N°d'ordre : 11/2004-M/MT

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques

Mémoire Présenté

Pour l'obtention du diplôme de **Magister en Mathématiques**

Spécialité : **Algèbre et théorie des nombres**

Par : M[elle] **MOKHTARI Nouara**

Sujet

Sur
Le Calcul Ombral et l'Analyse p-adique

Soutenu publiquement le : 29 /06/2004, devant le jury composé de :

Mr K.BETINA	Professeur à L'U.S.T.H.B	Président.
Mr B.BENZAGHOU	Professeur à L'U.S.T.H.B	Directeur de thèse.
Mr M.ZITOUNI	Professeur à L'U.S.T.H.B	Examinateur.
Mr A.KHELLADI	Professeur à L'U.S.T.H.B	Examinateur.

Table des Matières

INTRODUCTION

Le calcul Ombral, consistait de 1850 à 1970 essentiellement en des techniques de manipulation de suites mais dont la rigueur mathématique manquait : En 1940, le mathématicien Bell essayait de convaincre la communauté mathématique d'accepter le calcul Ombral comme étant un outil mathématique.

En 1970, le mathématicien Gian Carlo-Rota a commencé à construire un fondement pour cette théorie, basé sur les idées de fonctionnelles linéaires, d'opérateurs linéaires et leurs adjoints

Le but de notre travail est d'établir une certaine analogie entre le calcul Ombral classique (Algébrique) et le calcul Ombral non archimédien (p-adique).

Dans le chapitre 1 :
Nous donnerons quelques rappels et définitions sur l'ensemble des suites.
Dans le chapitre 2 :
Nous ferons une synthèse du calcul Ombral dans le cas algébrique tel que reformulé par B.Benzaghou en utilisant l'algèbre de Hurwitz.
Dans le chapitre 3 :
Nous introduirons le calcul Ombral non archimédien en faisant une synthèse des travaux de Ann-Verdoodt, Bertin-Diarra et de Lucien Van-Hamme explicitant des résultats analogues au cas classique. Ensuite, nous reformulerons quelques résultats utilisant l'algèbre de convolution et ainsi nous construirons des opérateurs déjà définis dans le cas classique.

Soit K un corps de caractéristique zéro.
Pour le calcul Ombral « classique », on étudie les formes linéaires sur l'espace des polynômes $K[x]$. Cet espace est isomorphe au dual de l'espace vectoriel $K[x]$, dual que l'on peut identifier à l'espace des suites d'éléments de K. On le munit d'une structure d'algèbre par le produit de Hurwitz. On considère les opérateurs sur $K[x]$ et leurs adjoints. Tout opérateur qui commute avec les translations s'écrit de manière unique sous la forme :

$\lambda = f(D) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} D^n$ où D est l'opérateur de dérivation dans l'anneau des polynômes $K[x]$

Notons que l'opérateur aux différences Δ est relié à D grâce à la formule de Taylor pour les polynômes par la formule

$\Delta = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} D^n = (\,exp\,(D)) - 1$ et on a aussi :

$D = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \Delta^n = log\,(id + \Delta)$.

La suite de polynômes de base associée à Δ (voir plus loin) est la suite de polynômes

$\Pi_m = m!\, B_m$; $\Pi_m(x) = m!\, B_m(x) = x\,(x - 1).....(x - m + 1)$

De plus, tout opérateur de composition λ peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$\lambda = f(\Delta) = \sum \frac{b_n}{n!} \Delta^n$ avec $b_n = \lambda\, \Pi_n(0)$.

Avec la formule $D = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \Delta^n = log\,(id + \Delta)$ on voit aussi que D est un opérateur linéaire du sous espace vectoriel dense $K[x]$ de C ($Z_p \rightarrow K$) mais ne peut se prolonger en un opérateur continu de C ($Z_p \rightarrow K$) car alors ce serait un élément de $W(Z_p \rightarrow K)$, ce qu'il n'est pas . En effet, si l'on désigne par $|\;|_p$ la valeur absolue p-adique, on a $Sup_{n\geq 1} \frac{1}{|n|_p} = +\infty$

(N'est pas borné).

Ainsi, on peut définir des analogues p-adiques en utilisant l'opérateur aux différences au lieu de l'opérateur de dérivation.

La théorie du calcul Ombral est basée sur des techniques de manipulations de suites, orientées par les applications visées (construction de bases, généralisation de certaines congruences …)

Ainsi,

Lors de notre étude, la démarche pour définir le calcul Ombral est :

- Prendre un espace de fonctions
- Définir des opérateurs sur cet espace
- A certains opérateurs, on peut associer des suites de polynômes de base
- Obtenir des développements en série pour certaines fonctions.

Chapitre 1

Définitions et notations

1.1 Généralités sur l'ensemble des séries formelles

Les séries formelles jouent un rôle prédominant dans le calcul Ombral.
Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro.

$$\mathbf{F} = \left\{ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k ; a_k \in K \right\}$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ muni de l'addition usuelle $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) t^k$

et de la multiplication $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) t^k$,

a une structure d'algèbre appelée algèbre des séries formelles en la variable t ou algèbre de Cauchy.

Définition 1

L'ordre d'une série $f(t)$ noté o($f(t)$) est le plus petit entier k pour lequel le coefficient de t^k ne s'annule pas.

On pose :

$o(f(t)) = +\infty$ pour $f(t) = 0$.

On a les relations suivantes :

$o(f(t)\, g(t)) = o(f(t)) + o(g(t))$

$o(f(t) + g(t)) \geq \min\{o(f(t)), o(g(t))\}$.

Proposition 1

La série f (t) est inversible (pour la multiplication) d'inverse noté $f^{-1}(t)$ si et seulement si $o(f(t)) = 0$.

Si $f_k(t)$ est une suite dans $\mathcal{F}$ avec $o(f_k(t)) \to \infty$ lorsque $k \to \infty$ alors de toute série de la forme $g\ (t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ on peut construire la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k f_k(t)$.

En particulier, si $f_k(t) = (f\ (t))^k$ avec $o(f(t)) \geq 1$, alors la composition des deux séries *g(t) et f (t)* est définie par

$$g(f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (f(t))^k$$

et on a :

$$o(g(f(t))) = o(g(t))o(f(t))$$

Proposition 2

La série f (t) est inversible (pour la composition) d'inverse noté $\bar{f}(t)$ si et seulement si $o(f(t)) = 1$.

Définition 2

*Une série f (t) vérifiant $o(f(t)) = 1$ est appelée série **delta**.*

Si *f (t)* est une série delta, alors la suite $(f(t))^k$ forme une base pour $\mathcal{F}$.

Ainsi ;

Pour toute série *g* (*t*) dans $\mathcal{F}$, il existe une unique suite de constantes a_k telle que :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (f(t))^k \qquad (1)$$

Définition 3

(1) *est appelée la représentation delta de la série formelle g (t) de $\mathcal{F}$.*

Remarque

ord f définit une valuation sur l'anneau $\mathcal{F}$ (intègre).

Une série delta est une uniformisante et (1) est un développement de Hensel.

1.2 Généralités sur les ensembles de suites

Soit K un corps commutatif. On note :

$Z(K) = \{u : Z \to K\}$

$Supp\ u = \{n,\ u(n) \neq 0, u \in Z(K)\}$

$ord\ u = Inf\ Supp\ u = \omega(u)$

$S(K) = \{u,\ ord\ u > -\infty\}$

$S_0(K) = \{u \in S(K),\ \omega(u) \geq 0\}$

$f(K) = \{u \in S_0(K),\ Supp\ u$ fini $\}$

$S(K)$ muni de l'addition usuelle $u + v$, est un K-espace vectoriel

$f_j \in S(K)$ définis par $f_j(n) = \delta_{j,n}$, $j \in Z$

ord u est une valuation sur $S(K)$.

Tout élément de $S_0(K)$ s'écrit sous la forme $u = \sum_{j=0}^{\infty} u(j) f_j$, les f_j forment une base topologique de $S_0(K)$ muni de la topologie définie par l'ordre. $S_0(K)$ est le complété de f (K) dans cette topologie.

A chaque suite $u \in S(K)$ on peut associer sa série génératrice $f_u(x) = \sum u(n) x^n$.

Lorsque K est un corps de caractéristique zéro, nous associons à chaque suite $u \in S_0(K)$ sa série génératrice exponentielle $g_u(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{u(n)}{n!} x^n$.

1.3 Produit de suites

On peut définir divers produits sur *S* (*K*)

1.3.1 Le produit point par point $(u.v)(n) = u(n)v(n)$ munit *S* (*K*) d'une structure de *K*-algébre commutative, non intègre, que nous notons $h(K)$.

Le produit correspondant sur les séries génératrices

$$f_{u.v}(x) = f_u(x) * f_v(x) = \sum_n u(n)v(n)x^n$$

est appelé produit de **Hadamard** des séries formelles.

1.3.2 Au produit usuel des séries formelles $f_u(x).f_v(x)$ est associe un produit de suites $u * v$ défini par

$$f_{u*v}(x) = f_u(x).f_v(x)$$

et donc

$$(u * v)(n) = \sum_{i+j=n} u(i)v(j) \qquad \text{(appelé produit de convolution)}$$

Le produit usuel $f_u(x).f_v(x)$ est appelé produit de **Cauchy.**

1.3.3 Lorsque K est un corps commutatif de caractéristique zéro, alors pour $u \in S_0(K)$; le produit de Cauchy des séries génératrices exponentielles détermine une suite par :

$$g_u(x).g_v(x) = g_{u \varpi v}(x)$$

avec

$$(u \varpi v)(n) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} u(i)v(j)$$

appelé produit de **Hurwitz** des suites *u* et v.

S_0 (*K*), muni du produit de Hurwitz, est une algèbre commutative intègre notée $h_u(K)$ et appelée algèbre de Hurwitz ($h_u(K) = A$).

1.4 Composition des suites

Pour $u \in S_0(K)$, $ord\ u \geq 1$, $v \in S_0(K)$; $(g_v \circ g_u)(x)$ définit une série formelle qui sera notée $g_{v \circ u}(x)$. On a :

$ord(v \circ u) = (\text{ord } v)(\text{ord } u)$

$(v_1 + v_2) \circ u = (v_1 \circ u) + (v_2 \circ u)$

$g_{f_k \circ u}(x) = \frac{1}{k!} g_u^k(x),\ k \geq 0$

Lorsque $ord\ v \geq 0$, $v \circ u(n) = \sum_{k=1}^{n} v(k) B_{n,k}(u)$ où $B_{n,k}(u) = B_{n,k}(u_1, ..., u_{n+k-1})$.

Les $B_{n,k}(u)$ sont les polynômes exponentiels partiels de Bell.

Pour $k \geq 0$, $f_k \circ u = \frac{u^{\varpi k}}{k!}$ où $u^{\varpi k}$ est la puissance k ème de u dans A .

La dérivation T d'une série composée est donnée par :

$T(v \circ u) = (Tv \circ u) \varpi\ Tu$.

Si u est une suite d'ordre 1, il existe une suite $\bar{u}$ d'ordre 1 telle que :

$u \circ \bar{u} = \bar{u} \circ u = e_1$

$\bar{u}$ est la suite réciproque de u et $g_{\bar{u}}(x)$ est la série réciproque de $g_u(x)$.

Pour $\alpha \in K^*$, notons α^q la suite $\alpha^q(n) = \alpha^n$, pour $\alpha = 0, \alpha^q = f_0$, alors

$g_{\alpha^q \circ u}(x) = \exp(\alpha g_u(x)),\ \alpha^q \circ u = 1^q \circ (\alpha u)$.

Les suites d'ordre 1 forment un groupe pour la composition, d'élément neutre f_1.

Pour $ord\ u \geq 1$, $1^q \circ u = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \circ u$

$$(1^q \circ u)(n) = \sum_{j=1}^{n} B_{n,j}(u) = Y_n(u)$$

Les $Y_n(u)$ sont les polynômes exponentiels complets de Bell.

Définition 4

L'opérateur shift (translation) est défini sur $S_0(K)$ *par :*

$Tu(n) = u(n+1)$.

L'opérateur dérivation q est défini sur $S_0(K)$ *par :*

$qu(n) = nu(n)$.

But

- On se propose de faire une synthèse du Calcul Ombral dans le cas classique et de reformuler ses résultats fondamentaux en utilisant le produit de Hurwitz et la composition des suites.

Soit $K[x] = P$ l'espace des polynômes à coefficients dans un corps commutatif *K* de caractéristique zéro. P est muni de sa base d'espace vectoriel canonique $\{x^n, n \in \mathrm{N}\}$.
Soit $P^* = L_K(P, K) =$ dual de l'espace P muni de la base $\{f_j, j \in \mathrm{N}\}$ avec $\langle f_j, x^n \rangle = \delta_{n,j}$ où $\delta_{n,j}$ est le symbole de Kronecker.
P^* sera identifié à $S_0(K)$.

- Nous allons étudier quelques opérateurs opérant sur *P*, définir des structures d'algèbre sur P^*, établir des isomorphismes avec l'algèbre de Hurwitz qui nous permettra alors de définir des suites de polynômes de base associes aux opérateurs considérés.

Chapitre 2

Calcul Ombral Classique

L'idée de base du calcul ombral consiste à relier une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ (dans un anneau A commutatif unitaire intègre, éventuellement un anneau de polynôme) à la base canonique $(x^n)_{n\geq 0}$ de $A[x]$ par une application linéaire Φ : P→ A telle que $\Phi(x^n) = \alpha_n$. Certaines propriétés, comme les congruences, se définissent très bien par Φ ;
par exemple si f(x) $\equiv$ g(x)mod.mA[x], alors Φ (f(x)) $\equiv$ Φ (g(x))mod.mA.Ceci explique l'intérêt du calcul ombral dans la théorie des congruences **[6]**.

Dans notre étude du calcul ombral, on adoptera les étapes suivantes :

- Prendre un espace de fonctions.
- Définir un ensemble d'opérateurs qui agissent sur cet espace.
- A certains opérateurs, on peut associer une suite de polynôme de base $P_n(x)$.
- Développer les fonctions de départ en une série $f(x) = \sum c(n) P_n(x)$.
- Etude de ces développements.

2.1 Formes linéaires sur P

Dans la suite P = K[x] et $u \in S_0(K)$

Soit L un élément de P^*, $L : P \to K$.

On désigne par $\langle L / P(x) \rangle$ l'action de la forme linéaire L sur un élément de P. L sera parfaitement déterminée par son action sur une base de P.

On pose $\langle L / x^n \rangle = L(n)$ qui définit une suite.

On a : pour L et M deux éléments de P^* ;

$\langle L + M / P(x) \rangle = \langle L / P(x) \rangle + \langle M / P(x) \rangle$

et $\langle cL / P(x) \rangle = c \langle L / P(x) \rangle$ pour $c \in K$.

La série de Hurwitz par $f_u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(k)}{k!} t^k$ définit une forme linéaire par

$\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(k)}{k!} t^k / x^n \rangle = u(n)$

Pour $n \geq 0$, $\langle t^k / x^n \rangle = n! \delta_{n,k}$.

Pour $p(x) \in P$, $\langle t^k / p(x) \rangle = p^{(k)}(0)$.

Toute forme linéaire L dans P^* peut s'écrire sous la forme d'une série de Hurwitz par $f_L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L / x^k \rangle}{k!} t^k$

En effet :

$\langle f_L(t) / x^n \rangle = \langle L / x^n \rangle$ ainsi $f_L(t) = L$.

Donc toute série formelle de la forme $f_u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(k)}{k!} t^k$ dans $\mathcal{F}$ définit une forme linéaire L dans P^* par $\langle L / x^k \rangle = u(k)$ et réciproquement.

D'où le théorème :

Théorème 1

L'application $L \to f_L(t)$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de P^* sur $\mathcal{F}$.

Preuve

Soient L et M deux formes linéaires dans P^*, $L = M$ si et seulement si $\langle L / x^k \rangle = \langle M / x^k \rangle$ pour tout $k \geq 0$ qui est encore vérifié si et seulement si $f_L(t) = f_M(t)$ donc l'application est bijective.

De plus :

$$f_{L+M}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle L+M/x^k\rangle}{k!}t^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle L/x^k\rangle}{k!}t^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle M/x^k\rangle}{k!}t^k$$

$$=f_L(t)+f_M(t).$$

et pour tout $c\in K$;

$$f_{cL}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle cL/x^k\rangle}{k!}t^k$$

$$=c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle L/x^k\rangle}{k!}t^k$$

$$=cf_L(t)$$

.

□

Ainsi, $\mathcal{F}$ désignera en même temps l'algèbre des séries formelles $f_u(t)$ et l'espace des formes linéaires L sur P et alors l'espace P^* est muni d'une structure d'algèbre par cet isomorphisme.

On appellera $\mathcal{F}$ l'algèbre ombrale et on pourra encore définir le calcul ombral comme étant l'étude de cette algèbre.

2.1.1 Reformulation en termes de suites dans A

Soit $f_u(t)$ la série de Hurwitz associée à la suite *u* avec *ord* $u\geq 0$.

Soit ω une forme linéaire sur *P* avec $\langle\omega/x^n\rangle=\omega(n)$, alors

Le dual P^* de *P* est muni d'une structure d'algèbre par isomorphisme avec l'algèbre de Huwitz *A*.

Et on a :

$$\langle\omega_1\varpi\omega_2/x^n\rangle=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\langle\omega_1/x^j\rangle.\langle\omega_2/x^{n-j}\rangle \qquad (1)$$

$$\begin{tikzcd}
L \in P^* \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Isomorphisme}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{Isomorphisme}"'] & g_u(t) \in \mathcal{F} \arrow[d, leftrightarrow] \\
& u \in A\,,\ ord\ u \geq 0
\end{tikzcd}$$

La relation (1) peut s'écrire:

Proposition 1

Soient $f_{\omega_1}(t)$ *et* $g_{\omega_2}(t)$ *dans* $\mathcal{F}$ *alors :*

$$\langle f_{\omega_1}(t) g_{\omega_2}(t) / x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle f_{\omega_1}(t) / x^k \rangle . \langle g_{\omega_2}(t) / x^{n-k} \rangle$$

avec :

$f_{\omega_1}(t)$ *et* $g_{\omega_2}(t)$ *sont respectivement les séries de Hurwitz associées à* ω_1 *et* ω_2.

Preuve

Tout élément de $\mathcal{F}$ peut s'écrire sous la forme :

$$f_u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f_u(t) / x^k \rangle}{k!} t^k$$

$$f_{\omega_1}(t) g_{\omega_2}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \langle f_{\omega_1}(t) / x^k \rangle \langle g_{\omega_2}(t) / x^{n-k} \rangle \right) \frac{t^m}{m!}$$

$$\langle f_{\omega_1}(t) g_{\omega_2}(t) / x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle f_{\omega_1}(t) / x^k \rangle \langle g_{\omega_2}(t) / x^{n-k} \rangle .$$

□

Proposition 2

La série $f_u(t)$ *est une forme linéaire inversible si et seulement si* $\langle f_u(t)/1 \rangle \neq 0$.

Preuve

$\langle f_u(t)/1 \rangle \neq 0$ implique que $o(f_u(t)) = 0$.

□

2.2 Opérateurs linéaires sur P et endomorphisme de P

Soit E l'algèbre (pour la composition) des applications linéaires de P dans P. Un élément R de E est déterminé par son action sur la base $\{x^n, n \in IN\}$.

