N° d'ordre : 33/2008 - M/ MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse : Équations aux Dérivées Partielles

Par

MENNI Saliha

THÈME

STABILISATION DU SYSTÈME ANISOTROPE DE LA THERMOÉLASTICITÉ PAR LE FEEDBACK NATUREL

Soutenu publiquement, le 30/06 /2008, devant le jury composé de :

Mr.	**D. TENIOU**	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	**A. HEMINNA**	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	**T. ALI ZIANE**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Melle.	**D. HAMROUN**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	**A. KHEMMOUDJ**	Docteur d'état	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Melle.	***O. Z*AIR**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à mon ***Directeur*** *de thèse, Professeur* ***A. Heminna****, pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissante pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

Je tiens à avouer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus vifs à Monsieur ***D. Teniou****, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

Mes remerciements tout aussi vifs vont à Messsieurs ***T. Ali ziane*** *et* ***A. Khemmoudj*** *et Mesdames* ***O. Zair*** *et* ***D. Hamroun*** *qui ont accepté de faire partie de mon jury.*

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.

Stabilisation du système anisotrope de la thermoélasticité par le feedback naturel

Résumé

Nous étudions dans ce mémoire la stabilisation du système anisotrope de la thermoélasticité avec une condition (naturelle) de Neumann sur une partie du bord, et une condition de Dirichlet sur l'autre partie, à l'aide de feedbacks non linéaires, l'un interne et l'autre frontière. La démarche utilisée consiste à montrer la stabilisation exponentielle du système linéaire en établissant une inégalité intégrale, obtenue par la technique de Bey et al [1]; la stabilisation du système non linéaire s'en déduit grâce aux résultats de S. Nicaise [23].

Mots-clés : Élasticité, thermoélasticité, stabilisation, feedback, anisotrope.

Table des matières

Introduction

On peut dater les débuts de l'élasticité à 1678, avec la célèbre loi de Hooke (c'est-à-dire, le tenseur des contraintes est une fonction linéaire du tenseur des déformations), c'est une loi qui régit les petites déformations.
L'élasticité se trouve aujourd'hui à la croisée de disciplines variées et intéresse aussi bien les mathématiciens que les physiciens ou les mécaniciens.

La résolution des problèmes de mécanique des milieux continus exige la connaissance de lois mathématiques modélisant le comportement local du matériau sous l'action des contraintes auxquelles il est soumis; ces lois vont relier les quantités σ_{ij} définissant l'état des contraintes, aux quantités ε_{ij} caractérisant la déformation.
De nombreux phénomènes apparaissant en mécanique sont modélisés par des équations aux dérivées partielles qui prennent en compte les différentes caractéristiques du problème.
Dans notre étude, nous nous intéressons à un problème de contrôle qui est la stabilisation du système anisotrope(1) de la thermoélasticité par des fonctions non linéaires du feedback(2) naturel.

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^2. On note $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)^T$ la normale unité sortante.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé on pose : $m(x) = x - x_0$; $x \in \mathbb{R}^n$ et on considère la partition de la frontière Γ (voir Figure.1) suivante :

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma : \quad m(x).\nu(x) \leq 0\}, \tag{0.0.1}$$

$$\Gamma_2 = \{x \in \Gamma : \quad m(x).\nu(x) > 0\}. \tag{0.0.2}$$

Afin d'éviter des problèmes de régularité des solutions là où les conditions au bord changent, nous supposons que

$$\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \varnothing. \tag{0.0.3}$$

(1) Anisotrope - Se dit d'un corps dont les propriétés physiques ou mécaniques varient selon les directions.

(2) Le feedback (La rétroaction) est l'action en retour d'un effet sur le dispositif qui lui a donné naissance. C'est à dire que la sortie (à une date antérieure) fait partie des éléments de la commande du dispositif.

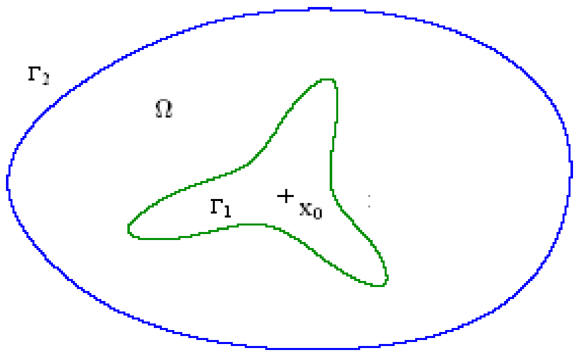

Figure. 1. Un exemple de domaine Ω.

Comme nous imposons une condition au bord de Dirichlet pour la température θ et des conditions mixtes pour le déplacement u (voir le système $(\mathcal{P}_1)$ ci-dessous), le problème de régularité de la solution de notre système se réduit à celui du système de l'élastodynamique. Nous renvoyons donc à [4] pour le traitement de cas $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 \neq \varnothing$ (cas des polygones).

Le problème étudié est le système anisotrope de la thermoélasticité avec des feedbacks interne et frontière non linéaires :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} u'' - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta + f(u') = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta div u' = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma(u).\nu + au + g(u') = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0,\ u'(x,0) = u_1,\ \theta(x,0) = \theta_0, & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

$u(x,t)$: déplacement du point $x \in \Omega$ à l'instant t.

$\theta(x,t)$: température du point $x \in \Omega$ à l'instant t.

$\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))_{1 \leq i,j \leq n}$: tenseur des contraintes :

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u),$$

(avec la convention de sommation par rapport aux indices répétés).

$\varepsilon(u)$ est le tenseur linéarisé des déformations donné par :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Les coefficients a_{ijkl} sont dans l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ et vérifient la condition de symétrie suivante:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad \text{sur} \quad \Omega$$

et satisfont la condition d'ellipticité suivante (avec un certain $\delta > 0$) :

$$a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \delta\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \text{sur } \Omega \tag{0.0.4}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}.
Les composantes du champ vectoriel $div\sigma(u)$ sont données par :

$$(div\sigma(u))_i = \partial_j \sigma_{ij}(u), \quad i = 1, ..., n.$$

Les paramètres de couplage α et β sont supposés strictement positifs.
La fonction $a \equiv a(x)$ est non négative sur Γ_2 et $a(x) \in C^1(\Gamma_2)$.
Les fonctions $g(u) = (g_1(u), ..., g_n(u))^T$ et $f(u) = (f_1(u), ..., f_n(u))^T$ sont continues et satisfont

$$f(0) = g(0) = 0, \tag{0.0.5}$$

et les conditions de monotonie

$$(g(x) - g(y)).(x - y) \geq 0, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{0.0.6}$$

$$(f(x) - f(y)).(x - y) \geq 0, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{0.0.7}$$

La stabilisation du système de la thermoélasticité sans feedback a été analysée dans **"Lebeau, G. Zuazua"** [14] et peut ne pas être garantie pour certains domaines car l'amortissement produit par l'équation de la chaleur n'est pas suffisant. Dés lors il est naturel d'étudier la stabilisation de ce système en ajoutant d'autres termes d'amortissement. Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs. Citons les traveaux de : **Hansen, S.W.(1992), Liu, W.J, Zuazua, E.(2001), Munoz Rivera, J.E, (1993, 1997)** ([8, 17, 18, 19, 25, 26, 24])...etc.

En (2001) **Liu, W.J, et Zuazua, E.** [18], ont obtenu, dans le cas $f = 0$ un résultat de décroissance exponentielle, polynomiale ou logarithmique, pour certaines non linéarités de g.
Ils ont considéré le cas **isotrope**[(1)] avec une condition au bord qui n'est pas *naturelle*.
Le terme

$$\sigma(u).\nu$$

est remplacé par

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda + \mu)\, div(u)\, \nu$$

[(1)] Un corps est dit isotrope lorsqu'il présente les mêmes propriétés physiques dans toutes les directions.

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.
Remarquons que

$$\sigma_{ij}(u).\nu_j = \mu\frac{\partial u_i}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\, div\,(u)\,\nu_i + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\nu_j - \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\nu_i\right).$$

En (2005), dans [10] **Heminna et al.** ont généralisé ces résultats au cas **anisotrope,** avec $f \neq 0$, avec la condition au bord *naturelle,* c'est ce dernier travail qui répond à une question posée par **Liu, W.J, et Zuazua, E** dans leur article [18] que nous étudions dans notre mémoire.

La décroissance exponentielle du problème linéaire est établie en montrant des inégalités intégrales comme dans **Liu, W.J** [17] ou dans **Bey, R; Heminna, A; Loheac, JP**.[1], pour traiter le terme $(\sigma(u).\nu)$ en travaillant en **coordonnées locales.**

Le cas non linéaire se déduit du cas linéaire en utilisant le résultat théorique établi dans **S. Nicaise** [23]. Les résultats de [23] garantissent en fait que, si le système linéaire a une décroissance exponentielle, alors le système non linéaire est automatiquement stable, le taux de décroissance pouvant être exprimé en fonction des propriétés de la non linéarité. Rappelons que la démarche de [23] utilise le principe de Liu dans un cadre abstrait et une inégalité intégrale appropriée. Plus précisément le principe de Liu consiste à estimer l'énergie du système non linéaire direct en utilisant le système rétrograde linéaire avec donnée finale égale à la valeur finale de la solution du système non linéaire direct à donnée initiale nulle. Cette estimation se fait en utilisant la stabilité exponentielle du problème rétrograde linéaire et certaines inégalités intégrales.Dans ce travail on adopte le plan suivant :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et aux rappels de quelques notions de base d'analyse fonctionnelle, et quelques résultats préliminaires de géométrie intrinsèque pour les surfaces.

Dans le second chapitre, nous utilisons la technique de **Bey et al.** [1] qui permet de montrer la décroissance exponentielle de l'énergie du système anisotrope de la thermoélasticité par des contrôles interne et frontière linéaires. Ce chapitre comporte deux sections.

Dans la **section 2.1**, on étudie l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du système anisotrope de la thermoélasticité avec des contrôles interne et frontière linéaires, en utilisant la théorie des semi-groupes linéaires, et on s'intéresse dans la **section 2.2** à la stabilité exponentielle de l'énergie de ce système, en établissant une inégalité intégrale, obtenue par la technique de **Bey et al.** [1].

La stabilisation du système anisotrope de la thermoélasticité par des feedbacks interne et frontière **non linéaires** sera étudiée dans le troisième chapitre. Ce chapitre comporte trois sections.

Dans la **section 3.1**, on étudie l'existence et l'unicité des solutions du système, en utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires, ensuite, on s'intéresse dans la **section 3.2** à la régularité des solutions.

On va donner dans la **section 3.3** le résultat principal de stabilisation donné par le théorème 3.3.1 . Pour démontrer ce résultat on aura besoin de présenter le résultat théorique de **S. Nicaise** [23], qui est l'objet de la **sous-section 3.3.1.**

On montre, alors, dans la **sous-section 3.3.2** que la stabilisation du système non linéaire s'en déduit grâce au résultat de **S. Nicaise** (cf.[23]).

Les résultats exposés dans ce mémoire ont été obtenus par **Heminna. A, Nicaise. S, Sene. A** dans [10].

Chapitre 1

Rappels généraux et définitions

1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle

Nous n'avons pas l'intention de présenter ici la théorie des espaces de Sobolev en toute généralité. Nous allons simplement introduire les notions de base, suffisantes pour la compréhension de notre problème, en renvoyant à la bibliographie pour les démonstrations de ces notions de base, (par exemple pour les théorèmes de trace).
Les notions introduites dans cette section seront utilisées dans les chapitres ultérieurs; nous rappellerons au moment opportun les résultats les plus élaborés sur les espaces de Sobolev dont nous aurons besoin, (pour cette section voir [6, Chapitre 1]).

1.1.1 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on introduit les espaces suivants[(1)] :

1. $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions f mesurables telles que (p étant donné avec $1 \leq p \leq \infty$) :

$$|f|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \tag{1.1.1}$$

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess. \, |f(x)| < \infty \quad \text{si} \quad p = \infty, \tag{1.1.2}$$

Muni de la norme (1.1.1) si $p \neq \infty$ et (1.1.2) si $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach; si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondant à la norme (1.1.1) (où $p = 2$) est donné par

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) \, g(x) \, dx. \tag{1.1.3}$$

[(1)] Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

2. $\mathscr{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact dans Ω. Etant donné une suite $\varphi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$ on dira que $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ si :

   (i) $\exists K$ (compact) fixé tel que $K \subset\subset \Omega$, $supp\varphi_j \subset K$, $\forall j$;

   (ii) $\forall \alpha$, $D^\alpha \varphi_j \longrightarrow 0$ uniformément sur Ω où l'on a posé :

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi, \quad \alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n. \tag{1.1.4}$$

3. $\mathscr{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω c'est-à dire l'espace des formes $f : \varphi \longrightarrow (f, \varphi)$ linéaires continues sur $\mathscr{D}(\Omega)$ (c'est-à-dire, $(f, \varphi_\alpha) \longrightarrow 0$ si $\varphi_\alpha \longrightarrow 0$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$). On dira que $f_j \longrightarrow f$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ si $(f_j, \varphi) \longrightarrow (f, \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

4. Si $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ on définit $D^\alpha f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, (et cela $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$) par

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \text{avec} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \tag{1.1.5}$$

   En outre, l'application linéaire $f \longrightarrow D^\alpha f$ de $\mathscr{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ est continue.

Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

On appelle " espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ " que l'on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v| \ v \in L^p(\Omega), D^\alpha v \in L^p(\Omega), \ |\alpha| \le m\}. \tag{1.1.6}$$

Muni de la norme

$$\begin{aligned} |v|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} |D^\alpha v|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \qquad \text{si} \ \ 1 \le p < \infty, \\ |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{0\le|\alpha|\le m} |D^\alpha v|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{si} \ \ p = \infty. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Le cas $p = 2$ est fondamental, on posera

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega), \tag{1.1.8}$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \tag{1.1.9}$$

et on note

$$|v|_{m,\Omega} = (v, v)^{\frac{1}{2}}_{m,\Omega}$$

la norme correspondante.

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Premier théorème de traces

On prendra garde que, sauf en dimension 1, une fonction v de $H^1(\Omega)$ n'est pas nécessairement continue sur Ω, ni a fortiori sur $\overline{\Omega}$; on peut néanmoins, et c'est absolument essentiel pour les applications, définir la trace de v sur la frontière Γ de Ω [(1)]. Nous ferons l'hypothèse.

$$\begin{array}{c}\Omega \text{ est un ouvert borné dont la frontière } \Gamma \text{ est une variété de dimension } (n-1) \\ \text{continûment différentiable, } \Omega \text{ étant localement d'un seul côté de } \Gamma.\end{array} \tag{1.1.10}$$

On désigne par $\mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ l'espace des fonctions continûment différentiables dans $\overline{\Omega}$, on montre alors (voir par exemple Lions-Magenes [16, Chapitre 1]) que $\mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Pour $v \in \mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ on posera

$$\gamma_0 v = v_{/\Gamma} \ . \tag{1.1.11}$$

On note

$$L^2(\Gamma) = \{f| \ f \text{ mesurable et de carré sommable sur } \Gamma \text{ pour la mesure } d\Gamma\}$$

muni du produit scalaire

$$(f,g)_\Gamma = \int_\Gamma fg d\Gamma.$$

On montre alors (voir Lions-Magenes [16]).

Théorème 1.1.1 *Sous l'hypothèse (1.1.10), on peut définir de façon unique la trace $\gamma_0 v$ pour $v \in H^1(\Omega)$ de façon que $\gamma_0 v$ coïncide avec la définition usuelle (1.1.11) si $v \in \mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$; $\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$ et l'application $v \longrightarrow \gamma_0 v$ est linéaire continue de $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$.*

Remarque 1.1.1 *L'application $v \longrightarrow D^\alpha v$ est linéaire continue de $H^{|\alpha|+1}(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$; on peut donc définir*

$$\gamma_0(D^\alpha v)\,; \ \ |\alpha| \leq m-1 \ \text{si} \ v \in H^m(\Omega)\,. \tag{1.1.12}$$

En fait, puisque la connaissance de v sur Γ[(2)] entraîne celle de ses dérivées tangentielles sur Γ, il est préférable de remplacer l'ensemble des dérivées apparaissant dans (1.1.12) par les dérivées normales d'ordre $\leq m-1$

$$\gamma v = \left\{v_{/\Gamma} = \partial_0 v, \ \ \partial v/\partial \nu, ..., \partial^{m-1} v/\partial \nu^{m-1} \in \left(L^2(\Gamma)\right)^m \ \text{(des normales d'ordre quelconque) si } v \in H^m(\Omega\right.$$

[(1)] Plus généralement sur une variété régulière de dimension $n-1$ contenue dans $\overline{\Omega}$.

[(2)] Γ régulière voir l'hypothèse (1.1.10).

Remarque 1.1.2 *On désigne par $H_0^1(\Omega)$ le noyau de γ_0 ie*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v | \ v \in H^1(\Omega), \ \gamma_0 v = 0 \right\},$$

plus généralement

$$H_0^m(\Omega) = \{ v | \ v \in H^m(\Omega), \ \gamma v = 0 \}.$$

On a

$$H_0^m(\Omega) \text{ est un sous-espace fermé de } H^m(\Omega).$$

Donc $H_0^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la structure induite par celle de $H^m(\Omega)$.

Remarque 1.1.3 *On montre (cf.[16]) que $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$. Alors toute forme linéaire continue sur $H_0^m(\Omega)$ s'identifie à une distribution sur Ω.*
On désigne par $H^{-m}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^m(\Omega)$ dans cette identification, alors

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \left(= H^0(\Omega)\right) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega).$$

Afin de caractériser l'espace image de $H^1(\Omega)$ par γ_0, on introduit quelques notions supplémentaires.

Les espaces $H^s(\Omega)$, s non nécessairement entier

Dans le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^n$,

On désigne par $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées ie ($\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$: $|x|^k |D^\alpha f(x)| \underset{|x| \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$), on munit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ des semi-normes

$$\left\{ f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(|x|^k |D^\alpha f(x)| \right), \ k \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

On peut définir $H^m(\mathbb{R}^n)$ par la transformation de Fourier. Si v est une fonction continue à support compact, sa transformée de Fourier $\mathscr{F}(v)$ est définie par

$$\hat{v}(\xi) = \mathscr{F}(v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x \cdot \xi) \, v(x) \, dx, \ \text{ où } \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \quad \text{et} \quad x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i.$$

On peut définir $H^m(\mathbb{R}^n)$ (voir [16, Théorème 1.2]) par (1.1.6) ou par

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ v | \ v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \ \left(1 + |\xi|^2\right)^{m/2} \hat{v} \in L^2\left(\mathbb{R}_\xi^n\right) \right\}$$

où $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, muni de la topologie duale forte.
Alors il est naturel de poser la définition suivante :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ v | \ v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \ \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \hat{v} \in L^2\left(\mathbb{R}_\xi^n\right) \right\}$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$|v|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left|\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2}\hat{v}\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

qui est équivalente à celle définie par (1.1.9) lorsque $s = m$.
Lorsque $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ est identifié à son dual, on a

$$(H^s(\mathbb{R}^n))' \equiv H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 1.1.4 *Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ ont la propriété de "localisation" suivante :*

$$\begin{aligned}&\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ \varphi v\in H^s(\mathbb{R}^n),\quad \forall v\in H^s(\mathbb{R}^n)\ \text{ et l'application } v\longrightarrow\varphi v\\ &\text{est linéaire continue de } H^s(\mathbb{R}^n)\longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n).\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

Cette dernière propriété permet de définir $H^s(\Gamma)$, pour tout réel s.
Soit $\mathcal{O}_j$, $j = 1, ..., k$ une famille d'ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$, recouvrant Γ, tels que pour chaque j, il existe une application indéfiniment différentiable

$$x \to \varphi_j(x) = y$$

$$\text{de } \mathcal{O}_j \to \mathcal{Q} = \left\{y/\ y = \{y', y_n\} \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},\quad |y'| < 1,\quad -1 < y_n < 1\right\}$$

telle que φ_j soit inversible, l'application $y \to \varphi_j^{-1}(y) = x$ étant également indéfiniment différentiable de $\mathcal{Q} \to \mathcal{O}_j$; l'application φ_j envoyant

$$\mathcal{O}_j \cap \Omega \to \mathcal{Q}^+ = \{y/\ y\in\mathcal{Q},\ \ y_n > 0\},$$

(resp. $\mathcal{O}_j \cap \mathcal{C}\bar{\Omega} \to \mathcal{Q}^- = \{y/\ y \in \mathcal{Q},\ \ y_n < 0\}$, resp $\mathcal{O}_j \cap \Gamma \to \mathcal{Q} \cap \{y_n = 0\}$).
En outre, les relations de comptabilité suivantes ont lieu: si $\mathcal{O}_j \cap \mathcal{O}_i \neq \varnothing$,

il existe un homéomorphisme J_{ij} indéfiniment différentiable et à jacobien positif de $\varphi_i(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$ sur $\varphi_j(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$ tel que

$$\varphi_j(x) = J_{ij}(\varphi_i(x)),\qquad \forall x \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j.$$

Soit $\{\alpha_j\}$ une partition de l'unité sur Γ ayant les propriétés:

$$\begin{cases}\alpha_j \in D(\Gamma) = \text{ espace des fonctions indéfiniment différentiables sur } \Gamma,\\ \alpha_j \text{ à support compact dans } \mathcal{O}_j\cap\Gamma,\quad \sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j = 1 \text{ sur } \Gamma.\end{cases}$$

Si v est une fonction donnée sur Γ (par exemple sommable) on décompose

$$v = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j v,$$

puis l'on définit

$$\varphi_j^*(\alpha_j v)(y',0) = (\alpha_j v)\left(\varphi_j^{-1}(y',0)\right), \quad (y',0) \in \mathcal{Q} \cap \{y_n = 0\}.$$

Comme α_j est à support compact dans $\mathcal{O}_j \cap \Gamma$, la fonction $\varphi_j^*(\alpha_j v)$ est à support compact dans $\mathcal{Q} \cap \{y_n = 0\}$ et donc on peut considérer aussi $\varphi_j^*(\alpha_j v)$ comme définie dans $\mathbb{R}_{y'}^{n-1}$ en la prolongeant par zéro hors de $\mathcal{Q} \cap \{y_n = 0\}$.
L'application linéaire $v \to \varphi_j^*(\alpha_j v)$ est continue de $L^1(\Gamma) \to L^1\left(\mathbb{R}_{y'}^{n-1}\right)$ de $\mathscr{D}(\Gamma) \to \mathscr{D}\left(\mathbb{R}_{y'}^{n-1}\right)$ et se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $\mathscr{D}'(\Gamma) \to \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}_{y'}^{n-1}\right)$.
On pose alors la définition, valable pour s réel de signe quelconque

$$H^s(\Gamma) = \left\{v / \ \varphi_j^*(\alpha_j v) \in H^s\left(\mathbb{R}_{y'}^{n-1}\right), \quad j = 1, ..., k\right\}. \tag{1.1.14}$$

Grâce au caractère local de $H^s\left(\mathbb{R}_{y'}^{n-1}\right)$ (cf.(1.1.13)) on voit que la définition (1.1.14) est indépendante du choix du système de cartes locales $\left\{\mathcal{O}_j, \varphi_j\right\}$et de la partition de l'unité $\{\alpha_j\}$.
On peut ensuite prendre comme norme

$$|v|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^{k} \left|\varphi_j^*(\alpha_j v)\right|^2_{H^s\left(\mathbb{R}_{y'}^{n-1}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.15}$$

les différentes normes (1.1.15) sont équivalentes.
Deuxième théorème de traces

On peut maintenant compléter le théorème 1.1.1 par le

Théorème 1.1.2 *Sous les hypothèses du théorème 1.1.1, l'application $v \longrightarrow \gamma_0 v$ est linéaire continue et surjective de $H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Pour la preuve voir par exemple Lions-Magenes [16].

Théorème 1.1.3 $\mathscr{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ *est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Théorème 1.1.4 *L'application trace*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1: & H^2(\Omega) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ & v & \mapsto & \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \gamma_1 v = \partial_\nu v \end{array}$$

est linéaire continue et surjective.

La formule de Green pour le Laplacien

$$\forall u \in H^2(\Omega), \ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma v \partial_\nu u d\Gamma, \tag{1.1.16}$$

où $\partial_\nu u = \gamma_1 u$ est la dérivées normale de u sur $\partial\Omega = \Gamma$.

1.1.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit X un espace de Banach de norme notée $|\ .|_X$; on désigne par $L^p(0,T;X)$ ($p \geq 1$ ou $p = +\infty$) l'espace des (classes de) fonctions $t \longrightarrow f(t)$ mesurables de $]0,T[\longrightarrow X$ (pour la mesure dt), telles que

$$|f(t)|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T |f(t)|_X^p \, dt\right)^{1/p} < \infty, \quad (p \neq \infty),$$
$$|f(t)|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess. \, |f(t)|_X < \infty.$$

C'est un espace de Banach.

On désigne par $\mathscr{D}'(]0,T[;\ X)$ l'espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans X, défini par

$$\mathscr{D}'(]0,T[;X) = \mathscr{L}(\mathscr{D}(]0,T[);X),$$

où, de façon générale $\mathscr{L}(Y;X)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de $Y \longrightarrow X$, si $Y = X$ on note $\mathscr{L}(X)$.
À une fonction $f \in L^p(0,T;X)$ correspond une distribution $\tilde{f}$ sur $]0,T[$ à valeurs dans X, définie par

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_0^T f(t)\,\varphi(t)\,dt, \ \ \varphi \in \mathscr{D}(]0,T[),$$

(ce qui définit bien une application $\varphi \longrightarrow \tilde{f}(\varphi)$ linéaire continue de $\mathscr{D}(]0,T[) \longrightarrow X$). L'application $f \longrightarrow \tilde{f}$ est une injection; on identifiera f et $\tilde{f}$. En outre, si $f \longrightarrow 0$ dans $L^p(0,T;X)$ alors $\tilde{f} \longrightarrow 0$ dans $\mathscr{D}'(]0,T[;X)$, c'est-à-dire $\tilde{f}(\varphi) \longrightarrow 0, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(]0,T[)$. On a alors :

$$L^p(0,T;\ X) \subset \mathscr{D}'(]0,T[;X), \text{ avec injection continue.}$$

Pour $f \in \mathscr{D}'(]0,T[;X)$, on définit $d^k f/\,dt^k = f^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ par

$$f^{(k)}(\varphi) = (-1)^k f\left(\varphi^{(k)}\right), \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(]0,T[)$$

ce qui définit $f^{(k)}$ comme élément de $\mathscr{D}'(]0,T[;X)$. En outre, l'application $f \longrightarrow f^{(k)}$ est linéaire continue de $\mathscr{D}'(]0,T[;X)$ dans lui-même.

Soient X et Y deux espaces de Banach avec $X \subset Y$ avec injection continue à image dense. Soit $v \in L^p(0,T;X)$; alors $dv/\,dt \in \mathscr{D}'(]0,T[;X)$ donc, en particulier (puisque $\mathscr{D}'(]0,T[;X) \subset \mathscr{D}'(]0,T[;Y))$: $dv/\,dt \in \mathscr{D}'(]0,T[;Y)$.

Supposons alors que

$$dv/\,dt \in L^q(0,T;X), \qquad (1 \leq q \leq \infty).$$

Alors la fonction v est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0,T] \longrightarrow Y$.

En particulier, pour V, H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$, de norme respectives $|.|_V$, $|.|_H$ tels que :

$$V \subset H, \quad V \text{ dense dans } H,$$

identifiant H a son dual, on obtient :

$$V \subset H \subset V'.$$

Soit alors v avec

$$v \in L^2(0,T;\ V) \quad \text{et} \quad dv/\,dt \in L^2(0,T;\ V').$$

On montre alors (voir Lions-Magenes [16, Chapitre 1]) que, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la fonction $t \longrightarrow v(t)$ est continue de $[0,T] \longrightarrow H$.

1.2 Résultats préliminaires

1.2.1 Equations de la mécanique en élasticité linéaire

On considère un solide occupant dans l'espace un volume Ω, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec Γ_1 de mesure non nulle.
Ce solide est soumis à des forces de volume de densité $f = (f_i)$, $i = 1, ..., n$, et des forces de surface de densité $g = (g_i)$, $i = 1, ..., n$

$$f_i : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad \text{et} \quad g_i : \Gamma_2 \to \mathbb{R}^n.$$

Sous l'effet de ces forces, le solide se déforme. On note $u(M)$ le vecteur déplacement au point M de $\bar{\Omega}$. $u = (u_i)$, $i = 1, ..., n$, $u_i :\ \Omega \to \mathbb{R}$.
On suppose que la partie Γ_1 est fixée, (encastrée).
On considérera donc des champs de déplacement compatibles avec cette condition d'encastrement $(u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ i = 1, ..., n)$.

Loi de comportement

On désigne par $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u))$, $i, j = 1, ..., n$ avec

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

le tenseur des déformations linéarisé associé au champ de déplacement $u = (u_i)$.
On note $\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))$, $i, j = 1, ..., n$, le tenseur symétrique des contraintes.
La loi de comportement du matériau que l'on considère est celle de l'élasticité linéaire anisotrope qui se traduit par :

$$\sigma_{ij}(u) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u). \tag{1.2.1}$$

Les coefficients a_{ijkl} sont de classe $C^2(\bar{\Omega})$ et vérifient la condition de symétrie :

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl}, \tag{1.2.2}$$

et la condition d'ellipticité :

il existe une constante $\delta > 0$ telle que :

$$a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \delta\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1.2.3}$$

pour tout $x \in \Omega$, et tout tenseur symétrique ε_{ij}.

Espaces des déplacements admissibles

On note $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ l'espace des déplacements $v = (v_i)$, $i = 1, ...n$ appartenant à l'espace de Sobolev $(H^1(\Omega))^n$ et à trace nulles sur Γ_1 c'est-à-dire :

$$\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n = \left\{v \in \left(H^1(\Omega)\right)^n, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\right\}$$

$\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ est un espace de Hilbert pour la norme naturelle :

$$\|v\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2.4}$$

Inégalité de Korn (cf.[6])

Il existe une constante $C_1 > 0$ (dépendant seulement de Ω) telle que :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \sum_{i,j=1}^{n} \|\varepsilon_{ij}(u)\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n. \tag{1.2.5}$$

Inégalité de Poincaré

Il existe une constante $C_2 > 0$ (dépendant seulement de diamètre de Ω) telle que :

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega). \tag{1.2.6}$$

Normes équivalentes sur $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$

Les inégalités (1.2.5) et (1.2.6), montrent que :

$$u \to \|tr_n(\varepsilon(u)\varepsilon(u))\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|\varepsilon_{ij}(u)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.7}$$

définit sur $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$une norme équivalente à la norme définie par (1.2.4).

Inégalité de Jensen (cf.[27])

Définition 1.2.1 *Une fonction φ, à valeurs réelles, définie sur un intervalle $]a,b[$ où $-\infty \leq a < b \leq \infty$ est dite convexe si l'inégalité*

$$\varphi((1-\omega)s+\omega t) \leq (1-\omega)\varphi(s)+\omega\varphi(t) \tag{1.2.8}$$

est vérifiée pour tous nombres s, t, ω tels que $a < t < b$, $a < s < b$, $0 \leq \omega \leq 1$.
La relation (1.2.8) est aussi équivalente à l'inégalité

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} \tag{1.2.9}$$

pour tous $a < s < t < \tau < b$.

On a l'inégalité de Jensen suivante :

Lemme 1.2.1 *Soit $f \in L^1(\Sigma)$ (où $\Sigma \subset \mathbb{R}$ est une partie mesurable et $mes(\Sigma) < \infty$), et telle que $a < f(x) < b$ pour tout $x \in \Sigma$ (les cas $a = -\infty$ et $b = +\infty$ ne sont pas exclus). Soit φ une fonction convexe sur $]a,b[$, alors :*

$$\varphi\left(\frac{1}{mes(\Sigma)}\int_\Sigma f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{mes(\Sigma)}\int_\Sigma \varphi\circ f(x)\,dx. \tag{1.2.10}$$

Remarque 1.2.1 *Puisque, φ est concave si et seulement si $(-\varphi)$ est convexe, alors on a l'inégalité de Jensen pour les fonctions concaves φ*

$$\frac{1}{mes(\Sigma)}\int_\Sigma \varphi(f(x))\,dx \leq \varphi\left(\frac{1}{mes(\Sigma)}\int_\Sigma f(x)\,dx\right).$$

Preuve. On a :

$$a \leq \frac{1}{mes(\Sigma)}\int_\Sigma f(x)\,dx \leq b.$$

Posons $t = \dfrac{1}{mes\left(\Sigma\right)} \displaystyle\int_{\Sigma} f\left(x\right) dx$. Si β est la borne supérieure de l'ensemble des quotients de gauche de (1.2.9), où $a < s < t$, β est inférieur où égal à tous les quotients de droite de (1.2.9), pour tout $\tau \in \left]t, b\right[$. On en déduit que :

$$\varphi\left(s\right) \geq \varphi\left(t\right) + \beta\left(s - t\right); \quad \left(a < s < b\right).$$

En remplaçant s par $f\left(x\right)$, on trouve :

$$\varphi\left(f\left(x\right)\right) \geq \varphi\left(t\right) + \beta\left(f\left(x\right) - t\right), \text{ pour tout } x \in \Sigma. \tag{1.2.11}$$

La fonction φ étant continue, $\varphi \circ f$ est mesurable. En intégrant les deux membres de (1.2.11) par rapport à x, on obtient :

$$\int_{\Sigma} \varphi\left(f\left(x\right)\right) dx \geq mes\left(\Sigma\right) \varphi\left(t\right) + \beta \int_{\Sigma} f\left(x\right) dx - mes\left(\Sigma\right) \beta t.$$

D'où le résultat (1.2.10). ■

1.2.2 Traces sur des ensembles particuliers

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ assez régulière.

Lemme 1.2.2 *On considère l'espace :*

$$H^1\left(div\sigma, \Omega\right) = \left\{v \in \left(H^1\left(\Omega\right)\right)^n : div\sigma\left(v\right) \in \left(L^2\left(\Omega\right)\right)^n\right\}$$

que l'on munit de la norme :

$$\left\|v\right\|_{H^1\left(div\sigma, \Omega\right)} = \left(\left\|v\right\|^2_{\left(H^1\left(\Omega\right)\right)^n} + \left\|div\sigma\left(v\right)\right\|^2_{\left(L^2\left(\Omega\right)\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathscr{D}\left(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *est dense dans* $H^1\left(div\sigma, \Omega\right)$.

