



Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène
Faculté des Sciences Mathématiques
Alger

THESE

Présentée par

MECHEBBEK Meriem

Pour l'obtention du grade de : **Magister**
en : **Mathématiques**
option : **Recherche Opérationnelle**

Thème

**CONTRIBUTION A LA CONNAISSANCE DES GRAPHS
PARFAITS**

Soutenue le : 26 avril 2001.

Devant le jury composé de :

KHELLADI Abdelkader	Professeur	U.S.T.H.B.	Président
AIT HADDADENE Hacène	Docteur d'Etat	U.S.T.H.B.	Directeur de Thèse
ABBAS Moncef	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur
AIDER Méziane	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur
BERRACHEDI Abdelhafid	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Hacène AIT HADDADENE, mon directeur de thèse, pour m'avoir encadrée, suivie et encouragée tout au long de ce travail. Je le remercie aussi pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils.

Je remercie tout particulièrement mes parents et mon frère pour leur aide et soutien.

Je remercie également les membres du jury pour avoir bien voulu examiner et évaluer ce travail.

Merci enfin à mes proches et à mes amis pour leurs conseils et encouragements durant ces deux années de thèse.

RESUME

Introduits par Claude Berge au début des années soixante, les graphes parfaits constituent l'une des classes les plus connues et les plus étudiées en Théorie des Graphes. L'un des aspects les plus intéressants de cette classe de graphes est son étude algorithmique. En effet, certains problèmes d'optimisation combinatoire, NP-complets dans le cas général, deviennent polynomiaux sur les graphes parfaits.

Cependant, l'étude des graphes parfaits pose des problèmes non résolus jusqu'à présent comme, par exemple, la Conjecture Forte des Graphes Parfaits, énoncée par C. Berge il y a près de quarante ans, et le problème de reconnaissance. Ces deux problèmes sont l'une des principales raisons pour lesquelles il est intéressant d'étudier des classes particulières de graphes parfaits.

Dans cette thèse, nous introduisons une nouvelle classe de graphes, appelés graphes quasi-localement sans patte. Nous présentons quelques résultats relatifs à la structure de ces graphes. Plus particulièrement, nous montrons la validité de la conjecture forte des graphes parfaits pour une sous-classe de cette classe de graphes. Nous proposons également un algorithme combinatoire polynomial pour la coloration optimale des graphes parfaits de cette sous-classe. Celle-ci contient strictement d'importantes classes de graphes parfaits. Nous donnons enfin, comme conséquence, une nouvelle propriété des graphes imparfaits critiques.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	3
CHAPITRE 1. GENERALITES SUR LES GRAPHER PARFAITS	7
1.1. Définitions et notations de base	8
1.1.1. Notion de graphe	8
1.1.2. Chaînes et Connexité	9
1.1.3. Coloration des sommets d'un graphe	10
1.1.4. Complexité algorithmique	11
1.2. Conjecture Forte des Graphes Parfaits	13
1.3. Quelques propriétés des graphes imparfaits critiques	19
1.4. Aspect algorithmique des graphes parfaits	21
1.4.1. Problèmes d'optimisation combinatoire associés aux graphes parfaits	21
1.4.2. Problème de reconnaissance des graphes parfaits	22
CHAPITRE 2. QUELQUES CLASSES CONNUES DE GRAPHER PARFAITS ...	23
2.1. Introduction	24
2.2. Les graphes bipartis	25
2.3. Les graphes multipartis-complets.....	26
2.4. Les graphes triangulés	27
2.5. Les graphes de Berge sans K_4 -e	29
2.6. Les graphes de Berge sans K_4	31
2.7. Les graphes de Berge sans patte	34

CHAPITRE 3. STRUCTURE DES GRAPHES QUASI-LOCALEMENT SANS PATTE	36
3.1. Introduction	37
3.2. Reconnaissance partielle des graphes de Berge QLP.....	39
3.3. Détermination de la taille maximale d'une clique dans un graphe de Berge QLP	41
3.4. Validité de la conjecture des graphes parfaits pour une sous-classe des graphes QLP	41
3.5. Coloration optimale des graphes de Berge QLP_0	47
3.6. Nouvelle propriété des graphes imparfaits critiques	48
CONCLUSION	50
ANNEXE	52
BIBLIOGRAPHIE	58

INTRODUCTION

Un des aspects les plus intéressants du travail du mathématicien appliqué est de modéliser un problème concret afin de mieux le comprendre et, éventuellement, le résoudre. Dans ce contexte, les graphes sont un moyen de modélisation imagée de divers problèmes, de nature combinatoire, à l'aide de sommets et d'arêtes reliant ces sommets.

Grâce à ses multiples applications dans des domaines très divers, la Théorie des Graphes ne cesse de se développer et de susciter l'intérêt tant du mathématicien pur, de l'ingénieur, de l'économiste, de l'organisateur, que du biologiste, du sociologue et bien d'autres.

En effet, cette branche combinatoire des mathématiques est devenue un instrument très efficace pour le traitement de nombreux problèmes relevant de domaines pratiques tels que la recherche opérationnelle (réseaux de transport, ordonnancement, affectations, ...), l'informatique (réseaux d'interconnexion, ...), la théorie de la décision, ou encore de domaines purement théoriques tels que la théorie des ensembles, l'algèbre, la topologie...

Au début des années soixante, suite aux travaux de C. Shannon en théorie de l'information sur les codages optimaux, Claude Berge a introduit le concept de graphe parfait. Un graphe est parfait si son nombre chromatique est égal à la taille maximale d'une clique et s'il en est ainsi pour tous ses sous-graphes induits.

Les graphes parfaits constituent une classe importante très étudiée en Théorie des graphes. Leur intérêt pratique réside principalement dans le fait que les problèmes d'optimisation combinatoire suivants, NP-complets dans le cas général, deviennent polynomiaux sur cette classe de graphes : le problème de la coloration optimale, le problème de la clique maximum, le problème du stable maximum et le problème de la partition minimale en cliques.

A ce sujet, M. Grötschel, L. Lovasz et A. Shrijver ont développé des algorithmes polynomiaux, basés sur la méthode des ellipsoïdes due à L.G. Khachiyan, pour la résolution de ces problèmes, ainsi que leurs versions pondérées, pour tout graphe parfait. Ces algorithmes, bien que polynomiaux, ont une complexité élevée et ne tiennent pas assez

compte de la structure combinatoire des graphes parfaits, ce qui a conduit à la recherche d'algorithmes combinatoires efficaces d'un point de vue pratique.

L'un des problèmes les plus importants, dans le contexte des graphes parfaits, est celui de leur caractérisation. En effet, en 1960, C. Berge a conjecturé qu'un graphe est parfait si et seulement si ni lui ni son complémentaire ne contiennent de cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à 5. Cette célèbre conjecture, bien qu'ayant motivé de nombreux travaux de recherche, reste jusqu'à aujourd'hui non résolue.

En vue de résoudre la conjecture des graphes parfaits, la notion de graphe imparfait critique, c'est à dire graphe imparfait dont tout sous-graphe propre induit est parfait, a été introduite. En effet, la conjecture des graphes parfaits confirme que les seuls graphes imparfaits critiques sont les cycles impairs sans corde, de longueur supérieure ou égale à 5, et leurs complémentaires. De ce fait, la structure des graphes imparfaits critiques est très étudiée et de nombreuses propriétés de ces graphes ont été découvertes jusqu'ici.

Un autre problème important auquel on s'intéresse dans le domaine des graphes parfaits est celui de leur reconnaissance. En effet, il n'existe toujours pas d'algorithme polynomial pour la reconnaissance de ces graphes. En attendant, des algorithmes polynomiaux pour reconnaître certaines classes de graphes parfaits ont été développés.

Afin d'avancer dans la connaissance des graphes parfaits, il est intéressant d'étudier des sous-classes de cette classe de graphes. De ce fait, un grand nombre de publications est consacré à l'étude, aussi bien théorique qu'algorithmique, de classes particulières de graphes parfaits (ou vérifiant la conjecture des graphes parfaits).

Notre contribution, dans le cadre de cette thèse, consiste essentiellement à introduire une nouvelle classe de graphes vérifiant la conjecture des graphes parfaits et contenant strictement d'importantes classes de graphes parfaits. Nous proposons également un algorithme combinatoire polynomial pour la coloration optimale des graphes parfaits de cette classe. Nous établissons aussi une nouvelle propriété des graphes imparfaits critiques.

Notre travail est développé comme suit :

Le chapitre 1 est une introduction aux graphes parfaits. On y trouve également les notions et les définitions employées dans cette thèse.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de certaines classes connues de graphes parfaits ayant un lien avec le travail présenté dans cette thèse, à savoir les graphes bipartis, les graphes multipartis-complets, les graphes triangulés, les graphes de Berge sans K_4 , les graphes de Berge sans K_4 -e et les graphes de Berge sans patte.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à une nouvelle classe de graphes, appelés graphes quasi-localement sans patte. Nous donnons quelques résultats relatifs à la structure de ces graphes. En particulier, nous présentons une preuve constructive de la validité de la conjecture des graphes parfaits pour une sous-classe de cette classe de graphes, les graphes QLP_0 . De cette preuve, basée sur un théorème de coloration, nous déduisons un algorithme combinatoire polynomial pour la coloration optimale des graphes parfaits QLP_0 . Notons que cette sous-classe de graphes contient strictement les graphes triangulés, les graphes sans K_4 et les graphes sans patte. Nous terminons ce chapitre par proposer, comme conséquence, une nouvelle propriété des graphes imparfaits critiques.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES GRAPHERS PARFAITS

1.1 Définitions et notations de base

Ce paragraphe est consacré à la définition des concepts de base utilisés dans ce travail.

1.1.1 Notion de graphe

Un *graphe* $G = (V, E)$ consiste en un ensemble fini non vide V de n éléments, appelés *sommets* de G , et un ensemble fini E de m paires d'éléments de V , appelées *arêtes* de G . La cardinalité de V est appelée *ordre* de G . Les sommets u et v constituant une arête $e = \{u, v\}$ (également notée uv) de G sont dits *reliés* par l'arête e ; ils sont également appelés *extrémités* de l'arête e . On dit aussi que les sommets u et v sont *adjacents* et que l'arête e est *incidente* à chacun d'eux. L'ensemble des sommets adjacents à un sommet v de G est appelé *voisinage* ou *ensemble des voisins* de v ; il est noté $N(v)$. L'ensemble $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ est dit *voisinage fermé* de v .

Un graphe G est dit *simple* si deux sommets quelconques de G sont reliés par au plus une arête et que toute arête de G a ses extrémités distinctes. Dans tout ce qui suit, les graphes considérés sont des graphes simples.

Dans le plan, les sommets d'un graphe G sont représentés par des points et chaque arête $\{u, v\}$ de G est représentée par un segment de droite reliant les points correspondant aux sommets u et v .

Un graphe $G = (V, E)$, avec $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, peut être représenté par sa *matrice d'adjacence* $A = [a_{ij}]$, d'ordre $n \times n$, définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est adjacent à } v_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il peut également être représenté par sa *matrice d'incidence* $B = [b_{ij}]$, d'ordre $n \times m$, définie par :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_j \text{ est incidente à } v_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans un graphe $G = (V, E)$, on appelle *sous-graphe induit* par $X \subseteq V$, le graphe $G[X] = (X, E_X)$ où $E_X = \{uv \in E \mid u, v \in X\}$. Le graphe obtenu à partir de G en supprimant un sommet v (respectivement une arête e) est noté $G-v$ (respectivement $G-e$). Etant donné un graphe F , G est dit *sans F* ou *F -libre* s'il ne contient pas F comme sous-graphe induit.

Un graphe G est dit *complet* si deux sommets quelconques de G sont adjacents. Un graphe complet d'ordre n est noté K_n . On appelle *graphe complémentaire* de G , le graphe $\bar{G} = (V, \bar{E})$ tel que deux sommets sont adjacents dans \bar{G} si et seulement s'ils ne le sont pas dans G .

