

N° d'ordre :18/2014 - M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des Mathématiques



Mémoire

Présenté pour l'Obtention du Diplôme de Magister

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Statistiques Mathématiques et Probabilités

par : Sami MOKHTARI

THÈME :

Etude de files d'attente avec rappels et priorité

Soutenu publiquement, le 26/06/2014, devant le jury composé de :

M ^r :M. DJEDOUR	Professeur,	à l'U.S.T.H.B	Président
M ^{me} :H. SAGGOU	Maître de Conférence A,	à l'U.S.T.H.B	Directrice de thèse
M ^{me} :K. DJABALLAH	Maître de Conférence A,	à l'U.S.T.H.B	Examinatrice
M ^r :T. KERNANE	Maître de Conférence A,	à l'U.S.T.H.B	Examinateur

TABLE DES MATIÈRES

Dédicace	3
Remerciements	4
Introduction	5
1 Généralité sur les files d'attente	9
1.1 Introduction	9
1.2 Notion de Files d'attente	10
1.3 Files d'attente simples et principaux résultats	16
2 Etude de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels	24
2.1 Description de la file d'attente $M/G/1$ avec Rappels	25
2.2 Distribution stationnaire des états du système	25
2.3 Calculs des performances	31
3 Etude de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels et priorité	33
3.1 Description de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels et priorité	34
3.2 Distribution stationnaire des états du système	35
3.3 Calculs des performances	41

4 Etude de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels, priorité et panne	43
4.1 Description de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels, priorité et panne	44
4.2 Distribution stationnaire des états du système	48
4.3 Calculs des performances	55
5 Simulation des modèles étudiés de files d'attente	57
5.1 Simulation de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels	58
5.2 Simulation de la file d'attente $M/G/1$ avec priorité	60
5.3 Simulation de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels et priorité	62
Conclusion et perspectives	65

DÉDICACE

A tous ceux qui me sont chers

Avec toute mon affection.

REMERCIEMENTS

Au-delà de la formalité d'usage, je tiens à exprimer ma gratitude envers H.SAGGOU pour son encadrement, ses qualités scientifiques. Ce travail doit beaucoup à sa disponibilité permanente, sa rigueur scientifique et sa patience.

Je suis très reconnaissant à

M^r :M. DJEDOUR	Professeur de l'université "U.S.T.H.B"
M^{me} :K. DJABALLAH	Maître de Conférence de l'université "U.S.T.H.B"
M^r :T. KERNANE	Maître de Conférence de l'université "U.S.T.H.B"

pour l'honneur qu'ils m'ont fait en participant au jury de cette thèse. Je tiens à remercier en particulier *M^r* M. DJEDOUR qui a accepté d'être le président de jury.

Je tiens à remercier l'ensemble des enseignants et personnels de la faculté des Mathématiques en particulier la responsable de la bibliothèque *M^{me}* Taous.

Mes pensées vont enfin et surtout vers ma famille et tous ceux qui me sont chers.

INTRODUCTION

Les origines du formalisme des files d'attente datent du début du XXème siècle et principalement des travaux de deux mathématiciens : le mathématicien danois A.K. Erlang avec ses travaux sur les réseaux téléphoniques et le russe A.A. Markov avec la création des modèles markoviens.

C'est en 1909 que les bases de la théorie des files d'attente sont lancées, grâce à l'article du mathématicien danois A.K. Erlang "The theory of probabilities and telephone conversations". Les premiers résultats sont variés : Erlang observe le caractère poissonnien des arrivées des appels à un central téléphonique, et le caractère exponentiel des durées des appels ; il réussit à calculer de manière relativement simple la probabilité d'avoir un appel rejeté. La notion d'équilibre stationnaire d'un système d'attente est introduite pour la première fois.

A partir des années 30, les travaux de plusieurs mathématiciens tels que Molina, Fry, Pollaczek aux Etats Unis, Kolmogorov et Khintchine en Russie, Palm en Suède, ou Crommelin en France permettent à la théorie des files d'attente de se développer lentement. Les années 50 verront l'essor important de la théorie des files d'attente. Les applications de ces travaux sont alors très pratiques et concernent les disciplines de recherche opérationnelle et génie industriel.

Une file d'attente est un modèle mathématique d'un phénomène d'attente. Compte tenu de l'importance des phénomènes d'attente dans notre univers quotidien, des outils d'analyse de ces phénomènes se sont naturellement développés au fil des années.

Les exemples de phénomènes d'attente dans les sociétés dites modernes sont nombreux. Cela va des phénomènes les plus visibles, par exemple dans le domaine des transports (terrestre, aérien,...) ou des services (banque, poste,...) aux phénomènes d'attente plus discrets que l'on retrouve dans certains systèmes tels les réseaux téléphoniques, les systèmes informatiques...

Une fois introduits, le formalisme des files d'attente et les résultats associés se sont développés comme une discipline très pratique dont l'objectif était de construire des modèles permettant de prédire le comportement des systèmes fournissant un service à des demandes aléatoires.

Notre travail s'inscrit dans la continuité des études intensives menées dans le but de comprendre et de rendre compte des difficultés des files d'attente avec rappels présentant des temps de service non exponentiels à serveur non fiable.

Dès la fin des années 1940, des chercheurs ont mis en évidence les limites de la théorie classique des files d'attente qui ne permettant pas d'expliquer le comportement stochastique des systèmes réels de plus en plus complexes tels que les systèmes téléphoniques où des abonnés répétaient leurs appels en recomposant le numéro plusieurs fois jusqu'à l'obtention de la communication.

Ce phénomène de répétition de demande de service a poussé certains chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à celui dit avec rappels, Cependant, l'influence de ce phénomène a été longtemps négligée durant les décennies suivantes, Ce n'est que vers les années 1970 - 1980 qu'on a vu un net regain d'intérêt pour cette catégorie de modèles, avec l'avènement de nouvelles technologies, notamment dans les systèmes de télécommunication

Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans les articles de synthèse Yang et Templeton[15], Falin et Templeton[16] et Aissani[1].

Dans ce travail nous considérons une file d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels et comportant deux types de clients, les clients de type 1 sont prioritaires par rapport aux clients de type 2 et serveur non fiable avec réparation de loi générale.

Dans le cas où le serveur est occupé le premier type de clients rejoint sa file d'attente, tandis que le second type de clients rejoint l'orbite, et répète sa tentative après un temps aléatoire jusqu'à ce qu'il parvienne à la zone de service.

Par la méthode de la variable supplémentaire nous obtenons des formules explicites et exploitables des performances de ce système (temps moyen d'attente d'un client de type 1, et de type 2, le nombre moyen de clients de type 1, et de type 2).

Enfin nous valorisons ce travail avec la simulation des files d'attente étudiés afin de confirmer les résultats théoriques obtenus; puis nous démontrons quelques relations existants entre les modèles étudiés.

Ce mémoire comporte cinq chapitres :

1. Généralité sur les files d'attente.
2. Etude de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels.
3. Etude de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels et priorité.
4. Etude de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels, priorité et panne.
5. Simulation des modèles étudiés de files d'attente.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions sur les files d'attente en général et les files d'attente avec priorité en particulier.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des files d'attente M/G/1 avec rappels exponentiels. Nous introduisons d'abord le modèle associé à ce type de files puis nous déduisons le système des équations de Chapman Kolmogorov et nous calculerons les mesures de performance de cette file M/G/1 avec rappels exponentiels.

Le troisième chapitre,est basé sur l'étude des files d'attente M/G/1 avec rappels exponentiels et priorité. Nous décrivons d'abord le modèle associé à ce type de files puis nous déduisons le système des équations de Chapman Kolmogorov et nous calculerons les mesures de performance de cette file M/G/1 avec rappels exponentiels et priorité.

Le quatrième chapitre,est consacré sur l'étude des files d'attente M/G/1 avec rappels exponentiels, priorité et serveur non fiable. Nous décrivons d'abord le modèle associé à ce type de files puis nous déduisons le système des équations de Chapman Kolmogorov et nous calculerons les mesures de performance de cette file M/G/1 avec rappels exponentiels, priorité et panne.

Dans le dernier chapitre nous effectuons la simulation des modèles étudiés de files d'attente pour visualiser l'intérêt de cette approche et sa puissance, ainsi la validation des résultats trouvés dans les chapitres précédents.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉ SUR LES FILES D'ATTENTE

1.1 Introduction

La modélisation d'un système est l'opération par laquelle on établit un modèle d'un phénomène, afin d'en proposer une représentation, interprétable, reproductible et simulable.

Les files d'attente constituent un formalisme de modélisation, largement utilisé pour l'évaluation des performances des systèmes à événements discrets tels que les systèmes informatiques, les réseaux de communication et les systèmes de production.

Ce modèle permet de représenter la notion de partage des ressources, où une ressource est partagée entre plusieurs clients. Dans notre contexte, le partage des ressources représente la source principale de la majorité des problèmes liés au dimensionnement. Comme le formalisme des files d'attente permet de modéliser convenablement ce partage, la résolution du modèle généré va permettre, à priori, de répondre à de nombreuses questions liées au dimensionnement.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le formalisme des files d'attente. Nous commençons dans une première section par introduire la notation de Kendall et la Formule de Little. Dans une deuxième section, nous donnons les principaux résultats des files d'attente sur lesquels se basent notre travail tels que les files $M/M/1$, $M/G/1$.

1.2 Notion de Files d'attente

Un système d'attente simple ou station consiste en une file d'attente, appelée aussi buffer ou tampon, et d'une station de service constituée d'une ou plusieurs ressources appelées serveurs. Des entités dites clients ou travaux (jobs), générées par un processus d'arrivée externe, rejoignent la file pour recevoir un service offert par l'un des serveurs. Une politique de service (généralement FIFO, premier arrivé premier servi de la file) est adoptée pour servir les clients. A la fin du service, le client quitte le système.

Ce système est caractérisé par :

Le nombre de serveurs,

la discipline de service,

la capacité de la file,

le processus des arrivées,

le processus de service.

Ces caractéristiques sont définies à travers la notation suivante, dite de Kendall

1.2.1 Notion de Kendall

Dans la théorie des files d'attente, la notation de Kendall est un standard utilisé pour décrire un modèle de file d'attente. Une file d'attente s'écrit sous la forme $T/X/K/C/m/Z$ avec :

T : La distribution d'inter-arrivée des clients,

X : La distribution de service,

K : Le nombre de serveurs,

C : La capacité de la station,

m : Le nombre maximum de clients susceptibles d'arriver dans la file d'attente,

Z : La discipline de service (FIFO, LIFO, PS).

T et X peuvent être données par plusieurs types de distributions. En voici les plus répandues :

M : Loi de Poisson (Markovien ou sans mémoire).

E_k : Loi de Erlang à K étages.

D : Loi constante (déterministe).

H_k : Loi hyperexponentielle d'ordre k .

C_k : Loi de Cox d'ordre k .

PH_k : Loi de type « phase » à k étages.

G : Loi générale.

GI : Lois générales indépendantes.

1.2.2 Caractéristiques d'une file d'attente

Notons par :

$$P_n = \text{Probabilité}\{ \text{d'avoir } n \text{ clients dans le système en régime stationnaire} \}$$

Processus d'arrivée

L'arrivée des clients, décrite par le symbole A , est définie à l'aide d'un processus stochastique de comptage N_t avec $t \geq 0$.

Définition1 : Soit A_n la date d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client dans le système :

$$A_0 = 0 \text{ et } A_n = \inf(t | N_t = n).$$

Soit T_n le temps séparant l'arrivée du $(n - 1)^{\text{ième}}$ client et celle du $n^{\text{ième}}$ client. La loi de T_n est la distribution des inter-arrivées :

$$T_n = A_n - A_{n-1}$$

Définition2 : Un processus de comptage N_t avec $t \geq 0$ est un processus de renouvellement si et seulement si les variables aléatoires $(T_n)_{n=1,2,\dots}$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées.

La loi de T décrivant les durées d'inter-arrivées suffit alors pour caractériser le processus de renouvellement.

Remarques : Notons que, lorsque les inter-arrivées sont de loi exponentielle, le processus des arrivées est un processus de Poisson. Ce dernier est le processus le plus couramment employé pour caractériser les processus des arrivées.

Processus de service

Le temps de service est défini par le temps séparant le début et de la fin du service. On note X_n le temps de service du $n^{\text{ième}}$ client.

Remarques : La distribution du temps de service la plus couramment utilisée est la distribution exponentielle, qui est caractérisée par la propriété sans mémoire.

Nombre de serveurs

Une file d'attente peut contenir un ou une infinité de serveurs. Dans le cas multiserveur, la détermination de la distribution de service de chacun des serveurs est recommandée voire indispensable. La plupart du temps, les serveurs sont considérés identiques et indépendants les uns des autres.

Capacité de la file

La capacité d'une file d'attente notée C est le nombre de clients maximal qui peut se trouver simultanément dans la file et les serveurs. Cette capacité peut être finie ou infinie. Par conséquent, si un client arrive et qu'il y a déjà C clients dans le système, le client peut être accepté ou rejeté suivant la politique de débordement de la file d'attente.

Dicipline de service

L'objectif de la discipline de service est de déterminer l'ordre de service des clients dans la file d'attente et leurs passages dans les serveurs, afin d'être servis. Les disciplines les plus courantes :

F.C.F.S(First In First Served) : Les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée,

L.I.F.O(Last In First Served) : Le dernier client arrivé sera placé en tête de file pour être servi en premier,

PS (Processor Sharing) : Cette discipline est définie pour modéliser des systèmes informatiques. Tous les clients sont servis à tour de rôle. Chaque client effectue un quantum de temps très petit dans le serveur et revient dans la file d'attente jusqu'à terminer complètement son service.