Preuve. Soit $v \in H^1\left(div\sigma, \Omega\right)$ et $f = v - div\sigma\left(v\right) \in \left(L^2\left(\Omega\right)\right)^n$, on considère $\left\{f_k\right\} \subset \mathscr{D}\left(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ telle que :

$$f_k \rightarrow f \quad \text{dans} \quad \left(L^2\left(\Omega\right)\right)^n$$

et $\left\{g_k\right\} \subset \mathscr{D}\left(\Gamma, \mathbb{R}^n\right)$ telle que :

$$g_k \rightarrow v/_{\Gamma} \quad \text{dans} \quad \left(H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)\right)^n$$

Soit v^k la solution du problème :

$$\begin{cases} v^k - div\sigma\left(v^k\right) = f_k, & \text{dans } \Omega, \\ v^k/_{\Gamma} = g_k, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On a : $\left\{v^k\right\} \subset \mathscr{D}\left(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$

$$\begin{cases} v^k - v - div\sigma\left(v^k - v\right) = f_k - f \\ \left(v^k - v\right)/_\Gamma = g_k - g \end{cases}$$

ce problème admet une solution unique $\left(v^k - v\right) \in \left(H^1(\Omega)\right)^n$ avec:

$$\left\|v^k - v\right\|_{(H^1(\Omega))^n} \leq C\left[\left\|f_k - f\right\|_{(L^2(\Omega))^n} + \left\|g_k - g\right\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n}\right]$$

d'où :

$$v^k \to v \quad \text{dans} \quad \left(H^1(\Omega)\right)^n$$

et

$$div\sigma\left(v^k\right) \to div\sigma(v) \quad \text{dans} \quad \left(L^2(\Omega)\right)^n$$

donc

$$v^k \to v \quad \text{dans} \quad H^1(div\sigma, \Omega).$$

■

Corollaire 1.2.1 *L'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & \mathscr{D}\left(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n\right) & \to & \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n \\ & v & \mapsto & (\sigma(v).\nu)/_\Gamma \end{array}$$

se prolonge de façon unique en une application continue :

$$H^1(div\sigma, \Omega) \to \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n$$

et pour tout élément $w \in \left(H^1(\Omega)\right)^n$ *et tout élément* $v \in H^1(div\sigma, \Omega)$, *on a :*

$$\langle \sigma(v).\nu, w\rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} = \int_\Omega (w.div\sigma(v) + \sigma(w) : \varepsilon(v))\, dx$$

$$\sigma(w) : \varepsilon(v) = tr(\sigma(w)\varepsilon(v)) = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}(w)\varepsilon_{ij}(v).$$

Preuve. Soit $w \in \mathscr{D}\left(\bar{\Omega}\right)$. D'après le théorème 1.1.2, pour tout $\varphi \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n$, il existe un relèvement $v \in \left(H^1(\Omega)\right)^n$ tel que $\varphi = v/_\Gamma$ et

$$\|v\|_{(H^1(\Omega))^n} \leq c\|\varphi\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n}.$$

On définit ainsi un relèvement R par :

$$R: \begin{array}{ccc} \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n & \rightarrow & \left(H^1(\Omega)\right)^n \\ \varphi & \mapsto & R\varphi = v \end{array}$$

avec

$$(R\varphi)_{/\Gamma} = \varphi.$$

Et soit

$$\mathcal{L}w: \begin{array}{ccc} \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \langle \mathcal{L}w, \varphi \rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} = \int_\Gamma (\sigma(w).\nu) R\varphi \, d\Gamma. \end{array}$$

Montrons d'abord que $\mathcal{L}w \in \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n$.
D'après la formule de Green, on a :

$$\begin{aligned} \left| \langle \mathcal{L}w, \varphi \rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} \right| &= \left| \int_\Gamma (\sigma(w).\nu) R\varphi \, d\Gamma \right| \\ &= \left| \int_\Omega (\sigma(w) : \varepsilon(R\varphi) + R\varphi div\sigma(w)) \, dx \right|. \end{aligned}$$

D'où il existe une constante positive C telle que :

$$\begin{aligned} \left| \langle \mathcal{L}w, \varphi \rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} \right| &\leq C \left[\|w\|_{(H^1(\Omega))^n} \|R\varphi\|_{(H^1(\Omega))^n} + \|div\sigma(w)\|_{(L^2(\Omega))^n} \|R\varphi\|_{(L^2(\Omega))^n} \right] \\ &\leq C \left[\|w\|_{(H^1(\Omega))^n} + \|div\sigma(w)\|_{(L^2(\Omega))^n} \right] . \|R\varphi\|_{(H^1(\Omega))^n}. \end{aligned}$$

De la continuité de R, on obtient :

$$\left| \langle \mathcal{L}w, \varphi \rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} \right| \leq C' \|w\|_{H^1(div\sigma,\Omega)} . \|\varphi\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n}$$

ce qui prouve que :

$$\mathcal{L}w \in \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n$$

et

$$\|\mathcal{L}w\|_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} \leq C \|w\|_{H^1(div\sigma,\Omega)}$$

donc l'application :

$$\mathcal{L} : w \in \mathscr{D}\left(\bar{\Omega}\right) \rightarrow \mathcal{L}w \in \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n$$

est bornée sur $\mathscr{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ muni de la norme de $H^1(div\sigma, \Omega)$; elle peut donc être prolongée d'après le lemme 1.2.2 par densité en une application linéaire continue de $H^1(div\sigma, \Omega)$ dans $\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n$. ■

Lemme 1.2.3 *Soit $H(div\sigma,\,\Omega)$ l'espace défini par :*

$$H(div\sigma,\Omega)=\left\{v\in\left(L^2(\Omega)\right)^n;\quad div\sigma(v)\in\left(L^2(\Omega)\right)^n\right\}$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{H(div\sigma,\Omega)}=\left(\|v\|^2_{(L^2(\Omega))^n}+\|div\sigma(v)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

on peut définir une application continue :

$$\begin{array}{ccc} H(div\sigma,\;\Omega) & \rightarrow & \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n\times\left(H^{-3/2}(\Gamma)\right)^n \\ v & \mapsto & \left(v_{/\Gamma},(\sigma(v).\nu)_{/\Gamma}\right). \end{array}$$

Preuve. * Soient $w\in\left(H^{3/2}(\Gamma)\right)^n$ et $\tilde{w}\in\left(H^2(\Omega)\right)^n$ (un relèvement continu) vérifiant :

$$\tilde{w}_{/\Gamma}=w\quad\text{et}\quad(\sigma(\tilde{w}).\nu)_{/\Gamma}=0.$$

Pour $v\in H(div\sigma,\Omega)$, on pose :

$$\langle\tilde{\gamma}_1 v,w\rangle=\int_\Omega(\tilde{w}div\sigma(v)-vdiv\sigma(\tilde{w}))\,dx.$$

On montre que le terme de droite ne dépend pas du relèvement $\tilde{w}$, il suffit pour cela de prouver que ce terme est nul si $\tilde{w}$ est un élément de $\left(H_0^2(\Omega)\right)^n$.
Ce terme est nul si $\tilde{w}$ est un élément de $\mathscr{D}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ et par densité il sera nul pour tout élément de $\left(H_0^2(\Omega)\right)^n$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |\langle\tilde{\gamma}_1 v,w\rangle| & \leq & \|\tilde{w}\|_{(L^2(\Omega))^n}\|div\sigma(v)\|_{(L^2(\Omega))^n}+\|v\|_{(L^2(\Omega))^n}\|div\sigma(\tilde{w})\|_{(L^2(\Omega))^n} \\ & \leq & C\left(\|div\sigma(v)\|_{(L^2(\Omega))^n}+\|v\|_{(L^2(\Omega))^n}\right)\|\tilde{w}\|_{(H^2(\Omega))^n} \\ & \leq & C\|w\|_{\left(H^{3/2}(\Gamma)\right)^n}\|v\|_{H(div\sigma,\Omega)} \end{array}$$

$\tilde{\gamma}_1 v$ est donc un élément de $\left(H^{-3/2}(\Gamma)\right)^n$ et on a :

$$\|\tilde{\gamma}_1 v\|_{\left(H^{-3/2}(\Gamma)\right)^n}\leq C\|v\|_{H(div\sigma,\Omega)}$$

$\tilde{\gamma}_1$ est donc continue de $H(div\sigma,\Omega)$ dans $\left(H^{-3/2}(\Gamma)\right)^n$, et si v est régulière on a :

$$\tilde{\gamma}_1 v=(\sigma(v).\nu)_{/\Gamma}.$$

* Soient $w\in\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n$ et $\tilde{w}\in\left(H^2(\Omega)\right)^n$ (un relèvement continu) vérifiant :

$$\tilde{w}_{/\Gamma}=0\quad\text{et}\quad(\sigma(\tilde{w}).\nu)_{/\Gamma}=w$$

pour $v \in H(div\sigma, \Omega)$, on pose :

$$\langle \gamma_0 v, w \rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} = \int_\Omega (v div\sigma(\tilde{w}) - \tilde{w} div\sigma(v))\, dx.$$

On vérifie, comme précédemment, que γ_0 est bien définie et on a :

$$|(\gamma_0 v, w)| \leq C \|w\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} \|v\|_{H(div\sigma,\Omega)}$$

$\gamma_0 v$ est donc un élément de $\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n$ et on a :

$$\|\gamma_0 v\|_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} \leq C \|v\|_{H(div\sigma,\Omega)}$$

γ_0 est continue de $H(div\sigma, \Omega)$ dans $\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n$ et si v est régulière on a :

$$\gamma_0 v = v_{/\Gamma}.$$

■

Remarque 1.2.2 *Pour tout élément $w \in (H^2(\Omega))^n$ et tout élément $v \in H(div\sigma, \Omega)$ on a :*

$$\langle v, \sigma(w).\nu \rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} - \langle \sigma(v).\nu, w \rangle_{\left(H^{-3/2}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{3/2}(\Gamma)\right)^n} = \int_\Omega (v div\sigma(w) - w div\sigma(v))\, dx.$$

1.3 Rappels sur les opérateurs et les semi-groupes

Dans ce paragraphe, on suppose que X est un espace de Hilbert. Sa norme est notée $\|.\|_X$., $L(X)$ ensemble des opérateurs linéaires et continues sur X.

Définition 1.3.1 *Un opérateur linéaire dans X est un couple (D, A) où D est un sous-espace vectoriel de X et $A : D \to X$ est une application linéaire. On dit que A est borné si $\|Ax\|_X$ reste borné lorsque $u \in \{x \in D,\ \ \|x\|_X \leq 1\}$. Dans le cas contraire, A est dit non borné.*

Définition 1.3.2 *Si (D, A) est un opérateur linéaire dans X, le graphe de A est un espace vectoriel défini par :*

$$G(A) = \{(u, f) \in X \times X, \quad u \in D, \quad f = Au\}.$$

Définition 1.3.3 *Un semi-groupe continu (fortement) sur X est une fonction*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & L(X) \\ & t & \longmapsto & T(t) \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

- $T(0) = I_X$,
- $T(t+s) = T(t)T(s)$, *pour tout* $t,\ s \geq 0$,
- $\lim\limits_{t \to 0^+} \|T(t)u - u\| = 0$, *pour tout* $u \in X$.

On dit que $\{T(t), \quad t \geq 0\}$ *est un semi-groupe de classe* $\mathscr{C}^0$ *ou un* $\mathscr{C}^0-$*semi-groupe.*

Théorème 1.3.1 *Soit* $\{T(t), \quad t \geq 0\}$ *un* $\mathscr{C}^0-$*semi-groupe sur un espace de Hilbert* X*. On a:*

- $\exists M \geq 1$, $\exists w > 0$ *telle que :*

$$\|T(t)\| \leq M \exp(wt), \qquad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

- *Soit* $w_0 = \inf\limits_{t>0} \left(\dfrac{1}{t} \ln \|T(t)\| \right)$, *on a :*

$$w_0 = \lim_{t \to +\infty} \left(\tfrac{1}{t} \ln \|T(t)\| \right)$$

w_0 *est appelé le type du semi-groupe* $T(t)$.

Définition 1.3.4 *Soit* $\{T(t), \quad t \geq 0\}$ *un* C^0-*semi-groupe sur un espace de Hilbert* X*.*
Le générateur infinitésimal de $\{T(t), \quad t \geq 0\}$ *est l'opérateur non borné en général défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ u \in X, \ \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{T(t)u - u}{t} \quad \textit{existe} \right\}, \\ \textit{et} \\ Au = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{T(t)u - u}{t}, \qquad\qquad u \in D(A). \end{cases}$$

Définition 1.3.5 *Un opérateur (linéaire)* A *dans* X *est dit dissipatif si on a :*

$$\forall u \in D(A), \quad \forall \lambda > 0, \qquad \|u - \lambda Au\|_X \geq \|u\|_X \,. \tag{1.3.1}$$

A *est dit m-dissipatif si* A *est dissipatif et pour tout* $\lambda > 0$, *l'opérateur* $(I - \lambda A)$ *est surjectif, c'est à dire :*

$$\forall f \in X, \quad \forall \lambda > 0, \quad \exists u \in D(A), \quad (I - \lambda A)\, u = f. \tag{1.3.2}$$

Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

Dans ce paragraphe, X désigne un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté $(.\,,.)$ et de la norme associée noté $\|.\|$. Si A est un opérateur linéaire dans X de domaine dense, la formule :

$$G(A^*) = \{(v, \varphi) \in X \times X, \ \forall (u, f) \in G(A), \quad (v, f) = (\varphi, u)\} \tag{1.3.3}$$

définit un opérateur linéaire A^* (l'adjoint de A) de domaine :

$$D(A^*) = \{v \in X,\ \exists c > 0,\ |(Au, v)| \leq c\,\|u\|\,, \quad \forall u \in D(A)\} \tag{1.3.4}$$

et on a :

$$(A^*v, u) = (v, Au)\,, \quad \forall v \in D(A^*), \quad \forall u \in D(A). \tag{1.3.5}$$

Proposition 1.3.1 *A est dissipatif dans X si et seulement si* $(Au, u) \leq 0, \quad \forall u \in D(A)$.

Définition 1.3.6 *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire non-borné, on dit que :*
· A est monotone si :

$$(Au, u) \geq 0, \quad \forall u \in D(A). \tag{1.3.6}$$

· A est maximal si l'application :

$$\begin{array}{rccl} (I + A): & D(A) & \longrightarrow & X \\ & u & \longmapsto & (I + A)u. \end{array} \tag{1.3.7}$$

est surjective.

Définition 1.3.7 *Soit $A : D\,(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur non linéaire, on dit que :*
· A est monotone si :

$$(A\,(u - v)\,,\ u - v) \geq 0, \quad \forall u, v \in D\,(A)\,. \tag{1.3.8}$$

· A est maximal monotone si A est monotone et $R\,(I + A) = X$.

Soit X un espace de Banach de dual X'. Sa norme est notée $\|.\|_X$.

Définition 1.3.8 *On dit que $A : X \longrightarrow X'$ est hémicontinu si l'application*

$$t \mapsto \langle A\,(u + tv)\,, w\rangle_{X',X} \quad \text{est continue sur } \mathbb{R}, \quad \forall u, v, w \in X.$$

Définition 1.3.9 *On dit que $A : X \longrightarrow X'$ est coercif si*

$$\frac{\langle Au, u\rangle_{X',X}}{\|u\|_X} \to +\infty, \quad \text{lorsque} \quad \|u\|_X \to +\infty.$$

Définition 1.3.10 *On dit que $A : X \longrightarrow X'$ est borné si pour toute partie S bornée dans X l'image $A\,(S)$ est bornée dans X'.*

Théorème 1.3.2 *([27, Corollaire 2.2]) Soit $A : X \to X'$ un opérateur non linéaire, si A est monotone, hémi-continu, borné et coercif, alors A est surjectif.*

1.3.1 Semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif

Théorème 1.3.3 *(cf.[2]) (de Hille Yosida) Soit A un opérateur (linéaire) maximal monotone dans un espace de Hilbert X. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction:*

$$u \in C^1\left([0,+\infty[\,;X\right) \cap C^0\left([0,+\infty[\,;D(A)\right)^{(1)}$$

unique, telle que:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, & \textit{dans } [0,+\infty[\,, \\ u(0) = u_0, & \textit{donnée initiale.} \end{cases}$$

De plus, on a:

$$\|u(t)\|_X \leq \|u_0\|_X \quad \textit{et} \quad \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.3.4 *(cf. [3, 12, 27]) Soit A un opérateur (non linéaire) maximal monotone dans un espace de Hilbert X. Alors pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une solution, (au sens faible)*

$$u \in C\left(\mathbb{R}^+, X\right)$$

unique, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, & \textit{dans } [0,+\infty[\,, \\ u(0) = u_0, & \textit{donnée initiale.} \end{cases} \tag{1.3.9}$$

De plus, si $v_0 \in \overline{D(A)}$ et v est la solution correspondante de (1.3.9), alors la fonction $t \mapsto \|u(t) - v(t)\|_X$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Si $u_0 \in D(A)$, alors la solution (dite forte)

$$u \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^+, X\right),$$

et la fonction $t \mapsto \|Au(t)\|_X$ est définie partout et est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 1.3.1 *Si A est un opérateur linéaire, alors $\overline{D(A)} = X$.*

(1) L'espace $D(A)$ est muni de la norme du graphe $|v| + |Av|$ ou de la norme Hilbertienne équivalente $\left(\|v\|^2 + \|Av\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

1.4 Problèmes variationnels abstraits

Soit X un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, de norme $\|.\|$, de dual X' et de norme duale $\|.\|_*$:

$$\forall f \in X', \quad \|f\|_* = \sup_{v \in X,\ v \neq 0} \frac{f(v)}{\|v\|}. \tag{1.4.1}$$

Soit a une forme bilinéaire sur $X \times X$ et l un élément de X'. On pose le problème :
Chercher $u \in X$ tel que :

$$\forall v \in X, \quad a(u,v) = l(v). \tag{1.4.2}$$

Lemme 1.4.1 *(Lax-Milgram). On suppose que a est continue et coercive sur $X \times X$: c'est à dire qu'il existe des constantes positives $M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que :*

$$\begin{gathered} \forall v \in X, \forall u \in X, \quad |a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|, \\ \forall v \in X, \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2. \end{gathered} \tag{1.4.3}$$

Alors le problème (1.4.2) a une solution unique u et :

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_*, \tag{1.4.4}$$

c'est-à-dire que l'application $u \longmapsto l$ est un isomorphisme de X sur X'.

1.5 Rappels sur la géométrie différentielle pour les surfaces

On s'intéresse dans ce paragraphe aux notions fondamentales permettant de calculer la dérivée d'une fonction, d'un champ de vecteurs, ou d'un endomorphisme définis sur une surface (cf. [13], [28]).

1.5.1 Paramétrisation

Soit Γ une surface plongée dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base orthonormée, on transforme un ouvert $\widehat{\Gamma}$ du plan $\left(O, \xi^1, \xi^2\right)$ en la surface Γ par une carte régulière $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

1.5.2 La normale et le plan tangent

En chaque point m de Γ, on définit deux vecteurs tangents à Γ par :

$$a_\alpha (m) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^\alpha} \left(\varphi^{-1} (m)\right), \quad \alpha = 1, 2. \tag{1.5.1}$$

Les vecteurs $a_1 (m)$ et $a_2 (m)$ sont supposés linéairement indépendants. La normale unitaire à Γ en chaque point m est définie par :

$$\nu (m) = \nu = \frac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|}, \tag{1.5.2}$$

où $\wedge$ (respectivement $\|.\|$) désigne le produit vectoriel (respectivement la norme euclidienne). Le plan tangent à Γ en m engendré par les vecteurs $a_1 (m)$ et $a_2 (m)$ est noté $T_m (\Gamma)$.

1.5.3 Base duale

En général, la base $\{a_\alpha (m)\} = \{a_1 (m), a_2 (m)\}$ du plan tangent $T_m (\Gamma)$ n'est ni orthogonale, ni normée. On est donc amené à utiliser la cobase ou base duale notée $\{a^\alpha (m)\} = \{a^1 (m), a^2 (m)\}$ définie par :

$$a^\alpha (m) . a_\beta (m) = \delta_\beta^\alpha \tag{1.5.3}$$

où δ_β^α est le symbole de Kronecker, $\alpha, \beta = 1, 2$.
$a^\alpha (m)$, $\alpha = 1, 2$ est une forme linéaire sur le plan tangent.

1.5.4 Tenseur métrique

On définit le tenseur métrique de la surface Γ associé à la carte φ par :

$$g_{\alpha\beta} = (a_\alpha, a_\beta), \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{1.5.4}$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$. On note $|g|$ le déterminant de ce tenseur.

1.5.5 Le transposé d'un vecteur

Soit $v = v^1 a_1 + v^2 a_2$ un vecteur arbitraire du plan $T_m (\Gamma)$ tangent en m à Γ; on lui associé, par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, une forme linéaire (vecteur transposé) :

$$\bar{v} = v_1 a^1 + v_2 a^2. \tag{1.5.5}$$

Les v^α sont les composantes contravariantes et les v_α sont les composantes covariantes.
On a :

$$v_\alpha = g_{\alpha 1} v^1 + g_{\alpha 2} v^2, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{1.5.6}$$

1.5.6 Intégration sur Γ

$|g|^{\frac{1}{2}}$ représente l'aire du parallélogramme construit à partir des vecteurs $a_1(m)$ et $a_2(m)$; si f est une fonction scalaire définie sur Γ on a :

$$\int_\Gamma f(m)\, d\Gamma = \int_{\hat{\Gamma}} (f \circ \varphi)\left(\xi^1, \xi^2\right) |g|^{\frac{1}{2}}\, d\xi^1 d\xi^2. \tag{1.5.7}$$

1.5.7 Dérivation sur une surface

Dérivée d'une fonction scalaire

Soit f une fonction scalaire définie sur Γ et suffisamment régulière; sa dérivée est une forme linéaire sur l'espace tangent définie par :

$$\partial_m f = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} a^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{2} f_{,\alpha} a^\alpha. \tag{1.5.8}$$

Le transposé de $\partial_m f$ noté $\overline{\partial_m f}$ est un vecteur appelé gradient tangentiel de f défini par :

$$\overline{\partial_m f} = \sum_{\alpha=1}^{2} v^\alpha a_\alpha = \nabla_T f \tag{1.5.9}$$

avec :

$$v^\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\beta} = \sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} f_{,\beta}.$$

où $g^{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique dual de $g_{\alpha\beta}$ tel que :

$$\sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} = \delta_\mu^\alpha, \qquad \alpha, \mu = 1, 2. \tag{1.5.10}$$

1.5.8 Opérateur de projection

On désigne par $\pi(m)$ l'opérateur de projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan tangent $T_m(\Gamma)$ en m à Γ. Si $v(m)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\pi(m)\, v(m)$ (au point m de Γ) est un vecteur de $T_m(\Gamma)$ tel que :

$$(v(m) - \pi(m)\, v(m), z) = 0, \qquad \forall z \in T_m(\Gamma). \tag{1.5.11}$$

Le transposé de la normale $\nu(m)$ est la forme linéaire notée par $\overline{\nu(m)}$ qui vérifie la relation suivante :

$$Id_3 = \pi(m) + \nu(m)\, \overline{\nu(m)}, \tag{1.5.12}$$

où Id_3 désigne l'identité dans $\mathbb{R}^3$.
$\nu(m)\overline{\nu(m)}$ est la projection orthogonale sur la droite engendrée par $\nu(m)$.
On désigne par $\overline{C}$ le transposé d'un endomorphisme C de $\mathbb{R}^3$défini par :

$$\forall y,\ z \in \mathbb{R}^3, \qquad (Cy, z) = \left(\overline{C}z, y\right). \tag{1.5.13}$$

On vérifie que π est symétrique, c'est-à-dire $\pi(m) = \overline{\pi(m)}$ pour tout $m \in \Gamma$.
Tout champ $v(m)$ défini sur Γ, peut être décomposé en une composante tangentielle $v_T(m) = \pi(m)v(m)$ et une composante normale $v_\nu(m) = \overline{\nu}(m).v(m)$ et on a :

$$v(m) = v_T(m) + v_\nu(m)\nu(m), \qquad m \in \Gamma. \tag{1.5.14}$$

1.5.9 Dérivée d'un champ tangentiel

Soit v_T un champ régulier de vecteurs tangents à Γ :

$$m \in \Gamma \longrightarrow v_T(m) = v^\alpha(m)\, a_\alpha(m) \in T_m(\Gamma).$$

On définit la dérivée de v_T sur Γ par :

$$\partial_m v_T = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial v_T}{\partial \xi^\alpha}.a^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{2} v_{,\alpha}\, a^\alpha \tag{1.5.15}$$

c'est un endomorphisme qui applique le plan tangent dans $\mathbb{R}^3$ et non pas dans le plan tangent lui même.

On introduit les symboles de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ par :

$$\pi a_{\alpha,\beta} = \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} a_\lambda, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{1.5.16}$$

où

$$a_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} = a_{\beta,\alpha}.$$

Ce qui prouve que :

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}.$$

Si on pose $v_T = v^\beta a_\beta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_m v_T &= \sum_{\alpha=1}^{2} \left(v^\beta a_\beta\right)_{,\alpha} .a^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\sum_{\beta=1}^{2} \left(v^\beta_{,\alpha} a_\beta + v^\beta a_{\beta,\alpha}\right) \right) a^\alpha \end{aligned}$$

la dérivée covariante du champ v_T sur Γ et par définition $\pi\partial_m v_T$, elle applique le plan tangent dans lui même et on a :

$$\begin{aligned}
\pi\partial_m v_T &= \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} v^{\beta}_{,\alpha}\pi a_\beta.a^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} v^{\beta}\pi a_{\beta,\alpha}.a^\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} v^{\beta}_{,\alpha} a_\beta.a^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} v^{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} a_{\lambda}.a^\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} \left(v^{\beta}_{,\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda}v^{\lambda}\right) a_\beta.a^\alpha.
\end{aligned}$$

Lemme 1.5.1 *La dérivée du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ est donnée par :*

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda}. \tag{1.5.17}$$

Preuve. De (1.5.4), on a :

$$g_{\alpha\beta,\mu} = (a_{\alpha,\mu}, a_\beta) + (a_\alpha, a_{\beta,\mu})$$

et de (1.5.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta,\mu} &= (\pi a_{\alpha,\mu},\ a_\beta) + (a_\alpha,\ \pi a_{\beta,\mu}) \\
&= \left(\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} a_\lambda,\ a_\beta\right) + \left(a_\alpha,\ \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} a_\lambda\right) \\
&= \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda},
\end{aligned}$$

ce qui donne (1.5.17). ∎

1.5.10 Opérateur de courbure

On définit l'opérateur de courbure de la surface Γ par :

$$\partial_m \nu = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial \nu}{\partial \xi^\alpha} a^\alpha \tag{1.5.18}$$

puisque $\dfrac{\partial \nu}{\partial \xi^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2)$ est un élément du plan tangent, il existe des scalaires b^{β}_{α} tels que :

$$\frac{\partial \nu}{\partial \xi^\alpha} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b^{\beta}_{\alpha} a_\beta.$$

Et donc

$$\partial_m \nu = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b^{\beta}_{\alpha} a_\beta.a^\alpha. \tag{1.5.19}$$

Cet opérateur applique le plan tangent dans lui même.

Lemme 1.5.2 *L'opérateur de courbure $\partial_m \nu$ est symétrique.*

Preuve. Pour $\alpha = 1, 2;$ on a :

$$\overline{\nu}.a_\alpha = (\nu,\ a_\alpha) = 0.$$

D'où :

$$\left(\frac{\partial \nu}{\partial \xi^\beta},\ a_\alpha\right) + (\nu,\ a_{\alpha,\beta}) = 0.$$

On pose : $b_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{2} g_{\alpha\mu} b_\beta^\mu;$ $(\alpha,\ \beta = 1, 2)$, on obtient :

$$b_{\alpha\beta} = (\nu,\ a_{\alpha,\beta})$$

ce qui prouve en particulier que $b_{12} = b_{21}$. Alors :

$$\forall y,\ z \in T_m(\Gamma) : \quad y = y^\alpha.a_\alpha, \quad z = z^\alpha.a_\alpha.$$

On a :

$$\begin{aligned}
((\partial_m \nu)\, y,\ z) &= -\left(b_\alpha^\beta a_\beta.a^\alpha.a_\mu y^\mu,\ z^\lambda a_\lambda\right) \\
&= -b_\alpha^\beta\,(a_\beta,\ a_\lambda)\, y^\alpha.z^\lambda \\
&= -b_{\alpha\lambda} y^\alpha z^\lambda \\
&= (y, (\partial_m \nu)\, z)\,.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que l'endomorphisme de courbure $\partial_m \nu$ est symétrique. ■

1.5.11 Dérivée d'un champ normal

On note par $v_\nu \nu$ un champ normal; on a par définition :

$$\partial_m (v_\nu \nu) = \nu \partial_m v_\nu + v_\nu \partial_m \nu.$$

1.5.12 Dérivée d'un champ de vecteurs sur Γ

Lemme 1.5.3 *Soit v un champ de vecteurs défini sur Γ; on a :*

$$\partial_m v = \pi \partial_m v_T - \nu \overline{v}_T \partial_m \nu + \nu \partial_m v_\nu + v_\nu \partial_m \nu.$$

Preuve. D'après (1.5.14), on a :

$$\begin{aligned}
\partial_m v &= \partial_m v_T + \partial_m (v_\nu \nu) \\
&= \partial_m v_T + \nu \partial_m v_\nu + v_\nu \partial_m \nu.
\end{aligned}$$

De (1.5.12), il vient :

$$\partial_m v = \pi \partial_m v_T + \nu \overline{\nu} \partial_m v_T + \nu \partial_m v_\nu + v_\nu \partial_m \nu.$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \partial_m \left(\overline{\nu} v_T \right) &= \overline{\nu} \partial_m v_T + \bar{v}_T \partial_m \nu \\ &= 0; \end{aligned}$$

puisque $\bar{\nu} v_T = 0$, on obtient :

$$\partial_m v = \pi \partial_m v_T - \nu \bar{v}_T \partial_m \nu + \nu \partial_m v_\nu + v_\nu \partial_m \nu.$$

■

1.5.13 Expression de la divergence

Expression de la divergence d'un champ de vecteurs sur une surface Γ

La divergence du champ de vecteurs tangents à Γ :

$$v_T = v^1 a_1 + v^2 a_2$$

est un champ scalaire défini sur Γ par :

$$\int_\Gamma z div_T \left(v_T \right) d\Gamma = - \int_\Gamma \left(\partial_m z \right) v_T d\Gamma, \qquad \text{pour tout } \ z \in \mathscr{D} \left(\Gamma \right) \ , \tag{1.5.20}$$

où $\mathscr{D}(\Gamma)$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Γ à support compact.

Expression de la divergence d'un champ d'endomorphismes sur une surface Γ

Désignons par ζ_t un champ d'endomorphismes du plan tangent à la surface Γ.
Posons :

$$\zeta_t = \zeta^\alpha_\beta . a^\beta a_\alpha.$$

(on a utilisé la convention de sommation par indice répété).
La divergence tangentielle du champ ζ_t est un champ de formes linéaires sur $T_m(\Gamma)$, noté $div_T \zeta_t$ et défini par:

$$\int_\Gamma div_T \zeta_t . v_T d\Gamma = - \int_\Gamma tr_2 \left(\zeta_t . \pi \partial_m v_T \right) d\Gamma, \qquad \text{pour tout } v_T \in \mathscr{D} \left(\Gamma, T \left(\Gamma \right) \right) \ , \tag{1.5.21}$$

où tr_2 désigne la trace d'un endomorphisme du plan tangent dans lui même et $\mathscr{D}(\Gamma, T(\Gamma))$ désigne l'espace des champs tangents à Γ dont les composantes dans la base de $T_m(\Gamma)$ sont dans $\mathscr{D}(\Gamma)$.

Lemme 1.5.4 *Pour tout champ scalaire η défini sur Γ et tout champ tangent v_T supposés réguliers, on a :*

$$(\partial_m \eta)\, v_T = tr\,(v_T \partial_m \eta) \qquad et \qquad div_T v_T = tr\,(\pi \partial_m v_T)\,.$$

Preuve. Si $v_T = v^\alpha a_\alpha = v^1 a_1 + v^2 a_2$, on a :

$$a^\alpha\,(v_T \partial_m \eta)\, a_\alpha = a^1\,(v_T \partial_m \eta)\, a_1 + a^2\,(v_T \partial_m \eta)\, a_2 = tr\,(v_T \partial_m \eta)\,.$$

On calcule d'abord $v_T \partial_m \eta$:

$$\begin{aligned} v_T\,(\partial_m \eta) &= (v^\alpha a_\alpha)\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi^\beta} a^\beta\right), \qquad \alpha = 1,2; \quad \beta = 1,2 \\ &= \left(v^1 a_1 + v^2 a_2\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi^1} a^1 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi^2} a^2\right) \\ &= v^\alpha \frac{\partial \eta}{\partial \xi^\beta} a_\alpha a^\beta. \end{aligned}$$

D'où :

$$a^\alpha\,(v_T \partial_m \eta)\, a_\alpha = v^\alpha \partial_\alpha \eta,$$

mais :

$$tr\,(v_T \partial_m \eta) = a^\alpha\,(v_T \partial_m \eta)\, a_\alpha$$

ce qui montre que :

$$tr\,(v_T \partial_m \eta) = a^\alpha\,(v_T \partial_m \eta)\, a_\alpha = v^\alpha \partial_\alpha \eta.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (\partial_m \eta)\, v_T &= (\partial_\beta \eta)\, a^\beta\,(v^\alpha a_\alpha) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial \xi^1} v^1 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi^2} v^2 \\ &= (\partial_\alpha \eta)\, v^\alpha. \end{aligned}$$

Alors :

$$tr\,(v_T \partial_m \eta) = (\partial_m \eta)\, v_T$$

ce qui montre la première relation.

Soit $\psi \in \mathscr{D}(\Gamma)$ un champ scalaire; d'après (1.5.20), on a (d'après la première relation du lemme 1.5.4) :

$$\int_\Gamma \psi\, div_T v_T d\Gamma = -\int_\Gamma (\partial_m \psi)\, v_T d\Gamma = -\int_\Gamma tr\,(v_T \partial_m \psi)\, d\Gamma.$$

Comme

$$\partial_m (\psi v_T) = v_T \partial_m \psi + \psi (\partial_m v_T)$$

ce qui donne par projection :

$$\pi \partial_m (\psi v_T) = v_T \partial_m \psi + \psi \pi (\partial_m v_T)$$

et puisque $v_T \in T_m(\Gamma)$ et ψ est un champ scalaire, alors :

$$\int_\Gamma \psi div_T v_T d\Gamma = -\int_\Gamma tr (\pi \partial_m (\psi v_T)) d\Gamma + \int_\Gamma \psi tr (\pi (\partial_m v_T)) d\Gamma. \tag{1.5.22}$$

Si τ_T est un champ régulier d'endomorphismes du plan tangent à Γ et v_T un champ tangent régulier; (1.5.21) donne :

$$\int_\Gamma div_T \tau_T v_T d\Gamma = -\int_\Gamma tr (\tau_T \pi (\partial_m v_T)) d\Gamma.$$

En particulier, si on prend $\tau_T = i_2$ est l'identité du plan tangent, il vient :

$$\int_\Gamma div_T i_2 v_T d\Gamma = -\int_\Gamma tr (\pi (\partial_m v_T)) d\Gamma.$$

Donc (1.5.22) s'écrit :

$$\int_\Gamma \psi div_T v_T d\Gamma = \int_\Gamma \psi div_T i_2 v_T d\Gamma + \int_\Gamma \psi tr (\pi (\partial_m v_T)) d\Gamma.$$

Soit $w_T \in \mathscr{D}(\Gamma, T(\Gamma))$

on prend $z \in \mathscr{D}(\Gamma)$, $z = 1$ sur $supp w_T$.

Par définition de $div_T w_T$, on a :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma div_T w_T d\Gamma &= \int_\Gamma z div_T w_T d\Gamma = -\int_\Gamma (\partial_m z) w_T d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\int_\Gamma div_T w_T d\Gamma = 0.$

Donc pour tout $w_T \in \mathscr{D}(\Gamma, T(\Gamma))$, on a :

$$\int_\Gamma (div_T i_2) w_T d\Gamma = -\int_\Gamma tr (\pi (\partial_m w_T)) d\Gamma = -\int_\Gamma div_T w_T d\Gamma = 0$$

d'où $\displaystyle\int_\Gamma (div_T i_2) w_T d\Gamma = 0.$

Par conséquent

$$div_T v_T = tr (\pi (\partial_m v_T))$$

ce qui montre la deuxième relation. ■

1.5.14 Déformations et contraintes

Soit $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ un champ assez régulier; on désigne par ∇v son gradient ; on a sur Γ (cf. [13], [28]) :

$$\nabla v = \overline{\pi \partial_m v_T \pi} + v_\nu \left(\partial_m \nu\right) + \nu \overline{\partial_\nu v_T} + \left(\overline{\partial_m v_\nu} - \left(\partial_m \nu\right) v_T + \nu \left(\partial_\nu v_\nu\right)\right) \bar{\nu}.$$

Le tenseur des déformations $\varepsilon(v)$ peut être écrit comme suit :

$$\varepsilon(v) = \varepsilon_T(v) + \nu \overline{\varepsilon_S(v)} + \varepsilon_S(v)\bar{\nu} + \varepsilon_\nu(v)\nu\bar{\nu}, \quad \text{sur } \Gamma, \tag{1.5.23}$$

avec :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_T(v) &= \pi\left(\partial_m v_T\right)\pi + \pi\overline{\partial_m v_T}\pi + 2v_\nu \partial_m \nu, \\ 2\varepsilon_S(v) &= \partial_\nu v_T + \overline{\partial_m v_\nu} - \left(\partial_m \nu\right) v_T, \\ \varepsilon_\nu(v) &= \partial_\nu v_\nu. \end{aligned} \tag{1.5.24}$$

où $(\partial_m \nu)$ est l'opérateur de courbure de Γ.
De façon analogue on peut écrire :

$$\sigma(v) = \sigma_T(v) + \nu \overline{\sigma_S(v)} + \sigma_S(v)\bar{\nu} + \sigma_\nu(v)\nu\bar{\nu}, \quad \text{sur } \Gamma, \tag{1.5.25}$$

où $\sigma_T(v)$ est un champ d'endomorphismes du plan tangent, $\sigma_S(v)$ un champ tangent et $\sigma_\nu(v)$ un champ scalaire. Plus précisément, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} &\sigma_T(v) = \pi\sigma(v)\pi, \\ &\sigma_S(v) = \pi\sigma(v)\nu, \\ &\sigma_\nu(v) = \bar{\nu}\sigma(v)\nu, \end{aligned} \right. \tag{1.5.26}$$

Remarque 1.5.1 *Soit $v \in \left(H^1(\Omega)\right)^3$; en utilisant les formules (1.5.23) -(1.5.24) et (1.5.25), on obtient :*

$$\varepsilon(v) : \varepsilon(v) = \varepsilon_T(v) : \varepsilon_T(v) + 2\left|\varepsilon_S(v)\right|^2 + \left|\varepsilon_\nu(v)\right|^2, \quad \textit{sur } \Gamma \tag{1.5.27}$$

et

$$\sigma(v) : \varepsilon(v) = \sigma_T(v) : \varepsilon_T(v) + 2\overline{\sigma_S(v)}\varepsilon_S(v) + \sigma_\nu(v)\varepsilon_\nu(v), \quad \textit{sur } \Gamma. \tag{1.5.28}$$

Remarque 1.5.2 *$\overline{\partial_m v_\nu}$ est le gradient tangentiel de v_ν, il sera noté aussi $\nabla_T v_\nu$.*

1.5.15 Espaces fonctionnels sur la surface Γ

Espace $L^2(\Gamma)$

$L^2(\Gamma)$ est l'espace des fonctions $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ telle que $\bar{f} = f \circ \varphi \in L^2\left(\hat{\Gamma}\right)$ ($\hat{\Gamma}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$), où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une carte régulière.
On pose :

$$\|f\|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma |f|^2\, dm = \int_{\hat{\Gamma}} \left|\bar{f}\right|^2 |g|^{\frac{1}{2}}\, d\xi^1 d\xi^2,$$

où g est le tenseur métrique.

