$N°$**D'ordre :** $07/2012 - M/MT$

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUE

Spécialité : Probabilités et Statistiques

par : MERABET Souhila

THÈME

Distributions de type «nouveau renouvellement» et applications

Soutenu publiquement, le 18/10/2012 devant le jury composé de :

M.	DJABALLAH	Khadidja	Maître de Conférence (A)	à l'USTHB	Présidente
M.	AÏSSANI	Amar	Professeur	à l'USTHB	Directeur de mémoire
M.	SAGGOU	Hafida	Maître de Conférence (A)	à l'USTHB	Examinatrice
M.	TATACHAK	Abdelkader	Maître de Conférence (A)	à l'USTHB	Examinateur
M.	SAÏDI	Ghania	Maître de Conférence (B)	à l'ENSSEA	Invitée

Remerciements

Je teins à exprimer mes vifs remerciements à monsieur AÏSSANI Amar, Professeur à l'USTHB qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses responsabilités nombreuses. Je lui suis très reconnaissante pour la liberté qu'il a bien voulu me laisser. Sa compétence, sa clairvoyance, son humanisme, m'ont beaucoup appris.

Mes cordiaux remerciements s'adressent également à Mme.DJABALLAH Khadidja, Maître de Conférence (A) à l'USTHB qui qui ma fait l'honneur d'accepter de présider le jury et a bien voulu au jugement de ce mémoire.

Je tiens à remercier vivement Mme. SAGGOU Hafida, Maître de Conférence (A) à l'USTHB pour avoir consenti d'être examinatrice de ce mémoire.

Ma gratitude à l'égard de M. TATACHAK Abdelkader, Maître de Conférence (A) à l'USTHB pour avoir acceptée de juger ce travail en tant qu'examinateur.

Je suis extrêmement reconnaissante envers Mme. SAÏDI Ghania, Maître de Conférence (B) à l'ENSSEA pour l'aide qu'elle m'a fournie à mes débuts dans la recherche et pour ses précieux conseils, pour sa grande disponibilité ainsi que son dynamisme et sa ouverture d'esprit. J'ai beaucoup appris à son contact, pour cela je désire qu'elle accepte mes profonds remerciements.

Un énorme merci à mes parents pour m'avoir toujours laissé libre de faire ce qui me plaisait et pour m'avoir encouragé dans mes choix.

Table des matières

Introduction

L'analyse de la fiabilité constitue une phase indispensable dans toute étude de sûreté de fonctionnement. A l'origine, la fiabilité concernait les systèmes à haute technologie (centrales nucléaires, aérospatial). Aujourd'hui, la fiabilité est devenue un paramètre clé de la qualité et d'aide à la décision, dans l'étude de la plupart des composants, produits et processus "grand public" : Transport, énergie, bâtiments, composants électroniques, composants mécaniques. . . .

De nombreux industriels travaillent à l'évaluation et l'amélioration de la fiabilité de leurs produits au cours de leur cycle de développement, de la conception à la mise en service (conception, fabrication et exploitation) afin de développer leurs connaissances sur le rapport Coût/Fiabilité et maîtriser les sources de défaillance.
Ainsi, la fiabilité est liée à des notions de sécurité de fonctionnement, de qualité, d'efficacité et de performance. Son objectif principal est l'analyse de la probabilité de défaillance d'un système. Les modèles de fiabilité servent à comprendre comment, pourquoi, et quand un système tombe en panne. Les propriétés stochastiques d'un modèle peuvent être utiles dans l'étude et l'estimation de différentes caractéristiques comme la durée de vie, la disponibilité, et la maintenance d'un système.

Cependant, en théorie de fiabilité, des lois appelées lois non paramétriques "de survie" ou "de vieillissement" ont été introduites pour y remédier à certains problèmes rencontrés dans la pratique tels que le manque des données, des données censurées ou aberrantes, ainsi que le choix de la loi adéquate sur la base d'un échantillon statistique.Ces lois n'ont pas une certaine allure, mais regroupent des familles de distributions ayant en commun une certaine propriété qualitative (rajeunissement, maturité et vieillissement).