Random : un ordre aléatoire d'accès aux serveurs,

Dans cette première partie nous avons introduit la notation et les caractéristiques d'une file d'attente simple qui nous permettra de modéliser les systèmes.

Certains modèles de files d'attente font usage de disciplines plus complexes reposant sur des priorités de traitement. Un système peut également accepter la préemption d'un service, c'est-à-dire l'interruption du service d'un client au profit d'un autre. Si un tel mode de fonctionnement est autorisé, le service interrompu peut être simplement terminé plus tard (préemption resume) ou, alors être recommencé depuis le début, le travail déjà effectué étant perdu (préemption repeat).

1.2.3 Analyse des performances

Les files d'attente servent à analyser les performances du système modélisé. Cette analyse peut être menée en étudiant le comportement du système selon deux axes :

1. Étude en régime transitoire : L'étude du régime transitoire permet de répondre à des questions de performance qui sont liées à des instants donnés ou sur des périodes de court terme. Par exemple, '

combien de clients demandant un service X vont être servis durant la prochaine heure ? \surd .

2. Étude en régime stationnaire ou permanent (dit aussi à l'équilibre) : consiste à vérifier si le système tend vers un équilibre (en terme de probabilité) lorsque le temps croît (à long terme). Cette analyse permet de répondre aux questions telles que : durant une longue période, quel est le taux moyen d'occupation du serveur ?.

Pour étudier cela, des méthodes stochastiques sont utilisées. Elles consistent à estimer la distribution du processus stochastique engendré par le modèle analysé, soit à un instant donné (analyse transitoire), ou bien à long terme (à l'équilibre). Elles permettent de calculer les probabilités pour que le système se trouve dans chacun des états du processus. Ces probabilités sont utilisées pour le calcul des paramètres de performance.

Les modèles de files d'attente les plus simples à analyser sont les modèles markoviens (distributions exponentielles des inter-arrivées et service). Ceux-ci engendrent une chaîne de Markov (d'où le nom markovien).

Paramètres de performances en régime stationnaire

Différents paramètres de performance peuvent être définis puis calculés en régime transitoire ou en régime permanent. En régime transitoire, les moyennes de ces paramètres sont calculées sur une période d'observation finie $[0, T_{obs}]$. Alors que dans le régime permanent, on s'intéresse aux limites de ces paramètres lorsque T_{obs} tend vers l'infini, si cette dernière existe.

D : Le débit moyen c'est le nombre moyen des clients entrants ou sortants du système par unité de temps. Dans le régime transitoire, le débit moyen d'entrée peut être différent du débit moyen de sortie. Contrairement au régime permanent où le débit moyen de clients est le même en entrée qu'en sortie.

U : L'utilisation moyenne où le taux d'utilisation moyenne est défini comme le pourcentage

pour lequel le système (le serveur) est occupé par rapport au temps d'observation.

N : Le nombre de clients moyen est le nombre moyen des client présents dans le système pendant la période d'observation.

W : Le temps de réponse moyen est le temps de séjour moyen d'un client dans le système. Pour un réseau de files d'attente, ces paramètres peuvent être calculés en considérant le réseau entier. Par exemple le temps de réponse moyen d'un client sera le temps moyen nécessaire pour qu'un client traverse tout le réseau. Dans le cas d'un réseau multi-classe, ce paramètre doit être calculé pour chaque classe de client.

Stabilité

La stabilité d'un système est définie au régime stationnaire. On suppose qu'il n'y a ni création ni destruction des clients. Cela implique que toute création de client correspond à une arrivée et toute destruction correspond à un départ.

Cas d'une file simple :

Définition : En général une file d'attente simple (M/M/1) ayant un taux d'arrivée λ , un taux de service μ et un nombre de serveur k est dite stable si et seulement si $\lambda < \mu k$

Formule de Little

La formule de Little est une loi générale qui s'énonce comme suit : « le nombre moyen des clients dans un système N est égal au produit du débit du système D par le temps moyen passé dans le système par chaque client W » .

Un client arrivant trouve en moyenne N clients devant lui. Ce client partant laisse derrière lui WxD clients. Donc dans l'état stationnaire :

$$N = D * W$$

L'importance de la formule de Little réside dans sa généralité.

De plus, cette loi ne concerne que le régime permanent. Elle n'impose aucune hypothèse ni sur le système, ni sur les variables aléatoires qui le caractérisent.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons aux principaux résultats de performances de quelques files d'attente classiques.

1.3 Files d'attente simples et principaux résultats

Nous présentons dans cette section les principaux résultats des files simples en partant du modèle markovien jusqu'au modèle le plus général (où les inter-arrivées et les services sont arbitraires). Nous allons nous limiter aux files et aux résultats dont on aura besoin dans la suite de ce manuscrit.

1.3.1 La file M/M/1

Cette file est caractérisée par le processus des arrivées poissonniens de taux λ et une durée de service exponentielle de taux μ .

On pose $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

La file peut être considérée comme un processus de naissance et de mort, pour lequel :

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{si } n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n=0 \end{cases}$$

Pour qu'il y ait un régime permanent il faut que $\rho < 1$:

$$\begin{aligned}P_0 &= 1 - \rho \\P_n &= P_0 \times \rho^n \\&= (1 - \rho)\rho^n\end{aligned}$$

Tous les paramètres de performances sont calculés dans le cas où la file est stable ($\lambda < \mu$, c'est-à-dire $\rho < 1$).

Taux d'utilisation du serveur U

Par définition, le taux d'utilisation est la probabilité pour que le serveur de la file soit occupé

$$\begin{aligned}U &= \sum_{n \geq 1} P_n \\&= 1 - P_0 \\&= \rho\end{aligned}$$

Nombre moyen de clients dans le système L

$$\begin{aligned}L &= \sum_{n \geq 1} n P_n \\ &= \sum_{n \geq 1} n (1 - \rho) \rho^n \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho}\end{aligned}$$

Temps moyen de séjour W

Ce paramètre est obtenu en utilisant la Formule de Little :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}$$

qui peut se décomposer en :

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} \\ &= \frac{1}{\mu} + W_q\end{aligned}$$

On en déduit le temps moyen passé dans la file d'attente W_q :

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$$

Nombre moyen de clients dans la file d'attente L_q :

on a : $L_q = L - (1 - P_0)$

et on a aussi :

$$\begin{aligned} L_q &= \lambda W_q \\ &= \frac{\rho^2}{\mu(1 - \rho)} \end{aligned}$$

1.3.2 La file M/G/1

On revient à un système formé d'une file FIFO à capacité illimitée et d'un seul serveur. Le processus d'arrivée des clients dans la file est toujours supposé poissonien de taux λ mais, maintenant, le temps de service Y d'un client est distribué selon une loi qui n'est plus supposée exponentielle. Ce système est connu sous le nom de file $M/G/1$. En fait, on suppose implicitement que les services successifs sont indépendants les uns des autres et distribués selon la même loi (donc les variables aléatoires mesurant le temps de service des différents clients sont i.i.d.). Il faudrait alors parler d'une file $M/GI/1$, GI faisant référence à des lois générales et indépendantes les unes des autres.

Une file simple comportant un unique serveur est stable si le nombre moyen de clients qui arrivent à la file par unité de temps est inférieur au nombre moyen de clients que le serveur de la file d'attente est capable de traiter, soit $\lambda < \mu$ où $\mu = \frac{1}{m}$ est le taux moyen de service de la file (avec $m = E(Y)$).

Analyse du régime permanent : Méthode de la chaîne de Markov incluse

Pour étudier simplement ce système, le service n'étant plus exponentiel, il ne suffit donc plus de savoir qu'un client est en service, pour prédire quand ce service va se terminer. Il faut en plus savoir depuis combien de temps le service a commencé.

Par exemple, dans le cas d'un service déterministe de durée 10 secondes, si le service a commencé depuis 2 secondes, il se terminera exactement dans 8 secondes alors que, s'il a commencé depuis 9 secondes, il se terminera au bout d'une seconde. Cette information est indispensable pour prédire

l'évolution future de l'état du serveur, donc du système.

L'idée est de ne s'intéresser qu'à des instants particuliers de l'évolution du système $t_k = D_{k+}$, $k = 1, 2, \dots$, correspondant aux instants de fin de service (instants juste après le départ d'un client).

Considérons le processus $(N_k)_{k \geq 1} = (X_{t_k})_{k \geq 1}$ où X_{t_k} est le nombre de clients juste après le départ du $k^{\text{ième}}$ client.

Le processus $(N_k)_{k \geq 1}$ est une chaîne de Markov ergodique pouvant être facilement étudiée.

En particulier, on pourra obtenir les probabilités $P_n(k) = P(N_k = n)$ pour que le départ du $k^{\text{ième}}$ client laisse derrière lui n clients, ainsi que $P_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P_n(k)$.

On va maintenant déterminer la matrice de transition $P = (q_{i,j})$ de la chaîne de Markov $(N_k)_{k \geq 1}$ dite chaîne de Markov incluse du processus $(X_t)_{t \geq 0}$.

On note α_c la probabilité que c clients arrivent pendant un temps de service. On a

$$\alpha_c = \int_0^\infty P([c \text{ arrivées pendant } t] | Y = t) f_Y(t) dt = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^c}{c!} \exp(-\lambda t) f_Y(t) dt$$

En effet, les arrivées sont poissonniennes de taux λ . Si le temps de service était de durée constante t , la probabilité pour que c clients arrivent pendant un temps de service t serait égale à $\frac{(\lambda t)^c}{c!} \exp(-\lambda t)$, par définition du processus de Poisson. Comme le temps de service est distribué selon une loi générale de densité f_Y , la durée de temps de service est égale à t à dt près avec une probabilité égale à $f_Y(t) dt$.

Notons alors $q_{i,j}$ la probabilité de transition de l'état i vers l'état j . On a :

$$\begin{cases} q_{0,j} = \alpha_j & \text{si } j \geq 0 \\ q_{i,j} = \alpha_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1 \\ q_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet,

- si $N_k = 0$, $[N_{k+1} = j]$ correspond à l'arrivée de j clients pendant le service du $(k + 1)^{i\grave{e}me}$ client ;
- si $N_k = i$, on a $[N_{k+1} = j]$ si $N_{k+1} - N_k = j - i$, ce qui correspond à l'arrivée de $j - i + 1$ clients, car il ne faut pas oublier que le $(k + 1)^{i\grave{e}me}$ client vient de partir.

La matrice de la chaîne de Markov incluse est donc :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On pourrait montrer que cette chaîne de Markov est irréductible, apériodique et récurrente positive si elle est stable (c'est-à-dire si $\lambda < \mu$). On peut alors affirmer que le vecteur $\vec{\pi}$ des probabilités stationnaires existe et est solution du système $\pi = \pi * P$ (avec bien sur $\sum_{n \geq 0} \pi_n = 1$).

La chaîne de Markov (N_k) est irréductible et admet donc une unique distribution stationnaire, qui est aussi distribution limite de X_t . Le théorème suivant permet, entre autre, de déterminer L :

Soit : $\pi(z) = \sum_{n \geq 0} \pi_n z^n$ et $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots)$

donc

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots) \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots)$$

$$\begin{aligned}L &= \pi'(1) \\ &= \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{var}(Y)}{2(1 - \rho)}\end{aligned}$$

Temps moyen de séjour W

Ce paramètre est obtenu en utilisant la Formule de Little :

$$\begin{aligned}W &= \frac{L}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\mu} + \lambda \frac{E(Y)^2 + \text{var}(Y)}{2(1 - \rho)}\end{aligned}$$

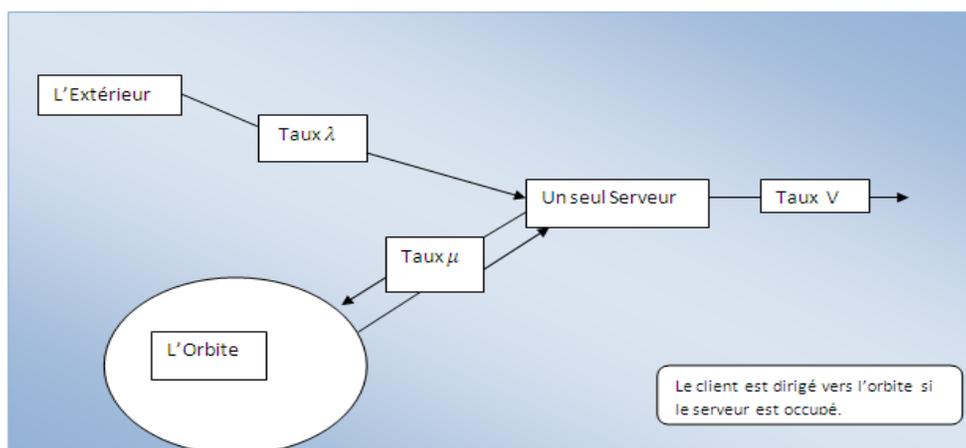
CHAPITRE 2

ETUDE DE LA FILE D'ATTENTE $M/G/1$ AVEC RAPPELS

Les systèmes de files d'attente avec rappels sont caractérisés par la propriété qu'un clients qui trouve à son arrivée tous les serveurs occupés quitte l'espace de service et rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit "en orbite".

Ce chapitre est consacré à l'étude des files d'attente $M/G/1$ avec rappels exponentiels. Nous décrivons d'abord le modèle associé à ce type de files puis nous déduisons le système des équations de Chapman Kolmogorov et nous calculerons les mesures de performance de quelques cas particuliers tels que la file $M/M/1$ avec rappels exponentiels.