Espace $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$

Un champ

$$\begin{array}{rccl} v_T : & \Gamma & \to & T(\Gamma) \\ & m & \to & v_T(m) = v^1(m)\, a_1(m) + v^2(m)\, a_2(m) \in T_m(\Gamma) \end{array}$$

est dans $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$ si $v_\alpha \in L^2(\Gamma)$ pour $\alpha = 1, 2$.
On pose alors :

$$\|v_T\|^2_{L^2(\Gamma, T(\Gamma))} = \int_\Gamma \bar{v}_T v_T dm = \int_\Gamma \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha v^\alpha dm, \tag{1.5.29}$$

où $v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta$.
La norme définie par (1.5.29) est équivalente à la norme définie par :

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \|v^\alpha\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Espace $H^1(\Gamma)$

C'est l'espace des fonctions $f : \Gamma \;\to\; \mathbb{R}$ de $L^2(\Gamma)$ telles que $\overline{\partial_m f}$ est dans $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$.
On pose alors :

$$\|f\|^2_{H^1(\Gamma)} = \|f\|^2_{L^2(\Gamma)} + \left\|\overline{\partial_m f}\right\|^2_{L^2(\Gamma, T(\Gamma))}. \tag{1.5.30}$$

On note $H^1_0(\Gamma)$ le sous-espace des fonctions de $H^1(\Gamma)$ nulles sur le bord $\partial\Gamma$ de Γ. C'est aussi la fermeture de $\mathscr{D}(\Gamma)$ dans $H^1(\Gamma)$ muni de la norme défini par (1.5.30).

Espace $H^1_0(\Gamma, T(\Gamma))$

Un champ $v_T = v^1 a_1 + v^2 a_2$ est dans l'espace $H^1_0(\Gamma, T(\Gamma))$ si v_α est dans $H^1_0(\Gamma)$ pour $\alpha = 1, 2$.

On pose alors :

$$\|v_T\|^2_{H^1_0(\Gamma,T(\Gamma))} = \sum_{\alpha=1}^{2} \|v^\alpha\|^2_{H^1_0(\Gamma)}.$$

On munit $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ de la norme :

$$\|v_T\|^2_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} = \sum_{\alpha=1}^{2} \|v^\alpha\|^2_{H^1(\Gamma)}. \tag{1.5.31}$$

Espaces des endomorphismes symétriques du plan tangent

On note $\mathcal{L}_S(T_m(\Gamma))$ l'espace des endomorphismes symétriques :

$$\tau_T : T_m(\Gamma) \to T_m(\Gamma)$$

muni de la norme définie par :

$$\|\tau_T\|^2_{\mathcal{L}_S(T_m(\Gamma))} = tr_2(\tau_T \tau_T).$$

A un champ de vecteurs tangents

$$v_T : \Gamma \to T(\Gamma)$$

on associe un champ d'endomorphismes symétriques

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon_T(v_T) : & \Gamma & \to & \mathcal{L}_S(T(\Gamma)) \\ & m & \longmapsto & \varepsilon_T(v_T)(m) \in \mathcal{L}_S(T_m(\Gamma)) \end{array}$$

défini par :

$$\varepsilon_T(v_T) = \frac{1}{2}\left(\pi \frac{\partial v_T}{\partial m} + \overline{\frac{\partial v_T}{\partial m}}\pi\right).$$

Espace $L^2(\Gamma;\ \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))$

Un champ

$$\tau_T : \Gamma \to \mathcal{L}_S(T(\Gamma))$$

est dans $L^2(\Gamma;\ \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))$ si la fonction

$$[tr_2(\tau_T \tau_T)]^{1/2} : \Gamma \to \mathbb{R}^+$$

est dans $L^2(\Gamma)$.

On pose alors :

$$\|\tau_T\|^2_{L^2(\Gamma;\ \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))} = \left\| [tr_2(\tau_T \tau_T)]^{1/2} \right\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Remarque 1.5.3 *Si $v_T \in H^1(\Gamma, T(\Gamma))$, alors : $\varepsilon_T(v_T) \in L^2(\Gamma;\ \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))$.*

Espace $H_0^2(\Gamma)$

Une fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ est dans $H^2(\Gamma)$ (respectivement dans $H_0^2(\Gamma)$) si la fonction $\bar{f} = f \circ \varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ est dans l'espace de Sobolev $H^2\left(\hat{\Gamma}\right)$ (respectivement dans $H_0^2\left(\hat{\Gamma}\right)$). Si f est dans $H^2(\Gamma)$ alors $\left(\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial m}\right)$ est dans $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$.

Proposition 1.5.1 *(cf. [1]) L'expression $\|.\|_1$ définie par :*

$$\|v_T\|_1 = \left(\int_\Gamma \left(|v_T|^2 + \varepsilon_T(v) : \varepsilon_T(v)\right) d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ équivalente à la norme définie en (1.5.31).

Preuve. Il suffit de prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\|v_T\|_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} \leq C\,\|v_T\|_1, \ \ \forall v_T \in H^1(\Gamma, T(\Gamma)).$$

S'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite $\left\{v_T^k\right\} \subset H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ vérifiant :

$$\left\|v_T^k\right\|_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} = 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{rcll} v_T^k & \to & 0 & \text{dans} \quad L^2(\Gamma, T(\Gamma)) \\ \varepsilon_T\left(v_T^k\right) & \to & 0 & \text{dans} \quad L^2(\Gamma,\ \mathcal{L}_S(T(\Gamma))). \end{array}$$

On pose :

$$v_T^k = v^{k1} a_1 + v^{k2} a_2 \quad \text{et} \quad v_{,\beta}^{k\alpha} = \frac{\partial v^{k\alpha}}{\partial \xi^\beta},$$

on obtient :

$$v_{,\beta}^{k\alpha} + g^{\lambda\alpha} g_{\beta\mu} v_{,\lambda}^{k\mu} \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma)$$

avec $\alpha, \beta = 1, 2$, sommation par rapport à l'indice répété et où $\left(g^{\lambda\mu}\right)_{1\leq\lambda,\mu\leq 2}$ est le tenseur inverse du tenseur métrique.

En omettant l'indice k et en posant :

$$A_\beta^\alpha = v_{,\beta}^\alpha + g^{\lambda\alpha} g_{\beta\mu} v_{,\lambda}^\mu.$$

En prenant $\alpha = \beta$, on obtient :

$$v_{,1}^1 + v_{,2}^2 \to 0 \ \text{ dans } \ L^2(\Gamma).$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} g_{\alpha r} A_\beta^\alpha & = & g_{\alpha r}\left(v_{,\beta}^\alpha + g^{\lambda\alpha} g_{\beta\mu} v_{,\lambda}^\mu\right) \\ & = & g_{\alpha r} v_{,\beta}^\alpha + g_{\beta\mu} v_{,r}^\mu \to 0 \qquad \text{dans} \ \ L^2(\Gamma). \end{array}$$

En prenant $(\beta, r) = (1,1)$, $(\beta, r) = (2,2)$ et $(\beta, r) = (2,1)$, on obtient les limites suivantes dans $L^2(\Gamma)$:

$$\begin{cases} g_{11}v^1_{,1} + g_{12}v^2_{,1} & \to & 0 \text{ dans } L^2(\Gamma), \\ g_{22}v^2_{,2} + g_{21}v^1_{,2} & \to & 0 \text{ dans } L^2(\Gamma), \\ g_{11}v^1_{,2} + g_{22}v^2_{,1} & \to & 0 \text{ dans } L^2(\Gamma), \\ v^1_{,1} + v^2_{,2} & \to & 0 \text{ dans } L^2(\Gamma). \end{cases} \tag{1.5.32}$$

posons : $w_T = gv_T$, où g est le tenseur métrique, w_T a pour composantes :

$$w^\alpha = g_{\alpha\beta}v^\beta, \qquad \alpha = 1, 2$$

de

$$\left(v^1, v^2\right) \to 0 \text{ dans } L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$$

il vient :

$$\left(w^1, w^2\right) \to 0 \text{ dans } L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma).$$

Les limites (1.5.32) donnent :

$$w^1_{,1},\ w^2_{,2} \text{ et } w^2_{,1} + w^1_{,2} \text{ tendent vers 0 dans } L^2(\Gamma).$$

L'inégalité de Korn dans l'ouvert $\hat{\Gamma}$ montre alors que

$$\left(w^1, w^2\right) \to 0 \text{ dans } H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma).$$

D'où :

$$\left(v^1, v^2\right) \to 0 \text{ dans } H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma).$$

Ce qui contredit la définition de la suite $\left(v^k_T\right)_{k \geq 0}$. ■

Chapitre 2

Stabilisation exponentielle du système anisotrope de la thermoélasticité par des contrôles interne et frontière linéaires égaux au feedback naturel

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la stabilisation exponentielle du système anisotrope de la thermoélasticité par des contrôles interne et frontière linéaires égaux au feedback naturel, en établissant une inégalité intégrale obtenue par la technique de **Bey R et al.**[1].

Nous introduisons d'abord quelques notations et hypothèses utilisées dans ce chapitre. Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^2. On note $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)^T$ le vecteur unitaire normal extérieur à Γ.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, on définit la fonction $m(x) = x - x_0$, $x \in \mathbb{R}^n$ et on considére la partition de la frontière Γ suivante :

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma, \quad m(x).\nu(x) \leq 0\}, \tag{2.0.1}$$

$$\Gamma_2 = \{x \in \Gamma, \quad m(x).\nu(x) > 0\}. \tag{2.0.2}$$

Nous considérons le système anisotrope de la thermoélasticité avec des contrôles interne et frontière linéaires

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} u'' - div\sigma\left(u\right) + \alpha\nabla\theta + u' = 0, & \text{dans} \quad \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta divu' = 0, & \text{dans} \quad \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \theta = 0, & \text{sur} \quad \Gamma\times\mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1\times\mathbb{R}^+, \\ \sigma\left(u\right).\nu + au + u' = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_2\times\mathbb{R}^+, \\ u\left(.,0\right) = u_0, \quad u'\left(.,0\right) = u_1, \quad \theta\left(.,0\right) = \theta_0, & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

où $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$, $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u = u\left(x,t\right) = \left(u_1\left(x,t\right),...,u_n\left(x,t\right)\right)$ désigne le vecteur déplacement, $\theta = \theta\left(x,t\right)$ la température et σ le tenseur des contraintes défini par :

$$\sigma_{ij}\left(u\right) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(u\right).$$

$\varepsilon\left(u\right)$ est le tenseur linéarisé des déformations donné par :

$$\varepsilon_{ij}\left(u\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Les coefficients a_{ijkl} sont dans l'espace $W^{1,\infty}\left(\Omega\right)$ et vérifient la condition de symétrie suivante:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad \text{sur} \quad \Omega,$$

(tous les indices vont de 1 à n), et satisfont la condition d'ellipticité suivante :

$$\exists\delta > 0 : \; a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \delta\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{2.0.3}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}.

Les composantes du champ vectoriel $div\sigma\left(u\right)$ sont données par :

$$\left(div\sigma\left(u\right)\right)_i = \partial_j\sigma_{ij}\left(u\right) = \sigma_{ij,j}\left(u\right)., \quad i = 1,...,n.$$

Les paramètres de couplage α et β sont supposés strictement positifs.

La fonction $a \equiv a\left(x\right)$ est non négative sur Γ_2 et $a\left(x\right) \in C^1\left(\Gamma_2\right)$.

2.1 Existence, unicité et régularité des solutions

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'étude de l'existence, de l'unicité et de la régularité de la solution du système $(\mathcal{P})$, basée sur la théorie des semi-groupes linéaires [2], en le

ramenant à une équation d'évolution du premier ordre.
Dans ce qui suit, on suppose que :

$$mes\,(\Gamma_1) > 0 \quad \text{ou} \quad a\,(x) > 0, \quad \forall x \in \Gamma_2, \tag{2.1.1}$$

$$\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \varnothing. \tag{2.1.2}$$

On définit les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{aligned}
&H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\},\\
&\mathcal{W} = \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n,\\
&\mathcal{H} = \mathcal{W} \times L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Les espaces $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$, $\left(L^2(\Omega)\right)^n$ et $L^2(\Omega)$ sont munis des normes suivantes (respectivement) :

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} &= \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dx + \int_{\Gamma_2} a\,|u|^2\, d\Gamma,\\
\|u\|^2_{(L^2(\Omega))^n} &= \int_\Omega |u|^2\, dx,\\
\|u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |u|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 *L'expression* $\|.\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}$ *définie par :*

$$\|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} = \left(\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dx + \int_{\Gamma_2} a\,|u|^2\, d\Gamma\right)^{1/2}$$

est une norme équivalente à la norme usuelle de $\left(H^1(\Omega)\right)^n$.

Preuve. On montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{(H^1(\Omega))^n} \le C\,\|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}, \quad \forall u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n.$$

Pour cela, on distingue deux cas suivants :
1er Cas : Si $a(x) \equiv 0$, $\forall x \in \Gamma_2$ et $mes\,(\Gamma_1) > 0$, on a :

$$\|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} = \left(\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dx\right)^{1/2}.$$

Pour montrer que la norme $\|.\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}$ est équivalente à la norme usuelle de $\left(H^1(\Omega)\right)^n$ on suppose le contraire; nous aurons une suite $(w_k)_k$ de $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ telle que :

$$\frac{1}{k}\|w_k\|_{(H^1(\Omega))^n} > \|w_k\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}.$$

Si on pose :

$$v_k = \frac{w_k}{\|w_k\|_{(H^1(\Omega))^n}},$$

on obtient :

$$\|v_k\|_{(H^1(\Omega))^n} = 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{2.1.3}$$

et

$$\|v_k\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} < \frac{1}{k}. \tag{2.1.4}$$

Puisque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière, l'injection canonique de $\left(H^1(\Omega)\right)^n$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^n$ est compacte; on peut donc extraire de la suite $(v_k)_k$ une sous suite notée encore $(v_k)_k$ telle que :

$$v_k \to v, \quad \text{dans} \quad \left(L^2(\Omega)\right)^n.$$

De plus, la continuité de l'injection canonique de $\left(L^2(\Omega)\right)^n$ dans $\left(\mathscr{D}'(\Omega)\right)^n$ montre que

$$v_k \to v, \qquad \text{dans} \quad \left(\mathscr{D}'(\Omega)\right)^n .$$

Et d'après la continuité de la dérivation de $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, on a :

$$\varepsilon_{ij}(v_k) \to \varepsilon_{ij}(v), \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega) . \tag{2.1.5}$$

De (2.1.4) et (2.0.3), il vient que :

$$\varepsilon_{ij}(v_k) \to 0, \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

La continuité de l'injection

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$$

montre que

$$\varepsilon_{ij}(v_k) \to 0, \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega) . \tag{2.1.6}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, on conclut de (2.1.5) et de (2.1.6) que :

$$\varepsilon_{ij}(v) = 0, \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega) ,$$

par conséquent

$$\varepsilon_{ij}(v) = 0 \in L^2(\Omega).$$

D'où :

$$v = 0.$$

En effet, $\varepsilon_{ij}(v) = 0 \Leftrightarrow v$ est un déplacement rigide.
Posons :

$$\mathcal{R} = \left\{ v \in \left(H^1(\Omega) \right)^n ; \quad \varepsilon_{ij}(v) = 0, \quad 1 \leq i, \ j \leq n \right\}.$$

Lorsque $n = 2$, on vérifie que toute fonction $v \in \mathcal{R}$ est localement de la forme

$$v_1(x) = a_1 + bx_2, \quad v_2(x) = a_2 - bx_1$$

où a_1, a_2 et b sont des constantes. D'où :

$$\mathcal{R} = \{ v; \ \exists a_1, \ a_2, \ b \in \mathbb{R}, \quad v_1(x) = a_1 + bx_2, \quad v_2(x) = a_2 - bx_1 \}$$

si $n = 2$. Lorsque $n = 3$, on vérifie de même

$$\mathcal{R} = \left\{ v \in \left(H^1(\Omega) \right)^n ; \quad v(x) = a + b \wedge x, \quad a, b \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega \right\}.$$

En Mécanique, $\mathcal{R}$ est dit ensemble des déplacements rigides de Ω. La seule fonction v de $\mathcal{R}$ qui s'annule en deux points distincts de $\mathbb{R}^2$ lorsque $n = 2$ (respectivement en trois points non alignés de $\mathbb{R}^3$ lorsque $n = 3$) est la fonction $v = 0$. Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, alors l'ensemble des déplacements rigides appartenant à $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \right)^n$ est réduit à $\{0\}$. Par conséquent $v = 0$.
Finalement, comme

$$\begin{cases} v_k \to v, & \text{dans} \quad \left(L^2(\Omega) \right)^n, \\ \text{et} & \\ \varepsilon_{ij}(v_k) \to \varepsilon_{ij}(v), & \text{dans} \quad L^2(\Omega). \end{cases}$$

avec $v = 0$.
Alors :

$$v_k \to 0, \quad \text{dans} \quad \left(H^1(\Omega) \right)^n$$

ce qui est impossible puisque

$$\|v\|_{(H^1(\Omega))^n} = \lim_{n \to \infty} \|v_k\|_{(H^1(\Omega))^n} = 1.$$

2ème Cas : La démonstration est analogue si $a(x) \neq 0$, $\forall x \in \Gamma_2$, et $mes(\Gamma_1) = 0$.

■

L'espace $\mathcal{W}$ étant muni de la norme naturelle :

$$\|(u, v)\|^2_{\mathcal{W}} = \int_\Omega \left[|v|^2 + \sigma(u) : \varepsilon(u) \right] dx + \int_{\Gamma_2} a |u|^2 \, d\Gamma.$$

Dans toute la suite, on utilisera la norme de l'énergie sur $\mathcal{H}$, $\|(.,.,.)\|_{\mathcal{H}}$ définie par :

$$\|(u, v, \theta)\|^2_{\mathcal{H}} = \|(u, v)\|^2_{\mathcal{W}} + \|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}$$

pour $(u, v, \theta) \in \mathcal{H}$.

L'énergie de la solution (u, θ) du système $(\mathcal{P})$ est définie par :

$$E(t) = E(u, \theta, t) = \frac{1}{2} \left\| (u(t), u'(t), \theta(t)) \right\|_{\mathcal{H}}^2$$

ou encore

$$E(t) = E(u, \theta, t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ |u'|^2 + \sigma(u) : \varepsilon(u) + \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} a |u|^2 \, d\Gamma. \tag{2.1.7}$$

On désigne par $\langle ., . \rangle$ la dualité entre $\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n$ et $\left[\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n\right]'$ et entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

De plus, on considère les opérateurs :

$$A : \left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n \to \left[\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n\right]' \tag{2.1.8}$$

défini par :

$$\langle Au, v \rangle = (u, v)_{\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n}, \quad \forall u,\ v \in \left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n. \tag{2.1.9}$$

avec :

$$(u, v)_{\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n} = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx + \int_{\Gamma_2} au.v \, d\Gamma, \qquad \forall u,\ v \in \left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n. \tag{2.1.10}$$

$$A_0 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \tag{2.1.11}$$

défini par :

$$\langle A_0 u, v \rangle = (u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \qquad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.1.12}$$

Le théorème de représentation de Riesz assure que A et A_0 sont des isomorphismes isométriques de $\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n$ vers $\left[\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n\right]'$ et $H_0^1(\Omega)$ vers $H^{-1}(\Omega)$ respectivement.

On introduit aussi l'opérateur B_0 de $\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n$ dans $\left[\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n\right]'$ par :

$$\langle B_0 u, v \rangle = \int_\Omega u.v \, dx + \int_{\Gamma_2} u.v \, d\Gamma, \quad \forall u,\ v \in \left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n.$$

L'opérateur B_0 est bien défini de $\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n$ dans $\left[\left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n\right]'$.

Dans ce qui suit, on note par $(., .)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ ou $\left(L^2(\Omega)\right)^n$; et par $\|.\|$ la norme dans $L^2(\Omega)$ ou $\left(L^2(\Omega)\right)^n$.

En utilisant les opérateurs A, A_0 et B_0, on peut transformer le problème $(\mathcal{P})$ en problème de Cauchy. Pour cela, on multiplie la première équation du système $(\mathcal{P})$ par $v \in \left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n$, et on intègre formellement par partie sur Ω, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \left[u'' - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta + u'\right].vdx \\
0 &= \int_\Omega u''vdx - \int_\Omega v.div\sigma(u)\,dx + \int_\Omega (\alpha\nabla\theta.v)\,dx + \int_\Omega u'vdx \\
0 &= \int_\Omega u''vdx - \int_\Omega v_i\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u)\,dx + \int_\Omega (\alpha\nabla\theta.v)\,dx + \int_\Omega u'vdx \\
0 &= \int_\Omega u''vdx + \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u)\,dx - \int_{\Gamma_2} (v_i\nu_j.\sigma_{ij}(u))\,d\Gamma + \int_\Omega (\alpha\nabla\theta.v)\,dx + \int_\Omega u'vdx \\
0 &= \int_\Omega u''vdx + \int_\Omega \sigma(u):\varepsilon(v)\,dx - \int_{\Gamma_2} (\sigma(u).\nu)\,vd\Gamma + \int_\Omega (\alpha\nabla\theta.v)\,dx + \int_\Omega u'vdx
\end{aligned}$$

comme $\sigma(u).\nu = -au - u'$ sur Γ_2, on a :

$$0 = \int_\Omega u''vdx + \int_\Omega \sigma(u):\varepsilon(v)\,dx + \int_{\Gamma_2} au.vd\Gamma + \int_{\Gamma_2} u'vd\Gamma + \int_\Omega (\alpha\nabla\theta.v)\,dx + \int_\Omega u'vdx$$

ce qui donne

$$\langle u'', v\rangle + \langle Au, v\rangle + \langle B_0u', v\rangle + \langle \alpha\nabla\theta, v\rangle = 0$$

d'où :

$$u'' + Au + B_0u' + \alpha\nabla\theta = 0 \quad \text{dans} \ \left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'. \tag{2.1.13}$$

De la même manière, si on multiplie la seconde équation du système $(\mathcal{P})$ par $v \in H^1_0(\Omega)$ et si on intègre formellement par partie sur Ω, on obtient :

$$\theta' + A_0\theta + \beta divu' = 0 \ \text{ dans } H^{-1}(\Omega). \tag{2.1.14}$$

Alors les équations (2.1.13), (2.1.14) donnent :

$$\begin{cases}
u'' + Au + B_0u' + \alpha\nabla\theta = 0, & \text{sur} \ \ \mathbb{R}^+, \\
\theta' + A_0\theta + \beta divu' = 0, & \text{sur} \ \ \mathbb{R}^+, \\
u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \theta(0) = \theta_0.
\end{cases}$$

On remarque que la condition au bord sur Γ_1 dans $(\mathcal{P})$ est prise en charge par la définition de $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$.

On pose : $\phi = (u, v, \theta) \in \mathcal{V}$ et on considère l'opérateur linéaire non borné

$$\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$$

avec $\mathcal{V} = \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times H^1_0(\Omega)$, défini par :

$$\mathcal{A}\phi = (-v, \quad Au + B_0v + \alpha\nabla\theta, \quad A_0\theta + \beta divv).$$

Le système $(\mathcal{P})$ s'écrit :

$$(\mathcal{P}') \qquad \begin{cases} \phi' + \mathcal{A}\phi &= 0, \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ \phi(0) &= (u_0, u_1, \theta_0). \end{cases}$$

Si (u, θ) est une solution (suffisamment régulière) du système $(\mathcal{P})$, alors $\phi(t) \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{A}\phi(t) \in \mathcal{H}$, pour tout $t > 0$. Ceci nous amène à définir :

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \Big\{ &(u, v, \theta) \in \mathcal{H}, \quad v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n, \quad -\,div\sigma(u) + v \in \left(L^2(\Omega)\right)^n, \\ &\theta \in \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right), \quad \sigma(u).\nu + au + v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_2 \Big\} \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1 *On a : $u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ et $div\sigma(u) \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$ (ie $u \in H^1(div\sigma, \Omega)$), alors on peut définir $(\sigma(u).\nu)_{/\Gamma_2}$ comme élément de $\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n$, et on a la formule de Green suivante (voir corollaire 1.2.1) :*

$$\langle \sigma(u).\nu, w \rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} = \int_\Omega \left(w div\sigma(u) + \sigma(w) : \varepsilon(u)\right) dx, \qquad \forall w \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n. \tag{2.1.15}$$

Nous allons étudier dans la proposition suivante la régularité des éléments de $D(\mathcal{A})$.

Proposition 2.1.2 *Le domaine $D(\mathcal{A})$ est donné par :*

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \Big\{ &(u, v, \theta) \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right), \quad u \in \left(H^2(\Omega)\right)^n, \\ &\sigma(u).\nu + au + v = 0 \quad sur \quad \Gamma_2 \Big\} \end{aligned}$$

et la norme $|||.|||_{D(\mathcal{A})}$ définie sur $D(\mathcal{A})$ par :

$$|||(u, v, \theta)|||_{D(\mathcal{A})} = \left(\|u\|^2_{(H^2(\Omega))^n} + \|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|\theta\|^2_{H^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme $\|.\|_{D(\mathcal{A})}$ définie par :

$$\|(u, v, \theta)\|_{D(\mathcal{A})} = \left(\|u\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|div\sigma(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \|\theta\|^2_{H^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 2.1.2 *Si $\phi = (u, v, \theta) \in D(\mathcal{A})$, alors : $Au + B_0 v = -div\sigma(u) + v$.*
En effet, pour tout $w \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$, on a :

$$\begin{aligned} \langle Au + B_0 v, w \rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]', \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} &= \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(w)\, dx + \int_{\Gamma_2} auw\, d\Gamma + \int_\Omega vwdx + \int_{\Gamma_2} vwd\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_2} (\sigma(u).\nu)\, wd\Gamma - \int_\Omega w.div\sigma(u)\, dx + \int_{\Gamma_2} auw\, d\Gamma + \int_\Omega vwdx + \int_{\Gamma_2} vwd\Gamma \\ &= -\int_\Omega w.div\sigma(u)\, dx + \int_\Omega vwdx, \\ &= (-div\sigma(u) + v, w) = \langle -div\sigma(u) + v, w \rangle_{[(L^2(\Omega))^n]', (L^2(\Omega))^n} \\ &= \langle -div\sigma(u) + v, w \rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]', \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}. \end{aligned}$$

D'où : $Au + B_0 v = -div\sigma(u) + v$.

Preuve. On désigne par C une constante positive assez grande.
Montrons que $D(\mathcal{A}) = D_0$, avec

$$D_0 = \left\{ (u,v,\theta),\ u \in \left(H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n,\ v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n,\ \theta \in \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right) / \right.$$
$$\left. \sigma(u).\nu + au + v = 0 \ \text{ sur } \Gamma_2 \right\}.$$

On sait que $D_0 \subset D(\mathcal{A})$; il reste à montrer que $D(\mathcal{A}) \subset D_0$.
Pour cela, soit $(u,v,\theta) \in D(\mathcal{A})$, montrons que $u \in (H^2(\Omega))^n$.
Soient $F = -div\sigma(u) + v \in (L^2(\Omega))^n$ et $h = (-au - v)_{/\Gamma_2}$, alors pour tout $w \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$, on obtient :

$$\langle F, w \rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]', \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(w)\, dx + \int_{\Gamma_2} au.w\, d\Gamma + \int_\Omega vw\, dx + \int_{\Gamma_2} vw\, d\Gamma,$$
$$\forall w \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$$

ceci prouve que u est une solution faible du problème :

$$\begin{cases} -div\sigma(u) + v = F & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \sigma(u).\nu = h & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Comme $-div\sigma(u) + v \in (L^2(\Omega))^n$, alors $u \in H^1(div\sigma,\ \Omega)$, d'après le corollaire1.2.1, $(\sigma(u).\nu)_{/\Gamma_2}$ est définie comme élément de $\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n$.
D'autre part,

$$\sigma(u).\nu = -au - v \in \left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n, \quad \text{car } \ u, v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$$

à partir de là, les résultats classiques de la régularité elliptique montrent que $u \in (H^2(\Omega))^n$.
et

$$\begin{aligned} \|u\|_{(H^2(\Omega))^n} &\le C\left(\|u - div\sigma(u)\|_{(L^2(\Omega))^n} + \|au + v\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)\right)^n} \right) \\ &\le C\left(\|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|v\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|div\sigma(u)\|_{(L^2(\Omega))^n} \right) \end{aligned}$$

ce qui permet d'avoir l'équivalence des normes. En effet, soit $(u,v,\theta) \in D(\mathcal{A})$

$$\left(\|u\|^2_{(H^2(\Omega))^n} + \|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|\theta\|^2_{H^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \ge C\left(\|u\|^2_{(H^2(\Omega))^n} + \|div\sigma(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \right.$$
$$\left. + \|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|\theta\|^2_{H^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|u\|_{(H^2(\Omega))^n} &\le C\left(\|u - div\sigma(u)\|_{(L^2(\Omega))^n} + \|au + v\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)\right)^n} \right) \\ &\le C\left(\|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|v\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|div\sigma(u)\|_{(L^2(\Omega))^n} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\left(\|u\|^2_{(H^2(\Omega))^n}+\|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\|\theta\|^2_{H^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\leq C\left(\|u\|^2_{(H^2(\Omega))^n}+\|div\sigma\left(u\right)\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}\right.$$
$$\left.+\|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\|\theta\|^2_{H^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Proposition 2.1.3 $\mathcal{A}$ *est un opérateur maximal monotone sur* $\mathcal{H}$.

Preuve. i) $\mathcal{A}$ est monotone.
Soit $\phi=(u,v,\theta)\in D(\mathcal{A})$; on a :

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{A}\phi,\phi\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle\mathcal{A}\left(u,v,\theta\right),\left(u,v,\theta\right)\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= \langle\left(-v,\ Au+B_0v+\alpha\nabla\theta,\ A_0\theta+\beta divv\right),\left(u,v,\theta\right)\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= \langle\left(-v,\ Au+B_0v+\alpha\nabla\theta\right),\left(u,v\right)\rangle_{\mathcal{W}}+\frac{\alpha}{\beta}\left(A_0\theta+\beta divv,\ \theta\right)_{L^2(\Omega)}\\ &= \left(-v,u\right)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\left(Au+B_0v+\alpha\nabla\theta,\ v\right)_{(L^2(\Omega))^n}+\frac{\alpha}{\beta}\left(A_0\theta+\beta divv,\ \theta\right)_{L^2(\Omega)}\\ &= \left(-v,u\right)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\int_\Omega\left(Au+B_0v+\alpha\nabla\theta\right).vdx+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega\left(A_0\theta+\beta divv\right)\theta dx\\ &= \left(-v,u\right)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\langle Au,v\rangle+\langle B_0v,v\rangle+\langle\alpha\nabla\theta,v\rangle+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega\left(A_0\theta+\beta divv\right)\theta dx\end{aligned}$$

puisque $\langle Au,v\rangle=(u,v)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{A}\phi,\phi\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle B_0v,v\rangle+\langle\alpha\nabla\theta,v\rangle+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega\left(A_0\theta+\beta divv\right).\theta\,dx\\ &= \int_\Omega|v|^2\,dx+\int_{\Gamma_2}|v|^2\,d\Gamma+\alpha\int_\Omega v.\nabla\theta\,dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx+\alpha\int_\Omega\theta.divv\,dx.\end{aligned}$$

On intègre $\alpha\int_\Omega\theta divv\,dx$ par partie, on obtient :

$$\alpha\int_\Omega\theta divv\,dx=\alpha\int_\Gamma\theta\left(v.\nu\right)d\Gamma-\alpha\int_\Omega v.\nabla\theta dx.$$

Donc on aura :

$$\langle\mathcal{A}\phi,\phi\rangle_{\mathcal{H}}=\int_\Omega|v|^2\,dx+\int_{\Gamma_2}|v|^2\,d\Gamma+\alpha\int_\Omega v.\nabla\theta\,dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx-\alpha\int_\Omega\nabla\theta.v\,dx$$

d'où :

$$\langle\mathcal{A}\phi,\phi\rangle_{\mathcal{H}}=\int_\Omega|v|^2\,dx+\int_{\Gamma_2}|v|^2\,d\Gamma+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx\geq 0.$$

Ce qui montre que l'opérateur $\mathcal{A}$ est monotone.

ii) $\mathcal{A}$ est maximal.

On montre, maintenant, que l'opérateur $(I+\mathcal{A})$ est surjectif de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}$.
Soit $F=(\varphi,\psi,\xi)\in\mathcal{H}$, cherchons un élément $\phi=(u,v,\theta)\in D(\mathcal{A})$ vérifiant :

$$\phi+\mathcal{A}\phi=F$$

$$\begin{aligned}
\phi+\mathcal{A}\phi &= F \iff (u,v,\theta)+(-v,\ Au+B_0v+\alpha\nabla\theta,\ A_0\theta+\beta divv)=(\varphi,\psi,\xi)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u-v=\varphi,\\ v+Au+B_0v+\alpha\nabla\theta=\psi,\\ \theta+A_0\theta+\beta divv=\xi.\end{array}\right.
\end{aligned}\tag{2.1.16}$$

Comme $(u,v,\theta)\in D(\mathcal{A})$, d'après la remarque 2.1.2, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} Au+B_0v=-div\sigma(u)+v,\\ A_0\theta=-\Delta\theta.\end{array}\right.$$

Donc le système (2.1.16) devient :

$$\left\{\begin{array}{l} u-v=\varphi,\\ v-div\sigma(u)+v+\alpha\nabla\theta=\psi,\\ \theta-\Delta\theta+\beta divv=\xi.\end{array}\right.\tag{2.1.17}$$

La première équation du (2.1.17) donne :

$$v=u-\varphi$$

en remplaçant v dans la deuxième et la troisième équation du (2.1.17), on trouve :

$$\left\{\begin{array}{ll} 2u-div\sigma(u)+\alpha\nabla\theta=\psi+2\varphi, & (1)\\ \theta-\Delta\theta+\beta divu=\xi+\beta div\varphi, & (2)\\ \sigma(u).\nu=-au-u+\varphi. & \end{array}\right.\tag{2.1.18}$$

Donc il suffit de trouver un élément $(u,\theta)\in\left(H^2(\Omega)\cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\times\left(H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)\right)$ qui vérifit (2.1.18).
En multipliant (1) par une fonction $u_1\in\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ et (2) par une fonction $\theta_1\in H^1_0(\Omega)$, en intégrant par parties sur Ω et en faisant la somme membre à membre, on trouve :

$$\begin{array}{l}
\displaystyle\int_\Omega 2u.u_1dx+\int_\Omega\sigma(u):\varepsilon(u_1)\,dx+\alpha\int_\Omega\nabla\theta.u_1dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega\theta.\theta_1dx+\alpha\int_\Omega\theta_1divudx\\
\displaystyle+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega\nabla\theta.\nabla\theta_1dx+\int_{\Gamma_2}au.u_1d\Gamma+\int_{\Gamma_2}u.u_1d\Gamma=\int_\Omega\left[(\psi+2\varphi)\,u_1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\xi+\alpha div\varphi\right)\theta_1\right]dx\\
\displaystyle+\int_{\Gamma_2}\varphi.u_1d\Gamma.
\end{array}$$

Cette dernière égalité s'écrit :

$$a\left[(u,\theta),(u_1,\theta_1)\right]=L\left(u_1,\theta_1\right)$$

avec

$$\begin{cases} a\left[(u,\theta),(u_1,\theta_1)\right] &= \displaystyle\int_\Omega 2uu_1dx+\int_\Omega \sigma(u):\varepsilon(u_1)\,dx+\alpha\int_\Omega \nabla\theta.u_1dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta\theta_1dx \\ & + \ \alpha\displaystyle\int_\Omega \theta_1 divudx+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \nabla\theta.\nabla\theta_1dx+\int_{\Gamma_2} auu_1d\Gamma+\int_{\Gamma_2} uu_1d\Gamma \\ \text{et} & \\ L\left(u_1,\theta_1\right) &= \displaystyle\int_\Omega \left[(\psi+2\varphi)\,u_1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\xi+\alpha div\varphi\right)\theta_1\right]dx+\int_{\Gamma_2}\varphi.u_1d\Gamma. \end{cases}$$

Posons $V_0=\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\times H^1_0(\Omega)$.