La modélisation et analyse des durées de vies est un aspect important de travail statistique dans une large variété de domaines scientifique et technologiques.
Les modèles de durée du vie sont adaptés aux variables positives et destinés à étudier les

lois décrivant le temps qui s'écoule entre deux évènements : durée de vie d'un individu ou d'un système physique, durée entre le déclenchement d'une maladie et la guérison, durée d'un épisode de chômage etc. Ces modèles sont souvent utilisés pour résoudre les problèmes de données temporelles incomplètes, soumises à des perturbations dont les plus connues sont les censures et les troncatures.
En biologie ou dans le domaine médical on peut être amené à étudier une vie observée entre la naissance et la mort, mais aussi bien une maladie observée entre son début et la guérison (ou la fin), la durée d'une rémission, etc...

Les problèmes de fiabilité (temps de fonctionnement d'une machine avant la panne), de fidélisation d'un client, de durée du chômage, etc... entrent également dans cette problématique.

La notion de distributions non- paramétriques de survie paraît, pour la première fois, dans plusieurs domaines de probabilités appliquées, surtout, la fiabilité, biométrie.
Dans la littérature les classes de vieillissement telle que : IFR, IRFA, IMRL, NBU, NBUE, HNBUE... ont été introduites depuis plus de 40 ans par Barlow et Proschan(1975). Cette littérature porte sur l'étude les propriétés de conservation par rapport aux opérations de fiabilité (produit de convolution, mélange de distributions, ...), le calcul des bornes de la fonction de fiabilité et de la fonction génératrice des moments, les tests sur ces lois.
Récemment, Abouammoh et al (2000), Bhattacharjee et al (2000), Li et Xu (2008)... ont introduit divers nouveaux concepts en rapport avec le vieillissement de survie du renouvellement et par conséquent de nouvelles classes de vieillissement de type nouveau renouvellement sont déduites. Le principe consiste à comparer les durées de vie entre un élément neuf et un élément usagé par rapport à certains ordres partiels. Cela est traduit par une comparaison entre le temps résiduel d'un processus et celui de la version stationnaire.

L'objectif de ce mémoire consiste d'une part à décrire les classes introduites récemment de type NRBU, NRBUE, HNRBUE,... en terme de définitions , de propriétés de conservation par rapport au principales opérations de fiabilité, mais aussi par rapport aux ordres stochastiques. On établit également les relations d'inclusion entre ces classes , de mettre le point sur la question de trivialité de certaine classes et d'autre part présenter quelques tests comme application à ces classes.

Ce document qui comporte trois chapitres, est organisé de la manière suivante : :
– le premier chapitre, résume les concepts de la fiabilité les notions fondamentales

de la théorie de la statistique utilisée en fiabilité et ainsi que les distributions non paramétriques standard et leurs principales caractéristiques.

– Le deuxième chapitre, est consacré à la description de classes de vieillissement de type «nouvelles renouvellement» : (i) définition, (ii) caractérisation (en terme d'ordres stochastiques et en terme de relations d'inclusion entre ces classes et avec les classes standard) et (iv) conservation par rapport aux principales opérations de fiabilité.
– Le troisième chapitre porte sur la présentation de la procédure des tests pour quelques classes de vieillissement de type nouveau renouvellement et les critères de comparaison avec les tests déjà existant .

Chapitre 1

Concepts généraux de la fiabilité

Dans ce chapitre nous allons étudier les notions principales et les modèles de base de l'analyse de survie et de la fiabilité : d'abord nous définissons les fonctions permettant de décrire une distribution de survie et présenter quelques modèles paramétriques.
Nous rappellerons aussi les définitions des ordres stochastiques que nous serons amené à utiliser dans la suite ainsi que certaine propriétés classiques associées. Nous présentons les distributions non paramétriques classiques et les relations d'inclusion entre ces classes, ainsi que les principales opérations de fiabilité à savoir le mélange de distribution et le produit de convolution.