On pose $Rx^n = P_n(R,x) \in P$.

Définition 1

L'opérateur linéaire E_α *sur P défini par* $(E_\alpha P)(x) = P(x+\alpha)$, $\alpha \in K$ *est appelé opérateur de translation.*

Définition 2

Un opérateur delta δ *est un endomorphisme linéaire de P vérifiant :*

1. δ *commute avec toute translation* E_α.
2. $\delta(x) = c \in K^*$ *(constante non nulle).*

Proposition 3

Soit δ *un opérateur delta sur P, alors*

1. $\delta(a) = 0$ *pour toute constante dans K.*
2. *Si P est un polynôme non constant, alors degré*$(\delta\, P) = (\text{degré P})$ - *1.*

Remarque

- L'opérateur de dérivation D est un opérateur delta, plus généralement, l'opérateur $E_\alpha D = DE_\alpha$ est un opérateur delta.
- Toute série formelle en D (d'ordre un), $\delta = \sum_{i \geq 1} c_i D^i = c_1 D + ... \in K[[D]]$, $c_1 \neq 0$ définit un opérateur (delta).

2.2.1 Système de polynômes de base des opérateurs delta

Définition 3

Un système de polynômes de base correspondant à un opérateur delta δ est un système de polynômes (P_n) satisfaisant :

1. *degré* $P_n = n,\ n \geq 0$
2. $\delta\, P_n = nP_{n-1}, n \geq 1$
3. $P_0 = 1, P_n(0) = 0, n \geq 1$

Le système (P_n) est encore appelé suite de polynômes de base associée à l'opérateur delta.

La suite (P_n) est unique et constitue une base de *P*.

Définition 4

Une suite de polynôme (P_n) est appelée suite polynomiale si le degré de P_n est n pour tout $n \in IN$.

La base canonique $\left(x^n\right)_{n\geq 0}$ est associée à l'opérateur de dérivation

$$D : P \to P, f(x) \mapsto f'(x)$$

et la base de Pochlammer $\left((x)_n\right)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} (x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1),\ n \geq 1 \\ (x)_0 = 1 \end{cases}$

est associée à l'opérateur de différence finie Δ

$$\Delta : P \to P, f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$$

L'application ϕ, qui relie ces deux bases, relie de manière naturelle les opérateurs associés :

$$\phi\left(\Delta^k (x)_n\right) = \phi\left((n)_k (x)_{n-k}\right) = (n)_k\, \phi\left((x)_{n-k}\right) = (n)_k\, x^{n-k}$$

correspond à la k ème dérivée de $\phi\left((x)_n\right)$, par linéarité on aura

$\phi\, \Delta^k = D^k \phi$, c'est à dire :

$\phi\left(\Delta^k f(x)\right) = D^k \phi\left(f(x)\right)$ pour tout polynôme $f(x) \in P$.

On peut encore remarquer que les polynômes de Bell (définis par $\phi\left(x^n\right)$) sont associés à l'opérateur $\nabla = \log(1+D)$, car ;

$B_0(x) = 1$ et pour tout $n \geq 1, B_n(0) = 0$

et $\nabla B_n(x) = \log(1+D)\phi\left(x^n\right) = \phi \log(1+\Delta)x^n = \phi\left(nx^{n-1}\right) = nB_{n-1}(x)$

avec : $e^D = 1 + \Delta$

$$\exp(D)x^n = \sum_{k\geq 0} \frac{D^k}{k!} x^n = \sum_{k\geq 0} \frac{(n)_k}{k!} x^{n-k} = (x+1)^n = (1+\Delta)x^n .$$

Remarque

On peut résumer les différentes bases rencontrées avec les opérateurs delta associés par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(x)_n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & x^n \arrow[r] \arrow[d, "D"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_n(x) \arrow[d, "\nabla"] \\
n(x)_{n-1} \arrow[r, "\phi"'] & nx^{n-1} \arrow[r] & nB_{n-1}(x)
\end{tikzcd}$$

Théorème 2 (Développement de Taylor généralisé)

Soit δ un opérateur delta et (P_n) sa suite associée. Alors

$$f(x+y) = \sum_{k\geq 0} \frac{\delta^k f(x)}{k!} P_k(y), f \in K[x] = P$$

Preuve

Ecrivons P_n sous la forme $P_n = \sum_{k\leq n} \frac{\delta^k (P_n)(0)}{k!} P_k$ où tous les coefficients de P_k sont nuls sauf pour P_n.

Pour toute combinaison linéaire f des P_n et par linéarité on obtient :

$$f = \sum_{k\geq 0} \frac{\delta^k (f)(0)}{k!} P_k$$

en remplaçant f par la translation $E_x f$, on aura

$$\begin{aligned}
E_x f &= \sum_{k\geq 0} \frac{\delta^k (E_x f)(0)}{k!} P_k \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{E_x (\delta^k f)(0)}{k!} P_k \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{\delta^k f(x)}{k!} P_k
\end{aligned}$$

$(E_x f)(y) = f(x+y)$.D'oule résultat. □

Identité binomiale

Toute suite de polynômes de base d'un opérateur delta satisfait l'identité :

$$P_n(x+y) = \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} P_k(x) P_{n-k}(y) \quad \text{avec } \delta^n P_n = n! P_0 = n!$$

Définition 5

Un endomorphisme R de P qui commute avec les translations E_α est appelé un opérateur de composition.

Théorème 3 **[8]**

Soit R un endomorphisme de P. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *R commute avec la translation E.*
2. *R commute avec toute translation E_α.*
3. *Pour tout opérateur delta δ , R peut être écrit sous la forme d'une série formelle en δ ;* $R = \varphi(\delta) \in K[[\delta]]$
4. *R commute avec la dérivation* $RD = DR$
5. *R commute avec tout opérateur delta.*

Preuve

- Supposons que 1/ est vérifié, le développement de Taylor donne :

$$E_n f(x) = f(x+n) = \sum_{k \ge 0} f^{(k)}(n) \frac{x^k}{k!}$$

l'hypothèse $RE = ER$ implique que :

$$E_n Rf = RE_n f = \sum_{k \ge 0} f^{(k)}(n) \frac{Rx^k}{k!}$$

posons $g = Rf$ et considérons le polynôme à deux variables :

$$F(x,y) = g(x,y) - \sum_{k \ge 0} f^{(k)}(y) \frac{Rx^k}{k!}$$

$F(x,n) = 0$ pour tout *n* et tout *x*

en fixant x et en examinant le polynôme en y, on aura $F \equiv 0$

ainsi,

$E_y g - RE_y f = 0$ donc $E_y Rf - RE_y f = 0$ pour tout *f*, d'où 2/.

- Supposons que 2/ est vérifié.

Soient R un opérateur de composition et δ un opérateur delta.

Le théorème du développement de Taylor généralisé donne :

$$E_y f(x) = f(x+y) = \sum_{k\geq 0} \delta^{(k)} f(y) \frac{P_k(x)}{k!}$$ où (P_k) est la suite associée à δ.

On a

$$E_y f = \sum_{k\geq 0} \frac{P_k}{k!} \delta^{(k)} f(y)$$

en appliquant l'opérateur de composition R on aura

$$E_y Rf = RE_y f = \sum_{k\geq 0} \frac{RP_k}{k!} \delta^{(k)} f(y)$$

on fixe x ($x = 0$) et on fait varier y :

$$(Rf)(y) = (E_y Rf)(0) = (RE_y f)(0) = \sum_{k\geq 0} \frac{(RP_k)(0)}{k!} \delta^{(k)} f(y)$$

ainsi

$$Rf = \sum_{k\geq 0} \frac{(RP_k)(0)}{k!} \delta^{(k)} f$$

D'où

$$R = \sum_{k\geq 0} \frac{(RP_k)(0)}{k!} \delta^{(k)} \in K[[\delta]].$$

Les coefficients du développement de l'opérateur R en tant que série formelle en δ (de la forme $R = \sum a_k \delta_k$) sont donnés par :

$$a_k = \frac{(RP_k)(0)}{k!}.$$

Remarquons que pour la dérivation D, $a_k = \dfrac{(Rx^k)(0)}{k!}$,

Les implications $3/ \Rightarrow 4/$, $4/ \Rightarrow 5/$, $5/ \Rightarrow 6/$ et $2/ \Rightarrow 1/$ étant évidentes, reste à montrer que 6/ implique 2/.

- Supposons que 6/ est vérifié.

Soit δ un opérateur delta ; le théorème du développement de Taylor généralisé donne :

$$f(x+y) = \sum_{k\geq 0} \delta^k f(x) \frac{p_k(y)}{k!}$$

$$E_y f(x) = \sum_{k\geq 0} \delta^k f(x) \frac{p_k(y)}{k!}$$

$$E_y f = \sum_{k\geq 0} \delta^k f \frac{p_k(y)}{k!} \text{ ainsi } E_y = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k(y)}{k!} \delta^k.$$

Ce qui implique que toute translation peut être représentée comme une série formelle en un opérateur delta. Donc, si un opérateur commute avec l'opérateur delta, il commutera avec toute translation.

□

Remarque

1. Tout opérateur R qui commute avec les translations peut s'écrire $R = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\delta^n}{n!}$ avec $a_n = [RP_n(x)]_{x=0} \in K$, en particulier $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ si R est un opérateur delta.

   Tout polynôme $f(x) \in P$ admet le développement $f(x+y) = \sum_{n\geq 0} \frac{\delta^n f(y)}{n!} P_n(x)$ (ce qui généralise le développement de Taylor).

   Les polynômes $(P_n)(x)$ vérifient l'identité binomiale et réciproquement, toute base polynomiale de type binomial peut être associée à un opérateur delta.
2. Les opérateurs delta sont des opérateurs de composition d'ordre 1.

Dans la suite de notre étude, nous nous intéresserons aux opérateurs qui commutent avec la dérivation.

On désigne par D^k l'opérateur la dérivation k$^{\text{ème}}$ sur *P*, alors :

$$D^k x^n = \begin{cases} (n)_k x^{n-k} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

et la série $f_u(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(k)}{k!} D^k$ définit un opérateur linéaire sur *P* par :

$$f_u(D)x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u(k) x^{n-k}.$$

On désigne par $f_u(D)P(x)$ l'action de l'opérateur $f_u(D)$ sur un polynôme $P(x)$.

Ainsi, nous avons le résultat suivant :

Un élément de $\mathcal{F}$ joue trois rôles ;

1. Une série de Hurwitz formelle $f_u(t)$.
2. Une forme linéaire (un élément de P^*) agissant par $\langle f_u(t) / x^n \rangle = u(n)$.
3. Un opérateur linéaire agissant par $f_u(t).P(x) = f_u(D).P(x)$.

2.2.2 Composition Ombrale

Soit R un opérateur dans E

$Rx^n = P_n(R,x)$ (Suite de polynômes)

A chaque opérateur R de E on associe sa suite de polynômes dans $S_0(p)$ et à la composition $R_2 \circ R_1$ d'opérateurs de E, correspond la suite de polynômes $P_q(R_2 \circ R_1, x)$ définie par

$$P_q(R,x) = \sum_i P_{q,i}(R)x^i$$

$$P_q(R_2 \circ R_1, x) = \sum_i P_{q,i}(R_2)P_i(R_1, x)$$

Définition 6

L'opération $P_q(R_2 \circ R_1, x) = \sum_i P_{q,i}(R_2)P_i(R_1, x)$ *dans* $S_0(p)$ *est appelée la composition ombrale de suites de polynômes, et sera notée*

$$P_q(R_2 \circ R_1, x) = P_q(R_1, x) \otimes P_q(R_2, x)$$

Ainsi,

L'application $R \mapsto P_q(R,x)$ définit un isomorphisme d'algèbre de $E = (EndP, \circ)$ sur l'algèbre

$$\xi = (S_0(P), \otimes).$$

L'opérateur de dérivation D appartient à E.

Soit $E_1 = \{R \in E \text{ tel que } R = g_\omega(D) \ ; \ \omega \in A\}$

E_1est une sous algèbre commutative de l'algèbre E dont l'image dans ξ est la sous algèbre commutative $\xi_1 = \{P_q(\omega, x) = \omega\varpi\, x^q ; \omega \in A\}$

Dans ξ_1, $P_q(\omega_1, x) \otimes P_q(\omega_2, x) = P_q(\omega_1 \varpi \omega_2, x)$

Ainsi ;

L'application $\omega \mapsto P_q(\omega, x) = \omega\varpi\, x^q$ définit un isomorphisme de l'algèbre de Hurwitz A sur l'algèbre ξ_1.

$$\begin{tikzcd}
E=\left(EndP,\circ\right) \arrow[rr, leftrightarrow, "\overset{\text{isomorphisme}}{\sim}"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & & \xi=\left(S_0(P),\otimes\right) \arrow[d, phantom, "\cup"] & & \\
E_1 \arrow[rr] & & \xi_1 \arrow[rr, leftrightarrow, "\sim", "\text{isomorphisme}"'] & & A
\end{tikzcd}$$

En effet :

$$f_1\varpi\, x^q = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k} f_1(k)x^{q-k} \quad \text{avec } f_1(k)=\delta_{1,k}$$

$$f_1\varpi\, x^q = \binom{q}{1}x^{q-1}$$

$$f_1\varpi\, x^q = qx^{q-1}$$

donc :

$$Dx^q = f_1\varpi\, x^q$$

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

Pour $\omega\in A$, $g_\omega(D)=\sum_{j=0}^{\infty}\omega(j)\dfrac{D^j}{j!}$ appartient à E

$$g_\omega(D)x^q = \omega\varpi\, x^q$$

$$g_\omega(D)x^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega(j)x^{n-j}$$

et

$$g_{\omega_1}(D)g_{\omega_2}(D)=g_{\omega_1\infty\omega_2}(D)$$

$$P_q\left(\lambda_1\circ\lambda_2,x\right)=\omega_1\varpi\omega_2\varpi\, x^q$$

2.2 Opérateurs linéaires sur P et leurs adjoints

2.3.1 *Opérateurs linéaires continus sur* P^*

Théorème 4

Si R est un opérateur linéaire sur P^* *satisfaisant la condition* $\circ\left(Rf_k(t)\right)\to\infty$ *lorsque* $\circ\left(f_k(t)\right)\to\infty$*, alors :*

$R\sum_{k=0}^{\infty}a_k f_k(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k Rf_k(t)$, *pour toute suite* $f_k(t)$ *vérifiant* $\circ\left(f_k(t)\right)\to\infty$ *lorsque* $k\to\infty$.

Preuve

Supposons que $\circ\left(f_k(t)\right)\to\infty$

Soit $p(x)$ un polynôme dans *P,* pour tout $n\geq 0$ on a :

$$\langle R\sum_{k=0}^{\infty}a_k f_k(t)/\,p(x)\rangle=\langle R\sum_{k=0}^{n}a_k f_k(t)/\,p(x)\rangle+\langle R\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k f_k(t)/\,p(x)\rangle$$

La condition $\circ\left(f_k(t)\right)\to\infty$ implique que :

$$\circ\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k f_k(t)\right)\to\infty \text{ pour } n\to\infty .$$

Et la condition $\circ\left(Rf_k(t)\right)\to\infty$ lorsque $\circ\left(f_k(t)\right)\to\infty$ implique que $\circ\left(R\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k f_k(t)\right)\to\infty$

Ainsi, pour *n* assez grand tel que $\circ\left(Rf_k(t)\right)\rangle\deg p(x)$ pour $k\rangle n$

On aura

$$\begin{aligned}\langle R\sum_{k=0}^{\infty}a_k f_k(t)/\,p(x)\rangle&=\langle R\sum_{k=0}^{n}a_k f_k(t)/\,p(x)\rangle\\&=\langle\sum_{k=0}^{n}a_k Rf_k(t)/\,p(x)\rangle\\&=\langle\sum_{k=0}^{\infty}a_k Rf_k(t)/\,p(x)\rangle .\end{aligned}$$

□

Définition 7 (Continuité pour l'ordre)

Un opérateur linéaire R sur P^* *est continu si et seulement si R vérifie la condition :* $\circ\left(Rf_k(t)\right)\to\infty$ *lorsque* $\circ\left(f_k(t)\right)\to\infty$.

2.3.1.1 *Automorphismes et dérivations sur* P^*

Théorème 5

Si R est un automorphisme de P^*, *alors R préserve l'ordre* $\circ\left(Rf_u(t)\right)=\circ\left(f_u(t)\right)$ *pour tout* $f_u(t)$ *dans* P^***.**

Preuve

Soit R un automorphisme de P^*. Montrons d'abord que $Rf_u(t)$est inversible si et seulement si $f_u(t)$ est inversible.

Supposons que $f_u(t)$soit inversible d'inverse $f_u(t)^{-1}$ alors

$Rf_u(t)R\left(f_u(t)^{-1}\right)=R\left(f_u(t)f_u(t)^{-1}\right)=R1=1$ (Car R est un automorphisme)

donc $Rf_u(t)$est inversible d'inverse $Rf_u(t)^{-1}$

La réciproque est établie en utilisant R^{-1} .

Ainsi,

$\circ(Rf_u(t))=0$ si et seulement si $\circ(f_u(t))=0$

Si $f_u(t)=t$; $\circ(Rt)\geq 1$

Supposons que $\circ(Rt)\rangle 1$ et soit $g_v(t)\in P^*$.

$g_v(t)$ peut s'écrire sous la forme $g_v(t)=g_{v_0}+tg_{v_1}(t)$

et $\circ\left(Rtg_{v_1}(t)\right)=\circ\left(RtRg_{v_1}(t)\right)\geq\circ(Rt)\rangle 1$ ce qui implique que $Rg_v(t)=g_{v_0}+R\left(tg_{v_1}(t)\right)\neq t$

donc il n'existe pas $g_v(t)\in P^*$ tel que $Rg_v(t)=t$, ce qui contredit la surjection de R , ainsi $\circ(Rt)=t$.

Finalement ;

Si $\circ(f_u(t))=k$ alors $f_u(t)=t^k g_v(t)$ où $\circ(g_v(t))=0$

et $\circ(Rf_u(t))=\circ\left(Rt^k Rg_v(t)\right)=\circ\left(Rt^k\right)+\circ\left(Rg_v(t)\right)=k$

avec $\circ\left(Rt^k\right)=k$ pour tout $k\geq 0$.

□

Corollaire 1

Les automorphismes de P^* sont continus.

Définition 8

Un opérateur linéaire ∂ sur P^* est une dérivation sur P^* si

$$\partial\left(f_u(t)g_v(t)\right)=f_u(t)\partial g_v(t)+g_v(t)\partial f_u(t) \textit{ pour tout } f_u(t) \textit{ et } g_v(t) \textit{ dans } P^*.$$

Théorème 8

Si ∂ est une dérivation surjective sur P^* alors $\partial c = 0$ pour toute constante c dans K et $\circ(\partial f_u(t)) = k-1$ lorsque $\circ(f_u(t)) = k \geq 1$.

Preuve

Soit ∂ une dérivation surjective sur P^* **.**

$\partial 1 = \partial 1^2 = \partial 1 + \partial 1$ alors $\partial 1 = 0$, ce qui donne que $\partial c = 0$ pour toute constante c dans *K*.