- Montrons que $a\left[(.,.),(.,.)\right]$ est coercive sur $V_0\times V_0$.

  Soit $(u,\theta)\in V_0$

$$\begin{aligned} a\left[(u,\theta),(u,\theta)\right] &= 2\int_\Omega |u|^2\,dx+\|u\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega\left(|\theta|^2+|\nabla\theta|^2\right)dx \\ &\geq C\left(\|u\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\|\theta\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) \end{aligned}$$

d'où la coercivité de $a\left[(.,.),(.,.)\right]$ sur $V_0\times V_0$.

- Montrons que $a\left[(.,.),(.,.)\right]$ est continue sur $V_0\times V_0$:

  Soient $(u,\theta),(u_1,\theta_1)\in V_0$, on a :

$$\begin{aligned} &\left|a\left[(u,\theta),(u_1,\theta_1)\right]\right|=2\int_\Omega |uu_1|\,dx+\int_\Omega\sigma(u):\varepsilon(u_1)\,dx+\int_{\Gamma_2}a\,|uu_1|\,d\Gamma \\ &+\int_{\Gamma_2}|uu_1|\,d\Gamma+\alpha\int_\Omega |u_1\nabla\theta|\,dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega|\theta\theta_1|\,dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega|\nabla\theta.\nabla\theta_1|\,dx+\alpha\int_\Omega|\theta_1 divu|\,dx \\ &\leq 2\|u\|_{(L^2(\Omega))^n}.\|u_1\|_{(L^2(\Omega))^n}+\int_\Omega\sigma(u):\varepsilon(u_1)\,dx+\int_{\Gamma_2}a\,|uu_1|\,d\Gamma \\ &+\|u\|_{(L^2(\Gamma_2))^n}.\|u_1\|_{(L^2(\Gamma_2))^n}+\alpha\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}.\|u_1\|_{(L^2(\Omega))^n}+\frac{\alpha}{\beta}\|\theta\|.\|\theta_1\| \\ &+\frac{\alpha}{\beta}\|\nabla\theta\|.\|\nabla\theta_1\|+\alpha\|u\|_{(L^2(\Omega))^n}.\|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

La proposition 2.1.1 donne:

$$\begin{aligned} \left|a\left[(u,\theta),(u_1,\theta_1)\right]\right| &\leq C\|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}.\|u_1\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\alpha C\|\theta\|_{H^1_0(\Omega)}\|u_1\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} \\ &+\ \frac{\alpha}{\beta}\|\theta\|_{H^1_0(\Omega)}\|\theta_1\|_{H^1_0(\Omega)}+\alpha C\|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}\|\theta_1\|_{H^1_0(\Omega)} \end{aligned}$$

où C est une constante positive.

Par conséquent

$$\left|a\left[(u,\theta),(u_1,\theta_1)\right]\right|\leq C\left(\|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\|\theta\|_{H^1_0(\Omega)}\right)\left(\|u_1\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}+\|\theta_1\|_{H^1_0(\Omega)}\right)$$

d'où la continuité de $a\left[(.,.),(.,.)\right]$ sur $V_0 \times V_0$.
$L(.,.)$ est linéaire et continue. En effet,
Soit $(u_1,\theta_1) \in V_0$, on a:

$$\begin{aligned} \left|L(u_1,\theta_1)\right| &= \left|\int_\Omega \left[(\psi+2\varphi)\,u_1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\xi + \alpha div\varphi\right)\theta_1\right]dx + \int_{\Gamma_2}\varphi.u_1 d\Gamma\right| \\ &\leq C\left(\|u_1\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|\theta_1\|_{H^1_0(\Omega)}\right) \end{aligned}$$

d'où la continuité de $L(.,.)$.

L'application du lemme de Lax Milgram assure l'existence et l'unicité d'un élément $(u,\theta) \in V_0$ tel que :

$$a\left[(u,\theta),(u_1,\theta_1)\right] = L(u_1,\theta_1)\,, \quad \forall (u_1,\theta_1) \in V_0$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(2uu_1 + \sigma(u):\varepsilon(u_1) + \alpha\nabla\theta.u_1\right)dx + \int_{\Gamma_2}(au+u)\,u_1 d\Gamma = \int_\Omega (\psi+2\varphi)\,u_1 dx \\ + \int_{\Gamma_2}\varphi u_1 d\Gamma, \qquad \forall u_1 \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta\theta_1 dx + \alpha\int_\Omega \theta_1 divu dx + \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \nabla\theta.\nabla\theta_1 dx = \int_\Omega\left(\frac{\alpha}{\beta}\xi + \alpha div\varphi\right)\theta_1 dx, \qquad \forall\theta_1 \in H^1_0(\Omega) \tag{2.1.20}$$

Si on prend $u_1 \in (\mathscr{D}(\Omega))^n$ et $\theta_1 \in \mathscr{D}(\Omega)$, on obtient :

$$\langle 2u - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta,\ u_1\rangle = \langle\psi+2\varphi,\ u_1\rangle\,, \quad \forall u_1 \in (\mathscr{D}(\Omega))^n$$

et

$$\langle\theta - \Delta\theta + \beta divu,\ \theta_1\rangle = \langle\xi + \beta div\varphi,\ \theta_1\rangle\,, \qquad \forall\theta_1 \in \mathscr{D}(\Omega)$$

d'où :

$$2u - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta = \psi + 2\varphi, \qquad \text{dans} \quad \left(\mathscr{D}'(\Omega)\right)^n \tag{2.1.21}$$

et

$$\theta - \Delta\theta + \beta divu = \xi + \beta div\varphi, \qquad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega)\ . \tag{2.1.22}$$

Comme

$$-div\sigma(u) = (\psi+2\varphi) - 2u - \alpha\nabla\theta \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$$

alors $u \in H^1(div\sigma,\ \Omega)$ et d'après le corollaire 1.2.1, $(\sigma(u).\nu)_{/\Gamma_2}$ est définie comme élément de $\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n$.
De la formule de Green (2.1.15), il vient que

$$\int_\Omega \sigma(u):\varepsilon(u_1)\,dx = \langle\sigma(u).\nu,\ u_1\rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n,\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} - \int_\Omega u_1 div\sigma(u)\,dx$$

on remplace cette intégrale dans l'équation (2.1.19), et en utilisant (2.1.21), on trouve:

$$\int_{\Gamma_2} (au+u)\, u_1 d\Gamma + \langle \sigma(u).\nu,\ u_1 \rangle_{\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n, \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^n} = \int_{\Gamma_2} \varphi u_1 d\Gamma, \qquad \forall u_1 \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$$

donc

$$(au+u) + \sigma(u).\nu = \varphi, \quad \text{sur } \Gamma_2$$

prenons $v = u - \varphi$ nous trouvons alors:

$$\sigma(u).\nu + au + v = 0, \quad \text{sur } \Gamma_2$$

puisque

$$-div\sigma(u) \in \left(L^2(\Omega)\right)^n \text{ et } \sigma(u).\nu = -au - v \in \left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n, \text{ car } \quad u,\ v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$$

alors les résultats classiques de la régularité elliptique, montrent que $u \in (H^2(\Omega))^n$.
Donc pour tout $(\varphi, \psi, \xi) \in \mathcal{H}$, il existe $(u, v, \theta) \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$(I + \mathcal{A})(u, v, \theta) = (\varphi, \psi, \xi).$$

D'où $\mathcal{A}$ est maximal.

■

Remarque 2.1.3 • $\mathcal{A}$ *(opérateur linéaire) est maximal monotone, alors* $\mathcal{A}$ *est fermé à domaine dense.*
• $\mathcal{A}$ *est maximal monotone, alors* $(-\mathcal{A})$ *engendre un* $\mathscr{C}^0$*−semi-groupe de contractions* T *sur* $\mathcal{H}$*.*

À partir des propositions 2.1.2 et 2.1.3, on en déduit le théorème d'existence, d'unicité et de la régularité des solutions suivant [2] :

Théorème 2.1.1 *Supposons que les conditions (2.0.1) et (2.0.2) sont satisfaites.*
Alors on a :
i) *Pour toute donnée initiale* $(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{H}$ *le problème* $(\mathcal{P})$ *admet une solution (au sens faible) unique* (u, θ) *qui vérifie :*

$$(u,\ u', \theta) \in C\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right).$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ *telle que :*

$$\|u\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^+;\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right)} + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;(L^2(\Omega))^n)} + \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\Omega))} \leq C\Big(\|u_0\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|u_1\|_{(L^2(\Omega))^n} + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

ii) *Si* $(u_0, u_1, \theta_0) \in D(\mathcal{A})$*, alors la solution* (u, θ) *(dite forte) du problème* $(\mathcal{P})$ *vérifie :*

$$(u, u', \theta) \in C^1\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right) \cap C^0\left(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A})\right). \tag{2.1.23}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&u \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; \left(H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right),\\
&u' \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right),\\
&u'' \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; \left(L^2(\Omega)\right)^n\right),\\
&\theta \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right)\right),\\
&\theta' \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)\right).
\end{aligned}$$

et il existe une constante $C > 0$ *telle que :*

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;(H^2(\Omega))^n)} + \|u'\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^+;\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right)} + \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;H^2(\Omega))} \leq C \Big(&\|u_0\|_{(H^2(\Omega))^n}\\
&+ \|u_1\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|\theta_0\|_{H^2(\Omega)}\Big).
\end{aligned}$$

Preuve. i) Soit $(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{H}$, la théorie des semi-groupes assure l'existence et l'unicité de la solution :

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= (u(t), u'(t), \theta(t)) \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})\\
&= T(t)\,\phi(0)
\end{aligned}$$

du problème :

$$\begin{cases}
\phi = (u, u', \theta)\\
\phi'(t) = -\mathcal{A}\phi(t), \quad t > 0\\
\phi(0) = (u_0, u_1, \theta_0)
\end{cases}$$

où $T(t)$ est le $\mathscr{C}^0-$semi-groupe de contraction engendré par l'opérateur $(-\mathcal{A})$.
Dire que $(u, u', \theta) \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$, revient à dire :

$$\begin{aligned}
u &\in C^0\left(\mathbb{R}^+; \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right)\\
u' &\in C^0\left(\mathbb{R}^+; \left(L^2(\Omega)\right)^n\right)\\
\theta &\in C^0\left(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)\right)
\end{aligned}$$

et

$$\|\phi(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\phi(0)\|_{\mathcal{H}}, \qquad \forall t \geq 0$$

avec

$$\begin{aligned}
\|\phi(t)\|_{\mathcal{H}} &= \|(u(t), u'(t), \theta(t))\|_{\mathcal{H}}\\
&= \left(\|u(t)\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|u'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \|\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\\
&= \sqrt{2}\,(E(u, \theta, t))^{1/2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|\phi(0)\|_{\mathcal{H}} &= \|(u(0), u'(0), \theta(0))\|_{\mathcal{H}} \\ &= \left(\|u(0)\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|u'(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \|\theta(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\,(E(u,\theta,0))^{1/2}.\end{aligned}$$

Alors pour tout $t \geq 0$, on a:

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L^\infty\left(\mathbb{R}^+;\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right)} + \|u'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^+;(L^2(\Omega))^n)} + \|\theta\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\Omega))} \leq C\Big(&\|u_0\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} \\ &+ \|u_1\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \|\theta_0\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\end{aligned}$$

avec $C = 1$.

ii) L'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone. Alors le théorème de Hille Yosida assure pour tout $(u_0, u_1, \theta_0) \in D(\mathcal{A})$ l'existence et l'unicité de la solution forte $\phi(t) = (u(t), u'(t), \theta(t))$ du problème :

$$\begin{cases} \phi = (u, u', \theta), \\ \phi'(t) = -\mathcal{A}\phi(t), \quad \text{sur } \mathbb{R}^+, \\ \phi(0) = (u_0, u_1, \theta_0). \end{cases}$$

On pose : $\psi(t) = \phi'(t)$, alors ψ est solution (faible) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \psi'(t) = -\mathcal{A}\psi(t), \\ \psi(0) = -\mathcal{A}\phi(0) \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

donc

$$\psi \in C\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right)$$

c'est-à-dire :

$$(u', u'', \theta') \in C\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right).$$

Comme $(u, u', \theta) \in D(\mathcal{A})$, alors $u(t) \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)^n$, $\theta(t) \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.
Comme

$$\|\phi(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{A}\phi(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\phi_0\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{A}\phi_0\|_{\mathcal{H}},$$

la proposition 2.1.2, montre que

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{(H^2(\Omega))^n} + \|u'(t)\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|\theta(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\Big(&\|u_0\|_{(H^2(\Omega))^n} \\ &+ \|u_1\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n.} + \|\theta_0\|_{H^2(\Omega)}\Big), \quad \forall t \geq 0\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}(u, u', u'', \theta, \theta') \in L^\infty\Big(\mathbb{R}^+; &\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n \\ &\times \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \times L^2(\Omega)\Big).\end{aligned}$$

■

2.2 Stabilisation exponentielle du système

Le but principal de ce paragraphe est d'établir une inégalité intégrale comme dans [1] et [17] qui permet d'obtenir la décroissance exponentielle de l'énergie du système $(\mathcal{P})$.

Rappelons le système $(\mathcal{P})$

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} u'' - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta + u' = 0, & \text{dans } \ \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta divu' = 0, & \text{dans } \ \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \theta = 0, & \text{sur } \ \Gamma\times\mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \ \Gamma_1\times\mathbb{R}^+, \\ \sigma(u).\nu + au + u' = 0, & \text{sur } \ \Gamma_2\times\mathbb{R}^+, \\ u(.,0) = u_0, \quad u'(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0, & \text{dans } \ \Omega. \end{cases}$$

Introduisons d'abord quelques notations et hypothèses utilisées par la suite **:**
Pour $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$. On pose :

$$R_0 = \max_{x\in\bar{\Omega}} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{0k})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On désigne par γ et λ_0 les plus petites constantes positives telles que :

$$\int_{\Gamma_2} |u|^2 d\Gamma \le \gamma^2 \left(\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dx + \int_{\Gamma_2} a|u|^2 d\Gamma \right), \qquad \forall u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$$

et

$$\|u\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \le \lambda_0^2 \left(\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dx + \int_{\Gamma_2} a|u|^2 d\Gamma \right), \qquad \forall u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n.$$

On suppose qu'il existe $\gamma_m < 2$ tel que :

$$m_p \partial_p (a_{ijkl})\, \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \le \gamma_m a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{2.2.1}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}, où $m_p(x) = x_p - x_{0p}$ et $\partial_p(a_{ijkl}) = \dfrac{\partial a_{ijkl}}{\partial x_p}$.
On rappelle un résultat technique qui nous sera d'une grande utilité pour la suite (cf.[12]) :

Lemme 2.2.1 *Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante. Soit $\omega_1 > 0$. Supposons que E satisfait la relation*

$$\forall t \ge 0, \qquad \int_t^{+\infty} E(s)\, ds \le \frac{1}{\omega_1} E(t). \tag{2.2.2}$$

Alors E vérifie l'estimation de décroissance suivante :

$$\forall t \ge 0, \qquad E(t) \le E(0) \exp(1 - \omega_1 t). \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.1 *Comme E est décroissante, (2.2.3) est vraie si $t \leq \dfrac{1}{\omega_1}$. Il suffit donc de démontrer que (2.2.3) est vraie pour $t \geq \dfrac{1}{\omega_1}$.*

Preuve. Soit

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad h(t) = \int_t^{+\infty} E(s)\, ds$$

h est bien définie, décroissante, positive et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
D'après (2.2.2), h satisfait l'inéquation différentielle suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad h'(t) + \omega_1 h(t) \leq 0.$$

Soit

$$T_0 := \sup \{ t : \quad h(s) > 0 \ \text{ sur } \ [0, t] \}. \tag{2.2.4}$$

(T_0 vaut éventuellement $+\infty$). Pour tout $t < T_0$, on a :

$$h(t) > 0, \ \forall t < T_0 \ \text{ et } \ \frac{h'(t)}{h(t)} \leq -\omega_1,$$

donc

$$\forall\ 0 \leq t < T_0, \quad h(t) \leq h(0) \exp(-\omega_1 t) \leq \frac{1}{\omega_1} E(0) \exp(-\omega_1 t). \tag{2.2.5}$$

Notons que, puisque $h(t) = 0$ si $t \geq T_0$, cette relation reste vraie pour tout t.
Soit $\epsilon > 0$. Comme E est positive et décroissante, on déduit de la définition de h et de l'estimation précédente que

$$\forall t \geq \epsilon, \quad E(t) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{t-\epsilon}^{t} E(s)\, ds \leq \frac{1}{\epsilon} h(t-\epsilon) \leq \frac{1}{\omega_1 \epsilon} E(0) \exp(\omega_1 \epsilon) \exp(-\omega_1 t).$$

La meilleure constante ϵ, c'est-à-dire celle qui donne la plus petite valeur à la quantité $\dfrac{\exp(\omega_1 \epsilon)}{\omega_1 \epsilon}$, est $\epsilon = \dfrac{1}{\omega_1}$. Ainsi

$$\forall t \geq \frac{1}{\omega_1}, \qquad E(t) \leq E(0) \exp(1 - \omega_1 t).$$

Ceci achève la preuve du lemme 2.2.1. ■

Voici maintenant le résultat sur la stabilisation exponentielle du problème $(\mathcal{P})$.

Théorème 2.2.1 *Soient Γ_1 et Γ_2 donnés par (2.0.1) et (2.0.2) et satisfaisant (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les coefficients a_{ijkl} vérifient (2.0.3) et (2.2.1). Alors il existe une constante $\omega > 0$ telle que pour tout $(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{H}$ l'énergie $E(u, \theta, t)$ associée à la solution (u, θ) du problème $(\mathcal{P})$ vérifie :*

$$\forall t \geq 0, \quad E(u, \theta, t) \leq E(u, \theta, 0) \exp(1 - \omega t). \tag{2.2.6}$$

2.2.1 Preuve du théorème de stabilisation exponentielle (théorème 2.2.1)

La preuve du théorème 2.2.1 est basée sur une identité fondamentale (proposition 2.2.2) donnée par la méthode des multiplicateurs décrite dans [12]. On commencera par prouver l'estimation (2.2.6) pour des données initiales régulières, c'est à dire $(u_0, u_1, \theta_0) \in D(\mathcal{A})$, on déduit alors le résultat pour les solutions faibles à l'aide d'un argument de densité. Lorsqu'on considère des données initiales régulières, la validité des calculs est acquise à l'aide de la régularité de la solution (u, θ) donnée par (2.1.23) du théorème 2.1.1.

Notre but est d'appliquer le lemme 2.2.1 à l'énergie de la solution de $(\mathcal{P})$. Pour démontrer le théorème 2.2.1, on aura besoin de quelques résultats préliminaires.

Commençons par démontrer que le système $(\mathcal{P})$ est dissipatif.

Proposition 2.2.1 *Pour tout* $(u_0, u_1, \theta_0) \in D(\mathcal{A})$, *l'énergie du système* $(\mathcal{P})$ *est décroissante et on a :*

$$E(T) - E(S) = -\frac{\alpha}{\beta}\int_S^T \int_\Omega |\nabla\theta|^2 \, dxdt - \int_S^T \int_{\Gamma_2} |u'(t)|^2 \, d\Gamma dt - \int_S^T \int_\Omega |u'(t)|^2 \, dxdt, \quad \forall 0 \leq S < T < \infty. \tag{2.2.7}$$

Preuve. Pour $(u_0, u_1, \theta_0) \in D(\mathcal{A})$, $E(.)$ est dérivable et

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega \left\{ u'u'' + \sigma(u) : \varepsilon(u') + \frac{\alpha}{\beta}\theta.\theta' \right\} dx + \int_{\Gamma_2} au.u' d\Gamma \\ &= \int_\Omega (div\sigma(u) - \alpha\nabla\theta - u') \, u' dx + \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u') \, dx \\ &+ \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta. (\Delta\theta - \beta divu') \, dx - \int_{\Gamma_2} (\sigma(u).\nu + u') \, u' d\Gamma, \end{aligned}$$

ensuite tenant compte de la régularité de $u(x,t)$ et $\theta(x,t)$ par rapport à x, des intégrations par parties faisant appel aux conditions aux limites donnent :

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega (div\sigma(u) - \alpha\nabla\theta - u') \, u' dx + \int_{\Gamma_2} (\sigma(u).\nu) \, u' d\Gamma - \int_\Omega u' div\sigma(u) \, dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta(\Delta\theta - \beta divu') \, dx - \int_{\Gamma_2} (\sigma(u).\nu) \, u' d\Gamma - \int_{\Gamma_2} |u'|^2 \, d\Gamma \\ &= -\int_\Omega |u'|^2 \, dx - \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\nabla\theta|^2 \, dx - \int_{\Gamma_2} |u'|^2 \, d\Gamma \leq 0 \end{aligned}$$

d'où E est décroissante. Intégrant entre S et T on trouve (2.2.7). ∎

Les deux lemmes suivants seront utiles pour la preuve du théorème 2.2.1.
On définit le multiplicateur suivant :

$$M(u) = 2(m.\nabla)u + \left((n-1) + \frac{\gamma_m}{2}\right)u$$

où γ_m est défini par (2.2.1).

Lemme 2.2.2 *Soit (u,θ) une solution forte de $(\mathcal{P})$. Il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\|M(u)(t)\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq \eta E(t), \qquad \forall t \geq 0.$$

Preuve. On calcule $\|M(u)(t)\|_{(L^2(\Omega))^n}$.

$$\begin{aligned}
&\|M(u)(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} = \int_\Omega \Big(|2(m.\nabla)u|^2 + (n-1)^2|u|^2 + 2\gamma_m u(m\nabla)u \\
&+2(n-1)m\nabla\left(|u|^2\right) + (n-1)\gamma_m|u|^2 + \frac{\gamma_m^2}{4}|u|^2\Big)dx \\
&= \int_\Omega \left(|2(m.\nabla)u|^2 + (1-n^2)|u|^2\right)dx + 2(n-1)\int_{\Gamma_2} m.\nu|u|^2 d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma_2}\gamma_m m.\nu|u|^2 d\Gamma - n\int_\Omega \gamma_m|u|^2 dx + \int_\Omega\left((n-1)\gamma_m|u|^2 + \frac{\gamma_m^2}{4}|u|^2\right)dx \\
&= \int_\Omega\left(|2(m.\nabla)u|^2 + \left(1-n^2+\frac{(\gamma_m-4)\gamma_m}{4}\right)|u|^2\right)dx \\
&+ \int_{\Gamma_2} m.\nu(2(n-1)+\gamma_m)|u|^2 d\Gamma \\
&\leq 4R_0^2\int_\Omega|\nabla u|^2 dx + C_1(\gamma_m)\int_\Omega|u|^2 dx + R_0C_1(\gamma_m)\int_{\Gamma_2}|u|^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Korn, on peut avoir le plus petit nombre positif R_1 (dépend de m et $C_1(\gamma_m)$) qui vérifie pour tout $u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$

$$\begin{aligned}
4R_1^2\left(\int_\Omega\sigma(u):\varepsilon(u)dx + \int_{\Gamma_2}a|u|^2 d\Gamma\right) &\geq 4R_0^2\int_\Omega|\nabla u|^2 dx + C_1(\gamma_m)\int_\Omega|u|^2 dx \\
&+R_0C_1(\gamma_m)\int_{\Gamma_2}|u|^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
\|M(u)(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} &\leq 4R_1^2\left(\int_\Omega\sigma(u):\varepsilon(u)dx + \int_{\Gamma_2}a|u|^2 d\Gamma\right) \\
&\leq 8R_1^2E(t)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\|M(u)(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \leq \eta E(t), \quad \text{avec } \eta = 8R_1^2 > 0.$$

■

Lemme 2.2.3 *Soit (u,θ) une solution forte du système $(\mathcal{P})$. Il existe une constante positive C telle que :*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} a\,|u|^2\, d\Gamma dt \leq \frac{C}{\epsilon} E(0) + \epsilon \int_0^T E(t)\, dt,$$

pour tout $\epsilon > 0$ et tout $T > 0$.

Preuve. Nous procédons comme dans [1] ou [12]. On désigne par C une constante positive assez grande.

Pour $t \geq 0$, on considère la fonction $z = z(t)$, solution du problème

$$\begin{cases} div\sigma(z) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ z = u, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

z s'écrit sous la forme $z = w + u$, où $w \in (H_0^1(\Omega))^n$ est la solution du problème variationnel

$$\int_\Omega \sigma(w) : \varepsilon(v)\, dx = -\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v)\, dx, \quad \forall v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma(w) \quad &: \quad \varepsilon(v)\, dx = \int_\Omega \sigma(z-u) : \varepsilon(v)\, dx \\ &= \quad -\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v)\, dx, \quad \forall v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(v)\, dx = 0, \quad \forall v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n. \tag{2.2.9}$$

En prenant $v = z - u$ dans (2.2.9), on obtient :

$$\int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(u)\, dx = \int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(z)\, dx \geq 0. \tag{2.2.10}$$

La solution z du problème (2.2.8) est obtenue par transposition. La fonction z vérifie l'identité :

$$\int_\Omega fz\ dx = -\int_\Gamma z\left(\sigma(v_f).\nu\right) d\Gamma, \qquad \forall f \in \left(L^2(\Omega)\right)^n \tag{2.2.11}$$

où $v_f \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^n$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -div\sigma(v_f) = f & \text{dans } \Omega, \\ \quad v_f = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.2.12}$$

ou sous forme variationnelle

$$\int_\Omega \sigma(v_f) : \varepsilon(v)\, dx = \int_\Omega fv\, dx, \qquad \forall v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n. \tag{2.2.13}$$

En fait (2.2.11) est la définition par dualité de z. On considère la forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} L : \left(L^2(\Omega)\right)^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & -\int_{\Gamma_2} u\left(\sigma\left(v_f\right).\nu\right) d\Gamma \end{array}$$

L est continue. Il existe $z \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$ unique tel que

$$L(f) = \int_\Omega f z\, dx, \qquad \forall f \in \left(L^2(\Omega)\right)^n.$$

En effet, d'après (2.2.9), on a :

$$\int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon\left(v_f\right) dx = 0 = \int_\Omega \sigma\left(v_f\right) : \varepsilon(z)\, dx.$$

Comme le bord Γ est de classe C^2, la régularité elliptique montre que $v_f \in \left(H^2(\Omega)\right)^n$ car $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$ et $v_f \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n$, ce qui donne

$$-\int_\Omega z div \sigma\left(v_f\right) dx + \int_{\Gamma_2} z\left(\sigma\left(v_f\right).\nu\right) d\Gamma = 0$$

(2.2.11) découle alors de (2.2.12).
En prenant $f = z$ dans (2.2.11), on obtient :

$$\begin{array}{l} \int_\Omega |z|^2\, dx = -\int_{\Gamma_2} u\left(\sigma\left(v_z\right).\nu\right) d\Gamma \leq \\ \qquad \|u\|_{\left(L^2(\Gamma_2)\right)^n} \left\|\sigma\left(v_z\right).\nu\right\|_{\left(L^2(\Gamma_2)\right)^n}. \end{array}$$

On a:

$$\left\|v_z\right\|_{\left(H^2(\Omega)\right)^n} \leq k \|z\|_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}, \quad \text{où } k \text{ est une constante positive} \tag{2.2.14}$$

l'estimation (2.2.14) et le théorème standard de trace donnent :

$$\left\|\sigma\left(v_z\right).\nu\right\|_{\left(L^2(\Gamma_2)\right)^n} \leq k_1 \|z\|_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}, \quad \text{pour une constante } k_1 \text{ positive}$$

donc on aura :

$$\int_\Omega |z|^2\, dx \leq k_1 \|z\|_{\left(L^2(\Omega)\right)^n} \|u\|_{\left(L^2(\Gamma_2)\right)^n}.$$

En simplifiant par $\|z\|_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}$, on obtient :

$$\|z\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n} \leq c_0 \|u\|^2_{\left(L^2(\Gamma_2)\right)^n} \tag{2.2.15}$$

où c_0 est une constante positive indépendante de u.
D'autre part, en dérivant par rapport à t, on voit que z' est solution du problème

$$\begin{cases} div\left(\sigma\left(z'\right)\right) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ z' = u', & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

d'où :

$$\int_{\Omega} |z'|^2 \, dx \leq c_0 \int_{\Gamma_2} |u'|^2 \, d\Gamma \tag{2.2.16}$$

où c_0 est une constante positive.

Pour $0 < T < \infty$, on pose :

$$\begin{aligned} Q_T &= \Omega \times (0,T)\,, \qquad & \Sigma_T = \Gamma \times (0,T)\,, \\ \Sigma_{1T} &= \Gamma_1 \times (0,T)\,; \qquad & \Sigma_{2T} = \Gamma_2 \times (0,T) \end{aligned}$$

On multiplie la première équation de $(\mathcal{P})$ par z, puis on intègre par parties sur Q_T en tenant compte des conditions aux bords dans $(\mathcal{P})$ et (2.2.8); on obtient :

$$\int_{Q_T} (zu'' + \sigma(z) : \varepsilon(u) + \alpha z.\nabla\theta + zu')\, dxdt + \int_{\Sigma_{2T}} u\,(au + u')\, d\Sigma = 0.$$

Une intégration par parties par rapport à t et (2.2.10) donnent :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{2T}} a\,|u|^2 \, d\Sigma \;\leq\; & -\int_{\Sigma_{2T}} uu' d\Sigma + \int_{Q_T} z'u' dxdt - \alpha \int_{Q_T} z.\nabla\theta dxdt - \\ & \int_{Q_T} u'z \; dxdt - \left[\int_{\Omega} zu' dx \right]_0^T . \end{aligned}$$

Soit $\epsilon_0 > 0$. L'inégalité de Young, les estimations (2.2.15), (2.2.16) et l'identité (2.2.7), donnent :

$$\begin{aligned} -\int_{\Sigma_{2T}} uu' d\Sigma \;&\leq\; \epsilon_0 \int_{\Sigma_{2T}} |u|^2 \, d\Sigma + \frac{1}{4\epsilon_0} \int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2 \, d\Sigma \\ &\leq\; \epsilon_0 \gamma^2 \left(\int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dxdt + \int_{\Sigma_{2T}} a\,|u|^2 \, d\Sigma \right) + \frac{1}{4\epsilon_0} \int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2 \, d\Sigma \\ &\leq\; 2\epsilon_0 \gamma^2 \int_0^T E(t)\, dt + \frac{1}{4\epsilon_0} E(0)\,. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} z'u' dxdt \;&\leq\; \epsilon_0 \int_{Q_T} |u'|^2 \, dxdt + \frac{1}{4\epsilon_0} \int_{Q_T} |z'|^2 \, dxdt \\ &\leq\; 2\epsilon_0 \int_0^T E(t)\, dt + \frac{c_0}{4\epsilon_0} \int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2 \, d\Sigma \\ &\leq\; 2\epsilon_0 \int_0^T E(t)\, dt + \frac{c_0}{4\epsilon_0} E(0)\,. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

$$\begin{aligned} -\alpha \int_{Q_T} z.\nabla\theta \; dxdt \;&\leq\; \frac{\alpha^2}{4\epsilon_0} \int_{Q_T} |\nabla\theta|^2 \, dxdt + \epsilon k_1^2 \int_{Q_T} |z|^2 \, dxdt \\ &\leq\; \frac{\alpha\beta}{4\epsilon_0} E(0) + \epsilon_0 k_1^2 \int_{\Sigma_{2T}} |u|^2 \, d\Sigma \\ &\leq\; \frac{\alpha\beta}{4\epsilon_0} E(0) + 2c_0 \epsilon_0 \gamma^2 \int_0^T E(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

$$
\begin{aligned}
-\int_{Q_T} zu'\,dxdt &\leq \epsilon_0 \int_{Q_T} |z|^2\,dxdt + \frac{1}{4\epsilon_0}\int_{Q_T} |u'|^2\,dxdt \\
&\leq 2c_0\epsilon_0\gamma^2 \int_0^T E(t)\,dt + \frac{1}{4\epsilon_0}E(0). \qquad (2.2.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\left[\int_\Omega zu'dx\right]_0^T &= \left[\int_\Omega zu'dx\right]_T^0 \leq \|z(0)\|\,\|u'(0)\| + \frac{1}{2}\left(\|u(T)\|^2 + \|u'(T)\|^2\right) \\
&\leq E(0) + c_0\gamma^2 E(T) \\
&\leq \left(1+c_0\gamma^2\right)E(0). \qquad (2.2.21)
\end{aligned}
$$

On obtient l'estimation du lemme 2.2.3 avec

$$
C = \left(\frac{1}{2} + \frac{c_0}{4} + \frac{\alpha\beta}{4} + 2\left(1+c_0\gamma^2\right)\right)\left(2\gamma^2 + 2 + 4c_0\gamma^2\right)
$$

en faisant la somme de (2.2.17) à (2.2.21), et en prenant

$$
\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2\gamma^2 + 2 + 4c_0\gamma^2}.
$$

Ceci achève la preuve du lemme 2.2.3. ■

La proposition suivante nous donne une identité fondamentale pour la démonstration de notre résultat de stabilité.

Proposition 2.2.2 *Toute solution forte (u,θ) du système $(\mathcal{P})$ vérifie l'identité:*

$$
\begin{aligned}
(2-\gamma_m)\int_0^T E(t)\,dt = &-\left[(u', M(u))_\Omega\right]_0^T + \int_{\Sigma_{2T}}\left((m.\nu)|u'|^2 + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)a|u|^2\right)d\Gamma dt \\
&- \int_{Q_T} u'.M(u)\,dxdt - \alpha\int_{Q_T}\nabla\theta.M(u)\,dxdt + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T}|\theta|^2\,dxdt \\
&+ \int_{\Sigma_T}\left[(\sigma(u).\nu).M(u) - m.\nu\,(\sigma(u):\varepsilon(u))\right]d\Gamma dt \\
&+ \int_{Q_T} m_p\partial_p(a_{ijkl})\,\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{kl}(u)\,dxdt - \gamma_m\int_{Q_T}\sigma(u):\varepsilon(u)\,dxdt. \qquad (2.2.22)
\end{aligned}
$$

Preuve. On utilise la technique des multiplicateurs (cf.[12, 15]); on multiplie la première équation de $(\mathcal{P})$ par :

$$
M(u)(t) = 2(m.\nabla)u + \left(n-1+\frac{\gamma_m}{2}\right)u.
$$

Puis on intègre sur Q_T, on obtient :

$$
\int_{Q_T} u''.M(u)\,dxdt - \int_{Q_T} div(\sigma(u)).M(u)\,dxdt + \int_{Q_T}\alpha\nabla\theta.M(u)\,dxdt + \int_{Q_T} u'.M(u)\,dxdt = 0. \qquad (2.2.23)
$$

On calcule chacun des termes.