Le *graphe adjoint (représentatif des arêtes)* d'un graphe G , noté $L(G)$, est le graphe dont les sommets représentent les arêtes de G , deux sommets étant adjacents si et seulement si les deux arêtes qu'ils représentent ont une extrémité commune dans G .

Dans un graphe G , une *clique* est un ensemble K de sommets adjacents deux à deux. Un *triangle* est une clique de taille 3. Un *stable* de G , appelé aussi *ensemble indépendant*, est un ensemble S de sommets deux à deux non adjacents. Une *p -clique* (respectivement un *p -stable*) est une clique (respectivement un stable) de taille p .

1.1.2 Chaînes et Connexité

Dans un graphe G , une *chaîne* de longueur k est une séquence (v_0, v_1, \dots, v_k) de sommets distincts, telle que pour $i = 0, 1, \dots, k-1$, v_i et v_{i+1} sont adjacents. Un *cycle* dans un graphe est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Une chaîne est dite *impaire* (respectivement *paire*) si sa longueur est impaire (respectivement paire). De même, un cycle est dit *impair* (respectivement *pair*) si sa longueur est impaire (respectivement paire).

Une *corde* dans un cycle (respectivement une chaîne) est une arête reliant deux sommets non consécutifs du cycle (respectivement de la chaîne). Deux cordes xy, zt ($\{x, y\} \cap \{z, t\} = \emptyset$) d'un cycle C sont dites *croisées* si, dans le parcours des sommets de C , leurs extrémités sont rencontrées alternativement.

Une chaîne sans corde est dite *minimale*. Une chaîne minimale à k sommets est notée P_k . Un cycle sans corde, de longueur supérieure ou égale à 5, est appelé *trou*. Le complémentaire d'un trou est appelé *anti-trou*.

Les *composantes connexes* d'un graphe $G = (V, E)$ sont les sous-graphes induits par les classes de la relation d'équivalence R , définie sur V par : « $u R v$ si et seulement si $u = v$ ou bien il existe dans G une chaîne reliant u et v ». Le graphe G est dit *connexe* s'il possède une seule composante connexe.

Dans un graphe connexe $G = (V, E)$, un ensemble $A \subseteq V$ est dit *ensemble d'articulation* si $G[V \setminus A]$ est non connexe. Si A est un ensemble d'articulation de G et G_1, G_2, \dots, G_p sont les composantes connexes de $G[V \setminus A]$, alors les sous-graphes $G_i \cup G[A]$ sont appelés *pièces* de G relatives à A .

1.1.3 Coloration des sommets d'un graphe

Une *k-coloration* des sommets d'un graphe G est une affectation de k couleurs aux sommets de G de telle sorte que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Il est clair que dans toute k -coloration de G , l'ensemble des sommets correspondant à une couleur donnée est un stable. Une k -coloration de G est donc une partition des sommets de G en k stables S_1, S_2, \dots, S_k .

Le *nombre chromatique* d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, est défini comme étant le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G . C'est donc la taille minimale d'une partition des sommets de G en stables.

Une $\gamma(G)$ -coloration d'un graphe G est dite *coloration optimale* de G . Le graphe G est dit *k-colorable* s'il admet une k -coloration ; il est dit *k-chromatique* si $k = \gamma(G)$.

Etant donnée une k -coloration d'un graphe G , soit G_{ij} le sous-graphe de G induit par les sommets de couleurs i et j . Un *échange bichromatique* en v , est l'opération qui consiste à échanger les couleurs i et j dans la composante connexe, contenant le sommet v , de G_{ij} .

1.1.4 Complexité algorithmique

On appelle *algorithme* de résolution d'un problème donné (P), une procédure composée d'une suite finie d'opérations élémentaires qui, pour toute instance du problème (P), transforme les données initiales de (P) en résultats de (P).

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à déterminer un meilleur élément parmi un nombre fini, mais souvent élevé, d'éléments. En optimisation combinatoire, il est nécessaire de mesurer l'efficacité pratique de tout algorithme mis en œuvre.

Une manière de mesurer l'efficacité d'un algorithme est d'établir une relation entre son temps d'exécution, exprimé en termes du nombre d'opérations élémentaires (les opérations arithmétiques, les comparaisons, les affectations, etc.), et la taille de l'exemple traité, exprimée en termes du nombre de caractères nécessaires pour coder les données de l'exemple.

En 1965, J. Edmonds a introduit la notion d'algorithme *efficace* ou *polynomial*. Un algorithme est dit polynomial si le nombre d'opérations élémentaires $f(n)$, nécessaire pour résoudre un exemple de taille n , est borné par un polynôme en n , i.e. si $f(n) \leq c.n^k$ (c et k étant des constantes). Un tel algorithme est dit de complexité $O(n^k)$.

La notion de complexité algorithmique a conduit à la classification des problèmes en sous-classes [22].

Un problème est dit *appartenir à la classe P* (problèmes déterministes polynomiaux), s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Les problèmes de la classe P sont dits "faciles".

Un problème de décision est un problème dont la réponse attendue est de type oui-non. Un problème de décision est dit *appartenir à la classe NP* (problèmes non déterministes polynomiaux), s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe, c'est à dire un algorithme qui, en plus des instructions usuelles, comporte des instructions de choix.

Une instruction de choix permet de choisir un élément parmi un ensemble fini d'éléments. Autrement dit, pour un problème de la classe NP, si à chaque occurrence de l'instruction de choix, le « bon » choix est effectué, le temps d'exécution de l'algorithme est polynomial. Par contre, si tous les choix possibles sont énumérés, l'algorithme non déterministe devient un algorithme déterministe nécessitant un temps d'exécution exponentiel.

Les problèmes de la classe NP sont donc les problèmes qui peuvent être résolus grâce à une exploration arborescente telle que la profondeur de l'arborescence soit bornée par un polynôme en l'encombrement des données.

Etant donné que les algorithmes ordinaires sont un cas particulier des algorithmes non déterministes, il est clair que $P \subseteq NP$. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. La conjecture $P \neq NP$ demeure cependant ouverte.

On dit qu'un problème (P_1) se réduit à un problème (P_2), s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de la classe NP est dit *NP-complet*, si tout problème dans NP peut lui être réduit en temps polynomial. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP. Les problèmes NP-complets sont généralement dits "difficiles".

Les quatre problèmes classiques d'optimisation combinatoire dans un graphe (stable maximum, clique maximum, coloration optimale, partition minimale en cliques) sont des exemples de problèmes NP-complets.

1.2 Conjecture Forte des Graphes Parfaits

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principaux résultats concernant la Conjecture Forte des Graphes Parfaits (CFGP), énoncée par C. Berge au début des années soixante.

Pour un graphe $G = (V, E)$, nous désignons par :

- $\alpha(G)$, le nombre de stabilité de G , c'est à dire la taille maximale d'un stable de G ;
- $\gamma(G)$, le nombre chromatique de G ;
- $\omega(G)$, la taille maximale d'une clique de G ;
- $\theta(G)$, la taille minimale d'une partition de V en cliques.

Dans un graphe $G = (V, E)$, étant donné que deux sommets quelconques d'une clique (respectivement d'un stable) doivent se trouver dans des parties différentes de toute partition en stables (respectivement en cliques) de V , alors

$$\omega(G) \leq \gamma(G) \quad \text{et} \quad \alpha(G) \leq \theta(G).$$

Au début des années soixante, C. Berge [9] a introduit les notions de graphe α -parfait et de graphe γ -parfait.

Définition 1.2.1 :

Un graphe G est dit *α -parfait* (respectivement *γ -parfait*) si pour tout sous-graphe induit H de G , $\alpha(H) = \theta(H)$ (respectivement $\omega(H) = \gamma(H)$).

Ce sont les travaux de C. Shannon [49], sur les codages optimaux et la capacité d'un canal de communication, qui ont incité Berge à s'intéresser aux graphes parfaits. En 1960, C. Berge [9] a énoncé les deux conjectures suivantes :

Conjecture forte des graphes parfaits :

Un graphe est α -parfait si et seulement s'il ne contient ni trou impair, ni anti-trou impair.

Conjecture faible des graphes parfaits :

Un graphe est α -parfait si et seulement si il est γ -parfait.

Les noms de ces deux conjectures sont dus au fait que la validité de la conjecture forte impliquerait celle de la conjecture faible.

En 1971, L. Lovasz [35,36] a démontré la conjecture faible des graphes parfaits qui est devenue depuis le *Théorème des graphes parfaits* suivant :

Théorème des graphes parfaits : [35]

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) *G est α -parfait ;*
- (ii) *G est γ -parfait ;*
- (iii) *pour tout sous-graphe induit H de G , $\alpha(H) \cdot \alpha(H) \geq |V(H)|$.*

Etant identiques, les notions de graphe α -parfait et de graphe γ -parfait ont été remplacées par la notion de *graphe parfait*, et la conjecture forte est appelée maintenant *conjecture des graphes parfaits* ou *conjecture de Berge*.

Corollaire 1.2.1 :

Un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait.

Il est clair qu'aucun trou impair n'est parfait. De même, d'après le corollaire 1.2.1, aucun anti-trou impair n'est parfait. La condition nécessaire de la conjecture des graphes parfaits devient de ce fait évidente.

Définition 1.2.2 :

Un graphe G est dit *de Berge* s'il ne contient ni trou impair, ni anti-trou impair.

La conjecture des graphes parfaits se résume donc comme suit : « *tout graphe de Berge est parfait* ».

Quarante ans après, la conjecture des graphes parfaits n'a toujours pas été résolue. Néanmoins, l'étude de cette conjecture a motivé de nombreux travaux de recherche en Théorie des Graphes, et en particulier dans le domaine des graphes parfaits où de nombreux résultats ont été obtenus.

Les recherches consacrées à la résolution de la conjecture des graphes parfaits suivent principalement deux directions :

- La première direction consiste à étudier la structure des *graphes imparfaits critiques*, dits aussi *imparfaits minimaux*, qui sont les graphes imparfaits dont tout sous-graphe propre induit est parfait.

La conjecture des graphes parfaits est en effet équivalente à la conjecture suivante :

« *Tout graphe imparfait critique est soit un trou impair, soit un anti-trou impair* ».

Afin de bien cerner la structure des graphes imparfaits critiques, de nombreuses propriétés de ces graphes ont été trouvées. Certaines de ces propriétés sont données dans le paragraphe 1.3.

- La seconde direction consiste à déterminer des classes particulières, de plus en plus grandes, de graphes vérifiant la conjecture.

Ces classes dont le nombre ne cesse de croître sont de deux types : celles excluant implicitement les trous impairs et les anti-trous impairs, et celles les excluant explicitement.

Dans ce qui suit, nous donnons les définitions de quelques classes connues de graphes parfaits appartenant à l'une ou à l'autre des deux catégories. D'autres classes de graphes parfaits, ayant un lien avec celle étudiée dans cette thèse, à savoir les graphes bipartis, les graphes multipartis-complets, les graphes triangulés, les graphes de Berge sans K_4 , les graphes de Berge sans K_4 -e et les graphes de Berge sans patte, font l'objet du chapitre 2.

Les graphes d'intervalles

Etant donné sur une droite une famille $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)$ d'intervalles, on appelle *graphe d'intervalles*, le graphe G dont les sommets v_1, v_2, \dots, v_n représentent respectivement les intervalles I_1, I_2, \dots, I_n , deux sommets étant adjacents si et seulement si les intervalles correspondants s'intersectent .

En montrant que tout graphe d'intervalles est triangulé (voir la définition d'un graphe triangulé dans le paragraphe 2.4 du chapitre 2), G. Hajös [28] a montré la perfection de cette classe de graphes.

Les graphes de comparabilité

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *de comparabilité* si V admet un ordre partiel $<$ tel que :

$$uv \in E \Leftrightarrow u < v \text{ ou } v < u.$$

Les graphes de comparabilité sont parfaits [8].

Les graphes adjoints de bipartis

Dans [34], D. König a montré que les graphes adjoints de bipartis sont parfaits.

Les graphes faiblement triangulés

Introduite par B. Hayward [29] en 1985, cette classe de graphes généralise celle des graphes triangulés. Un graphe G est dit *faiblement triangulé* s'il ne contient ni trou ni anti-trou.

