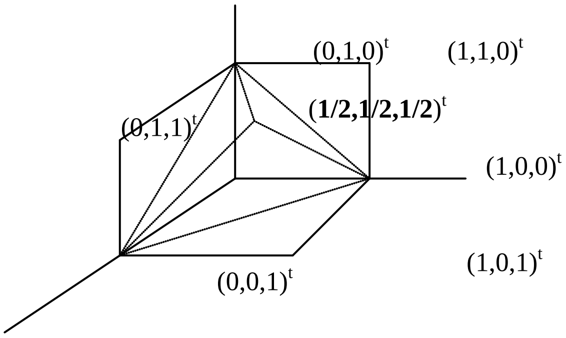
Par la règle de Cramer, il découle que $\bar{x} = v.h$ et $\bar{y} = w.f$ où h et f sont des vecteurs entiers. De la formule (8), pour $j = 1,\dots,n$ on a :

$$\bar{x}_j.\bar{y}_j = (vw)h_j.f_j = \frac{1}{n-1}h_j.f_j = \frac{1}{n-1} \Rightarrow h_j.f_j = 1 \quad \forall\, j = \overline{1,n}$$

comme h_j et f_j sont entiers alors $h_j = f_j = 1$. *

***<u>Remarque</u>** : Le théorème 1.5 affirme que les polyèdres presque entiers définis à partir des matrices « 0,1 » sont pointés dans le sens qu'ils ont exactement un seul point extrémal non entier et que ce point est contenu dans l'intérieur d'un cube unité de IR^n ; et nous avons par le théorème, la forme exacte d'un tel point extrémal, d'où une description explicite de l'enveloppe convexe des points extrémaux d'un polyèdre presque entier. Ceci va être utile dans ce qui suit pour caractériser les matrices « 0,1 » associées aux polyèdres presque entiers.

****<u>Exemple</u>** :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

III.1 <u>Matrice « 0,1 » presque parfaite</u> :

1°) <u>Définitions</u> :

a) Une matrice A d'ordre mxn est dite presque parfaite si le polyèdre : $P(A) = \{ x \in IR^n \,/\, Ax \leq e \;;\; x \geq 0 \}$ est presque entier.

b) Une matrice A' à éléments « 0,1 » d'ordre nxk est dite ''ayant la propriété $\pi_{\beta,k}$'' si :

A' contient une matrice carrée A'_1 non singulière d'ordre k dont les sommes des éléments de chaque ligne et colonne sont égales à β ;

et chaque ligne de A' n'appartenant pas à A'_1 est soit composante par composante égale à une certaine ligne de A'_1 ou bien une ligne dont la somme des éléments est strictement inférieure à β.

***Remarque** : Le théorème 1.7 va être utilisé maintenant avec le théorème 1.5 et le lemme 1.3 pour caractériser les matrices presque parfaites.

2°) Théorème 2.1 : [23]

Soit A une mxn matrice à éléments « 0,1 ». Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est presque parfaite.

(ii) A a la propriété $\pi_{\beta,n}$ pour un β satisfaisant :

$$\beta = n - 1 \qquad \text{ou} \qquad 2 \le \beta \le [(n-1)/2] \quad \text{et} \quad n \equiv 1\ [2]$$

De plus, A ne contient aucune sous matrice d'ordre mxk ayant la propriété $\pi_{\beta,k}$ pour $2 \le \beta \le k - 1$ et $k < n$.

****Preuve** : a) (i) $\Rightarrow$ (ii)

Si A est presque parfaite alors le polyèdre P(A) défini précédemment est presque entier. Par le théorème 1.2, P(A) possède exactement un seul point extrémal non entier $\bar{x}$; par le théorème 1.7 on a : $\bar{x} = v.e_n$ où $v = (\det A_1)^{-1}$ et $A_1.\bar{x} = e_n$; d'où $A_1.e_n = v^{-1}.e_n$.

Par le théorème 1.7, le point extrémal $\bar{y}$ de Q(B) donné par (7) satisfait: $\bar{y} = we_n$ où $w = (\det B_1)^{-1}$; d'où $e_n^t.A_1 = w(n-1)e_n^t = v^{-1}.e_n^t$; ainsi A_1

a la somme des lignes et colonnes égale à $\beta = \det A_1$ et $n \equiv 1\ [2]$.

Soit a^t une ligne de A n'appartenant pas A_1 telle que : $a^t.e_n = \beta$;

par la preuve du lemme 1.3, on a : a^t est une combinaison convexe des lignes de A_1 où : $a^t = \gamma A_1$; $\gamma_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1$. D'où par le lemme1.1, on a :

$a^t.B_1 = \gamma A_1 B_1$, avec : $\gamma A_1 B_1 = e - \gamma$

il s'ensuit alors que γ est entier et a^t est égale composante par

composante à une ligne de A_1.

Supposons à présent que : $\beta < n - 1$

Si $\beta \geq [(n-1)/2] + 1$ alors $z\,\beta = v^{-1}w^{-1} = n - 1$, où $z = w^{-1}$;

$z < 2$ et z est entier alors $z = 1$ et $\beta = n - 1$, donc :

$[(n-1)/2] + 1 \leq \beta < n - 1$, impossible ; donc (ii) est démontrée.

b)(ii) $\Rightarrow$ (i)

(ii)implique que P(A) défini à partir de A possède au moins un point extrémal non entier. Supposons qu'il existe $j \in \{1,\ldots,n\}$ tel que :

$P_j = P(A) \cap \{x \in IR^n / x_j = 0\}$ possède un point extrémal non entier x .

Soit $S = \{k \in N / x_k = 0\}$ où $N = \{1,\ldots,n\}$. Alors :

$P_S = P_j \cap \{x \in IR^n / x_k = 0 ,\ k \in S\}$ satisfait $P_S \subset P_j$ et P_S possède un point extrémal non entier.

En considérant le polyèdre : $P_j = P_S \cap \{x \in IR^n / x_j = 0\}$ pour $j \in N - S$,

nous aurons : soit chaque P_j possède seulement des points extrémaux entiers pour tout j dans $N - S$ soit le contraire.

Dans le dernier cas, nous répétons le processus décrit ci dessus. De cette manière, nous obtiendrons en un nombre fini de pas un polyèdre P` presque entier inclus dans P(A). Par la première partie de la preuve, nous obtenons une sous matrice d'ordre mxk de A ayant la propriété interdite pour $k < n$; ceci contredit (ii).

***Remarque** : Chaque polyèdre avec des points extrémaux non entiers contient un polyèdre P` presque entier.

3°) Théorème 2.2 : [23] , [24]

Soit A une mxn matrice à éléments « 0,1 »; A est parfaite si et seulement si A ne contient aucune sous matrice A' d'ordre mxk ayant la propriété $\pi_{\beta,k}$ pour :

$$2 \le \beta \le [(k-1)/2] \quad \text{ou} \quad \beta = k-1 \quad \text{et} \quad 3 \le k \le \min\{m , n\}.$$

***Remarque** : La preuve de ce théorème sera traitée dans la partie concernant les matrices parfaites et les graphes parfaits.

4°) Lemme 2.3 : [23]

Soit A une mxn matrice à éléments « 0,1 ».P(A) est un polyèdre presque entier si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\max\{e_n^t.x \,/\, x \in P(A)\}$ est entier

(ii) $\max\{q^t.x \,/\, x \in P(A)\}$ est entier pour tout vecteur q à composantes « 0,1 », où : $\sum_{i=1}^{n} qi \le n-1$.

****Preuve** :

P(A) est un polyèdre presque entier, par le théorème 2.1, on a (i) et (ii) qui en découlent.

b) (ii) implique que A ne peut pas contenir une sous matrice de taille mxk ayant la propriété $\pi_{\beta,k}$. De plus (i) implique qu'il existe un point extrémal non entier, donc par le théorème 2.2 , A doit contenir une sous matrice d'ordre mxk ayant la propriété $\pi_{\beta,k}$ pour $k \leq n$ d'où $k = n$. Donc A possède elle même la propriété $\pi_{\beta,k}$ pour $2 \leq \beta \leq n - 1$, d'où P(A) est un polyèdre presque entier.*

D'après les remarques 1.2 et 1.6, on déduit :

١- Si P(A) est un polyèdre presque entier, alors soit $Q(B) = K^n$ soit Q(B) est un polyèdre presque entier.

٢- Si P(A) est un polyèdre presque entier et $Q(B) = K^n$, alors A possède la propriété $\pi_{\beta,n}$ pour $\beta = n - 1$.

III.2 <u>Polyèdre parfait et matrice parfaite</u> :

Soient A , P(A) et $P_I(A)$ définis dans III.

1°) <u>Définition 1</u> : P(A) est un polyèdre parfait si $P(A) = P_I(A)$

2°) <u>Définition 2</u> : A est parfaite si P(A) est parfait.

D'après le théorème 2.2 et la définition 2, on a le théorème suivant :

3°) <u>Théorème 1</u> : [23]

P(A) est un polyèdre parfait si et seulement si A n'a pas la propriété $\pi_{\beta,k}$ pour : $2 \leq \beta \leq [(k-1)/2]$ ou bien $\beta = k - 1$ et $3 \leq k \leq \min(m,n)$.

4°) <u>Théorème 2</u> : [23]

$$P(A) = P_I(A) \Leftrightarrow \max\{qx / x \in P(A)\} \equiv 0 \ [1] \qquad \forall\, q \in \{0,1\}^n$$

****Preuve** :

En programmation linéaire, l'optimum est atteint en un point extrémal ; comme les points extrémaux de ce polyèdre sont entiers et q entier, alors l'optimum est aussi entier.

Réciproquement : Supposons que $P(A) \neq P_I(A)$, donc A n'est pas parfaite et par suite elle contient une matrice presque parfaite de taille mxk et d'après le lemme 2.3, on a contradiction.*

***Remarque** : Toute matrice à éléments « 0,1 » qui est totalement unimodulaire telle que $b = e$ est donc parfaite

III.3 Matrice parfaite et graphe parfait :

Dans cette partie, nous allons énoncer des définitions classiques en théorie des graphes que nous allons utiliser par la suite. Le lecteur pourra se référer à [2], [11].

1°)Généralités sur les graphes :

a)Graphe :Un graphe est la donnée d'un triplet G = (V,E,I) où V et E sont des ensembles finis , appelés respectivement ensemble des sommets et ensemble des arêtes :

- I est une application de E dans l'ensemble $\mathcal{P}(V)$ des parties de V telle que quelle que soit e dans E, l'image I(e) a un cardinal égal à 2.

- Si $x \in V$ et $x \in I(e)$, on dit que x et e sont incidents l'un à l'autre.

- Le cardinal de V noté $|V| = n$ est appelé ordre du graphe G.

- Deux arêtes sont parallèles si elles possèdent les mêmes extrémités.

b)<u>Relation d'adjacence</u> : Deux sommets x et y sont dits adjacents s'il existe une arête e qui leur est incidente. On dit aussi que e relie x à y. En général, on note une arête e reliant deux sommets x et y , e = xy.

En particulier, si x = y alors l'arête e = xx est dite boucle.

c) <u>Voisinage d'un sommet</u> : Si $xy \in E$, on dit que x est un voisin de y et vice versa. On note N(x) l'ensemble de tous les voisins de x.

$$N(x) = \{y \in V \ / \ xy \in E\}$$

d) <u>Degré d'un sommet</u> : On appelle degré d'un sommet $x \in V$, et on noté $d_G(x)$ le nombre d'arêtes incidentes à x.

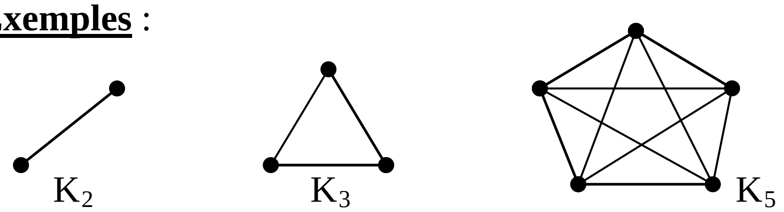
e) <u>Graphe simple</u> : Un graphe G = (V,E) est dit simple s'il est sans boucle et sans arêtes parallèles.

f) **<u>Graphe complet</u>** :

Un graphe G = (V,E) est dit complet si $\forall x, y \in V$, $xy \in E$.

Un graphe complet à n sommets est noté K_n

****<u>Exemples</u>** :



g) <u>Sous graphe engendré par un sous ensemble V' de V</u> :

(Sous graphe induit)

Soit G =(V,E) un graphe et soient $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.

- On dit que G' = (V',E') est un sous graphe de G si pour toute arête e de E', les extrémités de e sont dans V'.

- Si V’ est une partie de V, le sous graphe engendré par V’ est le graphe noté $G_{V'}$ dont l’ensemble des sommets est V’ et l’ensemble des arêtes est égal à l’ensemble des arêtes de G dont les extrémités sont des sommets de V’.

- Pour tout sous graphe induit G’=(V’, E’) de G = (V,E), le vecteur d’incidence q de G’ à n composantes est défini par :

$$q_{v_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in V' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

h) <u>Sous graphe engendré par un sous ensemble E’ de E</u> :

On appelle sous graphe engendré par $E' \subset E$ noté G[E’], le sous graphe de G dont l’ensemble des arêtes est E’ et dont l’ensemble des sommets est égal à l’ensemble des extrémités des arêtes de E’.

i) <u>Graphe partiel</u> : On appelle graphe partiel de G tout sous graphe de G de la forme G’ =(V,E’), $E' \subset E$.

j) <u>Stable</u> : On appelle stable S ($S \subset V$) d’un graphe G, un ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents (ie : $\forall x, y \in S$, $xy \notin E$).

k) <u>Clique</u> : On appelle clique de G un ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet.

l) <u>Chaîne</u> :

- Une chaîne d’un graphe G =(V,E) est une suite alternée $P = x_0 e_1 x_1 \ldots e_k x_k$ de sommets et d’arêtes telle que pour $1 \le i \le k$ les extrémités de e_i sont x_{i-1} et x_i et $e_i \neq e_j$ si $i \neq j$.

- La longueur d'une chaîne *P* est le nombre d'arêtes de *P*.

m) <u>Cycle</u> : Un cycle C d'un graphe G = (V,E) est une chaîne simple

$P = x_0 e_1 x_1 \ldots e_k x_k$ tel que $x_0 = x_k$.

- Un cycle pair (resp.impair) est un cycle de longueur paire (resp.impaire).
- Une corde d'un cycle est une arête qui relie deux sommets non consécutifs.

Nous allons donner une caractérisation des matrices à éléments « 0,1 » qui sont parfaites en structure de matrices interdites qu'on liera à la notion de graphes parfaits.

2°) <u>Définition 1</u> : Soit A une mxn matrice à éléments « 0,1 ». Elle est dite matrice des cliques d'un graphe non orienté à n sommets si ses lignes sont les vecteurs d'incidence de toute clique de G.

Nous pouvons permettre à A de contenir un nombre arbitraire de vecteurs d'incidence de sous graphes complets. Ceux ci, cependant, ne jouent aucun rôle dans le contexte discuté ici, du fait que de telles lignes sont dominées par le vecteur d'incidence d'un sous graphe complet maximal ou clique de G, et donc sont essentielles pour définir le polyèdre P(A).

Soit G=(V,E) un graphe simple, on appelle le complémentaire de G, le graphe noté $\overline{G}$ défini par $\overline{G}=(V, \overline{E})$ tel que : $\forall x, y \in V, xy \in E \Rightarrow xy \notin \overline{E}$

3°) <u>Définition 2</u> : $\alpha(G)$ est le cardinal maximal d'un stable de G

4°) <u>Définition 3</u> : $\theta(G)$ est le nombre minimal de cliques de G .

5°) <u>Définition 4</u> : On appelle nombre chromatique de G , le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de sorte que deux sommets adjacents soient coloriés par deux couleurs différentes.

Ce nombre est noté $\chi(G)$

6°) <u>Définition 5</u> : $\omega(G)$ est le cardinal maximal d'une clique de G

7°) <u>Définition 6</u> : Un graphe est dit χ- parfait si $\chi(G') = \omega(G')$ pour tout sous graphe induit G' de G.

8°) <u>Définition 7</u> : Un graphe est dit α- parfait si $\alpha(G') = \theta(G')$ pour tout sous graphe induit G' de G.

9°) <u>Définition 8</u> : Un graphe G est parfait s'il est à la fois α- parfait et χ- parfait

****<u>Remarque</u>** : Les nombres $\alpha(G')$ et $\theta(G')$ constituent les solutions des programmes linéaires entiers suivants :

$$(IP) \quad \alpha(G') = \max \{ qx \,/\, Ax \le e_m \ , \ x \in \{0,1\}^n \}$$

$$(DP) \quad \theta(G') = \min \{ ye_m \,/\, yA \ge q, \ y \in \{0,1\}^m \}$$

où q est le vecteur d'incidence de G'.

Notons que (IP) et (DP) sont (excepté pour la stipulation d'intégralité) une paire de programmes linéaires duaux. Du fait de la contrainte d'intégralité pour des graphes arbitraires et des matrices A à éléments

« 0,1 », nous allons faire l'exception d'un saut de dualité, c'est à dire : $\alpha(G') < \theta(G')$ pour certains sous graphes partiels G' de G. En effet, de la théorie de la dualité en programmation linéaire [7], on a :

(9) $\alpha(G') \leq \max\{ qx / Ax \leq e , x \geq 0 \} = \min \{ ye / yA \geq q , y \geq 0\} \leq \theta(G')$

On sait de plus qu'une clique dans G est représentée par un stable dans $\overline{G}$ et réciproquement, d'où : $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$ et $\chi(\overline{G}) = \theta(G)$.

Soit B la rxn matrice clique de $\overline{G}$, les nombres $\omega(G')$ et $\chi(G')$ constituent les solutions des programmes linéaires entiers :

$(\overline{IP})$ $\omega(G') = \max \{ qx / Bx \leq e_r , x \in \{0 ,1\}^m \}$

$(\overline{DP})$ $\chi(G') = \min\{ ye_r / yB \geq q, y \in \{0,1\}^r \}$ où q est le vecteur d'incidence de G'.

Par analogie à (9) on a : $\omega(G') \leq \chi(G')$ (10)

Soit $Q(B) = \{x \in IR^n / Bx \leq e_r ; x \geq 0 \}$ associé à la matrice cliques de $\overline{G}$ et $P(A) = \{x \in IR^n / Ax \leq e_m ; x \geq 0 \}$ associé à la matrice cliques de G.