*

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} u''.M(u)\,dxdt &= \left[(u',M(u))_{\Omega}\right]_0^T - \int_{Q_T} u'\left[2(m.\nabla)u' + \left((n-1)+\frac{\gamma_m}{2}\right)u'\right]dxdt\\ &= \left[(u',M(u))_{\Omega}\right]_0^T - 2\int_{Q_T} u_i' m_k \partial_k u_i' dxdt - \left((n-1)+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} |u'|^2 dxdt\\ &= \left[(u',M(u))_{\Omega}\right]_0^T - \int_{Q_T} m_k\partial_k |u'|^2 dxdt - \left((n-1)+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} |u'|^2 dxdt\\ &= \left[(u',M(u))_{\Omega}\right]_0^T + n\int_{Q_T} |u'|^2 dxdt - \left((n-1)+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} |u'|^2 dxdt\\ &\quad - \int_{\Sigma_{2T}} (m.\nu)|u'|^2 d\Gamma dt.\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{Q_T} u''.M(u)\,dxdt = \left[(u',M(u))_{\Omega}\right]_0^T + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} |u'|^2 dxdt - \int_{\Sigma_{2T}} (m.\nu)|u'|^2 d\Gamma dt. \tag{2.2.24}$$

**

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} M(u).div(\sigma(u))\,dxdt = \int_{\Sigma_T} (\sigma(u).\nu)M(u)\,d\Gamma dt - \int_{Q_T} \sigma(u):\varepsilon(M(u))\,dxdt\\ &= \int_{\Sigma_T} (\sigma(u).\nu).M(u)\,d\Gamma dt - \int_{Q_T} \sigma_{ij}(u)\partial_j\left[2m_p\partial_p u_i + \left(n-1+\frac{\gamma_m}{2}\right)u_i\right]dxdt\\ &= \int_{\Sigma_T} (\sigma(u).\nu).M(u)\,d\Gamma dt - 2\int_{Q_T} \sigma_{ij}(u)\partial_j(m_p\partial_p u_i)\,dxdt\\ &\quad - \left(n-1+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)\,dxdt\\ &= \int_{\Sigma_T} (\sigma(u).\nu).M(u)\,d\Gamma dt - 2\int_{Q_T} \sigma(u):\varepsilon(u)\,dxdt\\ &\quad - \left(n-1+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} \sigma(u):\varepsilon(u)\,dxdt - 2\int_{Q_T} \sigma_{ij}(u)m_p\partial_p\varepsilon_{ij}(u)\,dxdt\\ &= \int_{\Sigma_T} (\sigma(u).\nu).M(u)\,d\Gamma dt - \left(n+1+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} \sigma(u):\varepsilon(u)\,dxdt\\ &\quad - \int_{Q_T} m_p\partial_p(\sigma(u):\varepsilon(u))\,dxdt + \int_{Q_T} m_p\partial_p(a_{ijkl})\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(u)\,dxdt\\ &= \int_{\Sigma_T} (\sigma(u).\nu).M(u)\,d\Gamma dt - \left(n+1+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} \sigma(u):\varepsilon(u)\,dxdt\\ &+n\int_{Q_T} \sigma(u):\varepsilon(u)\,dxdt - \int_{\Sigma_T} m.\nu(\sigma(u):\varepsilon(u))\,d\Gamma dt + \int_{Q_T} m_p\partial_p(a_{ijkl})\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(u)\,dxdt,\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} M(u)\,div(\sigma(u))\,dxdt &= \int_{\Sigma_T} \left[(\sigma(u).\nu)M(u) - m.\nu(\sigma(u):\varepsilon(u))\right]d\Gamma dt\\ &\quad - \left(1+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} \sigma(u):\varepsilon(u)\,dxdt + \int_{Q_T} m_p\partial_p(a_{ijkl})\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(u)\,dxdt,\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

(2.2.23), (2.2.24) et (2.2.25) permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}
&[(u', M(u))_\Omega]_0^T + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} |u'|^2\, dxdt - \int_{\Sigma_{2T}} (m.\nu)\, |u'|^2\, d\Gamma dt \\
&+ \int_{Q_T} u'.M(u)\, dxdt + \int_{\Sigma_T} [m.\nu\, (\sigma(u) : \varepsilon(u)) - (\sigma(u).\nu).M(u)]\, d\Gamma dt \\
&+ \left(1+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dxdt + \int_{Q_T} \alpha \nabla\theta.M(u)\, dxdt \\
&- \int_{Q_T} m_p \partial_p (a_{ijkl})\, \varepsilon_{ij}(u)\, \varepsilon_{kl}(u)\, dxdt = 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} \left(|u'|^2 + \sigma(u) : \varepsilon(u)\right) dxdt = -\gamma_m \int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dxdt \\
&\quad - [(u', M(u))_\Omega]_0^T + \int_{\Sigma_{2T}} (m.\nu)\, |u'|^2\, d\Gamma dt - \alpha \int_{Q_T} \nabla\theta.M(u)\, dxdt \\
&\quad + \int_{\Sigma_T} [(\sigma(u).\nu)\, M(u) - m.\nu\, (\sigma(u) : \varepsilon(u))]\, d\Gamma dt \\
&\quad - \int_{Q_T} u'.M(u)\, dxdt + \int_{Q_T} m_p \partial_p (a_{ijkl})\, \varepsilon_{ij}(u)\, \varepsilon_{kl}(u)\, dxdt,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
&(2-\gamma_m)\int_0^T E(t)\, dt = -[(u', M(u))_\Omega]_0^T + \int_{\Sigma_{2T}} \left((m.\nu)\, |u'|^2 + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right) a\, |u|^2\right) d\Gamma dt \\
&\quad - \alpha \int_{Q_T} \nabla\theta.M(u)\, dxdt + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T} |\theta|^2\, dxdt \\
&\quad + \int_{Q_T} m_p \partial_p (a_{ijkl})\, \varepsilon_{ij}(u)\, \varepsilon_{kl}(u)\, dxdt - \int_{Q_T} u'.M(u)\, dxdt \\
&\quad - \gamma_m \int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dxdt + \int_{\Sigma_T} [(\sigma(u).\nu).M(u) - m.\nu\, (\sigma(u) : \varepsilon(u))]\, d\Gamma dt
\end{aligned}$$

on obtient alors l'identité

$$\begin{aligned}
&(2-\gamma_m)\int_0^T E(t)\, dt = -[(u', M(u))_\Omega]_0^T + \int_{\Sigma_{2T}} \left((m.\nu)\, |u'|^2 + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right) a\, |u|^2\right) d\Gamma dt \\
&- \int_{Q_T} u'.M(u)\, dxdt - \alpha \int_{Q_T} \nabla\theta.M(u)\, dxdt + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T} |\theta|^2\, dxdt \\
&+ \int_{\Sigma_T} [(\sigma(u).\nu).M(u) - m.\nu\, (\sigma(u) : \varepsilon(u))]\, d\Gamma dt \\
&-\gamma_m \int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dxdt + \int_{Q_T} m_p \partial_p (a_{ijkl})\, \varepsilon_{ij}(u)\, \varepsilon_{kl}(u)\, dxdt.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du proposition 2.2.2. ■

Dans le reste de ce paragraphe on cherchera des estimations adéquates pour chaque terme de l'identité (2.2.22) dans le but de parvenir à une inégalité de la forme

$$\int_0^T E(t)\, dt \leq CE(0), \qquad \forall T > 0$$

où C est une constante qui ne dépend pas de T; en faisant tendre T vers $+\infty$, on déduit l'inégalité $\int_0^{+\infty} E(t)\,dt \leq CE(0)$ puis le lemme 2.2.1 (ce qui est possible puisque le système est invariant par translation) nous donnera

$$E(t) \leq E(0)\exp\left(1-\frac{t}{C}\right), \quad \forall t \geq 0.$$

L'identité (2.2.22) de la proposition 2.2.2 est équivalente à

$$(2-\gamma_m)\int_0^T E(t)\,dt = \sum_{i=1}^{6} I_i,$$

avec :

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\left[(u', M(u))_\Omega\right]_0^T, \\
I_2 &= \int_{\Sigma_{2T}} \left(m.\nu\,|u'|^2 + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right) a\,|u|^2\right) d\Gamma dt, \\
I_3 &= -\int_{Q_T} u'.M(u)\,dxdt, \\
I_4 &= -\alpha\int_{Q_T} \nabla\theta.M(u)\,dxdt + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T} |\theta|^2\,dxdt, \\
I_5 &= \int_{\Sigma_T} \left[(\sigma(u).\nu).M(u) - m.\nu\,(\sigma(u):\varepsilon(u))\right] d\Gamma dt, \\
I_6 &= \int_{Q_T} m_p\partial_p(a_{ijkl})\,\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{kl}(u)\,dxdt - \gamma_m\int_{Q_T}\sigma(u):\varepsilon(u)\,dxdt.
\end{aligned}$$

Il reste à estimer chaque terme I_j, $j = 1, ..., 6$.

* **Estimations de I_1 et I_3 :**

Pour $t \geq 0$ et $\epsilon > 0$ fixé, on a :

$$\int_\Omega u'(t).M(u)(t)\,dx \leq \frac{1}{2\epsilon}\|u'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \frac{\epsilon}{2}\|M(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}.$$

D'après le lemme 2.2.2 et la proposition 2.2.1, il existe deux constantes positives k_1 et k_3 telles que :

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{2\epsilon}\|u'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\Big|_0^T + \frac{\epsilon\eta}{2}E(t)\Big|_0^T \\
&\leq \left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{\epsilon\eta}{2}\right)E(0) \\
&\leq k_1E(0)
\end{aligned}$$

d'où :

$$I_1 \leq k_1E(0), \quad \text{avec} \quad k_1 = \left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{\epsilon\eta}{2}\right) > 0. \tag{2.2.26}$$

Et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} I_3 &= -\int_{Q_T} u'.M(u)\,dxdt \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon}\int_{Q_T} |u'|^2\,dxdt + \frac{\epsilon\eta}{2}\int_0^T E(t)\,dt \\ &\leq \frac{k_3}{\epsilon}E(0) + k_3\epsilon\int_0^T E(t)\,dt \end{aligned}$$

d'où :

$$I_3 \leq \frac{k_3}{\epsilon}E(0) + k_3\epsilon\int_0^T E(t)\,dt. \tag{2.2.27}$$

* **Estimation de** I_2 :

$$I_2 = \int_{\Sigma_{2T}} \left(m.\nu\,|u'|^2 + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right) a\,|u|^2\right) d\Sigma.$$

Comme $R_0 = \max_{x\in\bar{\Omega}}\left(\sum_{k=1}^n (x_k - x_{0k})^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\|\nu\| = 1$, alors :

$$I_2 \leq R_0\int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2\,d\Sigma + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\int_{\Sigma_{2T}} a\,|u|^2\,d\Sigma$$

d'après le lemme 2.2.3, il existe une constante positive k_2 telle que :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq R_0\int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2\,d\Sigma + \frac{k_2}{\epsilon}E(0) + \epsilon\int_0^T E(t)\,dt \\ &\leq R_0E(0) + \frac{k_2}{\epsilon}E(0) + \epsilon\int_0^T E(t)\,dt \\ &\leq k_4E(0) + \epsilon\int_0^T E(t)\,dt \end{aligned}$$

d'où :

$$I_2 \leq k_4E(0) + \epsilon\int_0^T E(t)\,dt, \qquad \text{avec } \; k_4 = \left(R_0 + \frac{k_2}{\epsilon}\right) > 0. \tag{2.2.28}$$

* **Estimation de** I_4 :

$$\begin{aligned} I_4 &= -\alpha\int_{Q_T} \nabla\theta.M(u)\,dxdt + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T} |\theta|^2\,dxdt \\ &= -2\alpha\int_{Q_T} \nabla\theta.(m.\nabla)\,u\;dxdt - \alpha\left(n-1+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{Q_T} \nabla\theta.u\;dxdt \\ &\quad + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T} |\theta|^2\,dxdt. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young et la définition de R_0 donnent :

$$\begin{aligned} I_4 \leq\; & \frac{\alpha^2R_0^2}{\epsilon}\int_{Q_T} |\nabla\theta|^2\,dxdt + \epsilon\int_{Q_T} |\nabla u|^2\,dxdt + \frac{\alpha^2}{4\epsilon}\left(n-1+\frac{\gamma_m}{2}\right)^2\int_{Q_T} |\nabla\theta|^2\,dxdt \\ & +\epsilon\int_{Q_T} |u|^2\,dxdt + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T} |\theta|^2\,dxdt. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante positive λ_0 telle que :

$$\int_{Q_T} |\theta|^2 \, dxdt \leq \lambda_0^2 \int_{Q_T} |\nabla\theta|^2 \, dxdt, \qquad \forall \theta \in H_0^1(\Omega)$$

donc

$$\begin{aligned} I_4 \;&\leq\; \left[\frac{\alpha\beta\left(n-1+\frac{\gamma_m}{2}\right)^2}{4\epsilon} + \frac{\alpha\beta R_0^2}{\epsilon} + \left(\frac{2-\gamma_m}{2}\right)\lambda_0^2 \right] \int_{Q_T} \frac{\alpha}{\beta} |\nabla\theta|^2 \, dxdt \\ &\quad +\epsilon \int_{Q_T} \left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right) dxdt. \end{aligned}$$

L'identité (2.2.7) donne :

$$I_4 \leq k_5 E(0) + \epsilon \int_{Q_T} \left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right) dxdt, \quad \text{où } k_5 \text{ est une constante positive.} \tag{2.2.29}$$

Donc il nous reste à majorer le dernier terme de (2.2.29).

On a :

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |u|^2 \, dxdt \;&\leq\; \lambda^2 \left(\int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u) \, dxdt + \int_{\Sigma_{2T}} a |u|^2 \, d\Sigma \right) \\ &\leq\; 2\lambda^2 \int_0^T E(t) \, dt. \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

On sait de ([15], p.231), qu'il existe $\gamma_1 > 0$ tel que :

$$\int_{Q_T} |\nabla u|^2 \, dxdt \leq \gamma_1 \left(\int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u) \, dxdt + \int_{\Sigma_{2T}} |u|^2 \, d\Sigma \right), \qquad \forall u \in \left(H^1(\Omega)\right)^n$$

Si $a(x) \neq 0$, alors $\exists k_0 > 0$ tel que $a(x) \geq k_0$, où $k_0 = \inf\limits_{x \in \Gamma_2} a(x)$, (car Γ_2 est compacte et $a(.)$ est continue)

alors on aura

$$\int_{\Sigma_{2T}} a |u|^2 \, d\Sigma \geq k_0 \int_{\Sigma_{2T}} |u|^2 \, d\Sigma$$

par conséquent

$$\int_{Q_T} |\nabla u|^2 \, dxdt \leq \gamma' \left(\int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u) \, dxdt + \int_{\Sigma_{2T}} a |u|^2 \, d\Sigma \right), \qquad \forall u \in \left(H_{\Gamma_1}^1(\Omega)\right)^n$$

d'où :

$$\int_{Q_T} |\nabla u|^2 \, dxdt \leq 2\gamma' \int_{Q_T} E(t) \, dt \tag{2.2.31}$$

où $\gamma' = \max\left(\gamma_1, \frac{\gamma_1}{k_0}\right) > 0$.

Les estimations (2.2.30) et (2.2.31) donnent :

$$\epsilon \int_{Q_T} \left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right) dxdt \leq \epsilon \left(2\lambda^2 + 2\gamma'\right) \int_0^T E(t) \, dt.$$

Finalement, on obtient :

$$I_4 \leq k_5 E(0) + \epsilon k_5' \int_0^T E(t)\,dt \tag{2.2.32}$$

où k_5 et k_5' sont deux constantes positives.

* **Estimation de** I_5 :

L'estimation de I_5 est basée sur l'utilisation des coordonnées locales comme dans [1] ou [10].

On a :

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{\Sigma_T} \left[(\sigma(u).\nu).M(u) - m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u) \right] d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma_{1T}} \left[(\sigma(u).\nu).M(u) - m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u) \right] d\Sigma \\ &\quad + \int_{\Sigma_{2T}} \left[(\sigma(u).\nu).M(u) - m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u) \right] d\Sigma. \end{aligned}$$

On pose :

$$\mathcal{J}_1 = \int_{\Sigma_{1T}} \left[(\sigma(u).\nu).M(u) - m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u) \right] d\Sigma$$

et

$$\mathcal{J}_2 = \int_{\Sigma_{2T}} \left[(\sigma(u).\nu).M(u) - m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u) \right] d\Sigma.$$

· Considérons le terme $\mathcal{J}_1$.

On a :

$$M(u) = 2(m.\nabla)u + \left(n - 1 + \frac{\gamma_m}{2}\right)u$$

et

$$\nabla u = \overline{\pi \partial_T u_T \pi} + u_\nu (\partial_T \nu) + \nu \overline{\partial_\nu u_T} + \left(\overline{\partial_T u_\nu} - (\partial_T \nu) u_T + \nu (\partial_\nu u_\nu)\right) \bar{\nu}, \quad \text{sur } \Gamma.$$

La condition au bord de Dirichlet sur Γ_1 donne

$$M(u) = 2(m.\nabla)u$$

et

$$\nabla u = \nu \overline{\partial_\nu u_T} + \nu (\partial_\nu u_\nu) \bar{\nu}, \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

Calculons $2(m.\nabla)u$, on aura :

$$\begin{aligned} 2m.\nabla u &= 2m.\left(\nu \overline{\partial_\nu u_T} + \nu (\partial_\nu u_\nu) \bar{\nu}\right) \\ &= 2\left((\partial_\nu u_T)\bar{\nu} + \nu (\partial_\nu u_\nu) \bar{\nu}\right).(m_T + m_\nu \nu) \\ &= 2m.\nu \partial_\nu u \end{aligned}$$

d'où :

$$M(u) = 2m.\nu\partial_\nu u, \quad \text{sur} \ \ \Gamma_1. \tag{2.2.33}$$

Ensuite, on a (voir chapitre des rappels)

$$\varepsilon(u) = \varepsilon_T(u) + \nu\overline{\varepsilon_S(u)} + \varepsilon_S(u)\bar{\nu} + \varepsilon_\nu(u)\nu\bar{\nu}, \qquad \text{sur} \ \ \Gamma$$

avec :

$$\begin{aligned}
&2\varepsilon_T(u) = \pi(\partial_T u_T)\pi + \pi\overline{\partial_T u_T}\pi + 2u_\nu\partial_T\nu,\\
&2\varepsilon_S(u) = \partial_\nu u_T + \nabla_T u_\nu - (\partial_T\nu)u_T,\\
&\varepsilon_\nu(u) = \partial_\nu u_\nu.
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

De façon analogue on peut écrire :

$$\sigma(u) = \sigma_T(u) + \nu\overline{\sigma_S(u)} + \sigma_S(u)\bar{\nu} + \sigma_\nu(u)\nu\bar{\nu}, \qquad \text{sur} \ \ \Gamma.$$

La condition au bord de Dirichlet sur Γ_1 donne

$$\varepsilon_T(u) = 0, \qquad \text{et} \qquad 2\varepsilon_S(u) = \partial_\nu u_T, \quad \text{sur} \ \ \Gamma_1$$

et

$$\sigma(u).\nu = \sigma_S(u) + \sigma_\nu(u).\nu, \qquad \text{sur} \ \ \Gamma_1. \tag{2.2.35}$$

Calculons $(\sigma(u).\nu).M(u)$, en utilisant (2.2.33) et (2.2.35), on obtient :

$$\begin{aligned}
(\sigma(u).\nu).M(u) &= M(u).\left(\overline{\sigma(u).\nu}\right), \qquad \text{sur} \ \ \Gamma_1\\
&= 2(m.\nu\partial_\nu u).\left(\overline{\sigma_S(u)} + \sigma_\nu(u).\bar{\nu}\right), \quad \text{sur} \ \ \Gamma_1\\
&= 2m.\nu\left(\overline{\sigma_S(u)}\partial_\nu u_T + \sigma_\nu(u)\partial_\nu u_\nu\right), \qquad \text{sur} \ \ \Gamma_1.
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\sigma(u) : \varepsilon(u) = \sigma_T(u) : \varepsilon_T(u) + 2\overline{\sigma_S(u)}\varepsilon_S(u) + \sigma_\nu(u)\varepsilon_\nu(u).$$

La condition au bord de Dirichlet sur Γ_1 donne :

$$\sigma(u) : \varepsilon(u) = 2\overline{\sigma_S(u)}\varepsilon_S(u) + \sigma_\nu(u)\varepsilon_\nu(u)$$

puisque $\varepsilon_\nu(u) = \partial_\nu u_\nu$ et $2\varepsilon_S(u) = \partial_\nu u_T$, sur Γ_1, alors :

$$\sigma(u) : \varepsilon(u) = \overline{\sigma_S(u)}\partial_\nu u_T + \sigma_\nu(u)\partial_\nu u_\nu, \quad \text{sur} \ \ \Gamma_1$$

donc

$$(\sigma(u).\nu).M(u) = 2m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u), \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

En remplaçant cette dernière identité dans $\mathcal{J}_1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &= \int_{\Gamma_1} [2m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u) - m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u)]\, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_1} m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u)\, d\Gamma.\end{aligned}$$

Comme $m.\nu \leq 0$ sur Γ_1 et $\sigma(u) : \varepsilon(u) \geq 0$, on en déduit que

$$\mathcal{J}_1 \leq 0. \tag{2.2.36}$$

· Considérons, maintenant, le terme $\mathcal{J}_2$.

La condition au bord sur Γ_2 donne :

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma(u).\nu).M(u)\, d\Gamma = -\int_{\Gamma_2} 2(au+u').(m.\nabla)u d\Gamma - \left(n-1+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_{\Gamma_2} u.(au+u')\, d\Gamma$$

alors

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2 = &-\int_0^T \int_{\Gamma_2} 2(au+u').(m.\nabla)u d\Gamma dt - \left(n-1+\frac{\gamma_m}{2}\right)\int_0^T \int_{\Gamma_2} u(au+u')\, d\Gamma dt \\ &-\int_0^T \int_{\Gamma_2} m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u)\, d\Gamma dt.\end{aligned}$$

Cette identité, l'estimation (2.2.36), la condition d'ellipticité (2.0.3) et l'expression (1.5.27) (voir page 33) permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}I_5 \leq\; & C\int_{\Sigma_{2T}} \left(|u|^2 + |u'|^2\right) d\Sigma - \int_0^T \int_{\Gamma_2} 2(au+u').(m.\nabla)u d\Gamma dt \\ &-k\delta \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left(\varepsilon_T(u) : \varepsilon_T(u) + 2|\varepsilon_S(u)|^2 + |\varepsilon_\nu(u)|^2\right) d\Gamma dt\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

où C désigne ici et dans la suite une constante positive assez grande indépendante de u.
k est une constante positive telle que $m.\nu \geq k > 0$, sur Γ_2.
Il s'agit maintenant de majorer l'intégrale $\int_0^T \int_{\Gamma_2} 2(au+u').(m.\nabla)u\, d\Gamma dt$.

Posons :

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^T \int_{\Gamma_2} 2au.(m.\nabla)u\, d\Gamma dt, \quad \text{et } \mathcal{I}_2 = \int_0^T \int_{\Gamma_2} 2u'.(m.\nabla)u\, d\Gamma dt.$$

• **On commence par estimer le terme**

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^T \int_{\Gamma_2} 2au.(m.\nabla)u\, d\Gamma dt.$$

En remarquant que :

$$u.\left(m.\nabla\right)u=\frac{1}{2}m.\nabla\left(|u|^2\right)$$

nous obtenons :

$$u.\left(m.\nabla\right)u=\frac{1}{2}\nabla_T\left(|u|^2\right).m_T+m_\nu u_T.\left(\partial_\nu u_T\right)+m_\nu u_\nu\left(\partial_\nu u_\nu\right),\qquad \text{sur}\quad \Gamma_2.$$

En effet,

$$\begin{aligned}u.\left(m.\nabla\right)u &= \frac{1}{2}m.\nabla\left(|u|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}m_T.\nabla_T\left(|u|^2\right)+\frac{1}{2}m_\nu\partial_\nu|u|^2\\ &= \frac{1}{2}m_T.\nabla_T\left(|u|^2\right)+\frac{1}{2}m_\nu\partial_\nu\left(|u_T|^2+|u_\nu|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\nabla_T\left(|u|^2\right).m_T+m_\nu u_T.\left(\partial_\nu u_T\right)+m_\nu u_\nu\left(\partial_\nu u_\nu\right),\qquad \text{sur}\quad \Gamma_2.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\mathcal{I}_1=\int_0^T\int_{\Gamma_2}\left(a\nabla_T\left(|u|^2\right).m_T+2am_\nu u_T.\left(\partial_\nu u_T\right)+2am_\nu u_\nu\left(\partial_\nu u_\nu\right)\right)d\Gamma dt.$$

On majore successivement les termes de droite de l'égalité ci-dessus.

Pour le premier terme, on utilise la formule de Green

$$\int_0^T\int_{\Gamma_2}a\nabla_T\left(|u|^2\right).m_T\,d\Gamma dt=-\int_0^T\int_{\Gamma_2}|u|^2\,div_T\left(am_T\right)\,d\Gamma dt,$$

et on obtient :

$$\left|\int_0^T\int_{\Gamma_2}a\nabla_T\left(|u|^2\right).m_T\,d\Gamma dt\right|\leq C\int_0^T\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma dt. \tag{2.2.38}$$

Pour le second terme, on utilise l'expression de $\varepsilon_S\left(u\right)$ (voir l'identité (2.2.34)) et on obtient :

$$m_\nu u_T.\left(\partial_\nu u_T\right)=m_\nu u_T.\left(2\varepsilon_S\left(u\right)\right)+m_\nu u_T.\left(\partial_T\nu\right)u_T-m_\nu u_T.\nabla_T u_\nu,\quad \text{sur }\Gamma_2.$$

L'inégalité de Young donne :

$$\left|\int_0^T\int_{\Gamma_2}4am_\nu u_T.\varepsilon_S\left(u\right)\,d\Gamma dt\right|\leq\boldsymbol{\theta}_1\int_0^T\int_{\Gamma_2}|\varepsilon_S\left(u\right)|^2\,d\Gamma dt+\frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1}\int_0^T\int_{\Gamma_2}|u_T|^2\,d\Gamma dt \tag{2.2.39}$$

pour $\boldsymbol{\theta}_1>0$, qui sera choisi plus loin.

Comme m_ν et $\partial_T\nu$ sont bornés, alors :

$$\left|\int_0^T\int_{\Gamma_2}2am_\nu u_T.\left(\partial_T\nu\right)u_T\,d\Gamma dt\right|\leq C\int_0^T\int_{\Gamma_2}|u_T|^2\,d\Gamma dt. \tag{2.2.40}$$

La formule de Green et des intégrations par parties donnent :

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Gamma_2} am_\nu u_T.\nabla_T u_\nu \, d\Gamma dt &= -\int_0^T\int_{\Gamma_2} u_\nu div_T\left(am_\nu u_T\right) d\Gamma dt \\ &= -\int_0^T\int_{\Gamma_2} am_\nu u_\nu div_T u_T d\Gamma dt - \int_0^T\int_{\Gamma_2} u_\nu \nabla_T\left(am_\nu\right).u_T d\Gamma dt.\end{aligned}$$

La proposition 1.5.1 et l'inégalité de Young donnent :

$$\left|\int_0^T\int_{\Gamma_2} 2am_\nu u_\nu div_T\left(u_T\right) d\Gamma dt\right| \le \boldsymbol{\theta}_1 \left\|u_T\right\|_1^2 + \frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1}\int_0^T\int_{\Gamma_2} |u|^2 \, d\Gamma dt$$

et

$$\left|\int_0^T\int_{\Gamma_2} 2am_\nu u_T.\nabla_T u_\nu d\Gamma dt\right| \le \boldsymbol{\theta}_1 \int_0^T\int_{\Gamma_2} \varepsilon_T\left(u_T\right) : \varepsilon_T\left(u_T\right) d\Gamma dt + \frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1}\int_0^T\int_{\Gamma_2} |u|^2 \, d\Gamma dt, \tag{2.2.41}$$

Pour le dernier terme, on utilise l'inégalité de Young, on obtient :

$$\left|\int_0^T\int_{\Gamma_2} 2am_\nu u_\nu.\partial_\nu u_\nu d\Gamma dt\right| \le \boldsymbol{\theta}_1 \int_0^T\int_{\Gamma_2} \left|\partial_\nu u_\nu\right|^2 d\Gamma dt + \frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1}\int_0^T\int_{\Gamma_2} \left|u_\nu\right|^2 d\Gamma dt. \tag{2.2.42}$$

Finalement, les estimations (2.2.38) -(2.2.42) donnent :

$$\left|\mathcal{I}_1\right| \le \boldsymbol{\theta}_1 \int_0^T\int_{\Gamma_2} \left(\left|\partial_\nu u_\nu\right|^2 + \varepsilon_T\left(u_T\right) : \varepsilon_T\left(u_T\right) + \left|\varepsilon_S\left(u\right)\right|^2\right) d\Gamma dt + \frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1}\int_0^T\int_{\Gamma_2} |u|^2 \, d\Gamma dt. \tag{2.2.43}$$

• **On estime ensuite le terme**

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^T\int_{\Gamma_2} 2u'.\left(m.\nabla\right) u \, d\Gamma dt.$$

L'expression du gradient en coordonnées locales donne :

$$\begin{aligned}u'.\left(m.\nabla\right) u &= u'_T.\left(\partial_T u_T\right) m_T + \left(u_\nu u'_T - u'_\nu u_T\right).\left(\partial_T \nu\right) m_T + \\ &\quad u'_\nu \nabla_T u_\nu.m_T + m_\nu\left(u'_T.\partial_\nu u_T + u'_\nu\left(\partial_\nu u_\nu\right)\right), \qquad \text{sur } \Gamma_2.\end{aligned}$$

Les termes qui posent problème sont

$$u'_\nu \nabla_T u_\nu.m_T \quad \text{et} \quad m_\nu u'_T.\partial_\nu u_T.$$

Les autres sont estimés à l'aide de l'inégalité de Young.

En effet, comme m et $\partial_T \nu$ sont bornés, alors :

$$\left|\int_{\Gamma_2} 2u'_T.\left(\partial_T u_T\right) m_T \, d\Gamma\right| \le \frac{\boldsymbol{\theta}_1}{2}\left\|u_T\right\|_1^2 + \frac{2C}{\boldsymbol{\theta}_1}\int_{\Gamma_2} \left|u'_T\right|^2 d\Gamma, \tag{2.2.44}$$

$$\left|\int_{\Gamma_2} 2\left(u_\nu u'_T - u'_\nu u_T\right).\left(\partial_T \nu\right) m_T \, d\Gamma\right| \le C\left(\int_{\Gamma_2} |u|^2 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \left|u'\right|^2 d\Gamma\right), \tag{2.2.45}$$

$$\left|\int_{\Gamma_2} 2m_\nu u'_\nu \partial_\nu u_\nu d\Gamma\right| \le \boldsymbol{\theta}_1 \int_{\Gamma_2} \left|\partial_\nu u_\nu\right|^2 d\Gamma + \frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1}\int_{\Gamma_2} \left|u'\right|^2 d\Gamma. \tag{2.2.46}$$

i) Pour le terme

$$u'_\nu \nabla_T u_\nu . m_T$$

on utilise les coordonnées locales, remarquant que Γ_2 est une variété compacte de dimension $(n-1)$, nous introduisons un nombre fini de cartes locales $(U_1, \varphi_1), ..., (U_{k_1}, \varphi_{k_1})$ recouvrant Γ_2 ainsi qu'une partition de l'unité associée $(\vartheta_1, ..., \vartheta_{k_1})$. Nous avons :

$$\int_{\Gamma_2} 2u'_\nu \nabla_T u_\nu . m_T d\Gamma = \sum_{j=1}^{k_1} \int_{U_j} 2\vartheta_j u'_\nu \nabla_T u_\nu . m_T d\Gamma.$$

On va considérer une des intégrales en omettant l'indice j: $\int_U 2\vartheta u'_\nu \nabla_T u_\nu . m_T d\Gamma$.

On écrit :

$$m_T = \sum_{i=1}^{n-1} m^i a_i, \quad \text{où} \quad a_i(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i}\left(\varphi^{-1}(x)\right), \quad i = 1, ..., n-1.$$

Notons g le tenseur métrique associé à la carte locale (U, φ), $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ est une base du plan tangent.

$|g| = |\det(g)|$ et $W = \varphi^{-1}(U)$, on obtient :

$$\int_U 2\vartheta u'_\nu \nabla_T u_\nu . m_T d\Gamma = \int_W 2(\vartheta \circ \varphi)(u'_\nu \circ \varphi)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial (u_\nu \circ \varphi)}{\partial \xi^i} m^i\right) |g|^{\frac{1}{2}} d\xi^1 ... d\xi^{n-1}.$$

Remarquons que $\vartheta \circ \varphi$ est continue à support compact, $v_\nu = u_\nu \circ \varphi$ est un élément de $H^{\frac{1}{2}}(W)$ et il existe $C > 0$ telle que :

$$\|v_\nu\|_{H^{\frac{1}{2}}(W)} \leq C \|u_\nu\|_{H^{\frac{1}{2}}(U)}.$$

On considère les deux sous-ensembles de W suivant :

$$\begin{aligned} W^+ &= \left\{\left(\xi^1, ..., \xi^{n-1}\right) \in W \;/\; m^1\left(\xi^1, ..., \xi^{n-1}\right) > 0\right\}, \\ W^- &= \left\{\left(\xi^1, ..., \xi^{n-1}\right) \in W \;/\; m^1\left(\xi^1, ..., \xi^{n-1}\right) < 0\right\}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_W 2(\vartheta \circ \varphi) v'_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \xi^1} m^1 |g|^{\frac{1}{2}} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} &= \int_{W^+} 2(\vartheta \circ \varphi) v'_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \xi^1} m^1 |g|^{\frac{1}{2}} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} \\ &+ \int_{W^-} 2(\vartheta \circ \varphi) v'_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \xi^1} m^1 |g|^{\frac{1}{2}} d\xi^1 ... d\xi^{n-1}. \end{aligned}$$

On pose : $\psi = \left((\vartheta \circ \varphi) m^1 |g|^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ dans W^+; alors on aura :

$$\begin{aligned} \int_{W^+} 2(\vartheta \circ \varphi) v'_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \xi^1} m^1 |g|^{\frac{1}{2}} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} &= \int_{W^+} 2\psi^2 v'_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} \\ = \int_{W^+} 2\psi v'_\nu \frac{\partial (\psi v_\nu)}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} &- \int_{W^+} \psi (|v_\nu|^2)' \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Estimons les deux termes du second membre de (2.2.47).

Pour le dernier terme, on a :

$$\int_0^T \int_{W^+} \psi \left(|v_\nu|^2\right)' \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} = \left[\int_{W^+} \psi \left(|v_\nu|^2\right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1}\right]_0^T.$$

Il existe une constante positive C indépendante de u et de t telle que :

$$\begin{aligned} \left|\int_{W^+} \psi \left(|v_\nu|^2\right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1}\right| &\leq C \int_{\Gamma_2} |u|^2 \, d\Gamma \\ &\leq C \int_{\Gamma} |u|^2 \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Les théorèmes standards des traces montrent que

$$\int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma \leq C \, \|u\|^2_{(H^1(\Omega))^n} .$$

D'après l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Korn, il existe une constante positive C (indépendante de u et de t) telle que :

$$\|u\|^2_{(H^1(\Omega))^n} \leq CE\,(t)\,.$$

La décroissance de l'énergie donne (voir la proposition 2.2.1)

$$\left|\int_0^T \int_{W^+} \psi \left(|v_\nu|^2\right)' \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1}\right| \leq CE\,(0)\,.$$

Revenons, maintenant, au premier terme de (2.2.47).

Remarquons que ψ est à support compact dans W^+, et: $\psi = 0$ sur ∂W^+.

On définit la fonction G par :

$$G = \begin{cases} \psi v_\nu, & \text{dans } W^+ \times \mathbb{R}^+, \\ 0, & \text{dans } (\mathbb{R}^{n-1} \setminus W^+) \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

On a :

$$\int_{W^+} 2\psi v_\nu' \frac{\partial (\psi v_\nu)}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 2G' \frac{\partial G}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1}.$$

Soit $\hat{G}$ la transformée de Fourier de G par rapport à ξ_1; alors :

$$\int_{W^+} 2\psi v_\nu' \frac{\partial (\psi v_\nu)}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 4i\pi \eta^1 \hat{G}' \hat{G} \, d\eta^1 d\xi^2 ... d\xi^{n-1}$$

ce qui implique

$$\int_0^T \int_{W^+} 2\psi v_\nu' \frac{\partial (\psi v_\nu)}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} dt = \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} 2i\pi \eta^1 \left|\hat{G}\right|^2 d\eta^1 d\xi^2 ... d\xi^{n-1}\right]_0^T$$

mais

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta_1 \left|\hat{G}\right|^2 d\eta^1 d\xi^2 ... d\xi^{n-1}\right| \leq C_1 \left\|G\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \left\|u_\nu\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}.$$

La décroissance de l'énergie donne (voir la proposition 2.2.1) :

$$\left|\int_0^T \int_{W^+} 2\psi v'_\nu \frac{\partial (\psi v_\nu)}{\partial \xi^1} d\xi^1 ... d\xi^{n-1} dt\right| \leq CE(0).$$

Pour l'intégrale dans W^- on remplace φ par $\tilde{\varphi}$ définie par $\tilde{\varphi}\left(\xi^1, ..., \xi^{n-1}\right) = \phi\left(\xi^1, ..., \xi^{n-1}\right)$ et on procède comme ci-dessus, on obtient des résultats similaires concernant les termes contenant $m^2, ..., m^{n-1}$.