En montrant que tout graphe faiblement triangulé ou son complémentaire possède un ensemble d'articulation étoilé (voir définition 1.3.2 du paragraphe 1.3), B. Hayward a prouvé la perfection de ces graphes.

Les graphes de parité

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *de parité* si pour toute paire de sommets u, v de G , toutes les chaînes minimales reliant u et v sont de même parité.

M. Burlet et J.P. Uhry [11] ont montré qu'un graphe G est de parité si et seulement si tout cycle impair, de longueur supérieure ou égale à 5, possède au moins deux cordes croisées. En 1970, H. Sachs [48] a montré que tout graphe de parité est parfait.

Les graphes de Meyniel

Cette classe de graphes, généralisant les graphes de parité, a été introduite par H. Meyniel en 1976. Un graphe G est dit *de Meyniel* si tout cycle impair de longueur supérieure ou égale à 5 possède au moins deux cordes.

En utilisant la technique de l'échange bichromatique, Meyniel [37] a montré la perfection de cette classe de graphes.

Les graphes scindés

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *scindé* s'il existe une partition de l'ensemble de ses sommets V en une clique K et un stable S .

En 1977, S. Foldes et P.L. Hammer [19] ont montré que tout graphe scindé et son complémentaire sont triangulés et donc parfaits.

Les graphes de Berge planaires

Un graphe G est dit *planaire* s'il est possible de le représenter dans un plan de sorte que les sommets soient des points distincts, les arêtes des courbes simples, et que deux arêtes ne se croisent pas.

En 1973, A. Tucker [52] a montré que tout graphe planaire sans trou impair est parfait.

Les graphes de Berge sans griffe

On appelle *griffe* (figure 1.1), le graphe biparti-complet $K_{1,3}$ (voir paragraphe 2.2).

La perfection des graphes de Berge sans griffe a été montrée par K.R. Parthasarathy et G. Ravindra [42] en 1976.

Les graphes de Berge sans taureau

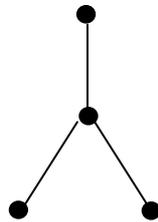
On appelle *taureau* (*bull*), le graphe engendré par les sommets $\{a, b, c, d, e\}$ et les arêtes $\{ab, ac, bc, bd, ce\}$ (figure 1.1).

En utilisant des propriétés des graphes imparfaits critiques, V. Chvatal et N. Sbihi [13] ont montré la validité de la conjecture des graphes parfaits pour les graphes sans taureau.

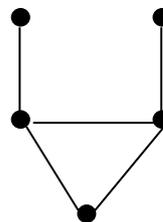
Les graphes de Berge dégénérés

Un graphe G est dit k -dégénéré si tout sous-graphe induit de G contient un sommet de degré au plus k . Le graphe G est dit *dégénéré* si tout sous-graphe induit H de G contient un sommet de degré au plus $\omega(H) + 1$.

En utilisant la technique de l'échange trichromatique (paragraphe 3.4 du chapitre 3), H. Aït Haddadène et F. Maffray [2] ont montré la validité de la conjecture des graphes parfaits pour les graphes dégénérés.



Une griffe.



Un taureau.

Figure 1.1.

1.3 Quelques propriétés des graphes imparfaits critiques

Depuis 1972, la liste des propriétés des graphes imparfaits critiques ne cesse de s'allonger. Dans ce qui suit, nous donnons quelques unes des plus connues.

Il est clair que tout graphe imparfait critique a les propriétés suivantes :

- G est connexe ;
- $\alpha(G) \geq 2$, $\omega(G) \geq 2$;
- $\omega(G) = 2$ (resp. $\alpha(G) = 2$) si et seulement si G est un trou impair (resp. un anti-trou impair) ;
- \bar{G} est imparfait critique.

Le premier résultat sur les graphes imparfaits critiques est une conséquence de la caractérisation de Lovasz des graphes parfaits (théorème des graphes parfaits).

Définition 1.3.1 :

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *partitionnable* s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i) $|V| = \alpha(G) \cdot \omega(G) + 1$;
- (ii) pour tout $v \in V$, $G - v$ admet une partition en $\alpha(G)$ $\omega(G)$ -cliques et une partition en $\omega(G)$ $\alpha(G)$ -stables.

Théorème 1.3.1 : (L. Lovasz [36])

Tout graphe imparfait critique est partitionnable.

M. Padberg a montré que tout graphe imparfait critique a les propriétés énoncées dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.2 : (M. Padberg [41])

Si G est un graphe imparfait critique à n sommets, alors :

- (i) G possède exactement $n / \omega(G)$ $\omega(G)$ -cliques et $n / \alpha(G)$ $\alpha(G)$ -stables ;
- (ii) Tout sommet de G appartient à exactement $\omega(G)$ $\omega(G)$ -cliques et $\alpha(G)$ $\alpha(G)$ -stables ;

(iii) Pour toute $\alpha(G)$ -clique K de G , il existe un unique $\alpha(G)$ -stable S de G tel que $K \cap S = \emptyset$, et réciproquement.

D'autres propriétés intéressantes des graphes imparfaits critiques sont données ci-après.

Définition 1.3.2 :

Etant donné un graphe $G = (V, E)$,

- Un ensemble d'articulation A de G est dit *ensemble d'articulation étoilé* (star-cutset), s'il existe dans A un sommet adjacent à tous les autres sommets de A .
- Deux sommets de G sont dits *paire d'amis* (even-pair) si toute chaîne minimale les reliant est paire.
- Deux sommets u et v de G sont dits *jumeaux* (respectivement *anti-jumeaux*), si tout sommet de $V \setminus \{u, v\}$ est adjacent soit à u et à v , soit à aucun d'eux (respectivement à l'un des deux et non aux deux).

Théorème 1.3.3 : (A. Tucker [54])

Un graphe imparfait critique ne contient pas de stable d'articulation.

Théorème 1.3.4 : (V. Chvatal [12])

Un graphe imparfait critique ne contient pas d'ensemble d'articulation étoilé.

Théorème 1.3.5 : (H. Meyniel [38])

Un graphe imparfait critique ne contient pas de paire d'amis.

Théorème 1.3.6 : (L. Lovasz [35])

Un graphe imparfait critique ne contient pas de jumeaux.

Théorème 1.3.7 : (S. Olariu [39])

Un graphe imparfait critique ne contient pas d'anti-jumeaux.

1.4 Aspect algorithmique des graphes parfaits

Un des aspects intéressants des graphes parfaits est leur étude algorithmique. Dans ce contexte, les problèmes associés à cette classe de graphes sont essentiellement de deux types :

- Les problèmes d'optimisation combinatoire, à savoir les problèmes du stable maximum, de la clique maximum, de la coloration minimum et de la partition minimum par des cliques.
- Le problème de reconnaissance des graphes parfaits.

1.4.1 Problèmes d'optimisation combinatoire associés aux graphes parfaits

Bien que les problèmes d'optimisation combinatoire cités ci-dessus sont NP-complets, dans le cas général, ils peuvent être résolus en temps polynomial dans le cas des graphes parfaits.

En effet, M. Grötschel, L. Lovasz et A. Shrijver [26] ont développé des algorithmes polynomiaux, basés sur la méthode des ellipsoïdes due à L.G. Khachiyan [33], pour la résolution de chacun de ces problèmes, ainsi que leurs versions pondérées, pour tout graphe parfait. Cependant, ayant une complexité élevée, ces algorithmes ne sont pas très efficaces du point de vue pratique. De plus, ils ne permettent pas de comprendre la structure combinatoire des graphes parfaits, ce qui a conduit à la recherche d'algorithmes combinatoires efficaces d'un point de vue pratique.

De tels algorithmes existent pour plusieurs classes de graphes parfaits ; ils sont basés sur des propriétés combinatoires spécifiques de ces graphes. Parmi ces classes, on trouve : les graphes bipartis, les graphes triangulés [23], les graphes d'intervalles [24], les graphes faiblement triangulés [30], les graphes de Berge sans patte [40]...

D'autres classes de graphes parfaits ont leur aspect algorithmique partiellement étudié. C'est le cas des graphes de Meyniel [47], des graphes de parité [47], des graphes de Berge planaires [51], des graphes de Berge dégénérés [2], des graphes de Berge sans $K_{1,3}$ [31]...

1.4.2 Problème de reconnaissance des graphes parfaits

Une des questions les plus importantes qui n'ont toujours pas de réponse, dans le contexte des graphes parfaits, est : « *existe-t-il un algorithme polynomial pour la reconnaissance des graphes parfaits ?* ».

Toutefois, des algorithmes polynomiaux pour reconnaître certaines classes particulières de graphes parfaits ont été développés. Ces algorithmes sont généralement basés sur des opérations de décomposition préservant la perfection et sur la connaissance de sous-classes facilement reconnaissables.

Parmi les classes de graphes parfaits qu'on sait reconnaître en temps polynomial, nous citons : les graphes bipartis, les graphes triangulés [46], les graphes de Meyniel [47], les graphes de parité [15], les graphes faiblement triangulés [50], les graphes parfaits planaires [32], les graphes de Berge sans K_4 -e [20], les graphes de Berge sans $K_{1,3}$ [14], les graphes de Berge sans patte [40], les graphes de Berge sans taureau [44]...

Pour d'autres classes de graphes parfaits, il n'existe toujours pas d'algorithme polynomial de reconnaissance. C'est le cas des graphes de Berge sans K_4 et des graphes de Berge dégénérés.

CHAPITRE 2

QUELQUES CLASSES CONNUES DE GRAPHERS PARFAITS

2.1 Introduction

L'étude de classes particulières de graphes parfaits joue un rôle important dans la connaissance, théorique et algorithmique, des graphes parfaits. En effet, du point de vue théorique, montrer que des graphes particuliers vérifient la conjecture des graphes parfaits est un moyen intéressant d'aborder cette conjecture. Du point de vue algorithmique, le problème de reconnaissance ainsi que les problèmes classiques d'optimisation combinatoire, NP-complets dans le cas général, peuvent être résolus par des algorithmes efficaces pour certaines classes particulières de graphes parfaits.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à quelques classes connues de graphes parfaits, excluant implicitement ou explicitement les trous impairs et les anti-trous impairs, ayant un lien avec la classe de graphes étudiée dans le troisième chapitre.

2.2 Les graphes bipartis

Les graphes bipartis constituent l'une des classes les plus anciennes et les plus connues en Théorie des Graphes.

Définition 2.2.1 :

Un graphe G est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets admet une partition en deux stables.

Les graphes bipartis sont exactement les graphes sans cycles impairs. Un graphe biparti $G = (S_1 \cup S_2, E)$ est dit *complet*, si tout sommet de S_1 est adjacent à tous les sommets de S_2 . Si $|S_1| = p$ et $|S_2| = q$, alors G est noté $K_{p,q}$.

Il est clair que tout graphe biparti G est parfait, puisque pour tout sous-graphe induit H de G , $\omega(H) = \gamma(H) = 2$ si H possède au moins une arête et $\omega(H) = \gamma(H) = 1$ sinon.

La reconnaissance des graphes bipartis est possible en $O(n+m)$, en appliquant l'algorithme suivant, qui consiste à trouver une 2-coloration d'un graphe donné si elle existe.

Nous supposons que le graphe G est connexe (sinon il suffit d'appliquer l'algorithme sur chacune des composantes connexes de G , celles-ci pouvant être déterminées en $O(m)$ [25]).

Algorithme 2.2.1.

Donnée : Un graphe connexe $G = (V, E)$ à n sommets.

Résultat : L'une des possibilités suivantes :

- a- G n'est pas biparti.
- b- Une 2-coloration de G .

- (1) (Initialisation)
 - (1.1) Pour un certain sommet $v \in V$ faire $c(v) := 1$; { attribuer à v le numéro 1 }
 - (1.2) $S := V$;
- (2) Tant que $S \neq \emptyset$ faire
 - (2.1) Choisir un sommet coloré (numéroté) $v \in S$;
 - (2.2) Pour tout sommet $w \in N(v) \cap S$ faire
 - (2.2.1) Si w n'est pas coloré alors $c(w) := \{1, 2\} \setminus c(v)$;
 - (2.2.2) Sinon si $c(w) = c(v)$ alors retourner « G n'est pas biparti » ;
 - (2.3) $S := S \setminus \{v\}$;

2.3 Les graphes multipartis-complets

Cette classe de graphes, généralisant les graphes bipartis-complets, est définie comme suit :

Définition 2.3.1 :

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *multiparti-complet* si V admet une partition en p stables S_1, S_2, \dots, S_p , telle que pour $i = 1, 2, \dots, p$, tout sommet de S_i est adjacent à tout sommet de S_j , pour tout $j \neq i$.