1.1 Principales caractéristiques probabilistes de la fiabilité

On considère un équipement qui commence à fonctionner à l'instant t_0. Admettons qu'à la date $t_0 = 0$ cet équipement (ou système) commence à fonctionner et qu'à la date t il se produise une panne.La variable durée de vie X de l'équipement, délai entre la date d'origine et la date de la panne est une variable aléatoire non négative, $X \in [0, \infty[$.
Considérons les notions et les notations suivantes :

1.1.1 Distribution de la durée de vie

$$F(t) = P(X \leq t)$$

Soit F la fonction de répartition de la variable X.Elle représente la probabilité de défaillance de l'équipement dans l'intervalle $(0; t)$. Nous ne considérons ici que le cas où la durée de vie X est une variable continue, c'est-à dire qu'il existe une fonction $f(x)$ appelée densité de probabilité de la variable X, et qui vérifie

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx,$$

Dans ce cas, la probabilité de panne à chaque instant est nulle.

1.1.2 Densité de la durée de vie

La densité s'obtient à partir de la fonction de répartition comme suit :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = F'(t),$$

si $F(t)$ est absolument continue (donc dérivable).

1.1.3 Fonction fiabilité ou fonction de survie

La fiabilité d'un équipement au bout d'un temps t correspond à la probabilité pour que cet équipement n'ait pas de défaillance entre 0 et l'instant t.
En désignant par X la variable aléatoire caractérisant l'instant de défaillance de l'équipement, la fiabilité s'exprime par la fonction $R(t)$, de l'anglais "*Reliability*", telle que :

$R(t) =$ Prob (qu'un équipement soit non défaillant sur la durée $[0; t]$, en supposant qu'il n'est pas défaillant à l'instant $t = 0$)
Par conséquent,

$$R(t) = \overline{F}(t) = P(X > t) = 1 - F(t)$$

1.1.4 Durée de vie résiduelle

Lorsqu' un système a bien fonctionné jusqu'à la date t, le temps d'attente de la panne est appelée la durée de survie du système au temps t (ou durée de vie résiduelle), la durée de vie résiduelle ou durée de survie d'un élément d'âge t est définie par :

$$X_t = (X - t/X > t)$$

Sa fonction de répartition F_t est :

$$\begin{aligned} F_t(x) &= P(X - t \leq x/X > t) \\ &= \frac{F(t+x) - F(t)}{\overline{F}(t)} \end{aligned}$$

1.1.5 Durée de vie moyenne

La durée de vie moyenne du système est le temps moyen de bon fonctionnement ; elle correspond à l'espérance de la durée de vie X et on la note μ.

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty t \cdot f(t)dt = \int_0^\infty \overline{F}(u)du$$

Cette durée est appelé aussi $MTTF$ (en anglais Mean Time To Failure)

1.1.6 Fonction durée de vie résiduelle moyenne

La durée de vie résiduelle moyenne d'un élément ou d'un système, dite aussi fonction MRL (en englais : Mean Residual Life) exprime l'espérance conditionelle de la durée de vie résiduelle à l'instant t, sachant que l'élément est d'âge t. Elle est définie par :

$$\mu(t) = E(X_t) = \frac{1}{\overline{F}(t)} \int_t^\infty \overline{F}(x)dx$$

Il est évident que : $\mu(0) = \mu$

1.1.7 Taux de défaillance instantané

L'écriture mathématique du taux de défaillance à l'instant t, noté $\lambda(t)$, est la suivante :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\overline{F}(t) - \overline{F}(t + \Delta t)}{\overline{F}(t)} \right)$$

Physiquement,le terme $\lambda(t) \cdot \Delta t$ mesure la probabilité qu'une défaillance d'un équipement se produise dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, sachant que cet équipement a bien fonctionné jusqu'à l'instant t.

Le taux de défaillance d'un dispositif à l'instant t est donc défini par :

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= -\frac{d\overline{F}(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\overline{F}(t)} \\
&= \frac{dF(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\overline{F}(t)} \\
&= \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}
\end{aligned}$$

Sa connaissance suffit à déterminer la fiabilité, grâce à la formule suivante :

$$\overline{F}(t) = \exp\{- \int_0^t \lambda(s)ds\}$$

1.1.8 Les différentes phases du cycle de vie d'un produit

L'évolution du taux de défaillance d'un produit pendant toute sa durée de vie est caractérisée par ce qu'on appelle en analyse de fiabilité *la courbe en baignoire*.
Elle est composée,en général des trois phases suivantes :

Phase 1 La première phase définit *la période de jeunesse*, caractérisée par une décroissance rapide du taux de défaillance.Le taux de défaillance est élevé au début de la vie du dispositif. Ensuite, il diminue assez rapidement avec le temps (taux de défaillance décroissant).