D'après ce qu'on a vu précédemment, on déduit que Q(B) (respectivement P(A)) est l'antibloquant de $P_I(A)$ (respectivement de $Q_I(B)$).

Le théorème qu'on va énoncer est le théorème fondamental des graphes parfaits énoncé par Lovasz [17], [18] et caractérisé du point de vue polyédral (en entier) par Chvatal et Fulkerson [6] , [8].

10°) <u>Théorème 3.1</u> : [17] , [18]

Soient G un graphe fini non orienté à n sommets, A la mxn matrice des cliques de G et B la rxn matrice des clique de $\overline{G}$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) P(A) possède des points extrémaux entiers.

(ii) G est α- parfait.

(iii) G est χ- parfait.

(iv) Q(B) possède des points extrémaux entiers.

<u>Preuve</u>** :

(i) est vérifiée, comme Q(B) est l'antibloquant de $P_I(A)$ et

$P_I(A) = P(A)$ alors (iv) est vérifiée.

Par un raisonnement symétrique,(i) et (iv) sont équivalentes.

D'où, il suffit de prouver l'équivalence de (i) et (ii) car par un raisonnement symétrique, l'équivalence de (iii) et (iv) provient du fait que le complémentaire de G est $\overline{G}$ et $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$.

Supposons que (ii) est vraie, on a alors par (9) $\max\{qx / x\in P(A)\} \equiv 0$ [1] $\forall\ q\in \{0,1\}^n$ et donc par le théorème 3 de la partie III.2, on a (i).

Supposons que (i) est vraie, alors $\alpha(G') = \max\{qx / x\in P(A)\}$ pour tout sous graphe G' de G où q est le vecteur d'incidence de G'. ; pour montrer que (ii)est vraie, on a d'après[3], [8]et [18] que le programme linéaire dual : $z(q) = \min\{ye_m / yA \geq q ,\ \ y \geq 0\}$ possède une solution entière pour tout $q \in \{0,1\}^n$. En effet, ceci est vrai pour $q = 0_{IR^n}$

Supposons que ceci est vrai pour tout vecteur q à composantes « 0,1 » de longueur : $\sum_{i=n}^{n} q_i \leq k$. Soit $q \in \{0,1\}^n$ de longueur $k+1$ et $\bar{y}$ une solution optimale telle que : $\bar{y}\, e_m = z(\bar{q})$ et $0 < \bar{y} < 1$.

Alors, la ième ligne a^i de A satisfait : $\bar{q}.(a^i)^t > 0$.

Soit $\bar{\bar{q}}$ le vecteur obtenu de $\bar{q}$ en enlevant de $\bar{q}$ toutes les composantes nulles pour lequel $\overline{q_i} = a_i^i = 1$; on voit que : $\bar{\bar{q}} \in \{0,1\}^n$ de longueur $\leq k$ et par l'hypothèse d'induction, il existe une solution entière $\bar{\bar{y}}$ telle que : $\bar{\bar{y}} e_m = z(\bar{\bar{q}})$ et de plus $\bar{\bar{y}}_i = 0$.

Or $\bar{y}$ est optimal pour $q = \bar{q}$ et réalisable pour $q = \bar{q} = \bar{\bar{q}}$ dans le programme linéaire précédent, on a donc : $z(\bar{\bar{q}}) < z(\bar{q})$. Puisque $z(\bar{q})$ et $z(\bar{\bar{q}})$ sont entiers, le vecteur y^* défini par : $y^* = \overline{y_j}$ pour tout $j \neq i$ et $y^*_i = 1$ est une solution optimale à composantes « 0,1 » telle que $z(\bar{q}) = \dot{\theta}(G')$, et donc (i) et (ii) sont

équivalentes.*

Par les notions vues dans III.2 et de ce que vient de montrer, on peut reformuler le théorème du graphe parfait du à C.BERGE [3] comme ce qui suit :

« Un graphe G est parfait si et seulement si son complémentaire $\overline{G}$ est parfait ».

En utilisant ce concept, Claude Berge [15] avait formulé le théorème suivant:

« Un graphe G est parfait si et seulement si G ne contient aucun cycle impair sans corde, de même que son complémentaire. »

<u>Remarque</u> : Un graphe est dit imparfait minimal si G n'est pas parfait et tout sous graphe induit propre G’ (ie .G’≠ G) de G est parfait.

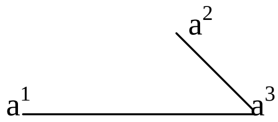
Par analogie de ce qu’on a vu dans les parties précédentes, un graphe G est presque parfait si et seulement si P(A) défini dans cette partie est un polyèdre presque parfait.

11°) <u>Définition 9</u> : Soit A une mxn matrice à éléments « 0,1 ».On définit le graphe d’intersection G associé à A par G = (V,E) dont les sommets correspondent aux lignes de A et deux sommets de G sont reliés par une arête si pour les lignes a_i et a_j correspondantes , il existe $k \in \{1,\dots,n\}$ tel que :

$$a^k_i = a^k_j = 1$$

****<u>Exemple</u>** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



G

Un tel graphe G est fini et simple.

D’après les définitions vues précédemment et de ce qu’on vient de voir, on a : « A est parfaite si et seulement si le graphe associé G est parfait »

Maintenant, prouvons le théorème 2.2 énoncé dans III.1

12°) <u>Théorème</u> : [23] , [24]

Soit A une mxn matrice à composantes « 0,1 ». Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est parfaite.

(ii) Pour β tel que $3 \le \beta \le n$, A ne contient aucune sous matrice A’ de taille mxk ayant la propriété $\pi_{\beta,k}$.

****Preuve** :**

Supposons que (i) est vraie et (ii) fausse. Alors il existe une mxk sous matrice A' de A ayant la propriété $\pi_{\beta,k}$ pour $\beta \geq 2$ et $k \geq 3$. Supposons que les colonnes de A ont été ordonnées de sorte que A' coincide avec les k premières colonnes. Alors $\bar{x}$ défini par : $\bar{x}_j = (1 / \beta)$ pour $j = 1,\ldots,k$ et $\bar{x}_j = 0$ pour $j = k+1,\ldots.,n$ est un point extrémal fractionnaire du polytope P(A) ; or par définition de A , ceci est impossible.

Supposons que A est telle que (ii) soit vraie, alors A doit être parfaite car sinon P(A) n'est pas un polyèdre parfait et d'après le théorème 3.1, le graphe d'intersection associé à A n'est pas parfait et par suite, comme P(A) n'est pas parfait, il contient donc un polyèdre P' presque entier à lequel on a associé un sous graphe induit G' de G qui est imparfait minimal.

Soit A`` la sous matrice de A' de taille m`xk dont les lignes correspondent aux sommets de G'. A`` possède la propriété $\pi_{\beta,k}$ avec $\beta = \alpha(\overline{G'}) \geq 2$.

Or : les m – m' lignes restantes de A' non contenues dans A'' sont dominées par une certaine ligne de A'', et la sous matrice A' de A de taille mxk a la propriété $\pi_{\beta,k}$ avec $\beta = \alpha\ (\overline{G'})$, impossible. *

***Exemple :** Soit le graphe G représenté ci-dessous à 20 sommets dont les cliques associées sont :

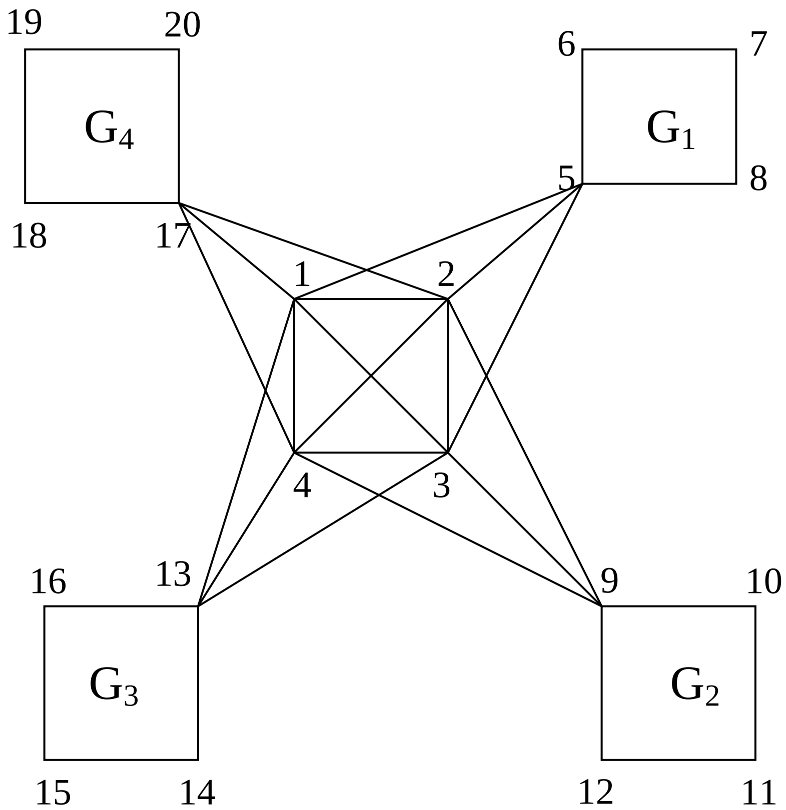
C_1 = {1,2,3,5} ; C_2 = {5,6} ; C_3 = {6,7} ; C_4 = {7,8} ; C_5 = {5,8} ;

C_6 = {2,3,4,9} ; C_7 = {9,10} ; C_8 = {10,11} ; C_9 = {9,12} ; C_{10} = {9,12} ;

C_{11} = {1,3,4,13} ; C_{12} = {13,14} ; C_{13} = {14,15} ; C_{14} = {15,16} ;

C_{15} = {13,16} ; C_{16} = {1,2,4,17} ;C_{17} = {17,18} ; C_{18} = {18,19} ;

C_{19} = {19,20} ; C_{20} = {17,20} ; C_{21} = {1,2,3,4}.



La matrice clique A associée à ce graphe est de taille 21×20, où

21 est le nombre de cliques possibles du graphe G.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s_j \in C_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{où} \quad C_i \text{ est une clique et } s_j \text{ est un sommet.}$$

Soit la sous matrice A' formée par les colonnes : s_1, s_2, s_3, s_4 et les lignes qui sont les cliques : C_1, C_6, C_{11}, C_{16} .

$$A' = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_6 \\ C_{11} \\ C_{16} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

det A’ = 3 ;   donc A n’est pas totalement unimodulaire.

Du fait de la simple structure de A et par inspection, on remarque que A est parfaite (on voit que G ne contient aucun cycle impair sans cordes).

De plus , on remarque que A^t n’est pas parfaite, ceci est intéressant du fait

que c’est différent par rapport aux matrices totalement unimodulaires.

****<u>Remarque</u>** : Il existe des algorithmes polynomiaux qui permettent de

vérifier si une matrice A à composantes « 0,1,-1 » est totalement

unimodulaire

Chapitre 2 : Théorie générale des rétractes.

Dans ce chapitre nous allons énoncer des définitions et des résultats sur la Notion des rétractes ainsi qu'une approche polyèdrale des rétractes de graphes optimisant sur les sommets.

I <u>Rappels sur les graphes</u>:

Soit G = (V, E) un graphe. On a les définitions suivantes :

1°) <u>Définition</u> : Le degré d'un sommet $x \in V$, noté $d_G(x)$ le nombre d'arêtes incidentes à x .

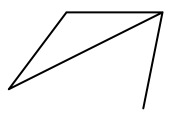
On note : $\delta(G) = \mathrm{Min}_{.x\in V}\, d_G(x)$ degré minimum de G

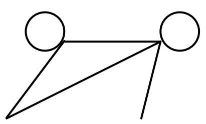
$\Delta(G) = \mathrm{Max}_{.x\in V}\, d_G(x)$ degré maximum de G .

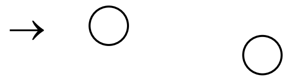
2°) <u>Définition</u>: Un graphe est réflexif si $\forall\, x\in V ,\ xx\in E$

A chaque graphe G on peut associer son graphe réflexif qu'on notera $G^{(r)}$ en ajoutant une boucle à chaque sommet.

∗ **<u>Exemple</u>** :







G $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $G^{(r)}$

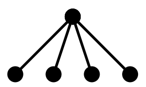
3°) <u>Définition</u>: La distance entre deux sommets x, y de V qu'on note $d_G(x,y)$ est la longueur minimum d'une chaîne reliant x à y.

- x et y sont adjacents si et seulement si $d_G(x,y) = 1$.

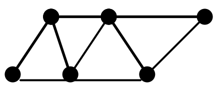
4°) <u>Définition</u>: On appelle diamètre d'un graphe G la plus grande distance de G noté diam(G) défini par :

$$\mathrm{diam}(G) = \max \{d_G(x,y) \ / \ x, y \in V \text{ et } x \neq y \}.$$

∗**<u>Exemple</u>** :



diam(G) = 2

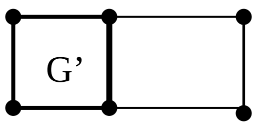


diam(G) = 3

5°) <u>Définition</u>: Soit G = (V, E) un graphe et G' = (V', E') sous graphe de G . On dit que G' est un sous graphe isométrique de G si :

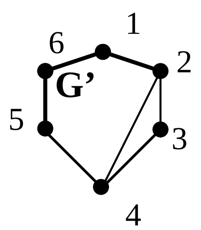
$$d_{G'}(x,y) = d_G(x,y) \quad \forall x,y \in V'.$$

∗**<u>Exemples</u>** :



G

G' est un sous graphe isométrique de G



G' n'est pas un sous graphe isométrique de G car

$d_G(2,5) = 2$ et $d_{G'}(2,5) = 3$

6°) <u>Définition</u>:

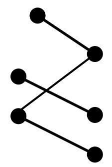
- Un graphe G = (V, E) est dit biparti s'il existe une partition $V_1 \cup V_2$ de V telle que les arêtes de G ne relient que des sommets de V_1 à des sommets de V_2

-Si G = (V, E) est biparti, alors $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $E(G_{V1}) = \emptyset$ et $E(G_{V2}) = \emptyset$

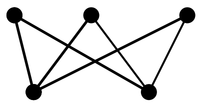
- $K_{p,q}$ est le graphe biparti complet défini par :

$$|V_1| = p \text{ et } |V_2| = q \text{ et } \forall\, x \in V_1 ,\ \forall\, y \in V_2 : \ xy \in K_{p,q}$$

***Exemples** :



G biparti



$K_{3,2}$

7°) Proprietés :

- Soit G = (V,E) un graphe simple tel que $\delta(G) \geq 2$, alors G contient un cycle de longueur au moins égale à $\delta+1$.
- La matrice d'incidence d'un graphe biparti est totalement unimodulaire.

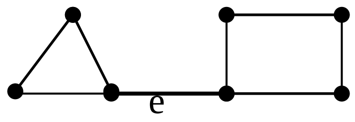
8°) Définition: Soient G = (V, E) un graphe et R la relation binaire définie sur V par : $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y$ ou il existe une chaîne joignant x à y .

- R est une relation d'équivalence.
- On appelle composante connexe de G les classes d'équivalence de $V/_R$.
- Un graphe est dit connexe s'il n'existe qu'une seule classe dans $V/_R$.

9°) Définition : Un arbre est un graphe connexe sans cycles.

10°) Définition : Soit G un graphe connexe. Une arête e est un «isthme » si sa suppression déconnecte le graphe G.

∗**Exemple** :



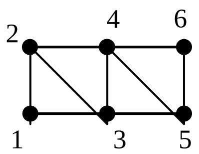
11°) Définition: Deux sommets x et y sont dits diamétraux si

$$d_G(x,y) = diam(G).$$

- x est dit sommet diamétral de y(et vice versa).
- {x,y} est appelée paire diamétrale.

12°) Définition: Un sommet x est extrémal s'il existe un sommet y tel que : $d_G(x,y) = diam(G)$.

∗**Exemple** :



Les sommets 1et 6 sont deux sommets extrémaux.

13°) Définition: L'intervalle $I_G(u,v)$ entre deux sommets u et v de G est l'ensemble de sommets se trouvant sur les plus courts chemins joignant u à v défini par : $I_G(u,v)=\{w \,/\, d_G(u,v) = d_G(u,w) + d_G(w,v)\}$

∗**Exemple** : Dans un arbre, $I_G(u,v)$ est formé par les sommets se trouvant sur l'unique chemin de u à v.

14°) Propriétés : [19]

Soit G un graphe connexe. Pour tout u,v dans V on a :

i) $u, v \in I_G(u,v)$.

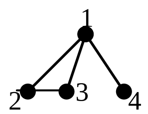
ii) $I_G(u,v) = I_G(v,u)$.

iii) Si $x \in I_G(u,v)$ alors $I_G(u,x) \subset I_G(u,v)$.

iv) Si $x \in I_G(u,v)$ et $y \in I_G(u,x)$ alors $x \in I_G(y,v)$.

15°) <u>Définition</u>: Une paire de sommets (u,v) est dite extrémale s'il n'existe pas d'intervalle $I_G(u,z)$ ($z \neq v$) ou $I_G(t,v)$ ($t \neq u$) de G contenant $I_G(u,v)$.

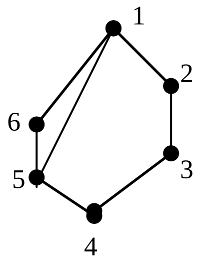
∗**<u>Exemple 1</u>** :



diam(G) = 2 ; 2 et 3 sont des sommets extrémaux

{2,3} est une paire extrémale et $d_G(2,3) = 1$

*<u>**Exemple 2**</u> :



diam(G) = 3 ; {1,4} est une paire extrémale

1 et 4 ne sont pas des sommets extrémaux.

16°) <u>Définition</u>: Soit G = (V, E) un graphe et soient u, v deux sommets de G.

- Pour $i = 0,1,\ldots, d_G(u,v)$ on définit $N_i(u,v) = \{w \in I_G(u,v) \,/\, d_G(u,v) = i\}$.

L'ensemble $N_i(u,v)$ est appelé le ième niveau dans l'intervalle $I_G(u,v)$.

∗**<u>Remarque</u>** : On a $N_i(u,v) = N_{d(u,v)-i}(v,u)$.