Les graphes multipartis-complets sont exactement les graphes sans F , où F est le sous-graphe engendré par les sommets $\{a, b, c\}$ et l'arête ab .

Il est facile de voir que tout graphe multiparti-complet est parfait. En effet, si G est un graphe multiparti-complet, alors $\omega(G) = \gamma(G) = p$. De plus, tout sous-graphe induit de G est multiparti-complet.

La reconnaissance et la coloration optimale des graphes multipartis-complets sont possibles en $O(n+m)$, en appliquant un algorithme simple qui consiste à partitionner le graphe considéré en stables, tout en vérifiant que les sommets appartenant à un même stable ont le même voisinage.

Algorithme 2.3.1.

Donnée : Un graphe $G = (V, E)$ à n sommets.

Résultat : L'une des possibilités suivantes :

- a- G n'est pas multipartite-complet.
- b- Une partition minimale de G en stables $S_1, S_2, \dots, S_\omega$ (une ω -coloration de G).

(1) (Initialisation) $S := V ; i := 1 ;$

(2) Tant que $S \neq \emptyset$ faire

(2.1) Choisir un sommet $v \in S ;$

(2.2) $S_i := \{v\} ;$

(2.3) Pour tout sommet w de S non adjacent à v faire

Si v et w ont le même voisinage dans S alors $S_i := S_i \cup \{w\} ;$

Sinon retourner « G n'est pas multipartite-complet » ;

(2.4) $S := S \setminus S_i ;$

(2.5) $i := i + 1 ;$

2.4 Les graphes triangulés

Cette classe célèbre et importante de graphes a été introduite par A. Hajnal et J. Suranyi [27] en 1958. Ces derniers ont montré, avant même que le concept de graphe parfait soit inventé, que dans un graphe triangulé, la taille maximale d'un stable est égale à la taille minimale d'une partition en cliques.

Définition 2.4.1 :

Un graphe G est dit *triangulé* s'il ne contient pas de cycle sans corde de longueur supérieure à 3.

La perfection des graphes triangulés est une conséquence du résultat suivant :

Théorème 2.4.1 : (A. Hajnal et J. Suranyi [27])

Si G est un graphe triangulé, alors tout ensemble d'articulation minimal est une clique.

Corollaire 2.4.1 : [8, 27]

Tout graphe triangulé est parfait.

De nombreuses propriétés des graphes triangulés ont été proposées jusqu'ici et leur structure est maintenant bien connue. Avant de citer quelques caractérisations intéressantes de ces graphes, nous rappelons d'abord les définitions suivantes :

Définition 2.4.2 :

Etant donné un graphe $G = (V, E)$,

- Un sommet *simplicial* de G est un sommet dont le voisinage est une clique.
- Un *ordre d'élimination simplicial* de G est un ordre $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ de ses sommets, tel que tout v_i est un sommet simplicial dans le sous-graphe $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$.
- Un *ensemble d'articulation relatif* (à u et v) est un sous-ensemble de sommets dont la suppression déconnecte deux sommets (u et v) fixés du graphe.

Théorème 2.4.2 : [18]

Chacune des assertions suivantes est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe $G = (V, E)$ soit triangulé :

- (i) *Tout ensemble d'articulation relatif minimal de G est une clique;* (G.A. Dirac [16])
- (ii) *Tout sous-graphe induit de G contient un sommet simplicial;* (G.A. Dirac [16])
- (iii) *Tout sous-graphe induit de G est soit une clique, soit il contient deux sommets simpliciaux non-adjacents;* (G.A. Dirac [16])
- (iv) *G admet un ordre d'élimination simplicial de ses sommets;* (Fulkerson and Gross [21])
- (v) *Tout sous-graphe induit connexe à $k \geq 2$ sommets contient au plus $k-1$ cliques maximales.* (P. Duchet [17])

En utilisant l'ordre d'élimination simplicial, D.J. Rose, R.E. Tarjan et G.S. Lueker [46] ont présenté un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes triangulés. De même, pour les problèmes d'optimisation associés à ces graphes, il existe des algorithmes polynomiaux proposés par A. Gavril [23].

2.5 Les graphes de Berge sans K_4 -e

Une première preuve de la validité de la conjecture des graphes parfaits pour les graphes sans K_4 -e, appelés aussi *graphes sans diamant* (figure 2.1), a été établie par K.R. Parthasarathy et G. Ravindra [43] en 1979. Leur démonstration s'étant avérée inexacte, A. Tucker [56] a donné une autre démonstration en se basant sur le résultat suivant :

Théorème 2.5.1 : (A. Tucker [56])

Soit $G = (V, E)$ un graphe sans trou impair et sans K_4 -e, avec $|V| = n$ et $\omega(G) = \omega$. Si toute clique maximale de G est de taille ≥ 3 , alors G contient un sommet appartenant à au plus deux cliques maximales. De plus, $|E| < 2\omega n$.

Théorème 2.5.2 : (A. Tucker [56])

Tout graphe sans trou impair et sans K_4 -e est parfait.

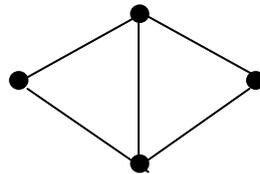


Figure 2.1. Un diamant.

En se basant sur leur caractérisation des graphes de Berge sans K_4 -e, J. Fonlupt et A. Zemirline [20] ont élaboré un algorithme polynomial pour la reconnaissance de ces graphes. Pour cela, ils ont introduit la définition suivante :

Définition 2.5.1 :

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, soient $e = \{x, y\} \in E$ et $z \in V \setminus \{x, y\}$. On dit que e est une *z-arête* si $\{x, y, z\}$ est un triangle dans G . On désigne par G_z , le sous-graphe induit par l'ensemble de sommets $V \setminus \{z\}$ et l'ensemble d'arêtes $E(G-z) \setminus \{z\text{-arêtes}\}$.

Théorème 2.5.3 : (J. Fonlupt et A. Zemirline [20])

Soit $G = (V, E)$ un graphe de Berge sans K_4 -e. Alors, l'une au moins des propriétés suivantes est vérifiée :

- (i) G est soit biparti, soit le graphe adjoint d'un graphe biparti ;
- (ii) G contient une clique d'articulation ;
- (iii) G contient un stable d'articulation de taille 2 ;
- (iv) G contient un sommet z tel que G_z n'est pas connexe.

Ainsi, l'algorithme de reconnaissance de Fonlupt et Zemirline consiste à décomposer, en utilisant des opérations préservant la perfection, tout graphe sans K_4 -e qui n'est ni biparti, ni un graphe adjoint de biparti, en graphes plus petits.

La preuve constructive de la validité de la conjecture des graphes parfaits pour la classe des graphes sans K_4 -e, a permis à Tucker [56] d'établir un algorithme en $O(n^3)$ pour la coloration optimale de tout graphe parfait de cette classe. Voici la description de son algorithme :

Algorithme 2.5.1.

- (0) Soit $G = (V, E)$ un graphe de Berge sans K_4 -e, avec $|V| = n$, défini par sa matrice d'adjacence ;
- (1) Déterminer la matrice d'incidence sommet- clique maximale de G ;
- (2) Supprimer toutes les 2-cliques maximales de G ;
- (3) Déterminer un ordre d'élimination $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ des sommets de G tel que, pour $i = 1, 2, \dots, n$, v_i appartient à au plus deux cliques maximales dans le sous-graphe G_i induit par $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$;
- (4) De manière itérative, trouver une $\omega(G)$ -coloration de G_i à partir d'une $\omega(G)$ -coloration de G_{i+1} , en effectuant un échange bichromatique ;
- (5) Ajouter les 2-cliques maximales à G ;
- (6) Trouver une $\omega(G)$ -coloration du graphe initial G , à partir de la $\omega(G)$ -coloration de G_1 , en effectuant une série d'échanges bichromatiques.

2.6 Les graphes de Berge sans K_4

Cette classe de graphes a été introduite et étudiée par A. Tucker [53] en 1977. Celui-ci, en utilisant les graphes imparfaits critiques, a donné une preuve non-constructive de la validité de la conjecture des graphes parfaits pour les graphes sans K_4 [53, 55]. Il a par la suite présenté une autre preuve, constructive celle-ci, qui lui a permis d'établir un algorithme en $O(n^3)$ pour la coloration optimale de tout graphe de Berge sans K_4 . Pour cela, il a introduit les définitions suivantes :

Définition 2.6.1 :

Etant donné un graphe $G = (V, E)$,

- Une K_3 -chaîne joignant deux sommets distincts u et v dans G , est une séquence de triangles T_1, T_2, \dots, T_p , telle que $u \in T_1, v \in T_p$ et pour $i = 1, 2, \dots, p-1, T_i$ et T_{i+1} ont une arête en commun.
- Une K_3 -composante de G est un sous-graphe induit maximal dans lequel toute paire de sommets est reliée par une K_3 -chaîne.
- Une K_3 -contraction est l'opération qui consiste à contracter une paire de triangles T_1 et T_2 formant un K_4 -e, en un seul triangle, en contractant en un seul sommet les deux sommets non-adjacents du K_4 -e (les arêtes reliant les sommets de T_1 ou T_2 aux autres sommets du graphe sont préservées).
- Une K_3 -contraction itérative d'une K_3 -composante est le processus itératif qui consiste à effectuer des K_3 -contractions dans cette composante jusqu'à l'obtention d'un unique triangle.

Dans sa deuxième preuve, Tucker [57] s'est essentiellement basé sur les résultats suivants:

Théorème 2.6.1 : [57]

Soient G un graphe de Berge et G' le graphe obtenu à partir de G en supprimant toutes les 2-cliques maximales. Alors G' est de Berge. De plus, à partir de toute k -coloration de G' , on peut obtenir en temps linéaire une k -coloration de G .

Théorème 2.6.2 : [57]

Soient G un graphe connexe et u un sommet de G tel que $N[u]$ est un ensemble d'articulation. Si les pièces de G relatives à $N[u]$, G_1, G_2, \dots, G_p , admettent une $\omega(G)$ -coloration et si tout sous-graphe induit H de G , avec $\omega(H) = \omega(G) - 1$, admet une $\omega(H)$ -coloration, alors G admet une $\omega(G)$ -coloration.

Théorème 2.6.3 : [57]

Soit G un graphe de Berge avec $\omega(G) = 3$. Si H est une K_3 -composante de G , alors H est 3-colorable.

Théorème 2.6.4 : [57]

Soit G un graphe de Berge avec $\omega(G) = 3$, et soit G^{\setminus} le graphe obtenu à partir de G en effectuant une K_3 -contraction itérative. Alors, $\omega(G^{\setminus}) = 3$.

L'algorithme de Tucker pour la 3-coloration d'un graphe de Berge G , avec $\omega(G) = 3$, est basé sur une procédure de réduction qui consiste à contracter un tel graphe en un graphe de Berge sans K_4-e , G^{\setminus} , dont on connaît un algorithme polynomial de coloration (algorithme 2.5.1). Ainsi, étant donné que $\omega(G^{\setminus}) = 3$ (théorème 2.6.4), il est possible d'obtenir une 3-coloration de G , à partir d'une 3-coloration de G^{\setminus} , en inversant le processus de contraction.

La procédure de réduction suivante est composée de deux étapes. Une étape (A) qui consiste à effectuer une K_3 -contraction itérative et une étape (B) qui consiste à éliminer les trous impairs qui peuvent être créés, dans l'étape (A), par le processus de contraction.

Considérons un graphe de Berge connexe G , avec $\omega(G) = 3$, et supposons que G ne contient pas de 2-cliques maximales (théorème 2.6.1).