Soit $g_v(t) \in P^*$, $g_v(t)$ s'écrit sous la forme $g_v(t) = g_{v_0} + t g_{v_1}(t)$ alors :

$\partial g_v(t) = t\partial g_{v_1}(t) + g_{v_1}(t)\partial t$.

La surjectivité de ∂ et $\circ(t\partial g_{v_1}(t)) \geq 1$ impliquent que $\circ(\partial t) = 0$. .

Ainsi,

Si $\circ(f_u(t)) = k \geq 1$ alors $f_u(t) = t^k g_v(t)$ où $\circ(g_v(t)) = 0$ et alors

$\circ(\partial f_u(t)) = \circ(t^k \partial g_v(t) + k t^{k-1} g_v(t)\partial t) = k-1$.

□

Corollaire 2

Les dérivations surjectives de P^* sont continues

2.3.2 *Opérateurs adjoints*

Si *R* est un opérateur linéaire sur *P*, son adjoint R^* est un opérateur sur P^* défini par : $\langle R^* f_u(t) / p(x)\rangle = \langle f_u(t) / Rp(x)\rangle$ pour tout $p(x)$ dans *P* et $f_u(t)$ dans P^* **.**

Théorème 7

Un opérateur linéaire R sur P^* est l'adjoint d'un opérateur linéaire R sur P si et seulement si R est continu.

Preuve

Soient R un opérateur linéaire sur P^* et *V* un opérateur sur *P*.

Supposons que $R = V^*$

Soit $\circ\left(f_k(t)\right) \to \infty$ et montrons qu'alors $\circ\left(Rf_k(t)\right) \to \infty$

Pour tout entier $n \geq 0$, il existe un entier k_n tel que pour $k \rangle k_n$

$\circ\left(f_k(t)\right) \rangle \deg Vx^j, 0 \leq j \leq n$

Ainsi ;

$$\langle Rf_k(t) / x^j \rangle = \langle V^* f_k(t) / x^j \rangle$$

$$= \langle f_k(t) / Vx^j \rangle$$

$$= 0 \quad \text{pour } k \rangle k_n \text{ et } 0 \leq j \leq n$$

et alors $\circ\left(Rf_k(t)\right) \to \infty$ donc R est continu.

Réciproquement :

Supposons que R est continu et soit V un opérateur sur P défini par :

$$Vx^n = \sum_{k \geq 0} \frac{\langle Rt^k / x^n \rangle}{k!} x^k$$

pour k assez grand , $\circ\left(Rt^k\right) \rangle n$ alors :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\langle Rt^k / x^n \rangle}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{\langle Rt^k / x^n \rangle}{k!} x^k$$

D'autre part :

$$\langle V^* t^m / x^n \rangle = \langle t^m / Vx^n \rangle$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{\langle Rt^k / x^n \rangle}{k!} \langle t^m / x^k \rangle$$

$$= \langle Rt^m / x^n \rangle$$

Ainsi : $V^* t^m = Rt^m$ pour tout $m \geq 0$ et comme V^* et R sont continus alors $V^* f_u(t) = Rf_u(t)$ pour tout $f_u(t)$ dans P^*.

D'où : $$R = V^*$$.

□

On a alors le théorème suivant :

Théorème 8

L'application $R \to R^*$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de l'espace des opérateurs linéaires sur P vers l'espace des opérateurs linéaires continus sur P^*.

Exemple

Soit $m_x : P \to P$ l'opérateur de multiplication par x

$$x^n \mapsto m_x x^n = x^{n+1}$$

$$m_x^* : A \to A$$

$v_n \mapsto v_{n+1}$, en effet :

$$\langle m_x^* v_n / x^n \rangle = \langle v_k / m_x x^n \rangle$$
$$= \langle v_k / x^{n+1} \rangle$$
$$= v_{n+1} .$$

$(m_x^* v)(n) = v(n+1)$, donc $m_x^* = T$ opérateur shift de A.

Soit $x\dfrac{d}{dx} = \delta : P \to P$

$$x^n \mapsto x\frac{d}{dx} x^n = nx^n .$$

$$\delta^* : A \to A$$

$$v_n \mapsto nv_n$$

En effet ; $\langle \delta^* v_k / x^n \rangle = \langle v_k / \delta x^n \rangle$

$$= \langle v_k / nx^n \rangle$$
$$= nv(n)$$

$(\delta^* v)(n) = nv(n)$ donc $\delta^* = q$ opérateur de dérivation.

2.3.3 *Opérateurs et suites d'Appell*

Proposition 4

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $R = g_\omega(D)$ *où* D *désigne l'opérateur de dérivation.*
2) $RD = DR$
3) $P_n'(R,x) = nP_{n-1}(R,x)$ *et* $\deg P_n(R,x) \le n$
4) $Rx^q = \omega\varpi\, x^q$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\dfrac{t^n}{n!} = g_\omega(t).e^{xt}$
5) $R^* v = \omega\varpi v$ *pour* $v \in A$

Preuve

- Soit R un opérateur sur P tel que $R = g_{\omega}(D)$ alors R commute avec l'opérateur de dérivation (théorème 3) donc $RD = DR$.
- supposons que $RD = DR$ alors :

$$\begin{aligned} DRx^{n} &= DP_{n}(R,x) \\ &= P_{n}'(R,x) \\ &= RDx^{n} \\ &= Rnx^{n-1} \\ &= nRx^{n-1} \\ &= nP_{n-1}(x) \end{aligned}$$

D'autre part :

$RD.1 = 0 = DR.1$ ainsi $R1 = P_{0}(R,x) \in K$ et $\deg P_{n}(R,x) \leq n$.

- Supposons que $P_{n}'(R,x) = nP_{n-1}(R,x)$ et $\deg P_{n}(R,x) \leq n$ alors ;

$$P_{n}(R,x) = \int_{0}^{x} nP_{n-1}(R,\xi)d\xi + P_{n}(0)$$

la suite $P_{n}(R,x)$ est déterminée par la donnée de la suite $P_{n}(0) = \omega_{n}$

Soit $\Gamma = g_{\omega}(D)$ alors :

$$\begin{aligned} \Gamma x^{q} &= g_{\omega}(D)x^{q} \\ &= \omega\varpi x^{q} \\ &= P_{q}(\Gamma,x) \end{aligned}$$

Comme $\Gamma = g_{\omega}(D)$ donc il satisfait à la condition 3 avec $P_{n}(\Gamma,0) = \omega(n)$

d'où $R = g_{\omega}(D)$ ce qui donne $Rx^{q} = \omega\varpi\, x^{q}$.

- Supposons que $Rx^{q} = \omega\varpi\, x^{q}$ alors :

$$\begin{aligned} \langle R^{*}v / x^{n}\rangle &= \langle v / Rx^{n}\rangle \\ &= \langle v / \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j}\omega(j)x^{n-j}\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j}\omega(j)v(n-j) \\ &= \langle \omega\varpi\, v / x^{n}\rangle \text{ ce qui donne } R^{*}v = \omega\varpi\, v. \end{aligned}$$

- Supposons que $R^* v = \omega \varpi\, v$ alors :

$\langle R^* v / x^n \rangle = \langle \omega \varpi\, v / x^n \rangle$

$= \langle v / g_\omega(D) x^n \rangle$

$= \langle v / R x^n \rangle$ pour tout $v \in A$

donc $R x^n = g_\omega(D) x^n$ ce qui donne $R = g_\omega(D)$.

□

Définition 9

Un opérateur d'Appell est un opérateur R de la forme $g_\omega(D)$ avec $ord\omega = 0$.

La suite $P_q(x) = \omega \varpi\, x^q$ est dite d'Appell.

La suite $P_q(R, x)$ forme une base de P.

Corollaire 3

L'ensemble $G_1 = \{R \in E_1; ord\omega = 0\}$ des opérateurs d'Appell forme un sous groupe commutatif (pour la composition) de l'algèbre E .

En effet :

Si $R = g_\omega(D)$alors $R^{-1} = g_{\omega'}(D)$ avec ω' étant l'inverse de Hurwitz de ω et $P_q(R^{-1}, x) = \omega' \varpi\, x^q$.

Corollaire 4

Soit $P_n(\omega, x)$ une suite d'Appell alors :

Les suites $\{\omega \varpi\, f_j,\ j \in IN\}$ et $\{P_n(\omega, x),\ n \in IN\}$ forment des bases de A et P duales.

Preuve

$\langle \omega' / P_n(\omega, x) \rangle = \langle \omega' / \omega \varpi\, x^n \rangle$

$= \sum_{j=o}^{n} \binom{n}{j} \omega(j) \omega'(n-j)$

$= (\omega \varpi\, \omega')(n)$

$= f_0(n)$

$$\langle \omega' \varpi\, f_j / P_n(\omega, x) \rangle = \langle f_j / x^n \rangle$$

$$= \delta_{j,n} \qquad \square$$

Identité d'Appell **(**découle de l'identité binomiale**)**

Soit $P_n(x) = P_n(\omega, x)$ une suite d'Appell, alors

$P_n(x+y) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j} P_j(x)$ et

$$P_q(x+y) = \omega\varpi(x+y)^q$$

$$= \omega\varpi\, x^q \varpi\, y^q$$

$$= P_q(x)\varpi\, y^q \qquad [\ (x+y)^q = x^q \varpi\, y^q \ \text{(Formule du binôme)}].$$

2.3.4 *Opérateurs Ombraux*

Théorème 9 [1]

Soit $\phi : A \to A$

ϕ *est un automorphisme de l'algèbre de Hurwitz A si et seulement s'il existe une suite u d'ordre un telle que* $\phi(v) = v \circ u$.

Preuve

Soit u tel que *ord* $u = 1$

On a :

$(v_1 \varpi\, v_2) \circ u = (v_1 \circ u)\varpi(v_2 \circ u)$ et $u = v \circ \bar{u}$ est l'inverse, donc l'application $v \to v \circ u$ est bien un automorphisme de l'algèbre de Hurwitz.

Si ϕ est un automorphisme de A, ϕ conserve l'ordre donc il est continu pour l'ordre.

Soit $u = \phi(f_1)$

$f_j = \frac{1}{j!} f_1^{\varpi j}$ ce qui donne $\phi(f_j) = \frac{1}{j!} u^{\varpi j} = f_j \circ u$

$$\phi(v) = \phi\left(\sum_j v(j) f_j\right) = \sum_j v(j) f_j \circ u$$

$$= v \circ u\,. \qquad \square$$

Soit Γ un automorphisme de A , alors, comme Γ conserve l'ordre; c'est l'adjoint d'un opérateur λ de P ; $\Gamma = \lambda^*$.

Proposition 5

Soit λ un élément de l'algèbre E .Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) *λ^* est un automorphisme de A.*
2) *$\lambda^* v = v \circ u$, ord u = 1.*
3) *$\lambda x^q = x^q \circ u$, ord u = 1.*
4) *$\lambda x^q = P_q(x)$ et $g_{P_q(x)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp(x g_u(t))$.*
5) *$P_q(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k B_{n,k}(x)$.*

Preuve

Soit Γ un automorphisme de *A,* $\Gamma = \lambda^*$ avec λ étant un opérateur de *P*.

$\Gamma(v) = v \circ u$ **,** *ord u* = 1 et $v \in A$.

Soit $P_q(x) = \lambda x^q$.

$$\langle v / P_n(x) \rangle = \langle \lambda^* v / x^n \rangle$$
$$= \langle v \circ u / x^n \rangle$$
$$= v \circ u(n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} v(k) B_{n,k}(u)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(u) \langle v / x^k \rangle$$
$$= \langle v / \sum_{k=1}^{n} x^k B_{n,k}(u) \rangle$$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k B_{n,k}(u)$$
$$= x^q \circ u(n)$$ Et $\lambda x^q = x^q \circ u$.

□

Définition 10

Un opérateur λ qui vérifie ces propriétés est dit un opérateur ombral.

La suite $P_q(x)$ définie par $P_q(x) = x^q \circ u$ avec ord u = 1 est la suite associée à u

Corollaire 5

Les opérateurs ombraux forment un sous groupe de l'algèbre des opérateurs de P.

Preuve

Soient λ et Γ deux opérateurs ombraux.

$$\lambda x^q = x^q \circ u$$
$$= P_q(\lambda, x)$$

et $\Gamma x^q = x^q \circ v$

la composition $\Gamma \circ \lambda$ sera défini par :

$$\Gamma \circ \lambda = P_n(x)$$

$$P_n(x) = \Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(u)x^k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(u)\sum_{j=1}^{k} B_{k,j}(v)x^j$$

Comme $B(v \circ u) = B(u)B(v)$

On aura :

$$P_n(x) = \sum_{r=1}^{n} B_{n,r}(v \circ u)x^r$$

et alors

$$(\Gamma \circ \lambda)x^q = x^q \circ v \circ u$$

$\Gamma \circ \lambda$ est un opérateur ombral, et λ^{-1} est associé à $\overline{u}$.
□

Proposition 6

L'application $\lambda \to u$ définit un isomorphisme du groupe des opérateurs ombraux sur le groupe $\Omega_1 = \{u \in A; ordu = 1\}$ (pour la composition des suites) du groupe des suites d'ordre un.

Corollaire 6

Soit λ un opérateur ombral, $\lambda x^q = x^q \circ u$ avec ord u = 1 alors, la suite $P_q(x) = x^q \circ u$ forme une base de P dont la base duale est $f_j \circ \overline{u}$.

Preuve

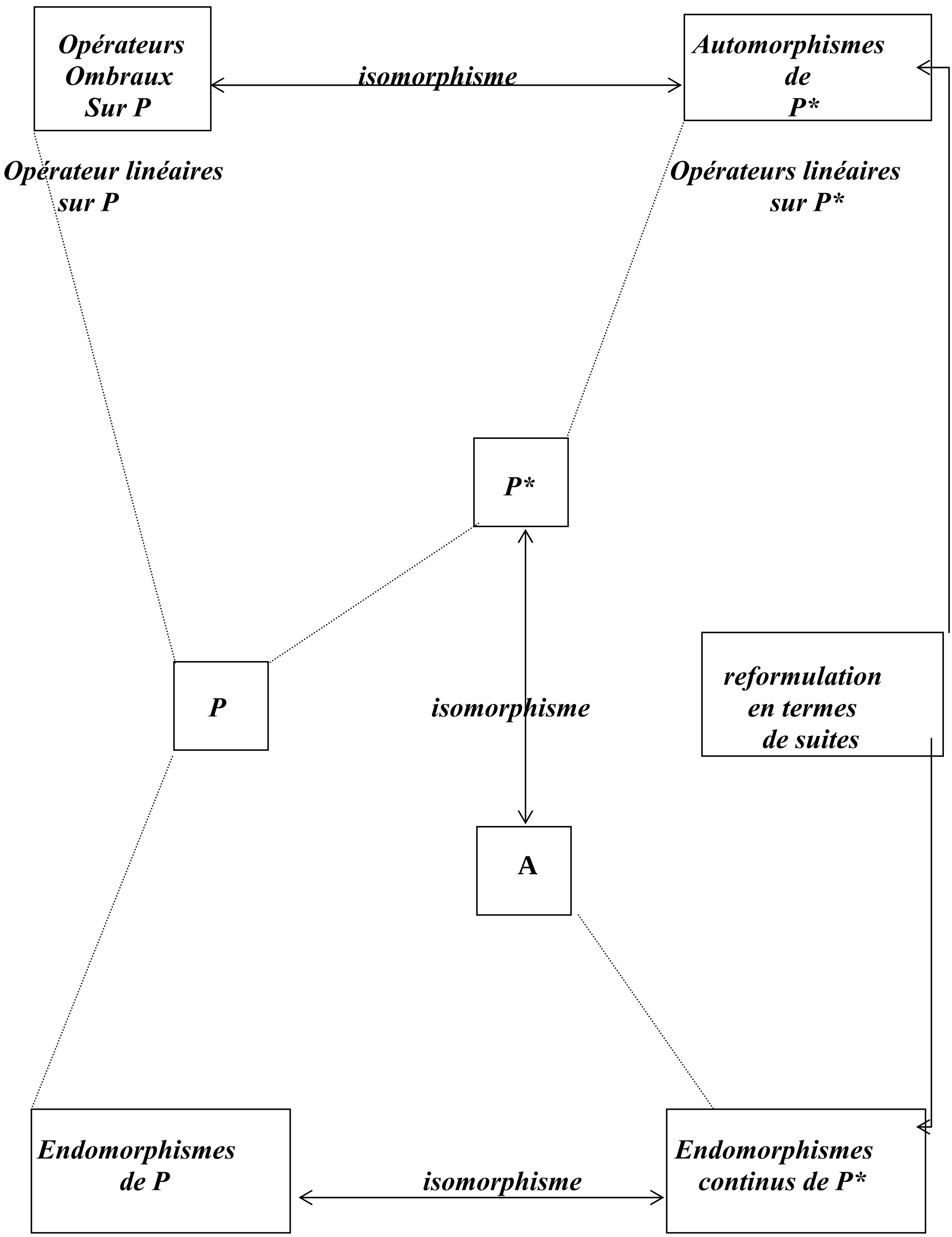
$ord\overline{u} = 1$ ainsi $\{f_j \circ \overline{u}, j \in \mathbb{N}\}$ est une base de *A,*de plus

$$\langle f_j \circ \overline{u} / P_n(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(u)\langle f_j \circ \overline{u} / x^k \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(u).f_j \circ \overline{u}(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(u).\sum_{l=1}^{j} B_{j,l}(\overline{u})$$

$$= \delta_{n,j} .$$ □



Opérateurs Ombraux Sur P
isomorphisme
Automorphismes de P*
Opérateur linéaires sur P
Opérateurs linéaires sur P*
P*
P
isomorphisme
reformulation en termes de suites
A
Endomorphismes de P
isomorphisme
Endomorphismes continus de P*

2.3.5 *Opérateurs Shift Ombraux*

Les opérateurs de dérivation de A forment une classe particulière $D(A)$ d'opérateurs :

$\Gamma \in D(A)$ alors :

$$\Gamma(u+v)=\Gamma(u)+\Gamma(v)$$
$$\Gamma(u\varpi v)=\Gamma(u)\varpi v+u\varpi\Gamma(v)$$

Une dérivation Γ sur A se prolonge de manière unique en une dérivation sur le corps de Hurwitz *H*, et $D(H)$ est un *H*-espace vectoriel de dimension un.

L'opérateur shift T sur A est une dérivation sur A, donc pour $\Gamma \in D(A)$, il existe $\alpha \in H$ tel que

$$\Gamma(v)=\alpha\varpi Tu .$$

Pour $ord\alpha \geq 0, \Gamma(A) \subset A$ .Si Γ est surjective, il existe $u \in A$

$$\Gamma(u)=\alpha\varpi Tv = f_0$$

Ainsi ; $ord\alpha = 0$ et $ordu = 1$.

Proposition 7

Les dérivations sur A sont de la forme $v \mapsto \Gamma(v)=\alpha\varpi Tv$ *avec* $ord\alpha \geq 0$.

Définition 11

Une dérivation Γ *sur A défini par* $\alpha\varpi Tv$ *est surjective si* $ord\alpha = 0$.

L'opérateur Γ *est continu pour la valuation définie par l'ordre donc il existe un opérateur* λ *sur P tel que* $\Gamma = \lambda^*$.