- Pour $i \geq 0$, on définit l'ensemble $N_i(u) = \{w \in V / d_G(u,w) = i\}$ appelé le ième niveau de u dans G.

- $N_1(u) = N(u)$ ensemble des voisins de u.

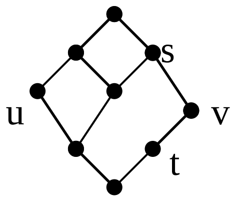
- Dans le sous graphe de G induit par I(u,v), toute arête relie soit deux sommets de niveau consécutifs soit deux se trouvant au même niveau.

17°) <u>Définition</u>: Un graphe biparti G = (V,E) est dit modulaire si :

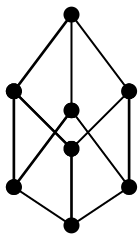
$\forall u,v \in V \ / \ \ d_G(u,v) \geq 3$, on a : $N_2(v,u) \cap N(s) \cap N(t) \neq \emptyset$, $\forall s,\ t \in N_1(v,u)$

ie : quels que soient s, t deux sommets voisins de V dans $I_G(u,v)$, s et t ont un autre voisin commun dans $N_2(v,u)$

∗<u>Exemples</u> *:*



G non modulaire .



G est modulaire.

18°) <u>Définition</u> : Soient m un entier et G = (V,E) un graphe biparti. G est dit de largeur au plus m si pour u de V et $W \subseteq V$, on a l'implication suivante :

il existe $W_0 \subseteq W$, $|W_0| \leq m$ tel que :

$$\bigcap_{w \in W} I(u,w) = \{u\} \Rightarrow \bigcap_{w \in W_0} I(u,w) = \{u\} \text{ pour } W_0 \subseteq W \text{ et } |W_0| \leq m.$$

Si m est le plus petit entier tel que l'implication reste vraie alors G est dit de largeur m.

∗**Exemple** : Le graphe K_2 est le seul graphe biparti de largeur 1.

II **Homomorphisme de graphes** :

1°) Définition: Soient G = (V,E) et G' = (V',E') deux graphes.

Un homomorphisme de G dans G' est défini par une application

$$f : V \rightarrow V' \quad \text{tel que : } \quad uv \in E \quad \Rightarrow \quad f(u)f(v) \in E'.$$

1.1/ Propriété :

Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux homomorphismes, alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est un homomorphisme**.**

∗**Remarque** : Un homomorphisme $c : G \rightarrow K_n$ est défini par une application $f : V \rightarrow \{1,2,\ldots,n\}$ telle que $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$.

2°) Définition: Soit n un entier ; un graphe G = (V,E) est dit n-colorable si on peut associer à chaque sommet de G une couleur prise dans $\{1,2,\ldots,n\}$ de sorte que deux sommets adjacents soient de couleur différente.

2.1/ Propriété :

Un graphe G = (V,E) est n-colorable si et seulement si il existe un homomorphisme $c : G \rightarrow K_n$

3°)Définitions: Soit $\chi(G)$ le nombre chromatique d'un graphe G.

- Un graphe G est n-colorable si $\chi(G) \leq n$.

- Un graphe G est n-chromatique si $\chi(G) = n$.

3.1/ <u>Nombre chromatique de quelques graphes particuliers</u> :

$\chi(K_p) = p$; $\chi(K_p \backslash \{x\}) = p-1$; $\chi(\overline{K_p}) = 1$; $\chi(K_{m,n}) = 2$; $\chi(C_{2n}) = 2$;

$\chi(C_{2n+1}) = 3$ et pour tout arbre non trivial T, $\chi(T) = 2$.

3.2/ <u>Propriété</u> : Soient deux graphes G et G'. Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme alors $\chi(G) \leq \chi(G')$.

****<u>Preuve</u>** : Si f est un homomorphisme de G dans G' et si $\chi(G') = n$, il existe un homomorphisme (coloration) de G' dans K_n et donc par composition, un homomorphisme de G dans K_n ; d'où $\chi(G) \leq n$.*

3.3/ <u>Propriété</u> : Soient G = (V,E) et G' = (V',E') deux graphes tels que $V' \subset V$, G' est un sous graphe de G si et seulement si l'application :

$i : V' \to V$

$x \to i(x)$ est un homomorphisme.

4°) <u>Définition</u>: Soient deux graphes G et G'. On dit que G et G' sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V \to V'$ telle que :

$$xy \in E \iff f(u)f(v) \in E'.$$

∗**<u>Remarque</u>** : Un homomorphisme de graphe bijectif n'est pas nécessairement un isomorphisme.

∗**<u>Exemple</u>** : Prenons le cas où G est un graphe partiel de K_n distinct de K_n

et f l'homomorphisme de G dans K_n défini par l'application identité sur l'ensemble des sommets de K_n. Il est trivial que cette même application (qui est sa propre inverse) ne définit pas un homomorphisme de K_n dans

G, car G est distinct de K_n et il existe des sommets adjacents dans K_n qui ne le sont pas dans le graphe partiel G.

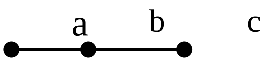
4.1/ <u>Propriété</u> : Soient G = (V,E) et G' = (V',E') deux graphes tels que $V' \subset V$.

Soit i : $V' \to V$ tel que : i(x) = x . Alors G' est un sous graphe engendré de G si et seulement si i est un isomorphisme.

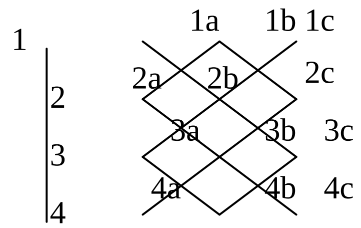
4.2/ <u>Propriété</u> : Soit G = (V,E) un graphe. Tout sous graphe isométrique de G est un sous graphe engendré de G.

5°) <u>Définition</u>: Soient G = (V,E) et G'= (V',E') deux graphes, le produit cartésien de G et G' est le graphe noté $G \times G'$ dont l'ensemble des sommets est $V \times V'$ et dont la relation d'adjacence est définie par :

$$((x,x'), (y,y')) \in E_{G \times G'} \Leftrightarrow xy \in E \text{ et } x'y' \in E'.$$

∗**<u>Exemple</u>** : 

P_3

P_4 

$P_4 \times P_3$

Les projections canoniques $G \times G' \to G$ et $G \times G' \to G'$ sont des homomorphismes

5.1/ <u>Proposition</u> : Soient G = (V,E) et G'=(V',E') deux graphes alors ;

$$\chi(G \times G') \leq \text{Min}\{\chi(G), \chi(G')\}.$$

III **Notions de retractes** :

La notion de rétracte d'un espace topologique X dans un sous espace Y a été introduite par Borsuk [4]. Par analogie, Pavol Hell [12] et d'autres ont développé cette notion dans la catégorie des graphes.

La rétraction étant une notion faisant intervenir les homomorphismes, l'intérêt fondamental que suscite l'étude de cette notion est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'extension des homomorphismes en général, et donc des colorations en particulier.

Néanmoins, certains problèmes concrets auxquels on est confronté se ramènent en fait à un problème de rétraction. Nous illustrons ceci par l'exemple suivant :

« bon nombre de pays, après avoir mené une politique de développement mal maîtrisée rencontrent des difficultés dans certains secteurs ou les productions n'atteignent pas les objectifs escomptés. Des experts ont été sollicités pour étudier ces problèmes et sont arrivés à la conclusion suivante : l'emplacement anarchique des différentes unités d'une entreprise constitue une entrave majeure pour l'épanouissement de celle ci. Pour y remédier, il a été préconisé de réduire le nombre de ces unités en transplantant celles éprouvant des difficultés dans les autres unités. Ce changement devra s'opérer en respectant certains critères, par exemple si deux unités sont reliées par une ligne de transport, cette ligne devra être préservée ».

Si on considère le graphe G ayant pour ensemble de sommets l'ensemble des différentes unités et comme relation d'adjacence, l'existence d'une ligne de transport par exemple, le sous graphe G' de G obtenu après l'opération de transplantation d'un certain nombre d'unités n'est en fait qu'un rétracte de G.

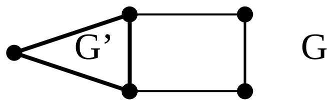
1°) <u>Généralités</u> :

1.1/ <u>Définition</u> : Soit G' un sous graphe de G. On appelle rétraction de G dans G' un homomorphisme $r : G \rightarrow G'$ tel que

$$r(x') = x' \quad \forall\ x' \in G' .$$

Si une rétraction r de G dans G' existe, on dit que G' est un rétracte de G.

∗ **<u>Exemple</u>** :



∗**<u>Remarque 1</u>** : Si r est une retraction de G dans G' alors $\chi(G) = \chi(G')$

En effet, G' étant un sous graphe de G alors $\chi(G') \leq \chi(G)$;

comme $r : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme alors $\chi(G) \leq \chi(G')$ et donc

$\chi(G) = \chi(G')$

∗**<u>Remarque 2</u>**: Si r est une retraction de G dans G' alors G' est un sous graphe isométrique de G.

En effet, pour toute chaîne joignant x à y, le nombre minimum d'arêtes à parcourir ne peut être augmenté par un homomorphisme car la rétraction de G de G' est égale à l'identité sur G' qui est elle même un homomorphisme qui conserve l'adjacence.

∗**<u>Remarque 3</u>** : Si G' est un rétracte de G alors G' est un sous graphe engendré de G.

En effet : Soient u, v∈V', comme l'injection canonique de G' dans G est un homomorphisme, on a donc : $d_{G'}(u,v) \leq d_G(u,v)$.

G' est un rétracte de G alors $d_G(u,v) \leq d_{G'}(u,v)$.

Si de plus u et v sont adjacents dans G (i.e : $d_G(u,v) = 1$) alors ils le sont aussi dans G', et par suite G' est un sous graphe engendré de G.

*__<u>Remarque 4</u> :__ Une conséquence immédiate des résultats précédents est que si G est un graphe imparfait minimal (critique) alors G ne possède d'autre rétracte que lui même puisque tout sous graphe de G distinct de G a un nombre chromatique strictement inférieur à celui de G .

*__<u>Remarque 5</u> :__ La classe des graphes qui ne possèdent pas d'autres rétractes qu'eux même est une surclasse des graphes dits « rigides », définis comme étant les graphes qui n'ont pas d'autre homomorphisme dans eux même autre que l'identité et qui ont été caractérisé dans [13] comme étant les graphes asymétriques et sans autre rétracte qu'eux même.

Il est clair que les graphes complets n'ont pas d'autre rétractes qu'eux-mêmes.

2°) <u>Proposition</u> : [13]

Soient X un sous graphe de X', f : $X \to Y$ un homomorphisme. Soit

Z le graphe obtenu par l'union disjointe de Y et X' en identifiant x par f(x) pour tous les sommets x de X. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un homomorphisme g : X' $\rightarrow$ Y tel que f est une restriction de g sur X est que Y soit un rétracte de Z.

****Preuve** : a) *Condition suffisante* : Soit r : Z $\rightarrow$ Y une rétraction et soit

$$j : V(X') \rightarrow V(Z) \quad \text{telle que} \quad j(x)=x \quad \forall\, x \in V(X')$$

Notons que j n'est pas une inclusion car deux sommets distincts peuvent correspondre à un même sommet dans Z.

Il est clair que j est un homomorphisme de X' dans Z ; d'où

g = r o j : X'$\rightarrow$Y est un homomorphisme.
Soit x $\in$ V(X), g(x) = (r o j)(x) = r(j(x)) = r(x).

Sachant que dans Z, x est identifié par f(x) lorsque x$\in$V(X), on a :

g(x) = r(f(x)) = f(x) car f(x) $\in$V(Y) et r une retraction de Z dans Y et donc g(x) = f(x) $\forall$x$\in$V(X) , et par suite f est une restriction de g.

b) *Condition nécessaire* :

Soients g : X'$\rightarrow$Y une extension de f : X$\rightarrow$Y et r : Z$\rightarrow$Y

$$z \rightarrow r(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in V(X') \\ z & \text{si } z \in V(Y) \end{cases}$$

Vérifions que r est une application :

- Si z$\in$(V(X') $\cap$V(Y)) alors z est une identification de x$\in$V(X), f(x)$\in$V(Y) et r(x) = g(x) = f(x) = r(f(x)).

- Si x et x' sont deux sommets distincts de V(X') correspondant à un même z dans Z, alors x et x' sont dans V(X) et f(x) = f(x') et on a :

$g(x) = f(x) = f(x') = g(x')$; et donc r est une application.

Si $g : X' \to Y$ et $j : X' \to Z$ sont deux homomorphismes, alors toute arête e dans Z est une arête dans Y ou dans $j(X')$. On en déduit que r est un homomorphismeet donc r est une rétraction de Z dans Y. *

3°) <u>Propriété</u> : [13]

Si Y est un rétracte de X alors tout homomorphisme de Y dans Z peut être étendu à un homomorphisme de X dans Z et réciproquement.

****<u>Preuve</u>** *:*

a*) Condition nécessaire :* Soient $r : X \to Y$ une retraction et $f : Y \to Z$ un homomorphisme, alors : $f \circ r : X \to Z$

$$y \to (f \circ r)(y) = f(r(y)) = f(y) \quad \forall y \in V(Y) ;$$

est un homomorphisme et une extension de f.

b) *Condition suffisante* : Si tout homomorphisme $f : Y \to Z$ peut être étendu à un homomorphisme $X \to Z$ alors en considérant l'homomorphisme $1_Y : Y \to Y$ son extension donc $r : X \to Y$ constitue une rétraction.*

4°) <u>Propriété</u> : [13]

Y est un rétracte de X si et seulement si tout homomorphisme de Z' dans Y (Z' sous graphe de Z) pouvant être étendu à un homomorphisme de Z dans X peut être étendu à un homomorphisme de Z dans Y.

<u>La preuve</u> se fait de la même manière que 3°) Propriété.*

Il est établi d'après 2°) Proposition définie dans III, que trouver une rétraction de l'union disjointe de X et de Y revient à trouver un homomorphisme de X dans Y. Or, il est bien connu que trouver un homomorphisme est « un problème Difficile ». En conséquence, il est intéressant de considérer différentes classes de graphes dont certaines permettent une exploitation plus facile.

C'est le cas de la classe des graphes notée G_ω qu'on définit de la manière

suivante : G $\in G_\omega$ si et seulement si $\chi(G) = \omega(G)$.

5°) <u>Corollaire</u> : Soit G un graphe, alors G est dans la classe G_ω si et seulement si G se rétracte en sa clique maximum.

****<u>Preuve</u>**: Soit G=(V,E) un graphe n-chromatique.

Si G est un graphe parfait alors $\chi(G) = \omega(G) = n$, donc la plus grande clique de G est K_n et l'application $r : G \to K_n$ en identifiant les sommets de la clique aux sommets de K_n et en coloriant les autres sommets de G constitue une rétraction de G.

De même, si G se rétracte en sa clique maximum alors nécessairement la clique de G est n-chromatique, donc son cardinal est n et par suite

$n = \chi(G) = \omega(G)$, d'où G est parfait.*

IV <u>Retracts absolus</u> :

1°) <u>Définition</u> : Soit *C* une classe de graphes. On appelle rétracte absolu dans *C* un graphe Y de *C* tel que Y est rétracte de tout graphe X de *C* contenant Y comme sous graphe.

- On note AR(*C*) la classe de tous les rétractes absolus dans *C*

∗**<u>Exemple</u>** :

Si on considère *C* = *B*, la classe de tous les graphes bipartis et les homomorphismes de *C* (privée des graphes totalement déconnectés), le graphe K_2 est un rétracte absolu dans B car tout graphe X de B admet une 2 -coloration $X \to K_2$ et K_2 est un sous graphe isométrique de X.

2°) <u>Définition</u>: On définit AR(*B*,m) la classe de tous les rétractes absolus des graphes bipartis, m étant la propriété « être un sous graphe isométrique ».

∗**<u>Exemple</u>** :

a) $K_2 \in$ AR(B,m)

Tout graphe $X \in$ B admet une 2-coloration c : $X \to K_2$ et tout graphe Y de B avec au moins une arête admet un homomorphisme h : $K_2 \to Y$.

Si Y est un sous graphe isométrique de X alors l'homomorphisme hoc de X dans Y constitue un rétraction.

La question que l'on se pose est : « quels sont les autres graphes bipartis de AR(B,m) ? »

P.Hell [13] a déterminé totalement cette classe. Nous allons énoncer certains de ces résultats, ainsi que d'autres qui établissent la structure de cette classe.

3°) <u>Définition</u> : Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On désigne par ARn la classe de tous les rétractes absolus des graphes n-chromatiques.

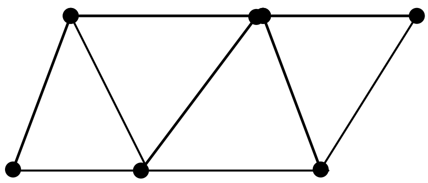
Ainsi, par définition un graphe $G \in$ ARn si et seulement si :

- G est n-chromatique.
- Lorsque G est un sous graphe isométrique d'un graphe n-chromatique G' alors il existe une rétraction de G' dans G.

***<u>Exemples</u>** :

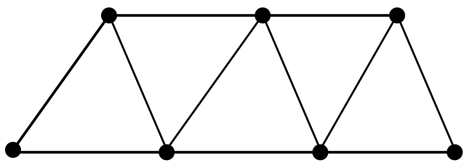
a) Il est évident que $K_n \in$ ARn $\forall\, n \geq 2$.

b)



$G \in AR_3$

c)



$G' \notin AR_3$

4°) <u>Lemme</u> : [25]

Si $G \in$ ARn et $v \in V(G)$, alors il existe un sous graphe de G isomorphe à K_n contenant v.

****<u>Preuve</u>** : Soit $G \in$ ARn, $n \geq 2$.

Considérons le graphe G' obtenu en ajoutant à G $(n - 1)$ sommets $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ deux à deux reliés entre eux et tous reliés à v.

Donc les sommets v, x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ constituent un sous graphe de G' isomorphe à K_n. De même, G' est n-chromatique et G est un sous graphe isométrique de G'.

Comme G $\in$ ARn, alors il existe une rétraction r de G' dans G et le sous graphe de G contenant v et isomorphe à K_n est déterminé par cette rétraction.*

5°) <u>Théorème</u> : [25]

Soit G $\in$ ARn et H un sous graphe isométrique de G, alors on a :

H est un rétracte de G si et seulement si H $\in$ ARn .