Procédure 2.6.1. (Procédure de réduction)

Répéter les deux étapes suivantes jusqu'à ce que le graphe de Berge initial G soit réduit en une collection de graphes de Berge sans K_4-e :

- (A) Effectuer une K_3 -contraction itérative sur une certaine K_3 -composante H de G ;
- (B) Soit G' le graphe réduit de G après l'étape (A), et soit $T_H = \{x', y', z'\}$ le triangle obtenu de la K_3 -contraction itérative de H . Si pour un sommet de T_H , disons x' , $G' - N[x']$ n'est pas connexe, alors remplacer G' par ses pièces relatives à $N[x']$, G'_1, G'_2, \dots, G'_p . Si dans l'une de ces pièces, un certain $G'_i - N[y']$ (resp. $G'_i - N[z']$) n'est pas connexe, alors remplacer G'_i par ses pièces relatives à $N[y']$ (resp. $N[z']$) ;

Algorithme 2.6.1.

Données : Un graphe de Berge G , avec $\omega(G) = 3$, ne contenant pas de 2-cliques maximales.

Résultat : Une 3-coloration de G .

- (1) Appliquer la procédure de réduction sur chaque composante connexe de G ;
- (2) Trouver une 3-coloration de la collection de graphes parfaits sans K_4 -e, obtenus par la procédure de réduction, en appliquant l'algorithme 2.5.1 ;
- (3) Répéter les deux étapes suivantes, en inversant les étapes (A) et (B) dans la procédure de réduction, jusqu'à l'obtention d'une 3-coloration du graphe initial G :
 - (3.1) Trouver une 3-coloration du graphe G' à partir de la 3-coloration de ses pièces ;
 - (3.2) Inverser la K_3 -contraction itérative dans la K_3 -composante H , en affectant la même couleur aux sommets contractés en un même sommet de T_H ;

Tucker [57] a résumé ses résultats, concernant la 3-coloration des graphes de Berge sans K_4 , dans le théorème suivant :

Théorème 2.6.5 : (Théorème de réduction)

- (i) Soit G un graphe de Berge avec $\omega(G) = 3$. A chaque itération de la procédure de réduction, G est contracté et décomposé en une collection de graphes de Berge G_i avec $\omega(G_i) = 3$. Lorsque la procédure est terminée, ces graphes sont sans K_4 -e.
- (ii) G admet une 3-coloration si et seulement si G_i admet une 3-coloration.

Corollaire 2.6.1 : (A. Tucker [57])

Tout graphe de Berge sans K_4 est parfait.

Remarque 2.6.1 :

La reconnaissance des graphes de Berge sans K_4 demeure un problème ouvert.

2.7 Les graphes de Berge sans patte

La notion de graphe sans patte (figure 2.2) a été introduite par S. Olariu [40] en 1988. La validité de la conjecture des graphes parfaits pour les graphes sans patte est une conséquence de la caractérisation suivante de ces graphes :

Théorème 2.7.1 : (S. Olariu [40])

Un graphe G est sans patte si et seulement si toute composante connexe de G est soit sans triangle, soit multipartite-complet.

Corollaire 2.7.1 : [40]

Tout graphe sans patte et sans trou impair est parfait.

Corollaire 2.7.2 : [40]

Un graphe de Berge G est sans patte si et seulement si toute composante connexe de G est soit biparti, soit multipartite-complet.

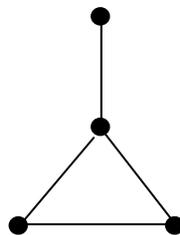


Figure 2.2. Une patte.

D'après le corollaire 2.7.2, la reconnaissance, la détermination de la taille maximum d'une clique ainsi que la coloration optimale des graphes de Berge sans patte sont possibles en temps linéaire. En effet, il suffit d'appliquer l'algorithme 2.2.1 et/ou l'algorithme 2.3.1 sur chacune des composantes connexes du graphe.

Signalons tout de même que, dans [40], Olariu a mentionné que le problème de reconnaissance des graphes de Berge sans patte, ainsi que les 4 problèmes classiques d'optimisation combinatoire associés à ces graphes, peuvent être résolus en temps linéaire.

CHAPITRE 3

STRUCTURE DES GRAPHERS QUASI-LOCALEMENT SANS PATTE

3.1 Introduction

Hormis la conjecture des graphes parfaits, l'un des plus importants problèmes auxquels on s'intéresse, dans le contexte des graphes parfaits, est celui de la coloration optimale de ces derniers. Notre contribution à ce sujet, consiste à montrer la validité de la conjecture des graphes parfaits pour une nouvelle classe de graphes, en utilisant une approche séquentielle à partir de laquelle est déduit un algorithme polynomial pour la coloration optimale des graphes parfaits de cette classe.

Dans ce chapitre, nous introduisons une classe de graphes, appelés *graphes quasi-localement sans patte* (QLP), et présentons quelques résultats concernant la structure de ces graphes. En particulier, nous étudions une sous-classe de cette classe de graphes, que nous proposons d'appeler *graphes QLP₀*. A ce sujet, nous montrons d'abord que la conjecture des graphes parfaits est vraie pour les graphes QLP₀, et proposons ensuite un algorithme séquentiel polynomial pour la coloration optimale des graphes parfaits de cette sous-classe. Notons que les graphes QLP₀ contiennent strictement les graphes triangulés, les graphes sans K_4 et les graphes sans patte. Nous donnons enfin, comme conséquence, une nouvelle propriété des graphes imparfaits critiques.

Nous définissons la classe de graphes constituant l'objet principal de ce travail comme suit :

Définition 3.1.1 :

Etant donné un graphe G ,

- Un sommet v de G est dit *sommet QLP* si $G[N(v)]$ est sans patte.
- G est dit *quasi-localement sans patte* (QLP), si tout sous-graphe induit de G contient un sommet QLP.

Remarque 3.1.1 :

D'après la caractérisation des graphes sans patte (théorème 2.7.1), un sommet v de G est QLP si et seulement si toute composante connexe de $G[N(v)]$ est soit sans triangle, soit multiparti-complet.

Le graphe de la figure 3.1 est un exemple de graphe de Berge non QLP. Ce graphe est minimal (au sens de l'inclusion des sommets).

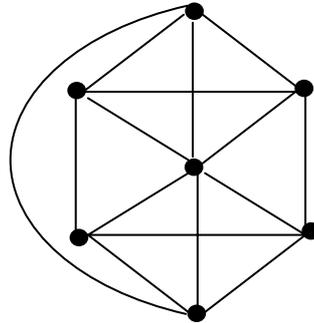


Figure 3.1.

La classe des graphes QLP contient strictement d'importantes classes de graphes parfaits, d'où son intérêt.

En effet, tout graphe triangulé est QLP puisqu'il contient un sommet simplicial et qu'un tel sommet est QLP. L'inverse n'est pas vrai (par exemple, un cycle sans corde de longueur 4).

Dans le graphe adjoint d'un graphe biparti, il est facile de vérifier que le voisinage de tout sommet est soit une clique, soit deux cliques non adjacentes. Un tel graphe est donc QLP. L'inverse n'est pas vrai (par exemple, $K_{1,3}$).

De même, il est facile de vérifier que les graphes sans K_4 et les graphes sans K_4 -e sont strictement contenus dans la classe des graphes QLP.

Nous proposons d'appeler graphe *quasi-localement biparti* (QLB), tout graphe G vérifiant la propriété suivante : Tout sous-graphe induit H de G contient un sommet v tel que $H[N(v)]$ est biparti .

En se servant de cette sous-classe des graphes QLP, nous obtenons la caractérisation suivante des graphes de Berge sans K_4 .

Proposition 3.1.1 :

Un graphe de Berge G est sans K_4 si et seulement s'il est quasi-localement biparti.

Preuve :

D'une part, il est clair que tout graphe QLB est sans K_4 .

D'autre part, si G est un graphe de Berge qui contient un sommet dont le voisinage n'est pas biparti, alors G contient un cycle impair.

Comme G est de Berge, ce cycle n'est pas un trou impair ; il contient donc un triangle.

D'où, G contient un K_4 . □

3.2 Reconnaissance partielle des graphes de Berge QLP

Dans cette partie, nous donnons une caractérisation des graphes QLP. De cette caractérisation, nous déduisons un algorithme polynomial, de type séquentiel, pour la reconnaissance partielle des graphes de Berge QLP, i.e. la reconnaissance des graphes QLP dans la classe des graphes de Berge.

Définition 3.2.1 :

Dans un graphe $G = (V, E)$, un ordre $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ des sommets de G est dit *ordre d'élimination QLP* si, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, v_i est un sommet QLP dans le sous-graphe $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$, noté G_i .

Les graphes QLP peuvent ainsi être caractérisés comme suit :

Théorème 3.2.1 :

Un graphe G est QLP si et seulement s'il admet un ordre d'élimination QLP de ses sommets.

Preuve :

La condition nécessaire est immédiate par définition.

Pour la condition suffisante, nous démontrons par l'absurde.

Soit G un graphe et soit $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ un ordre d'élimination QLP de ses sommets.

Supposons que G n'est pas QLP.

Dans ce cas, il existe un sous-graphe induit H de G tel que, pour tout sommet v de H , $H[N(v)]$ contient une patte.

Soit v_i le premier sommet de H dans l'ordre d'élimination $[v_1, v_2, \dots, v_n]$.

Il est clair que $H \subseteq G_i$, avec $G_i = G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$.

D'où $H[N(v_i)] \subseteq G_i[N(v_i)]$.

Ainsi, puisque $H[N(v_i)]$ contient une patte, $G_i[N(v_i)]$ contient aussi une patte, ce qui constitue une contradiction. \square

Etant donné un graphe de Berge $G = (V, E)$, il est possible de vérifier en temps polynomial si G admet un ordre d'élimination QLP de ses sommets.

En effet, il suffit pour cela de déterminer pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, un sommet v_i de G_i tel que $G_i[N(v_i)]$ soit sans patte, ce qui est possible en temps polynomial étant donné que les graphes de Berge sans patte peuvent être reconnus en temps linéaire (voir paragraphe 2.7).

Nous déduisons ainsi l'algorithme suivant :

Algorithme 3.2.1.

Donnée : Un graphe de Berge $G = (V, E)$ à n sommets.

Résultat : L'une des possibilités suivantes :

- G n'est pas QLP.
- Un ordre d'élimination QLP, $[v_1, v_2, \dots, v_n]$, des sommets de G .

Début

$G_1 := G$;

Pour $i := 1$ à n faire

 Début

 Déterminer un sommet v_i de G_i tel que $G_i[N(v_i)]$ soit sans patte ;

 Si v_i n'existe pas alors retourner « G n'est pas QLP » ;

 Sinon $G_{i+1} := G_i - v_i$;

 Fin

Fin.

Complexité :

Etant donné que la reconnaissance d'un graphe de Berge sans patte s'effectue en $O(n+m)$, il est facile de vérifier que cet algorithme a une complexité $O[n^2(n+m)]$.

Remarque 3.2.1 :

La reconnaissance des graphes de Berge QLP reste un problème ouvert.

3.3 Détermination de la taille maximale d'une clique dans un graphe de Berge QLP

En utilisant l'ordre d'élimination QLP, il est possible de déterminer, en temps polynomial, la taille maximale d'une clique dans un graphe de Berge QLP.

En effet, étant donné un ordre d'élimination QLP de G , $[v_1, v_2, \dots, v_n]$, la valeur de $\omega(G)$ peut s'obtenir, de manière itérative, en appliquant la formule suivante :

$$\omega(G_i) = \max \{ \omega(G_i[N(v_i)]) + 1, \omega(G_{i+1}) \}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Ainsi, puisque $G_i[N(v_i)]$ est un graphe de Berge sans patte, la valeur de $\omega(G_i[N(v_i)])$ peut s'obtenir en $O(n+m)$ (paragraphe 2.7), et de ce fait la valeur de $\omega(G)$ peut être déterminée de manière itérative en $O[n(n+m)]$.