Voici un schéma qui représente la file d'attente $M/G/1$ avec Rappels :



2.1 Description de la file d'attente $M/G/1$ avec Rappels

On considère un système formé d'une file d'attente de capacité infinie, et d'un unique serveur, le processus d'arrivée est de poisson de taux λ , la durée de service des clients est une variable aléatoire de loi générale notée $B(x)$, de densité $b(x)$, de transformée de Laplace $\beta^*(s)$ et des premiers moments finis $\beta_k = (-1)^k \beta^{*(k)}(0)$, $k = 1, 2$.

La discipline d'accès au serveur à partir de l'orbite est gouvernée par une loi exponentielle avec une intensité donnée par $j\mu$ ($\mu > 0$), quand le nombre de clients en orbite est $j \in N$, comme cette politique de rappels dépend du nombre de clients dans l'orbite, on l'appelle politique de rappel classique.

On suppose que les temps d'inter-arrivées, les temps de rappels, les temps de services sont mutuellement indépendants.

L'état du système peut être décrit par le processus $\{X(t), t \geq 0\} = \{C(t), N(t), \xi(t), t \geq 0\}$ où

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est libre à l'instant } t. \\ 1 & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t. \end{cases}$$

$N(t)$: Le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t .

$K(t)$: Le nombre de clients dans le système à l'instant t .

$\beta(x)$: l'intensité instantané du service donné quand le temps de service écoulé est $\xi(t) = x$.

2.2 Distribution stationnaire des états du système

Notons la distribution stationnaire de l'état du système par :

$$p_{0n} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = 0, N(t) = n\}$$

$$p_{1n}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} P\{C(t) = 1, \xi(t) < x, N(t) = n\}$$

Dans cette section nous étudions les distribution stationnaire des états du système.

$$(\lambda + n\mu)P_{0n} = \int_0^\infty P_{1n}(x)\beta(x)dx \quad n \geq 0 \quad (1)$$

$$P_{1n}'(x) = -(\lambda + \beta(x))P_{1n}(x) + \lambda(1 - \delta_{n0})P_{1n-1}(x) \quad n \geq 0 \quad (2)$$

$$P_{1n}(0) = \lambda P_{0n} + (n+1)\mu P_{0n+1} \quad n \geq 0 \quad (3)$$

où :

$$\beta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)} \text{ et } \delta_{n0} \text{ est le produit de Kronecker.}$$

Théorème 2.2.1 *Si $\rho < 1$, le système possède un régime stationnaire et les fonctions génératrices de la distribution conjointe de l'état du serveur et le nombre de clients dans l'orbite sont données par :*

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \sum_{n \geq 0} z^n P_{0n} \\ &= (1 - \rho) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - K(v)}{K(v) - v} dv \right\} \\ P_1(z) &= \sum_{n \geq 0} z^n P_{1n} \\ &= \frac{1 - K(z)}{K(z) - z} P_0(z) \end{aligned}$$

où : $\rho = \lambda\beta_1$. (réf [15])

Preuve

Nous définissons les fonctions génératrices suivantes :

$$P_0(z) = \sum_{n \geq 0} z^n P_{0n} \quad (1')$$

$$P_1(z, x) = \sum_{n \geq 0} z^n P_{1n}(x) \quad (2')$$

En multipliant les deux membres de l'équations (2) par z^n , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} z^n P_{1n}(x) &= \sum_{n \geq 0} z^n (-(\lambda + \beta(x))) P_{1n}(x) + \sum_{n \geq 0} z^n \lambda P_{1n-1}(x) \\
&= (-(\lambda + \beta(x))) P_1(z, x) + \lambda \sum_{n \geq 0} z^{(n-1+1)} P_{1n-1}(x) \\
&= (-(\lambda + \beta(x))) P_1(z, x) + \lambda z \sum_{n \geq 0} z^{(n-1)} P_{1n-1}(x) \\
&= (-(\lambda + \beta(x))) P_1(z, x) + \lambda z P_1(z, x) \\
P_{11}(z, x) &= (-\lambda + \lambda z - \beta(x)) P_1(z, x) \tag{4}
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équations (1) par z^n , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} (\lambda + n\mu) z^n P_{0n} &= \sum_{n \geq 0} z^n \int_0^\infty P_{1n}(x) \beta(x) dx \\
\sum_{n \geq 0} \lambda z^n P_{0n} + \sum_{n \geq 0} n\mu z^n P_{0n} &= \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} z^n P_{1n}(x) \beta(x) dx \\
\lambda \sum_{n \geq 0} z^n P_{0n} + \mu \sum_{n \geq 0} n z^{(n-1+1)} P_{0n} &= \int_0^\infty \beta(x) \sum_{n \geq 0} z^n P_{1n}(x) dx \\
\lambda P_0(z) + \mu z P_{10}(z) &= \int_0^\infty \beta(x) P_1(z, x) dx \tag{5}
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équations (3) par z^n , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} z^n P_{1n}(0) &= \sum_{n \geq 0} \lambda z^n P_{0n} + \sum_{n \geq 0} (n+1) \mu z^n P_{0n+1} \\
P_1(z, 0) &= \lambda P_0(z) + \mu P_{10}(z) \tag{6}
\end{aligned}$$

A partir de l'équation (4) nous obtenons :

$$P_1(z, x) = P_1(z, 0)(1 - B(x)) \exp \{ -(\lambda - \lambda z)x \} \tag{7}$$

En exploitant l'équation (7), l'équation (5) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda P_0(z) + \mu z P_{t_0}(z) &= \int_0^\infty \beta(x) P_1(z, x) dx \\
&= \int_0^\infty \beta(x) P_1(z, 0) (1 - B(x)) \exp\{-(\lambda - \lambda z)x\} dx \\
&= P_1(z, 0) \int_0^\infty \frac{b(x)}{1 - B(x)} (1 - B(x)) \exp\{-\lambda x(1 - z)\} dx \\
&= P_1(z, 0) \int_0^\infty \exp\{-\lambda x(1 - z)\} b(x) dx \\
\lambda P_0(z) + \mu z P_{t_0}(z) &= P_1(z, 0) \beta^*(\lambda(1 - z))
\end{aligned}$$

Posons maintenant $K(z) = \beta^*(\lambda(1 - z))$

$$\lambda P_0(z) + \mu z P_{t_0}(z) = P_1(z, 0) K(z) \quad (8)$$

on soustrait à présent $P_{t_0}(z)$ des équations (8) et (6) pour obtenir :

$$\text{l'équation (6) devient : } \quad z P_1(z, 0) - z P_{t_0}(z) = \lambda z P_0(z) \mu z P_{t_0}(z) - z P_{t_0}(z)$$

$$\text{l'équation (8) devient : } \quad \lambda P_0(z) + \mu z P_{t_0}(z) - P_{t_0}(z) = K(z) P_1(z, 0) - P_{t_0}(z)$$

Soustrayons les deux membres de la formule (6) des deux membres de la formule (8) :

$$\begin{aligned}
P_1(z, 0)(K(z) - z) &= \lambda(1 - z) P_0(z) \\
P_1(z, 0) &= \lambda \frac{1 - z}{K(z) - z} P_0(z)
\end{aligned} \quad (9)$$

En remplaçant l'équation (9) dans l'équation (7) nous aurons :

$$P_1(z, x) = \lambda \frac{1 - z}{K(z) - z} P_0(z) [(1 - B(x)) \exp\{-\lambda x(1 - z)\}] \quad (10)$$

Intégrons l'équation (10) et en utilisant la formule :

$$\int_0^{\infty} \exp(-sx)(1 - B(x))dx = \frac{(1 - \beta^*(s))}{s}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P_1(z, x)dx &= \int_0^{\infty} \lambda \frac{1-z}{(K(z) - z)} P_0(z) [(1 - B(x)) \exp \{-\lambda x(1-z)\}] dx \\ &= \lambda \frac{1-z}{K(z) - z} P_0(z) \int_0^{\infty} [(1 - B(x)) \exp \{-\lambda x(1-z)\}] dx \\ &= \lambda \frac{1-z}{K(z) - z} P_0(z) \frac{(1 - \beta^*(\lambda(1-z)))}{\lambda(1-z)} \\ &= \frac{1 - \beta^*(\lambda(1-z))}{K(z) - z} P_0(z) \\ P_1(z) &= \frac{1 - K(z)}{K(z) - z} P_0(z) \end{aligned} \tag{11}$$

Notons $\rho = \lambda\beta_1$ et passons à la limite

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - K(z)}{K(z) - z} = \frac{\lambda\beta_1}{1 - \lambda\beta_1} < \infty$$

Ce qui donne en exploitant : $P_0(1) + P_1(1) = 1$

$$P_0(1) = 1 - \rho$$

$$P_1(1) = \rho$$

En remplaçant l'équation (9) dans l'équation (8) nous aurons :

$$\begin{aligned} \lambda P_0(z) + \mu z P_{t_0}(z) &= \lambda \frac{K(z) - zK(z)}{K(z) - z} P_0(z) \\ P_{t_0}(z) &= \frac{\lambda}{\mu} \times \frac{1 - K(z)}{K(z) - z} P_0(z) \\ \frac{P_{t_0}(z)}{P_0(z)} &= \frac{\lambda}{\mu} \times \frac{1 - K(z)}{K(z) - z} \end{aligned}$$

qui a pour solution

$$\begin{aligned} \int_1^z \frac{P_0(a)}{P_0(a)} da &= \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - K(a)}{K(a) - a} da \\ \ln P_0(z) - \ln P_0(1) &= \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - K(a)}{K(a) - a} da \\ \exp \left\{ \ln \frac{P_0(z)}{P_0(1)} \right\} &= \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - K(a)}{K(a) - a} da \right\} \\ P_0(z) &= P_0(1) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - K(a)}{K(a) - a} da \right\} \end{aligned}$$

$$P_0(1) = 1 - \rho.$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} P_0(z) &= (1 - \rho) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - K(a)}{K(a) - a} da \right\} \\ P_1(z) &= \frac{1 - K(z)}{K(z) - z} P_0(z) \end{aligned} \tag{12}$$

2.3 Calculs des performances

Nombre moyen de clients dans l'orbite Soit $Q(z)$ la fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite :

$$\begin{aligned}
 Q(z) &= \sum_{n \geq 0} z^n P \{N(t) = n\} \\
 &= \sum_{n \geq 0} z^n P \{N(t) = n \text{ et } C(t) = 0 \text{ ou } C(t) = 1\} \\
 &= \sum_{n \geq 0} z^n P \{N(t) = n \text{ et } C(t) = 0\} + \sum_{n \geq 0} z^n P \{N(t) = n \text{ et } C(t) = 1\} \\
 &= \sum_{n \geq 0} z^n P \{N(t) = n \text{ et } C(t) = 0\} + \sum_{n \geq 0} z^n P \{N(t) = n - 1 \text{ et } C(t) = 1\} \\
 &= P_0(z) + P_1(z) \\
 &= P_0(z) + \frac{1 - K(z)}{K(z) - z} P_0(z) \\
 &= \frac{1 - z}{K(z) - z} P_0(z) \\
 Q(z) &= \frac{1 - z}{K(z) - z} (1 - \rho) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \left(\frac{1 - K(a)}{K(a) - a} \right) da \right\}
 \end{aligned}$$

Le nombre moyen de clients dans l'orbite est donné comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q} &= Q'(1) \\
 \bar{Q} &= \frac{\lambda^2}{1 - \rho} \left(\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

où : $\rho = \lambda\beta_1$

Nombre moyen de clients dans le système

Soit $N(z)$ la fonction génératrice du nombre de clients dans le système :

$$\begin{aligned}
N(z) &= \sum_{n \geq 0} z^n P \{K(t) = n\} \\
&= \sum_{n \geq 0} z^n P \{K(t) = n \text{ et } C(t) = 0 \text{ ou } C(t) = 1\} \\
&= \sum_{n \geq 0} z^n P \{K(t) = n \text{ et } C(t) = 0\} + \sum_{n \geq 0} z^n P \{K(t) = n \text{ et } C(t) = 1\} \\
&= \sum_{n \geq 0} z^n P \{N(t) = n \text{ et } C(t) = 0\} + \sum_{n \geq 0} z^n P \{N(t) = n - 1 \text{ et } C(t) = 1\} \\
&= P_0(z) + \sum_{n \geq 0} z^n P_{1,n-1} \\
&= P_0(z) + zP_1(z) \\
&= P_0(z) + z \frac{1 - K(z)}{K(z) - z} P_0(z) \\
&= \frac{K(z) - zK(z)}{K(z) - z} P_0(z) \\
N(z) &= \frac{K(z) - zK(z)}{K(z) - z} (1 - \rho) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - K(a)}{K(a) - a} da \right\}
\end{aligned}$$

Le nombre moyen de clients dans le système est donné par :

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= N'(1) \\
\bar{N} &= \rho + \frac{\lambda^2}{1 - \rho} \left(\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right)
\end{aligned}$$

Probabilité que le serveur est occupé La probabilité que le serveur est occupé est obtenue comme suit :

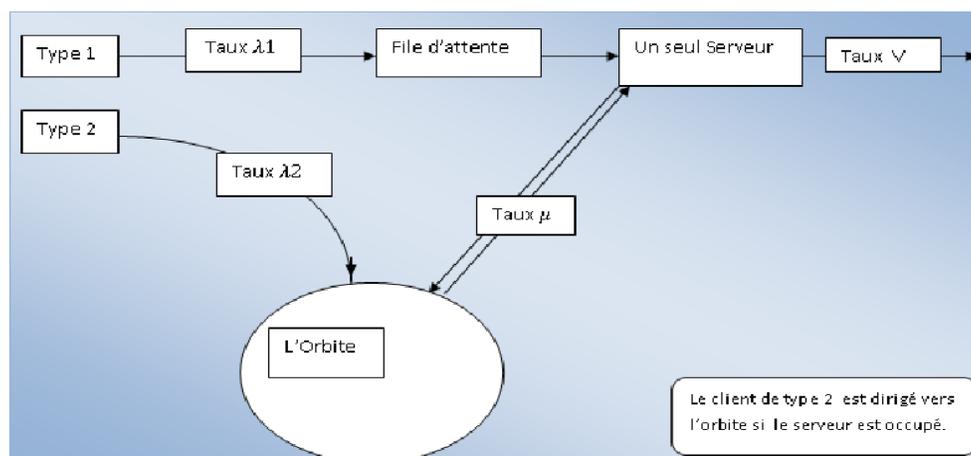
$$P \{C(t) = 1\} = \rho$$

CHAPITRE 3

ETUDE DE LA FILE D'ATTENTE $M/G/1$ AVEC RAPPELS ET PRIORITÉ

Nous introduisons dans ce chapitre la file $M/G/1$ avec rappels exponentiels et priorité large (non préemptive), nous décrivons au début le modèle mathématique associé à cette file ainsi que leur système des équations de Chapman Kolmogorov, puis nous calculons les mesures de performance de chaque type de clients, tels que le temps moyen d'attente des deux types des clients (prioritaires et moins prioritaires), le nombre moyen de clients prioritaires dans la file et le nombre moyen de clients moins prioritaires dans l'orbite.