Proposition 8

Si Γ *est une dérivation surjective sur A, alors*

$$\Gamma(v \circ u)=(Tv)\circ u .$$

Preuve

Soit Γ une dérivation surjective sur *A*, $u \in A$ tel que $\Gamma(u)=f_0$ alors,

$$\Gamma(f_j \circ u)=\Gamma\left(\frac{u^{\varpi j}}{j!}\right)=\frac{u^{\varpi (j-1)}}{(j-1)!}=f_{j-1}\circ u$$

La continuité de Γ donne :

$$\Gamma(v \circ u) = \Gamma\left(\sum_{j=0}^{\infty} v(j).f_j \circ u\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} v(j).f_{j-1} \circ u$$

$$= (Tv) \circ u .$$

Soit λ un opérateur ombral défini par

$$Rx^q = x^q \circ \overline{u} = P_q(x)$$

alors

$$\langle \Gamma(f_j \circ u) / P_n(x) \rangle = \langle f_{j-1} \circ u / P_n(x) \rangle \ ; \quad \Gamma = \lambda^*$$

$$= \langle f_j \circ u / \lambda P_n(x) \rangle .$$

$\{f_j \circ u, j \in IN\}$ est une base duale de $\{P_n(x), j \in IN\}$

alors

$$\langle f_{j-1} \circ u / P_n(x) \rangle = \langle f_j \circ u / P_{n+1}(x) \rangle$$

D'où

$$\lambda P_n(x) = P_{n+1}(x) \qquad .$$

□

Définition 12

L'opérateur λ défini par $\lambda P_q(x) = TP_q(x)$ est appelé opérateur shift ombral de P.

Proposition 9

Il y a une bijection entre l'ensemble $D_S(A)$ des dérivations surjectives sur A et l'ensemble des opérateurs shift ombraux sur P. Si $\Gamma \in D_S(A)$,

$$\Gamma(v) = \alpha \varpi \, Tv \ ; \ ord\alpha = 0$$

alors, $\Gamma = \vartheta^*$ avec $\theta = m_x \circ g_\alpha(D)$, $\theta P_n(x) = P_{n+1}(x)$.

Preuve

Soit $P_q(x) = x^q \circ \overline{u}$ la suite associée à l'opérateur ombral λ .

$$\lambda x^q = P_q(x)$$

Soit θ l'opérateur de *P* défini par $\theta P_n(x) = P_{n+1}(x)$

$x^q = P_q(x) \circ u$ donne :

$$\theta\, x^n = \theta.\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(u).P_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(u).P_{k+1}(x)$$

$$= P_{q+1}(x)\circ u(n)$$

D'où

$$\theta\, x^q = P_{q+1}(x)\circ u$$

$$P_{q+1}(x) = T\left(x^q \circ \overline{u}\right)$$

$$= xP_q(x)\varpi\, T\overline{u}$$

$$\theta\, x^q = \left(\left(x^q \circ \overline{u}\right)\varpi\, T\overline{u}\right)\circ u$$

$$= x^q\varpi\left(T\overline{u}\circ u\right)$$

Soit $\beta = \left(T\overline{u}\right)\circ u$ alors $\theta x^q = x.\left(\beta\varpi\, x^q\right)$

$$\theta\, x^q = m_x \circ g_\beta(D).x^q$$

Donc, $\theta = m_x \circ g_\beta(D)$

Il en résulte que

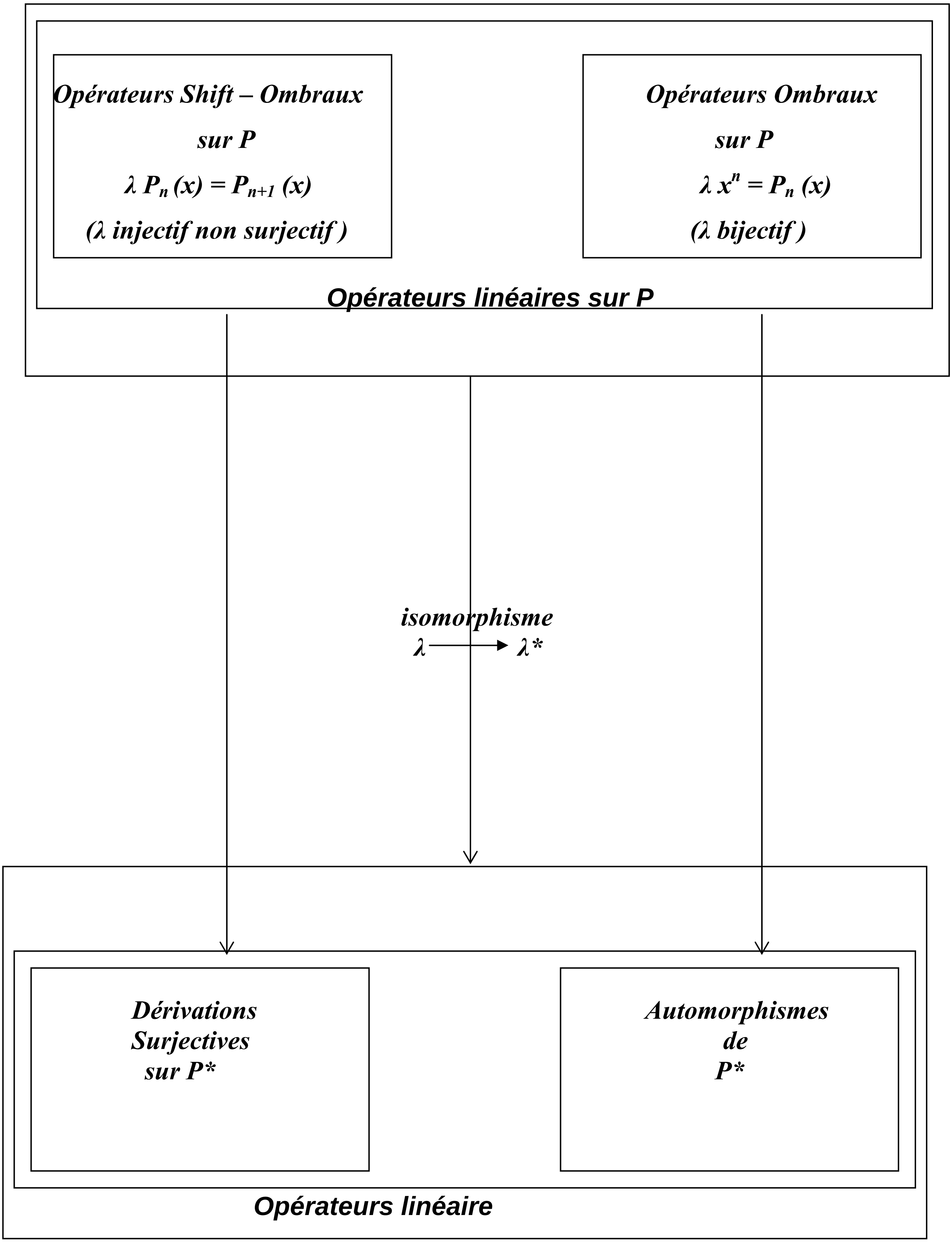
$$\theta^* = g_\beta(D)\circ T$$

$$\theta^*(v) = \beta\varpi\, Tv$$

$\overline{u}\circ u = f_1$ implique que $\left(T\overline{u}\circ u\right)\varpi\, Tu = f_0$

β est alors inversible dans A , donc d'ordre zéro, d'inverse Tu et θ^* est une dérivation surjective sur A.

□


Opérateurs Shift – Ombraux
sur P
$\lambda P_n(x) = P_{n+1}(x)$
(λ injectif non surjectif)
Opérateurs Ombraux
sur P
$\lambda x^n = P_n(x)$
(λ bijectif)
Opérateurs linéaires sur P
isomorphisme
$\lambda \rightarrow \lambda^*$
Dérivations
Surjectives
sur P*
Automorphismes
de
P*
Opérateurs linéaire

2.3.6 *Opérateurs et suites de Sheffer*

Soit G_1 le groupe des opérateurs d'Appell.

Si $\lambda \in G_1$ alors il existe une suite ω d'ordre zéro tel que $\lambda = g_{\omega}(D)$

$\lambda x^q = \omega\varpi\, x^q$ et $\lambda^*(v) = \omega\varpi\, v$.

Soit G_2 le groupe des opérateurs ombraux.

Si $\lambda \in G_2$ alors il existe une suite u d'ordre un tel que $\lambda x^q = x^q \circ u$

$\lambda^*(v) = v \circ \overline{u}$.

Soit G le groupe des opérateurs inversibles sur P.

Définition 13

Un Opérateur de Sheffer est le composé d'un opérateur d'Appell et d'un opérateur ombral.

Si λ est un Opérateur de Sheffer alors, la suite $S_q(x) = \lambda x^q$ est dite de sheffer.

Etude de composé d'un opérateur d'Appell et d'un opérateur ombral

Proposition 10

Soit $\lambda_1 \in G_1$, $\lambda_2 \in G_2$ et $\lambda = \lambda_1 \circ \lambda_2$.

Alors, il existe $\Gamma_1 \in G_1$ tel que $\lambda = \lambda_2 \circ \Gamma_1$

Preuve

Soient $\lambda_1 \in G_1$, $\lambda_2 \in G_2$ avec $\lambda = \lambda_1 \circ \lambda_2$

$$\lambda x^n = \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\overline{u}) x^k .$$

$$= \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\overline{u}).(\omega\varpi\, x^q)(k)$$

$$= (\omega\varpi\, x^q) \circ \overline{u}(n).$$

D'où :

$$\lambda x^q = (\omega\varpi\, x^q) \circ \overline{u}$$

$= (\omega \circ \overline{u})\varpi(x^q \circ \overline{u})$

$= \omega_1 \varpi(x^q \circ \overline{u})$ avec $\omega_1 = x^q \circ \overline{u}$

Soit $g_{\omega_1}(D) \in G_1$

$\lambda_2 \circ g_{\omega_1}(D).x^n = \lambda_2(\omega_1 \varpi\, x^q)(n)$

$$= \lambda_2 \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega_1(n-j) x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega_1(n-j)(x^q \circ \overline{u})(j)$$

$$= \omega_1 \varpi(x^q \circ \overline{u})(n)$$

Donc

$$\lambda = g_\omega(D) \circ \lambda_2 = \lambda_2 \circ g_{\omega 1}(D)$$

Ainsi

Il suffit de prendre $\Gamma = g_{\omega 1}(D)$ avec $\omega_1 = x^q \circ \overline{u}$.

□

D'où le corollaire :

Corollaire 7

Si $\lambda_2 = \lambda_u, \lambda_u x^q = x^q \circ \overline{u}$ *,*

alors $g_\omega(D) \circ \lambda_u = \lambda_u \circ g_{\omega \circ \overline{u}}(D)$

Ainsi

$g_{\omega \circ \overline{u}}(D) = \lambda_{\overline{u}} \circ g_\omega(D) \circ \lambda_u$

Corollaire 8

Les opérateurs de sheffer forment un groupe G_3 *et* $G_3 = G_1.G_2 = G_2.G_1$

(composé des sous groupes dans G) **.**

Corollaire 9

Le composé de deux opérateurs de sheffer est un opérateur de sheffer.

En effet :

Soient : $\Omega_0 = \{\omega \in A,\ ord\omega = 0\}$ et $\Omega_1 = \{u \in A,\ ordu = 1\}$

et soit $\lambda_{\omega,u}$ un opérateur de sheffer défini comme suit :

$$\Omega_0 \times \Omega_1 \to G_3$$
$$(\omega \varpi u) \mapsto \lambda_{\omega,u} = g_\omega(D) \circ \lambda_u$$

on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{\omega_1,u_1} \circ \lambda_{\omega_2,u_2} &= g_{\omega_1}(D) \circ \lambda_{u_1} \circ g_{\omega_2}(D) \circ \lambda_{u_2} \\ &= g_{\omega_1}(D) \circ g_{\omega_2 \circ u_1}(D) \circ \lambda_{u_1} \circ \lambda_{u_2} \\ &= g_{\omega_1 \varpi (\omega_2 \circ u_1)}(D) \circ \lambda_{u_2 \circ u_1} \\ &= \lambda_{\omega_3,u_3} \end{aligned}$$

avec $\omega_3 = \omega_1 \varpi (\omega_2 \circ u_1)$ et $u_3 = u_2 \circ u_1$

Remarque

Si λ est un opérateur de sheffer, $\lambda = \lambda_{\omega,u} = g_\omega(D) \circ \lambda_u$ et $S_q(\lambda, x) = \lambda x^q = (\omega \circ \overline{u}) \varpi (x^q \circ \overline{u})$

Proposition 11

Soit $\lambda = \lambda_{\omega,u}$ un opérateur de sheffer alors les suites $\{\omega' \varpi (f_j \circ u), \quad j \in IN\}$ et $\{s_n(\lambda, x), \quad n \in IN\}$ forment des bases de A et P duales.

Preuve

$$\begin{aligned} \langle \omega' \varpi (f_j \circ u) / \omega \varpi (x^q \circ \overline{u}) \rangle &= \langle \omega \varpi \omega' \varpi (f_j \circ u) / x^q \circ \overline{u} \rangle \\ &= \langle f_j \circ u / x^q \circ \overline{u} \rangle \end{aligned}$$

$f_j \circ u$ étant la base duale de $x^q \circ \overline{u}$ ($P_n(x) = (x^q \circ \overline{u})(n)$)

donc

$$\langle f_j \circ u / x^q \circ \overline{u} \rangle = \delta_{j,q} \qquad .$$

□

Identité de sheffer

Soit $s_n(x)$ une suite de sheffer, alors

$$s_n(x+y)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j(x)s_{n-j}(y)$$

En effet :

$$s_n(x+y)=\omega\,\varpi\left((x+y)^q\circ\bar{u}\right)$$
$$=\omega\,\varpi\left(\left(x^q\varpi\, y^q\right)\circ\bar{u}\right)$$
$$=\omega\varpi\left(x^q\circ\bar{u}\right)\varpi\left(y^q\circ\bar{u}\right)$$

Conclusion

On obtient, à travers cette étude, des familles remarquables de polynômes caractérisés par des opérateurs λ ou λ^* et pour les suites associées à des opérateurs d'Appell, Ombraux ou de Sheffer, la forme explicite permet d'obtenir diverses propriétés **[9]**.

Exemples

1) $P_n(x)=x^n$ est la suite associée à l'opérateur delta $f(t)=t$

2) $(x)_n = x(x-1).....(x-n+1)$ est associée à l'opérateur $f(t)=e^t-1$

3) les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ forment une suite d'Appell pour l'opérateur $g(t) = \dfrac{e^t-1}{t}$

$$B_n(t) = \frac{t}{e^t-1}x^n$$

$$\sum_{k=0}^{x}\frac{B_k(x)}{k!}t^k = \frac{t}{e^t-1}e^{xt}$$ (fonction génératrice)

$x=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(0)}{k!}t^k = \frac{t}{e^t-1}$$

$B_n(0)$ sont les nombres de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli $b_n(x)$ de seconde espèce forment un suite de Sheffer pour :

$$g(t) = \frac{t}{e^t-1}$$

$$f(t) = e^t-1$$

$$b_n(x) = \frac{e^t-1}{t}(x)_n$$

$$(e^t-1)b_n(x) = nb_{n-1}(x)$$

$b_n(0) = <\dfrac{e^t - 1}{t} \ / \ (x)_n>$ nombres de Bernoulli de seconde espèce .

$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{b_k(x)}{k!} t^k = \dfrac{t}{\log(1+t)} (1+t)^n$ fonction génératrice de $b_n(x)$

$x=0$

$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{b_k(0)}{k!} t^k = \dfrac{t}{\log(1+t)}$.

Chapitre 3

Calcul Ombral Non Archimédien

Soit K un corps valué complet ultramétrique contenant Q_p, dont la valuation notée v est associée à une valeur absolue notée $|x| = \rho^{-v(x)}$ où $\rho \in \mathbf{R}^+, 0 < \rho < 1$.

On note $C(Z_p \rightarrow K)$ l'espace des fonctions continues sur Z_p, qui est un espace de Banach muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup\{ \, |f(x)|, x \in \mathbf{Z_P} \, \}$.

Soit I l'opérateur identique dans $C(Z_p \rightarrow K)$.

L'opérateur de translation E et sa généralisation E_α sont définis sur $C(Z_p \rightarrow K)$ comme suit :

$(Ef)(x) = f(x+1)$

$(E_\alpha f)(x) = f(x+\alpha), \; \alpha \in Z_P$

L'opérateur de différence Δ *sur* $C(Z_p \rightarrow K)$ *est défini par :*

$$
\begin{aligned}
(\Delta f)(x) &= f(x+1) - f(x) \\
&= (Ef)(x) - f(x)
\end{aligned}
$$

Cet opérateur Δ possède la propriété suivante :

Si q est un polynôme de degré n dans $K[x]$ alors Δq est un polynôme de degré $n-1$.

But

On se propose d'adapter les fondements du calcul ombral classique au cas p-adique . On s'intéressera aux opérateurs qui commutent avec l'opérateur de translation et ainsi des théorèmes et résultats importants nous permettront d'établir une certaine analogie du calcul ombral entre le cas classique et le cas p-adique.

3.1 Théorème de Mahler [8]

Soit K comme défini précédemment.

Posons $B_0(x)=1$, $B_n(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$

$$= \binom{x}{n} \;;\; n \geq 1$$

Les polynômes $B_n(x)$ sont appelés polynômes binomiaux.

Remarque

L'opérateur Δ appliqué aux polynômes binomiaux $B_n(x)$ joue un rôle analogue à l'opérateur D (de dérivation) appliqué aux polynômes $\dfrac{x^i}{i!}$.

En effet :

$$\Delta\binom{x}{0} = 0 \quad , \quad \Delta\binom{x}{i} = \binom{x}{i-1} \qquad ; \; i \geq 1$$

$$D(x^0) = 0 \quad , \quad D\left(\frac{x^i}{i!}\right) = \frac{ix^{i-1}}{i!} = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \; ; \; i \geq 1.$$

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{Z}_P \to K$ *une fonction continue, posons* $a_k = (\Delta^k f)(0)$, *alors* $|a_k| \to 0$ *et la série* $\sum_{k\geq 0} a_k B_k$ *converge uniformément sur* $\mathbb{Z}_P$ *vers f. De plus ;* $\|f\|_\infty = \sup_{k\geq 0}|a_k|$.

Preuve [8]

Définition 1

Une famille (e_i) *d'éléments de C* $(\mathbb{Z}_p \to K)$ *forme une base orthonormale pour C* $(\mathbb{Z}_p \to K)$ *si tout élément f de C* $(\mathbb{Z}_p \to K)$ *possède une unique représentation* $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i e_i$ *où* $f_i \in K$

et $|f_i| \to 0$ *lorsque* $i \to +\infty$ *et si* $\|f\|_\infty = \sup_{i\geq 0}|f_i|$.