3.4 Validité de la conjecture des graphes parfaits pour une sous-classe des graphes QLP

Ce paragraphe traite d'une classe de graphes, appelés *graphes QLP₀*, qui constituent une sous-classe de la classe des graphes QLP. Nous donnons d'abord un résultat concernant l'extension de la coloration dans un graphe de Berge QLP₀. Ensuite, nous établissons, comme conséquence, la validité de la conjecture des graphes parfaits pour cette classe de graphes.

Soit G un graphe de Berge QLP et soit v un sommet QLP de G . Considérons le problème suivant :

« Trouver, en temps polynomial, une $\omega(G)$ -coloration de G à partir de toute $\omega(G)$ -coloration de $G-v$ ».

Résoudre ce problème permet d'une part d'établir la validité de la conjecture des graphes parfaits pour la classe des graphes QLP, et d'autre part d'élaborer un algorithme polynomial pour la coloration optimale des graphes parfaits de cette classe.

Nous avons trouvé une solution partielle à ce problème, c'est à dire pour une sous-classe des graphes QLP, les graphes QLP_0 définis comme suit :

Définition 3.4.1 :

Etant donné un graphe G ,

- Un sommet v de G est dit *sommet QLP_0* si $G[N(v)]$ est sans patte et admet au plus une composante multipart-complet.
- G est un *graphe QLP_0* si tout sous-graphe induit de G contient un sommet QLP_0 .

Remarque 3.4.1 :

Afin d'éviter toute confusion avec les graphes bipartis-complets, les graphes multipartis-complets considérés dans ce chapitre admettent une partition minimale en $p \geq 3$ stables non vides.

L'étude des graphes QLP_0 présente un intérêt, dans le sens où ils contiennent les graphes triangulés, les graphes sans K_4 et les graphes sans patte, comme il est précisé ci-après.

Proposition 3.4.1 :

Tout graphe triangulé est QLP_0 .

Preuve :

Evident, puisque tout graphe triangulé contient un sommet simplicial et qu'un tel sommet est QLP_0 . □

Proposition 3.4.2 :

Tout graphe sans K_4 est QLP_0 .

Preuve :

Evident, puisque tout graphe sans K_4 est QLP, et que tout graphe QLP qui n'est pas QLP_0 contient un K_4 comme sous-graphe induit. \square

Proposition 3.4.3 :

Tout graphe sans patte est QLP_0 .

Preuve :

Dans un graphe sans patte, il est clair que le voisinage de tout sommet induit un sous-graphe soit biparti, soit multiparti-complet, et de ce fait tout sommet d'un tel graphe est QLP_0 . \square

Remarque 3.4.2 :

Les trois classes de graphes citées ci-dessus sont strictement contenues dans la classe des graphes QLP_0 . En effet, le graphe de la figure 3.2 est un exemple de graphe QLP_0 qui n'est pas triangulé, qui contient un K_4 et qui contient une patte.

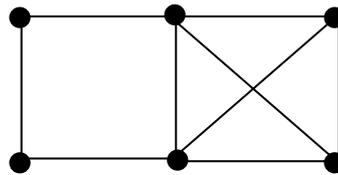


Figure 3.2.

Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 3.4.1 :

Soit $G = (V, E)$ un graphe de Berge contenant un sommet QLP_0 , v . Alors, à partir de toute $\omega(G)$ -coloration de $G-v$, il est possible d'obtenir en temps polynomial une $\omega(G)$ -coloration de G .

La preuve de ce théorème fait appel à une technique de coloration, introduite par H. Aït Haddadène et F. Maffray [2, 3], définie comme suit :

Soit G un graphe de Berge, avec $\omega(G) \geq 4$, et soit v un sommet de G . Supposons que nous avons une $\omega(G)$ -coloration de $G-v$, telle que chacune des $\omega(G)$ couleurs est affectée à au moins un sommet de $N(v)$.

Supposons aussi que la propriété suivante est vérifiée :

Il existe 3 couleurs distinctes $i, j, k \in \{1, 2, \dots, \omega(G)\}$, telles que le sous-graphe $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$ est sans K_4 (S_i, S_j et S_k étant respectivement les stables de couleurs i, j, k).

Alors, il est possible d'obtenir en temps polynomial une 3-coloration du sous-graphe $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$, avec les couleurs i, j et k , en appliquant l'algorithme de 3-coloration de Tucker (algorithme 2.6.1). Nous obtiendrons ainsi une $\omega(G)$ -coloration de G .

Cette opération est appelée *échange trichromatique*. Le sommet v est dit *sommet de Tucker* s'il vérifie la propriété précédente pour toute $\omega(G)$ -coloration de $G-v$.

Preuve du théorème 3.4.1 :

Soit G un graphe de Berge avec $\omega(G) = \omega$.

Le résultat est trivial si $\omega \leq 3$.

Considérons alors que $\omega > 3$, et supposons que G contient un sommet QLP_0, v .

Supposons aussi que nous avons une ω -coloration de $G-v$ telle que chacune des ω couleurs est attribuée à au moins un sommet de $N(v)$ (autrement il suffit d'attribuer à v l'une des couleurs manquantes).

D'après la caractérisation des graphes de Berge sans patte (corollaire 2.7.2), un sommet QLP dans un graphe de Berge, est un sommet tel que toute composante connexe de son voisinage est un graphe soit biparti, soit multipart-complet.

De ce fait, nous distinguons trois cas :

1^{er} cas : $G[N(v)]$ est biparti.

Dans ce cas, puisque $G[N(v)] \cup \{v\}$ est sans K_4 , v est un sommet de Tucker.

Par conséquent, il est possible d'effectuer un échange trichromatique, en appliquant l'algorithme de 3-coloration de Tucker, et obtenir ainsi une ω -coloration de G en $O(n^3)$.

2^{ème} cas : $G[N(v)]$ est multiparti-complet.

Dans ce cas, puisque nous avons une ω -coloration de $G[N(v)]$, celui-ci contient au moins deux sommets, appartenant à un même stable, n'ayant pas la même couleur (autrement G contiendrait une clique de taille $\omega+1$).

Notons aussi que deux sommets appartenant à deux stables distincts de $G[N(v)]$ ne peuvent avoir la même couleur.

Soient α et β deux couleurs (distinctes) de deux sommets appartenant à un même stable de $G[N(v)]$.

Il est clair que le sous-graphe $G[S_\alpha \cup S_\beta \cup \{v\}]$ est biparti (le contraire impliquerait l'existence d'un trou impair).

Il suffit donc de trouver une 2-coloration de la composante connexe de $G[S_\alpha \cup S_\beta \cup \{v\}]$, contenant le sommet v , pour obtenir une ω -coloration de G en temps linéaire.

3^{ème} cas : $G[N(v)]$ admet une seule composante multiparti-complet et d'autres biparties.

Nous montrons, dans ce dernier cas, que v est un sommet de Tucker.

Supposons le contraire, c'est à dire que pour tout triplet de couleurs $i, j, k \in \{1, \dots, \omega\}$, le sous-graphe $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$ contient un K_4 .

Donc pour tout triplet $i, j, k \in \{1, \dots, \omega\}$, il existe un triangle, dont les sommets sont colorés i, j, k , dans la composante multiparti-complet (les autres composantes étant biparties).

Ce qui implique l'existence d'une clique de taille ω dans cette composante (car elle est multiparti-complet), et donc l'existence d'une clique de taille $\omega+1$ dans G , ce qui constitue une contradiction.

Ainsi, v est bien un sommet de Tucker, et de ce fait l'extension de la ω -coloration de $G-v$ à G est possible en $O(n^3)$. □

Comme conséquence directe du théorème 3.4.1, nous obtenons la validité de la conjecture des graphes parfaits pour les graphes QLP_0 .

Corollaire 3.4.1 :

Tout graphe de Berge QLP_0 est parfait.

Remarque 3.4.3 :

Etant donné un graphe de Berge QLP, G , le problème posé au début de ce paragraphe se résume comme suit :

« Trouver, en temps polynomial, une $\omega(G)$ -coloration de G à partir de toute $\omega(G)$ -coloration de $G-v$, dans le cas où $G[N(v)]$ est sans patte et admet au moins deux composantes multipartis-complets ».

En effet, dans ce cas, il n'est pas toujours possible d'effectuer un échange bichromatique ou un échange trichromatique. Par exemple, dans le graphe G avec $\omega(G) = 4$, de la figure 3.3, le sommet v n'est pas de Tucker (les numéros 1, 2, 3, 4 représentent les couleurs attribuées aux sommets de $G-v$).

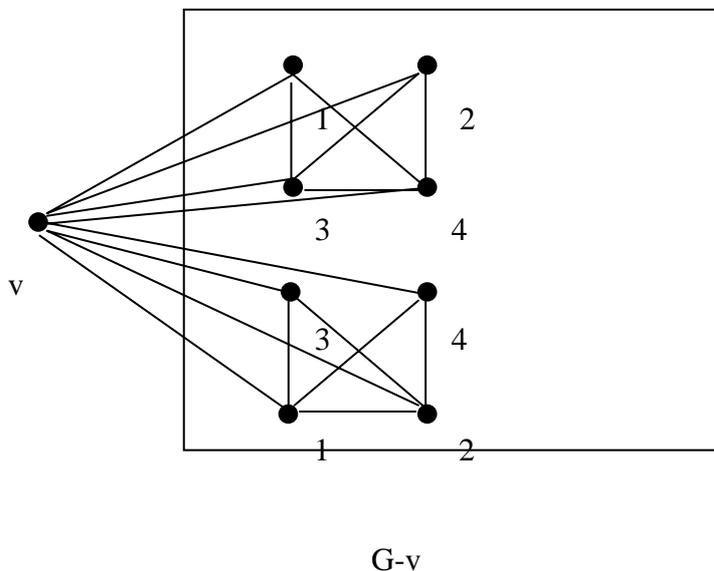


Figure 3.3.

Comme autre conséquence du résultat principal, nous avons :

Corollaire 3.4.2 :

Tout graphe de Berge sans K_5-P_3 et sans $K_5-K_{1,3}$ est parfait.

Preuve :

D'une part, tout graphe qui contient un sommet non QLP, contient un K_5-P_3 (figure 3.4).

Donc tout graphe sans K_5-P_3 est QLP.

D'autre part, tout graphe qui contient un sommet dont le voisinage admet au moins deux composantes multipartis-complets, contient un $K_5-K_{1,3}$ (figure 3.4).

De ce fait, tout graphe sans K_5-P_3 et sans $K_5-K_{1,3}$ est QLP_0 . □

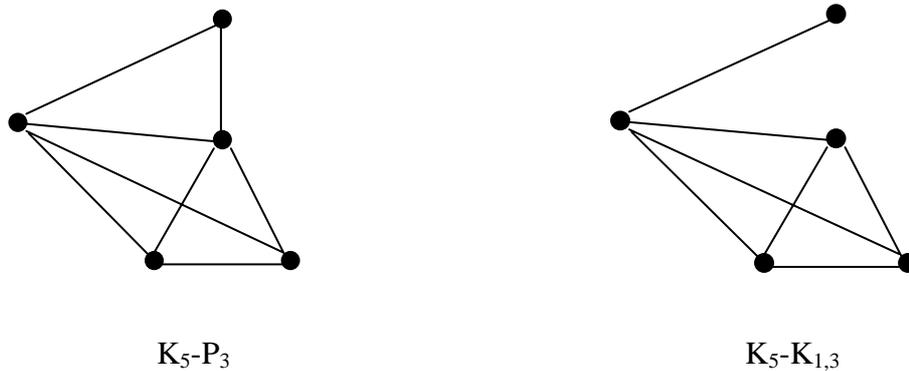


Figure 3.4.

3.5 Coloration optimale des graphes de Berge QLP_0

La preuve constructive de la validité de la conjecture des graphes parfaits pour les graphes QLP_0 , conduit à un algorithme combinatoire polynomial pour la coloration optimale de tout graphe de Berge QLP_0 .

En effet, en déterminant tout d'abord un ordre d'élimination QLP_0 des sommets de G , il est possible d'obtenir, de manière itérative et en utilisant la procédure du théorème 3.4.1, une $\omega(G)$ -coloration de G en temps polynomial.

L'algorithme, de type séquentiel, que nous proposons est décrit comme suit :

Algorithme 3.5.1.