Voici un schéma qui représente cette file d'attente :



3.1 Description de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels et priorité

On considère un système formé d'une file d'attente de capacité infinie, et d'un unique serveur, Les clients prioritaires arrivent dans le système selon un processus de poisson de paramètre $\lambda_1 > 0$, A l'arrivée d'un client, si le serveur est libre, le client sera pris en charge immédiatement. Dans le cas contraire, il rejoint la file d'attente (de capacité illimité et discipline FIFO)(File classique $M/G/1$). Les clients non prioritaire arrivent dans le système selon un processus de poisson de taux $\lambda_2 > 0$. A l'arrivée d'un client non prioritaire, si le serveur est libre, le client en question est pris en charge. Dans le cas contraire le client entre en orbite et devient source d'appels non prioritaire. Les durées de services des deux types des clients sont des variables aléatoires positives et mutuellement indépendantes et de lois générales différentes notées $B_1(x)$ et $B_2(x)$ respectivement, des densités $b_1(x)$ et $b_2(x)$, et des transformées de Laplace $\beta_1^*(s)$ et $\beta_2^*(s)$ respectivement, et possédant les deux premiers moments finis $\beta_{k,1} = (-1)^k \beta_1^{*(k)}(0)$ et $\beta_{k,2} = (-1)^k \beta_2^{*(k)}(0), k = 1, 2$.

La discipline d'accès au serveur à partir de l'orbite est gouvernée par une loi exponentielle avec une intensité donnée par $j\mu$ ($\mu > 0$), quand le nombre de clients en orbite est $j \in N$, comme cette politique de rappels dépend du nombre de clients dans l'orbite, on l'appelle politique de rappel classique.

On suppose que les temps d'inter-arrivées, les temps de rappels, les temps de services sont mutuellement indépendants.

L'état du système est décrit par le processus $\{X(t), t \geq 0\} = \{C(t), N_1(t), N_2(t), \xi_1(t), \xi_2(t), t \geq 0\}$

où

$C(t)$: La variable aléatoire indiquant l'état du serveur à l'instant t .

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est libre à l'instant } t. \\ 1 & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t \text{ par un client de type 1.} \\ 2 & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t \text{ par un client de type 2.} \end{cases}$$

$K_1(t)$: Le nombre de clients de type 1 dans le système à l'instant t .

$K_2(t)$: Le nombre de clients de type 2 dans le système à l'instant t .

$N_1(t)$: Le nombre de clients de type 1 dans la file d'attente à l'instant t .

$N_2(t)$: Le nombre de clients de type 2 dans l'orbite à l'instant t .

$\beta_1(x)$: l'intensité du service des clients de type 1 donné quand le temps de service écoulé est $\xi_1(t) = x$.

$\beta_2(x)$: l'intensité du service des clients de type 2 donné quand le temps de service écoulé est $\xi_2(t) = x$.

3.2 Distribution stationnaire des états du système

Notons par :

$$\begin{aligned} P_{0nm} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = 0, N_1(t) = n, N_2(t) = m\} \\ P_{1nm}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} P\{C(t) = 1, \xi_1(t) < x, N_1(t) = n, N_2(t) = m\} \\ P_{2nm}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} P\{C(t) = 2, \xi_2(t) < x, N_1(t) = n, N_2(t) = m\} \end{aligned}$$

Dans cette section nous étudions les distribution stationnaire des états du système (avec $m \geq 0$).

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + m\mu)P_{00m} = \int_0^\infty (P_{10m}(x)\beta_1(x) + P_{20m}(x)\beta_2(x))dx \quad n = 0 \quad (1)$$

$$P_{0nm} = 0 \quad n \geq 1,$$

$$P_{1nm}(x) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_1(x))P_{1nm}(x) + \lambda_1(1 - \delta_{n0})P_{1n-1m}(x) + \lambda_2(1 - \delta_{m0})P_{1nm-1}(x) \quad (2)$$

$$P_{2nm}(x) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_2(x))P_{2nm}(x) + \lambda_1(1 - \delta_{n0})P_{2n-1m}(x) + \lambda_2(1 - \delta_{m0})P_{2nm-1}(x) \quad (3)$$

$$P_{1nm}(0) = \lambda_1 P_{0nm} \delta_{n0} + \int_0^\infty (P_{1n+1m}(x)\beta_1(x))dx + \int_0^\infty (P_{2n+1m}(x)\beta_2(x))dx \quad n \geq 0 \quad (4)$$

$$P_{2nm}(0) = \begin{cases} 0 & n \geq 1 \\ \lambda_2 P_{00m} + (m+1)\mu P_{00m+1} & n = 0 \end{cases} \quad (5)$$

où :

$$\beta_i(x) = \frac{b_i(x)}{1 - B_i(x)} \text{ et } \delta_{n0} \text{ est le produit de Kronecker.}$$

Théorème 3.2.2 *Si $\rho = \rho_1 + \rho_2 < 1$, le système possède un régime stationnaire et les fonctions génératrices de la distribution conjointe de l'état du serveur et le nombre des deux types de clients dans la file d'attente et l'orbite respectivement sont données par :*

$$\begin{aligned}
P_0(z_2) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{0nm} \\
&= (1 - \rho_1 + \rho_2) \times \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_1^{z_2} \frac{\lambda_1 - \lambda_1 h(v) + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(h(v), v)}{K_2(h(v), v) - v} \right\} dv \\
P_1(z_1, z_2) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{1nm}(x) \\
&= [(\lambda_1 - \lambda_1 h(z_2) + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(h(z_2), z_2))(K_2(z_1, z_2) - z_2) \\
&\quad - (\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(z_1, z_2))(K_2(h(z_2), z_2) - z_2)] \\
&\quad \times [(K_2(h(z_2), z_2) - z_2)(z_1 - K_1(z_1, z_2))]^{-1} \\
&\quad \times \frac{1 - K_1(z_1, z_2)}{\lambda_1 - \lambda_1 z_2 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2} P_0(z_2) \\
P_2(z_1, z_2) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{2nm} \\
&= \frac{\lambda_1 - \lambda_1 h(z_2) + \lambda_2 - \lambda_2 z_2}{K_2(h(z_2), z_2) - z_2} \\
&\quad \times \frac{1 - K_2(z_1, z_2)}{\lambda_1 - \lambda_1 z_2 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2} P_0(z_2)
\end{aligned}$$

où : L'équation $z_1 = K(z_1, z_2)$ admet une solution unique $z_1 = h(z_2)$ dans l'intervalle $[0, 1]$.

et $\rho_i = \lambda_i \beta_{i,1}$. (p 189-190 réf [15])

Preuve

Nous présentons les trois fonctions génératrices :

$$P_0(z_1, z_2) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{0nm} \quad (1')$$

$$P_1(z_1, z_2, x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{1nm}(x) \quad (2')$$

$$P_2(z_1, z_2, x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{2nm}(x) \quad (3')$$

En multipliant les deux membres de l'équations (1) par z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{m \geq 0} (\lambda_1 + \lambda_2 + m\mu) z_2^m P_{00m} &= \sum_{m \geq 0} z_2^m \int_0^\infty (P_{10m}(x)\beta_1(x) + P_{20m}(x)\beta_2(x)) dx \\
\mu z_2 \sum_{m \geq 0} m z_2^{m-1} P_{00m} &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{00m} + \int_0^\infty \left(\sum_{m \geq 0} z_2^m P_{10m}(x)\beta_1(x) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{20m}(x)\beta_2(x) \right) dx \\
\mu z_2 P_{I_0}(z_2) &= -(\lambda_1 + \lambda_2) P_0(z_2) + \int_0^\infty (P_1(0, z_2, x)\beta_1(x) + P_2(0, z_2, x)\beta_2(x)) dx \quad (6)
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équations (2) par z_1^n et z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{1nm}(x) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} -(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_1(x)) z_1^n z_2^m P_{1nm}(x) + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \lambda_1 z_1^n z_2^m P_{1n-1m}(x) \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \lambda_2 z_1^n z_2^m P_{1nm-1}(x) \\
&= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_1(x)) \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{1nm}(x) + \lambda_1 z_1 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^{n-1} z_2^m P_{1n-1m}(x) \\
&\quad + \lambda_2 z_2 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^{m-1} P_{1nm-1}(x) \\
&= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_1(x)) P_1(z_1, z_2, x) + \lambda_1 z_1 P_1(z_1, z_2, x) + \lambda_2 z_2 P_1(z_1, z_2, x) \\
P_{I_1}(z_1, z_2, x) &= -(\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2 + \beta_1(x)) P_1(z_1, z_2, x) \quad (7)
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équations (3) par z_1^n et z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{2nm}(x) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} -(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_2(x)) z_1^n z_2^m P_{2nm}(x) + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \lambda_1 z_1^n z_2^m P_{2n-1m} \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \lambda_2 z_1^n z_2^m P_{2nm-1} \\
&= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_2(x)) \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{2nm}(x) + \lambda_1 z_1 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^{n-1} z_2^m P_{2n-1m} \\
&\quad + \lambda_2 z_2 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^{m-1} P_{2nm-1} \\
&= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_2(x)) P_2(z_1, z_2, x) + \lambda_1 z_1 P_2(z_1, z_2, x) + \lambda_2 z_2 P_2(z_1, z_2, x) \\
P_{I_2}(z_1, z_2, x) &= -(\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2 + \beta_2(x)) P_2(z_1, z_2, x) \quad (8)
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équations (4) par z_1^n et z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{1nm}(0) &= \lambda_1 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{00m}(x) \delta_{n0} + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \int_0^\infty z_1^n z_2^m P_{1n+1m}(x) \beta_1(x) dx \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \int_0^\infty z_1^n z_2^m P_{2n+1m}(x) \beta_2(x) dx \\
&= \lambda_1 P_0(z_2) + \frac{1}{z_1} \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^{n+1} z_2^m (P_{1n+1m}(x) \beta_1(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{z_1} \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^{n+1} z_2^m (P_{2n+1m}(x) \beta_2(x) dx \\
&= \lambda_1 P_0(z_2) + \frac{1}{z_1} \int_0^\infty (P_1(z_1, z_2, x) - P_1(0, z_2, x)) \beta_1(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{z_1} \int_0^\infty (P_2(z_1, z_2, x) - P_2(0, z_2, x)) \beta_2(x) dx \\
z_1 P_1(z_1, z_2, 0) &= \lambda_1 z_1 P_0(z_2) + \int_0^\infty (P_1(z_1, z_2, x) - P_1(0, z_2, x)) \beta_1(x) dx \\
&\quad + \int_0^\infty (P_2(z_1, z_2, x) - P_2(0, z_2, x)) \beta_2(x) dx \tag{9}
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équations (5) par z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{m \geq 0} z_2^m P_{2nm}(0) &= \lambda_2 \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{00m} + \mu \sum_{m \geq 0} (m+1) z_2^m P_{00m+1} \\
P_2(z_1, z_2, 0) &= \lambda_2 P_0(z_2) + \mu P_1(z_2) \tag{10}
\end{aligned}$$

A partir de l'équations (7) nous obtenons :

$$P_1(z_1, z_2, x) = P_1(z_1, z_2, 0)[1 - B_1(x)] \exp \{-(\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2)x\} \tag{11}$$

A partir de l'équations (8) nous obtenons :

$$P_2(z_1, z_2, x) = P_2(z_1, z_2, 0)[1 - B_2(x)] \exp \{-(\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2)x\} \tag{12}$$

En utilisons les équations (6) et (9), nous aurons :

$$\begin{aligned} \mu z_2 P_{t_0}(z_2) + z_1 P_1(z_1, z_2, 0) &= \int_0^\infty P_1(z_1, z_2, x) \beta_1(x) dx + \int_0^\infty P_2(z_1, z_2, x) \beta_2(x) dx \\ &\quad - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 z_1) P_0(z_2) \end{aligned}$$

les deux équations (11) et (12) donnent :

$$\begin{aligned} \mu z_2 P_{t_0}(z_2) + z_1 P_1(z_1, z_2, 0) &= \int_0^\infty P_1(z_1, z_2, 0) [1 - B_1(x)] \exp\{-(\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2)x\} \beta_1(x) dx \\ &\quad + \int_0^\infty P_2(z_1, z_2, 0) [1 - B_2(x)] \exp\{-(\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2)x\} \beta_2(x) dx \\ &\quad - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 z_1) P_0(z_2) \end{aligned}$$

Nous avons : $\beta_i^*(s) = \int_0^\infty \exp[-sx] b_i(x) dx$

Et posons maintenant $K_i(z_1, z_2) = \beta_i^*(\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2)$

$$K_2(z_1, z_2) P_2(z_1, z_2, 0) = [z_1 - K_1(z_1, z_2)] P_1(z_1, z_2, 0) + (\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2) P_0(z_2) + \mu z_2 P_{t_0}(z_2) \quad (13)$$

A partir de l'équations (10) nous pouvons éliminer $P_2(z_1, z_2, 0)$ dans l'équation (13) comme suit :

$$\mu (K_2(z_1, z_2) - z_2) P_{t_0}(z_2) = (\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(z_1, z_2)) P_0(z_2) + (z_1 - K_1(z_1, z_2)) P_1(z_1, z_2, 0) \quad (14)$$

On considère l'équation

$$z_1 - K_1(z_1, z_2) = 0 \quad (15)$$

Nous pouvons réécrire comme suit :

$$z_1 - \beta_1(s + \lambda_1 - \lambda_1 z_1) = 0 \quad (16)$$

où : $s = \lambda_2 - \lambda_2 z_2$.