Soit E un espace de Banach non archimédien sur un corps K valué non archimédien .Soient

$e_1, e_2, \ldots, e_k$ une suite finie ou infinie d'éléments de E. On dira que cette suite est orthogonale si $\|\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_k e_k\|=\max\{\|\alpha_i e_i\|, i=1,\ldots,k\}$ pour tout $k\in IN$ et pour tout $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ dans K. Si la suite est infinie on aura $\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i e_i\right\| = \max\{\|\alpha_i e_i\|, i=1,2,\ldots\}$ pour tout $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ dans K tel que $\lim_{i\to+\infty}\alpha_i = 0$. La suite orthogonale $e_1, e_2,\ldots,e_k$ est dite orthonormale si $\|e_i\|=1$ pour tout i.

Remarque

La suite $B_n(x)$ est une base orthonormale de $C(Z_p\to K)$.

On s'intéresse aux opérateurs linéaires qui commutent avec l'opérateur de translation E. Soit Q un tel opérateur, comme les polynômes binomiaux $B_n(x) =\binom{x}{n}$; $n = 0,1\ldots$ forment une base de $C(Z_p\to K)$, on étudiera l'action de l'opérateur Q sur B_n. Posons $b_n=(QB_n)(0)$.

3.2 Opérateurs linéaires continus sur $C(Z_p\to K)$

3.2.1 Opérateurs linéaires qui commutent avec l'opérateur de translation (opérateurs de composition)

Théorème 2 (de Van –Hamme)

Si Q est un opérateur linéaire continu qui commute avec l'opérateur de translation E, *alors la suite (b_n) est bornée dans K et Q est uniquement déterminé par la suite (b_n).*

Un opérateur linéaire Q qui commute avec l'opérateur de translation admet un développement sous la forme $Q=\sum_{i=0}^{\infty}b_i\Delta^{i^i}$. Inversement, tout opérateur de la forme $\sum_{i=0}^{\infty}b_i\Delta^i$ avec (b_i) suite bornée dans K, est linéaire, continu et commute avec l'opérateur de translation E, de plus :

$\|Q\|=\sup_{n\geq 0}\{|b_n|\}$, $\qquad$ $\|Q\|=\inf\{J\in[0,\infty[, \|Qf\|_\infty \leq J\,\|f\|_\infty; f\in C(Z_p\to K)\}$

Preuve du théorème 2

Soit (b_n) une suite bornée dans K et soit f un élément de $C(Z_p\to K)$.

On définit un opérateur Q sur $C\,(\mathbb{Z}_p \to K)$ par :

$$(Qf)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\Delta^n f)(x) \tag{1}$$

Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (\Delta^n f)(x) = 0$ uniformément, (1) converge uniformément sur $\mathbb{Z}_p$ et définit une fonction continue Qf sur $\mathbb{Z}_p$.

L'opérateur Q est linéaire et commute avec E car $E\Delta = \Delta E$. Q est continu car $\|Qf\| \leq \|f\| (\max |b_n|)$.

Réciproquement :

Pour montrer que pour tout opérateur Q qui commute avec E il existe une suite bornée telle que (1) soit vérifié, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 1

Si $f : \mathbb{Z}_p \to K$ est une fonction continue et si $\Delta^{n+1} f = 0$, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Preuve

On procède par récurrence sur n.

Si $\Delta f = 0$ alors $f(x+1) = f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{Z}_p$ ce qui implique que f est constante donc le cas $n = 0$ est vérifié.

Supposons que la relation est vraie à l'ordre n, c'est à dire $\Delta^{n+1} f = 0$ avec f étant une fonction continue.

$$\Delta^{n+1} f = \Delta^n (\Delta f) = 0$$

Δf s'écrit sous la forme

$$(\Delta f)(x) = \sum_{k=o}^{n-1} a_k \binom{x}{k} \tag{2}$$

comme l'opérateur Δ vérifie la relation

$$\Delta \binom{x}{k+1} = \binom{x}{k},\ \mathrm{k} \geq 1$$

Il en résulte que les polynômes de la forme $f(x) = \sum_{k=o}^{n-1} a_k \binom{x}{k+1} + \mathrm{c}$ satisfont la relation (2), ce sont les seules fonctions continues satisfaisant (2) et telles que $\Delta f = \Delta g$, alors $f(x) = g(x) + c$ d'où f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. □

Lemme 2

Soit P un polynôme de degré n à coefficients dans K et soit Q un opérateur tel que

*Q*E = E*Q, alors QP est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.*

Preuve

E*Q* = *Q*E implique que $Q\Delta = \Delta Q$ car $E\Delta = \Delta E$, ce qui donne $Q\Delta^{n+1} = \Delta^{n+1}Q$.

Le degré de *P* est égal à n implique que $\Delta^{n+1}P = 0$ et alors $\Delta^{n+1}(QP) = Q(\Delta^{n+1}P) = 0$

et le lemme1 implique que *Q*P est un polynôme de degré inférieur ou égal à *n*.

□

Lemme 3

Si QE = EQ, l'entier m = degP – degQP est le même pour tout P dans K[*x*] *qui n'appartient pas au noyau de Q.*

Preuve

Examinons le noyau de l'opérateur *Q*. Supposons que P est un polynôme qui appartient à ker*Q*, *Q*P = 0.

Comme $Q(\Delta P) = \Delta(Q\mathrm{P}) = 0$ alors ΔP est un élément de ker*Q*, de la même manière on trouve que $\Delta^2 P, \Delta^3 P$, … sont des éléments de ker*Q*. Comme *Q* est un opérateur linéaire, ker*Q* contiendra tous les polynômes de degré inférieur ou égal au degré de P.

Si ker*Q* contenait les polynômes de degré arbitraire on aurait $K[x] \subset \ker Q$ alors il n' y aurait rien à démontrer.

De ce fait, ker*Q* contient des polynômes de degré strictement inférieur à un entier m. Soit *P* un polynôme tel que $\deg P = n \geq m$, on affirme que degré $(QP) = n\text{-}m$.

En effet ;

degré $(\Delta^{n-m+1}P) = m\text{-}1$ ce qui donne $Q(\Delta^{n-m+1}P) = 0$ et alors $\Delta^{n-m+1}(QP) = 0$ et le lemme1 implique que degré $QP \leq n\text{-}m$.

Supposons que degré $QP = r < n\text{-}m$ ce qui donne $\Delta^{r+1}(QP) = 0$ et $Q(\Delta^{r+1}P) = 0$ mais $\deg(\Delta^{r+1}P) = n\text{-}r\text{-}1 > m\text{-}1$ et alors ker*Q* contiendrait les polynômes de degré supérieur à *m*-1 ce qui contredit la définition de *m* d'où degré $(QP) = n\text{-}m$.

□

Corollaire 1

Si KerQ contient B_{m-1} alors Q augmente le degré de tout polynôme d'au moins m.

Revenons à la démonstration du théorème :

Soit Q un opérateur continu sur $C\,(Z_p \to K)$ tel que $QE = EQ$ construisons une suite bornée (b_n) et montrons que (1) est vérifiée.

Soit I l'opérateur identique de $C\,(Z_p \to K)$. On définit b_0 par $QB_0 = b_0$, $\mathrm{Ker}(Q-b_0 I)$ contient B_0 et le corollaire 1 implique que $Q - b_0 I$ augmente le degré de tout polynôme d'au moins un alors $(Q - b_0 I)B_1$ est constant, on définit b_1 par $(Q - b_0 I)B_1 = b_1$ alors $\ker(Q - b_0 I - b_1 \Delta)$ contient B_1 et ainsi de suite on aura défini $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ avec $(Q - b_0 I - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \Delta^i)$ contient B_{n-1} et le corollaire implique que $(Q - b_0 I - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \Delta^i) B_n$ est constant donc on peut définir b_n par :

$$b_n = (Q - b_0 I - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \Delta^i) B_n$$

comme $(\Delta^i B_n)(x) = \begin{pmatrix} x \\ n-i \end{pmatrix}$ $\quad i \geq 1$, on peut écrire

$$b_n = Q\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} - \sum_{i=0}^{n-1} b_i \begin{pmatrix} x \\ n-i \end{pmatrix}.$$

Reste à montrer que la suite (b_n) est bornée.

La norme de l'opérateur Q vérifie $\|Qf\| \leq \|Q\| \, \|f\|$ et alors $|b_n| \leq \max(\|Q\|, |b_0|, |b_1|, \ldots |b_{n-1}|)$

comme $|b_0| = \|QB_0\| \leq \|Q\|$ on déduit par récurrence sur n que $|b_n| \leq \|Q\|$ d'où (b_n) est bornée. Par construction de la suite (b_n) on remarque que $\ker\,(Q - b_0 I - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Delta^n)$ contient $K[x]$ c'est-à-dire

$(Q - b_0 I - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Delta^n)\, K[x] = 0$ et comme $K[x]$ est dense dans $C\,(Z_p \to K)$. On aura :

$(Q - b_0 I - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Delta^n) = 0$ donc $Q = b_0 I + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Delta^n$ d'où la relation (1).

□

Définition 2

L'expression $Q = b_0 I + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Delta^n$ est dite la Δ-expansion de l'opérateur Q, on écrit

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Delta^n \ .$$

Définition 3

Un opérateur delta est un opérateur linéaire continu sur $C(\mathrm{Z}_p \to \mathrm{K})$ qui commute avec l'opérateur de translation E *et tel que le polynôme Qx est constant différent de zéro.*

Définition 4 (dérivation de Pincherle)

La dérivation de Pincherle d'un opérateur Q est l'opérateur $Q' = Qx - xQ$.

Propriétés

Soit $Q \in C\,(\mathrm{Z}_\mathrm{p} \to K)$ alors ;

- Si $Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Delta^n$ alors $Q' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n b_n \Delta^{n-1}\right)(1+\Delta)$
- $(Q_1+Q_2)' = Q'_1 + Q'_2$.
- $(Q_1 Q_2)' = Q'_1\, Q_2 + Q_1\, Q'_2$.

3.2.2 Système de polynôme de base pour les opérateurs qui commutent avec la translation

Définition 5

Un système de polynôme de base correspondant à un opérateur Q qui commute avec la translation E,*et tel que Qx différent de zéro, est un système de polynômes (q_n) satisfaisant :*

1- *degré $q_n = n$, $n \geq 0$*

2- *$Qq_n = q_{n-1}$, $n \geq 1$*

3- *$q_0 = 1$, $q_n(0)=0$, $n \geq 1$*

Le système (q_n) est encore appelé suite de polynômes de base associée à l'opérateur Q qui commute avec l'opérateur de translation E.
La suite (q_n) est unique et constitue une base de $C(Z_p \to K)$.

Théorème 3 [14]

Soit Q un opérateur linéaire continu sur $C(Z_p \to K)$ tel que :
$b_0 = 0$, $|b_1| = 1$, $|b_n| \leq 1$ pour $n \geq 2$, alors :

a) il existe une unique suite de polynômes $q_n(x)$ tel que $Qq_n = q_{n-1}$, $\deg(q_n) = n$ $q_n(0)=0$ pour $n \geq 1$ et $q_0 = 1$.

b) toute fonction continue $f : Z_p \to K$ possède un développement convergeant uniformément, de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (Q^n f)(0) q_n(x), \|f\| = \max_n |(Q^n f)(0)|.$$

Remarque

L'opérateur Q donné est un opérateur delta. (car $|b_1| = 1$).

Preuve

1-Unicité de q_n

Soit P un polynôme de degré n et (q_i) une suite de polynômes satisfisant la condition a) du théorème, les q_i forment une base de K[x] donc, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i q_i$.

$Qq_i = q_{i-1}$ et $q_i(0) = 0$ impliquent que $Q^r p = \sum_{i=r}^{n} c_i q_{i-r}$ et $(Q^r p) = c_r$, alors

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} (Q^i P)(0) q_i(x).$

Supposons que (r_n) est une autre suite satisfaisant la condition a), alors

$r_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (Q^i r_n)(0) q_i(x).$

On a $(Q^i r_n)(0) = 0$ pour i = 0,1, …, n-1 et $(Q^n r_n)(0) = 1$ d'où $r_n = q_n$.

2- définition de q_n

Soit l'opérateur $Q = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Delta^n$,on définit deux opérateurs R et S à partir de la série formelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n = \frac{b_1 t}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n}$$

à partir du dénominateur $r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ on construit la série formelle $1 - \frac{tr'(t)}{r(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

on pose

$R = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Delta^n$ et $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta^n$.

les conditions $|b_1| = 1$ et $|b_n| \leq 1$ impliquent que $|a_n| \leq 1$ et $|c_n| \leq 1$ de plus $a_0 = c_0 = 1$,

on définit q_n par $q_n(x) = b_1^{-n} S R^n \binom{x}{n}, n \geq 1$.

$q_n(x)$ ainsi définie satisfait la condition a) du théorème.

La Δ-expansion de R^{-1} possède des coefficients bornés, donc on peut écrire $Q = b_1 \Delta R^{-1}$, ainsi,

$$\begin{aligned}(Qq_n)(x) &= [(b_1 \Delta R^{-1}) q_n](x) \\ &= b_1^{-(n-1)} \Delta S R^{n-1} \binom{x}{n} \\ &= b_1^{-(n-1)} S R^{n-1} \binom{x}{n-1} \\ &= q_{n-1}(x),\end{aligned}$$

$a_0 = c_0 = 1$ permet d'écrire $SR^n = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta^i$, en remplaçant dans la définition de q_n on obtient

$q_n(x) = b_1^{-n} \left\{ \binom{x}{n} + \sum_{i=0}^{n} d_i \binom{x}{n-1} \right\}$, donc le degré de $q_n = n$ et $q_n(0) = b_1^{-n} d_n$.

reste à montrer que $d_n = 0$.

Dans un développement de la forme $\{1 - t\frac{Q'(t)}{Q(t)}\}Q(t)^n = Q(t)^n - \frac{t}{n}\frac{d}{dt}(Q(t)^n)$, Q est une série formelle quelconque et d_n est le coefficient de t^n.

Ainsi, pour voir que $d_n = 0$ il suffit d'écrire $Q(t)^n$ comme une série formelle et de substituer cela dans la formule.

La série formelle $Q(t)$ correspond en fait à l'opérateur R considéré comme une série delta.

Les inégalités $|a_n| \leq 1$ et $|c_n| \leq 1$ impliquent que $|d_n| \leq 1$ ainsi $|q_n(x)| \leq 1$ et alors l'opérateur défini par $T_x = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)Q^n$ est continu.

Faisons opérer T_x sur un polynôme $p(y)$ de $K[x]$, on obtient $(T_x p)(y) = \sum_{n=0}^{m} q_n(x)\ (Q^n p)(y)$ comparons ce développement à $P(x) = \sum_{n=0}^{m} (Q^n P)(0)q_n(x)$ alors, en remplaçant $p(x)$ par $p(x+y)$ on aura : $(T_x p)(y) = p(x+y)$, ce qui implique que l'opérateur T_x et l'opérateur de translation E_x coïncident sur $K[x]$, et comme T_x et E_x sont continus et comme $K[x]$ est dense dans $C\ (Z_p \to K)$, T_x et E_x coïncident sur tout l'espace donc :

$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)Q^n$ et en faisant opérer E_x sur une fonction continue $f(y)$ on obtient :

$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)Q^n f(y)$. Pour $y = 0$ on obtient le développement souhaité.

$|f(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} Q^n f(0)\ q_n(x)\right| \leq \max_n |(Q^n f)(0)|$ car $|q_n(x)| \leq 1$ alors $\|f\| \leq \max_n |(Q^n f)(0)|$.

De même

$|(Qf)(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(\Delta^n f)(x)\right| \leq \max_n |(\Delta^n f)(x)| \leq \|f\|$ car $|b_n| \leq 1$

ainsi, $\|Qf\| \leq \|f\|$ et $\|Q^n f\| \leq \|f\|$, donc $\|(Q^n f)(0)\| \leq \|Q^n f\| \leq \|f\|$ *et* $\max_n |(Q^n f)(0)| \leq \|f\|$

d'où la formule :

$$\|f\| = \max_n |(Q^n f)(0)|$$

reste à montrer la convergence uniforme. Ecrivons Q^n sous la forme $Q^n = T\,\Delta^n$

où $T = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \Delta^i, |\alpha_i| \leq 1$,alors $|(Tf)(x)| \leq \|f\|$ *et* $\|Tf\| \leq \|f\|$, donc

$|(Q^n f)(y)| \leq \|Q^n f\| = \|T\Delta^n f\| \leq \|\Delta^n f\|$ *et* $\lim_n \|\Delta^n f\| = 0$, d'où le résultat.

□

Théorème 4

Soit Q un opérateur delta tel que $\|Q\| = |QB_1(0)| = 1$*, soit* α *un élément fixé dans* Z_p *et* (P_n) *la suite polynomiale associée à l'opérateur Q.*

1) *Soit T un opérateur sur* $C(Z_p \to K)$ *et posons* $d_n = (TP_n)(\alpha)$*. Si T est linéaire, continu et commute avec* E *alors la suite* (d_n) *est bornée et* $T = \sum_{n=0}^{\infty} d_n Q^n$.

2) *Si* (d_n) *est une suite bornée, alors l'opérateur défini par* $T = \sum_{n=0}^{\infty} d_n Q^n$ *est linéaire, continu et commute avec E, de plus,* $d_n = (TP_n)(\alpha)$*.*

Remarque

La définition d'un opérateur delta sur $C(Z_p \to K)$ reste la même que dans le cas classique.

Commentaire

le théorème cité ci-dessus est analogue au théorème de Van-Hamme, pour un opérateur delta Q de norme un avec $|QB_1(0)| = 1$. Si α est un élément fixé dans Z_p, (P_n) la suite polynomiale associée à Q et (d_n) (n = 0, 1, 2…) une suite bornée dans K, on peut associer un opérateur T à cette suite telle que $(TP_n)(\alpha) = d_n$. Pour cela, on définit T de la manière suivante :

$(Tf)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (Q^n f)(x)$ où $Q^0 = I$, $f \in C(Z_p \to K)$.

Si l'opérateur Q commute avec l'opérateur de translation E alors T est linéaire et commute avec E. $f \in C(Z_p \to K)$ et $(Q^n f)(x)$ tend vers zéro uniformément, la série converge uniformément et définit une fonction continue Tf.

$$\|Tf\|_\infty \leq \sup_{n \geq 0}\left\{ |d_n| \, \|Q^n f\|_\infty \right\} \leq \|f\|_\infty \sup\left\{ |d_n| \right\} \text{ et T est ainsi continu.}$$

Définition 6

L'expression $T = \sum_{i=0}^{\infty} d_i Q^i$ *est dite la Q-expansion de l'opérateur T.*

Le corps K étant un sur corps valué complet de Q_p , Les opérateurs aux différences finies sur $C(Z_p \to K)$, sont comme dans le cas des opérateurs de composition ou encore des opérateurs delta, peuvent s'exprimer comme des séries, dans le cas p-adique ce sont des séries de la forme $Q = \sum_{n\geq 0} b_n \Delta^n$ qui convergent simplement dans l'espace des opérateurs linéaires continues . De plus

$\|Q\| = \sup_{n\geq 0} |b_n|$

Dans le cas purement algébrique, les opérateurs delta à partir desquels on peut construire des bases qui sont formées de polynômes de type binomial (q_n) sont ceux dont le développement en série $U = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} D^n$,(D étant la dérivation usuelle des polynômes) satisfait $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$, la condition qui lie base et opérateur est $Uq_n = nq_{n-1}$.