****<u>Preuve</u> :** a) *Condition suffisante :* évident.

b) *Condition nécessaire* : Soit r : G $\rightarrow$ H une rétraction et soit H' un sous graphe n-chromatique contenant H comme sous graphe isométrique. Considérons le graphe G' obtenu de l'union de G et H'. G' est n-chromatique et G est un sous graphe isométrique de G'. Comme g $\in$ARn, il existe une rétraction r' de G' dans G et r o r' : G'$\rightarrow$ H est aussi une rétraction.

D'où r o $r'_{/H'}$ constitue une rétraction de H' dans H et donc H $\in$ ARn.*

6°) <u>Proposition</u> : [13]

Y$\in$AR(B,m) si et seulement si Y est un rétracte d'un produit cartésien de chaînes finies.

****<u>Preuve</u>** :

a) Soit Y $\in$ AR(B,m) ; à tout sommet u $\in$ V(G), on associe sa ligne : (d(u,v), v$\in$V(G)) de la matrice des distances.

Les nombres 0, 1,…, $\max_u$ d(u,v) de chaque colonne correspondant à v représentent les sommets d'une chaîne P où i est adjacent à i+1.

D'où on a le plongement de Y dans le produit de chaînes finies.

b) Si Y est un graphe biparti tel que Y est rétracte d'un produit de chaînes finies. Les composantes du produit de n'importe quelles chaînes sont des rétractes absolus.

Cette assertion émane de résultats plus généraux que

nous verrons plus loin. D'où Y est un rétracte absolu car étant rétracte d'un rétracte absolu, et le théorème précédent nous donne le résultat.*

Au vu de cette preuve, on énonce le résultat implicite suivant :

7°) <u>Corollaire</u> : [13]

Tout graphe biparti est un sous graphe isométrique d'un produit d'une suite de chaînes finies.

Un corollaire d'une autre proposition de Hell est le suivant :

8°) <u>Corollaire</u> : [13]

Tout arbre et tout graphe dont tous les cycles sont de longueur 4 sont des éléments de AR(*B*, m)

9°) <u>Proposition</u> : [13]

Un cycle de longueur minimale dans un graphe biparti G est un rétracte de G.

****<u>Preuve</u>** :Soit G un graphe biparti et C un cycle de longueur minimale de G. C-e est une chaîne de G, e étant une arête quelconque de C. Donc C-e est un sous graphe isométrique de G-e car C est minimal. Comme C-e est un arbre, donc C-e est un rétracte absolu d'après le corollaire 8. Ce qui implique que C-e est un rétracte de G-e et donc C est un rétracte de G car toute rétraction de G-e dans C-e peut être prolongée en une rétraction de G dans C.*

10°) <u>Proposition</u> : [1]

Soit G un graphe biparti tel que diam(G) $\geq$ 2.

G$\in$ AR(B,m) si et seulement si il existe une paire extrémale de sommets {u,v} telle que G-u et G-v soient des sous graphes isométriques de G et des rétractes absolus.

****<u>Preuve</u>**:

a) Soit G un graphe de AR(*B*,m) et soit {u,v} une paire extrémale de sommets dans G. Tous les voisins de v se trouvent dans l'intervalle I(u,v).

- Si d(u,v) = 2 alors en envoyant u sur v (et v sur u) alors on obtient *:*

r : G $\rightarrow$ G-u (et r' : G $\rightarrow$ G-v) est une rétraction.

- Si d(u,v) > 2 alors en considérant le graphe H obtenu à partir de G en ajoutant un chemin de longueur d(u,v) – 3 tel qu'un sommet terminal z de ce chemin soit adjacent à tous les voisins de v et l'autre au sommet u. (Si d(u,v) = 3 , alors z est adjacent à u).

G est un sous graphe isométrique de H qui est biparti.

Donc il existe f : H $\rightarrow$ G une rétraction

Soit r' : G $\rightarrow$ G-v tel que r'(u)=f(z), r' est une rétraction. Il en est de même pour G-u . Et d'après le théorème 5°, on déduit que G-v et G-u sont des rétractes absolus de G.

b) Supposons que G-u et G-v sont des sous graphes isométriques de G et des rétractes absolus pour une certaine paire extrémale de sommets {u,v}. Soit H un graphe biparti contenant G comme sous graphe isométrique ; alors il existe une rétraction h : H $\rightarrow$ G-u

Considérons le graphe H' obtenu en identifiant chaque voisin x de v dans H avec son image h(x) , alors tous les voisins de v dans H' appartiennent à I(u,v) dans G. G étant un sous graphe isométrique de H', donc il existe h' : H' $\rightarrow$ G-v. D'où la rétraction recherchée est :

$$f : H \rightarrow G \ \text{ telle que : } f(x) = \begin{cases} v & \text{si } x = v \\ h(x) & \text{si x est voisin de v } * \\ h'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on montre que la modularité qui est une propriété sur les intervalles est vérifiée pour les rétractes absolus des graphes bipartis.

11°) <u>Proposition</u> : [1]

Chaque composante du produit cartésien de graphes modulaires est modulaire.

****<u>Preuve</u>** : Soit G une composante quelconque du produit cartésien de deux graphes modulaires G' et G''.

Pour tout sommet w de G, soient w' et w'' leur projection dans G' et G'' Respectivement. w=(w',w'').

Soient u et v des sommets de G tels que $d(u,v) \geq 3$ et soient s, $t \in N_1(v,u)$.

Sans pertes de généralités, on suppose que $d(u,v) = d(u',v')$.

D'où : s', $t' \in N_1(v',u')$. Donc il existe un voisin x' commun à s' et t' dans $N_2(v',u')$ car G' est modulaire.

De le même manière, si $d(u,v)=d(u'',v'')$, il existe un voisin x'' commun à s''et t'' dans $N_2(v'',u'')$ car G'' est modulaire sinon on pose $x''=v''$.

Donc $x=(x',x'')$ est voisin commun à s et t dans $N_2(v,u)$. D'où G est modulaire.*

12°) <u>Théorème</u> : [1]

Tout rétracte d'un graphe modulaire est modulaire.

****<u>Preuve</u>** : Soit f une rétraction d'un graphe modulaire H dans G. Alors quels que soient les sommets s, t, u, v de G tels que : s, $t \in N_1(v,u)$ et $d(u,v) \geq 3$, il existe un sommet z de H tel que z est un voisin commun à s et t avec $d(z,u)=d(u,v) - 2$.

D'où le sommet $x = f(z)$ est le sommet recherché de G.*

13°) <u>Proposition</u> : [1]

Tout rétracte absolu biparti G est un graphe modulaire.

****<u>Preuve</u>** : Soient $G \in AR(B,m)$, u, v, s et t tels que $d(u,v) \geq 3$ et s, $t \in N_1(v,u)$. Soit H le graphe obtenu à partir de G en ajoutant une nouvelle chaîne de longueur $d(u,v) - 3$, telle que les sommets terminaux w et x vérifient : w est adjacent à u et x est adjacent à s et t.

G est un sous graphe isométrique de H. D'où il existe une rétraction

r : H→ G ; r(x) est un voisin commun à s et t et d(r(x),u)=d(u,v) – 2.

D'où G est modulaire.*

∗**Remarque** :La rétaction préserve la modularité.

La condition qui caractérise les rétractes absolus parmi tous les graphes modulaires, est une condition d'intervalle qui est d'être de largeur au plus deux.

14°) Proposition : [1]

Chaque composante du produit de graphes bipartis de largeur au plus m est aussi de largeur au plus m.

****Preuve** : Soient G' et G'' deux graphes bipartis de largeur au plus m.

Soit G une composante de G'×G''. Soit (u,v) un sommet de G et soit W l'ensemble des sommets w=(w',w'') de G.

Supposons que $\bigcap_{w\in W_0} I(u,w) \neq \{u\}$ pour tout $W_0 \subseteq W$ avec $|W_0| \leq m$ et montrons qu'il existe un sommet v = (v',v'') voisin de u et appartenant à tout intervalle I(u,w) où $w\in W$.

Soit X' l'ensemble des sommets w' de G' tels que w = (w',w'') de W et d(u,w) = d(u',w').

Si X'= ∅ alors on choisit un voisin v' de u' quelconque dans G',

sinon on a : $\bigcap_{w'\in W'_0} I(u',w') \neq \{u'\}$ pour tout $W' \subseteq X'$ avec $|W'| \leq m$

G' étant de largeur au plus m, il existe un voisin v' de u' appartenant à tout I(u’,w’) où $w' \in X'$.

De la même manière, on choisit un voisin v’’ de u’’ dans G’’ tel que pour tout w’’ de X’’, l’intervalle I(u’’,w’’) contient v’’. Le sommet v = (v’,v’’) de G est donc voisin de u et appartient à tout intervalle I(u,w) où $w \in W$.

D’où G est un graphe de largeur au plus m.*

15°) <u>Théorème</u> : [1]

Tout rétracte d’un graphe biparti de largeur au plus m est aussi de largeur au plus m.

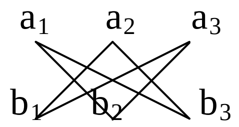
****<u>Preuve</u>** : Soit G un graphe biparti de largeur au plus m et soit r une rétraction de G dans H qui est de largeur au plus m car tout intervalle de H entre les sommets u et v est l’image de l’intervalle I(u,v) de G par r.*

16°) <u>Définition</u> : Pour tout $n \geq 3$, on définit le graphe biparti B_n de diamètre 3 et de largeur $n - 1$ où :

$V(B_n)=\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\ldots, a_n, b_n\}$ tels que $a_i b_j \in E(B_n) \Leftrightarrow i \neq j$.

∗**<u>Exemple</u>** : $B_3 = C_6$

B_3

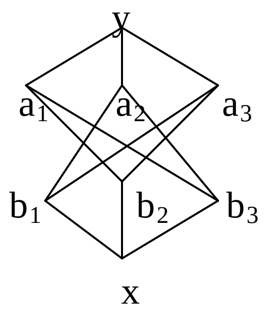


17°) <u>Définition</u> : Pour tout $n \geq 3$, on définit le graphe biparti de largeur deux $\hat{B}_n$ contenant B_n comme sous graphe isométrique obtenu en ajoutant à B_n deux sommets adjacents x et y tels que :

$x b_i \in E(\hat{B}_n)$ $\forall$ $i = 1,\ldots\ldots, n$ et $y a_i \in E(\hat{B}_n)$ $\forall$ $i = 1,\ldots\ldots, n$

∗**Exemple** :

$\hat{B}_3$



∗**Remarque** : Il est clair que tous les graphes $\hat{B}_n$ sont des rétractes absolus (d’après la proposition 10)

Le théorème suivant donne une caractérisation de la structure des rétractes absolus des graphes bipartis.

18°) Théorème : [1]

Soit G un graphe biparti, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) G est un rétracte absolu.

(ii) G est un graphe modulaire de largeur au plus deux.

(iii) G est un graphe modulaire tel que chaque sous graphe induit B_n , $n \geq 4$ s’étend à $\hat{B}_n$ dans G

(iv) $\forall$ u, v $\in$ V(G) tels que d(u,v) $\geq$ 3, les voisins de v dans I(u,v) ont un deuxième voisin commun dans I(u,v).

****Preuve** : (i)$\Rightarrow$(ii)

G étant un rétracte absolu, donc G est modulaire d’après la proposition 13. Soient $w_1, w_2, \ldots, w_k$ des sommets de G tels que $d(u,w_i) \geq 2$ et

$I(u,w_i) \cap I(u,w_j) \neq \{u\}$ pour tous i , j $\Rightarrow$ $d(w_i,w_j) \leq d(u,w_i) + d(u,w_j) - 2$

Etendons G à un graphe biparti H de la manière suivante :

soit z un nouveau voisin de u, et pour tout i, ajoutons une nouvelle chaîne

avec $d(u,w_i) - 2$ sommets tels que les sommets terminaux soient adjacents

à w_i et z respectivement. Dans le graphe H, le nouveau sommet z est sur

la plus courte chaîne joignant u et w_i, $i = 1,\ldots, k$.

Donc G est un sous graphe isométrique de H. D'où il existe une rétraction

$r : H \to G$. Le sommet r(z) est adjacent à u et appartient à tous les

intervalles $I(u,w_i)$; d'où G est de largeur deux.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Supposons que G contient un sous graphe induit B_n, $n \geq 4$ ayant pour

sommets : $a_1, b_1, a_2, b_2,\ldots, a_n, b_n$.

Alors pour tous $i, j \geq 2$, $(a_1,a_i) \cap I(a_1,a_j)$ contient tous les sommets b_k,

$k \neq 1, i, j$. Comme G est de largeur deux, alors il existe un voisin commun

y à $a_1, a_2,\ldots, a_n$.

Donc : pour $i, j \geq 2$, $I(b_1,b_i) \cap I(b_1,y)$ et $I(b_1,b_i) \cap I(b_1,b_j)$ contiennent

$\{b_1\}$. D'où il existe un sommet x voisin commun à y et les b_i dans G. Et

donc les sommets a_i, b_i, x et y induisent un sous graphe $\hat{B}_n$

(iii)$\Rightarrow$(iv)

Supposons qu'il existe une paire de sommets {u,v} telle que $d(u,v) \geq 3$

soit la plus petite possible et qui ne satisfait pas (iv).

Soit k le plus petit nombre de voisins $w_1, w_2,\ldots\ldots\ldots, w_k$ de v dans I(u,v)

qui n'ont pas de second voisin commun dans I(u,v). Alors on a nécessairement que $k \geq 3$ par modularité. k étant minimal, pour tout i il existe $x_i \in N_2(v,u)$ adjacent à tous les sommets w_j, $j \neq i$.

Les sommets $w_1, w_2, \ldots, w_k$, x_k forment un sous graphe B_k dans G.

Si $k = 3$ alors le sous graphe B_3 est contenu dans B_4 ou dans $\hat{B}_3$.

Si $k \geq 4$ alors on peut étendre B_k à $\hat{B}_k$ par (iii).

Donc, dans tous les cas, on obtient un voisin commun w des sommets xi.

Si $d(u,w) = d(u,v) - 1$, alors il existe un voisin commun à $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans $N_2(w,u) \subseteq N_3(v,u)$ car d(u,v) est minimale.

Sinon, w est un voisin commun à $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans $N_3(v,u)$.

Donc, les sommets u, v, $w_1, w_2, \ldots, w_k$, x_k induisent un sous graphe B_{k+1} qui ne peut pas être étendu à $\hat{B}_{k+1}$ dans G car il n'existe pas de voisins communs à $w_1, w_2, \ldots, w_k$ et u par hypothèses.

(iv)$\Rightarrow$(i)

Procédons par induction sur le nombre de sommets de G.

- Si G est un graphe biparti complet alors le résultat est immédiat.
- Sinon, soit {u,v} une paire extrémale de sommets quelconque.

Donc, tous les voisins de v appartiennent à I(u,v), et par hypothèse, il existe un sommet v' dans G-v tel que $N(v) \subseteq N(v')$.

D'où G-v est un rétracte de G, et tout rétracte de G satisfait la condition (iv) aussi. Donc, par hypothèse d'induction, G-v est un rétracte absolu.

De même G-u est un rétracte absolu et un rétracte de G et d'après la proposition 10, on conclut que G est un rétracte absolu. *

19°) <u>Corollaire</u> : [1]

Un graphe biparti G est un rétracte absolu si et seulement si tout intervalle de G est aussi un rétracte absolu.

****<u>Preuve</u>** :

a) *Condition nécessaire* : évident.

b) *Condition suffisante* : La démonstration de la proposition 10 nous donne l'implication. En effet, s'il existe un sommet w de G n'appartenant pas à I(u,v) de G, alors on choisit un sommet x de G quelconque tel que d(u,x) soit maximale avec w appartenant à I(u,x). Alors x est un sommet extrémal lorsque G-x est un rétracte absolu. En procédant ainsi, on aboutit au sous graphe induit par I(u,v). *

V. <u>Polyèdres de rétractes de graphes</u> :

La notion de restructuration définie par P.HELL est un champ d'applications possibles de la notion de rétractes.

Il est supposé qu'une structure, soit ,au sens macro (administrative, militaire, industrielle, de santé, éducative, etc.…) soit au sens micro (laboratoire, équipe sportive, etc.…) se soit développée de manière désordonnée et/ou anarchique , en un mot de manière non contrôlée. Des considérations de décideurs extérieurs (ou à la demande des concernés et /ou d'utilisateurs de la structure, …etc) exigent une utilisation plus rationnelle de la structure. La décision finale nécessite une reconsidération totale de toute la structure et la suppression de certains éléments du système, mais en tenant compte non seulement des contraintes structurelles d'interdépendance (c'est le cas sans optimisation donné par HELL) mais aussi d'autres contraintes de type « économique », telles que le maintien de certains éléments choisis dans un sous ensemble de la structure, et en optimisant un objectif fixé à l'avance comme par exemple un coût (social ou financier minimum, une production maximum, …etc) ou des liaisons les plus fortes possibles entre les différents éléments retenus dans la structure, …etc.

Cette situation a pu être formulée par P.HELL [13] au moyen des rétractes comme suit :

« Soit $\sum$ un système composé d'éléments interdépendants, la relation d'interdépendance étant représentée par un graphe $G(\sum)$ dont l'ensemble des sommets représente les éléments du système et deux éléments sont reliés par une arête si et seulement si ils sont interdépendants.

Restructurer le système $\sum$ c'est choisir un sous graphe $G'(\sum)$ de $G(\sum)$ et un sous graphe H de $G'(\sum)$ tel que H soit un rétracte de $G(\sum)$ (en général $H \neq G'(\sum)$) ».