Donnée : Un graphe de Berge QLP_0 , $G = (V, E)$, avec $|V| = n$ et $\omega(G) \geq 4$.

Résultat : Une coloration optimale de G .

Etape 1 : Déterminer un ordre d'élimination QLP , $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ des sommets de G , tel que pour $i = 1, 2, \dots, n$, $G_i[N(v_i)]$ admet au plus une composante multipartite-complet (G_i étant le sous-graphe induit par $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$) ;

Etape 2 : Pour i décroissant de $n-1$ jusqu'à 1, déterminer la valeur de $\omega(G_i)$ à partir de la formule suivante :

$$\omega(G_i) := \max \{ \omega(G_i[N(v_i)]) + 1, \omega(G_{i+1}) \} ;$$

Etape 3 : Pour i décroissant de $n-1$ jusqu'à 1, trouver une coloration optimale de G_i à partir d'une coloration optimale de G_{i+1} , en partant d'une coloration triviale de G_n et en appliquant la procédure du théorème 3.4.1 ;

Complexité : $O(n^4)$

En effet, dans l'étape 1, la détermination d'un ordre d'élimination QLP_0 s'effectue en $O[n^2(n+m)]$ (algorithme 3.2.1). Dans l'étape 2, le calcul de $\omega(G)$ peut se faire en $O(n)$, puisque la valeur de $\omega(G_i[N(v_i)])$ peut être facilement déduite de l'étape 1. Enfin, dans l'étape 3, l'extension de la coloration optimale de G_{i+1} à G_i nécessite au plus $O(n^3)$ opérations (voir la preuve du théorème 3.4.1), et de ce fait la $\omega(G)$ -coloration de G s'effectue en $O(n^4)$.

3.6 Nouvelle propriété des graphes imparfaits critiques

Comme autre conséquence du résultat principal, nous donnons ci-après une nouvelle propriété des graphes imparfaits critiques.

Corollaire 3.6.1 :

Soit G un graphe imparfait critique avec $\omega(G) \geq 4$. Alors G ne contient pas de sommet QLP_0 .

Preuve :

Soit G un graphe imparfait critique avec $\omega(G) = \omega \geq 4$.

Supposons que G contient un sommet QLP_0 v , et considérons une ω -coloration de $G-v$ (cette ω -coloration existe puisque $G-v$ est parfait).

Du fait que v est un sommet QLP_0 , il existe 3 couleurs $i, j, k \in \{1, 2, \dots, \omega\}$ telles que $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$ est sans K_4 (voir 3^{ème} cas de la preuve du théorème 3.4.1).

Ainsi, puisque G est un imparfait critique avec $\omega \geq 4$, le sous-graphe $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$ est parfait.

Etant parfait sans K_4 , $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$ admet une 3-coloration utilisant les couleurs i, j et k , et de ce fait G admet une ω -coloration.

D'où G est parfait, ce qui constitue une contradiction. \square

Du corollaire 3.6.1, nous obtenons la propriété suivante des graphes QLP .

Corollaire 3.6.2 :

Si G est un graphe QLP , alors G ne contient pas d'anti-trou impair H avec $\omega(H) \geq 4$.

Preuve :

Il suffit de montrer qu'un anti-trou impair H , avec $\omega(H) \geq 4$, ne contient pas de sommet QLP .

Il est facile de vérifier que pour tout sommet v de H , $H[N(v)]$ est connexe avec $\omega(H[N(v)]) \geq 3$.

De ce fait, si H contient un sommet QLP , v , alors $H[N(v)]$ est multiparti-complet, et donc v est un sommet QLP_0 , ce qui constitue une contradiction d'après le corollaire 3.6.1. \square

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons introduit une nouvelle classe de graphes, les graphes quasi-localement sans patte (QLP), pour lesquels nous nous sommes intéressés aux problèmes de perfection, de reconnaissance et de coloration. Cette classe de graphes, définis par un ordre d'élimination, contient strictement les classes de graphes parfaits suivantes : les graphes triangulés, les graphes adjoints de bipartis, les graphes de Berge sans K_4 , les graphes de Berge sans K_4 -e et les graphes de Berge sans patte.

En utilisant l'ordre d'élimination, nous avons proposé un algorithme combinatoire en $O[n^2(n+m)]$ pour la reconnaissance partielle des graphes de Berge QLP. La reconnaissance des graphes de Berge QLP demeure quant à elle un problème ouvert.

Le résultat principal présenté dans le cadre de cette thèse, concerne l'extension de la coloration dans un graphe appartenant à une sous-classe des graphes de Berge QLP, les graphes de Berge QLP_0 . Comme conséquences de ce résultat, nous avons premièrement déduit que les graphes de Berge QLP_0 sont parfaits. Nous avons également obtenu un algorithme combinatoire en $O(n^4)$ pour la coloration optimale de ces graphes. Notons que cette classe de graphes contient strictement les graphes triangulés, les graphes de Berge sans K_4 et les graphes de Berge sans patte. Enfin, nous avons obtenu une nouvelle propriété des graphes imparfaits critiques.

Afin d'étendre les résultats obtenus sur les graphes QLP_0 , aux graphes QLP, le problème suivant est posé :

« Trouver, en temps polynomial, une coloration optimale d'un graphe de Berge G , contenant un sommet v tel que $G[N(v)]$ est sans patte et admet au moins deux composantes multipartis-complets, à partir de toute coloration optimale de $G-v$ ».

Résoudre ce problème permet d'une part d'affirmer que les graphes de Berge QLP sont parfaits, et d'autre part d'obtenir un algorithme combinatoire polynomial pour la coloration optimale de ces graphes.

BIBLIOGRAPHIE

-
- [1] H. AIT HADDADENE and S. GRAVIER, On weakly diamond-free Berge graphs, *Discrete Mathematics*, 159, 237-240, 1996.
 - [2] H. AIT HADDADENE and F. MAFFRAY, Coloring perfect degenerate graphs, *Discrete Mathematics*, 163, 211-215, 1997.
 - [3] H. AIT HADDADENE, S. GRAVIER and F. MAFFRAY, An algorithm for coloring some perfect graphs, *Discrete Mathematics*, 183, 1-16, 1998.
 - [4] H. AIT HADDADENE and M. MECHEBBEK, On quasi-locally paw-free graphs, *Tenth SIAM Conference on Discrete Math.*, Minnesota, 2000.
 - [5] H. AIT HADDADENE et M. MECHEBBEK, Sur la classe des graphes quasi-localement sans patte, *Troisième Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de l'Ingénieur*, Casablanca, 2000.
 - [6] H. AIT HADDADENE and M. MECHEBBEK, Quasi-locally paw-free graphs structures, *Prépublication 009\2000*, Faculté des Sciences Mathématiques, USTHB, 2000.
 - [7] H. AIT HADDADENE, Sur quelques structures de graphes parfaits, *Thèse de Doctorat d'Etat*, USTHB, 2000.
 - [8] C. BERGE, Les problèmes de coloration en théorie des graphes, *Publications de l'Institut de Statistiques, Université Paris 9*, 123-160, 1960.
 - [9] C. BERGE, Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade kreise starr sind, *Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg*, 1961.
 - [10] C. BERGE and V. CHVATAL, Topics on Perfect Graphs, *Annals of Discrete Mathematics*, 21, 1984.
 - [11] M. BURLET and J.P. UHRY, Parity graphs, in *Topics on Perfect Graphs*, 253-277, 1984.
 - [12] V. CHVATAL, Star-cutsets and Perfect Graphs, *J. Comb. Theory*, B39, 189-199, 1985.
 - [13] V. CHVATAL and N. SBIHI, Bull-free Berge graphs are perfect, *Graphs and comb.* 3, 127-139, 1987.
 - [14] V. CHVATAL and N. SBIHI, Recognizing claw-free perfect graphs, *J. Combin. Theory*, B44, 154-176, 1988.
 - [15] S. CICERONE and G. DI STEFANO, On the extension of bipartite to parity graphs, *Discrete Appl. Math.*, 95, 181-195, 1999.

-
- [16] G.A. DIRAC, On Rigid Circuit Graphs, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25, 71-76, 1961.
- [17] P. DUCHET, Représentations, noyaux en théorie des graphes et hypergraphes, Doct. Diss. Univ. Paris 6, 1979.
- [18] P. DUCHET, Classical perfect graphs, in Topics on Perfect Graphs, 67-96, 1984.
- [19] S. FOLDES and P. L. HAMMER, Split graphs, Proc. 8 th South-Eastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, 311-315, 1977.
- [20] J. FONLUPT and A. ZEMIRLINE, Polynomial Recognition Algorithm of Perfect (K_4-e) -free Graphs, Institut IMAG Rapport Technique RT-16, 1987.
- [21] D.R. FULKERSON and O.A. GROSS, Incidence matrices and interval graphs, Pacific Journal of Mathematics, 15, 835-855, 1965.
- [22] M.R. GAREY and D.S. JOHNSON, Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-completeness, Freeman, San Francisco, 1979.
- [23] F. GAVRIL, Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques and maximum independent set of a chordal graph, SIAM J. Comput. 1, 180-187, 1972.
- [24] M.C. GOLUBIC, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Academic Press, New York, 1980.
- [25] M. GONDRAN et M. MINOUX, Graphes et algorithmes, Editions EYROLLES, Paris 1990.
- [26] M. GRÖTSCHEL, L. LOVASZ and A. SCHRIJVER, Polynomial algorithms for perfect graphs, in Topics on Perfect Graphs, 325-356, 1984.
- [27] A. HAJNAL and J. SURANYI, Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös. Sect. Math. 1, 113-121, 1958.
- [28] G. HAJÖS, Über eine Art von Graphen, Int. Math. Nachr. 11, Problem 65, 1957.
- [29] R.B. HAYWARD, Weakly Triangulated Graphs, J. Comb. Theory, B39, 200-208, 1985.
- [30] R.B. HAYWARD, C.T. HOANG and F. MAFFRAY, Optimizing weakly triangulated graphs, Graphs and Combin. 6, 33-35, 1990.
- [31] W.L. HSU and G.L. NEMHAUSER, Algorithms for maximum weight cliques, minimum weighted clique covers and minimum colorings of claw-free perfect graphs, in Topics on Perfect Graphs, 357-369, 1984.

-
- [32] W.L. HSU, Recognizing planar perfect graphs, *J. ACM*, 34, 255-288, 1987.
- [33] L.G. KHACHIYAN, A polynomial algorithm in linear programming, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 244, 1093-1096, 1979.
- [34] D. KÖNIG, *Theory der endlichen und unendlichen graphen*, Chelsea, New York, 1950.
- [35] L. LOVASZ, Normal Hypergraphs and the Perfect Graph Conjecture, *Discrete Math.* 2, 253-267, 1972.
- [36] L. LOVASZ, A characterization of perfect graphs, *J. Comb. Theory*, B13, 95-98, 1972.
- [37] H. MEYNIEL, The graphs whose odd cycles have at least two chords, in *Topics on Perfect Graphs*, 115-119, 1984.
- [38] H. MEYNIEL, A new property of critical imperfect graphs and some consequences, *European Journal of Combinatorics*, 8, 313-316, 1987.
- [39] S. OLARIU, No antitwins in minimal imperfect graphs, *J. Comb. Theory*, B45, 255-257, 1988.
- [40] S. OLARIU, Paw-free graphs, *Information Processing Letters* 28, 53-54, 1988.
- [41] M. PADBERG, Perfect zero-one matrices, *Math. Programming* 6, 180-196, 1974.
- [42] K.R. PARATHASARATHY and G. RAVINDRA, The Strong Perfect Graph Conjecture is true for $K_{1,3}$ -free graphs, *J. Comb. Theory*, B21, 212-223, 1976.
- [43] K.R. PARATHASARATHY and G. RAVINDRA, The validity of the strong perfect graph conjecture for (K_4-e) -free graphs, *J. Comb. Theory*, B26, 98-100, 1979.
- [44] B.A. REED and N. SBIHI, Recognizing bull-free perfect graphs, *Graphs Combin.* 11, 171-178, 1995.
- [45] D.J. ROSE, Triangulated graphs and the elimination process, *J. Math. Anal. Appl.* 32, 597-609, 1970.
- [46] D.J. ROSE, R.E. TARJAN and G.S. LUEKER, Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs, *SIAM J. Comput.* 5, 266-283, 1976.
- [47] F. ROUSSEL, *Etudes structurelles, algorithmes de coloration et algorithmes de reconnaissance de quelques classes de graphes parfaits*, Thèse de Doctorat, Univ. Orléans, 1999.
- [48] H. SACHS, On the Berge conjecture concerning perfect graphs, *Combinatorial Structures and their Applications*, Gordon and Breach, New York, 377-384, 1970.