Dans le cas p-adique, on peut construire des bases orthonormales formées de polynômes de type binomial (q_n) à partir d'opérateurs aux différences finies $Q = \sum_{n\geq 0} b_n \Delta^n$, la condition qui existe entre opérarteur et base est $Qq_n = q_{n-1}$, on supposera alors $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$ et donc $\|Q\| = 1$.

Définition 7 (Suites de polynômes de type binomial)

On dit que la suite $(q_n)_{n\geq 0} \subset K[X]$ est une suite de polynômes de type binomial

Si $q_0 = 1$, $d^0 q_n = n$, $n \geq 1$, $q_n(x+y) = \sum_{i+j=n} q_i(x) q_j(y)$, $n \geq 0$ dans $K[X,Y]$.

Remarque

Si $(q_n)_{n\geq 0} \subset K[x]$ est une suite de polynômes de type binomial, alors :

1) $q_n(0)=0$, $n \geq 1$
2) $(q_n)_{n\geq 0}$ est une base du K- espace vectoriel $K[x]$
3) Posant pour $\alpha \in K$ et $q \in K[x]$, $E_\alpha q(x)=E(x+\alpha)$, On a $E_\alpha q_n = \sum_{j=0}^{n} q_{n-j}(\alpha) q_j$

3.3 Formes linéaires sur $\mathbf{C}(\mathbf{Z_p}\rightarrow K)$

Soit K<<T>> l'algèbre des séries formelles à coefficients bornés dans K

K<<T>> = $\{f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \in K[[T]]$ / $a_n \in K$ et $\sup |a_n| < +\infty \}$

Soit $C(Z_p\rightarrow K)'$ l'espace de Banach dual de l'espace $C(Z_p\rightarrow K)$. Considérons un élément de $C(Z_p\rightarrow K)'$, L : $C(Z_p\rightarrow K) \rightarrow K$, on désigne par <L/*f(x)*> l'action de la forme linéaire L sur un élément de $C(Z_p\rightarrow K)$.

On pose <L/$Bn(x)$>=L(n) qui définit une suite bornée dans K. La série de Cauchy

$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \in K$<<T>> définit une forme linéaire par <f(t)/$B_n(x)$> = $a(n)$ bornée dans K .

Toute forme linéaire L dans $C(Z_p\rightarrow K)'$ s'écrit sous la forme d'une série de Cauchy par

$f_L(t) = \sum_{k\geq 0}$ <L/$B_n(x)$>t^k

Donc toute série formelle dans K<<T>> définit une forme linéaire dans $C(Z_p\rightarrow K)'$

et réciproquement, d'où le théorème :

Théorème 5

L'application $L\rightarrow f_L(t)$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $C(Z_p\rightarrow K)'$ sur K<<T>>. ainsi, K<<T>> désignera en même temps l'algèbre des séries formelles à coefficients bornés dans K et l'espace des formes linéaires sur $C(Z_p\rightarrow K)'$ et alors l'espace $C(Z_p\rightarrow K)'$ est muni d'une structure d'algèbre par cet isomorphisme .

$l^\infty(N,K)$ muni du produit de convolution $*$ est une algèbre commutative intègre et appelée Algèbre des suites bornées (algèbre de convolution) . Soit $f_u(t)$ la série de Cauchy associée à la suite u .

Ainsi, $C(Z_p\rightarrow K)'$ muni du produit de Convolution $*$ a une structure d'algèbre unitaire d'unité ε_0 où $\varepsilon_0(f) = f(0)$

Cette algèbre est appelée algèbre de Banach ou encore algèbre des mesures bornées p-adique qu'on notera $M(Z_p\rightarrow K)$, pour $u, v \in M(Z_p\rightarrow K)$ on a :

$$<u * v , f> = <u, <v, E_x f>> \text{ où } E_x f(y) = f(x+y)$$

$$\begin{tikzcd}
u\in \mathrm{C}(\mathrm{Z}_p\to K)' \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isomorphisme}"] \arrow[dr, leftrightarrow] & \mathrm{S}_u(\mathrm{T})\in K<<\mathrm{T}>> \arrow[d, leftrightarrow] \\
& \begin{array}{c} <u\,,\,B_n> = u(\mathrm{n}) \in l^\infty\,(N,K) \\ \text{suite associée} \end{array}
\end{tikzcd}$$

Théorème 6

L'algèbre M($\mathrm{Z}_\mathrm{p}\to K$) est isométriquement isomorphe à l'algèbre des séries formelles à coefficients bornés K<<T>>

K<<T>> = { $S=\sum_{n\geq 0} a_n T^n \in K[[T]], \|S\| = \sup_{n\geq 0}|a_n| < +\infty$ }.

Preuve

Comme les polynômes $B_n(x)$ forment une base orthonormale de C($\mathrm{Z}_\mathrm{p}\to K$), l'espace M ($\mathrm{Z}_\mathrm{p}\to K$) est isométriquement isomorphe à l'espace des suites bornée l^∞ (N,K).

μ : C($\mathrm{Z}_\mathrm{p}\to K$) → K ; μ sera parfaitement déterminée par son action sur la base $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$**,** on fait correspondre à μ la suite $(<\mu,B_n>)_{n\in\mathbf{N}} \in K$**.**

Soit $x\in$ Z_p ,on sait que $\mathrm{E}_\mathrm{x}B_n(y)=B_n(x+y)=\sum_{i+j=n} B_i(x)B_j(y)$ .Ainsi ,pour $u,v \in$ M ($\mathrm{Z}_\mathrm{p}\to K$), on a

$<u * v, B_n> = <u,<v, \mathrm{E}_\mathrm{x}B_n>> = \sum_{i+j=n} <u, B_i><v, B_j>$ alors, posant

$\mathrm{S}_u(\mathrm{T}) = \sum_{n\geq 0} <u,B_n>\mathrm{T}^\mathrm{n}$ et $S_v(\mathrm{T}) = \sum_{n\geq 0} <v\,, B_j>\mathrm{T}^n$, on obtient :

$$\mathrm{S}_u(\mathrm{T})\, S_v(\mathrm{T}) = \sum_{n\geq 0}\sum_{i+j=n} <u\,,B_i><v\,,B_n>\mathrm{T}^n$$

$$= S_{u*v}\,(\mathrm{T}).$$ □

3.4 Opérateurs linéaires continus sur C($Z_p\to K$)

3.4.1 Opérateurs aux différences finies

Considérons W ($\mathrm{Z}_\mathrm{p}\to K$) = $\{Q\in L(\mathrm{C}(Z_p\to K))\ ; E_x\circ Q = Q\circ E_x\,, x\in Z_p\}$

Les éléments de W ($Z_p\to K$) sont appelés opérateurs aux différences finies.

W ($\mathrm{Z}_\mathrm{p}\to K$) est une sous algèbre de Banach unitaire de l'algèbre L(C($\mathrm{Z}_\mathrm{p}\to K$)) des endomorphismes continus de l'espace de Banach C($\mathrm{Z}_\mathrm{p}\to K$).

Théorème 7 (de Van der Put)

Les algèbres W ($Z_p \rightarrow K$) *et M* ($Z_p \rightarrow K$) *sont isométriquement isomorphes.*

Preuve

W($Z_p \rightarrow K$) est une sous algèbre de L(C($Z_p \rightarrow K$)) = End $_C$ (C($Z_p \rightarrow K$)).Considérons l'opérateur $Q \in$ End $_C$ (C($Z_p \rightarrow K$)).On définit une application linéaire θ :

$$\theta : \text{End}_C\,(C(Z_p \rightarrow K)) \rightarrow M\,(Z_p \rightarrow K)$$

$$Q \quad \rightarrow \theta Q = {}^tQ(\varepsilon_0) : C(Z_p \rightarrow K) \rightarrow K$$

$$ {}^tQ(\varepsilon_0)(f) \rightarrow {}^tQ\, f(0)$$

et $\|\theta Q\| = \|Q\|$.

soit θ_1 la restriction de θ à W($Z_p \rightarrow K$) :

θ_1 : W($Z_p \rightarrow K$) $\rightarrow$ M($Z_p \rightarrow K$)

associons à $u \in$ M($Z_p \rightarrow K$) l'endomorphisme linéaire φ(u) de C($Z_p \rightarrow K$) défini par

$\varphi(u)(f)(s) = < u , E_s f > , s \in Z_p , f \in C(Z_p \rightarrow K)$. φ($u$) est continue et l'application

φ : M($Z_p \rightarrow K$) $\rightarrow$ L(C($Z_p \rightarrow K$)) est linéaire et continue vérifiant $\|\varphi(u)\| \leq \|u\|$. De plus

$E_x\varphi(u)(f)(s) = < u , E_{x+s} f> = < u , E_s(E_x f) > = \varphi(u)(E_x f)(s)$ avec $s,x \in Z_p$, donc

$E_x \circ \varphi(u) = \varphi(u) \circ E_x$ ce qui donne $\varphi(u) \in$ W($Z_p \rightarrow K$).

Soit $u \in$ M($Z_p \rightarrow K$) et $f \in$ C($Z_p \rightarrow K$) on a :

$<\theta_1 \circ \varphi(u), f> = \varphi(u)(f)(0) = < u , E_0 f> = < u , f>$, donc $\theta_1 \circ \varphi(u) = u$ et $\theta_1 \circ \varphi =$ id.

d'autre part , si $Q \in$ W($Z_p \rightarrow K$), on a $\varphi \circ \theta_1(Q)(f) = <\theta_1(Q), E_s f> = Q(E_s f)(e) = Q(E_e f) = Qf$

donc $\varphi \circ \theta_1(Q) = Q$ et $\varphi \circ \theta_1 =$ id.

On a, $\varphi(\varepsilon_0)(f)(s) = < \varepsilon_0, E_s f > = f(s)$ et donc $\varphi(\varepsilon_0) =$ id.

Pour u et $v \in$ M($Z_p \rightarrow K$) et $f \in$ C($Z_p \rightarrow K$) ;

$\varphi(u * v)(f)(s) = < u * v , E_s f > = < u, < v , E_x (E_s f) >> = < u , \varphi(v)(E_s f)(t)>$

$= < u , E_s\, \varphi(v)(f)(t)> = \varphi(u)(\varphi(v)(f))(s)$

Ainsi $\varphi(u * v) = \varphi(u) \circ \varphi(v)$. ce qui donne que φ est un isomorphisme d'algèbres.

□

Corollaire 2

Soient $Q \in W(Z_p \to K)$ et $u \in M(Z_p \to K)$, alors ${}^tQ(u) = u * \theta_1(Q)$

Preuve

$\varphi({}^tQ(u)(f)(s) = < {}^tQ(u) \, , E_s f >=< u, QE_s f > = < u \, , E_s Q(f) >= \varphi(u)(Q(f))(s) = \varphi(u) \circ Q(f)(s)$

donc $\varphi({}^tQ(u)) = \varphi(u) \circ Q$

comme θ_1 et φ sont des isomorphismes d'algèbres, réciproques l'un de l'autre

on a ${}^tQ(u) = \theta_1(\varphi(u) \circ Q) = u * \theta_1(Q)$.

□

Théorème 8

Soit K un sur corps valué complet de Q_p.

On a les isomorphismes d'algèbres unitaires :

$W(Z_p \to K) \approx M(Z_p \to K) \approx K<<T>>$

Preuve

Découle des théorèmes précédents.

Corollaire 3

Soit $Q = \sum_{n \geq 0} b_n \Delta^n \in W(Z_p \to K)$

1) *Q est inversible si et seulement si* $||Q|| = |b_0| \neq 0$
2) *Q est isométrique bijective si et seulement si* $||Q|| = |b_0| = 1$

Remarque

Si Q est un opérateur linéaire continu qui commute avec la translation, alors Q possède un inverse qui est aussi, continu et qui commute avec la translation si et seulement si

$||Q|| = |b_0| \neq 0$,

si $|b_0| = 1$, $||Q|| = ||Q^{-1}|| = 1 = |Q^{-1}B_0(0)|$.

Conclusion

A l'aide de la loi de composition des opérateurs linéaires sur un espace vectoriel, définie par Van-Hamme, on a eu un isomorphisme avec un sous espace des séries formelles K<<T>> muni de la loi de Cauchy habituelle et aussi avec les mesures bornées $M(Z_p \to K)$ (dual de l'espace des fonctions continue Z_p) muni du produit de convolution, en fait on travaille avec trois espaces différents que l'on se permet d'identifier .

On a noté au passage que pour les polynômes binomiaux (B_n) on avait

$B_n(x+y) = \sum_{i+j=n} B_i(x)B_j(y)$, $(B_q(x+y) = B_q(x) * B_q(y))$ la différence avec le cas pûrement algébrique est que sur l'espace des polynômes $C[x]$ la base que l'on prend habituellement est celle formée par les monômes x^n et on avait alors $(x+y)^n = \sum_{i+j=n} c_j^{\,n} x^i y^j$,

$((x+y)^q = (x^q \omega\, y^q))$.

Le calcul ombral classique utilise l'opérateur de dérivation, tandis que dans le cas p-adique, on utilise l'opérateur aux différences.

L'algèbre des mesures bornées p-adiques $M(Z_p \to K)$ est isomorphe à l'algèbre des séries formelles à coefficients bornés, ainsi, lorsque le corps K n'est pas sphériquement complet, les automorphismes continus de $C(Z_p \to K)'$ sont bien définis à partir des automorphismes continus de coalgèbre de $C(Z_p \to K)$.

Dans la suite de notre étude, on s'intéressera à la définition des opérateurs Ombraux, d'Appell et de Sheffer.

Les opérateurs d'Appell dans notre cas ne sont que les opérateurs inversibles de $W(Z_p \to K)$

Les opérateurs Ombraux sont des opérateurs tels que leurs transposés sont des automorphismes de $C(Z_p \to K)'$.

Les opérateurs de Sheffer s'obtiennent à partir du composé d'un opérateur d'Appell et d'un opérateur Ombral. Ainsi, on s'intéressera d'abord à la description des morphismes continus de l'algèbre des mesures p-adique sur Z_p.

3.4.2 Rappels d'analyse fonctionnelle

Défintion 8

Un corps valué ultramétrique K est sphériquement complet, si toute suite décroissante de boules a une intersection non vide

Par exemple ; tout corps K de valuation discrète complet est sphériquement complet. Par contre le corps C_p (le complété de la clôture algébrique de Q_p), n'est pas sphériquement complet [5]

Dual et bidual d'espaces de Banach

- D'une façon générale si $u : E \to F$ est un homomorphisme continu entre espaces de Banach, alors ${}^t u : F' \to E'$ est linéaire continu, avec $\| {}^t u\| = \|u\|$

Malheureusement en analyse ultramétrique, si le corps de base n'est pas sphériquement complet, il existe des espaces de Banach ultramétrique dont le dual topologique est réduit à $\{0\}$ (sphériquement complet = maximalement complet)

- Soit E un espace de Banach, $\varphi_f : E \to K$ l'application définie par

$\varphi_f(x) = <f,x>, f \in E'$.

Soit E' le dual de E (muni de la norme duale $\|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} |<f,x>|/\|x\|$

et soit E″ son bidual c'est à dire le dual de E′ (muni de la norme $\|\xi\| = \sup_{\|f\| \neq 0} |<\xi,f>| / \|f\|$

On a une injection canonique $J : E \to E''$.

Pour x fixé dans E, l'application $f \to <f,x>$ constitue une forme linéaire continue sur E', c'est à dire un élément de E″, noté Jx, on a donc :

$< Jx,f >_{E'',E'} = < f,x >_{E',E}$, $\forall x \in E$, $\forall f \in E'$.

A l'aide de J on peut toujours identifier E à un sous espace de E″

Espace Réflexifs

- Un espace de Banach E (ultramétrique) est pseudo-réflexif si l'application canonique

$J : E \to E''$ est isométrique et réfléxif si de plus cette application canonique est bijective.

Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E″ (à l'aide de l'isomorphisme J)

E réflexif $\Leftrightarrow$ E′ réflexif

- Lorsque K n'est pas sphériquement complet, C($Z_P \to K$) est réflexif [5]

Théorème 9 (de Banach)

Soient E et F deux espaces de Banach sur un corps valué complet non discret

Si u est une application linéaire continue bijective de E sur F, alors u est isomorphisme d'espaces de Banach (l'application réciproque u^{-1} de u est linéaire et continue)

3.4.3 Automorphismes continus d'algèbre de K<<X>>

3.4.3.1 Endomorphismes linéaires continus de coalgèbre de $C(Z_P \to K)$

Définitions 9

- *Soit K un corps valué ultramétrique complet.*

Un espace de Banach ultramétrique H sur K est une coalgèbre de Banach s'il existe deux applications linéaires :

$c : H \to H \hat{\otimes} H$ *(coproduit)*

$\sigma : H \to K$ *(counité de H)*

telles que :

1- $(c \otimes id_H) \circ c = (id_H \otimes c) \circ c$

2- $(id_H \otimes \sigma) \circ c = id_H = (\sigma \otimes id_H) \circ c$ et $||\sigma|| = 1$

où id_H est l'a application identique de H .

- *Pour $a \in H$, $||a|| \leq ||c(a)|| \leq ||c|| \, ||a||$, c est une isométrie si et seulement si $||c|| = 1$*

pour toute coalgèbre de Banach H, l'espace de Banach H '(dual), muni du produit de convolution $a' * b' = (a' \otimes b') o c$ est une algèbre normée unitaire d'unité σ et

$|| a' * b'|| \leq ||c|| \, ||a'|| \, ||b'||$.

- *Dans notre cas $H = C(Z_p \to K)$.*

un endomorphisme linéaire continu φ de l'espace de Banach $C(Z_p \to K)$ est un endomorphisme continu de coalgèbre de si $c o \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ c$.

Le coproduit c est défini comme suit :

$\Pi \circ c(f)(x,y) = f(x+y) = E_x f(y)$ *où* $\Pi : C(Z_p \to K) \hat{\otimes} C(Z_p \to K) \to C(Z_p \times Z_p \to K)$ *est un isomorphisme d'algèbre défini par* $\Pi(f \otimes g)(s,t) = f(s)g(t)$

et le counité est défini par $\sigma(f) = f(0)$.

On va donc donner une description des endomorphismes continus de coalgèbre de $C(Z_p \to K)$. Comme conséquence, on obtient, lorsque *K* est algébriquement clos et non sphériquement complet, les endomorphismes d'algèbre des fonctions analytiques bornées dans le disque unité de *K*.

Lemme 4

Le sous groupe multiplicatif du groupe des caractères continus de $C(Z_p \to K)$ correspond bijectivement au disque (unité) ouvert $D^-(0,1)$ de K . Tout caractère χ_α de Z_p ans K s'écrit sous la forme : $\chi_\alpha(x) = (1+\alpha)^x = \sum_{n\geq 0} \alpha^n B_n(x)$ *avec* $|\alpha|<1$

Preuve

Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n B_n$ un caractère continu de Z_p dans K, $c(f) = f \otimes f$ et $\sigma(f) = f(0) = 1$

Ainsi, $c(f) = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{i+j=n} B_i \otimes B_j$

$$= \sum_{i,j\geq 0} a_{i+j} B_i \otimes B_j$$

$$= \sum_{i,j\geq 0} a_i a_j B_i \otimes B_j$$

avec $f(0)=a_0 = 1$ et $a_{i+j} = a_i a_j$, $\forall i, j \geq 0$

d'où $a_n = a_1 a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ et par itération $a_n = a_1^n$, $\forall n \geq 1$

comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} a_1^n$ on a $|a_1|<1$ et $f = \sum_{n\geq 0} a_1^n B_n$

il en résulte que pour $x \in Z_p$, $f(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{x}{n} a_1^n$, on pose $\alpha = a_1$

et on obtient le résultat .

soit φ un endomorphisme continu de coalgèbre de $C(Z_p \to K)$.

pour tout caractère χ_α on a co $\varphi(\chi_\alpha) = \varphi(\chi_\alpha) \otimes \varphi(\chi_\alpha)$

ainsi $\varphi(\chi_\alpha)$ et un caractère ou $\varphi(\chi_\alpha) = 0$.