La définition même de rétracte signifie que l'on supprime d'abord certains sommets (qu'il faut trivialement supprimer) mais que les relations de dépendance sont ''transportées'' par la rétraction, c'est à dire que deux éléments de $G(\sum)$ en dépendance sont envoyés (ou ‘‘réarrangés’’ selon la terminologie de P.HELL dans [13]) sur deux éléments en dépendance dans H. Il faut cependant noter dès à présent que cette définition (légèrement différente de celle donnée par HELL [13] par l’introduction du sous graphe intermédiaire G’) demeure trop vague pour être opérationnelle. Aussi, certaines extensions qui tiennent compte de contraintes supplémentaires sont proposées sous formes de problèmes posés par A.KHELLADI dans [15] comme par exemple :

1°) <u>Rétractes optimisant sur les sommets (ROS)</u>

Soient G =(V, E) un graphe et $t : V \longrightarrow IR$ une valuation des sommets de G. Dans les cas concrets t(v) est un entier naturel quel que soit le sommet v. Si H est un sous graphe de G ; on appellera valuation de H le nombre t (H) et défini par : $t(H) = \sum_{v \in H} t(v)$

Considérons le problème général suivant noté (ROS):

Etant donné un sous graphe G’ de G, trouver $H \subseteq G'$, H rétracte de G tel que : (1) $\sum_{t \in H} t(v)$ soit maximum et (2) $H \neq G'$

Ce problème d’optimisation possède de nombreuses interprétations en restructuration.

A) **<u>Restructuration sociale</u>** : Si chaque sommet v’ de G représente une unité de production (industrielle, administrative, de santé, etc.…) et si quel que soit le sommet v de G, t (v) représente le nombre de travailleurs dans l’unité v, le problème (ROS) dans ce cas signifie que la restructuration tient à garder un maximum de travailleurs en fonction, dans un rétracte de G inclus dans un sous graphe G' d'unités de production choisies à l'avance. Comme le nombre total T de travailleurs est fixe, le personnel qui n'est pas gardé en fonction lors de la restructuration est égal à T – $\sum_{t \in H} t(v)$.

Ainsi, le choix de H par (ROS) minimise le nombre de personnes mises au chômage pour cause des restructuration.

B) **Restructuration de production** : Dans le même contexte que supposons que quel que soit le sommet v de G, t (v) représente une production (d'un bien donné ou d'unités monétaires par exemple représentant les bénéfices réalisés par l'unité v). Dans ce cas, le problème (ROS) signifie que la restructuration cherche à garder une production du bien considéré à un niveau maximum (ou à garder des bénéfices maximum si on interprète les t (v) comme des gains) dans un rétracte de G inclus dans un sous graphe G' d'unités de production choisi à l'avance.

C) **Restructuration sportive** : Soit ε une équipe sportive et soit G(ε) le graphe représentant ε, c'est à dire le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des joueurs de l'équipe , deux joueurs u et v étant reliés par une arête de G(ε) si u et v jouent bien ensemble (c'est à dire ont un jeu bien coordonné et efficace, cette appréciation étant donnée par l’entraîneur). Une bonne équipe serait alors celle où le degré minimum de $G(\varepsilon)$ est plus grand qu’un entier donné proche (par défaut) du nombre de joueurs représentant une équipe dans un match (par exemple 11 en football). Si il y a un surplus de joueurs et si pour des raisons diverses certains doivent être ‘‘remerciés’’, on peut le faire dans l’intérêt de l’équipe en considérant par exemple la valuation t des joueurs définis comme suit : « quel que soit le joueur v , t(v) est le nombre moyen de buts marqués par v par match, le terme ‘‘buts marqués’’ étant évidemment remplacé par nombre moyens de buts arrêtés pour le gardien de but par exemple. Si certains joueurs peu efficaces sur le terrain doivent obligatoirement être renvoyés, on définira ainsi le sous graphe $G'(\varepsilon)$ de $G(\varepsilon)$ et chercher un rétracte H de $G(\varepsilon)$ tel que H vérifie (ROS), avec la condition supplémentaire que l’ordre de H soit supérieur ou égal au nombre de joueur représentant une équipe sur le terrain. Il est clair que l’on ait pu choisir d’autres valuations t sur les joueurs, comme par exemple le nombre total de buts marqués par le joueur pendant la saison écoulée, ou le nombre d’essais de marquer ou encore le nombre de buts arrêtés par le gardien de but, …etc »

D) **Restructuration du paysage politique** :

Dans cet exemple, à partir d’un même graphe (ROS) qui maximise et celui qui minimise sont utilisés simultanément.

Si, à la suite de changements sociaux profonds, un pays passe d'un système monoparti à un système multipartis, l'histoire montre qu'au début de la nouvelle ère, il y a une apparition anarchique et fondements de nouveaux partis politiques, exprimant ainsi le besoin de se manifester en tant qu'‘‘Homopolitique’’. L'histoire aussi nous enseigne que , après un certain temps et certaines expériences (telles que des élections par exemple) des regroupements de petits partis et /ou des fusions dans de ‘‘grands’’ partis s'opèrent . La notion de rétracte peut alors aider à faire une prévision de la situation en introduisant le graphe G(P) (du paysage politique considéré) dont l'ensemble des sommets est formé par l'ensemble tous les partis en présence, deux partis étant reliés par une arête si, selon les politologues, ils ont un certain nombre de points en commun dans leurs programmes et leurs objectifs . Deux manières d'aborder le problème se présentent. Dans la première, on chercherait un regroupement maximum pour une plus grande efficacité du travail politique, alors que, dans la seconde, on cherche à laisser le maximum d'expression politique (le maximum de partis) tout en étant convaincu que des partis trop ‘‘petits’’ sont inefficaces et ne doivent pas être pris en compte.

Dans les deux cas, sachant que les grands partis ne fusionnent pas entre eux, il s'agit de trouver un rétracte H de G (pour garder les relations établies par les politologues) tel que :

(i) H contient tous les grands partis

(ii) Deux partis distincts peuvent fusionner dans un même troisième parti.

(iii) Des partis moyens peuvent s'agrandir en accueillant de petits partis.

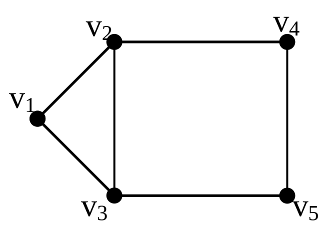
Dans le premier cas le rétracte H est non vide et est minimum du point de vue des sommets (i.e. la valuation t vaut 1 sur tout sommet de G) alors que dans le second cas H est inclus dans le sous graphe G' obtenu en écartent les ‘‘petits’’ partis et est maximum du point de vue des sommets.

2°) <u>Approche polyèdrale des rétractes</u> :

Pour un graphe G =(V, E) où V= $\{v_1, v_2,\dots,v_n\}$, on définit les vecteurs représentatifs des rétractes de G par $x_H = (x_{1H}, x_{2H},\dots, x_{nH})$ où H est un rétracte de G et x_H est tel que : $x_{iH} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est un sommet de H} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit P_R^S (G) le polytope de IR^n engendré par les vecteurs représentatifs des rétractes de G, c'est à dire engendré par les vecteurs x_H tels que : $x_H = (x_{1H}, x_{2H},\dots, x_{nH})$ où H est un rétracte de G.

***<u>Exemple 1</u>** : Soit G le graphe suivant :



Les rétractes de ce graphe sont :

▶ Le graphe G, donc le vecteur représentatif associé est $x_G = (1, 1, 1 ,1, 1)$

▶ Le sous graphe $H_1 = v_1\, v_2\, v_3$, où la rétraction r_1 est définie par :

$r_1 : G \rightarrow H_1$ telle que : $r_1(v_4) = v_3$ et $r_1(v_5) = v_2$, donc $x_{H_1} = (1, 1, 1, 0, 0)$

▶ Le sous graphe $H_2 = v_1 v_2 v_3 v_4$, où la rétraction r_2 est définie par :

$r_2 : G \rightarrow H_2$ telle que : $r_2(v_5) = v_2$, et par suite $x_{H2} = (1, 1, 1, 1, 0)$

▶ Le sous graphe $H_3 = v_1 v_2 v_3 v_5$, où la rétraction r_3 est définie par :

$r_3 : G \rightarrow H_3$ telle que : $r_3(v_4) = v_3$, et par suite $x_{H3} = (1, 1, 1, 0, 1)$

$$\text{Ainsi : } P_R^S(G) = \left\{ x \in IR^5 \;/\; 3 \leq \sum_{i=1}^{5} x_i \leq 5 \text{ et } x_1 = x_2 = x_3 = 1 \text{ et } x \in \{0,1\}^5 \right\}$$

$$= \left\{ x \in IR^5 \;/\; b_1 \leq Ax \leq b_2 \text{ et } x \in \{0,1\}^5 \right\}$$

où A , b_1 et b_2 sont définis comme suit :

$$b_1 = (1,1,1,0,-1)^t \;,\; b_2 = (1,1,1,2,1)^t$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas totalement unimodulaire car il existe une sous matrice de A qui est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ telle que det A'= -2 et par suite on ne peut pas espérer des solutions faciles à des problèmes combinatoires sur les rétractes (par exemple les problèmes ROS).

Exemple 2 : Soit le graphe biparti $K_{m,n}$.

On pose $V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ où $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$,

$V_1 = \{1,2,\ldots,m\}$ et $V_2 = \{ m+1, m+2,\ldots,m+n\}$

Soit x un vecteur représentatif d'un rétracte de $K_{m,n}$. Sans perte de généralités, on considère les m premières composantes de x comme étant associées aux sommets de V_1 et les n autres composantes associées aux sommets deV_2. Un tel vecteur vérifie :

$$\begin{cases} 1 \leq \sum\limits_{i=1}^{m} xi \leq m \\ \\ 1 \leq \sum\limits_{i=m+1}^{m+n} xi \leq n \end{cases} \quad \text{et} \quad x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots\ldots, m+n$$

$K_{m,n}$ est un graphe biparti, donc toute arête de ce graphe est un rétracte et par suite tout rétracte de $K_{m,n}$ possède au moins deux sommets l'un dans V_1 et l'autre dans V_2.

Soit r une rétraction définie par r : $K_{m,n} \longrightarrow H$ / $r(u) = u \quad \forall\, u \in V(H)$

$\forall\, v \in V_i$ et $v \notin V(H)$, $\exists\, u \in V_i \cap V(H)$ / $r(v) = u$ pour $i = 1,2$.

En effet : Soient $v \in V_i$, $v \notin V(H)$ et l'arête vw où $w \in V_j$ et $j \neq i$.

Si $w \in V(H)$ alors $r(v)\, r(w) = uw \in E(H)$ car $u \in V_i \cap V(H) \subset V(H)$.

Sinon $r(v)\, r(w) = uw'$ est une arête de H car $u \in V_i \cap V(H) \subset V(H)$

et $w' \in V_j \cap V(H) \subset V(H)$ ($j \neq i$).

$$\text{Ainsi : } P_R^S(K_{m,n}) = \left\{ x \in IR^{m+n} \;/\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b_1 \end{pmatrix} \leq Ax \leq \begin{pmatrix} m \\ n \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ et } x \in \{0,1\}^{m+n} \right\}$$

$$\text{tels que} : A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \\ A_5 & A_6 \end{pmatrix} \text{ où :}$$

A_1 est une 2xm matrice et $A_1 = \begin{pmatrix} 1.....1 \\ 0......0 \end{pmatrix}$,

A_2 est une 2xn matrice et $A_2 = \begin{pmatrix} 0.......0 \\ 1........1 \end{pmatrix}$,

A_3 (respectivement A_6) est une $\frac{m(m-1)}{2}$ x m (respectivement $\frac{n(n-1)}{2}$ x n matrice où chaque ligne de A_3 (respectivementde A_6) possède exactement un seul 1 et un seul -1 et les autres coefficients sont nuls.

A_4 (respectivement A_5) est une $\frac{m(m-1)}{2}$ x n (respectivement $\frac{n(n-1)}{2}$ x m) matrice nulle.

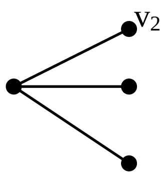
$b_1$et b_2 deux vecteurs de $IR^{\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}}$ tels que $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ . \\ . \\ -1 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs représentatifs des rétractes de $K_{m,n}$ associés aux sommets sont au nombre de $(2^m - 1)x(2^n - 1)$ étant donné que le vecteur nul n'appartient pas à $P_R{}^S(K_{m,n})$ et les m premières composantes de ces vecteurs ne sont jamais tous nuls ainsi que les n dernières car chaque arête de $K_{m,n}$ est un rétracte de celui ci.

Ainsi : $x \in P_R{}^S(K_{m,n}) \Leftrightarrow \exists\ i \in \{1,\ldots, m\},\ \exists\ j \in \{m+1,\ldots,m+n\}\ /\ x_i = x_j = 1$

<u>Cas particuliers</u> :

a) Soit le graphe biparti $K_{1,3}$



v_3

v_1

v_4

Les rétractes de ce graphe sont :

► Chaque arête du graphe est un rétracte de $K_{1,3}$ car c'est un graphe biparti. Les vecteurs représentatifs de ces rétractes sont :

(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) et (1, 0, 0, 1).

► $K_{1,3} \in AR(B,m)$ et donc $x = (1, 1, 1, 1) \in P_R^s(K_{1,3})$

► Le sous graphe $H_1 = v_2\ v_1\ v_3$ est un rétracte de $K_{1,3}$, où la rétraction r_1

est définie par $r_1 : K_{1,3} \rightarrow H_1$ telle que : $r_1(v_4) = v_2$ (ou $r_1(v_4) = v_3$) et par suite : $x_{H_1} = (1, 1, 1, 0)$

► De la même manière $H_2 = v_3\ v_1\ v_4$ et $H_3 = v_2\ v_1\ v_4$ sont des rétractes de

$K_{1,3}$ tels que leurs rétractions sont respectivement r_2 et r_3 telles que :

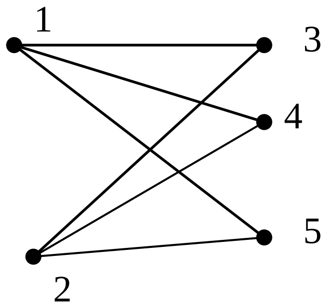
$r_2(v_2) = v_3$ (ou v_4), $r_3(v_3) = v_2$ (ou v_4) où $x_{H2} = (1,0,1,1)^t$; $x_{H3} = (1,1,0,1)^t$

$$\text{Ainsi :}\quad x \in P_R^S(K_{1,3}) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x_2 + x_3 \le 2 \ \wedge\ 1 \le x_2 + x_4 \le 2 \\ x_1 = 1 \ \wedge\ (\ x_i \in \{0,1\}\ , i = 2, 3, 4\ ) \\ 1 \le x_3 + x_4 \le 2 \ \wedge\ 0 \le x_2 + x_3 + x_4 \le 3 \end{cases}$$

Le polytope des rétractes de $K_{1,3}$ est $P_R^s(K_{1,3}) = \left\{x \in \{0,1\}^4 / b_1 \le Ax \le b_2\right\}$

$$b_1 = (1,1,1,1,0)^t \text{ , } b_2 = (1,2,2,2,3)^t \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soit le graphe biparti $K_{2,3}$



Il existe 21 (i.e $(2^2 - 1)x(2^3 - 1)$) rétractes de $K_{2,3}$ qui sont :

► $K_{2,3}$ et le vecteur représentatif de ce rétracte est $x = (1,1,1,1,1)^t$.

► $\{i, j\}$ où $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{3, 4, 5\}$ et le rétraction r définie par :

$r : K_{2,3} \longrightarrow \{i,j\}$ telle que $r(i) = i$, $r(j) = j$, $r(i') = i$ pour $i' \in \{1,2\} - \{i\}$

et $r(j') = j$ pour $j' \in \{3, 4, 5\} - \{j\}$.

Les vecteurs représentatifs de ces rétractes sont $(1,0,1,0,0)^t$, $(1,0,0,1,0)^t$,

$(1,0,0,0,1)^t$, $(0,1,1,0,0)^t$, $(0,1,0,1,0)^t$, $(0,1,0,0,1)^t$.

► $\{1, 2, j\}$ où $j \in \{3, 4, 5\}$ et la rétraction r définie par :

$r : K_{2,3} \longrightarrow \{1, 2, j\}$ telle que $r(1) = 1$, $r(2) = 2$, $r(j) = j$ et $r(j') = j$

pour $j' \in \{3, 4, 5\} - \{j\}$

Les vecteurs représentatifs de ces rétractes sont $(1,1,1,0,0)^t$, $(1,1,0,1,0)^t$,

$(1,1,0,0,1)^t$.

► $\{i, j, k\}$ où $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{3, 4, 5\}$, $k \in \{3, 4, 5\}$ et $j \neq k$ et la rétraction r est définie par :

r : $K_{2,3} \longrightarrow \{ i , j , k\}$ telle que r(i) = i , r(j) = j , r(k) = k , r(i') = i

pour i' $\in \{1,2\} - \{i\}$ et r(h) = k (ou r(h) = j) pour h $\in \{3, 4, 5\} - \{j , k\}$.

Les vecteurs représentatifs de ces rétractes sont $(1,0,1,1,0)^t$, $(1,0,1,0,1)^t$,

$(1,0,0,1,1)^t$, $(0,1,1,1,0)^t$, $(0,1,1,0,1)^t$, $(0,1,0,1,1)^t$.

► $\{1 , 2 , j , k \}$ où $j \in \{ 3, 4, 5\}$, $k \in \{ 3, 4, 5\}$, $j \neq k$ et la rétraction

r est définie par r : $K_{2,3} \longrightarrow \{ 1, 2, j , k\}$ telle que r(1) = 1 , r(2) = 2,

r(j) = j , r(k) = k et r(h) = j (ou r(h) = k) et $h \in \{ 3, 4, 5\} - \{ j , k \}$.

Les vecteurs représentatifs de ces rétractes sont $(1,1,1,1,0)^t$, $(1,1,1,0,1)^t$,

$(1,1,0,1,1)^t$.

► $\{i , 3 , 4 , 5\}$ où $i \in \{ 1, 2\}$ et la rétraction r est définie par :

r : $K_{2,3} \longrightarrow \{ i , 3 , 4 , 5\}$ telle que r(i) = i , r(3) = 3 , r(4) = 4, r(5) = 5

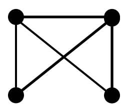
et r(j) = i pour $j \in \{ 1, 2\} - \{i\}$.