Phase 2 La deuxième phase définie *la période de vie utile* généralement très longue. Le taux de défaillance se stabilise à une valeur qu'on souhaite aussi basse que possible pendant cette période (taux de défaillance constant).

Phase 3 La dernière phase est *la période de vieillissement*, elle est caractérisée par une augmentation progressive du taux de défaillance avec l'âge du dispositif (taux de défaillance croissant). Ceci est expliqué par des phénomènes de vieillissement tels que l'usure, l'érosion, etc.

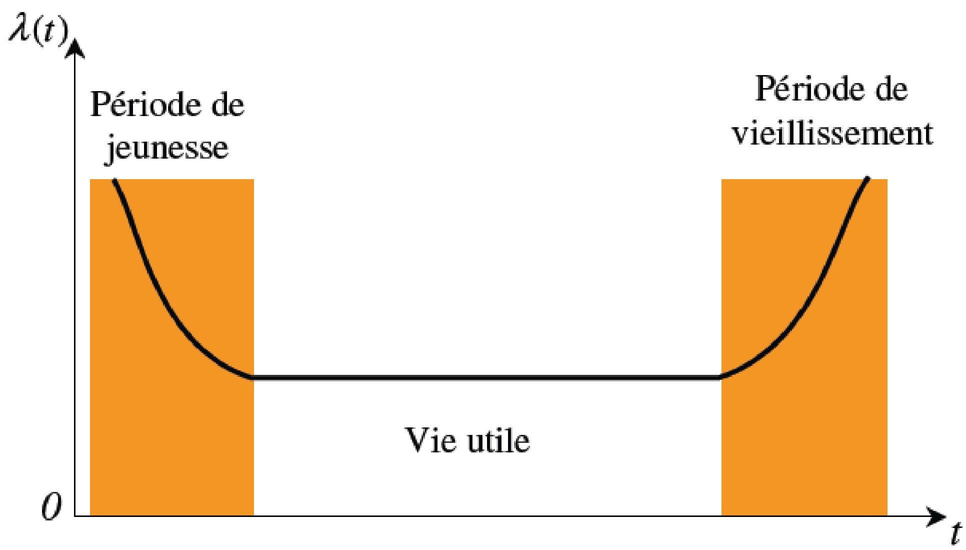

FIG. 1.1 – Courbe en baignoire

Dans la "vraie vie", on rencontre le plus souvent des lois dont la fonction de risque instantané est successivement décroissante puis croissante, ou l'inverse, avec parfois une période intermédiaire de quasi-constance. Cela donne lieu aux courbes de la forme ci-dessus, typiques de l'industrie ou des vies animales (successivement, on assiste à un rôdage avec λ décroissante puis un régime de maturité avec λ constante, puis un vieillissement avec λ croissante).

1.2 Variable d'équilibre

La pseudo-variable de X, notée $\widetilde{X}$, est une variable aléatoire de fonction densité $f_{\widetilde{X}}$ définie à partir de la queue de distribution de X par :

$$f_{\widetilde{X}} = \frac{\overline{F}(t)}{\mu},$$

La distribution d'équilibre correspondante à la distribution de durée de vie F définie par :

$$W(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(u)du, \ x \geq 0$$

Cette distribution, appelée aussi fonction de la queue intégrée, a attiré l'attention de beaucoup de chercheurs pendant ces décennies. Elle joue un rôle important en théorie de fiabilité, processus stochastiques, politiques de maintenances, et beaucoup d'autres domaines de probabilité appliquée, mais aussi dans l'étude de vieillissement.
En fait, nous imaginons qu'un système est du type suivant : soit un élément opérationnel dont la distribution de survie est $\overline{F}$; dès que cet élément tombe en panne, il sera remplacé par un nouvel élément qui fonctionne indépendamment du premier et a la même distribution de survie.
Si ce renouvellement de système continue à plusieurs reprises, alors la vie résiduelle de l'élément opérationnel à l'instant t (lorsque $t \to \infty$), est donné par la distribution de l'équilibre W.
D'où, du point de vue du vieillissement, la comparaison entre F et sa distribution d'équilibre W est significative, et des classes du vieillissement de distribution de vie peuvent être décrites au moyen de leurs distributions d'équilibre ; nous reviendrons sur ce point, dans le chapitre suivant.