L'équation (15) a une racine unique $z_1 = h(z_2)$ et la fonction $h(z_2)$ peut être vue comme la fonction génératrice du nombre de clients de type 2 qui arrivent pendant la période d'occupation "busy period" formé seulement par les clients de type 1 qui sont prioritaires. Il est facile de montrer cela :(voir réf [15])

$$h'(1) = \frac{\lambda_2 \beta_{1,1}}{(1 - \rho_1)}$$

$$h''(1) = \frac{\lambda_2 \beta_{1,2}}{(1 - \rho_1)^3}$$

si $\rho_1 + \rho_2 < 1$ alors $K_2(h(z), z) = z$ si et seulement si $z = 1$. Maintenant nous pouvons remplacer $z_1 = h(z_2)$ dans l'équation (14) ce qui donne :

$$\mu(K_2(h(z_2), z_2) - z_2)P_0(z_2) = (\lambda_1 - \lambda_1 h(z_2) + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(h(z_2), z_2))P_0(z_2) \quad (17)$$

Et

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\lambda_1 - \lambda_1 h(z) + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(h(z), z)}{K_2(h(z), z) - z} = \frac{\lambda_2(\rho_1 + \rho_2)}{1 - \rho_1 - \rho_2} < \infty$$

Donc la fonction :

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_1 h(z) + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(h(z), z)}{K_2(h(z), z) - z}$$

est analytique dans le disque ouvert $|z| < 1$ est continue dans le disque fermé $|z| \leq 1$.

La solution d'équation (17) est :

$$P_0(z) = P_0(1) \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_1^z \frac{\lambda_1 - \lambda_1 h(v) + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(h(v), v)}{K_2(h(v), v) - v} dv \right\}$$

Apartir des équations (10), (11), (12) et (14) nous obtenons :

$P_1(z_1, z_2, 0)$, $P_1(z_1, z_2, x)$, $P_2(z_1, z_2, 0)$ et $P_2(z_1, z_2, x)$.

La condition de normalisation donne :

$$P_0(1) + P_1(1, 1) + P_2(1, 1) = 1.$$

$$p_0(1) = 1 - \rho_1 - \rho_2$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} P_0(z) &= (1 - \rho_1 + \rho_2) \times \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_1^z \frac{\lambda_1 - \lambda_1 h(v) + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(h(v), v)}{K_2(h(v), v) - v} \right\} dv \\ P_1(z_1, z_2) &= [(\lambda_1 - \lambda_1 h(z_2) + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(h(z_2), z_2))(K_2(z_1, z_2) - z_2) \\ &\quad - (\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 K_2(z_1, z_2))(K_2(h(z_2), z_2) - z_2)] \\ &\quad \times [(K_2(h(z_2), z_2) - z_2)(z_1 - K_1(z_1, z_2))]^{-1} \\ &\quad \times \frac{1 - K_1(z_1, z_2)}{\lambda_1 - \lambda_1 z_2 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2} P_0(z_2) \\ P_2(z_1, z_2) &= \frac{\lambda_1 - \lambda_1 h(z_2) + \lambda_2 - \lambda_2 z_2}{K_2(h(z_2), z_2)} \\ &\quad \times \frac{1 - K_2(z_1, z_2)}{\lambda_1 - \lambda_1 z_2 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2} P_0(z_2) \end{aligned}$$

3.3 Calculs des performances

Nombre moyen de clients de type 1 dans le système Le nombre moyen de clients de type 1 dans le système est donné par :

$$\bar{N}_1 = \frac{\lambda_1(\lambda_1 \beta_{1,2} + \lambda_2 \beta_{2,2})}{2(1 - \rho_1)}$$

Nombre moyen de clients de type 2 dans le système

Le nombre moyen de clients de type 2 dans le système est donné par :

$$\bar{N}_2 = \frac{\lambda_2(\lambda_1 \beta_{1,2} + \lambda_2 \beta_{2,2})}{2(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} + \frac{\lambda_2(\rho_1 + \rho_2)}{\mu(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

Probabilité que le serveur est occupé La probabilité que le serveur est occupé par l'un des deux types de clients est obtenue comme suit :

$$P \{C(t) = 1 \text{ ou } C(t) = 2\} = \rho_1 + \rho_2$$

Probabilité que le serveur est occupé par un client de type 1 La probabilité que le serveur est occupé par un client de type 1 est obtenue comme suit :

$$P \{C(t) = 1\} = \rho_1$$

Probabilité que le serveur est occupé par un client de type 2 La probabilité que le serveur est occupé par un client de type 2 est obtenue comme suit :

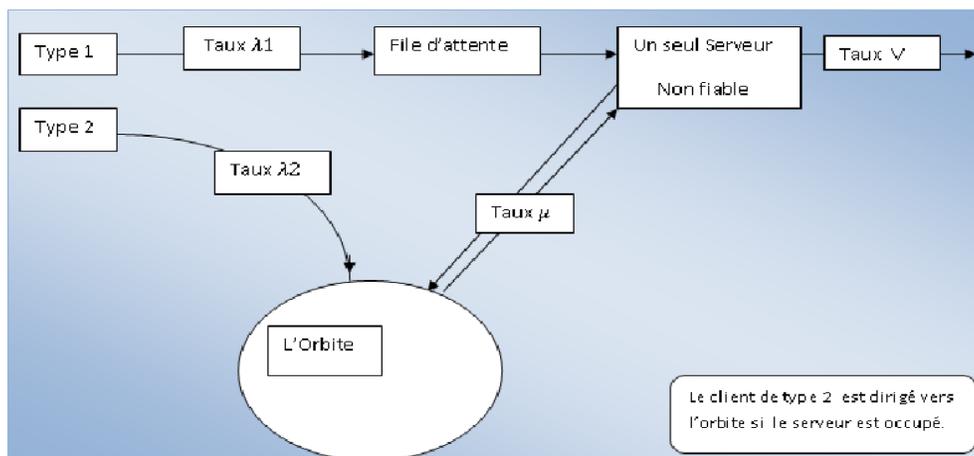
$$P \{C(t) = 2\} = \rho_2$$

CHAPITRE 4

ETUDE DE LA FILE D'ATTENTE $M/G/1$ AVEC RAPPELS, PRIORITÉ ET PANNE

Dans ce chapitre nous étudions la file d'attente $M/G/1$ avec rappels, priorité non préemptive et le serveur est sujet à des pannes actives, nous décrivons au début le modèle mathématique associé à cette file ainsi que leur système des équations de Chapman Kolmogorov, puis nous calculons les mesures de performance de chaque type de clients (prioritaires et moins prioritaires), tels que le temps moyen d'attente, le nombre moyen de clients prioritaires dans la file et le nombre moyen de clients moins prioritaires dans l'orbite.

Voici un schéma qui représente cette file d'attente :



4.1 Description de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels, priorité et panne

On considère un système formé d'une file d'attente de capacité infinie, et d'un unique serveur, le processus des arrivées est Poissonnien de paramètre λ_1 pour la classe prioritaire et λ_2 pour la classe non prioritaire, la durée de service des deux types de clients est une variable aléatoire de loi générale notée $B(x)$, de densité $b(x)$, et de transformée de Laplace $\beta^*(s)$ et les premiers moments finis $\beta_k = (-1)^k \beta^{*(k)}(0)$, $k = 1, 2$.

Le serveur est sujet à des pannes actives. Il tombe en panne après un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ , Lorsque le serveur tombe en panne, il est immédiatement réparé et le temps requis pour la réparation est une variable aléatoire de loi générale notée $R(x)$, de densité $r(x)$, et de transformée de Laplace $\gamma^*(s)$ et possédant les deux premiers moments finis $\gamma_k = (-1)^k \gamma^{*(k)}(0)$, $k = 1, 2$.

Notons que cette panne est bien particulière car elle provoque la perte d'un client en service et après chaque réparation le serveur devient libre.

La discipline d'accès au serveur à partir de l'orbite est gouvernée par une loi exponentielle avec une intensité donnée par $j\mu$ ($\mu > 0$), quand le nombre de clients en orbite est $j \in N$, comme cette politique de rappels dépend du nombre de clients dans l'orbite, on l'appelle politique de rappel classique.

On suppose que les temps d'inter-arrivées, les temps de rappels, les temps de services, les temps de pannes et le temps de réparation sont mutuellement indépendants

L'état du système peut être décrit par le processus $\{X(t), t \geq 0\} = \{C(t), N_1(t), N_2(t), \xi_1(t), \xi_2(t), t \geq 0\}$

où

$C(t)$: La variable aléatoire indiquant l'état du serveur à l'instant t .

$$C(t) = \begin{cases} I & \text{si le serveur est libre à l'instant } t. \\ S & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t. \\ R & \text{si le serveur est en état de réparation à l'instant } t. \end{cases}$$

$K_1(t)$: Le nombre de clients de type 1 dans le système à l'instant t .

$K_2(t)$: Le nombre de clients de type 2 dans le système à l'instant t .

$N_1(t)$: Le nombre de clients de type 1 dans la file d'attente à l'instant t .

$N_2(t)$: Le nombre de clients de type 2 dans l'orbite à l'instant t .

$\xi_1(t)$: Représente le temps de service écoulé si $C(t) = S$.

$\xi_2(t)$: Représente le temps de réparation écoulé si $C(t) = R$.

Chaîne de Markov induite

Soit τ_n une séquence qui représente des instants de fin de service ou fin de réparations, on définit χ_n le temps de service généralisé du $n^{\text{ième}}$ client qui correspond la durée de service et la durée de réparation dans le cas où le serveur tombe en panne. χ_n sont des variables aléatoires indépendantes i.i.d.

On note par χ la variable aléatoire représentant le service généralisé de fonction de répartition $\Phi(x)$, de densité $\phi(x)$ et de transformée de Laplace $\phi^*(x)$.

la distribution et l'espérance du service généralisé sont données par le théorème suivant :

Théorème 4.1.3

$$\Phi(t) = \int_0^t [\theta \tilde{B}(x)R(t-x) + b(x)] \exp(-\theta x) dx \text{ et } E[\chi] = (1 + \theta\gamma_1)\tilde{B}(\theta)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= P(\chi \leq t) = P(\chi \leq t, \xi \leq B) + P(\chi \leq t, \xi > B) \\
&= P(\xi + \mathfrak{R} \leq t, \xi \leq B) + P(B \leq t, \xi > B) \\
&= \int_0^t \theta \bar{B}(x) R(t-x) \exp(-\theta x) dx + \int_0^t \exp(-\theta x) dB(x) \\
&= \int_0^t [\theta \bar{B}(x) R(t-x) + b(x)] \exp(-\theta x) dx \\
E[\chi] &= \int_0^\infty t d\Phi(t) \\
&= \int_0^\infty t \left[\int_0^t \theta \bar{B}(x) r(t-x) \exp(-\theta x) dx + b(x) \exp(-\theta t) \right] dt \\
&= (1 + \theta \gamma_1) \tilde{\bar{B}}(\theta)
\end{aligned}$$

Soit ν_i le nombre de clients de type i qui arrivent durant le service généralisé, $i = 1, 2$

$$P(\nu_i = k) = \int_0^\infty \frac{(\lambda_i u)^k}{k!} \exp(-\lambda_i u) d\Phi(u) \text{ avec } i = 1, 2$$

de fonction génératrice

$$\begin{aligned}
H_i(z) &= E[z^{\nu_i}] = \sum_{k \geq 0} P(\nu_i = k) z^k = \int_0^\infty \exp(-\lambda_i(1-z)u) d\Phi(u) = \Phi^*(\lambda_i - \lambda_i z) \\
&= \int_0^\infty \exp(-\lambda_i(1-z)u) \left[\int_0^u [\theta \bar{B}(x) r(u-x) \exp(-\theta x) dx + b(u) \exp(-\theta u)] du \right] du \\
&= \theta \tilde{\bar{B}}(\lambda_i - \lambda_i z + \theta) \gamma^*(\lambda_i - \lambda_i z) + \beta^*(\lambda_i - \lambda_i z + \theta) \text{ avec } i = 1, 2
\end{aligned}$$

la distribution conjointe

$$P(\nu_1 = n, \nu_2 = m) = \int_0^\infty \frac{(\lambda_1 u)^n}{n!} \exp(-\lambda_1 u) \frac{(\lambda_2 u)^m}{m!} \exp(-\lambda_2 u) d\Phi(u)$$

de fonction génératrice

$$\begin{aligned}
K(z_1, z_2) &= E[z_1^{\nu_1}, z_2^{\nu_2}] = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} P(\nu_1 = n, \nu_2 = m) z_1^n z_2^m \\
&= \int_0^\infty \exp(-\alpha(z_1, z_2)u) \left[\int_0^u [\theta \bar{B}(x) r(u-x) \exp(-\theta x) dx + b(u) \exp(-\theta u)] du \right. \\
&= \theta \tilde{B}(\alpha(z_1, z_2) + \theta) \gamma^*(\alpha(z_1, z_2)) + \beta^*(\alpha(z_1, z_2) + \theta) \\
&\quad \text{avec } \alpha(z_1, z_2) = \lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2.
\end{aligned}$$