Les vecteurs représentatifs de ces rétractes sont $(1,0,1,1,1)^t$ et $(0,1,1,1,1)^t$

$$\text{ainsi} : P_R^S(K_{2,3}) = \left\{ x \in IR^5 \ / \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x \in \{0,1\}^5 \right\}$$

***Exemple 3** :

Soit le graphe complet K_4 représenté comme suit :



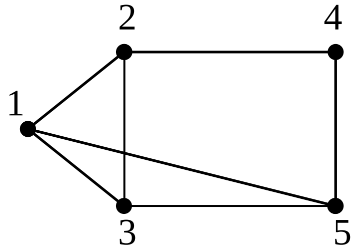
K_4 est un graphe rigide car il n'admet comme rétracte que lui même et

$P_R^S(K_4) = \{(1,1,1,1)^t\}$.

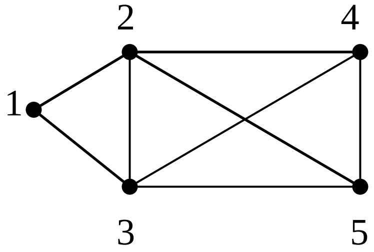
****Remarque** :**

Les polytopes $P_R^S(G)$ associés aux rétractes de graphes ne sont pas faciles à définir car si on prend n'importe quel graphe (à l'exception de quelques graphes comme par exemple les graphes bipartis complets) , l'approche polyèdrale n'est pas évidente et on ne peut pas la généraliser à tous les cas.

Par exemple : Soient les graphes G et G' représentés comme suit :



G



G'

Les rétractes de G sont G , $H_1= \{1,2,3\}$ où la rétraction r_1 est définie par $r_1(4) = 1$ et $r_1(5) = 2$ et $H_2 = \{1,3,5\}$ où la rétraction r_2 est définie par $r_2(4) = 1$ et $r_2(2) = 5$. Les vecteurs représentatifs des rétractes de G sont donc : $(1,1,1,1,1)^t$, $(1,1,1,0,0)^t$ et $(1,0,1,0,1)^t$

Cependant G' est un graphe rigide et $P_R^S(G')$ est donc réduit au point $(1,1,1,1,1)^t$.

Ainsi, on remarque que V(G) = V(G') alors que chaque graphe possède des rétractes différents, donc à chaque graphe on lui associe des rétractes qui lui sont proprement spécifiques et par suite on ne pas donner une structure générale des polyèdres $P_R^S(G)$ associés aux rétractes de graphes

et la recherche de ces tels polytope se fait cas par cas.

Chapitre 3 : Rétracte rigide de la somme cartésienne de graphes

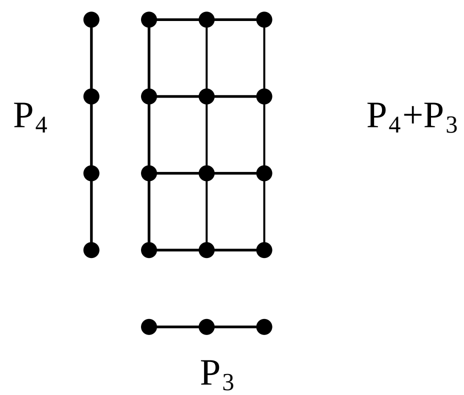
Dans cette partie, R.Novakowsky et I.Rival [20] ont étudié certains

graphes faisant partie de la classe des graphes rigides.

1°) <u>Définition</u> : La somme cartésienne de G = (V,E) et G' =(V', E') est le graphe G+G' = (VxV', E_S) tel que :

$$((x,x') ;(y,y')) \in E_S \Leftrightarrow (x = y \text{ et } x'y' \in E') \text{ ou } (xy \in E \text{ et } x' = y')$$

<u>Exemple</u> :



Il est facile de voir que si S est un sous graphe de G, T un sous graphe de H et r une rétraction G+H vers S+T alors S est un rétracte de G et T un rétracte de H.

En effet, soit b un sommet de T ; la composition $\pi_S or$ de r avec la projection π_S de S+T vers S définit une rétraction de G+{b} $\cong$ G vers S car : $\pi_S or(a,b)= \pi_S(a,b) = a$, lorsque a est dans V(S).*

R.Novakowsky et I.Rival ont examiné le problème suivant :

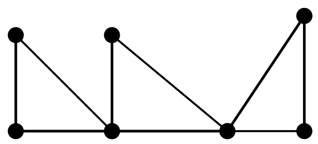
« Caractériser les graphes connexes G tels que : pour tout graphe H connexe, si R est un rétracte de G+H alors R= S+T où est S un rétracte de G et T est un rétracte de H. »

Hell et Farber ont donné un exemple indiquant la nécessité de l'hypothèse de connexité de la conjecture suivante :

« Soient A = C_5, B un graphe 5-chromatique minimal dont la longueur du plus petit cycle est sept, C un graphe 7-chromatique minimal dont la longueur du plus petit cycle est cinq, G la réunion disjointe de A et B et H la réunion disjointe de A et C. Aucune des composantes A+C, B+A et B+C n'a un rétracte propre quoique {a}xA est un rétracte de A+A pour au moins a de V(A) ».

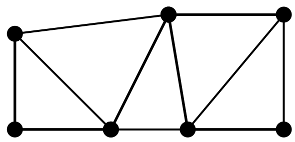
2°) <u>Définition</u> : Un graphe connexe G tel que $|V(G)| \geq 3$ est dit faiblement triangulaire si chaque arête de G est dans un triangle

***<u>Exemple</u>** :



3°) <u>Définition</u> : Un graphe connexe G est dit fortement triangulaire si toutes les paires de sommets sont reliées par une séquence de triangles partagés par une arête.

***<u>Exemple</u>** :



Soient G et H des graphes, R un rétracte de G+H. On suppose que R est un sous graphe de G+H. Soit g un homomorphisme de G+H dans R tel que g(a) = a , quelque soit a dans V(R) est une rétraction de G+H dans R.
Pour x dans V(H), soit $R_x = (G+\{x\}) \cap R$ et $\overline{R_x} = \pi_G R_x$.

On a vu que R est un sous graphe isométrique à G+H

$(\forall\ a, b \in V(R) \quad d_R(a,b) = d_{G+H}(a,b)\ )$

On remarque aussi que si (a,x) et (b,y) où $x \neq y$ sont dans R et z dans V(G+H) est adjacent aux deux sommets alors g(z) = (a,y) ou (b ,x).

R.Nowakowski et I.Rival ont établi des théorèmes dont les hypothèses imposent des conditions sur les triangles et les 4-cycles.

4°) <u>Lemme 1</u> : [20]

Soient G et H deux graphes connexes et g une rétraction de G+H dans R.

Si R_x est non vide, alors R_x est isométrique.

La preuve de ce lemme est dans la preuve du théorème 1 qui sera traitée après.

5°) <u>Définition</u> : Soient G et H deux graphes connexes et S un sous graphe de G. On définit le transfert de S dans H si pour tout rétracte R de G+H, tel que : $S+\{x\} \subseteq R$ et (a,y) de V(R) lorsque x est adjacent à y dans H et a de V(G) implique que : $S+\{y\} \subseteq R$.

***<u>Remarque</u>** : Il est facile de vérifier que chaque triangle de G se transfert dans H. En effet, soit K ={a,b,c} un triangle de G.

Soient K+{x} et (a,y) un sommet du rétracte R de G+H lorsque x est adjacent à y dans H ; donc (a,x) est adjacent à (a,y), (b,x) à (b,y) et (c,x) à (c,y) dans G+H.

Considérons l'image de (b,y) par la rétraction, il faut qu'elle soit adjacente à (a,y) et (b,x), c'est à dire qu'elle est l'image d'elle même. De même pour (c,y).

Ceci n'est pas nécessairement vérifié pour les 4-cycles. Cependant, nous énonçons ce qui suit :

6°) <u>Lemme 2</u> : [20]

Soient G et H deux graphes connexes et R un rétracte de G+H.

Si tout 4-cycle de G se transfert dans H, alors chaque cycle de G se transfert dans H.

****<u>Preuve</u>** : Comme R est un sous graphe connexe de GxH, il suffit de traiter les sommets adjacents de H. Supposons par contre qu' il existe un cycle C de G tel que $|V(G)| \geq 4$ qui ne se transfert pas dans H. Soient x et y deux sommets qui sont adjacents dans H tels que $C+\{x\} \subseteq R$, mais $C+\{y\}$ n'est pas contenu dans R et soit a dans V(G) tel que : $(a,y) \in V(R)$. En supposant que la distance entre a et n'importe quel sommet de C est la plus faible possible, soit $V(C) = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ tel que c_{i+1} adjacent à c_i et c_0 adjacent à c_n.

•Supposons que $a \in V(C)$; puisque R est isométrique, C un cycle ayant la plus petite longueur et en posant :

$$(C+\{y\}) \cap R = \{c_0, c_1, \ldots, c_k\} + \{y\} \qquad (1)$$

pour $0 < k < n-1$, on a donc : $g(c_{k+1}, y) = (c_k, x)$.

Si : $g(c_k, y) = (c_{i-1}, x)$ pour tout $i = k+1, k+2, \ldots, n$, alors c_{n-1} est adjacent à c_n et c_0. Par hypothèse, le triangle $\{c_{n-1}, c_n, c_0\}$ se transfert dans H, ce qui contredit (1).

Soit c_i le sommet de C ayant le plus petit indice tel que $g(c_i, y) \neq g(c_{i-1}, x)$

alors : $i > k+1$.

Maintenant , on a : $g(c_i , y) = (b,x)$ et donc $\{c_{i-2} , c_{i-1} , c_i, b\}$ est un 4-cycle

qui se transfert dans H, ce qui contredit (1).

•Supposons que : $a \not\in V(C)$; donc il existe une courte chaîne P dans R

joignant (a,y) à un sommet de C+{x}. La projection de P dans G est aussi

une courte chaîne $P_G = \{a_0 = a, a_1,\ldots, a_m\}$ de a à C. Par conséquent, la

plus courte distance de (a,y) à C+{x} est m+1 et $P = (P_G+\{x\}) \cup \{(a,y)\}$.

Nous pouvons reconsidérer C de sorte que $a_m = c_0$ et pour plus de

commodité, on pose : $C = \{c_0 = a_m , c_1 = a_{m+1} , c_2 = a_{m+2},\ldots,c_n = a_{m+n}\}$.

Il s'ensuit que $g(a_1 , y) = (a_0 , x)$.

Soit a_i, pour $i >1$, un sommet de plus petit indice tel que $g(a_i, y)\neq g(a_{i-1}, x)$

si l'un existe. Puisque $g(a_i , y)$ est adjacent à (a_i , x) et (a_{i-2} , x) alors :

il existe b de V(G) tel que $g(a_i ,y) = (b,x)$.

Donc : $\{b , a_{i-2} , a_{i-1} , a\}$ est un 4-cycle qui se transfert dans H, qui

contredit le choix de a.

Par conséquent, pour tout $i > 0$, $g(a_i, y) = (a_{i-1}, x)$.

Finalement : $g(a_{m+n} , y) = (a_{m+n-1} , x)$ est adjacent à $g(a_m , y) = (a_{m-1} , x)$.

Donc : $\{a_{m-1} , a_m , a_{m+n} , a_{m+n-1}\}$ est un 4-cycle qui par hypothèse se

transfert dans H contredisant le choix de a et C.*

7°) <u>Théorème 1</u> : [20]

Soient G un graphe fini fortement triangulaire et H un graphe fini connexe. Si R est un rétracte de G+H, alors R = S+T où soit S est un rétracte de G , soit $|V(S)| = 1$ et T est un rétracte de H.

****Preuve** : Soient G un graphe fortement triangulaire, H un graphe connexe et R un rétracte de G+H.

Puisque les triangles de G se transfèrent dans H et G est fortement triangulaire, alors les 4-cycles doivent aussi se transférer dans H et par le lemme 2, tous les cycles de G se transfèrent dans H.

Si $R = \{a\}+T$ où T un sous graphe de H, alors T est un rétracte de H.

Supposons, donc que $|V(R_x)| \geq 2$ pour x de V(H).

R_x est un rétracte de G+{x}.

En effet, soit g la rétraction de G+H dans R ; on définit une application g_x de G+{x} dans R_x par $g_x(a , x) = g(a,x)$. Pour montrer que g_x est une rétraction, il suffit de montrer que g_x est bien définie.

Comme R est isométrique à G+H et $|V(R_x)| \geq 2$, R_x contient deux sommets adjacents. Ces deux sommets appartiennent à un triangle de G+{x} qui est $\{a,b,c\}+\{x\} \subset R_x$. Soit (d,x) un sommet de G+{x} ; donc il

existe une séquence de triangles T_0 , T_1 ,…., T_n tels que :

$a , b \in T_0$, $d \in T_n$ et $|V(T_i) \cap V(T_{i+1})| = 2$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Comme deux sommets de $T_0 +\{x\}$ ont des images par g dans R_x , alors

$g(T_0 + \{x\}) \subset R_x$ et par induction $g(T_i + \{x\}) \subset R_x$ et par suite $g(d,x) \in R_x$

Ainsi, g_x est bien définie et c'est une rétraction.

Il s'ensuit que R_x est fortement triangulaire et que, pour tout y de V(H) tel que $R_y \neq \emptyset$, $R_x \cong R_y$.

Et ainsi de suite, R = S+T lorsque $S = \pi_G (R_x)$ est un rétracte de G.*

8°) <u>Théorème 2</u> : [20]

Soient G un graphe fini connexe faiblement triangulaire et H un graphe fini connexe n'ayant aucun triangle. Si R est un rétracte de G+H, alors R = S+T où S est un rétracte de G et T un sous graphe de H .

****<u>Preuve</u>** : Soient G un graphe faiblement triangulaire, H un graphe sans aucun triangle et R un rétracte de G+H.

Comme chaque sommet de G se trouve sur un triangle et H n'a aucun triangle, il s'ensuit que si $R_x \neq \emptyset$ alors tout sommet de R_x se trouve sur un triangle contenu dans R_x . Puisque les triangles de G se transfèrent dans H, on a $R_x \cong R_y$ pour tout x, y de V(H) tels que $V(R_x) \neq \emptyset \neq V(R_y)$

Ainsi, R = S+T où S et T sont respectivement des sous graphes de G et H. Il reste à montrer que S est un rétracte de G.

Supposons que $V(R_x) \neq \emptyset$; donc R_x contient un triangle T_0+{x}.

Soit (d,x) tout autre sommet de G+{x}. La rétraction fait correspondre tout triangle T+{x} vers un triangle de la forme T+{y}.

Soit P = $\{a_0 , a_1 ,\ldots,a_n = d\}$ une chaîne quelconque de T_0 vers d, où

$a_0 \in V(T_0)$. Puisque $(a_0, x) \in V(R_x)$, il s'ensuit que toute image d'un triangle contenant $\{a_0, a_1\}+\{x\}$ par la rétraction est dans R_x .

Par induction, la rétraction fait correspondre (d,x) à un élément de R_x et donc R_x est un rétracte de G+{x}. D'où , S est un rétracte de G.*

9°) <u>Théorème 3</u> : [20]

Soient G un graphe fini connexe faiblement triangulaire et H un graphe fini connexe. Si R est un rétracte de G+H, alors R = S+T où S et T sont respectivement des sous graphes de G et H.

****<u>Preuve</u>** : Soit g une rétraction de G+H dans R.

Supposons que pour tout x de V(H), R_x contient une arête {(a,x),(b,x)}.

Puisque G est un graphe faiblement triangulaire, alors il existe c de V(G) tel que :{a,b,c}+{x} est un triangle dans G+{x}. Il s'ensuit qu'il existe un sommet d adjacents à a et b dans G tel que : g(c,x) = (d,x) .

Ainsi, R_x contient un triangle qui se transfert dans H. En particulier, les deux sommets a et b se transfèrent dans H.

R et R_x sont connexes , donc pour tout c de V(G) tel que $(c,x) \in V(R_x)$, c se transfert aussi dans H et par suite on a : $R = \pi_G(R) + \pi_H(R)$.*

Les deux lemmes suivants sont utiles pour prouver les théorèmes 4 et 5 qu'on citera plus tard. En effet, en plus des hypothèses des théorèmes, si K est un sous graphe 2-connexe de G et K+{x} est dans un rétracte de G+H alors soit on a un homomorphisme de K+{y} dans K+{z} pour

un sommet z de H, soit G satisfait certaines conditions assez fortes.
10°) <u>Lemme 3</u> : [20]

Si $\pi_G(R)$ contient un cycle, alors il existe x dans V(H) tel que R_x

contient un cycle.

****<u>Preuve</u>** : Supposons le contraire.

Soit n le cardinal d'un cycle C de $\pi_G(R)$ ayant la plus petite longueur.

Un tel cycle est isométrique dans G.

Si a et b sont deux sommets adjacents de C et (a,x), (b,y) sont dans V(R),

alors l'image de la plus courte chaîne de (a,x) vers (b,y) par la rétraction

est aussi une plus courte chaîne, et donc pour z dans V(H) : (a,z) , (b,z)

sont dans V(R). On en conclut qu'il existe un sous ensemble T de V(H)

tel que $E(C) \subseteq \cup_{x\in T} E(\overline{R}_x)$.

Soit M la série de ces tels sous ensembles qui sont aussi irrédondants

(c'est à dire : $T \in M$ s'il existe au moins un cycle C dans $\pi_G(R)$ tel que

$|C| = n$ et $E(C) \subseteq \cup_{x\in T} E(\overline{R}_x)$), mais ceci n'est pas valable pour

n'importe quel sous ensemble propre de T.

Soient $C = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ un cycle de longueur minimale de G et $T \in M$

tels que : $E(C) \subseteq \cup_{x\in T} E(\overline{R}_x)$.

Si a_i , a_j sont dans V(C) et s'il existe x dans V(T) tel que (a_i , x), (a_j , x)

sont dans V(R), alors par isométrie de R soit on a $\{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j\}+\{x\} \subseteq R$

soit $\{a_j, a_{j+1}, \ldots, a_i\}+\{x\} \subseteq R$.

Il s'ensuit de l'irrédondance de T que l'on peut poser T = $\{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$

tel que : $C \cap \overline{R_{x_i}} = \{a_{i_1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_k}\}$ et $a_{i_2}, a_{i+1_1} \in \overline{R_{x_i}} \cap \overline{R_{x_{i+1}}}$, mais :

$a_{i_1} \notin \overline{R_{x_i}}$; $a_{i+1_2} \notin \overline{R_{x_1}}$.