Caractéristiques de la variable d'équilibre

1. La distribution de survie de la variable d'équilibre est donnée par :

$$\overline{W}(x) = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty \overline{F}(u)du, \ x \geq 0$$

2. Le taux de défaillance $\lambda_W(t)$ de W est égal à :
$$\frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{\overline{W}(x)} = \frac{\overline{F}(x)}{\int_x^\infty \overline{F}(u)du} = \frac{1}{\mu(x)},$$
En particulier, on a :
$$\lambda_W(0) = \frac{1}{\mu(0)} = \frac{1}{\mu}.$$
3. La distribution de survie d'un élément d'âge t est donnée par :
$$\begin{aligned} \overline{W}_t(x) &= \frac{\overline{W}(t+x)}{\overline{W}(t)} \\ &= \frac{\int_{t+x}^\infty \overline{F}(u)du}{\int_t^\infty \overline{F}(u)du}, \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$
4. La durée de vie résiduelle moyenne $\mu_W(t)$, d'un élément d'âge t est donné par :
$$\mu_W(t) = \int_0^\infty (\overline{W})_t(u)du = \frac{\int_t^\infty \int_x^\infty \overline{F}(u)dudx}{\int_t^\infty \overline{F}(u)du}, \qquad t > 0$$
Et particulièrement :
$$\mu_W = \frac{\int_0^\infty \int_x^\infty \overline{F}(u)dudx}{\int_0^\infty \overline{F}(u)du} = \frac{\mu^{(2)}}{2\mu}$$
Où $\mu^{(2)} = \int_0^\infty x^2 dF(x)$ est le moment d'ordre deux de la distribution F d'origine.
5. Si la variable aléatoire X a les moments d'ordre k finis, $k \geq 2$, alors la variable d'équilibre d'ordre k est définie par :
$$\widetilde{X}^{(k)} = \widetilde{\widetilde{X}^{(k-1)}},$$
et pour la densité :
$$f_{\widetilde{X^{(k)}}}(t) = \frac{\overline{F}_{\widetilde{X}^{(k-1)}}(t)}{E[\widetilde{X}^{(k-1)}]},$$
avec $\widetilde{X}^{(1)} = \widetilde{X}$ et $\widetilde{X}^{(0)} = X$.

1.3 Quelques ordres stochastiques

Les ordres stochastiques ont été utilisés pendant les dernières années, à un rythme accéléré, dans divers domaines de probabilité et statistiques telle que : théorie de la fiabilité, théorie des files d'attentes , analyse de survie, biologie, économie, assurance et science actuarielle. Comme résultat, plusieurs ordres stochastiques ont été étudiés, dans la littérature. Dans ce paragraphe, nous présentons quelques-uns de ces ordres (cf Muller et Stoyan (2002), Shaked et Shanthikumar(1994) et Shaked et Shanthikumar (2007) pour une monographie exhaustive sur ce sujet)

1.3.1 Ordre stochastique usuel

Soit X et Y deux variables aléatoires de fonctions de distribution F et G ; respectivement, et on note par $\overline{F} = 1 - F$ et $\overline{G} = 1 - G$ leurs fonctions de survie respectives.