□

Proposition 1

Soit $\varphi \neq 0$ *un endomorphisme continu de coalgèbre de* $C(Z_p \to K)$ *, alors ;*

$\varphi(B_0) = \chi_\alpha = \sum_{n\geq 0} \alpha^n B_n$ *, pour* $\alpha \in K$ *tel que* $|\alpha| < 1$ *et* $\varphi(B_1) = \frac{c_1}{1+\alpha} B_1 \cdot \chi_\alpha$

Preuve **[4]**

Lemme 5

Soit φ un endomorphisme continu de coalgèbre de $C(Z_p \to K)$ *(*$\varphi \neq 0$*), alors* $\| \varphi \| = 1$

Preuve

On rappelle que l'algèbre des mesures p-adiques sur Z_p muni du produit de convolution : $u*v=(u\otimes v)\circ c$, est isomorphe à l'algèbre K<<X>> des séries formelles S = $\sum_{n\geq 0} b_n X^n$ telles que ||S|| = $Sup_{n\geq 0}|b_n| \prec +\infty$ et la norme de K<<X>> est multiplicative .

Soit φ un endomorphisme continu de coalgèbre de $C(Z_p \rightarrow K)$, alors ${}^t\varphi$ (transposé de φ) est un endomorphisme continu d'algèbre de K<<X>>, avec ${}^t\varphi(1)=1$ $(\varphi \neq 0)$

En particulier, pour $n \geq 0$, on a $\| {}^t\varphi(x) \|^n = \| {}^t\varphi(x)^n\| = \| {}^t\varphi(x^n)\| \leq \| {}^t\varphi\| \, \|x^n\| = \| {}^t\varphi\|$

et $\| {}^t\varphi(x)\| \leq \| {}^t\varphi\|^{1/n}$, $\forall n \geq 1$. Ainsi $\| {}^t\varphi(x)\| \leq 1$ et $\| {}^t\varphi(x^n)\| \leq 1$, $\forall n \geq 0$

Posons ${}^t\varphi(x) = \sum_{i\geq 0} b_i x^i$, on a $\| {}^t\varphi(x)\| = Sup_{i\geq 0}|b_i| \leq 1$

${}^t\varphi(x^n) = {}^t\varphi(x)^n = \sum_{i\geq 0} b_i(n)x^i$ avec $b_i(n) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=i} b_{i_1}\ldots\ldots b_{i_n}$

et $\| {}^t\varphi(x^n)\| = Sup_{i\geq 0}|b_i(n)| \leq 1$, $\forall n \geq 1$

$\forall n \geq 1$, ${}^t\varphi(1) = \sum_{i\geq 0} b_i(0)x^i$ avec $b_i(0) = \delta_{0,i}$

pour $m \geq 0$, on a $\varphi(B_m) = \sum_{l\geq 0} \alpha_{m,l} B_l$ avec $\lim_{l\to+\infty} \alpha_{m,l} = 0$

alors $\alpha_{m,n} = \langle x^n , \varphi(B_m)\rangle = \langle {}^t\varphi(x^n) , B_m \rangle = b_m(n)$, $\forall n \geq 0$

comme $\| \varphi(B_m)\| = Sup_{n\geq 0}|\alpha_{m,n}| = Sup_{n\geq 0}|b_m(n)| \leq 1$, $\forall m \geq 0$

d'après la proposition précédente, on a : $\varphi(B_0) = \chi_\alpha = B_0 + \sum_{l\geq 1} \alpha^l B_l$

donc $\| \varphi(B_0)\| = 1$, il en résulte que $\| \varphi\| = Sup_{m\geq 0}\|\varphi(B_m)\| = 1$

de plus on a : $b_0 = \langle {}^t\varphi(x) , B_0 \rangle = \langle x , \varphi(B_0)\rangle = \alpha$ ce qui donne $|b_0|<1$.

□

Remarque

L'espace de Banach $C(Z_p \rightarrow K)$ possède la propriété de pseudo-réflexivité, ainsi, $\| {}^t\varphi\| = \| \varphi\|$ et ${}^{tt}\varphi = \varphi$

3.4.3.2 Substitution avec des éléments dans K<<X>>

Soit Λ l'anneau de valuation de *K* et *M* l'idéal maximal de Λ, l'anneau Λ[[*X*]] des séries formelles à coefficients dans Λ est un anneau local d'idéal maximal $N = M + X\Lambda[[X]]$.
Λ[[*X*]] est la boule fermée (unité) de l'algèbre *K*<< X>>

Soit $u = \sum_{n\geq 0} b_n X^n \in M + X\Lambda[[X]]$, $b_0 = \alpha \in M$ et $|b_n| \leq 1$, $\forall n \geq 1$.

$u^n = \sum_{n\geq 0} b_i(n) X^i$ avec $b_i(n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=i} b_{i_1}.....b_{i_n}$.

Proposition 2

i) *soit* $u = \sum_{n\geq 0} b_n X^n \in \mathrm{N} = \mathrm{M} + X\Lambda[[X]]$ *alors la double suite* $(b_i(n))_{(n,i)\in IN\times IN}$ *vérifie*

$\lim_{n\to+\infty} b_i(n) = 0$*, pour i fixé*

ii) *pour tout* $\mathrm{S} = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ et $n \in \mathrm{IN}$, $\gamma_n = \sum_{l\geq 0} a_l b_n(l)$ *converge dans K .*

la composition de S avec u est définie en posant $S\circ u = \sum_{n\geq 0} \gamma_n X^n$ et $\mathrm{S}\circ \mathrm{u} \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ *avec*

$\|\mathrm{S}\circ \mathrm{u}\| \leq \|\mathrm{S}\|$

iii) *soient* $\mathrm{S}, \mathrm{T} \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ *et* $u, v \in \mathrm{N}$ *on a :*

$(\mathrm{S}+\mathrm{T})\circ u = \mathrm{S}\circ u + \mathrm{T}\circ u$, $(\mathrm{S}.\mathrm{T})\circ u = \mathrm{S}\circ u.\mathrm{T}\circ u$ et $(\mathrm{S}\circ u)\circ v = \mathrm{S}\circ(u\circ v)$

pour u fixé dans N, on définit en posant pour $\mathrm{S} \in K\langle\langle X\rangle\rangle$, $\psi_u(\mathrm{S}) = \mathrm{S}\circ u$, *un endomorphisme continu d'algèbre de* $K\langle\langle X\rangle\rangle$ *de norme* $\|\psi_u\| = 1$.

de plus, $\mathrm{N} = \mathrm{M} + X\Lambda[[X]]$ *muni de la loi de composition* $\circ$ *est un monoide d'unité X*

Preuve

i) soit $u = \sum_{n\geq 0} b_n X^n \in \mathrm{N} = M + X\Lambda[[X]]$, et $\alpha = b_0$, $\alpha \in \mathrm{M}$ donc $|\alpha| < 1$

par définition $b_i(n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=i} b_{i_1}.....b_{i_n}$

soit n un entier tel que $\left[\frac{n}{2}\right] \geq i$. soit $(i_1, ... i_n)$ tel que $i_1 + ... + i_j + ... + i_n = i$

le nombre d'entiers j , $1 \leq j \leq n$ tel que $i_j = 0$ est supérieur à $\left[\frac{n}{2}\right]$

ainsi $b_{i_1}....b_{i_n} = \prod_{j=1}^{n} b_{i_j} = \prod_{i_j\neq 0} b_{i_j}\,\alpha^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ donc :

$|b_i(n)| = \left|\sum_{i_1+i_2+...+i_n=i} b_{i_1}.....b_{i_n}\right| \leq \max_{i_1+i_2+...+i_n=i}\left|b_{i_1}...b_{i_n}\right| \leq \max_{i_1+i_2+...+i_n=i}\left|\prod_{i_j\neq 0} b_{i_j}\right|\left|\alpha\right|^{\left[\frac{n}{2}\right]} \leq \left|\alpha\right|^{\left[\frac{n}{2}\right]}$

comme $|\alpha| < 1$ on obtient $\lim_{n\to+\infty} b_i(n) = 0$

ii) soit $\mathrm{S} = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in K\langle\langle X\rangle\rangle$, on a $\|\mathrm{S}\| = Sup_{n\geq 0}|a_n|$

soit $u = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ et $u^l = \sum_{n\geq 0} b_n(l) X^n$. comme $|a_l\, b_n(l)| \leq \|S\| . |b_n(l)|$. on déduit de i) que

$\lim_{l\to+\infty} a_l\, b_n(l) = 0$

ainsi $\gamma_n = \sum_{l\geq 0} a_l b_n(l)$ converge dans K et $|\gamma_n| \leq \sup_{l\geq 0}|a_l\|b_n(l)| \leq \|S\|$

donc la série formelle $\sum_{n\geq 0}\gamma_n X^n$ appartient à K<< X>> avec $\| \sum_{n\geq 0}\gamma_n X^n \| \leq \|S\|$

iii) si $S = \sum_{n\geq 0} a_n{}^1 X^n$, $T = \sum_{n\geq 0} a_n{}^2 X^n \in K$<<X>> ;

$$(S+T)\circ u = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{l\geq 0}\left(a_l{}^1 + a_l{}^2\right) b_n(l)\right) X^n = S\circ u + T\circ u$$

Soit $i , j \in$ IN , $u^{i+j} = u^i . u^j$ alors $b_n(i+j) = \sum_{s+t=n} b_s(i) b_t(j)$, $\forall n \geq 0$

donc :

$$(S.T)\circ u = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{l\geq 0}\left(\sum_{i+j=l} a_i{}^1 a_j{}^2\right) b_n(l)\right) X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} a_i{}^1 a_j{}^2 b_n(i+j) X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} a_i{}^1 a_j{}^2 \sum_{s+t=n} b_s(i) b_t(j) X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{s+t=n}\left(\sum_{i\geq 0} a_i{}^1 b_s(i)\right)\left(\sum_{j\geq 0} a_j{}^2 b_t(j)\right) X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{s+t=n}\gamma_s{}^1\gamma_t{}^2\right) X^n = (S\circ u).(T\circ u)$$

par récurrence on obtient $(S\circ u)^n = S^n\circ u$, $\forall n \geq 0$, $S\in K$<<X>> , $u\in N$

soit $u = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$, $v = \sum_{n\geq 0} c_n X^n \in N$ avec $b_0 = \alpha$, $c_0 = \beta \in M$

en posant $u\circ v = \sum_{n\geq 0} d_n X^n$ *, on a* $d_n = \sum_{l\geq 0} b_l c_n(l)$ *avec* $c_n(l) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_l=n} c_{n_1}\ldots\ldots c_{n_l}$

ainsi $c_0(l) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_l=0} c_{n_1}\ldots\ldots c_{n_l} = \beta^l$ et $d_0 = \sum_{l\geq 0} b_l\beta^l$ avec :

$|d_0| \leq \sup_{l\geq 0}|b_l\|\beta|^l = \max(|b_0| , \sup |b_l|\, |\beta|^l) \leq \max(|\alpha| , |\beta|) <1$

donc $u\circ v\in N$

$(u\circ v)^n = \sum_{i\geq 0} d_i(n) X^i = u^n\circ v$

$u^n\circ v = \sum_{i\geq 0}\left(\sum_{l\geq 0} b_l(n) c_i(l)\right) X^i$, $d_i(n) = \sum_{l\geq 0} b_l(n) c_i(l)$

et on a $S \circ (u \circ v) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{l\geq 0} a_l d_n(l)\right)X^n$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{l\geq 0} a_l \sum_{j\geq 0} b_j(l) c_n(j) X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{l\geq 0} a_l b_j(l)\right)c_n(j) X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j\geq 0} \gamma_j c_n(j)\right)X^n$$

$$= (S \circ u) \circ v \ .$$

Ainsi,

pour u fixé dans N, $\psi_u(S) = S \circ u$, $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$, on définit sur $K\langle\langle X\rangle\rangle$ un endomorphisme continu d'algèbre avec $\| \psi_u(S)\| \leq \|S\|$ $\forall\, S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ et $\psi_u(1) = 1$.

la loi de composition $\circ$ est associative donc (N , $\circ$) est un monoide avec $u \circ X = u = X \circ u$

pour $S = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in K\langle\langle X\rangle\rangle$, les coefficients γ_n de $S \circ u$ sont définis par :

$\gamma_0 = a_0$ et pour $n \geq 1$, $\gamma_n = \sum_{l=1}^{n} a_l b_n(l)$. Ceci est la théorie de substitution usuelle en séries formelles.

□

Corollaire 4

Soit $u = \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \alpha + U \in N = M + X\Lambda[[X]]$, *avec* $\alpha \in M$ et $U = \sum_{n\geq 1} b_n X^n \in X\Lambda[[X]]$

alors u est inversible dans (N , $\circ$ *) si et seulement si* U *est inversible ou autrement dit si* $|b_n| = 1$ *.*

De plus $u^{<-1>} = U^{<-1>}(X-\alpha)$ où $u^{<-1>}$ *désigne le* $\circ$*-inverse de u.*

et les endomorphismes d'algèbres associés ψ_u et ψ_U *de* $K\langle\langle X\rangle\rangle$ *sont isométriques et bijectifs d'inverse* $\psi_{u^{<-1>}}$ *respectivement* $\psi_{U^{<-1>}}$

Remarque

- si K est algébriquement clos, l'algèbre $K\langle\langle X\rangle\rangle$ est isomorphe à l'algèbre $A_b(D^-(0,1))$ des fonctions analytiques bornées sur le disque ouvert unité $D^-(0,1) = \{ x \in K \ / \ |x| < 1 \} = M$ de K
- tout endomorphisme continu ψ d'algèbre ($\psi \neq 0$) de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ vérifie $\psi(1) = 1$ et $\|\psi\|=1$

Proposition 3

*Soit ψ un endomorphisme continu d'algèbre de K<<X>>, alors il existe un élément $u \in$ N = M + $X\Lambda[[X]]$ tel que $\psi = \psi_u$ sous la condition ψ faiblement * continu au sens indiqué ci dessous ;*

*la topologie faible * sur K<<X>> et la topologie localement convexe définie par la semi norme* $\|S\|_F = \max_{f \in F} |< S, f >|$ *où* F *est un élément de l'ensemble F_p des sous ensembles finis de* $C(Z_p \to K)$ *ainsi, ψ est faiblement * continu si et seulement si pour $\varepsilon>0$ et* $F \in F_p$, *il existe* $G_\varepsilon \in F_p$ *et $\eta_\varepsilon>0$ tel que* $\|S\|_{G\varepsilon} < \eta_\varepsilon$ *implique* $\|\psi(S)\|_F < \varepsilon$.

3.4.3.3 Description des endomorphismes continus de coalgèbre de $C(Z_p \to K)$

Soit $\varphi \neq 0$ un endomorphisme continu de coalgèbre de $C(Z_p \to K)$.

On a vu que $\varphi(B_0) = \sum_{l \geq 0} \alpha^l B_l$ *avec* $|\alpha|<1$ et $\|\varphi\| = 1$

en posant ${}^t\varphi(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ on a $b_n = < {}^t\varphi(X) , B_n >$, $|b_n| \leq 1, \forall n \geq 0$

en particulier $b_0 = < X , \varphi(B_0) > = \alpha$, $|\alpha|<1$

de plus ${}^t\varphi(X) = u \in$ N = M + $X\Lambda[[X]]$ et ${}^t\varphi = \psi_u$ car ${}^t\varphi$ est faiblement * continu.

Théorème 10

Il y a une correspondance bijective entre l'ensemble End.coalg($C(Z_p \to K)$) des endomorphismes continus de coalgèbres de $C(Z_p \to K)$ *et l'idéal maximal* N = M + $X\Lambda[[X]]$ de *l'anneau des séries formelles $\Lambda[[X]]$* .

De plus, cette correspondance est un isomorphisme de monoides de End.coalg($C(Z_p \to K)$) muni de la loi de composition des opérateurs linéaires et N muni de la loi de substitution des séries formelles .

Preuve

i) soit $\varphi \in$ *End.coalg*($C(Z_p \to K)$) , ${}^t\varphi(X) \in$ N (vu précédemment) .

Réciproquement, soit $0 \neq u = \sum_{n \geq 0} b_n X^n = \alpha + \sum_{n \geq 1} b_n X^n \in$ N, pour $n \geq 0$, $u^n = \sum_{m \geq 0} b_m(n) X^m$

où $b_m(n) = \sum_{m_1+m_2+...+m_n=m} b_{m_1}.....b_{m_n}$ et $\lim_{n\to+\infty} b_m(n) = 0$, $\forall m \geq 0$

ainsi, pour $m \geq 0$, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} b_m(n)B_n = \varphi(B_m)$ converge dans $C(Z_p \to K)$. de plus,

$\| \varphi(B_m)\| \leq 1$.

par linéarité et continuité on définit un endomorphisme linéaire continu φ de $C(Z_p \to K)$ tel que $\| \varphi \| \leq 1$

comme $b_0(n)=\alpha^n$, on a $\varphi(B_0)= \sum_{n\geq 0} b_0(n)B_n = B_0 + \sum_{n\geq 1} \alpha^n B_n = \chi_\alpha$

donc $\|\varphi(B_0)\|=1$ et $\| \varphi\|=1$

d'autre part pour $m \geq 0$, $i , j \geq 0$, on a $b_m(i+j) = \sum_{s+t=m} b_s(i)b_t(j)$

donc $c \circ \varphi(B_m) = \sum_{n\geq 0} b_m(n)c(B_n) = \sum_{n\geq 0} b_m(n) \sum_{i+j=n} B_i \otimes B_j = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} b_m(i+j)B_i \otimes B_j$

$$= \sum_{s+t=m}\sum_{i\geq 0} b_s(i)B_i \otimes \sum_{j\geq 0} b_t(j)B_j = \sum_{s+t=m} \varphi(B_s)\otimes\varphi(B_t) = (\varphi\otimes\varphi)\circ c(B_m)$$

par linéarité et continuité on obtient $c \circ \varphi = (\varphi\otimes\varphi)\circ c$

cet endomorphisme continu de coalgèbre est bien déterminé par u et on a ${}^t\varphi(X) = u$

ii) soient φ_1 et φ_2 deux endomorphismes continus de coalgèbre de $C(Z_p \to K)$ et soient u et v les séries formelles associées .

la composition $\varphi_1 \circ \varphi_2$ des opérateurs φ_1 et φ_2 définit encore un endomorphisme de coalgèbre .

d'autre part on a ${}^t(\varphi_1 \circ \varphi_2)(X) = {}^t\varphi_2({}^t\varphi_1(X)) = {}^t\varphi_2(u) = u \circ v$

donc l'élément ${}^t(\varphi_1 \circ \varphi_2)(X)$ de N est associé au composé $\varphi_1 \circ \varphi_2$ et ${}^t(\varphi_1 \circ \varphi_2)(X) = u \circ v$.