Etant donné C, T de M, $|T| = t$, tels que : $E(C) \subseteq \overline{\cup_{x \in T} E(R_x)}$, on définit :

$$e(C,T) = \sum_{i=1}^{|T|-1} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_t, x_1) \quad \text{et} \quad e = \min e(C,T)$$

Soient $C = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ et $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}\}$ des sous ensembles

qui minimisent e (C,T). Puisque x_i et x_{i+1} sont dans V(T), alors il existe

une courte chaîne P_i les joignant où :

$\{a_{i+1_1}, a_{(i+1)_1+1}, \ldots, a_{i_2}\} + \{y\} \subset R$ pour tout y de P_i.

Puisque : $(a_{i+1_1}, x_i), (a_{i+1_1}, x_{i+1}) \in R$, alors la plus courte chaîne P est la suivante :

$P = \{x_i = y_0, y_1, \ldots, y_m = x_{i+1}\}$ telle que : $(a_{i+1}, P) \subseteq R$.

A présent, on a : $r(a_{(i+1)_1+1}, P) = (a_{(i+1)_1+1}, Q)$, avec $Q = \{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$; mais $(a_{(i+1)_1}, y_j)$ est adjacent à $(a_{(i+1)_1+1}, z_j)$, c'est à dire que $y_j = z_j$.

Procédons par induction sur j : $(i+1)_1 \le j \le i_2$.

Dans T, si $y \in P_i \cap P_j$, $i < j$ et $y \neq x_{i+1}$, soit $i = 1$, $j = t - 1$ et $y \neq x_1$

alors R_y contient $\{a_{(i+1)_1}, a_{(i+1)_1+1}, \ldots, a_{i_2}\}$ et $\{a_{(j+1)_1}, a_{(j+1)_1+1}, \ldots, a_j\}$,
et donc il contient aussi soit $\{a_{i_2}, a_{i_2+1}, \ldots, a_{j+1_1}\}$ soit $\{a_{j_2}, a_{j_2+1}, \ldots, a_{i+1_1}\}$.

Si on considère le dernier cas, alors on pose :

soit $V = (T - \{x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_j\}) \cup \{y\}$ soit $V = (T - \{x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_i\}) \cup \{y\}$.

Par l'un des deux cas précédents, e (C,V) < e (C,T) contrairement au

choix de C dans T.

Par suite : $P_i \cap P_j$ est non vide lorsque soit $i+1 = j$ et $P_i \cap P_{i+1} = \{x_{i+1}\}$

soit $i = 1$, $j = t - 1$ et $P_1 \cap P_{t-1} = \{x_1\}$.

Maintenant que : $P_1 \cup \ldots \cup P_t \cup T$ est un cycle qui est isométrique,
on pose : $D = P_1 \cup \ldots \cup P_t \cup T = \{y_0, y_1, \ldots, y_p\}$

Si D n'est pas isométrique, alors il existe y_i , y_j , $i < j$ tels que :

$d(y_i , y_j) < \min \{j - i , p + 1 + i - j\}$, qui permettent d'être les plus fermés.

A présent que : R_{y_i} contient $C_i = \{a_{k_1}, a_{k_1+1}, ..., a_{(k-1)_2}\}$ et R_{y_j} contient C_j où $C_j = \{a_{i_1}, a_{i_1+1}, ..., a_{(i-1)_2}\}$ et $k \neq 1$ (car si $k = 1$, alors y_i et y_j sont sur la plus

courte chaine de x_k à x_{k+1}).

Soit $P \subseteq R$ une courte chaîne de (C_i , y_i) à (C_j , y_j) telle que :

$$|P \cap (C_i ,y_i)| = 1 = |P \cap (C_j ,y_j)|.$$

Notons : $l(\pi_H P) = d(y_i , y_j)$ et posons $V = (T - \{x_k , x_{k+1} ,\ldots, x_{l-1}\}) \cup \pi_H P$

et $U = (T - \{x_l , x_{l+1} ,\ldots, x_{k-1}\}) \cup \pi_H P$.

Il s'ensuit que : $\cup_{x \in V} R_x$ ou $\cup_{x \in U} R_x$ contient un cycle C' de taille n.

Soient V' et U' deux sous ensembles irrédondants respectivement de V et de U, donc par le dernier cas on a :

$$e(C',V') \leq d(y_i, y_j) + d(y_j, x_l) + d(x_{k-1}, y_i) + \sum_{q=1}^{k-2} d(x_q, x_{q+1})$$

$$< d(x_{k-1}, y_i) + d(y_i, x_k) + \sum_{q=k}^{l-2} d(x_q, x_{q+1}) + d(x_{l-1}, y_i) + d(y_i, x_{l-1}) + \sum_{q=1}^{k-2} d(x_q, x_{q+1})$$

$$= e\,(C,T).$$

De la même manière, si on considère le dernier cas, alors on a :

e (C',U') < e (C,T).

Les deux résultats contredisent le choix de C et T.

On pose : $D = \{y_0\ y_1, \ldots, y_p\}$, $C = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, $a_0 \in \overline{R_{y_0}}$ et $a_1 \in \overline{R_{y_1}}$ tel que : $a_0 \notin \overline{R_{y_1}}$. Comme $C + D$ et R sont isométriques dans $G + H$, alors $a_0 \notin R_{y_i}$ pour $1 \leq i \leq \frac{1}{2}(p+1)$. Soit j le lus petit indice tel qu'il existe un $a_k \in \overline{R_{y_j}}$ et $k \geq \frac{1}{2}(n+1)$.

Si $j \geq \frac{1}{2}(p+1)$, alors on considère la chaine :

$P = \{(a_0, y_0)(a_0, y_1), \ldots, (a_0, y_j), (a_{n-1}, y_j), (a_{n-2}, y_j), \ldots, (a_k, y_j)\}$

On remarque que : $l(P) = d((a_0, y_0), (a_k, y_j)) = n - k + j$

Puisque $r(a_0, y_1) = (a_1, y_1)$, alors la longueur de l'image de P ne doit pas

être inférieure à 1 plus la distance de (a_1, y_0) à (a_k, y_j).

Soit Q la plus courte chaîne dans $(C+D) \cap R$ de (a_1,y_0) à (a_k,y_j).

Si $\pi_H Q$ contient $\{y_0,y_p,y_{p-1},\ldots,y_j\}$ alors $\pi_G Q$ contient soit $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$

soit $\{a_1,a_0,a_{n-1},\ldots,a_k\}$; et donc on a :

$$n- k+ j \geq 1+ \min\{k-1+ j,\ k-1+p+2-j,\ n-k+1+j\}.$$

Mais ceci est impossible car : $n-k < k$ et $j \leq p+1 - j$.

Par conséquent : $j > (1/2)(p+1)$.

Soit i le plus grand indice tel que : $a_i \in \overline{R_{y_{j-1}}} \cap \overline{R_{y_j}}$. Par le choix de j, on a :

$$i < \frac{1}{2}(n+1).$$

Considérons la chaîne :

$P = \{(a_i,y_j),(a_i,y_{j+1}),\ldots,(a_i,y_0),(a_{i-1},y_0),(a_{i-2},y_0),\ldots,(a_0,y_0)\}$

La longueur de P est $p+1-j+i$. Si $a_q \in \overline{R_{yl}}$, $l < q$, alors $q < (1/2)(n+1)$ et par suite $\cup \overline{R_{yl}}$, $l > j$, contient a_q , $q > (1/2)(n+1)$ et par le choix de D (i.e T) $\overline{R_{yl}}$ ne peut pas contenir C en entier. D'où l'image de P a une longueur au moins égale au min $\{i+j , n+1-i+1-j\}$.
Mais $p + 1- j + i \geq i + j \Rightarrow (1/2)(p+1) \geq j$ et $p + 1- j + i \geq n + 1- i+ p +1- j \Rightarrow i \geq (1/2)(n+1)$. Les deux sont des contradictions et ceci complète la preuve.*

11°) <u>Lemme 4</u> : [20]

Soient G et H deux graphes finis connexes et R un rétracte de G+H et supposons que tous les cycles de G se transfèrent dans H. Alors, il existe des sous graphes S de G et T de H tels que S+T est un rétracte de R . De plus, si G ne contient pas de sous graphe induit isomorphe à un 4-cycle , alors soit T est rétracte de H soit il existe un homomorphisme f de S dans S tel que : $d_G(a, f(a)) = 1$, pour tout a dans V(S).

****<u>Preuve</u>** : Soit r une rétraction de G+H dans R.

Posons : $T = \{x \in V(H) / R_x \neq \emptyset\}$ et $S' = \cap\{ \overline{R_x} / x \in T\}$.

Soit S le plus grand sous ensemble de S' pour lequel chaque sommet de S est soit sur un cycle ou sur une chaîne joignant deux cycles, i.e., S est obtenu de S’ en ‘démantelant’ successivement les sommets de degré 1.

On remarque que si S existe, alors il est connexe et puisque les cycles se transfèrent dans H , $\overline{R_x} - S$ est une arbre pour chaque x dans V(T).

La suite de la preuve du lemme 4 se fait à partir des corollaires suivants.

12°) <u>Corollaire 1</u> : [20]

Soient S, R et T définis dans le lemme 4.

Si S est non vide, alors S+T est un rétracte de R

<u>Preuve</u> : Pour tout a dans V(S), on choisit a’ dans V(S) qui est adjacent à a.

Si $b \in V(\overline{R_x} - S)$, alors, puisque les cycles de G se transfèrent dans H, il existe un seul a dans V(S) et une seule chaîne dans $(\overline{R_x} - S) \cup \{a\}$ de a à b. De plus, n’importe quelle chaîne dans $\overline{R_x}$ de b à n’importe quel sommet de S doit inclure le sommet a.

D’où, si $a \in V(S)$ alors la composante connexe de $(\overline{R_x} - S) \cap \{a\}$ est un arbre. Soit T(a,x) cet arbre. Puisque les cycles de G se transfèrent dans H, alors tout sommet de $\overline{R_x} - S$ appartient à un tel arbre.

Soit s une application de R dans S+T définie par :

$$s(b,x) = \begin{cases} (b,x) & , b \in S \\ (a,x) & , b \in T(a,x) \ , \ d(b,a) \text{ est pair.} \\ (a',x) & , b \in T(a,x) \ , \ d(b,a) \text{ est impair} \end{cases}$$

s est une rétraction. En effet, on a :

$s(a,x) = (a,x)$ si $a \in S$ et $x \in T$.

Il reste à montrer que s est un homomorphisme.

Si (b,x) est adjacent à (c,x), $b \in S$ alors : $s(b,x)\, s(c,x) = (a,x)\,(a',x)$ et donc $s(b,x)$ est adjacent à $s(c,x)$. Si les sommets b et c sont dans $V(S)$ alors il est trivial que $s(b,x)$ soit adjacent à $s(c,x)$.

Lorsque (c,x) est adjacent à (c,y) et $c \in V(S)$, ceci a été fait.

Supposons par conséquent que $c \notin V(S)$ et $c \in T(a,x) \cap T(b,y)$.

Soient $P_1 = \{a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = c\}$ et $P_2 = \{b_0 = b, b_1, \ldots, b_m = c\}$ deux chaînes de a à c et de b à c respectivement dans $T(a,x)$ et $T(b,y)$. Soit a_i un sommet de plus petit indice dans P_1 qui est aussi dans P_2 ($a_i = b_j$)

Puisque P_1 et P_2 sont de courtes chaînes, alors $b_k \notin P_1$ et $k < j$.

Sans pertes de généralités, on peut supposer que : $i \leq j$.

Si $(a_{i-1}, y) \in R$, alors $d(a_{i-1}, S) < i$ et par suite il existe une chaîne P_3 différente de P_2, de a_{i-1} à un certain sommet d de $V(S)$ telle que $P_3 \subset R_y$.

Mais alors, ceci pourrait entraîner que $a_i \in T(b,y) \cap T(d,y)$.

Les considérations précédentes ont montré que $b = d$, mais alors $P_2 \cup P_3$ contient un cycle (i.e. $T(b,y)$ n'est pas un arbre). D'où, $(a_{i-1}, y) \notin R$ et donc : $r(a_{i-1}, y)$ est adjacent à (a_{i-1}, x) et (a_i, y) (i.e., $r(a_{i-1}, y) = (a_i, x)$).

Ainsi $r(P_1, y)$ n'est pas contenu dans $G+\{y\}$, et donc $r(P_1, y)$ est plus longue que P_1, ce qui contredit le lemme 1.

Par conséquent, si (c,x) est adjacent à (c,y) , $c \notin S$ et $c \in T(a,x)$, alors s(c,x) est adjacent à s(c,y).*

13°) <u>Corollaire 2</u> : [20]

Soient S, T et R définis dans le lemme 4. Supposons que pour tout x de V(H), $\overline{R_x}$ est un arbre et qu'il existe y dans V(H) tel que : $|\overline{R_y}| > 1$. Alors, il existe S = {a,b} où a adjacent à b et $T' \subset T$ tels que : S+T' est un rétracte de R.

****<u>Preuve</u>** : Soit $\overline{R_y}$ un arbre ayant au moins une arête a b. Soit s une application de R dans R définie par :

$$s(c,x) = \begin{cases} r(b,x), \text{ si } d_G(a,c) \text{ est impair} \\ r(a,x), \text{ si } d_G(a,c) \text{ est pair} \end{cases}$$

Cette application est un homomorphisme car si (c,x) et (c,y) sont adjacents, alors leurs images le sont aussi.

Si (c,x) et (d,x) sont adjacents et $d_G(a,c)$ et $d_G(a,d)$ sont différents par leur

parité, alors leurs images sont adjacentes.

Si $d_G(a,c)$ et $d_G(a,d)$ ont la même parité, alors dans R, il y aura deux plus courtes chaînes P et Q joignant respectivement (a,y) à (c,x) et (a,y) à (d,x).

Cependant, $\pi_G P \cup \pi_G Q \cup \{c,d\}$ contient un cycle et par le lemme 3, il existe x dans V(H) tels que $\overline{R_x}$ contient un cycle, ce qui contredit la supposition.

On pose : $\pi_H R = A \cup B$ où $x \in V(A)$ si (a,x) ou (b,x) sont des sommets de R, sinon $x \in V(B)$. Choisissons $x \in V(B)$ tel que $d_H(x,A)$est au maximum et soit z un sommet de A tel que $d_H(x,A) = d_H(x,z)$.

A présent, considérons : r(a,x) =(d,w). Si d = a alors $d_H(w,A) = 0$.

Si $d \neq a$ alors $d_{GxH}((d,w),(a,z)) \leq d_{GxH}((a,x),(a,z))$ et donc :

$d_H(w,A) \leq d_H(w,z) < d_H(x,z) = d_H(x,A)$.

Par conséquent, si B est non vide, alors s(R) est strictement contenu dans R. Par itération sur s et en posant $\pi_H\, s^n(R) = A \cup B_n$, B_n est strictement contenu dans B_{n-1} à moins que $B_n = \varnothing$.

Puisque G+H est fini, il existe au moins m tel que : $s^m = s^{m-1}$ et $\pi_G\, s^m(R) = \{a,b\}$. On remarque que $s^m(R)$ est un rétracte de R.

Soit $U = s^m(R)$ et U' le plus grand sous graphe de U tel qu'il existe T' un sous graphe de H où U'={a,b}+ T'.

On définit g une application de U dans U par :

$$g(a,x) = \begin{cases} (b,y) & \text{si} : x \in T' \text{ et } s^m(b,x) = (b,y) \\ (a,x) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$g(b,x) = \begin{cases} (a,y) & \text{si} : x \in T' \text{ et } sm(a,x) = (a,y) \\ ((b,x) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On remarque que $g/_{U'} = id_{U'}$. Cette application est un homomorphisme.

En effet , si (a,x) et (a,y) sont adjacents et sont dans V(U'), alors ils sont fixes par g.

Si (a,x) est un sommet de U' et (a,y) un sommet de U – U', alors (b,x) est un sommet de U' et (b,y) un sommet de R et par suite :

r(b,y) = (a,x) et g(a,y) = (b,x) qui est adjacent à (a,x).

Si (a,x) et (a,y) sont des sommets de U – U', alors (b,x) et (b,y) sont des sommets de U tels que : $s^m(b,x) = (a,x')$ et $s^m(b,y) = (a,y')$ où x' est adjacent à y'. Il s'ensuit que : g(a,x) = (b,x') qui est adjacent à g(a,y) égal à (b,y') .

De la même manière, on peut montrer que g(b,x) est adjacent à g(b,y) si (b,x) et (b,y) sont adjacents.

Si (a,x) et (b,x) sont adjacents alors ils sont des sommets de U' et constants par g sur U'.

On pose $g^n(U) = U' \cup B_n$. Soient x un sommet de $\pi_H B_n$ et z un sommet de $\pi_H U'$ choisis de sorte que : $d(x, \pi_H U')$est maximisé et $d(x,z) = d(x, \pi_H U')$.

On suppose que (a,x) est un sommet de U et par suite : g(a,x) = (b,y).

Mais, alors : $d(y, \pi_H U') \leq d(y,z) < d(x,z) = d(x, \pi_H U')$.

Ainsi, il existe un entier p tel que $g^p = g^{p+1}$ (i.e. $B_p = \emptyset$) pour lequel on déduit que U' est un rétracte de U et U' est de la forme définie auparavant.

Si $|R_x| \leq 1$ pour tout sommet x de H, alors S = {a} et (a,T) est un rétracte de (a,H) et T est un rétracte de H. *

14°) <u>Corollaire 3</u> : [20]

Soient G, H, S et T définis dans le lemme 4. Supposons G ne contient aucun sous graphe induit isomorphe à un 4-cycle. Alors soit T est un rétracte de H, soit il existe un homomorphisme f de S dans S tel que $d_G(a,f(a)) = 1$ pour tout sommet a de S.

****<u>Preuve</u>** : Puisqu'une arête de n'importe quel cycle de G est aussi dans un triangle, alors tout 4-cycle se transfert dans H. Donc par le lemme 2, tout cycle de G va se transférer dans H.

Soit la rétraction $t = sor$ où s et r définies dans les corollaires précédents.

Si T = H ou S est une arête alors il n'y a rien à prouver.

On suppose par conséquent que : H – T est non vide et S contient un cycle.

On suppose aussi qu'il existe $n \geq 0$ tel que : $d_H(x,T) \leq n$ pour tout x dans V(H).

On a : $\forall\ a \in V(S)\ , \exists\ z \in V(T)\ /\ t(a,x) = (a,z)$.