On note la charge du serveur par :

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_1 + \rho_2 \\
\text{où } \rho_i &= H t_i(1) = \lambda_i (1 + \theta \gamma_1) \tilde{B}(\theta) = \lambda_i E[\chi] \text{ avec } i = 1, 2
\end{aligned}$$

Lemme 4.1.1 *Si $\rho < 1$ alors pour chaque z_2 fixé, l'équation $z_1 = K(z_1, z_2)$ admet une solution unique $z_1 = h(z_2)$ dans l'intervalle $[0, 1]$*

$$\begin{aligned}
h(1) &= 1 \\
h'(1) &= \frac{\rho_2}{(1 - \rho_1)} \\
h''(1) &= \frac{\lambda_2^2 \times \Upsilon}{\theta(1 - \rho_1)^3}
\end{aligned}$$

avec $\Upsilon = 2[B(\tilde{\theta}) - \Lambda](1 + \theta \gamma_1) + (\theta)^2 \gamma_2 \tilde{B}(\tilde{\theta})$

et $\Lambda = \int_0^\infty x \exp(-\theta x) b(x)$

Soit $N_1(n) = N_1(\tau_n^+)$, et $N_2(n) = N_2(\tau_n^+)$.

On a le lemme suivant

Lemme 4.1.2

(i)- Si $N_1(n) = 0$, alors $N_1(n+1) = \nu_1$ et $N_2(n+1) = N_2(n) + \xi - 1 + \nu_2$

(ii)- Si $N_1(n) \geq 1$, alors $N_1(n+1) = N_1(n) + \nu_1 - 1$ et $N_2(n+1) = N_2(n) + \nu_2$

ξ variable aléatoire du nombre d'arrivées externes pendant le service du $n^{\text{ième}}$ client

$$\text{avec } P[\xi = 0 | N_n = m] = \frac{m\mu}{\lambda + m\mu} \text{ et } P[\xi = 1 | N_n = m] = \frac{\lambda}{\lambda + m\mu}$$

le lemme précédent nous montre que $\{N_1(n), N_2(n), n \in N\}$ forme est une chaîne de Markov induite :

On a le théorème suivant

Théorème 4.1.4 *La chaîne de Markov induite $\{N_1(n), N_2(n), n \in N\}$ est ergodique si et seulement si $\rho < 1$*

Preuve

La condition suffisante : On utilise le critère de FOSTER (réf 25)

4.2 Distribution stationnaire des états du système

Notons par :

$$\begin{aligned} P_{Inm} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = I, N_1(t) = 0, N_2(t) = m\} \\ P_{Snm}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} P\{C(t) = S, \xi_1(t) < x, N_1(t) = n, N_2(t) = m\} \\ P_{Rnm}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} P\{C(t) = R, \xi_2(t) < x, N_1(t) = n, N_2(t) = m\} \end{aligned}$$

Dans cette section nous étudions les distribution stationnaire des états du système(avec $m \geq 0$).

$$(\lambda + m\mu)P_{I0m} = \int_0^\infty P_{S0m}(x)\beta(x)dx + \int_0^\infty P_{R0m}(x)\gamma(x)dx \quad n = 0 \quad (1)$$

$$P_{Inm} = 0 \quad n \geq 1,$$

$$P_{Snm}(x) = -(\lambda + \theta + \beta(x))P_{Snm}(x) + \lambda_1(1 - \delta_{n0})P_{S_{n-1}m}(x) + \lambda_2(1 - \delta_{m0})P_{S_{nm-1}}(x) \quad (2)$$

$$P_{Rnm}(x) = -(\lambda + \gamma(x))P_{Rnm}(x) + \lambda_1(1 - \delta_{n0})P_{R_{n-1}m}(x) + \lambda_2(1 - \delta_{m0})P_{R_{nm-1}}(x) \quad (3)$$

$$P_{Snm}(0) = \lambda P_{Inm}\delta_{n0} + (m+1)\mu P_{Inm+1}\delta_{n0} + \int_0^\infty P_{S_{n+1}m}(x)\beta(x)dx + \int_0^\infty P_{R_{n+1}m}(x)\gamma(x)dx \quad (4)$$

$$P_{Rnm}(0) = \theta \int_0^\infty P_{Snm}(x)dx \quad n \geq 0 \quad (5)$$

où :

$$\beta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}, \gamma(x) = \frac{r(x)}{1 - R(x)} \text{ et } \delta_{n0} \text{ est le produit de Kronecker.}$$

Théorème 4.2.5 *Si $\rho = \rho_1 + \rho_2 < 1$, le système est en régime stationnaire et les fonctions génératrices de la distribution conjointe de l'état du serveur et le nombre des deux types de clients dans la file d'attente et l'orbite respectivement sont données par :*

$$\begin{aligned} P_I(z_2) &= \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{I,0,m} \\ &= (1 - \rho_1 - \rho_2) \times \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - h(v)}{(h(v) - v)} \right\} dv \\ P_S(z_1, z_2) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{S,n,m}(x) \\ &= \lambda \Psi(z_1, z_2) P_I(z_2) \tilde{\tilde{B}}(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta) \\ P_R(z_1, z_2) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{R,n,m}(x) \\ &= \theta \lambda \Psi(z_1, z_2) P_I(z_2) \tilde{\tilde{B}}(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta) \tilde{\tilde{R}}(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2) \end{aligned}$$

où :

$$\Psi(z_1, z_2) = \frac{(z_1 - 1)(h(z_2) - z_2) + (z_1 - z_2)(1 - h(z_2))}{(h(z_2) - z_2)(z_1 - K(z_1, z_2))}.$$

L'équation $z_1 = K(z_1, z_2)$ admet une solution unique $z_1 = h(z_2)$ dans l'intervalle $[0, 1]$.

et $\rho_i = \lambda_i(1 + \theta\gamma_1)\tilde{B}(\theta)$. (réf [22])

Preuve

Nous définissons les fonctions génératrices suivantes :

$$P_I(z_2) = \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{I0m} \quad (1')$$

$$P_{S,n}(z_2, x) = \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{Snm}(x) \quad (2')$$

$$P_S(z_1, z_2, x) = \sum_{n \geq 0} z_1^n P_{S,n}(z_2, x) \quad (3')$$

$$P_{R,n}(z_2, x) = \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{Rnm}(x) \quad (4')$$

$$P_R(z_1, z_2, x) = \sum_{n \geq 0} z_1^n P_{R,n}(z_2, x) \quad (5')$$

En multipliant les deux membres de l'équations (1) par z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} (\lambda + m\mu) z_2^m P_{I0m} &= \sum_{m \geq 0} z_2^m \int_0^\infty P_{S0m}(x) \beta(x) dx \\ &\quad + \sum_{m \geq 0} z_2^m \int_0^\infty P_{R0m}(x) \gamma(x) dx \\ \lambda \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{I0m} + \mu z_2 \sum_{m \geq 0} m z_2^{m-1} P_{I0m} &= \int_0^\infty \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{S0m}(x) \beta(x) dx \\ &\quad + \int_0^\infty \sum_{m \geq 0} z_2^m P_{R0m}(x) \gamma(x) dx \\ \lambda P_I(z_2) + \mu z_2 P_{I'}(z_2) &= \int_0^\infty P_{S,0}(z_2, x) \beta(x) dx + \int_0^\infty P_{R,0}(z_2, x) \gamma(x) dx \end{aligned} \quad (6)$$

En multipliant les deux membres de l'équations (2) par z_1^n et z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{Snm}(x) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} -(\lambda + \theta + \beta(x)) z_1^n z_2^m P_{Snm}(x) + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \lambda_1 z_1^n z_2^m P_{S_{n-1}m}(x) \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \lambda_2 z_1^n z_2^m P_{Snm-1}(x) \\
&= -(\lambda + \theta + \beta(x)) \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{Snm}(x) + \lambda_1 z_1 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^{n-1} z_2^m P_{S_{n-1}m}(x) \\
&\quad + \lambda_2 z_2 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^{m-1} P_{Snm-1}(x) \\
&= -(\lambda + \theta + \beta(x)) P_S(z_1, z_2, x) + \lambda_1 z_1 P_S(z_1, z_2, x) + \lambda_2 z_2 P_S(z_1, z_2, x) \\
P_{I_S}(z_1, z_2, x) &= -(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta + \beta(x)) P_S(z_1, z_2, x) \tag{7}
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équations (3) par z_1^n et z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{Rnm}(x) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} -(\lambda + \gamma(x)) z_1^n z_2^m P_{Rnm}(x) + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \lambda_1 z_1^n z_2^m P_{R_{n-1}m}(x) \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \lambda_2 z_1^n z_2^m P_{Rnm-1}(x) \\
&= -(\lambda + \gamma(x)) \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{Rnm}(x) + \lambda_1 z_1 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^{n-1} z_2^m P_{R_{n-1}m}(x) \\
&\quad + \lambda_2 z_2 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^{m-1} P_{Rnm-1}(x) \\
&= -(\lambda + \gamma(x)) P_R(z_1, z_2, x) + \lambda_1 z_1 P_R(z_1, z_2, x) + \lambda_2 z_2 P_R(z_1, z_2, x) \\
P_{I_R}(z_1, z_2, x) &= -(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \gamma(x)) P_R(z_1, z_2, x) \tag{8}
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équations (4) par z_1^n et z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{Snm}(0) &= \lambda \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{Inm} \delta_{n0} + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} (m+1) \mu z_1^n z_2^m P_{Inm+1} \delta_{n0} \\
&+ \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \int_0^\infty z_1^n z_2^m (P_{S_{n+1m}}(x) \beta(x)) dx + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \int_0^\infty z_1^n z_2^m (P_{R_{n+1m}}(x) \gamma(x)) dx \\
&= \lambda P_I(z_2) + \sum_{m \geq 0} (m+1) \mu z_2^m P_{Inm+1} \\
&+ \frac{1}{z_1} \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m (P_{S_{n+1m}}(x) \beta(x)) dx + \frac{1}{z_1} \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m (P_{R_{n+1m}}(x) \gamma(x)) dx \\
&= \lambda P_I(z_2) + \mu P_I(z_2) + \frac{1}{z_1} \int_0^\infty (P_S(z_1, z_2, x) - P_S(0, z_2, x)) \beta(x) dx \\
&+ \frac{1}{z_1} \int_0^\infty (P_R(z_1, z_2, x) - P_R(0, z_2, x)) \gamma(x) dx \\
z_1 P_S(z_1, z_2, 0) &= \lambda z_1 P_I(z_2) + \mu z_1 P_I(z_2) + \int_0^\infty (P_S(z_1, z_2, x) - P_{S,0}(z_2, x)) \beta(x) dx \\
&+ \int_0^\infty (P_R(z_1, z_2, x) - P_{R,0}(z_2, x)) \gamma(x) dx \tag{9}
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équations (5) par z_1^n et z_2^m nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{Rnm}(0) &= \theta \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \int_0^\infty z_1^n z_2^m P_{Snm}(x) dx \\
&= \theta \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} z_1^n z_2^m P_{Snm}(x) dx \\
P_R(z_1, z_2, 0) &= \theta \int_0^\infty P_S(z_1, z_2, x) dx \tag{10}
\end{aligned}$$

A partir de l'équations (7) nous trouvons que $P_S(z_1, z_2, x)$ comme suit :

$$P_S(z_1, z_2, x) = P_S(z_1, z_2, 0)[1 - B(x)] \exp \{ -(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta)x \} \tag{11}$$

A partir de l'équations (8) nous trouvons que $P_R(z_1, z_2, x)$ comme suit :

$$P_R(z_1, z_2, x) = P_R(z_1, z_2, 0)[1 - R(x)] \exp \{ -(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)x \} \tag{12}$$

En utilisant les équations (6), (9), (10), (11) et (12) nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mu[z_2 - z_1]P_I(z_2) &= \int_0^\infty P_S(z_1, z_2, x)\beta(x)dx + \int_0^\infty P_R(z_1, z_2, x)\gamma(x)dx \\ &\quad + \lambda(z_1 - 1)P_I(z_2) - z_1P_S(z_1, z_2, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu[z_2 - z_1]P_I(z_2) &= \int_0^\infty P_S(z_1, z_2, x)\beta(x)dx \\ &\quad + \int_0^\infty P_R(z_1, z_2, 0)[1 - R(x)] \exp\{-(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)x\} \gamma(x)dx \\ &\quad + \lambda[z_1 - 1]P_I(z_2) - z_1P_S(z_1, z_2, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu[z_2 - z_1]P_I(z_2) &= \int_0^\infty P_S(z_1, z_2, x)\beta(x)dx \\ &\quad + \int_0^\infty \theta \int_0^\infty P_S(z_1, z_2, x)\beta(x)dx [1 - R(x)] \exp\{-(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)x\} \gamma(x)dx \\ &\quad + \lambda(z_1 - 1)P_I(z_2) - z_1P_S(z_1, z_2, 0)\end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}\mu[z_2 - z_1]P_I(z_2) &= \int_0^\infty P_S(z_1, z_2, 0)[1 - B(x)] \exp\{-(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta)x\} \beta(x)dx \\ &\quad + \int_0^\infty \theta \int_0^\infty \{P_S(z_1, z_2, 0)[1 - B(x)] \exp\{-(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta)x\} \beta(x)dx [1 - R(x)] \\ &\quad \times \exp\{-(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)x\} \gamma(x)dx \\ &\quad + \lambda(z_1 - 1)P_I(z_2) - z_1P_S(z_1, z_2, 0)\end{aligned}$$

$$\beta^*(s) = \int_0^\infty \exp(-sx)b(x)$$

$$\text{et } \gamma^*(s) = \int_0^\infty \exp(-sx)r(x)$$

Et posons maintenant

$$K(z_1, z_2) = \theta \tilde{B}(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta) \gamma^*(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2) + \beta^*(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta)$$

$$\mu(z_2 - z_1)P_I(z_2) = \lambda(z_1 - 1)P_I(z_2) - (z_1 - K(z_1, z_2))P_S(z_1, z_2, 0) \quad (13)$$

On considère l'équation

$$z_1 - K(z_1, z_2) = 0 \quad (14)$$

Et qui s'écrit comme suit :

$$z_1 - \tilde{B}(s + \lambda - \lambda_1 z_1 + \theta) \gamma^*(s + \lambda - \lambda_1 z_1) + \beta^*(s + \lambda - \lambda_1 z_1 + \theta) = 0 \quad (15)$$

où : $s = \lambda_2 - \lambda_2 z_2$.