Finalement, la définition et la décroissance de l'énergie donnent :

$$\left|\int_0^T \int_{\Gamma_2} 2u'_\nu \nabla_T u_\nu . m_T d\Gamma dt\right| \leq CE(0). \tag{2.2.48}$$

ii) Pour le terme

$$m_\nu u'_T . \partial_\nu u_T$$

on utilise l'expression de $\varepsilon_S(u)$ (voir l'identité (2.2.34)) pour écrire :

$$m_\nu u'_T . (\partial_\nu u_T) = m_\nu u'_T . (2\varepsilon_S(u)) + m_\nu u'_T . (\partial_T \nu) u_T - m_\nu u'_T . \nabla_T u_\nu, \quad \text{sur} \ \Gamma_2.$$

Les deux premiers termes sont estimés par l'inégalité de Young. En effet,

$$\left|\int_{\Gamma_2} 4m_\nu u'_T . \varepsilon_S(u) d\Gamma\right| \leq \boldsymbol{\theta}_1 \int_{\Gamma_2} \left|\varepsilon_S(u)\right|^2 d\Gamma + \frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1} \int_{\Gamma_2} \left|u'_T\right|^2 d\Gamma \tag{2.2.49}$$

et

$$\left|\int_{\Gamma_2} 2m_\nu u'_T . (\partial_T \nu) u_T d\Gamma\right| \leq C \int_{\Gamma_2} \left(\left|u'_T\right|^2 + \left|u_T\right|^2\right) d\Gamma. \tag{2.2.50}$$

Pour le terme $(m_\nu u'_T . \nabla_T u_\nu)$, on utilise une intégration par parties qui donne :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_\nu u'_T . \nabla_T u_\nu d\Gamma dt &= \left[\int_{\Gamma_2} m_\nu u_T . \nabla_T u_\nu d\Gamma\right]_0^T - \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_\nu u_T . \left(\nabla_T u'_\nu\right) d\Gamma dt \\ &= \left[\int_{\Gamma_2} m_\nu u_T . \nabla_T u_\nu d\Gamma\right]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma_2} u'_\nu div_T (m_\nu u_T) d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Estimons maintenant les termes du second membre de l'égalité ci-dessus.

Le lemme 1.5.4 (voir la page 31), donne la relation :

$$div_T (m_\nu u_T) = m_\nu div_T u_T + u_T . \nabla_T m_\nu.$$

donc on aura :

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Gamma_2} u'_\nu div_T (m_\nu u_T) \, d\Gamma dt &= \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_\nu u'_\nu div_T u_T d\Gamma dt + \\ & \int_0^T \int_{\Gamma_2} u'_\nu u_T . \nabla_T m_\nu d\Gamma dt.\end{aligned}$$

La proposition 1.5.1 (voir la page 36) et l'inégalité de Young donnent :

$$\left| \int_0^T \int_{\Gamma_2} u'_\nu div_T (m_\nu u_T) \, d\Gamma dt \right| \leq \boldsymbol{\theta}_1 \int_0^T \int_{\Gamma_2} \varepsilon_T (u_T) : \varepsilon_T (u_T) \, d\Gamma dt + \frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1} \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left(|u'|^2 + |u|^2 \right) d\Gamma dt. \tag{2.2.51}$$

Il reste à estimer le terme

$$\int_{\Gamma_2} m_\nu u_T (t) . \nabla_T u_\nu (t) \, d\Gamma.$$

Pour cela, on considère la fonction $\zeta \in H^1 (\Gamma_2)$ solution de

$$\zeta - \Delta_T \zeta = div_T u_T (t) , \quad \text{sur} \;\; \Gamma_2.$$

Comme $div_T u_T (t)$ appartient à $H^{-1/2} (\Gamma_2)$, alors ζ appartient à $H^{3/2} (\Gamma_2)$, et on a :

$$\begin{aligned}\|\zeta\|_{H^{3/2}(\Gamma_2)} &\leq C \|div_T u_T (t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \\ &\leq C \|u_T (t)\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} .\end{aligned} \tag{2.2.52}$$

De plus, la formulation variationnelle du problème précédent montre que

$$\|\zeta\|_{H^1(\Gamma_2)} \leq C \|u_T (t)\|_{L^2(\Gamma_2)} . \tag{2.2.53}$$

La définition de ζ et la formule de Green donnent :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} m_\nu u_T (t) . \nabla_T u_\nu (t) \, d\Gamma &= - \int_{\Gamma_2} u_\nu (t) \, div_T (m_\nu u_T (t)) \, d\Gamma \\ = - \int_{\Gamma_2} u_\nu (t) \, u_T (t) . \nabla_T m_\nu d\Gamma &- \int_{\Gamma_2} u_\nu (t) \, m_\nu div_T (u_T (t)) \, d\Gamma \\ = - \int_{\Gamma_2} u_\nu (t) \, u_T (t) . \nabla_T m_\nu d\Gamma - \int_{\Gamma_2} & u_\nu (t) \, m_\nu \zeta d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_\nu (t) \, m_\nu \Delta_T \zeta d\Gamma.\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.2.53) donnent :

$$\left| \int_{\Gamma_2} u_\nu (t) \, \nabla_T m_\nu . u_T (t) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_\nu (t) \, m_\nu \zeta d\Gamma \right| \leq C \int_{\Gamma_2} |u (t)|^2 \, d\Gamma. \tag{2.2.54}$$

Finalement, comme $(-\Delta_T)$ est un opérateur auto-adjoint non négatif, alors on peut écrire

$$- \int_{\Gamma_2} u_\nu (t) \, m_\nu \, (\Delta_T \zeta) \, d\Gamma = \int_{\Gamma_2} (-\Delta_T)^{1/4} \, (u_\nu (t) \, m_\nu) \, (-\Delta_T)^{3/4} \, \zeta d\Gamma.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.2.52) donnent :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_2} u_\nu(t)\, m_\nu\left(\Delta_T\zeta\right) d\Gamma\right| &\leq C\left\|u_\nu(t)\, m_\nu\right\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}\|\zeta\|_{H^{3/2}(\Gamma_2)}\\ &\leq C\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \end{aligned}\tag{2.2.55}$$

Les théorèmes standards de traces et la définition de l'énergie montrent que

$$\left|\int_{\Gamma_2} 2m_\nu u_T(t)\,.\nabla_T u_\nu(t)\, d\Gamma\right| \leq CE(t),$$

comme l'énergie est décroissante, on a :

$$\left[\int_{\Gamma_2} 2m_\nu u_T.\nabla_T u_\nu d\Gamma\right]_0^T \leq CE(0). \tag{2.2.56}$$

Les estimations (2.2.51) et (2.2.56) donnent :

$$\left|\int_0^T\int_{\Gamma_2} 2m_\nu u_T'.\nabla_T u_\nu d\Gamma dt\right| \leq CE(0) + \frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1}\int_0^T\int_{\Gamma_2}|u'|^2 d\Gamma dt + \boldsymbol{\theta}_1\int_{\Gamma_2}\|u_T\|_1^2\, dt. \tag{2.2.57}$$

Les estimations (2.2.44), (2.2.45), (2.2.46), (2.2.48), (2.2.49), (2.2.50) et (2.2.57), montrent que

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_2| \leq\; & \boldsymbol{\theta}_1\int_0^T\int_{\Gamma_2}\left(\varepsilon_T(u_T):\varepsilon_T(u_T) + |\varepsilon_S(u)|^2 + |\partial_\nu u_\nu|^2\right) d\Gamma dt\\ &+\frac{C}{\boldsymbol{\theta}_1}\int_0^T\int_{\Gamma_2}\left(|u|^2+|u'|^2\right) d\Gamma dt + CE(0)\end{aligned}\tag{2.2.58}$$

pour tout $\boldsymbol{\theta}_1 > 0$.

En introduisant les estimations (2.2.43) et (2.2.58) dans l'estimation (2.2.37), on obtient:

$$\begin{aligned}I_5 \leq\; & k_6\left(E(0) + \int_{\Sigma_{2T}}\left(|u|^2+|u'|^2\right) d\Gamma dt\right) +\\ & 2\boldsymbol{\theta}_1\int_0^T\int_{\Gamma_2}\left(\varepsilon_T(u_T):\varepsilon_T(u_T) + |\varepsilon_S(u)|^2 + |\varepsilon_\nu(u_\nu)|^2\right) d\Gamma dt\\ & -k\delta\int_0^T\int_{\Gamma_2}\left(\varepsilon_T(u):\varepsilon_T(u) + 2|\varepsilon_S(u)|^2 + |\varepsilon_\nu(u_\nu)|^2\right) d\Gamma dt\end{aligned}\tag{2.2.59}$$

pour $k_6 > 0$ et tout $\boldsymbol{\theta}_1 > 0$.

Comme

$$\varepsilon_T(u) = \varepsilon_T(u_T) + \varepsilon_T(u_\nu\nu) = \varepsilon_T(u_T) + u_\nu\partial_T\nu, \qquad \text{sur } \Gamma$$

alors :

$$\varepsilon_T(u):\varepsilon_T(u) = \varepsilon_T(u_T):\varepsilon_T(u_T) + 2\varepsilon_T(u_T):\varepsilon_T(u_\nu\nu) + \varepsilon_T(u_\nu\nu):\varepsilon_T(u_\nu\nu), \quad \text{sur } \Gamma_2.$$

En utilisant l'estimation

$$|\varepsilon_T(u_T) : \varepsilon_T(u_\nu\nu)| \leq \boldsymbol{\theta}_1 \varepsilon_T(u_T) : \varepsilon_T(u_T) + (4\boldsymbol{\theta}_1)^{-1} \varepsilon_T(u_\nu\nu) : \varepsilon_T(u_\nu\nu)$$

on obtient :

$$\varepsilon_T(u) : \varepsilon_T(u) \geq (1 - 2\boldsymbol{\theta}_1) \varepsilon_T(u_T) : \varepsilon_T(u_T) + \left(1 - \frac{1}{2\boldsymbol{\theta}_1}\right) \varepsilon_T(u_\nu\nu) : \varepsilon_T(u_\nu\nu), \quad \text{sur } \Gamma_2.$$

Comme

$$\varepsilon_T(u_\nu\nu) : \varepsilon_T(u_\nu\nu) = u_\nu^2 (\partial_T\nu : \partial_T\nu)$$

alors

$$\int_{\Gamma_2} \varepsilon_T(u_\nu\nu) : \varepsilon_T(u_\nu\nu)\, d\Gamma \leq C \int_{\Gamma_2} |u_\nu|^2\, d\Gamma.$$

L'estimation (2.2.59) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I_5 \quad \leq \quad & k_6 E(0) + k_7 \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left(|u|^2 + |u'|^2\right) d\Gamma dt \\ & + 2\boldsymbol{\theta}_1 \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left(\varepsilon_T(u_T) : \varepsilon_T(u_T) + |\varepsilon_S(u)|^2 + |\varepsilon_\nu(u_\nu)|^2\right) d\Gamma dt \\ & - k\delta \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left((1 - 2\theta)\, \varepsilon_T(u_T) : \varepsilon_T(u_T) + 2\,|\varepsilon_S(u)|^2 + |\varepsilon_\nu(u_\nu)|^2\right) d\Gamma dt \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & I_5 \leq k_6 E(0) + k_7 \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left(|u|^2 + |u'|^2\right) d\Gamma dt + \\ & \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left[(2\boldsymbol{\theta}_1 (k\delta + 1) - k\delta)\right. \\ & \left.\left(\varepsilon_T(u_T) : \varepsilon_T(u_T) + 2(\boldsymbol{\theta}_1 - k\delta)\,|\varepsilon_S(u)|^2 + (2\boldsymbol{\theta}_1 - k\delta)\,|\varepsilon_\nu(u_\nu)|^2\right)\right] d\Gamma dt \end{aligned} \tag{2.2.60}$$

pour k_6, $k_7 > 0$ et tout $\boldsymbol{\theta}_1 > 0$.

Pour $\boldsymbol{\theta}_1$ assez petit l'estimation (2.2.60) donne :

$$I_5 \leq k_6 E(0) + k_7 \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left(|u|^2 + |u'|^2\right) d\Gamma dt. \tag{2.2.61}$$

Le lemme 2.2.3 et l'estimation (2.2.61) donnent :

$$I_5 \leq \left(k_6 + \frac{k_8}{\epsilon}\right) E(0) + k_7 \int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2\, d\Sigma + \epsilon \int_0^T E(t)\, dt. \tag{2.2.62}$$

Finalement, $\exists k_9 > 0$ telle que :

$$I_5 \leq \left(k_6 + \frac{k_8}{\epsilon} + k_9\right) E(0) + \epsilon \int_0^T E(t)\, dt. \tag{2.2.63}$$

* **Estimation de** I_6 :

$$I_6 = \int_{Q_T} m_p \partial_p (a_{ijkl}) \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) \, dxdt - \gamma_m \int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u) \, dxdt.$$

D'après la définition de γ_m donné par (2.2.1) on a :

$$I_6 \leq 0. \tag{2.2.64}$$

Finalement, les estimations (2.2.26), (2.2.28), (2.2.27), (2.2.32), (2.2.63) et (2.2.64) donnent :

$$\begin{aligned}(2-\gamma_m) \int_0^T E(t) \, dt \quad &\leq \quad \left(k_1 + \frac{k_3 + k_8}{\epsilon} + k_4 + k_5 + k_6 + k_9 \right) E(0) \\ &\quad + \epsilon \left(2 + k_3 + k_5'\right) \int_0^T E(t) \, dt.\end{aligned}$$

Comme $\gamma_m < 2$, en prenant

$$\epsilon \in \left] 0, \ \frac{(2-\gamma_m)}{2 + k_3 + k_5'} \right[.$$

On conclut que :

$$\int_0^T E(t) \, dt \leq C_1 E(0)$$

où

$$C_1 = \frac{\left(k_1 + \frac{k_3 + k_8}{\epsilon} + k_4 + k_5 + k_6 + k_9 \right)}{2 - \gamma_m - \epsilon \left(2 + k_3 + k_5'\right)}$$

$$k_4 = R_0 + \frac{k_2}{\epsilon}.$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on déduit l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} E(t) \, dt \leq C_1 E(0).$$

Ensuite, en appliquant le lemme 2.2.1, on obtient :

$$E(t) \leq E(0) \exp(1 - \omega_1 t), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.2.65}$$

avec $\omega_1 = \frac{1}{C_1}$.

Comme les constantes ne dépendent pas de la solution forte (u, θ), on prouve à l'aide d'un argument de densité que cette estimation reste vraie pour toute solution faible (u, θ) :
soit $(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{H}$, et (u, θ) la solution faible associée. Comme $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$, il existe une suite $(u_0^p, u_1^p, \theta_0^p)$ dans $D(\mathcal{A})$ qui converge dans $\mathcal{H}$ vers (u_0, u_1, θ_0). Soit (u^p, θ^p)

la solution forte du problème $(\mathcal{P})$ associée à la donnée initiale $(u_0^p, u_1^p, \theta_0^p)$. A p fixé, on peut utiliser l'estimation (2.2.65).

$$\forall t \geq 0, \quad E\left(u^p\left(t\right), \theta^p\left(t\right)\right) \leq E\left(u^p\left(0\right), \theta^p\left(0\right)\right) \exp\left(1 - \omega t\right). \tag{2.2.66}$$

Or, la suite $(u_0^p, u_1^p, \theta_0^p)$ vérifie

$$E\left(u^p\left(0\right), \theta^p\left(0\right)\right) = \frac{1}{2}\left\|\left(u_0^p, u_1^p, \theta_0^p\right)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \to E\left(u\left(0\right), \theta\left(0\right)\right), \quad \text{quand} \ \ p \to +\infty$$

D'autre part, en utilisant la décroissance de l'énergie du problème linéaire, on obtient :

$$E\left(\left(u^p\left(t\right), \theta^p\left(t\right)\right) - \left(u\left(t\right), \theta\left(t\right)\right)\right) \leq E\left(\left(u^p\left(0\right), \theta^p\left(0\right)\right) - \left(u\left(0\right), \theta\left(0\right)\right)\right)$$

d'où :

$$E\left(u^p - u,\ \theta^p - \theta\right) \to 0, \quad \text{dans } L^\infty\left(\mathbb{R}^+\right)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u^p &\to u, && \text{dans } L^\infty\left(\mathbb{R}^+, \left(H_{\Gamma_1}^1\left(\Omega\right)\right)^n\right), \\ \theta^p &\to \theta, && \text{dans } L^\infty\left(\mathbb{R}^+, H_0^1\left(\Omega\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (2.2.66) donne :

$$\forall t \geq 0, \quad E\left(u, \theta, t\right) \leq E\left(u_0, \theta_0, 0\right) \exp\left(1 - \omega t\right).$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 2.2.1.

Chapitre 3

Stabilisation du système anisotrope de la thermoélasticité par des feedbacks interne et frontière non linéaires

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la stabilisation d'un système anisotrope de la thermoélasticité par des fonctions non linéaires du feedback naturel. La démarche utilisée consiste à montrer la stabilisation exponentielle du système linéaire en établissant une inégalité intégrale, obtenue par la technique de **Bey et al.** (cf.[1]) (voir chapitre 2); la stabilisation du système non linéaire s'en déduit grâce au résultat de **S. Nicaise** (cf.[23]).

Nous introduisons d'abord quelques notations et hypothèses utilisées dans ce chapitre. Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^2. On note $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)^T$ le vecteur unitaire normal extérieur à Γ.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, on pose : $m(x) = x - x_0$; $x \in \mathbb{R}^n$ et on considère la partition de la frontière Γ suivante :

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma, \quad m(x).\nu(x) \leq 0\}, \tag{3.0.1}$$

$$\Gamma_2 = \{x \in \Gamma, \quad m(x).\nu(x) > 0\}. \tag{3.0.2}$$

On considère maintenant le système anisotrope de la thermoélasticité avec feedbacks l'un interne et l'autre frontière non linéaires :

$$
(\mathcal{P}_1) \qquad \begin{cases}
u'' - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta + f(u') = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\
\theta' - \Delta\theta + \beta divu' = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\
\theta = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\
u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\
\sigma(u).\nu + au + g(u') = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\
u(.,0) = u_0,\ u'(.,0) = u_1,\ \theta(.,0) = \theta_0, & \text{dans} \quad \Omega.
\end{cases}
$$

où $u = u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_n(x,t))$ désigne le vecteur déplacement, $\theta = \theta(x,t)$ la température.

Les paramètres de couplage α et β sont supposés strictement positifs.

La fonction $a \equiv a(x)$ est non négative sur Γ_2 et $a(x) \in C^1(\Gamma_2)$.

Les fonctions $g(u) = (g_1(u), ..., g_n(u))^T$ et $f(u) = (f_1(u), ...f_n(u))^T$ sont continues et satisfont

$$f(0) = g(0) = 0, \tag{3.0.3}$$

et les conditions de monotonie

$$(g(x) - g(y)).(x - y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.0.4}$$

$$(f(x) - f(y)).(x - y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.0.5}$$

On suppose qu'il existe deux constantes positives C_f et C_g telles que :

$$|f(x)| \leq C_f(1 + |x|), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.0.6}$$

$$|g(x)| \leq C_g(1 + |x|), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.0.7}$$

3.1 Existence et unicité de la solution

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du système $(\mathcal{P}_1)$, basée sur la théorie des semi-groupes non linéaires [3, 12, 27], en le ramenant à une équation d'évolution du premier degré.

Dans ce qui suit, on suppose que :

$$mes(\Gamma_1) > 0 \quad \text{ou} \quad a(x) > 0, \quad \forall x \in \Gamma_2, \tag{3.1.1}$$

$$\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \varnothing. \tag{3.1.2}$$

On désigne par $\langle ., . \rangle$ la dualité entre $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ et $\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'$ et entre $H^1_0(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.
On considère les opérateurs :

$$A : \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \to \left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'$$

défini par :

$$\langle Au, v \rangle = (u, v)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}, \qquad \forall u, v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$$

avec

$$(u, v)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v)\, dx + \int_{\Gamma_2} au.v\, d\Gamma, \qquad \forall u, v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n. \tag{3.1.3}$$

$$A_0 : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

défini par :

$$\langle A_0 u, v \rangle = (u, v)_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx, \qquad \forall u, v \in H^1_0(\Omega). \tag{3.1.4}$$

Le théorème de représentation de Riesz assure que A et A_0 sont des isomorphismes isométriques de $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ vers $\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'$ et $H^1_0(\Omega)$ vers $H^{-1}(\Omega)$ respectivement.
On considère aussi l'opérateur non linéaire B_0 de $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ dans $\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'$ défini par :

$$\langle B_0 u, v \rangle = \int_\Omega f(u).v\ dx + \int_{\Gamma_2} g(u).v\ d\Gamma, \qquad \forall u, v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n. \tag{3.1.5}$$

Lemme 3.1.1 *Si les fonctions f et g vérifient (3.0.6) et (3.0.7). Alors l'opérateur B_0 est bien défini de $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ dans $\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'$.*

Preuve. On désigne par C une constante positive assez grande.
Pour $u,\ v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$, on a :

$$\langle B_0 u, v \rangle = \int_\Omega f(u).v\ dx + \int_{\Gamma_2} g(u).v\ d\Gamma.$$

En utilisant (3.0.6) et (3.0.7) et les applications continues

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma_2)$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
|\langle B_0 u, v \rangle| = \left|\int_\Omega f(u).v\ dx + \int_{\Gamma_2} g(u).v\ d\Gamma\right| &\leq C\left[\left(\int_\Omega |f(u)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(|v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\qquad \left. + \left(\int_{\Gamma_2} |g(u)|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_{\Gamma_2} |v|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C\left[\left(1 + \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)\|v\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}\right. \\
&\qquad \left. + \left(1 + \left(\int_{\Gamma_2} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)\|v\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}\right] \\
&\leq C\left[1 + \|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}\right]\|v\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $B_0 u \in \left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'$ pour tout $u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$. ■

En suivant les mêmes démarches de la section 2.1 du chapitre 2, et en utilisant les opérateurs A, A_0 et B_0, on réduit le système $(\mathcal{P}_1)$ à une équation d'évolution du premier degré.

Alors le système $(\mathcal{P}_1)$ s'écrit :

$$\begin{cases} u'' + Au + B_0 u' + \alpha \nabla \theta = 0, & \text{sur } \mathbb{R}^+, \\ \theta' + A_0 \theta + \beta div u' = 0, & \text{sur } \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

On pose : $\phi = (u, u', \theta)$ et on considère l'opérateur non linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

avec $\mathcal{H} = \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n \times L^2(\Omega)$, défini par :

$$\mathcal{A}\phi = \left(-u', \ Au + B_0 u' + \alpha \nabla \theta, \ A_0 \theta + \beta div u'\right).$$

Le système (3.1.6) se réécrit :

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \begin{cases} \phi' + \mathcal{A}\phi & = & 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^+, \\ \phi(0) & = & (u_0, u_1, \theta_0). \end{cases}$$

Si (u, θ) est une solution (suffisamment régulière) du système $(\mathcal{P}_1)$, alors $\phi(t)$ et $\mathcal{A}\phi(t)$ sont des éléments de $\mathcal{H}$, pour tout $t > 0$. Ceci nous amène à définir :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{(u, v, \theta) \in \mathcal{H}, \quad v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n, \quad Au + B_0 v \in \left(L^2(\Omega)\right)^n, \ \theta \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right\}$$

$$\mathcal{A}(u, v, \theta) = \left(-v, \ Au + B_0 v + \alpha \nabla \theta, \ A_0 \theta + \beta div v\right).$$

Proposition 3.1.1 *Sous les hypothèses (3.0.3), (3.0.4), (3.0.5), (3.0.6), (3.0.7) et (3.1.1), l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone sur $\mathcal{H} = \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n \times L^2(\Omega)$.*

Preuve. i) $\mathcal{A}$ est monotone :

Soient $\phi^1 = \left(u^1, v^1, \theta^1\right)$, $\phi^2 = \left(u^2, v^2, \theta^2\right) \in D(\mathcal{A})$, on a :

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathcal{A}\phi^1 - \mathcal{A}\phi^2, \ \phi^1 - \phi^2 \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \mathcal{A}\left(u^1, v^1, \theta^1\right) - \mathcal{A}\left(u^2, v^2, \theta^2\right), \left(u^1, v^1, \theta^1\right) - \left(u^2, v^2, \theta^2\right) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \left(v^2 - v^1, u^1 - u^2\right)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \left(A\left(u^1 - u^2\right) + B_0 v^1 - B_0 v^2 + \alpha \nabla\left(\theta^1 - \theta^2\right), \ v^1 - v^2\right)_{\left(L^2(\Omega)\right)^n} \\ &\qquad + \left(A_0\left(\theta^1 - \theta^2\right) + \beta div\left(v^1 - v^2\right), \ \theta^1 - \theta^2\right) \\ &= \left(B_0 v^1 - B_0 v^2, \ v^1 - v^2\right) + \frac{\beta}{\alpha}\left\|\nabla\left(\theta^1 - \theta^2\right)\right\|^2 \\ &= \int_\Omega \left(f\left(v^1\right) - f\left(v^2\right)\right).\left(v^1 - v^2\right) dx + \int_{\Gamma_2} \left(g\left(v^1\right) - g\left(v^2\right)\right).\left(v^1 - v^2\right) d\Gamma + \frac{\beta}{\alpha}\left\|\nabla\left(\theta^1 - \theta^2\right)\right\|^2 \end{aligned}$$

puisque $(f(v^1) - f(v^2)) . (v^1 - v^2) \geq 0$ et $(g(v^1) - g(v^2)) . (v^1 - v^2) \geq 0, \quad \forall v^1,\, v^2 \in \mathbb{R}^n$, alors on obtient :

$$\left\langle \mathcal{A}\left(u^1, v^1, \theta^1\right) - \mathcal{A}\left(u^2, v^2, \theta^2\right), \left(u^1, v^1, \theta^1\right) - \left(u^2, v^2, \theta^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est donc monotone.

ii) $\mathcal{A}$ est maximal :

Montrons la surjectivité de l'opérateur $(I + \mathcal{A})$ de $D(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H} = \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n \times L^2(\Omega)$.

Soit $(\varphi, \psi, \xi) \in \mathcal{H}$, cherchons un élément $(u, v, \theta) \in D(\mathcal{A})$ vérifiant :

$$(I + \mathcal{A})(u, v, \theta) = (\varphi, \psi, \xi).$$

$(I + \mathcal{A})(u, v, \theta) = (\varphi, \psi, \xi) \iff (u, v, \theta) + (-v,\ Au + B_0 v + \alpha \nabla \theta,\ A_0 \theta + \beta div v) = (\varphi, \psi, \xi)$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u - v = \varphi, \\ v + Au + B_0 v + \alpha \nabla \theta = \psi, \\ \theta + A_0 \theta + \beta div v = \xi. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

La première équation du système (3.1.7) donne :

$$u = v + \varphi.$$

En reportant u dans la deuxième équation du système (3.1.7), on trouve :

$$\begin{cases} v + Av + B_0 v + \alpha \nabla \theta &= \psi - A\varphi, \quad \text{dans } \left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]', \\ \dfrac{\alpha}{\beta}\theta + \dfrac{\alpha}{\beta} A_0 \theta + \alpha div v &= \dfrac{\alpha}{\beta}\xi, \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega), \end{cases} \tag{3.1.8}$$

avec $\psi \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$, $A\varphi \in \left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'$ donc $\psi - A\varphi \in \left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'$.

Alors pour montrer que $(I + \mathcal{A})$ est surjectif de $D(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}$, il suffit de montrer que l'opérateur non linéaire

$$\mathcal{A}_1 : \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times H^1_0(\Omega) \to \left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]' \times H^{-1}(\Omega)$$

est surjectif, où $\mathcal{A}_1$ est défini par :

$$\mathcal{A}_1(v, \theta) = \left(v + Av + B_0 v + \alpha \nabla \theta,\ \ \frac{\alpha}{\beta}\theta + \frac{\alpha}{\beta} A_0 \theta + \alpha div v\right).$$

Montrons donc la surjectivité de l'opérateur $\mathcal{A}_1$:

Lemme 1 : L'opérateur $\mathcal{A}_1 : \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times H^1_0(\Omega) \to \left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]' \times H^{-1}(\Omega)$ est surjectif.

Preuve La preuve de ce lemme est basée sur le théorème 1.3.2 (voir page 22).
Posons $V_0 = \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times H^1_0(\Omega)$.
• $\mathcal{A}_1$ *est monotone* :
Soient $\left(v^1,\theta^1\right), \left(v^2,\theta^2\right) \in V_0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathcal{A}_1\left(v^1,\theta^1\right) - \left(v^2,\theta^2\right), \left(v^1,\theta^1\right) - \left(v^2,\theta^2\right)\right\rangle_{V_0',V_0} = \left\langle v^1 - v^2, v^1 - v^2\right\rangle \\
&+ \left\langle A\left(v^1 - v^2\right),\ v^1 - v^2\right\rangle + \left\langle B_0 v^1 - B_0 v^2,\ v^1 - v^2\right\rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]',\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} \\
&+ \left\langle \alpha\nabla\left(\theta^1 - \theta^2\right),\ v^1 - v^2\right\rangle + \frac{\alpha}{\beta}\left\langle \theta^1 - \theta^2,\ \theta^1 - \theta^2\right\rangle + \frac{\alpha}{\beta}\left\langle A_0\left(\theta^1 - \theta^2\right),\ \theta^1 - \theta^2\right\rangle \\
&+ \alpha\left\langle div\left(v^1 - v^2\right),\ \theta^1 - \theta^2\right\rangle \\
&= \left\|\left(v^1 - v^2\right)\right\|^2 + \left\|\left(v^1 - v^2\right)\right\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \int_\Omega \left(f\left(v^1\right) - f\left(v^2\right)\right).\left(v^1 - v^2\right)dx \\
&+ \int_{\Gamma_2} \left(g\left(v^1\right) - g\left(v^2\right)\right).\left(v^1 - v^2\right)d\Gamma + \frac{\alpha}{\beta}\left\|\left(\theta^1 - \theta^2\right)\right\|^2
\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}
\left(f(x) - f(y)\right).(x - y) &\geq 0, \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^n \\
\left(g(x) - g(y)\right).(x - y) &\geq 0, \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

alors

$$\left\langle \mathcal{A}_1\left(v^1,\theta^1\right) - \left(v^2,\theta^2\right), \left(v^1,\theta^1\right) - \left(v^2,\theta^2\right)\right\rangle_{V_0',V_0} \geq 0$$

d'où $\mathcal{A}_1$ est monotone.
• $\mathcal{A}_1$ *est coercive* :
Soit $(v,\theta) \in V_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{A}_1(v,\theta), (v,\theta)\right\rangle_{V_0',V_0} &= \|v\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \langle B_0 v, v\rangle + \frac{\alpha}{\beta}\langle\theta,\theta\rangle + \frac{\alpha}{\beta}\langle A_0\theta,\theta\rangle \\
&\geq C\left(\|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|\theta\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

puisque $\langle B_0 v, v\rangle \geq 0$ (car B_0 est monotone et $B_0 0 = 0$).
• $\mathcal{A}_1$ *est borné* : la bornitude de $\mathcal{A}_1$ découle des propriétés de f et g (3.0.6) et (3.0.7).
• $\mathcal{A}_1$ *est hémicontinu* :
Soient $\left(v^1,\theta^1\right), \left(v^2,\theta^2\right)$ et $(v,\theta) \in V_0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathcal{A}_1\left[\left(v^1,\theta^1\right) + t\left(v^2,\theta^2\right)\right], (v,\theta)\right\rangle = \left\langle v^1 + tv^2,\ v\right\rangle + \left\langle A\left(v^1 + tv^2\right),\ v\right\rangle + \left\langle B_0\left(v^1 + tv^2\right),\ v\right\rangle \\
&+ \alpha\left\langle \nabla\left(\theta^1 + t\theta^2\right),\ v\right\rangle + \frac{\alpha}{\beta}\left\langle \theta^1 + t\theta^2,\ \theta\right\rangle + \frac{\alpha}{\beta}\left\langle A_0\left(\theta^1 + t\theta^2\right),\ \theta\right\rangle + \alpha\left\langle div\left(v^1 + tv^2\right),\ \theta\right\rangle.
\end{aligned}$$

On veut démontrer que

$$\lim_{t\to t_0}\left\langle \mathcal{A}_1\left[\left(v^1,\theta^1\right) + t\left(v^2,\theta^2\right)\right], (v,\theta)\right\rangle = \left\langle \mathcal{A}_1\left(v^1,\theta^1\right) + t_0\left(v^2,\theta^2\right), (v,\theta)\right\rangle, \qquad t_0 \in \mathbb{R}$$

pour tout $\left(v^1, \theta^1\right)$, $\left(v^2, \theta^2\right)$ et $(v, \theta) \in V_0$, pour cela, il suffit de montrer que B_0 est hémicontinu, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \to t_0} \left\langle B_0\left(v^1 + tv^2\right),\ v\right\rangle = \left\langle B\left(v^1 + t_0 v^2\right), v\right\rangle, \qquad \text{pour tout } \ v^1,\ v^2,\ v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n.$$

Par définition

$$\left\langle B_0\left(v^1 + tv^2\right), v\right\rangle = \int_\Omega f\left(v^1 + tv^2\right).vdx + \int_{\Gamma_2} g\left(v^1 + tv^2\right).vd\Gamma, \quad \forall v^1,\ v^2,\ v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$$

comme f et g sont continues, il vient que pour tout v^1, v^2, $v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$

$$\begin{aligned} g\left(v^1 + tv^2\right) &\to g\left(v^1 + t_0 v^2\right), \quad \text{quand } t \to t_0 \quad p.p \text{ sur } \Gamma, \\ f\left(v^1 + tv^2\right) &\to f\left(v^1 + t_0 v^2\right), \quad \text{quand } t \to t_0 \quad p.p \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

D'autre part, f et g vérifient les propriétés (3.0.6) et (3.0.7) .
L'application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue donne :

$$\lim_{t \to t_0} \left[\int_\Omega f\left(v^1 + tv^2\right).vdx + \int_{\Gamma_2} g\left(v^1 + tv^2\right).vd\Gamma\right] = \int_\Omega f\left(v^1 + t_0 v^2\right).vdx + \int_{\Gamma_2} g\left(v^1 + t_0 v^2\right).vd\Gamma$$

d'où :

$$\lim_{t \to t_0} \left\langle B_0\left(v^1 + tv^2\right), v\right\rangle = \left\langle B_0\left(v^1 + t_0 v^2\right), v\right\rangle, \qquad \text{pour tout } \ v^1,\ v^2,\ v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n.$$

Ce qui entraîne que $\mathcal{A}_1$ est hémicontinu.
Une application du théorème 1.3.2 montre que $\mathcal{A}_1$ est surjectif, c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}_1 V_0 = V_0'$$

alors, pour tout $\left(\psi - A\varphi,\ \dfrac{\alpha}{\beta}\xi\right) \in V_0'$, il existe $(v, \theta) \in V_0$ solution du problème (3.1.8).
Reste à montrer que $u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$, $\theta \in H^2(\Omega)$ et $Au + B_0 v \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$. Pour cela, la première équation du système (3.1.7) donne :

$$u = v + \varphi$$

comme $v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ et $\varphi \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$, alors $u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$,
par conséquent

$$(u,\ v,\ \theta) \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times H^1_0(\Omega).$$

De plus,

$$A_0\theta = \xi - \theta - \beta divv \in L^2(\Omega),$$

car $\xi \in L^2(\Omega)$, $v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ et $\theta \in H^1_0(\Omega)$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \langle A_0\theta, u\rangle &= (\theta,\ u)_{H^1_0(\Omega)} \\ &= \int_\Omega \nabla\theta.\nabla u\, dx, \quad \forall\theta,\ u \in H^1_0(\Omega) \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a:

$$\begin{aligned} \langle A_0\theta, \varphi\rangle &= \langle\nabla\theta, \nabla\varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \\ &= -\langle\Delta\theta, \varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \end{aligned}$$

d'où :

$$A_0\theta = -\Delta\theta \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega)$$

comme $\Delta\theta \in L^2(\Omega)$ et $\theta \in H^1_0(\Omega)$, alors $\theta \in H^2(\Omega)$, il s'ensuit que

$$\theta \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$

De la deuxième équation du système (3.1.7), il vient que

$$Au + B_0 v = \psi - v - \alpha\nabla\theta \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$$

car $\psi \in (L^2(\Omega))^n$ et $v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$,
Finalement, pour tout $(\varphi, \psi, \xi) \in \mathcal{H}$, il existe $(u, v, \theta) \in D(\mathcal{A})$ tel que :

$$(I + \mathcal{A})(u, v, \theta) = (\varphi, \psi, \xi)$$

donc l'opérateur $(I + \mathcal{A})$ est surjectif. Par conséquent, $\mathcal{A}$ est maximal.
Ceci achève la preuve du proposition 3.1.1. ■

3.2 Densité et régularité

Nous allons étudier dans cette section la régularité de la solution du système $(\mathcal{P}_1)$.