-
- [49] C. SHANNON, The zero error capacity of a noisy channel, IRE Trans. Information Theory, IT-2, 8-19, 1956.
- [50] J. SPINRAD and R. SRITHARAN, Algorithms for weakly triangulated graphs, Discrete Appl. Math., 59, 181-191, 1995.
- [51] I.A. STEWART, An algorithm for colouring perfect planar graphs, Information Processing Letters, 31, 97-101, 1989.
- [52] A. TUCKER, The Strong Perfect Graph Conjecture for Planar Graphs, Canad. J. Math. 25, 103-114, 1973.
- [53] A. TUCKER, Critical Perfect Graphs and Perfect 3-Chromatic Graphs, J. Combin. Theory, B23, 143-149, 1977.
- [54] A. TUCKER, Coloring Graphs with Stable Cutsets, J. Comb. Theory, B34, 258-267, 1983.
- [55] A. TUCKER, The validity of the Perfect Graph Conjecture for K_4 -free graphs, in Topics on Perfect Graphs, 149-157, 1984.
- [56] A. TUCKER, Coloring perfect (K_4-e) -free graphs, J. Comb. Theory, B42, 313-318, 1987.
- [57] A. TUCKER, A reduction procedure for coloring perfect K_4 -free graphs, J. Comb. Theory, B43, 151-172, 1987.

ANNEXE

Quasi-locally paw-free graphs structures

Hacène Aït Haddadène, Meriem Mechebbek

Dept. de Recherche Opérationnelle, Institut de Mathématiques, USTHB, BP 32, El Alia 16111,
Algiers, Algeria

Abstract

In this paper, we present a new class of graphs named *quasi-locally paw-free graphs*. We prove the strong perfect graph conjecture for a subclass of this class. The proof yields a polynomial combinatorial algorithm for optimally coloring any perfect graph of this subclass which strictly contains the triangulated graphs, the paw-free Berge graphs and the K_4 -free Berge graphs. As a consequence, we give a new property of minimal imperfect graphs.

1. Introduction

All graphs considered here are finite and simple. In a graph $G = (V, E)$, a k -coloring is a mapping $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ such that $c(u) \neq c(v)$ for every edge uv . Note that each color class is a stable set, hence a k -coloring can be thought of as a partition of the vertices of a graph into stable sets S_1, S_2, \dots, S_k . The *chromatic number* $\chi(G)$ is the smallest k such that G admits a k -coloring. A graph G is called *perfect* if $\chi(H) = \omega(H)$ for every induced subgraph H of G , where $\omega(H)$ is the size of a largest clique in H . A *hole* is a chordless cycle of length at least four and an *antihole* is the complementary graph of a hole. We say that G is a *Berge graph* if G contains no odd hole and no odd antihole. In the early 1960s, Claude Berge conjectured that a graph is perfect if and only if it is a Berge graph [4]. This conjecture known as *the Strong Perfect Graph Conjecture* (SPGC) has been proved for several classes of graphs but remains open today. A graph G is called *minimal imperfect* if G is not perfect but every proper induced subgraph of G is perfect. Using these graphs, the SPGC can be restated as ‘the only minimal imperfect graphs are odd holes and odd antiholes’. Thus one approach to the SPGC has been to look for properties of minimal imperfect graphs [5]. It is possible to ω -color any perfect graph using the algorithm of Grötschel and al. [5]. However, their algorithm uses the ellipsoïd method and has rather high complexity. Hence, we are still interested in simple combinatorial algorithms for coloring perfect graphs.

In this paper, we introduce a new class of graphs called quasi-locally paw-free (QLP) graphs, where a *paw* is the graph induced by the vertices a, b, c, d and the edges ab, ac, ad, cd . A vertex v in a graph G is called a *QLP vertex* if its neighborhood in G induces a paw-free subgraph. Now, we say that a graph G is QLP if every induced subgraph of G contains a QLP vertex.

We give a coloring theorem for a subclass of this class of graphs, proving in this way the validity of the SPGC for this subclass which strictly contains triangulated graphs, paw-free Berge graphs and K_4 -free Berge graphs. The proof of the theorem leads to a sequential combinatorial algorithm for ω -coloring in polynomial time any Berge graph of this subclass.

2. Preliminaries

In a graph $G = (V, E)$, the subgraph induced by $A \subseteq E$ is denoted $G[A]$. For $v \in V$, we denote the neighborhood of v by $N(v)$ and we put $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. A graph G is called *bipartite* if $\chi(G) \leq 2$. It is called *complete-multipartite* if its vertices set can be partitioned into at least three stable sets, such that two vertices are adjacent if and only if they belong to different stable sets.

Clearly, every QLP Berge graph admits a labeling $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ of its vertices such that each v_i is a QLP vertex in the subgraph G_i induced by the vertices $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$. We call this ordering a *QLP elimination ordering*. One can easily see that the existence of such an ordering is a sufficient condition for a Berge graph to be QLP. It is possible to find in polynomial time such an ordering by using the recognition algorithm of paw-free graphs [6]. Indeed, for $i = 1, \dots, n$ it is possible to determine in polynomial time a vertex v_i in G_i such that the subgraph $G_i[N(v_i)]$ is paw-free (complexity at most $O[n^2(n+m)]$).

The sequential algorithm presented in the next section is based on the following method proposed by H. Aït Haddadène and F. Maffray in [2]:

Let v be a vertex of a graph G with $\omega(G) \geq 4$ and assume that $G-v$ has been $\omega(G)$ -colored. Suppose that the following property happens: there exist a triple of distinct colors $i, j, k \in \{1, 2, \dots, \omega(G)\}$ such that $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$ is a K_4 -free Berge subgraph. We can then apply Tucker's algorithm [8] to 3-color the component of this subgraph containing v , and getting in this way an $\omega(G)$ -coloring of G in time $O(n^3)$. We call this operation a *trichromatic exchange*. We say that v is a *Tucker vertex* if the previous property holds for every $\omega(G)$ -coloring of $G-v$.

3. Main result

In a graph G , a vertex v is called *QLP₀ vertex* if v is a QLP vertex such that $G[N(v)]$ admits at most one complete-multipartite component. So, we say that G is a *QLP₀ graph* if every induced subgraph of G contains a QLP₀ vertex.

This class which is a subclass of QLP graphs strictly contains triangulated graphs, paw-free Berge graphs and K_4 -free Berge graphs. Indeed, in a triangulated graph each induced subgraph contains a *simplicial vertex*, i.e. a vertex whose neighborhood is a clique. In a paw-free Berge graph, it is clear that the neighborhood of each vertex induces either a bipartite subgraph or a complete-multipartite subgraph, and so each vertex is a QLP₀ vertex. In a K_4 -free graph, it is easily seen that each vertex is a QLP vertex whose neighborhood admits no complete-multipartite component.

Our main result is the following:

Theorem 1. *Let G be a Berge graph which contains a QLP₀ vertex v . Then from any $\omega(G)$ -coloring of $G-v$ one can obtain in polynomial time an $\omega(G)$ -coloring of G .*

For the proof of theorem 1, we need the following characterization of paw-free Berge graphs:

Theorem 2 (Olariu [6]). *G is a paw-free Berge graph if and only if each connected component of G is either bipartite or complete-multipartite.*

Proof of theorem 1. Let $G = (V, E)$ be a Berge graph with $\omega(G) = \omega \geq 4$ and suppose that G contains a QLP_0 vertex v . Consider any ω -coloring of $G-v$ where each color from 1 to ω is assigned to at least one neighbor of v .

From theorem 2, we shall distinguish between three cases:

Case 1: $G[N(v)]$ is a bipartite subgraph.

In this case, $G[N(v)]$ is triangle-free and thus v is a Tucker vertex. We can then obtain in polynomial time an ω -coloring of G by applying Tucker's algorithm.

Case 2: $G[N(v)]$ is a complete-multipartite subgraph.

Here, since $G[N(v)]$ is ω -colored, then at least two vertices belonging to a same stable set of $G[N(v)]$ have distinct colors, otherwise G would contain a clique of size $\omega+1$. Let α and β be two distinct colors of two vertices belonging to a same stable set of $G[N(v)]$. Clearly, the subgraph $G[S_\alpha \cup S_\beta \cup \{v\}]$ is bipartite, or otherwise G would contain an odd hole. Hence, it can be 2-colored by interchanging the colors α and β in the component containing v . This operation called *bichromatic exchange* yields an ω -coloring of G in time $O(n+m)$, where m is the number of edges in G .

Case 3: $G[N(v)]$ admits one complete-multipartite component, says C , and others bipartite.

Here, we state that v is a Tucker vertex. Let us suppose the opposite. Then for each triple of distinct colors $i, j, k \in \{1, 2, \dots, \omega\}$, the subgraph $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$ contains a K_4 . Obviously, this implies that for each $i, j, k \in \{1, 2, \dots, \omega\}$, C contains a triangle whose vertices are colored i, j, k . Thus, each pair of vertices in C having distinct colors are adjacent, and then C is partitioned into ω stable sets. Hence, we obtain a clique of size $\omega+1$ in G , which is a contradiction. \square

As a direct consequence of theorem 1, we have:

Corollary 1. *Every QLP_0 Berge graph is perfect.*

As a second consequence of theorem 1, we give in the following corollary a new property of minimal imperfect graphs:

Corollary 2. *If G is a minimal imperfect graph with $\omega(G) \geq 4$, then G contains no QLP_0 vertex.*

The algorithmic proof of the main result suggests the following sequential algorithm for $\omega(G)$ -coloring in polynomial time any QLP_0 Berge graph G .

First, search a QLP elimination ordering $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ of G , such that for each $i \in \{1, \dots, n\}$ $G_i[N(v_i)]$ admits at most one complete-multipartite component (complexity $O[n^2(n+m)]$). Secondly, compute $\omega(G_i)$ for $i = 1, \dots, n-1$, where $\omega(G_i) = \max \{\omega(G_i[N(v_i)]) + 1, \omega(G_{i+1})\}$. Here, since v_i is a QLP_0 vertex, $\omega(G_i[N(v_i)])$ is computed in the first step, and so $\omega(G)$ can be computed in time $O(n)$. Finally, start from a trivial coloring of G_n and iteratively find an optimal coloring of G_i from an optimal coloring of G_{i+1} using the method of theorem 1 (complexity at most $O(n^4)$). This yields an $O(n^4)$ algorithm for finding an $\omega(G)$ -coloring of G .

References

- [1] H. Aït Haddadène, S. Gravier, On weakly diamond-free Berge graphs, *Discrete Math.* 159 (1996) 237-240.
- [2] H. Aït Haddadène, F. Maffray, Coloring perfect degenerate graphs, *Discrete Math.* 163 (1997) 211-215
- [3] H. Aït Haddadene, S. Gravier, F. Maffray, An algorithm for coloring some perfect graphs, *Discrete Math.* 183 (1998) 1-16.
- [4] C. Berge, Les problèmes de coloration en théorie des graphes, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 9 (1960) 123-160.
- [5] C. Berge, V. Chvatal, Topics on Perfect Graphs, *Ann. Discrete Math.* 21 (1984).
- [6] S. Olariu, Paw-free graphs, *Information Processing Letters* 28 (1988) 53-54.
- [7] A. Tucker, Coloring perfect (K_4-e) -free graphs, *J. Combin. Theory*, B42 (1987) 313-318.
- [8] A. Tucker, A reduction procedure for coloring perfect K_4 -free graphs, *J. Combin. Theory*, B43 (2) (1987) 151-172.