D'après le Lemme 4.1.1 (réf [22]) l'équation(15) donne :

$$\mu(z_2 - h(z_2))P_I(z_2) = \lambda(h(z_2) - 1)P_I(z_2) \quad (16)$$

Et

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{h(z) - 1}{z - h(z)} = \frac{\rho_2}{1 - \rho_1 - \rho_2} < \infty$$

Donc la fonction :

$$\frac{h(z) - 1}{z - h(z)}$$

est analytique dans le disque ouvert $|z| < 1$ est continue dans le disque fermé $|z| \leq 1$.

la solution d'équation (16) est :

$$P_I(z) = P_I(1) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - h(v)}{h(v) - v} \right\} dv$$

Apartir des équations (10), (11) et (13) nous obtenons :

$P_S(z_1, z_2, 0)$, $P_S(z_1, z_2, x)$, $P_R(z_1, z_2, 0)$ et $P_R(z_1, z_2, x)$.

La condition de normalisation donne :

$$P_I(1) + P_S(1, 1) + P_R(1, 1) = 1.$$

$$p_I(1) = 1 - \rho_1 - \rho_2$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} P_I(z_2) &= (1 - \rho_1 + \rho_2) \times \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - h(v)}{(h(v) - v)} \right\} dv \\ P_S(z_1, z_2) &= \lambda \Psi(z_1, z_2) P_I(z_2) \tilde{B}(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta) \\ P_R(z_1, z_2) &= \theta \lambda \Psi(z_1, z_2) P_I(z_2) \tilde{B}(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + \theta) \tilde{R}(\lambda - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2) \end{aligned}$$

où :

$$\Psi(z_1, z_2) = \frac{(z_1 - 1)(h(z_2) - z_2) + (z_1 - z_2)(1 - h(z_2))}{(h(z_2) - z_2)(z_1 - K(z_1, z_2))}.$$

4.3 Calculs des performances

Nombre moyen de clients de type 1 dans la file d'attente Le nombre moyen de clients de type 1 dans la file d'attente est donné par :

$$\bar{N}_1 = \frac{\lambda \lambda_1 \times \Upsilon}{2\theta(1 - \rho_1)}$$

Nombre moyen de clients de type 2 dans l'orbite Le nombre moyen de clients de type 2 dans l'orbite est donné par :

$$\bar{N}_2 = \frac{\lambda_2 \rho}{\mu(1 - \rho_1)} + \frac{\lambda \lambda_2 \times \Upsilon}{2\theta(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

Probabilité que le serveur est occupé La probabilité que le serveur est occupé par l'un des

deux types de clients est obtenue comme suit :

$$P \{C(t) = S\} = \rho_1 + \rho_2$$

CHAPITRE 5

SIMULATION DES MODÈLES ÉTUDIÉS DE FILES D'ATTENTE

La simulation est l'étude du comportement dynamique d'un système, grâce à un modèle que l'on évolue dans le temps. L'objectif de simulation sur ordinateur est l'évolution d'une abstraction d'un système au cours du temps afin d'aider à comprendre le fonctionnement et le comportement de ce système et à appréhender certaines de ses caractéristiques dynamiques pour l'évaluation de certaines décisions.

Dans ce qui suit, on va présenter les résultats de simulations de certains types de files d'attente avec rappels et priorité à l'aide du logiciel MATLAB ; à savoir :

M/G/1 avec Rappels.

M/G/1 avec Priorité.

M/G/1 avec Rappels et Priorité.

Nous supposons que les processus de services sont Poissonniens de taux ν dans tous les modèles à simuler.

les paramètres utilisés dans la simulation des files d'attente ci-dessus sont :

λ : Taux des arrivées des clients.

λ_1 : Taux des arrivées des clients de type 1.

λ_2 : Taux des arrivées des clients de type 2.

ν : Taux de Service.

ν_1 : Taux de Service des clients de type 1.

ν_2 : Taux de Service des clients de type 2.

μ : Taux de rappel dans l'orbite.

W : Temps moyen de Séjour.

$W1$: Temps moyen de séjour des clients de type 1.

$W2$: Temps moyen de séjour des clients de type 2.

$W(*)$: Résultat théorique du temps moyen de séjour.

$W1(*)$: Résultat théorique du Temps moyen de séjour des clients de type 1.

$W2(*)$: Résultat théorique du temps moyen de séjour des clients de type 2.

SIM : Taille de simulation (ou nombre de simulation).

Rmse : Erreur quadratique moyenne entre W et $W(*)$.

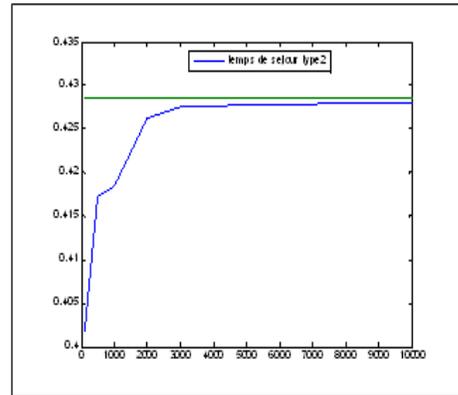
5.1 Simulation de la file d'attente M/G/1 avec rappels

Pour cette file d'attente et sous la condition de stabilité du système nous avons pris arbitrairement les paramètres suivants : $\lambda = 5$, $\nu = 9$ et $\mu = 7$.

Les résultats de la simulation sont présentés dans le tableau ci-dessous (TAB 1) et le graphe (Graphe 1) :

SIM	W	W(*)	Rmse
10	0.2716	0.4285	48 x10 ⁻⁴
100	0.4017	0.4285	24 x10 ⁻⁴
500	0.4172	0.4285	21 x10 ⁻⁴
1000	0.4185	0.4285	16 x10 ⁻⁴
2000	0.4262	0.4285	9 x10 ⁻⁴
3000	0.4276	0.4285	7 x10 ⁻⁴
5000	0.4278	0.4285	3 x10 ⁻⁴
10000	0.4281	0.4285	1 x10 ⁻⁴

TAB 1



Graphe 1

D'après le tableau ci-dessus nommé (TAB 1) nous remarquons que la valeur du temps moyens de séjour (W) devient plus performante de plus en plus que le nombre de réplifications (nombre de simulation) est important ainsi que l'erreur quadratique moyenne(Rmse) diminue lorsque la taille est grande.

Le graphe nommé (Graphe 1) trace les résultats obtenus par la simulation et nous remarquons graphiquement que le temps moyen de séjour se rapproche de sa vraie valeur (résultat théorique) lorsque la taille de la simulation est grande, Autrement dit une stabilité à partir d'un certain nombre de simulation.

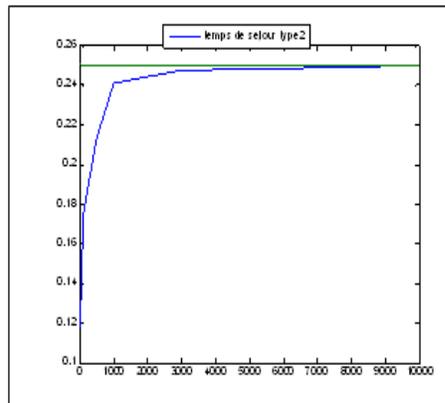
5.1.1 Cas particulier : lorsque le taux de rappel tend vers l'infini

Nous allons commencer la simulation avec les paramètres suivants : $\lambda = 5$, $\nu = 9$, et $\mu \approx \infty$ (infini).

Le tableau ci-dessous (TAB 1.1) et le graphe (Graphe 1.1) présentent les résultats de la simulation :

SIM	W	W(*)	Rmse
10	0.1186	0.2500	34×10^{-4}
100	0.1752	0.2500	21×10^{-4}
500	0.2133	0.2500	13×10^{-4}
1000	0.2411	0.2500	7×10^{-4}
2000	0.2443	0.2500	5×10^{-4}
3000	0.2476	0.2500	3×10^{-4}
5000	0.2481	0.2500	2×10^{-4}
10000	0.2498	0.2500	1×10^{-4}

TAB 1.1



Graphe 1.1

D'après le tableau ci-dessus nommé (TAB 1.1) nous observons que la valeur du temps moyens de séjour (W) devient plus exact lorsque le nombre de simulation est important ainsi que l'erreur quadratique moyenne ($Rmse$) diminue à chaque fois que nous augmentons la taille de simulation.

Le graphe précédent (Graphe 1.1) nous confirme graphiquement que le temps moyen de séjour se rapproche de sa vraie valeur (résultat théorique) lorsque la taille de la simulation est grande, Autrement dit une stabilité à partir d'un certain nombre de simulation.

Remarque

Le temps moyen de séjour W obtenu par la simulation s'approche au temps moyen de séjour de la file d'attente $M/G/1$ simple avec les paramètres $\lambda = 5$, $\nu = 9$.

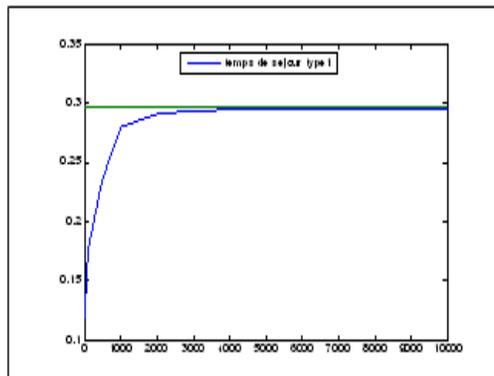
5.2 Simulation de la file d'attente $M/G/1$ avec priorité

Dans cette partie et sous la condition de stabilité du système nous avons pris comme paramètres : $\lambda_1 = 5$, $\nu_1 = 9$, $\lambda_2 = 3$ et $\nu_2 = 12$

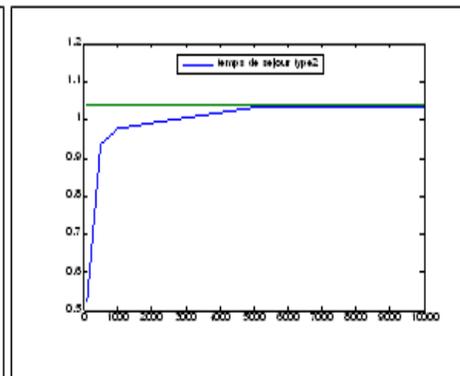
Nous présentons les résultats obtenus par la simulation dans le tableau ci-dessous (TAB 2) et les graphes (Graphe 2.1),(Graphe 2.2) :

SIM	W1	W1(*)	Rmse1	W2	W2(*)	Rmse2
10	0.1185	0.2968	78×10^{-4}	0.3779	1.0386	36×10^{-3}
100	0.1764	0.2968	56×10^{-4}	0.5254	1.0386	22×10^{-3}
500	0.2355	0.2968	32×10^{-4}	0.9343	1.0386	11×10^{-3}
1000	0.2805	0.2968	14×10^{-4}	0.9770	1.0386	9×10^{-3}
2000	0.2912	0.2968	8×10^{-4}	0.9932	1.0386	7×10^{-3}
3000	0.2941	0.2968	7×10^{-4}	1.0076	1.0386	6×10^{-3}
5000	0.2953	0.2968	3×10^{-4}	1.0330	1.0386	4×10^{-3}
10000	0.2961	0.2968	1×10^{-4}	1.0379	1.0386	1×10^{-3}

TAB 2



Graphe 2.1



Graphe 2.2

D'après le tableau ci-dessus (TAB 2) nous remarquons que la valeur du temps moyens de séjour de client du type 1 (W1) et le temps moyens de séjour de client de type 2 (W2) deviennent plus performants de plus en plus que le nombre de réplifications est important ainsi que l'erreur quadratique moyenne(Rmse1) de client de type 1 et aussi l'erreur quadratique moyenne(Rmse2) de client du type 2 se diminues lorsque la taille de la simulation est grande.