Proposition 3.2.1 *Sous les hypothèses (3.0.3), (3.0.4), (3.0.5), (3.0.6), (3.0.7) et (3.1.1), on a :*

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) \;=\; &\Big\{(u, v, \theta) \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right), \\ &-div\sigma(u) + f(v) \in \left(L^2(\Omega)\right)^n, \quad \sigma(u).\nu + au + g(v) = 0 \quad \textit{dans} \quad \left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n\Big\}. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1 *Pour* $(u,v,\theta)\in D(\mathcal{A})$ *,* $div\sigma(u)\in(L^2(\Omega))^n$ *(c'est à dire* $u\in H^1(div\sigma,\Omega)$*), alors d'après le corollaire 1.2.1,* $(\sigma(u).\nu)_{/\Gamma_2}$ *est définie comme élément de* $\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n$*. Comme* $u,\,v\in\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ *et g satisfait (3.0.7), alors* $au+g(v)\in(L^2(\Gamma_2))^n$ *, la condition au bord* $\sigma(u).\nu+au+g(v)=0$ *a un sens dans* $\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n$ *et de plus,* $(\sigma(u).\nu)\in(L^2(\Gamma_2))^n$*.*

Preuve. On montre que $D(\mathcal{A})=D_1$, avec

$$\begin{aligned}D_1 &= \left\{(u,v,\theta)\in\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\times\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\times\left(H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)\right),\right.\\ &\quad\left.-div\sigma(u)+f(v)\in\left(L^2(\Omega)\right)^n,\ \ \sigma(u).\nu+au+g(v)=0\ \text{ dans }\ \left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n\right\}.\end{aligned}$$

- $D(\mathcal{A})\subset D_1$,

Soit $(u,v,\theta)\in D(\mathcal{A})$, alors $Au+B_0v\in(L^2(\Omega))^n$,
or

$$\begin{aligned}\langle Au+B_0v,w\rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]',\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} &= \int_\Omega\sigma(u):\varepsilon(w)\,dx+\int_{\Gamma_2}(au+g(v)).wd\Gamma\\ &\quad+\int_\Omega f(v).wdx,\qquad\forall w\ \in\ \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n.\end{aligned}$$

Si on prend w dans $\mathscr{D}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, on obtient :

$$-div\sigma(u)+f(v)=Au+B_0v\in\left(L^2(\Omega)\right)^n$$

ce qui montre que $u\in H^1(div\sigma,\Omega)$. D'après le corollaire 1.2.1, $(\sigma(u).\nu)_{/\Gamma_2}$ est défini comme élément de $\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n$. Pour $w\in\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ on a :

$$\langle\sigma(u).\nu,w\rangle_{\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n,\left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n}=\int_\Omega\left(w\,div\sigma(u)+\sigma(w):\varepsilon(u)\right)dx$$

$$\begin{aligned}\langle Au+B_0v,w\rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]',\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} &= -\int_\Omega wdiv\sigma(u)\,dx+\langle\sigma(u).\nu,w\rangle_{\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n,\left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n}\\ &\quad+\int_{\Gamma_2}(au+g(v)).wd\Gamma+\int_\Omega f(v).wdx\end{aligned}$$

comme

$$-div\sigma(u)+f(v)=Au+B_0v\in\left(L^2(\Omega)\right)^n$$

alors :

$$\sigma(u).\nu+au+g(v)=0,\qquad\text{dans }\ \left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n$$

d'où :

$$(u,v,\theta)\in D_1.$$

Réciproquement, Soit $(u,v,\theta)\in D_1$, pour $w\in\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ on a :

$$\begin{aligned}\langle Au+B_0v,w\rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]',\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} &= \int_\Omega \sigma(u):\varepsilon(w)\,dx+\int_{\Gamma_2} au.wd\Gamma \\ &+\int_\Omega f(v).wdx+\int_{\Gamma_2} g(v).wd\Gamma\end{aligned}$$

comme $u\in H^1(div\sigma,\Omega)$, d'après le corollaire 1.2.1, $(\sigma(u).\nu)_{/\Gamma_2}$ est défini comme élément de $\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n$ et on a :

$$\langle\sigma(u).\nu,w\rangle_{\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n,\left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n}=\int_\Omega (w\,div\sigma(u)+\sigma(w):\varepsilon(u))\,dx$$

d'où :

$$\begin{aligned}\langle Au+B_0v,w\rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]',\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} &= \langle\sigma(u).\nu,w\rangle_{\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n,\left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n}-\int_\Omega w\ div\sigma(u)\,dx \\ &+\int_{\Gamma_2}(au+g(v)).w\,d\Gamma+\int_\Omega f(v).w\,dx \\ &= -\int_\Omega wdiv\sigma(u)\ dx+\int_\Omega f(v).w\,dx,\quad \forall w\in\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\end{aligned}$$

$$\langle Au+B_0v,w\rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]',\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n}=\int_\Omega (f(v)-div\sigma(u)).wdx,\quad \forall w\in\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$$

d'où :

$$Au+B_0v=-div\sigma(u)+f(v)\quad\text{dans}\quad\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]'.$$

Comme

$$-div\sigma(u)+f(v)\in\left(L^2(\Omega)\right)^n$$

alors

$$Au+B_0v\in\left(L^2(\Omega)\right)^n$$

d'où :

$$(u,v,\theta)\in D(\mathcal{A}).$$

■

Proposition 3.2.2 *Sous les hypothèses (3.0.3), (3.0.4), (3.0.5), (3.0.6), (3.0.7) et (3.1.1), $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

Preuve. On procède comme dans [12]; posons :

$$\begin{aligned}D_0 &= \left\{(u,v,\theta)\in\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\times\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\times\left(H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)\right),\ u\in\left(H^2(\Omega)\right)^n,\right. \\ &\qquad \left.\sigma(u).\nu+au+g(v)=0\quad\text{sur}\quad\Gamma_2\right\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D &= \Big\{ (u,v,\theta) \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_0(\Omega)\right)^n \times \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right),\ u \in \left(H^2(\Omega)\right)^n, \\ & \qquad \sigma(u).\nu + au = 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_2 \Big\}. \end{aligned}$$

Comme $g(0) = 0$, alors $D \subset D_0$.

* On montre que D est dense dans $\mathcal{H}$.

Pour montrer que D est dense dans $\mathcal{H}$, il suffit de montrer que

$$W_0 = \left\{ (v_1, v_2) \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_0(\Omega)\right)^n,\ v_1 \in \left(H^2(\Omega)\right)^n,\ \sigma(v_1).\nu + av_1 = 0 \ \ \text{sur} \ \ \Gamma_2 \right\}$$

est dense dans $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n$.

Posons : $H = \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n$.

Soit $(v_1, v_2) \in H$ tel que :

$$((v_1, v_2), (w_1, w_2))_H = 0, \quad \forall (w_1, w_2) \in W_0$$

ou encore :

$$(v_1, w_1)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + (v_2, w_2)_{(L^2(\Omega))^n} = 0, \quad \forall (w_1, w_2) \in W_0.$$

Si on prend $w_1 = 0$ et $w_2 \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^n$, alors $(0, w_2) \in W_0$; on obtient : $(v_2, w_2)_{(L^2(\Omega))^n} = 0$, $\forall w_2 \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^n$, ce qui donne $v_2 = 0$ (par densité de $\left(H^1_0(\Omega)\right)^n$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^n$).

Il reste $(v_1, w_1)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} = 0$ pour tout élément w_1 de $\left(H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ qui vérifie :

$$\sigma(w_1).\nu + aw_1 = 0, \quad \text{sur} \ \ \Gamma_2. \tag{3.2.1}$$

La relation

$$(v_1, w_1)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} = 0$$

s'écrit :

$$\int_\Omega \sigma(v_1) : \varepsilon(w_1)\, dx + \int_{\Gamma_2} av_1 w_1 d\Gamma = 0,$$

une intégration par parties sur Ω donne :

$$-\int_\Omega v_1 div\sigma(w_1)\, dx + \int_{\Gamma_2} v_1 (\sigma(w_1).\nu + aw_1)\, d\Gamma = 0, \qquad \forall w_1 \in \left(H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n,$$

on obtient :

$$\int_\Omega v_1 div\sigma(w_1)\, dx = 0$$

pour tout élément w_1 de $\left(H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$ qui vérifie $(3.2.1)$.

Montrer que $v_1 = 0$, revient à montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \rightarrow & \left(L^2(\Omega)\right)^n \\ (w_1, w_2) & \mapsto & -div\sigma(w_1) \end{array}$$

est surjective.

Pour cela, on prend $h \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$; on résoud le problème :

$$\begin{cases} -div\sigma(w_1) = h & \text{dans } \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \sigma(w_1).\nu + aw_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases}$$

dont la formulation variationnelle est

$$\int_\Omega \sigma(w_1) : \varepsilon(w)\, dx + \int_{\Gamma_2} aw_1.wd\Gamma = \int_\Omega hw\ dx, \qquad \forall w \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$$

d'après le lemme de Lax Milgram, ce problème admet une solution unique $w_1 \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$.

En effet, on pose :

$$\begin{cases} a(w_1, w) = \displaystyle\int_\Omega \sigma(w_1) : \varepsilon(w)\, dx + \int_{\Gamma_2} aw_1.wd\Gamma, \\ \text{et} \\ L(w) = \displaystyle\int_\Omega hwdx. \end{cases}$$

• $a(.,.)$ est bilinéaire.

• Montrons que $a(.,.)$ est continue sur $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$.

Soient $w_1,\ w \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$:

$$\begin{aligned} |a(w_1, w)| &= \left| \int_\Omega \sigma(w_1) : \varepsilon(w)\, dx + \int_{\Gamma_2} aw_1.w\, d\Gamma \right| \\ &\leq C \|w_1\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} \|w\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} \end{aligned}$$

d'où la continuité de $a(.,.)$.

• Montrons que $a(.,.)$ est coercive sur $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$.

Soit $w \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$, on a :

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_\Omega \sigma(w) : \varepsilon(w)\, dx + \int_{\Gamma_2} a|w|^2\, d\Gamma \\ &= \|w\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} \end{aligned}$$

d'où la coercivité.

• $L(.)$ est linéaire sur $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$.

• $L(.)$ est continue sur $\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$.

D'après le corollaire 1.2.1, $(\sigma(w_1).\nu)_{/\Gamma_2}$ est défini comme élément de $\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^n$ et on a :

$$\sigma(w_1).\nu = -aw_1 \in \left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n$$

les résultats classiques de régularité elliptique montrent que $w_1 \in (H^2(\Omega))^n$.
On a $(w_1, w_2) \in W_0$, $\forall w_2 \in (H_0^1(\Omega))^n$, ce qui prouve la surjectivité de l'application

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \rightarrow & (L^2(\Omega))^n \\ (w_1, w_2) & \mapsto & -div\sigma(w_1) \end{array}$$

d'où $v_1 = 0$ et W_0 est dense dans H.
* On montre maintenant que $D_0 \subset D(\mathcal{A})$.
Soit $(u, v, \theta) \in D_0$; alors $u \in (H^2(\Omega))^n$ et donc $div\sigma(u) \in (L^2(\Omega))^n$.
De plus $(-div\sigma(u) + f(v)) \in (L^2(\Omega))^n$, d'après la proposition 3.2.1, on obtient :

$$(u, v, \theta) \in D(\mathcal{A})$$

par conséquent, $D_0 \subset D(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.
Ce qui termine la preuve de la proposition 3.2.2.

■

Proposition 3.2.3 *Si* $g(x_1, ..., x_n) = (g_1(x_1), ..., g_n(x_n))$ *est continue, globalement lipschitzienne, alors :*

$$D(\mathcal{A}) = D_0$$

et la norme $|||.|||_{D(\mathcal{A})}$ *définie sur* $D(\mathcal{A})$ *par :*

$$|||(u, v, \theta)|||_{D(\mathcal{A})} = \left(\|u\|^2_{(H^2(\Omega))^n} + \|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|\theta\|^2_{H^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme $\|.\|_{D(\mathcal{A})}$ *définie par :*

$$\|(u, v, \theta)\|_{D(\mathcal{A})} = \left(\|u\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|v\|^2_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|div\sigma(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \|\theta\|^2_{H^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. On désigne par C une constante positive assez grande.
D'après la preuve de la proposition 3.2.2, on a $D_0 \subset D(\mathcal{A})$.
Reste à montrer que $D(\mathcal{A}) \subset D_0$.
Soit $(u, v, \theta) \in D(\mathcal{A})$, on montre que $u \in (H^2(\Omega))^n$; pour cela, il suffit de montrer que $g(v)_{/\Gamma_2} \in \left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n$ (car on a $(-div\sigma(u) + f(v)) \in (L^2(\Omega))^n$ et $u, v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$, alors on peut appliquer les résultats de régularité elliptique au problème

$$\begin{cases} -div\sigma(u) + f(v) = F, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \sigma(u).\nu = -au - g(v), & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Montrons alors que $g(v) \in (H^1(\Omega))^n$

comme $g(x_1, ..., x_n) = (g_1(x_1), ..., g_n(x_n))$ est globalement lipschitzienne et $g(0) = 0$, alors il existe $c_1 > 0$ telle que :

$$|g(x)| \leq c_1 |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

d'où :

$$\int_\Omega |g(v)|^2 dx \leq c_1^2 \int_\Omega |v|^2 dx < +\infty.$$

D'autre part, on a :

$$\partial_i (g_j(v)) = \sum_{k=1}^n \partial_k g_j \partial_i v_k$$

alors

$$\begin{aligned} |\nabla(g(v))|^2 &= \left| \sum_{j=1}^{j=n} \left(g_j'(v_j)\right)^2 \sum_{i=1}^{i=n} (\partial_i v_j)^2 \right| \\ &\leq C |\nabla v|^2 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\int_\Omega |\nabla(g(v))|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx < +\infty$$

d'où :

$$g(v) \in \left(H^1(\Omega)\right)^n \text{ et donc } g(v)_{/\Gamma_2} \in \left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n.$$

et par conséquent

$$\|g(v)\|_{(H^1(\Omega))^n} \leq C \|v\|_{(H^1(\Omega))^n}$$

donc $u \in (H^2(\Omega))^n$ et

$$\begin{aligned} \|u\|_{(H^2(\Omega))^n} &\leq C \left(\|u - div\sigma(u)\|_{(L^2(\Omega))^n} + \|au + g(v)\|_{\left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)^n} \right) \\ &\leq C \left(\|u\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|v\|_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \|div\sigma(u)\|_{(L^2(\Omega))^n} \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne l'équivalence des normes. ∎

À partir des propositions 3.1.1, 3.2.2 et 3.2.3, on en déduit le théorème d'existence, d'unicité et de régularité des solutions suivant (cf.[3, 12, 27]) :

Théorème 3.2.1 *Soient Γ_1 et Γ_2 définis par (3.0.1) et (3.0.2) et satisfaisant (3.1.1) et (3.1.2). On suppose que les a_{ijkl} vérifient (2.0.3) et (2.2.1). On suppose de plus que les fonctions f et g vérifient (3.0.3), (3.0.4), (3.0.5), (3.0.6) et (3.0.7). Alors, on a :*

i) *Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{H}$ le problème $(\mathcal{P}_1)$ admet une solution, (au sens faible), unique (u, θ) vérifiant :*

$$(u, u', \theta) \in C\left(\mathbb{R}^+;\ \mathcal{H}\right).$$

De plus, si $(v_0, v_1, \tau_0) \in \mathcal{H}$ *et* (v,τ) *est la solution correspondante alors on a, pour tout* $t \in [0, +\infty)$

$$\left\|\left(u(t), u'(t), \theta(t)\right) - \left(v(t), v'(t), \tau(t)\right)\right\|_{\mathcal{H}} \leq \left\|\left(u_0, u_1, \theta_0\right) - \left(v_0, v_1, \tau_0\right)\right\|_{\mathcal{H}}$$

continuité par rapport aux données.

ii) *Si* $(u_0, u_1, \theta_0) \in D(\mathcal{A})$*, alors la solution* (u, θ) *(dite forte) du problème* $(\mathcal{P}_1)$ *vérifie :*

$$(u, u', \theta) \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^+ \ ; \ \mathcal{H}\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^+ \ ; \ D(\mathcal{A})\right).$$

De plus, si g *est globalement lipschitzienne telle que* $g(x_1, ..., x_n) = (g_1(x_1), ..., g_n(x_n))$*, alors la solution* (u, θ) *du problème* $(\mathcal{P}_1)$ *possède la propriété de régularité plus forte suivante:*

$$\begin{aligned}
&u \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; \left(H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right), \\
&u' \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right), \\
&u'' \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; \left(L^2(\Omega)\right)^n\right), \\
&\theta \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right)\right), \\
&\theta' \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)\right).
\end{aligned}$$

3.3 Stabilisation du système anisotrope de la thermoélasticité par des feedbacks interne et frontière non linéaires.

L'objectif de cette section est de donner un résultat de stabilisation du système anisotrope de la thermoélasticité par des feedbacks interne et frontière non linéaires.

Rappelons le système anisotrope de la thermoélasticité avec des dissipations interne et frontière non linéaires

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases}
u'' - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta + f(u') = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\
\theta' - \Delta\theta + \beta divu' = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\
\theta = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\
u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\
\sigma(u).\nu + au + g(u') = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\
u(.,0) = u_0, \ u'(.,0) = u_1, \ \theta(.,0) = \theta_0, & \text{dans} \quad \Omega.
\end{cases}$$

Théorème 3.3.1 *Soient* Γ_1 *et* Γ_2 *données par (3.0.1) et (3.0.2) et vérifiant (3.1.1) et (3.1.2). On suppose que les* a_{ijkl} *vérifient (2.0.3) et (2.2.1). On suppose que les fonctions*

f et g satisfont (3.0.3), (3.0.4), (3.0.5), (3.0.6) et (3.0.7) ainsi que les inégalités :

$$\begin{aligned} g(x).x &\geq d|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad |x| \geq 1 && (3.3.1)\\ |x|^2 + |g(x)|^2 &\leq G(g(x).x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad |x| \leq 1 && (3.3.2)\\ |x|^2 + |f(x)|^2 &\leq G(f(x).x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad |x| \leq 1 && (3.3.3) \end{aligned}$$

où d est une constante positive et $G : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est une fonction concave strictement croissante telle que $G(0) = 0$. Alors, il existe une constante $\tau > 0$, des constantes r_1, r_2 et un temps $T_1 > 0$ (dépendant de τ, $E(0)$, $|\Gamma_2|$, $|\Omega|$) tels que l'énergie de toute solution de $(\mathcal{P}_1)$ vérifie :

$$E(t) \leq r_2 G\left(\frac{\Psi^{-1}(r_1 t)}{r_1 \tau t}\right), \quad \forall t \geq T_1, \tag{3.3.4}$$

où Ψ est donnée par :

$$\Psi(t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{\Phi(s)} ds$$

avec $\Phi(s) = \tau R_1 G^{-1}\left(\frac{s}{r_2}\right)$ et $R_1 = \min(|\Gamma_2|, |\Omega|)$.

Remarque 3.3.1 *Le théorème 3.3.1 reste vrai si $f = 0$ et g vérifie les hypothèses précédentes (cas d'un feedback frontière uniquement) ou si $\Gamma_2 = \varnothing$ et f vérifie les hypothèses précédentes (cas d'un feedback interne).*

Pour démontrer le théorème 3.3.1, on aura besoin du résultat théorique de **S. Nicaise** [23].

3.3.1 Un résultat abstrait de stabilisation

Dans cette sous-section on rappelle le résultat théorique de **S. Nicaise** [23] qui montre, sous certaines conditions, que si un système linéaire abstrait est exponentiellement stable, alors le système non linéaire associé est automatiquement stable, le type de décroissance dépend des propriétés de la non linéarité.

La méthode de ce résultat est basée sur les principes de **D.L. Russell** et de **Liu**.
Le principe de **D. L. Russell** permet d'obtenir, sous certaines conditions, la contrôlabilité du système rétrograde à partir de la stabilisation du système direct.
ou encore la contrôlabilité d'un système réversible à partir de sa stabilisation.
Le principe de **Liu** consiste à estimer l'énergie du système non linéaire direct en utilisant le système rétrograde linéaire avec donnée finale égale à la valeur finale de la solution du système non linéaire direct à donnée initiale nulle.

Cette estimation se fait en utilisant la stabilité exponentielle du problème rétrograde linéaire et certaines inégalités intégrales.

On considère deux espaces de Hilbert réels $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ munis des produits scalaires respectifs $(.,.)_{\mathcal{H}}$, $(.,.)_{\mathcal{V}}$ et tels que l'injection de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{H}$ soit continue à image dense.
On identifie $\mathcal{H}$ à son dual $\mathcal{H}'$; on obtient le diagramme standard :

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{V}'.$$

On considère deux opérateurs de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$:
• un opérateur linéaire borné A_1
• un opérateur, (non linéaire), B.
On définit ensuite deux opérateurs, (non linéaires), $\mathcal{A}^+$ et $\mathcal{A}^-$:

$$D\left(\mathcal{A}^{\pm}\right) = \{v \in \mathcal{V} \,/\, \quad (\pm\, A_1 + B)\, v \in \mathcal{H}\}, \tag{3.3.5}$$
$$\mathcal{A}^{\pm} v = (\pm\, A_1 + B)\, v, \qquad \forall v \in D\left(\mathcal{A}^{\pm}\right). \tag{3.3.6}$$

Dans toute la suite, on fera les hypothèses suivantes :

$$\mathcal{A}^{+} \text{ est maximal monotone,} \tag{3.3.7}$$
$$\mathcal{A}^{-} \text{ est maximal monotone,} \tag{3.3.8}$$
$$D\left(\mathcal{A}^{+}\right) \text{ est dense dans } \mathcal{H}, \tag{3.3.9}$$
$$D\left(\mathcal{A}^{-}\right) \text{ est dense dans } \mathcal{H}, \tag{3.3.10}$$

$$\langle A_1 u, u\rangle = 0, \qquad \forall u \in \mathcal{V}, \tag{3.3.11}$$
$$\langle Bu, u\rangle \geq 0, \qquad \forall u \in \mathcal{V}. \tag{3.3.12}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne la dualité entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$.
L'opérateur $\mathcal{A}^+$ sera noté $\mathcal{A}$.
La théorie des semi-groupes non linéaires (cf.[27]) permet de montrer que le problème d'évolution :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A_1 u + Bu = 0, \qquad \text{dans } \mathcal{H}, \qquad t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.3.13}$$

possède une solution, (faible), unique $u \in C\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right)$ pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$ et si $v(t)$ est la solution correspondante à la donnée initiale $v_0 \in \mathcal{H}$, alors :

$$\|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{H})} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Pour $u_0 \in D(\mathcal{A})$, le problème (3.3.13) posséde une solution, (forte)

$$u \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A})\right)$$

telle que $u(t) \in D(\mathcal{A})$, pour tout $t \geq 0$.
L'énergie du système, définie par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{3.3.14}$$

est décroissante.
Pour $u_0 \in D(\mathcal{A})$, on a :

$$\mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T) = \int_S^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\, dt, \quad \forall 0 \leq S < T < \infty. \tag{3.3.15}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\langle Bu(t), u(t)\rangle, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.3.16}$$

L'identité (3.3.15) se prolonge, par densité, aux solutions faibles.
En effet, Soit $u_0 \in \mathcal{H}$,
Comme $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$, alors il existe $\{u_0^n\} \subset D(\mathcal{A})$ telle que $u_0^n \to u_0$ dans $\mathcal{H}$.
Soit u^n la solution du problème (3.3.13) correspondant à la donnée initiale u_0^n, alors :

$$\mathcal{E}_n(S) - \mathcal{E}_n(T) = \int_S^T \langle Bu^n(t), u^n(t)\rangle\, dt,$$

d'autre part, si u est la solution correspondante à la donnée initiale $u_0 \in \mathcal{H}$, alors :

$$\|u^n - u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{H})} \leq \|u_0^n - u_0\|_{\mathcal{H}}$$

d'où :

$$u^n \to u \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(\mathbb{R}^+ ;\ \mathcal{H}\right)$$

ce qui entraîne que

$$\mathcal{E}_n(S) - \mathcal{E}_n(T) \to \mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T),$$

donc $\int_S^T \langle Bu^n(t), u^n(t)\rangle\, dt$ converge vers $\int_S^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\, dt$.

Remarque 3.3.2 *On a les mêmes résultats pour $\mathcal{A}^-$, avec la même expression de l'énergie et la même identité (3.3.15) pour $u_0 \in D(\mathcal{A}^-)$.*

On introduit la notion d'**estimation de stabilité.**

Définition 3.3.1 *On dit que le couple* (A_1, B) *vérifie l'estimation de stabilité s'il existe* $T > 0$ *et deux constantes positives* C_1, C_2 *(qui peuvent dépendre de* T*) avec* $C_1 < T$ *telles que*

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2\int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt \tag{3.3.17}$$

pour toute solution u *de (3.3.13).*

La décroissance de l'énergie et l'identité (3.3.15) permettent de montrer que cette définition est équivalente à :

Lemme 3.3.1 *Le couple* (A_1, B) *vérifie l'estimation de stabilité si et seulement s'il existe* $T > 0$ *et une constante positive* C *(qui peuve dépendre de* T*) tels que*

$$\mathcal{E}(T) \leq C\int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt \tag{3.3.18}$$

pour toute solution u *de (3.3.13).*

Preuve. $\Rightarrow$)

Comme $\mathcal{E}(t)$ est décroissante, alors (3.3.17) implique

$$T\mathcal{E}(T) \leq \int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2\int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt$$

l'identité (3.3.15) donne

$$T\mathcal{E}(T) \leq C_1\mathcal{E}(T) + (C_1 + C_2)\int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt$$

d'où :

$$\mathcal{E}(T) \leq \frac{C_1 + C_2}{T - C_1}\int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt$$

qui n'est autre que (3.3.18) avec $C = \dfrac{C_1 + C_2}{T - C_1}, \quad (C_1 < T)$.

$\Longleftarrow$)

La monotonie de $\mathcal{E}(t)$ permet d'écrire :

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq T\mathcal{E}(0).$$

De l'identité (3.3.15), il vient que

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt &\leq \frac{T}{2}\mathcal{E}(0) + \frac{T}{2}\mathcal{E}(0)\\ &\leq \frac{T}{2}\mathcal{E}(0) + \frac{T}{2}\left(\mathcal{E}(T) + \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt\right)\end{aligned}$$

et comme

$$\mathcal{E}(T) \leq C \int_0^T \langle Bu(t), u(t) \rangle \, dt$$

alors, on aura :

$$\int_0^T \mathcal{E}(t) \, dt \leq \frac{T}{2} \mathcal{E}(0) + \frac{T}{2}(C+1) \int_0^T \langle Bu(t), u(t) \rangle \, dt$$

qui n'est autre que (3.3.17). ■

L'estimation de stabilité est équivalente à la stabilité exponentielle de (3.3.13). donnée par le théorème suivant:

Théorème 3.3.2 *Le couple* (A_1, B) *vérifie l'estimation de stabilité si et seulement s'il existe deux constantes positives* M *et* ω *telles que :*

$$\mathcal{E}(t) \leq M e^{-\omega t} \mathcal{E}(0), \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.3.19}$$

pour toute solution u *de (3.3.13).*

Preuve. Supposons que l'estimation de stabilité est vérifiée. De (3.3.15) et (3.3.18), on obtient :

$$\mathcal{E}(T) \leq C(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T))$$

d'où :

$$\mathcal{E}(T) \leq \gamma \mathcal{E}(0),$$

avec $\gamma = \dfrac{C}{C+1} < 1$.

En appliquant cette estimation dans l'intervalle $[(m-1)T, \ mT]$, $m = 1, 2, 3, ...$, (ce qui est possible puisque le système est invariant par translation), on obtient :

$$\mathcal{E}(mT) \leq \gamma \mathcal{E}((m-1)T) \leq .... \leq \gamma^m \mathcal{E}(0), \qquad m = 1, 2, 3, ...$$

donc on a :

$$\mathcal{E}(mT) \leq e^{-\omega m T} \mathcal{E}(0), \qquad m = 1, 2, 3, ...$$

avec $\omega = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{1}{\gamma} \right) > 0$.

Pour $t > 0$ arbitraire, il existe $m \geq 1$ tel que $(m-1)T < t \leq mT$. La décroissance de l'énergie donne :

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}((m-1)T) \leq e^{-\omega(m-1)T} \mathcal{E}(0) = \\ e^{\omega T} e^{-\omega m T} \mathcal{E}(0) \leq \frac{1}{\gamma} e^{-\omega t} \mathcal{E}(0).$$

Réciproquement, si (3.3.13) est exponentiellement stable, alors (3.3.15) permet d'avoir

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt &\leq T\mathcal{E}(0) = T\mathcal{E}(T) + T\int_0^T \langle Bu(t),\ u(t)\rangle\,dt \\ &\leq TMe^{-\omega T}\mathcal{E}(0) + T\int_0^T \langle Bu(t),\ u(t)\rangle\,dt\end{aligned}$$

en prenant T assez grand pour que $Me^{-\omega T} < 1$, on obtient :

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2\int_0^T \langle Bu(t),\ u(t)\rangle\,dt,$$

avec $C_1 = TMe^{-\omega T} < T$ et $C_2 = T$, qui n'est autre que (3.3.17). ■

D'après le principe de **Russell**, la stabilité exponentielle du système (3.3.13) implique la contrôlabilité exacte du système correspondant à $(-A_1)$, avec un contrôle dans $L^2(0,T;\ \mathcal{U})$, $\mathcal{U}$ étant un espace de Hilbert réel tel que $\mathcal{V}$ s'injecte continûment dans $\mathcal{U}$.
On désigne par $I_{\mathcal{U}}$ l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$ et par $\mathcal{I}_{\mathcal{U}}$ l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ définie par :

$$\langle \mathcal{I}_{\mathcal{U}}u, v\rangle := (I_{\mathcal{U}}u, I_{\mathcal{U}}v)_{\mathcal{U}}, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}.$$

Pour $u_0 \in \mathcal{H}$, on cherche un temps $T > 0$ et un contrôle $J \in L^2(0,T;\ \mathcal{U})$ tels que la solution u du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A_1 u = J, \quad \text{dans} \quad \mathcal{V}', \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.3.20}$$

vérifie

$$u(T) = 0. \tag{3.3.21}$$

On rappelle le théorème 4.1 de contrôlabilité démontré par **S. Nicaise** dans [23].

Théorème 3.3.3 *On suppose que les conditions (3.3.7) à (3.3.12) sont vérifiées pour le couple $(A_1, \mathcal{I}_{\mathcal{U}})$ et que le couple $(A_1, \mathcal{I}_{\mathcal{U}})$ vérifie l'estimation de stabilité. Pour $T > 0$ assez grand et pour $u_0 \in \mathcal{H}$, il existe un contrôle $J \in L^2(0,T;\ \mathcal{U})$ tel que la solution $u \in C([0,T], \mathcal{H})$ de (3.3.20) vérifie (3.3.21).*

Preuve. On contrôle le problème rétrograde; pour cela, on remplace la condition "*$(A_1, \mathcal{I}_{\mathcal{U}})$ vérifie l'estimation de stabilité* " par "*$(-A_1, \mathcal{I}_{\mathcal{U}})$ vérifie l'estimation de stabilité* ".
Pour $p_0 \in \mathcal{H}$, on cherche $K \in L^2(0,T;\ \mathcal{U})$ tel que la solution $p \in C([0,T], \mathcal{H})$ du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + A_1 p = K, \quad \text{dans } \mathcal{V}', \quad t \geq 0 \\ p(T) = p_0 \end{cases} \tag{3.3.22}$$

vérifie :

$$p(0) = 0. \tag{3.3.23}$$

On résoud le problème (3.3.22), (3.3.23) en utilisant les systèmes rétrograde et direct avec le feedback linéaire $\mathcal{I}_{\mathcal{U}}$.

Pour $f_0 \in \mathcal{H}$, on considère $f \in C([0,T], \mathcal{H})$ la solution unique du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + A_1 f - \mathcal{I}_{\mathcal{U}} f = 0, \quad \text{dans } \mathcal{H}, \quad t \geq 0, \\ f(T) = f_0. \end{cases} \tag{3.3.24}$$

Comme $(-A_1, \mathcal{I}_{\mathcal{U}})$ vérifie l'estimation de stabilité, on a :

$$\mathcal{E}(f(t)) \leq M e^{-\omega(T-t)} \mathcal{E}(f_0). \tag{3.3.25}$$

On considère ensuite $g \in C([0,T], \mathcal{H})$ la solution unique du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} + A_1 g + \mathcal{I}_{\mathcal{U}} g = 0, \quad \text{dans } \mathcal{H}, \quad t \geq 0, \\ g(0) = f(0). \end{cases} \tag{3.3.26}$$

On pose : $p = g - f$. D'après (3.3.24) et (3.3.26), la fonction p vérifie (3.3.22) avec

$$K = -\mathcal{I}_{\mathcal{U}} g - \mathcal{I}_{\mathcal{U}} f. \tag{3.3.27}$$

On considère ensuite l'opérateur linéaire $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ défini par

$$\Lambda(f_0) = g(T).$$

On montre que $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq \sqrt{d}$ avec $d = Me^{-\omega T} < 1$ pour T assez grand, ce qui prouvera que $(\Lambda - I)$ est inversible.

L'estimation (3.3.25) donne :

$$\begin{aligned} \|\Lambda f_0\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|g(T)\|_{\mathcal{H}}^2 = 2\mathcal{E}(g(T)) \leq 2\mathcal{E}(g(0)) = \\ 2\mathcal{E}(f(0)) &\leq 2Me^{-\omega T} \mathcal{E}(f_0) = d\|f_0\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

d'où $\|\Lambda\| \leq \sqrt{d}$.

Pour $p_0 \in \mathcal{H}$, il existe $f_0 \in \mathcal{H}$ tel que

$$p_0 = (\Lambda - I) f_0 = g(T) - f(T) = p(T) \tag{3.3.28}$$

donc p vérifie (3.3.22) et (3.3.23).

Il nous reste maintenant à vérifier que $K \in L^2(0,T;\ \mathcal{U})$.

D'après (3.3.15), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f(T)) - \mathcal{E}(f(0)) &= \int_0^T \|I_{\mathcal{U}} f(t)\|_{\mathcal{U}}^2 \, dt \\ \mathcal{E}(g(0)) - \mathcal{E}(g(T)) &= \int_0^T \|I_{\mathcal{U}} g(t)\|_{\mathcal{U}}^2 \, dt \end{aligned}$$

la somme donne :

$$\int_0^T \left(\|I_{\mathcal{U}} f(t)\|_{\mathcal{U}}^2 + \|I_{\mathcal{U}} g(t)\|_{\mathcal{U}}^2\right) dt = \left(\mathcal{E}(f(T)) - \mathcal{E}(g(T))\right) \leq \frac{1}{2}\|f_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{E}(f(T))$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\|I_{\mathcal{U}} f(t)\|_{\mathcal{U}}^2 + \|I_{\mathcal{U}} g(t)\|_{\mathcal{U}}^2\right) dt &\leq \frac{1}{2}\left\|(I-\Lambda)^{-1} p_0\right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\left(1-\sqrt{d}\right)^2}\|p_0\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

donc $K \in L^2(0,T;\, \mathcal{U})$ et on a :

$$\|K\|_{L^2(0,T;\,\mathcal{U})} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{d}\right)}\|p_0\|_{\mathcal{H}}$$

ce qui prouve que l'application linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{H} \to L^2(0,T;\, \mathcal{U}) \\ p_0 \mapsto K \end{cases}$$

est continue. ■

3.3.2 Stabilisation du problème non linéaire

On suppose que l'espace des contrôles est donné par :

$$\mathcal{U} = \prod_{j=1}^{J} \mathcal{U}_j, \qquad j = 1, ..., J \in \mathbb{N}^* \tag{3.3.30}$$

$\mathcal{U}_j$: sous espace fermé de $L^2\left(X_j, \mu_j\right)^{N_j}$.
$\left(X_j, A_j, \mu_j\right)$: espace mesurable tel que $\mu_j(X_j) < \infty$.
On donne des fonctions

$$g_j : \mathbb{R}^{N_j} \to \mathbb{R}^{N_j}, \qquad j = 1, ..., J$$

telles que

$$\begin{aligned} (g_j(x) - g_j(y)).(x-y) &\geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{N_j}, \ \text{(monotonie)} &(3.3.31)\\ g_j(0) &= 0, &(3.3.32)\\ |g_j(x)| &\leq M(1+|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{N_j} &(3.3.33) \end{aligned}$$

où M est une constante positive.