Soient x et y deux sommets adjacents tels que :

$n+1 = d_H(x,T) +1 = d_H(y,T)$ et $t(S+\{x\}) = S+\{z\}$.

Pour a dans V(S), t(a,y) est adjacent à (a,z) de sorte que t(a,y) est soit (a,w) où w adjacent à z , soit (b,z).

Si pour tout a dans V(S), t(a,y) = (b,z) , alors a est adjacent à b car t(a,y) est adjacent à t(a,x) = (a,z).

Ainsi l'application f de S dans S définie par $f(a) = \pi_S\, t(a,y)$ est un homomorphisme et $d(a, f(a)) = 1$ pour tout a de V(S).

D'où, on suppose qu'il existe un a dans V(S) tel que : $t(a,y) = (a,z')$ et $z' \neq z$.

Les sommets $t(a,x) = (a,z)$ et $t(a,y)$ sont adjacents, et par suite $t(S+\{x\})$ et $t(S+\{y\})$ sont contenu dans $S+\{z\}$ et $S+\{z'\}$.

On définit une application $\bar{t}$ de $S+\{x,y\}$ dans lui même par :

$\bar{t}(b,x) = (b,x)$

$$\bar{t}(b,y) = \begin{cases} (\pi_S t(b,y), x), & \text{si } \pi_H t(b,y) = z \\ (\pi_S t(b,y), y), & \text{si } \pi_H t(b,y) = z' \end{cases}$$

C'est une rétraction. Puisque S est un sous graphe induit de G, alors tout 4-cycle de S se transfert dans {x,y} et par le lemme 2, chaque cycle se transfert dans {x,y}.

Or $\bar{t}(a,y) = (a,y)$, on a donc $\bar{t}(b,y) = (b,y)$ pour tout sommet b d'un cycle de S.

Si b n'est pas dans un cycle, alors il est sur une seule et plus courte chaîne entre deux cycles et par conséquent : $t(b,y) = (b,y)$.

Ainsi , pour tout b dans V(S), $t(b,y) = (b,z')$.

Soit b un sommet d'un cycle de S. Puisque $\pi_G t(b,x) = b$ pour tout x dans V(H), alors l'application u de H dans T définie par $u(x) = \pi_H t(b,x)$ est une rétraction.*

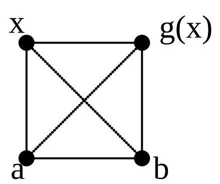
Ainsi les corollaires énoncés précédemment terminent la preuve du lemme 4.

15°) <u>Théorème 4</u> : [20]

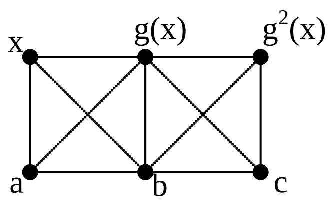
Soient G et H deux graphes connexes et R un rétracte de G+H. Si G ne contient pas de sous graphe isomorphe à un 4-cycle, alors il existe des sous graphes S de G , T de H tels que S+T est un rétracte de R et soit T est un rétracte de H, soit S est soit une arête soit un cycle soit un graphe fortement triangulaire.

<u>Preuve</u> : Du lemme 4, il s'ensuit qu'ils existent des sous graphes S de G et T de H tels que S+T est un rétracte de R et donc de G+H. Par ce lemme , on a aussi soit T est un rétracte de H soit il existe un homomorphisme f de S dans S tel que : $d_G(a,f(a)) = 1$ pour tout a sommet dans V(S).

On suppose par conséquent que T n'est pas un rétracte de H et S n'est ni une arête ni un cycle. Dans ce cas, soient k et i les plus petits indices tels que : $f^{i+k}(S) = f^{i}(S)$. Soient $U = f^{i}(S)$ et $g = f^{i}$. L'application h de S+T dans U+T définie par : $h(a,x) = (g(a),x)$ est une rétraction. Il reste à montrer que U est fortement triangulaire.

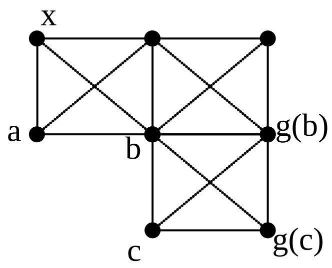


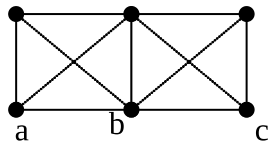
(a)



(b)

g(x) $g^2(x)$ g(a) g(b) g(c)





(c) **(d)**

Soient a et b deux sommets adjacents de U. Si g(a) = b, alors soit :

P = { a, g(a), g^2(a),…,g^m(a)}, où g^{m+1}(a) = a (si g(b) = a alors on redéfinit a et b)

Puisque U est connexe, alors il existe un sommet x de U – P et il existe j tels que x adjacent à g^j(a) . Mais alors, g^1(x) est adjacent à g^{j+1}(x).

On redéfinit x de sorte qu'il soit adjacent à a , alors le sous graphe induit {a , b , x , g(x)} est isomorphe à un des graphes de la Fig.(a),lorsqu'au moins une des lignes brisées représente une arête.

Si g(a) ≠ b et g(b) ≠ a, alors g(a) est adjacent à g(b) et {a, b, g(a), g(b)} est isomorphe à un des graphes donnés dans Fig.(a).

Soient a , b, c une chaîne de longueur 2 (i.e. a n'est pas adjacent à c).

Si g(a) = b et g(b) = c, alors, avec le sommet défini précédemment, le sous graphe induit {x, g(x), g^2(x), a, b, c} est isomorphe à un des graphes indiqués dans Fig.(b), où dans chaque «carré » au moins une des lignes brisées représenteune arête. (De même si g(c) = b et g(b) = a, alors on fait la même chose.)

Si g(a) = b , mais g(b) ≠ c (même travail si c'est nécessaire), alors {a, b, c, x, g(x), g^2(x), g(b), g(c)} est isomorphe à un des graphes indiqués dans Fig.(c), où dans chaque « carré », au moins une des lignes brisées représente une arête.

Si $g(a) \neq b$ et $g(b) \neq c$, alors la situation est donnée dans Fig.(d) ; de même lorsque au moins une ligne brisée dans chaque « carré » représente une arête.Dans tous les cas, il y a une séquence de triangles $T_{a,c}$ de a à c ayant chacun une arête en commun avec le triangle précédent ; le premier contenant l'arête ab et la dernier l'arête bc. Par conséquent, si x et y sont des sommets de U et $P = \{x_0 = x, x_1,\ldots, x_n = y\}$ est une chaîne les joignant, alors la séquence des triangles $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_{x_i, x_{i+2}}$ vérifie la propriété voulue et U est donc fortement triangulaire.*

16°) <u>Théorème 5</u> : [20]

Soient $G_1, G_2,\ldots, G_n$ des graphes finis, connexes n'ayant aucun 4-cycle.
Si R est rétracte de $\sum_{i=1}^{n} G_i$, alors il existe un rétracte R' de R tel que :

$R' = \sum_{i=1}^{n} S_i$ et il existe au moins i tel que S_i est un rétracte de G_i.

<u>Preuve</u> : Soient $G_1, G_2, \ldots, G_n$ des graphes connexes dont aucun ne contient un sous graphe isomorphe à un 4-cycle.

Soit R un rétracte de $\sum_{i=1}^{n} G_i = G_1 + G'$.

Puisque G_1 ne contient aucun 4-cycle, alors par le lemme 2, chaque cycle de G_1 se transfert dans G'. Il s'ensuit par le lemme 4 qu'il existe des sous graphes S de G_1, T de G' tels que S+T est un rétracte de R et soit T un rétracte de G' , soit il existe un homomorphisme f de S dans S tel que $d_{G1}(a, f(a)) = 1$ pour tout a sommet de S. Si on considère le dernier cas, alors on raisonne par induction sur le nombre de facteurs de la somme cartésienne. Par conséquent, on considère le dernier cas.

Soient j, k les plus entiers tels que : $f^{j}(S) = f^{j+k}(S) = S'$.

Si a et b sont des sommets adjacents dans S' où $f(a) \neq b$ et $f(b) \neq a$, alors le sous graphe induit {a, b, f(a), f(b)} contient un 4-cycle. Ainsi, soit $f(a) = b$ ou $f(b) = a$ et par définition de f , S' ne peut pas contenir des sommets de degré 3 et par suite il est soit un cycle soit une arête.

L'application t de S+T dans S'+T définie par : $t(a,x) = (f^{j}(a), x)$ est une rétraction et par conséquent S'+T est un rétracte de G'.

Le même argument appliqué à G_2 donnera un rétracte S'+S''+T de R, $S' \subseteq G_1$, $S'' \subseteq G_2$, $T \subseteq \sum_{i=3}^{n} G_i$ où chaque S', S'' est soit un cycle soit une arête.*

17°) <u>Corollaire 4</u> : [20]

Si S' ={a, b} alors {a}+ S''+ T' est un rétracte de S+T.

****<u>Preuve</u>** : On définit une application g de S'+S''+ T' dans {a}+ S''+ T'.

Si S'' = {x,y} alors on définit g par : pour tout z dans V(T'),

$g(a,x,z) = (a,x,z)$, $g(a,y,z) = (a,y,z)$, $g(b,x,z) = (a,y,z)$ et $g(b,y,z) = (a,x,z)$. L'application g est une rétraction.

Si $S'' = \{c_0, c_1,\ldots, c_n\}$ alors on définit g par $g(a, c_i, z) = (a, c_i, z)$ et $g(b, c_i, z) = (a, c_{i+1}, z)$. Il est aussi clair que g est une rétraction.

Si S' est un cycle et S'' est une arête alors en interchangeant les désignations de G_1 et G_2 , cela conduira au cas qui vient juste d'être traité.

Si $S = \{a_0, a_1,\ldots, a_{2m+1}\}$ est un cycle pair alors l'application g de

$S'+T$ dans $\{a_0, a_1\}+T'$ définie par :

$$g(a_i, z) = \begin{cases} (a_1, z) \text{ si } i \text{ est impair} \\ (a_0, z) \text{ si } i \text{ est pair} \end{cases}$$ est une rétraction.

Ce qui prouve le corollaire 4.*

18°) <u>Corollaire 5</u> : [26]

Soient $S'= \{a_0, a_1,\ldots,a_{2m}\}$ et $S''= \{b_0, b_1,\ldots, b_p\}$ les plus petits cycles

respectivement dans G_1 et G_2, alors $\{a_0\}+ S''+T'$ est un rétracte de

$S'+ S''+T'$.

****<u>Preuve</u>** : On définit une application g de $S'+S''+T'$ dans $\{a_0\}+S''+T'$

par $g(a_i, b_j, z) = (a_0, b_q, z)$, lorsque $q \equiv i+j\ [p+1]$, $i \leq m+1$

et $q \equiv j+2(m+1)\ [p+1]$, $i > m+1$.

L'application g est l'identité sur $\{a_0\}+S''+T'$; il s'ensuit immédiatement

qu'elle est un homomorphisme.

Ainsi : $\{a_0\}+T$ est un rétracte de S+T, et par suite T est un rétracte

de $G_2+\ldots+G_n$ et le théorème 5 est démontré par induction sur le nombre

de facteurs de la somme cartésienne.*

En conclusions des cinq théorèmes, on peut faire les remarques

suivantes :

a) Ces résultats soutiennent le point de vue que soit on a l'absence de

4-cycle soit la présence de contraintes qui vont obliger les 4-cycles à se ramener aux rétractes rigides de la somme cartésienne.

b) Les trois premiers résultats concernent les graphes faiblement triangulaires et fortement triangulaires.

c) Dans le théorème 4, le graphe G peut contenir un sous graphe isomorphe à un 4-cycle ayant une corde.

d)Dans le théorème 5, même pour les 4-cycles on a soit une , soit deux diagonales qui sont interdites. Les conditions de ce théorème excluent aussi tous les graphes qui sont les sommes cartésiennes de petits graphes. Le théorème est faux si l'un des graphes est une somme cartésienne.

Soit la conjecture spécifique suivante :

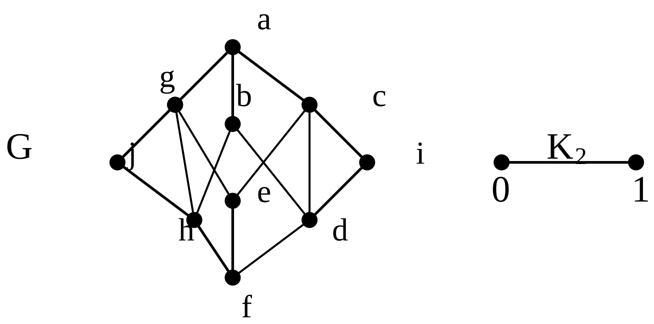
« Soient G_1, G_2,…,G_n des graphes finis qui sont des sommes cartésiennes non décomposables en somme cartésienne et soit R un rétracte de $G_1+G_2+\ldots+G_n$. Alors, il existe un rétracte S de R et $i \in \{1,\ldots,n\}$ tels que : $S = S_1+S_2+\ldots.+S_n$ et S_i est un rétracte de G_i » .

e) La somme cartésienne possède peu de rétractes.

Il n'existe pas de graphe G non trivial tel que pour tout graphe H, si R est un rétracte de G+H alors il existe des rétractes S de G et T de H tels que R = S+T.

Par exemple : Si G est un graphe de sommets isolés $\{v_1, v_2,\ldots.,v_n\}$ et H est K_n alors $\{v_1\}$+H est un rétracte de G+H quoique $\{v_1\}$ n'est pas un rétracte de G .

***Exemple** :



Le sous graphe de $G+K_2$ de sommets :

$\{a,b,c,d\}+\{0\} \cup \{c,d,e,f\}+\{1\} \cup \{i\}+\{0,1\}$ est un rétracte de $G+K_2$

et il n’est pas décomposable d’une manière non triviale en une somme

cartésienne.

Conclusion

Le problème que nous avons abordé consistait à donner une structure polyèdrale de rétractes de graphes afin de résoudre des problème combinatoires liés à la notion de restructuration (comme par exemple les problèmes de type ROS posés par A.Khelladi en 1990), étant donné que nous n’avons trouvé aucune littérature dans ce domaine.

Cependant, définir dans tous les cas et caractériser les polytopes associés à la structure des rétractes de graphes est très dur car après investigation et étude de plusieurs cas différents, il s'est avéré qu'il est difficile de donner une caractérisation générale de ces tels polytopes, mais il faut le faire cas par cas (sauf pour les graphes bipartis complets).

Ainsi, ce problème reste toujours posé et ouvre un champ d'investigation non négligeable dans la recherche afin de résoudre ces problèmes qui sont concrets et d'actualité dans le but de développer un système donné.

Bibliographie

[1]H.J.Bandelt ; A.Dählmann ;H.Schütte : Absolute Retracts of Bipartite Graph, Discrete Appl. Math. 16 (1987) 191-215.

[2] C.Berge : Graphes et Hypergraphes, Dunod, Paris, 1970.

[3] C.Berge : Some Classes of Perfect Graphs, Graph Theory and Theorical Physics, F.Haray, Eds, Academic (1967) 155-165.

[4] K.Borsuk : Sur les Rétractes, Fund.Math.17 (1931) 152-170.

[5] P.Camion : Characterisation of Totally Unimodular Matrices, Proc .Am. Math. Soc 16 (1965) 1068-1073.

[6] Chvatal : On Certain Polytopes Associated with Graphs , Centre de Recherche Mathématique, Université de Montréal, Quebec, C.R.M 238 (1972)

[7] G.B.Dantzig : Linear Programming and Extensions , Princeton University Press, Princeton, NJ (1963) 147-166.

[8] D.R.Fulkerson : On the Perfect Graph Theorem, Mathematics Programming, T.C.Hu and S.M.Robinson Eds, Academic (1973)

[9]A.Ghouila-Houri : Caractérisation des Matrices Totalement Unimodulaires, C.R. Acad. Sc. Paris 254 (1962) 1192-1194.

[10] M.Gondran : Matrices Totalement Unimodulaires, E.D.F Bulletin, Séries C1 (1973) 55-74.

[11] F.Haray : Graph Theory,California (1972).

[12] P.Hell : Rétractions de graphes, Ph.D.Thesis, Université de Montréal (1972)

[13] P.Hell : Absolute Retracts in Graphs, Lectures Note in Math. Vol 406 (1974) 291-301.

[14] A.J.Hoffman ; J.B.Kruskal : Integral boundary points of convex polyedra. H.Kuhn and Tucker,ed. Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, Princeton, NJ (1958) 223-246.

[15] A.Khelladi : Rétractes de Graphes, Exposé au Séminaire de Grenoble le 13 Novembre (1990).

[16] S.KHOURI : Polyèdres entiers, mémoire de D.E.A en modélisation et méthodes mathématiques en économie, Paris (1990).

[17] L.Lovasz : Normal hypergraphs and the Weak Perfect Graph Conjecture, Discrete Mathematics 2 (1972) 253-267.

[18] L.Lovasz : A characterisation of Perfect Graphs, J.Combinaison Theory 13 (1972) 95-98.

[19] H.M.Mulder : The Interval Function of a Graph,Math.Centre Tracts 132 (Amsterdam, 1980).

[20] R.Novakowsky ; I.Rival : Retract Rigid of Cartesien Products of Graphs, Discrete Math. 70 (1988) 169-184.

[21] M.Padberg : A Note on the Total Unimodularity of Matrice, Discrete mathematics, 14 (1976) 273-278.

[22] M.Padberg : Total Unimodularity and the Euler-Subgraph Problem, Operations Research,Letters Volume 7, 4 (1988) 173-179.

[23] M.Padberg : Almost Integral Polyedra Relates to Certain Combinatorial Optimisation Problems, Linear Algebra and its Applications 15 (1976) 69-88.

[24] M.Padberg : A Characterisation of Perfect Matrice, Discrete Mathematics 21 (1984) 169-178.

[25] E.Pesch ;W.Poguntke : Acharacterisation of Absolute Retracts of n-Chromatic Graphs, Discrete Math. 57 (1985) 99-104.

[26] Rockafeller : Convex Analysis, Princeton University, NJ (1970) 200-201.

[27] Y.Weyl :Elementare Theorie der Konvexen Polyeder, Comm. Math. Helv. 7 (1935) 290-306 (traduit dans Contributions to the Theory of Games, Annals of Mathematics Studies, n° 24, Princeton, Vol I (1950) 3-18.