Les graphes nommés (Graphe 2.1) et (Graphe 2.2) tracent les résultats obtenus par la simulation et nous remarquons graphiquement que le temps moyen de séjour des deux types de clients nommés

(W1) et (W2) respectivement se rapprochent de ses vrais valeurs (résultats théoriques) $W1(*)$ et $W(2)$ lorsque la taille de la simulation est grande, Autrement dit une stabilité à partir d'un certain nombre de simulation.

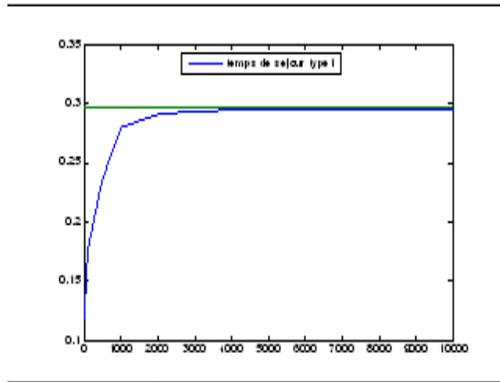
5.3 Simulation de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels et priorité

Pour cette partie de simulation et sous la condition de stabilité du système nous allons choisir comme paramètres : $\lambda_1 = 5$, $\nu_1 = 9$, $\lambda_2 = 3$, $\nu_2 = 12$ et $\mu = 7$.

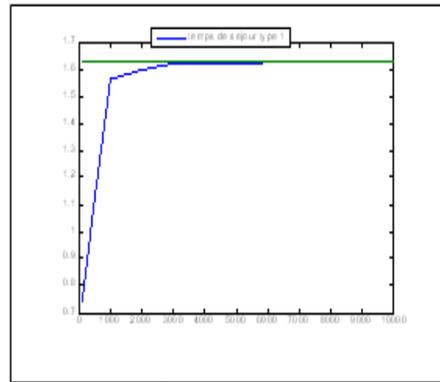
Les résultats de la simulation sont présentés dans le tableau ci-dessous (TAB 3) et les graphes (Graphe 3.1), (Graphe 3.2) :

SIM	W1	W1(*)	Rmse1	W2	W2(*)	Rmse2
10	0.1185	0.2968	77×10^{-4}	0.4179	1.6305	43×10^{-3}
100	0.1764	0.2968	53×10^{-4}	0.7389	1.6305	27×10^{-3}
500	0.2355	0.2968	29×10^{-4}	1.113	1.6305	13×10^{-3}
1000	0.2805	0.2968	12×10^{-4}	1.5632	1.6305	10×10^{-3}
2000	0.2912	0.2968	9×10^{-4}	1.5987	1.6305	8×10^{-3}
3000	0.2941	0.2968	5×10^{-4}	1.6211	1.6305	5×10^{-3}
5000	0.2953	0.2968	2×10^{-4}	1.6256	1.6305	3×10^{-3}
10000	0.2961	0.2968	1×10^{-4}	1.6283	1.6305	1×10^{-3}

TAB 3



Graphe 3.1



Graphe 3.2

Le tableau (TAB 3) nous montre que la valeur du temps moyens de séjour de client de type 1 (W1) et temps moyens de séjour de client de type 2 (W2) deviennent plus proches lorsque la taille de simulation est importante ainsi que l'erreur quadratique moyenne (Rmse1) de client de type 1 et aussi l'erreur quadratique moyenne (Rmse2) de client de type 2 se diminues lorsque la taille de simulation est grande.

Les graphes nommés (Graphe 3.1) et (Graphe 3.2) tracent les résultats obtenus par la simulation et nous remarquons graphiquement que le temps moyen de séjour des deux types de clients nommés (W1) et (W2) respectivement se rapprochent de ses vrais valeurs (résultats théoriques) $W1^*$ et $W(2)$ lorsque la taille de la simulation est grande, Autrement dit une stabilité à partir d'un certain nombre de simulation.

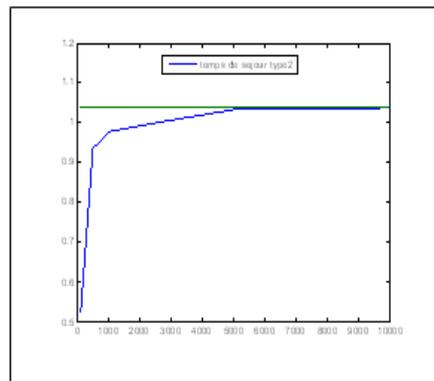
5.3.1 Cas particulier : lorsque le taux de rappel tend vers l'infini

Pour cette partie, nous allons prendre les paramètres : $\lambda_1 = 5, \nu_2 = 9, \lambda_1 = 3, \nu_2 = 12$, et $\mu \approx \infty$ (infini).

Les résultats de la simulation sont présentés dans le tableau ci-dessous (TAB 3.1.1) et le graphe (Graphe 3.1.1).

SIM	W2	W2(*)	Rmse2
10	0.3334	1.0386	46×10^{-3}
100	0.6732	1.0386	27×10^{-3}
500	0.8765	1.0386	16×10^{-3}
1000	0.9344	1.0386	13×10^{-3}
2000	0.9766	1.0386	9×10^{-3}
3000	0.9994	1.0386	7×10^{-3}
5000	1.0039	1.0386	5×10^{-3}
10000	1.0378	1.0386	1×10^{-3}

TAB 3.1



Graphe 3.1.1

Le temps moyen de séjour de clients de type 1 ($W1$) est inchangeable puisque sa formule théorique ne dépend pas de la valeur de taux de Rappel.

D'après le tableau au dessus nommé (TAB 3.1) l'erreur quadratique moyenne($Rmse2$) se diminue à chaque fois que nous augmentons la taille de la simulation.

Le graphe (Graphe 3.1.1) nous confirme que le temps moyen de séjour se rapproche de sa vraie valeur (résultat théorique) lorsque la taille de la simulation est grande, Autrement dit une stabilité à partir d'un certain nombre de simulation.

Remarque

Le temps moyen de séjour de clients de type 2 ($W2$) obtenu par la simulation est égal au temps moyen de séjour d'une file M/G/1 avec priorité avec les paramètres $\lambda = 5$, $\nu = 9$.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans la majorité des systèmes de file d'attente, la règle de traitement est du premier arrivée, premier servi (P.A.P.S), Cependant, dans plusieurs situations, cette règle est inapplicable, car les conséquences qui en résultent ne sont pas les mêmes ; par exemple pour le traitement des programmes à exécuter sur un ordinateur, qui se fait selon la règle donnant la priorité au temps d'opération le plus court.

Dans ce travail, nous avons traité les systèmes d'attente avec rappels, priorité fixe et serveur non fiable. Ce type de systèmes diffère des systèmes classiques qui ne permettent pas d'expliquer le comportement stochastique des systèmes réels de plus en plus complexes tels le système téléphoniques où les abonnés répétaient leurs appels en recomposant le numéro plusieurs fois jusqu'à l'obtention de la communication.

Nos travaux ont nécessité une profonde réflexion et une vive recherche en modélisation mathématique ainsi qu'un investissement significatif en terme de mise en oeuvre et l'implémentation sur MATLAB des files d'attente avec rappels et priorité fixe.

Cette théorie a un énorme potentiel : elle offre beaucoup de perspectives de recherche dans les systèmes de communication, réseaux, ect..., en utilisant par exemple des priorités non fixées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aissani. A : A survey an retrial queueing models.Journées des statistiques apliquées, p 1-11 ,Algérie 1994.
- [2] Artalejo. J.R : New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers, Statistica, Neerlandica 1994.
- [3] Artalejo. J.R : Analysis of $M/G/1$ queue with constant repeated attempts and server vacati on, Statistica, Neerlandica 1997.
- [4] Artalejo. J.R and A. Gomez-Corral : Retrial Queueing systems-a computational Approach,Springer. 2008.
- [5] Artalejo. J.R and Lopez-Herrero M. : The $M/G/1$ retrial queue : An information theoretic approach. Statistics and operations Research Transactions. 2005.
- [6] Artalejo. J.R : Accessible bibliography on retrial queues .Mathematical and computer modelling. 2010.
- [7] Belousova. S.V : The waiting time under heavy traffic for priority systems with semi-Markov servicing, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal. 1985.
- [8] Chakravarthy. S.R and Saligrama Agnihothi. R : A server backup model with Markovian arrivals and phase type services. European Journal of Operational Research. 2008.

-
- [9] Choi. B.D. and Chang. Y : $MAP1, MAP2/M/c$ retrial queue with the retrial group of finite capacity and geometric loss. Mathematical and Computer Modelling. 1999.
- [10] Choudhury. G and Tadj. L : An $M/G/1$ queue with two phases of service subject to the server breakdowns and delayed repair. Applied Mathematical Modelling. 2009.
- [11] Danieljan. E.A and Popov. G.A : A heavy traffic limit theorem for priority systems, Akademiya Nauk Armjan. SSR Doklady. 1980.
- [12] Doshi. B.T : Queueing systems with vacations-a survey. Queueing Systems, Theory and Applications. 1986.
- [13] Doshi. B.T : Single server queues with vacations.Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland. 1990.
- [14] Erhan Cinlar : Introduction to Stochastic Processes, New Jersey : Prentice-Hall. 1975.
- [15] Falin. G.I and Templeton. J.G.C : Retrial queues, Chapman and Hall,London 2007.
- [16] Falin. G.I Martin. D.M and Artalejo. J.R : Information theoretic approximations for the $M/G/1$ retrial queue. Acta Informatica. 1994.
- [17] Gaver. D.P : A waiting line with interrupted service including priority. Journal of Royal Statistical Society.1962.
- [18] Gross. D and Harris. C.M. : Fundamentals of Queueing Theory, John Wiley and Sons, New York. 1988.
- [19] Gross. D : Fundamentals of Queueing Theory, Wiley-Interscience,New York etc. 2008.
- [20] Janssens. G.K : The quasi-random input queueing system with repeated attempts as a model for a collision-avoidance star local area network. IEEE Trans. on Commun. 1997.
- [21] Jaiswal. N.K : Preemptive resume priority queue. Operations Research. 1961.
- [22] Jinbiao. W and Zhaotong. L : Analysis of the $M_1, M_2/G/1$ queueing system with retrial customers. Academic press, An imprint of Elsevier 2013.
- [23] Kernane. T : On the Stability of Queues with Negative Arrivals, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis,2006.
-

- [24] Kleinrock. L : Queueing systems. Vol. II "Computer applications", Wiley-Interscience, New York etc 1976.
- [25] Krishna Kumar. B and Madheswari. S : An $M/M/2$ queueing system with heterogeneous servers and multiple vacations. Mathematical and Computer Modelling. 2005.
- [26] Krishna Kumar. B : Transient Solution of an $M/M/2$ Queue with Heterogeneous Servers Subject to Catastrophes. Information and Management Sciences-New York. 2007.
- [27] Kouvatsos. D.D and Tabet-Aouel. N : A maximum entropy priority approximation for a stable $G/G/1$ queue. Acta Informatica. 1989.
- [28] Kulkarni. V.G and Choi. B.D : Retrial queue with server subject to breakdown and repairs. Queueing systems. 1990.
- [29] Kwon. S.J : Performance analysis of CDPD Sleep Mode for power conservation in Mobile End Systems. IEIC Trans. Commun. 2001.
- [30] Langaris. C and Katsaros. A : An $M/G/1$ queue with finite population and gated service discipline. J. Oper. Res. Soc. Japan. 1997.
- [31] Li Jihong and Tian Naishuo : The $M/M/1$ queue with working vacations and vacation interruptions, Systems Engineering Society of China and Springer-Verlag. 2007.
- [32] Medhi. J : Stochastic Processes, New age international, New Delhi. 1984.
- [33] Medhi. J : Stochastic models in queueing theory, Academic press, An imprint of Elsevier. 2003.
- [34] Nathan Sherman and Jevtrej Kharoufeh. : An $M/M/1$ retrial queue with unreliable server. Operations Research Letters. 2006.
- [35] Neuts. M.F : Structured Stochastic Matrices of $M/G/1$ type and their Applications. Marcel Dekker, New York. 1989.
- [36] Neuts. M.F : Algorithmic Probability, A collection of problems. Chapman and Hall, New York. 1995.
- [37] Ohmura. H and Takahashi. Y : An analysis of repeated call model with a finite number of sources. Electronics and Communications in Japan. 1985.

- [38] Shantikumar. J : On the busy period distributions of Mqueues with state-dependent arrivals and FCFS/LCFS-P service disciplines . Journal of Applied Probability. 1985.
- [39] Shin. Y.W : Transient diffusion approximation for $M/G/m/N$ queue with state dependent arrival rates. Commun. Korean Math. Soc. 1995.
- [40] Sztrik. J and Lukashuk. L : Modelling of a communication system evolving in a random environment. Acta Cybern. 1991.
- [41] Takagi. H : Queueing Analysis, A Foundation of Performance Evaluation, Vol.1 : Vacation and Priority Systems, Part1, Elsevier Science Publications B.V, Amsterdam. 1991.
- [42] Takine. T and Sengupta, B. : A single server queue with service interruptions, Queueing System. 1998.
- [43] Wang. J and Yang. D.L : An analytical model for an $M/G/1$ queueing system with a finite population. J. Dalian Univ. Tech. 1992.
- [44] Wang. J and Cao. J : Reliability analysis of the retrial queue with server break- downs and repairs. Queueing Systems. 2001.
- [45] Wang. J : An $M/G/1$ queue with second optional service and server breakdowns, Computers and Mathematics with Applications. 2004.
- [46] White. H and Christie. L : Queuing with preemptive priorities or with breakdown, Operations Research. 1958.