Et on suppose que l'opérateur B est donné par :

$$\langle Bu, v\rangle = \sum_{j=1}^{J} \int_{X_j} g_j\left(\left(I_{\mathcal{U}}u\right)_j(x_j)\right).\left(I_{\mathcal{U}}v\right)_j(x_j)\, d\mu_j(x_j), \qquad \forall u, v \in \mathcal{V}. \tag{3.3.34}$$

* On montre que $\langle Bu, u\rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{V}$.

Soit $u \in \mathcal{V}$, on a :

$$\langle Bu, u\rangle = \sum_{j=1}^{J} \int_{X_j} g_j\left(\left(I_{\mathcal{U}}u\right)_j(x_j)\right).\left(I_{\mathcal{U}}u\right)_j(x_j)\, d\mu_j(x_j)$$

comme $g_j(x).x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{N_j}$ et (3.3.31), alors :

$$\langle Bu, u\rangle \geq 0, \qquad \forall u \in \mathcal{V}.$$

* On montre, maintenant, que B est bien défini.

Soit $u, v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} |\langle Bu, v\rangle| &= \left|\sum_{j=1}^{J} \int_{X_j} g_j\left(\left(I_{\mathcal{U}}u\right)_j(x_j)\right).\left(I_{\mathcal{U}}v\right)_j(x_j)\, d\mu_j(x_j)\right| \\ &\leq \|g(I_{\mathcal{U}}u)\| \, \|(I_{\mathcal{U}}v)\|. \end{aligned}$$

La condition (3.3.33), donne :

$$\begin{aligned} |\langle Bu, v\rangle| &\leq M(1 + |I_{\mathcal{U}}u|) \, \|(I_{\mathcal{U}}v)\| \\ &\leq C \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

où C est une constante positive. D'où B est bien défini.

Remarque 3.3.3 *Les conditions (3.3.31), (3.3.32) et (3.3.33) sont vérifiées pour $g_j(x) = x$ correspondant au contrôle linéaire $Bu = \mathcal{I}_{\mathcal{U}}u$.*

On rappelle une inégalité intégrale obtenu dans [5].

Théorème 3.3.4 *Soit $\mathcal{E} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ une fonction décroissante telle que :*

$$\int_S^{\infty} \Phi(\mathcal{E}(t))\, dt \leq T\mathcal{E}(S), \quad \forall S \geq 0, \tag{3.3.35}$$

avec $T > 0$ *et* Φ *une fonction convexe, strictement croissante, de* $[0, +\infty)$ *dans* $[0, +\infty)$ *telle que* $\Phi(0) = 0$.
Alors il existe $t_1 > 0$ *et* c_1 *dépendant de* T *et* $\mathcal{E}(0)$ *tels que :*

$$\mathcal{E}(t) \leq \Phi^{-1}\left(\frac{\Psi^{-1}(c_1 t)}{c_1 T t}\right), \quad \forall t \geq t_1, \tag{3.3.36}$$

où Ψ *est définie par :*

$$\Psi(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\Phi(s)} ds, \quad \forall t > 0. \tag{3.3.37}$$

La conséquence de cette inégalité pour le système (3.3.13) est le

Théorème 3.3.5 *On suppose que les hypothèses (3.3.7) à (3.3.12) sont vérifiées pour les couples* (A_1, B) *et* $(A_1, \mathcal{I}_{\mathcal{U}})$. *Soient* g_j, $j = 1, ..., J$ *vérifiant les conditions (3.3.31) à (3.3.33) ainsi que*

$$g_j(x).x \geq m|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{N_j} \ : \ |x| \geq 1, \tag{3.3.38}$$

$$|x|^2 + |g_j(x)|^2 \leq G(g_j(x).x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{N_j} \ : \ |x| \leq 1, \tag{3.3.39}$$

où m *est une constante positive et* $G : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *est une fonction concave strictement croissante telle que* $G(0) = 0$.
Si le couple $(-A_1, \mathcal{I}_{\mathcal{U}})$ *vérifie l'estimation de stabilité, alors il existe* c_2, $c_3 > 0$ *et* $T_1 > 0$ *(dépendant de* T, $\mathcal{E}(0)$, $\mu_j(X_j)$, $j = 1, ..., J$*) telles que :*

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G\left(\frac{\Psi^{-1}(c_2 t)}{c_2 T t}\right), \quad \forall t \geq T_1 \tag{3.3.40}$$

pour toute solution u *de (3.3.13), où* Ψ *est donnée par :*

$$\Psi(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\Phi(s)} ds, \quad \forall t > 0$$

pour Φ *définie par*

$$\Phi(s) = T\mu G^{-1}\left(\frac{s}{c_3}\right), \tag{3.3.41}$$

avec $\mu = \min\limits_{j=1,...,J} \mu_j(X_j)$.

Preuve. La lettre C désignera des constantes diverses.
Comme $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$ et l'énergie continue par rapport aux données initiales (on peut supposer que $u_0 \in D(\mathcal{A})$), pour cela, il suffit de montrer (3.3.40) pour des données

dans $D(\mathcal{A})$.

Soit alors u la solution forte de (3.3.13). On considère p la solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + A_1 p = K = -\mathcal{I}_{\mathcal{U}} g - \mathcal{I}_{\mathcal{U}} f, \quad \text{dans } \mathcal{V}', \quad \forall t \geq 0, \\ p(T) = u(T), \\ p(0) = 0. \end{cases} \tag{3.3.42}$$

avec $T > 0$ suffisamment grand pour avoir la contrôlabilité. À partir de (3.3.13) et (3.3.42) on peut écrire :

$$\langle \partial_t u + A_1 u + Bu,\ p \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle \partial_t p + A_1 p - K,\ u \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0,$$

ou de manière équivalente :

$$(\partial_t u,\ p)_{\mathcal{H}} + (\partial_t p,\ u)_{\mathcal{H}} + \langle A_1 u,\ p \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle A_1 p,\ u \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle Bu,\ p \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - \langle K,\ u \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0.$$

D'après l'hypothèse (3.3.11), on a :

$$\langle A_1(u+p),\ u+p \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0$$

ce qui donne

$$\langle A_1 u,\ p \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle A_1 p,\ u \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0$$

d'où :

$$(\partial_t u,\ p)_{\mathcal{H}} + (\partial_t p,\ u)_{\mathcal{H}} + \langle Bu,\ p \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - \langle K,\ u \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0. \tag{3.3.43}$$

En intégrant entre 0 et T, on obtient :

$$(u(T), p(T))_{\mathcal{H}} - (u(0), p(0))_{\mathcal{H}} + \int_0^T \left(\langle Bu,\ p \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - \langle K,\ u \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \right) dt = 0.$$

Les définitions de K et B donnent :

$$(u(T), p(T))_{\mathcal{H}} - (u(0), p(0))_{\mathcal{H}} = \int_0^T (K, I_{\mathcal{U}} u)_{\mathcal{U}} - \sum_{j=1}^{J} \int_{X_j} g_j \left((I_{\mathcal{U}} u)_j (x_j) \right) . (I_{\mathcal{U}} p)_j (x_j)\, d\mu_j (x_j)\, dt.$$

Comme $p(T) = u(T)$ et $p(0) = 0$, alors :

$$2\mathcal{E}(T) = \int_0^T (K,\ I_{\mathcal{U}} u)_{\mathcal{U}}\, dt - \sum_{j=1}^{J} \int_0^T \int_{X_j} g_j \left((I_{\mathcal{U}} u)_j (x_j) \right) . (I_{\mathcal{U}} p)_j (x_j)\, d\mu_j (x_j)\, dt.$$

Une application de l'inégalité de Cauchy -Schwarz donne :

$$2\mathcal{E}(T) \leq \|K\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \|I_{\mathcal{U}} u\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} + \|I_{\mathcal{U}} p\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \left(\sum_{j=1}^{J} \int_0^T \int_{X_j} \left| g_j \left((I_{\mathcal{U}} u)_j (x_j) \right) \right|^2 d\mu_j (x_j)\, dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.44}$$

L'estimation (3.3.29) et la condition $p(T) = u(T)$ donnent :

$$\int_0^T \left(\|I_{\mathcal{U}} f(t)\|_{\mathcal{U}}^2 + \|I_{\mathcal{U}} g(t)\|_{\mathcal{U}}^2\right) dt \leq \frac{1}{\left(1-\sqrt{d}\right)^2} \mathcal{E}(T).$$

Avec l'estimation précédente, la définition de K et $p = g - f$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|K(t)\|_{\mathcal{U}}^2 \, dt &\leq \frac{4}{\left(1-\sqrt{d}\right)^2} \mathcal{E}(T), \\ \int_0^T \|I_{\mathcal{U}} p(t)\|_{\mathcal{U}}^2 \, dt &\leq \frac{4}{\left(1-\sqrt{d}\right)^2} \mathcal{E}(T).\end{aligned}$$

Si on insère ces estimations dans (3.3.44), on arrive à :

$$\mathcal{E}(T) \leq \frac{1}{\left(1-\sqrt{d}\right)^2} \left(\sum_{j=1}^J \int_0^T \int_{X_j} \left\{ \left|(I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j)\right|^2 + \left|g_j\left((I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j)\right)\right|^2 \right\} d\mu_j(x_j)\, dt \right). \tag{3.3.45}$$

On pose :

$$\begin{aligned}\Sigma_j^+ &= \left\{(x,t) \in X_j \times (0,T) \ \ / \ \ \left|(I_{\mathcal{U}} u)_j(x,t)\right| > 1\right\}, \\ \Sigma_j^- &= \left\{(x,t) \in X_j \times (0,T) \ \ / \ \ \left|(I_{\mathcal{U}} u)_j(x,t)\right| \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_{X_j} \left\{ \left|(I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j)\right|^2 + \left|g_j\left((I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j)\right)\right|^2 \right\} d\mu_j(x_j)\, dt = I_j^+ + I_j^-,$$

avec

$$I_j^+ := \int_{\Sigma_j^+} \left\{ \left|(I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j)\right|^2 + \left|g_j\left((I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j)\right)\right|^2 \right\} d\mu_j(x_j)\, dt,$$

et

$$I_j^- := \int_{\Sigma_j^-} \left\{ \left|(I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j)\right|^2 + \left|g_j\left((I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j)\right)\right|^2 \right\} d\mu_j(x_j)\, dt.$$

Les conditions (3.3.38) et (3.3.33) donnent :

$$\begin{aligned}|g_j(x)|^2 &\leq |g_j(x)|\, M(1+|x|) \leq 2M\, |g_j(x)|\, |x| \\ &\leq \frac{2M}{|x|} |g_j(x)|\, |x|^2 \leq \frac{2M}{|m|} \frac{|g_j(x)|}{|x|} g_j(x).x \\ &\leq \frac{2M^2}{|m|} \left(\frac{1+|x|}{|x|}\right) g_j(x).x \leq \frac{4M^2}{|m|} g_j(x).x\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$I_j^+ \leq C \int_{\Sigma_j^+} (I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j).g_j\left((I_{\mathcal{U}} u)_j(x_j)\right) d\mu_j(x_j)\, dt$$

la monotonie de g_j, la définition de B et l'égalité

$$\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)=\int_0^T \langle Bu(t),u(t)\rangle\,dt$$

donnent :

$$I_j^+ \leq C\left(\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)\right). \tag{3.3.46}$$

On obtient de façon analogue :

$$\begin{aligned} I_j^- &\leq C\int_{\Sigma_j^-} G\left((I_{\mathcal{U}}u)_j(x_j).g_j\left((I_{\mathcal{U}}u)_j(x_j)\right)\right)d\mu_j(x_j)\,dt \\ &\leq C\int_0^T\int_{X_j} G\left((I_{\mathcal{U}}u)_j(x_j).g_j\left((I_{\mathcal{U}}u)_j(x_j)\right)\right)d\mu_j(x_j)\,dt. \end{aligned}$$

L'inégalité de Jensen (voir le lemme.1.2.1) donne :

$$I_j^- \leq T\mu_j(X_j)\,G\left(\frac{1}{T\mu_j(X_j)}\int_0^T\int_{X_j}(I_{\mathcal{U}}u)_j(x_j).g_j\left((I_{\mathcal{U}}u)_j(x_j)\right)d\mu_j(x_j)\,dt\right).$$

On rappelle que

$$\int_0^T\langle Bu(t),u(t)\rangle\,dt=\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)=\sum_j\int_0^T\int_{X_j}(I_{\mathcal{U}}u)_j(x_j).g_j\left((I_{\mathcal{U}}u)_j(x_j)\right)d\mu_j(x_j)\,dt$$

et G est strictement croissante.
Ceci permet d'avoir :

$$I_j^- \leq T\mu_j(X_j)\,G\left(\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{T\mu_j(X_j)}\right). \tag{3.3.47}$$

De (3.3.46) et (3.3.47), on obtient :

$$\mathcal{E}(T)\leq C\left\{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)+G\left(\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{T\mu}\right)\right\},$$

où G est monotone et C est une constante positive qui dépend de T, $\max\limits_{j\in J}\mu_j(X_j)$ et $\mu=\min\limits_{j\in J}\mu_j(X_j)$.
En écrivant $\mathcal{E}(0)=\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)+\mathcal{E}(T)$, on obtient :

$$\mathcal{E}(0)\leq C\left\{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)+G\left(\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{T\mu}\right)\right\}. \tag{3.3.48}$$

On a :

$$\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{T\mu}=\alpha\frac{\mathcal{E}(0)}{T\mu}$$

avec

$$0\leq\alpha=\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{\mathcal{E}(0)}\leq 1.$$

Comme G est concave et $G(0) = 0$, on obtient :

$$G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu}\right) \geq \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{\mathcal{E}(0)} G\left(\frac{\mathcal{E}(0)}{T\mu}\right)$$

d'où :

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu} \leq \frac{\mathcal{E}(0)}{T\mu} G\left(\frac{\mathcal{E}(0)}{T\mu}\right)^{-1} G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu}\right). \tag{3.3.49}$$

$\star$ Si $\dfrac{\mathcal{E}(0)}{T\mu} \leq 1$, la concavité de G et $G(0) = 0$ donnent :

$$G\left(\frac{\mathcal{E}(0)}{T\mu}\right) \geq \frac{\mathcal{E}(0)}{T\mu} G(1)$$

qui, avec (3.3.49), donne

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu} \leq (G(1))^{-1} G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu}\right). \tag{3.3.50}$$

$\star$ Si $\dfrac{\mathcal{E}(0)}{T\mu} > 1$, la croissance stricte de G donne :

$$G\left(\frac{\mathcal{E}(0)}{T\mu}\right) > G(1)$$

qui, avec (3.3.49), donne :

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu} \leq \frac{\mathcal{E}(0)}{T\mu} (G(1))^{-1} G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu}\right). \tag{3.3.51}$$

Des estimations (3.3.50) et (3.3.51), on déduit l'estimation :

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu} \leq (G(1))^{-1} \max\left(1, \tfrac{\mathcal{E}(0)}{T\mu}\right) G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu}\right), \tag{3.3.52}$$

l'estimation (3.3.48) s'écrit :

$$\mathcal{E}(0) \leq C_0 G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu}\right), \tag{3.3.53}$$

où C_0 est une constante positive dépendant de T, $\mathcal{E}(0)$, $\max\limits_j \mu_j(X_j)$, et $\min\limits_j \mu_j(X_j)$.
En appliquant l'estimation sur $[t,\ t+T]$ au lieu de $[0, T]$, on obtient :

$$\mathcal{E}(t) \leq C_0 G\left(\frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{T\mu}\right) = \Phi^{-1}(\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.3.54}$$

où Φ est définie par

$$\Phi(S) = T\mu G^{-1}\left(\frac{S}{C_0}\right).$$

D'où :

$$\Phi\left(\mathcal{E}\left(t\right)\right) \leq \mathcal{E}\left(t\right) - \mathcal{E}\left(t+T\right)$$

qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_S^N \Phi\left(\mathcal{E}\left(t\right)\right) dt &\leq \int_S^N \mathcal{E}\left(t\right) dt - \int_S^N \mathcal{E}\left(t+T\right) dt = \\
\int_S^N \mathcal{E}\left(t\right) dt - \int_{S+T}^{N+T} \mathcal{E}\left(t\right) dt &= \int_S^{S+T} \mathcal{E}\left(t\right) dt - \int_N^{N+T} \mathcal{E}\left(t\right) dt \leq \\
T\mathcal{E}\left(S\right) - T\mathcal{E}\left(N+T\right) &\leq T\mathcal{E}\left(S\right)
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient :

$$\int_S^\infty \Phi\left(\mathcal{E}\left(t\right)\right) dt \leq T\mathcal{E}\left(S\right), \quad \forall S \geq 0.$$

On conclut alors grâce au théorème 3.3.4. ■

3.3.3 Démonstration du théorème de stabilisation (théorème 3.3.1

Suivant le résultat théorique de **S. Nicaise** [23] donné dans la sous-section 3.3.1, la stabilisation du système non linéaire $(\mathcal{P}_1)$ se réduit à la stabilisation exponentielle du système linéaire associé (qui est le système $(\mathcal{P})$).

Rappelons que l'énergie de la solution du système $(\mathcal{P}_1)$ est donnée par :

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\left\|\left(u, u', \theta\right)\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} a\left|u\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{\left|u'\right|^2 + \sigma\left(u\right) : \varepsilon\left(u\right) + \frac{\alpha}{\beta}\left|\theta\right|^2\right\} dx.$$

Nous allons mettre le système $(\mathcal{P}_1)$ sous la forme abstraite (3.3.13).

Remarque 3.3.4 *Nous avons*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \left(H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega\right)\right)^n \times \left(L^2\left(\Omega\right)\right)^n \times L^2\left(\Omega\right), \\
\mathcal{V} &= \left(H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega\right)\right)^n \times \left(H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega\right)\right)^n \times H^1_0\left(\Omega\right).
\end{aligned}$$

Identifier $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ revient à identifier le premier $\left(H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega\right)\right)^n$ et $\left[\left(H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega\right)\right)^n\right]'$.
Nous aurons alors

$$\mathcal{V}' = \left(H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega\right)\right)^n \times \left[\left(H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega\right)\right)^n\right]' \times H^{-1}\left(\Omega\right)$$

On pose : $\phi = (u, v, \theta)$ et on définit les opérateurs :

$$\begin{cases} A_1 : \mathcal{V} \to \mathcal{V}' \\ \phi \mapsto A_1\phi = \left(-v,\ Au + \alpha\nabla\theta,\ \beta divv\right) \end{cases} \tag{3.3.55}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} B : \mathcal{V} \to \mathcal{V}' \\ \phi \mapsto B\phi = (0,\ B_0 v\ ,\ A_0 \theta) \end{array} \right. \tag{3.3.56}$$

On définit deux opérateurs (non linéaires), $\mathcal{A}^+$ et $\mathcal{A}^-$:

$$D\left(\mathcal{A}^{\pm}\right) = \{\phi \in \mathcal{V} / \quad (\pm A_1 + B)\,\phi \in \mathcal{H}\}\,. \tag{3.3.57}$$

$$\mathcal{A}^{\pm}\phi = (\pm A_1 + B)\,\phi, \quad \forall \phi \in D\left(\mathcal{A}^{\pm}\right). \tag{3.3.58}$$

L'opérateur $\mathcal{A}^+$ sera noté $\mathcal{A}$.
Les opérateurs A, A_0, B_0 ont été définis par (3.1.3) -(3.1.5) .
Pour

$$\phi = (u, v, \theta)\,, \qquad \phi^\star = (u^\star, v^\star, \theta^\star) \in D\,(A_1 + B)$$

on a :

$$\begin{aligned} \langle B\phi, \phi^\star \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} &= \langle (0,\ B_0 v,\ A_0 \theta)\,, (u^\star, v^\star, \theta^\star) \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \\ &= \langle B_0 v, v^\star \rangle + \langle A_0 \theta, \theta^\star \rangle\,. \end{aligned}$$

En tenant compte de la norme de $\mathcal{H}$, on obtient :

$$\langle B\phi, \phi^\star \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \int_{\Gamma_2} g\,(v)\,.v^\star d\Gamma + \int_{\Omega} (f\,(v)\,.v^\star + \nabla\theta.\nabla\theta^\star)\,dx.$$

Nous allons vérifier que les hypothèses d'application du théorème abstrait (théorème 3.3.5) de **S. Nicaise** sont satisfaites. Pour cela, nons commençons par le résultat suivant :

Lemme 3.3.2 *Sous les hypothèses (3.0.3), (3.0.4), (3.0.5), (3.0.6) et (3.0.7). L'opérateur B_0 est monotone, hémicontinu, borné et $B_0 0 = 0$.*

Preuve.
B_0 est monotone.
Soients u, $v \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n$, on a :

$$\begin{aligned} \langle B_0\,(u - v)\,, (u - v) \rangle &= \langle B_0 u - B_0 v,\ u - v \rangle \\ &= \int_{\Gamma_2} g\,(u - v)\,.\,(u - v)\,d\Gamma + \int_{\Omega} f\,(u - v)\,.\,(u - v)\,dx \geq 0 \end{aligned}$$

puisque $f\,(x - y)\,.\,(x - y) \geq 0$ et $g\,(x - y)\,.\,(x - y) \geq 0, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$, alors on obtient :

$$\langle B_0\,(u - v)\,, (u - v) \rangle \geq 0.$$

D'où B_0 est monotone.

B_0 est hémi-continu: (voir la preuve du lemme 1, page 87).

B_0 est borné : la bornitude de B_0 découle des propriétés de f et g (3.0.6) et (3.0.7).

$B_0 0 = 0$, car $f(0) = g(0) = 0$.

■

Théorème 3.3.6 *Si B_0 est monotone, hémicontinu, borné et $B_0 0 = 0$, alors les hypothèses suivantes :*

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^{\pm} \ \textit{est maximal monotone}, \\ &D(\mathcal{A}^{\pm}) \ \textit{est dense dans } \mathcal{H}, \\ &\langle A_1\phi, \phi\rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}, \\ &\langle B\phi, \phi\rangle \geq 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

sont vérifiées pour le couple (A_1, B), où $\langle .,. \rangle$ désigne la dualité entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$.

Preuve. • $\mathcal{A}^{\pm}$ est un opérateur maximal monotone: la démonstration est analogue à celle de la proposition 3.1.1.

• Pour démontrer que $D(\mathcal{A}^{\pm})$ est dense dans $\mathcal{H}$, il suffit de montrer que $D(\mathcal{A})$ dense dans $\mathcal{H}$, grâce à l'équivalence

$$(u, v, \theta) \in D(\mathcal{A}) \Leftrightarrow (-u, v, -\theta) \in D\left(\mathcal{A}^{-}\right).$$

La démonstration de $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$ est analogue à celle de la proposition 3.2.2.

• $\langle A_1\phi, \phi\rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}$.

Soit $\phi = (u, v, \theta) \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle A_1\phi, \phi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} &= \langle(-v,\ Au + \alpha\nabla\theta,\ \beta divv), (u, v, \theta)\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \\ &= (-v, u)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \langle Au, v\rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]',\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} \\ &= (-v, u)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + (u, v)_{\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$\langle A_1\phi, \phi\rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}.$$

• $\langle B\phi, \phi\rangle \geq 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}$.

Soit $\phi = (u, v, \theta) \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle B\phi, \phi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} &= \langle(0,\ B_0 v,\ A_0\theta), (u, v, \theta)\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \\ &= \langle B_0 v, v\rangle_{\left[\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n\right]',\left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n} + \langle A_0\theta, \theta\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} \\ &= \int_{\Gamma_2} g(v).vd\Gamma + \int_\Omega f(v).vdx + \int_\Omega \nabla\theta.\nabla\theta dx \geq 0 \end{aligned}$$

puisque $g(x).x \geq 0$ et $f(x).x \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
D'où :

$$\langle B\phi, \phi \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \geq 0, \qquad \forall \phi \in \mathcal{V}.$$

■

La démonstration du théorème 3.3.1 revient à montrer que le système linéaire

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} u'' - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta + u' = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta divu' = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma(u).\nu + au + u' = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(.,0) = u_0, \ u'(.,0) = u_1, \ \theta(.,0) = \theta_0, & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

associé au système $(\mathcal{P}_1)$ est exponentiellement stable. Alors cette condition est suffisante pour pouvoir appliquer le théorème 3.3.5.

Il reste à définir l'espace de Hilbert $\mathcal{U}$ et les opérateurs $I_\mathcal{U}$ et $\mathcal{I}_\mathcal{U}$ pour mettre le système $(\mathcal{P})$ sous forme abstraite.
Rappelons que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n \times L^2(\Omega) \\ \mathcal{V} &= \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n \times H^1_0(\Omega). \end{aligned}$$

Tenant compte de (3.3.15) et (2.2.7), on prend

$$\mathcal{U} = \left(L^2(\Gamma_2)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n$$

et on définit l'opérateur

$$\begin{cases} I_\mathcal{U} : \mathcal{V} \to \mathcal{U} \\ I_\mathcal{U}(u, v, \theta) = \left(v_{/\Gamma_2}, v, \nabla\theta\right). \end{cases}$$

et l'opérateur

$$\mathcal{I}_\mathcal{U} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$$

par

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}_\mathcal{U}(u, v, \theta), (u^\star, v^\star, \theta^\star) \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} &= \left(I_\mathcal{U}(u, v, \theta), I_\mathcal{U}(u^\star, v^\star, \theta^\star)\right)_\mathcal{U}, \\ : &= \int_{\Gamma_2} vv^\star d\Gamma + \int_\Omega vv^\star dx + \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \nabla\theta.\nabla\theta^\star dx. \end{aligned}$$

En fait $(\mathcal{P})$ s'écrit sous forme abstraite :

$$\begin{cases} \phi' + (-A_1 + \mathcal{I}_{\mathcal{U}})\,\phi = 0, \\ \phi(0) = (u_0, u_1, \theta_0)\,. \end{cases}$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} D\left(\mathcal{A}^{\pm}\right) &= \{\phi \in \mathcal{V} : \ (\pm A_1 + \mathcal{I}_{\mathcal{U}})\,\phi \in \mathcal{H}\}\,, \\ \mathcal{A}^{\pm}\phi &= (\pm A_1 + \mathcal{I}_{\mathcal{U}})\,\phi, \quad \forall \phi \in D\left(\mathcal{A}^{\pm}\right). \end{aligned}$$

La linéarité du système $(\mathcal{P})$ permet d'obtenir la caractérisation suivante de $D(\pm A_1 + \mathcal{I}_{\mathcal{U}})$

$$\begin{aligned} D(\pm A_1 + \mathcal{I}_{\mathcal{U}}) = \ &\big\{(u, v, \theta) \in \mathcal{V} : \ u \in \left(H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\right)^n, \ \theta \in \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right) \\ &\sigma(u)\,.\nu + au + v = 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_2\big\}\,. \end{aligned}$$

Dans le chapitre 2 (cas linéaire) on a démontré que le système $(\mathcal{P})$ est exponentiellement stable, alors le théorème 3.3.2 assure que le couple $(-A_1, \mathcal{I}_U)$ vérifie l'estimation de stabilité (3.3.17). À partir de là, l'application du théorème 3.3.5 montre la stabilité du système $(\mathcal{P}_1)$.

Exemples :

1. Si on suppose que $f = 0$, et que g vérifie (3.0.3), (3.0.4), (3.0.7), (3.3.1), (3.3.2), ainsi que :

$$\begin{aligned} x.g(x) &\geq c_0 |x|^{p+1}, \quad \forall |x| \leq 1, \\ |g(x)| &\leq C_0 |x|^{\alpha}, \quad \forall |x| \leq 1, \end{aligned}$$

où c_0, C_0 sont des constantes positives, $\alpha \in (0,1]$ et $p \geq \alpha$. Alors en faisant le choix

$$G(s) = s^{\frac{2}{q+1}} \text{ et } q = \frac{p+1}{\alpha} - 1$$

on trouve :

a) Si $p = \alpha = 1$, alors $q = 1$ et $G(s) = s$ ce qui entraîne que $\Psi^{-1}(t) = e^{-t}$, on obtient donc une décroissance exponentielle.

b) Si $p + 1 > 2\alpha$, alors $\Psi^{-1}(t) = t^{\frac{2}{1-q}}$, on obtient alors une décroissance de l'ordre $t^{-\frac{2\alpha}{p+1-2\alpha}}$.

2. Supposons que $f = 0$ et $g(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{|\xi|^{2p}}\right) \frac{\xi}{|\xi|^2}$ pour $|\xi|$ assez petit et pour $p > 0$. Alors (voir [5, exemple 2.4])

$$\xi.g(\xi) = h\left(|\xi|^2\right), \qquad \text{pour } |\xi| \text{ assez petit,}$$

avec $h(s) = \exp\left(\frac{-1}{s^p}\right)$ vérifie les conditions suivantes :

$$\xi.g(\xi) \geq h\left(|\xi|^2\right), \quad |g(\xi)| \leq C_0 |\xi|^{\alpha} \quad \forall |\xi| \leq 1 \tag{3.3.59}$$

où C_0 est une constante positive, $\alpha \in (0,1]$ et h est une fonction de $[0,1] \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et convexe telle que :

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{h(s)}{s^{\alpha}} = 0, \qquad \text{si } \alpha = 1. \tag{3.3.60}$$

D'après la condition(3.3.2), on a :

$$|\xi|^2 + |g(\xi)|^2 \leq G(g(\xi).\xi), \quad \forall |\xi| \leq 1,$$

pour $\alpha = 1$

$$|g(\xi)|^2 \leq C_0^2 |\xi|^2, \quad \forall |\xi| \leq 1$$

ceci implique que

$$|\xi|^2 + |g(\xi)|^2 \leq \left(1 + C_0^2\right) |\xi|^2,$$

et comme h est une fonction croissante et convexe sur $[0,1]$, alors h^{-1} est concave et

$$G\left(h\left(s\right)\right)=\left(1+C_0^2\right)s$$

ceci équivaut à dire que

$$G\left(s\right)=Ch^{-1}\left(s\right),\quad \text{où } C=\left(1+C_0^2\right) \text{ est une constante positive.}$$

d'où :

$$h^{-1}\left(s\right)=\frac{1}{\left|\log s\right|^{\frac{1}{p}}},$$

ce qui entraîne que

$$G\left(s\right)=\frac{C}{\left|\log s\right|^{\frac{1}{p}}}.$$

où C est une constante positive. En appliquant le théorème 3.3.1 , nons obtenons une décroissance de la forme

$$E\left(t\right)\leq\frac{C}{\left|\log t\right|^{\frac{1}{p}}},$$

3. De la même manière que dans l'exemple (2), supposons que $f=0$, et $g\left(\xi\right)=\exp\left(-\exp\left(\frac{1}{|\xi|^{2p}}\right)\right)\frac{\xi}{|\xi|^2}$ pour $|\xi|$ assez petit et $p>0$.
   Alors
   $$\xi.g\left(\xi\right)=h\left(|\xi|^2\right)\qquad \text{pour } |\xi| \text{ assez petit},$$
   avec $h\left(s\right)=\exp\left(-\exp\left(\frac{1}{s^p}\right)\right)$ vérifie les conditions (3.3.59) et (3.3.60) avec $\alpha=1$).
   $$G\left(s\right)=\frac{C}{\left|\log\left|\log s\right|\right|^{\frac{1}{p}}},$$
   où C est une constante positive. En appliquant le théorème 3.3.1 , nons obtenons une décroissance de la forme
   $$E\left(t\right)\leq\frac{C}{\left|\log\left|\log t\right|\right|^{\frac{1}{p}}}.$$

Conclusion

Le problème abordé dans ce mémoire, est le système anisotrope de la thermoélasticité avec condition (naturelle) de Neumann sur une partie du bord, et condition de Dirichlet sur l'autre partie, à l'aide de feedbaks non linéaires, l'un interne et l'autre frontière, dont nous avons abordé, dans un premier lieu, les questions d'existence, d'unicité et de la régularité des solutions, et ensuite, nous nous sommes intéressé au problème de stabilisation.

En utilisant la technique des multiplicateurs, on a montré dans le cas linéaire que la solution décroit exponentiellement dans l'espace d'énergie $\mathcal{H}$.

Dans le cas non linéaire, en utilisant un principe général de Russell et de Liu, S. Nicaise [23] a montré dans un cadre général, que la dissipation et la stabilité exponentielle par un feedback linéaire impliquent des estimations de stabilité par un feedback non linéaire, ce qui établit un lien direct entre les deux cas.

Cette étude ouvre la voie à de nombreuses questions, notamment:

- Étude de la stabilisation dans le cas d'une action frontière linéaire de type mémoire agissant sur la condition de Neumann.

- Étude de la stabilisation dans le cas d'une action interne ou frontière non linéaire de type mémoire.

Bibliographie

[1] **BEY. R, HEMINNA. A, LOHEAC. JP,** *Boundary stabilization of a linear elastodynamic system with variable coefficients, E.J.D.E. (2001), Num. 78, 1-23.*

[2] **BREZIS. H**, *Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson Paris, New York Barcelone, Milan, Mexico, Sao paulo, 1983.*

[3] **BREZIS. H,** *Opérateurs Maximaux Monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North, Holland, American, Elsevier.*

[4] **BROSSARD. R, LOHEAC. J-P,** *Stabilisation frontière du système élastodynamique dans un polygone plan, C. R. Acad. Sc. Math. 338 (2004), 213-21*8.

[5] **ELLER. M, LAGNESE. J.E, NICAISE. S,** *Decay rates for solutions of Maxwell system with nonlinear boundary damping, Comp. and Appl. Math., 21 (2002), 135-16*5.

[6] **Duvaut G et Lions J -L,** *Les inéquations en mécanique et en physique,* Dunod, Paris, 1972.

[7] **GUESMIA. A,** *Existence globale et stabilisation frontière non linéaire d'un système d'élasticité, Portugaliae Mathematica, 56 (1999), 361-379.*

[8] **HANSEN. S. W,** *Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod, J. Math. Anal. Appl. 167 (1992), 429-442.*

[9] **HEMINNA. A, NICAISE. S, SENE. A,** *Stabilisation d'un système de la thermoélasticité avec feedbacks non linéaires, C.R. Acad. Sci. Paris, série I Math. 339 (2004), 561-566.*

[10] **HEMINNA. A, NICAISE. S, SENE. A,** *Stabilisation of a system of anisotropic thermoelasticity by nonlinear boundary and internal feedbacks. Quarterly of Applied Mathematics Volume LXIII, Number 3, (2005), 429-453.*

[11] **HORN. M. A,** *Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the system of linear elasticity, J. Math. Anal. Appl. 223 (1998), 126-50.*

[12] **KOMORNIK. V,** *Exact Controllability and Stabilization, The Multiplier Method, RMA 36, Masson, 1994.*

[13] **LEMRABET. K**, *Étude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, Thesis, U.S.T.H.B., Alger, 1987.*

[14] **LEBEAU. G, ZUAZUA. E,** *Decay rates for the three-dimentional linear system of thermoelasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. 148 (1999) 179-231.*

[15] **LIONS. J- L**, *Contrôlabilité exacte , Perturbation et Stabilisation de Systèmes Distribués,* 1, Masson, (1986).

[16] **LIONS. J- L, MAGENES. E,** *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Volume 1, Dunod, Paris, (1968).

[17] **LIU. W.J,** *Partial exact controllability and exponential stability in higher-dimensional linear thermoelasticity, ESAIM COCV 3 (1998), 23-48.*

[18] **LIU W.J, ZUAZUA. E,** *Uniform stabilization of the higher dimentional system of thermoelasticity with a nonlinearboundary feedback. Quaterly of Applied Mathematics 59 (2001), 269-314.*

[19] **LIU. Z, ZHENG. S,** *Exponential stability of the semigroup associated with a thermoelastic system, Quart. Appl. Math. LI (1993), 535-545.*

[20] **NAKURAMA. K,** *Boundary value control of thermoelastic systems, Hiroshima Math. J. 13 (1983), 227-272.*

[21] **NICAISE. S, SENE. A,** *Stabilisation non linéaire d'un système de la thermoélasticité isotrope, Preprint MACS 03-12, 2003.*

[22] **NICAISE. S,** *Stability and controllability of the electromagneto-elastic system, Portugaliae Mathematica 60 (2003), 37-70.*

[23] **NICAISE. S,** S*tability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications, Rendiconti di Mathematica, Serie VII, 23 (2003),83-116.*

[24] **OLIVIERA L.A.F,** *Exponential decay of thermoelasticity, Commun.Appl. Anal. 1 (1997), 113-118.*

[25] **RIVIERA J.E.M,** *Decomposition of the displacement vector field and decay rates in linear thermoelasticity, SIAM J. Math. Anal. 24 (1993), 390-406.*

[26] **RIVIERA J.E.M,** *Asymptotic behaviour in* n-*dimensional thermoelasticity, Appl. 10 (1997), 47-53.*

[27] **SHOWALTER. R- E,** *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations, Math. Surveys and Monographs, 49, AMS, 1997.*

[28] **VALID. R,** *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures, Eyrolles, Paris, 1977.*