Ainsi, l'application $\varphi \to {}^t\varphi(X) = u$ est un isomorphisme de monoides. □

Remarques

Un endomorphisme φ de coalgèbre de $C(Z_p \to K)$ est bijectif si et seulement si sa série formelle associée ${}^t\varphi(X) = u \in N$ est inversible pour la loi de substitution des séries .

Théorème 11

Soit K un corps valué complet ($Q_p \subset K$) qui n'est pas sphériquement complet alors le transposé ${}^t\psi$ de tout endomorphisme continu ψ d'algèbre de K<<X>> est un endomorphisme de coalgèbre de ***C(Z**$_p$**→** *K)*

Preuve

On suppose que *K* est non sphériquement complet ; ($Q_p \subset K$) alors l'espace *K*<<X>>' dual de *K*<<X>> est égal à $C(Z_p \to K)$.

(Relation de réflexivité de $C(Z_p \to K)$ '' résultat de M .Van der Put '')

Ainsi, il suffit de montrer que si $\psi \in \mathrm{Alg}(K\langle\langle X\rangle\rangle)$ alors ${}^t\psi \in End.coalg(C(Z_p \to K))$

On a $\psi \circ {}^tc = {}^tc \circ (\psi \otimes \psi)$ alors, pour $S,T \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ et $f \in C(Z_p \to K)$ on a

$$\begin{aligned}
\langle {}^tc \circ (\psi \otimes \psi)(S \otimes T), f\rangle &= \langle (\psi \otimes \psi)(S \otimes T), c(f)\rangle \\
&= \langle \psi(S) \otimes \psi(T), \sum_{j\geq 1} f_j \otimes g_j \rangle \\
&= \sum_{j\geq 1} \langle S, {}^t\psi(f_j)\rangle \langle T, {}^t\psi(g_j)\rangle \\
&= \langle (S \otimes T), ({}^t\psi \otimes {}^t\psi) \circ c(f)\rangle
\end{aligned}$$

ainsi,
$$\begin{aligned}
\langle \psi \circ {}^tc(S \otimes T), f\rangle &= \langle S \otimes T, c \circ {}^t\psi(f)\rangle \\
&= \langle {}^tc \circ (\psi \otimes \psi)(S \otimes T), f\rangle \\
&= \langle S \otimes T, ({}^t\psi \otimes {}^t\psi) \circ c(f)\rangle
\end{aligned}$$

donc : $\langle S \otimes T, (c \circ {}^t\psi - ({}^t\psi \otimes {}^t\psi) \circ c)(f)\rangle = 0 \ , \ \forall S,T \in K\langle\langle X\rangle\rangle$

de plus si $g \in C(Z_p \to K) \hat{\otimes} C(Z_p \to K)$, on a $g = \sum_{(m,n)\in N\times N} a_{m,n} B_m \otimes B_n$, alors si $\langle S \otimes T, g\rangle = 0$,

pour tous $S,T \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ on a $\langle X^m \otimes X^n, g\rangle = a_{m,n} = 0 \ \forall m,n \geq 0$ c'est à dire que $g = 0$

il en résulte que : $(c\circ{}^t\psi - ({}^t\psi \otimes {}^t\psi) \circ c)(f) = 0$, pour tout f donc $c\circ{}^t\psi = ({}^t\psi \otimes {}^t\psi) \circ c$.

□

Corollaire 5

Soit K un corps valué complet (extension de Q_p) qui est algébriquement clos et non sphériquement complet, alors tout endomorphisme d'algèbre ψ de l'algèbre $A_b(D^-(0,1))$ des fonctions analytiques bornées dans le disque ouvert $D^-(0,1)$ dans K est continu et est de la forme

$\psi(g) = g \circ u$, où u est une fonction analytique $u : D^-(0,1) \to D^-(0,1)$

3.4.4 Opérateurs Ombraux et opérateurs d'Appell

Opérateurs Ombraux

Théorème 12

Soit $\psi_u : K\langle\langle X\rangle\rangle \to K\langle\langle X\rangle\rangle$

ψ_u est un automorphisme de l'algèbre $K\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries formelles à coefficients borné si et seulement s'il existe un élément $u \in N = M + X\Lambda[[X]]$ (u inversible dans $(N, \circ)$) tel que :

$\psi_u(S) = S \circ u$

de plus :

si $u = \sum_{n\geq 0} b_n X^n \in$ N et S = $\sum_{n\geq 0} a_n X^n \in$ K<<X>> alors :

ψ_u *(S)* = $S \circ u$ = $\sum_{n\geq 0} \gamma_n X^n$ où $\gamma_n = \sum_{l\geq 0} a_l b_n(l)$ et b_i *(l)* = $\sum_{i_1+i_2+...+i_l=i} b_{i_1}.....b_{i_l}$.

Proposition 4

Soit $\varphi \in$ *End.coalg(*C($Z_p \to K$)*)*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) ${}^t\varphi$ *est un automorphisme* de *K*<<X>>
2) ${}^t\varphi(S) = S \circ u$ *avec* $|b_1| = 1$ où $u = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$
3) $\varphi(B_m) = \sum_{l\geq 0} \alpha_{m,l} B_l$ *avec* $\lim_{l\to+\infty} \alpha_{m,l} = 0$

Définition 10

Un opérateur qui vérifie ces propriétés est dit opérateur Ombral

Opérateurs d'Appell

Proposition 5

Soit $Q \in W(Z_p \to K)$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $Q = g_u(\Delta) = \sum_{n\geq 0} b_n \Delta^n$
2) ${}^tQ(u) = u * \theta_1(Q)$ *avec* $u \in M(Z_p \to K)$, *et* θ_1 *défini précédemment*
3) $Q\Delta = \Delta Q$

Définition 11

Un opérateur qui vérifie ces propriétés et qui est inversible dans $W(Z_p \to K)$ *est dit opérateur d'Appell .*

Remarque

La condition Q inversible (d'inverse continu) dans $W(Z_p \to K)$ s'exprime par la condition :

$\|Q\| = \text{Sup}\,|b_n| = |b_0| \neq 0$

3.5 *Reformulation en termes de suites*

Soit K un sur corps complet ultramétrique de Q_p.

L'espace des suites bornées $l^\infty(IN, K)$ muni du produit de convolution $*$ a une structure d'algèbre commutative, intègre appelé algèbre de convolution .

pour $u \in l^\infty(IN, K)$ on note $f_u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) X^n \in K[[X]]$

$(u_1 * u_2)(n) = \sum_{i+j=n} u_1(i) u_2(j)$

L'espace $C(Z_p \to K)$ est muni de la base $(B_n)_{n \geq 0}$

$\{ f_j \ , \ j \in IN \}$ est une base de $C(Z_p \to K)'$ duale de la base $(B_n)_{n \geq 0}$

Dual de $C(Z_p \to K)$

Une forme linéaire u sur $C(Z_p \to K)$ est déterminée par ses valeurs sur la base $(B_n)_{n \geq 0}$

$< u / B_n > = u(n)$

le dual $C(Z_p \to K)'$ de $C(Z_p \to K)$ est muni d'une structure d'algèbre par isomorphisme avec l'algèbre de convolution

$< u_1 * u_2 / B_n > = \sum_{j=0}^{n} \langle u_1 / B_j \rangle \langle u_2 / B_{n-j} \rangle$

ainsi, $M(Z_p \to K)$ est isomorphe à ($l^\infty(IN, K)$, $*$)

3.5.1 *Endomorphisme de* $C(Z_p \to K)$

L($C(Z_p \to K)$) est l'algèbre (pour la composition) des endomorphismes continus de l'espace de Banach $C(Z_p \to K)$. Un élément Q de L($C(Z_p \to K)$) est déterminé par son action sur la base $(B_n)_{n \geq 0}$, on a

$Q\, B_n(x) = b_n(Q, x) \in C(Z_p \to K)$

$$\begin{tikzcd} M(Z_p \to K) \arrow[drr, leftrightarrow, "\sim\ \text{Isomorphisme}"'] & \approx W(Z_p \to K) & \approx K\langle\langle T \rangle\rangle \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Correspondance}"] \\ & & l^\infty(IN, K) \end{tikzcd}$$

l'opérateur de différence $\Delta \in W(Z_p \to K)$

$\Delta B_n = B_{n-1}$

$\Delta B_q = f_1 * B_q$

En effet :

$f_1 * B_q = \sum_{k=0}^{q} f_1(k) B_{q-k}$ avec $f_j(n) = 1$ pour $j=n$ et $f_j(n)=0$ sinon.

pour $u \in l^\infty(IN, K)$;

$f_u(\Delta) = \sum_{j\geq 0} u(j)\Delta^j \in W(Z_p \to K)$

$f_u(\Delta).B_q = u * B_q$ et $f_u(\Delta)B_n = \sum_{j=0}^{n} u(j) B_{n-j}$

Théorème 13

Soit $\Phi : (l^\infty(IN, K), *) \to (l^\infty(IN, K), *)$

Φ est un automorphisme de l'algèbre de convolution $(l^\infty(IN, K), *)$ si et seulement s'il existe une suite bornée u d'ordre 1 telle que :

$\Phi(v)=vou$

$(v_1 * v_2)ou = (v_1ou) * (v_2 ou)$, $u = vou^{<-1>}$ est l'inverse .

- les opérateurs de la forme $Q=g_u(\Delta)$ avec ord u=0 (Q inversible dans $W(Z_p \to K)$) forment un groupe appelé groupe des opérateurs d'Appell .
- les automorphismes Φ de $(l^\infty(\mathrm{IN}, K), *)$ sont donc de la forme $v \to v \circ u$, ord u=1, les opérateurs dont ils sont adjoints sont appelés opérateurs ombraux .

3.5.2 Opérateurs d'Appell

Proposition 6

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $Q = g_u(\Delta) = \sum_{n\geq 0} u(n)\Delta^n$

2) $Q\Delta = \Delta Q$

3) $\Delta(u_n(Q,x))=u_{n-1}(Q,x)$ et $d^\circ u_n(Q,x) \leq n$

4) $QB_q = u * B_q$

5) $Q^t v = v * u$

en effet :

pour $v \in (\, l^\infty (IN, K), * \,)$ et $g_u(\Delta) \in W(Z_p \to K)$ on a :

$$<v / g_u(\Delta)B_n> = <v / \sum_{j=0}^{n} u(j)B_{n-j}> = \sum_{j=0}^{n} u(j)v(n-j) = <u * v / B_n>$$

Définition 12

Les opérateurs $Q = g_u(\Delta)$ inversibles dans $W(Z_p \to K)$ sont les opérateurs d'Appell . La suite $u * B_q$ est dite suite d'Appell.

Corollaire 6

Les opérateurs d'Appel forment un sous groupe commutatif (pour la composition) de l'algèbre $W(Z_p \to K)$.

3.5.3 Opérateurs Ombraux

Pour $u \in (\, l^\infty (IN, K), * \,)$, ord $u \geq 1$ et $v \in (\, l^\infty (IN, K), * \,)$

$g_v(g_u(x))$ définit une série formelle notée $g_{vou}(x)$

$g_{f_k ou}(x) = g_u^{\,k}(x)$

en notant u^{*k} la puissance k$^{\text{ème}}$ de u dans $(\, l^\infty (IN, K), * \,)$

$f_k ou = u^{*k}$

$g_u^{\,k}(x) = \sum_{n \geq k} c_{n,k}(u) x^n$

$f_k \circ u\,(n) = c_{n,k}(u)$

$v \circ u = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)(f_k ou)$ et $v \circ u\,(n) = \sum_{k=1}^{n} v(k) c_{n,k}(u)$

soit Φ un automorphisme de $(\, l^\infty (IN, K), * \,)$

Φ est l'adjoint d'un opérateur de $W(Z_p \to K)$

$\Phi(v) = v \circ u$ avec ord $u = 1$

soit $a_q(x) = QB_q$

$<v / a_n(x)> = <Q^t v / B_n> = <v \circ u / B_n>$

$= (v \circ u)(n) = \sum_{k=1}^{n} v(k) c_{n,k}(u)$

$= \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}(u) < v / B_k >$

$= < v / \sum_{k=1}^{n} B_k c_{n,k}(u) >$

d'où $a_n(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k c_{n,k}(u) = B_q \circ u(n)$

Proposition 7

Soit $Q \in W(Z_p \to K)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) *Q^t est un automorphisme de $(l^\infty(IN, K), *)$*
2) *$Q^t v = v \circ u$, ord $u=1$*
3) *$QB_q = B_q \circ u$, ord $u=1$*
4) *$QB_q = a_q(x)$*
5) *$a_q(x) = \sum_{k=1}^{n} B_q c_{n,k}(u)$*

Définition 13

Un opérateur qui vérifie ces propriétés est dit un opérateur ombral.

La suite $a_q(x) = B_q \circ u$ est dite suite associée à Q.

Corollaire 7

Les opérateurs ombraux forment un sous groupe de l'algèbre $W(Z_p \to K)$.

3.5.4 Opérateurs de Sheffer

Soit G_1 le groupe des opérateurs d'Appell

$Q \in G_1 \Leftrightarrow \exists w$, ord $w = 0$, $Q = g_w(\Delta)$

$\Leftrightarrow QB_q = w * B_q$

$\Leftrightarrow Q^t v = w * v$

soit G_2 le groupe des opérateurs ombraux

$Q \in G_2 \Leftrightarrow \exists u$, ord $u=1$, $QB_q = B_q \circ \overline{u}$

$\Leftrightarrow \exists u$, ord $u=1$, $Q^t v = v \circ \overline{u}$

soit G le groupe des opérateurs inversibles dans $W(\mathrm{Z}_p \to K)$

Proposition 8

Soit $Q_1 \in \mathrm{G}_1$, $Q_2 \in \mathrm{G}_2$ *et* $Q = Q_1 \circ Q_2$

Alors il existe $\Phi_1 \in \mathrm{G}_1$ *tel que* $Q = Q_2 \circ \Phi_1$

Preuve

$QB_n = Q_1(\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}(\overline{u})B_k) = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}(\overline{u})(w * B_q)(k) = (w * B_q) \circ \overline{u}\,(n)$

D'où :

$QB_q = (w * B_q) \circ \overline{u} = (w \circ \overline{u}) * (B_q \circ \overline{u}) = w_1 * (B_q \circ \overline{u}),\ \ w_1 = B_q \circ \overline{u}$

Comme :

$Q_2 \circ g_{w1}(\Delta)B_n = Q_2(w_1 * B_q)(n) = Q_2 \sum_{j=0}^{n} w_1(n-j)B_j = \sum_{j=0}^{n} w_1(n-j)(B_q o \overline{u})(j) = w_1 *$

$(B_q \circ \overline{u})(n)$

$Q = g_w(\Delta) \circ Q_2 = Q_2 \circ g_{w1}(\Delta)$.

□

Corollaire 8

Si $Q_2 = Q_u$, $Q_u B_q = B_q \circ \overline{u}$ *alors* :

$g_w(\Delta) \circ Q_u = Q_u \circ g_{wo\overline{u}}(\Delta)$

$g_{wo\overline{u}}(\Delta) = Q_{\overline{u}} \circ g_w(\Delta) \circ Q_u$.

Définition 14

Un opérateur de Sheffer est le composé d'un opérateur d'appell et d'un opérateur ombral. Si Q est un opérateur de Sheffer, la suite $S_q(x) = QB_q$ *est dite suite de Sheffer.*

Corollaire 9

Les opérateurs de Sheffer forment un groupe G_3 *et* $\mathrm{G}_3 = \mathrm{G}_1.\ \mathrm{G}_2 = \mathrm{G}_2.\ \mathrm{G}_1$

Composition d'opérateurs de Sheffer

Soit $H_0 = \{w \in (l^\infty (\mathrm{IN} , K) , *) , \text{ord } w = 0 \}$

$H_1 = \{u \in (l^\infty (\mathrm{IN} , K) , *) , \text{ord } u = 1 \}$

$H_0 \times H_1 \rightarrow G_3$

$(w * u) \rightarrow Q_{w,u} = g_w(\Delta) \circ Q_u$

$$
\begin{aligned}
Q_{w1,u1} \circ Q_{w2,u2} &= g_{w1}(\Delta) \circ Q_{u1} \circ g_{w2}(\Delta) \circ Q_{u2} \\
&= g_{w1}(\Delta) \circ g_{w2ou1}(\Delta) \circ Q_{u1} \circ Q_{u2} \\
&= g_{w1 * (w2ou1)}(\Delta) \circ Q_{u2ou1} \\
&= Q_{w3,u3}
\end{aligned}
$$

avec $w_3 = w_1 * (w_2 \circ u_1)$, $u_3 = u_2 \circ u_1$

si on pose $w_1 = a_1 \circ u_1$, $a_1 = w_1 \circ \overline{u}_1$ alors $w_3 = (a_1 * w_2) \circ u_1$.

Bibliographie

[1] B. Benzaghou, 'Algébres de Hurwitz', prépublication ,Institut de maths. USTHB, 1999.

[2] N. Boccara, 'Analyse Fonctionnelle', Ellipses, 1984.

[3] B. Diarra, 'Base de Mahler et autres', Séminaire d'analyse, 1994-95 (Aubière), exposé no. 16, 18pp., Sémin. Anal. Univ. Blaise Pascal (Clermont II), 10, Université Blaise Pascal (Clermont II), Clermont – Ferrand, 1997.

[4] B. Diarra, 'The Continuous coalgebra endomorphisms of C(Zp, K),' Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin, 2002.

[5] L.Grusson and M.van der Put, 'Banach Spaces', Table Ronde d'analyse non archimédienne (1972 Paris), Bulletin de la Societe Mathematique de France, Mémoire 39-40, 1974, p. 55-100.

[6] A. Junod, 'Congruences par l'analyse p-adique et le calcul symbolique', Thése, 2003.

[7] K. Mahler, 'An Interpolation Series for Continuous Functions of a p-adic Variable', Journal Fur reine and angewandte Mathematik, vol. 199, 1958, p. 23-24.

[8] A.M. Robert, ' A Course in p-adic Analysis',Springer-Verlag, New York, 2000.

[9] S. Romann, 'The Umbral Calculus', Academic Press, New York, 1984.

[10] G.C. Rota, 'Finite Operator Calculus', Academic Press, New York, 1975.

[11] W.H. Schikhof, 'Ultrametric Calculus': An Introduction to p-adic Analysis', Cambridge University Press, 1984.

[12] L. Van Hamme 'Continuous Operators which commute with Translations, on the Space of Continuous Functions on Zp', in 'p-adic Functional Analysis', Bayond , Martinez-Maurica. De Grande –De Kimpe (editors), p. 75-88, Marcel Dekker, 1992.

[13] Ann Verdoodt, 'Normal Bases for Non Archimedean Spaces of Continuous Functions', Publication Mathématique, Vol. 37, 1993, p. 403-427.

[14] Ann Verdoodt, 'Non Archimedean Umbral Calculus', Anales Mathématique Blaise Pascal, Vol 5, no 1,1998, p. 55-73.

[15] Ann Verdoodt, Orthnormal Bases for Non Archimedean Banach Spaces of Continuous Functions'.