La variable aléatoire X est dite inférieure à Y au sens de *l'ordre stochastique usuel* (noté par $X \leq_{st} Y$) si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $X \leq_{st} Y \Leftrightarrow F(u) \geq G(u), \text{pour tout u } \epsilon(-\infty, +\infty)$
2. $X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \overline{F}(u) \leq \overline{G}(u), \text{pour tout u } \epsilon(-\infty, +\infty)$

L'ordre stochastique usuel est appelé aussi ordre en distribution ou bien ordre en dominance stochastique d'ordre un.Il est l'ordre stochastique le plus naturel. Plusieurs propriétés découlent de cette définition et sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition 1 *Soient X et Y deux variables aléatoires de fonction de répartition F et G respectivement. L'ordre stochastique usuel a les propriétés suivantes :*

1. *$X \leq_{st} Y$ si et seulement s'il existe une variable aléatoire Z positive telle que Y=X+Z ;*
2. *si $X \leq_{st} Y$ alors $E[X] \leq E[Y]$;*
3. *si $X \leq_{st} Y$ et $E[X] = E[Y]$, alors X et Y ont la même loi, i.e $F = G$.*

1.3.2 Ordre en taux de défaillance

Soit X et Y deux variables aléatoires non-négative de distributions absoluments continues F et G et avec fonction du taux du hasard λ_F et λ_G, respectivement. X est dite inférieure à Y au sens de *l'ordre en taux du hasard* (noté par $X \leq_{hr} Y$) si :

$$\lambda_G(u) \leq \lambda_F(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{\overline{F}(u)}{\overline{G}(u)} \qquad \text{est décroissante en u}$$

L'ordre en taux du hasard est aussi connu dans la littérature, comme l'ordre stochastique uniforme.

1.3.3 Ordre en taux de défaillance inverse

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonction de répartition F et G respectivement. On dit que X est inférieure à Y au sens de l'ordre en taux de défaillance inverse, noté $X \leq_{rh} Y$ si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{G(x)}{F(x)} \qquad \text{est croissante en } x, \quad \forall x \geq 0$$

1.3.4 Ordre convexe

On dit que la variable aléatoire X est inférieure à la variable Y en ordre convexe, noté $X \leq_{cx} Y$, si et seulement si $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$ pour toute fonction $f : R \to R$ convexe. Grossièrement parlant, les fonctions convexes sont des fonctions qui prennent leur grandes valeurs dans les domaines de la forme $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$ pour $a < b$.
Par conséquent, si l'inégalité ci-dessus a lieu, alors Y a plus de chances de prendre des valeurs "extrêmes" que X.

1.3.5 Ordre convexe (concave) croissant

Soit X et Y deux variables aléatoires non-négative de distributions absolument continues F et G, respectivement.On dit que X est inférieure à Y au sens de *l'ordre convexe croissant* et on note $X \leq_{icx} Y$ si et seulement si :

$$\int_x^\infty \overline{F}(u)du \leq \int_x^\infty \overline{G}(u)du, \qquad \forall x$$

On dit que X est moins variable que Y (ou X est inférieure à Y au sens de l'ordre concave croissant, et on écrit $Y \leq_{icv} X$ si et seulement si :

$$\int_0^x \overline{F}(u)du \leq \int_0^x \overline{G}(u)du, \qquad \forall x$$

L'ordre concave croissant(icv) est lié à l'ordre convexe croissant comme donnée dans le théoméme suivant :

Théorème 1 (*Hendi et al* 1999) *Soit X et Y deux variables aléatoires de distributions F et G (respectivement) avec $F(0_-) = G(0_-) = 0$ et $\int_0^\infty \overline{F}(u)du = \int_0^\infty \overline{G}(u)du$ (i.e F et G ont la même moyenne),alors :*

$$X \leq_{icv} Y \Leftrightarrow Y \leq_{icx} X \text{ ou bien } F \leq_{icv} G \Leftrightarrow G \leq_{icx} F.$$

La proposition suivante tirée de livre de Müller et Stoyan (2002) montre que l'ordre convexe et l'ordre convexe croissant sont équivalents pour les variables aléatoires de même espérance.

Proposition 2 *Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $X \leq_{cx} Y$;

(ii) $X \leq_{icx} Y$ *et* $E(X) = E(Y)$.

1.3.6 Ordre en espérance mathématique

On dit que la variable aléatoire X est inférieure à la variable Y en ordre d'espérance mathématique et on note : $X \leq_E Y$ si : $E(X) \leq E(Y)$.

1.3.7 Ordre super-additif

Soit X et Y deux variables aléatoires de distributions F et G (respectivement). On dit que X est inférieure à Y au sens de *l'ordre super-additif*,on note $X \leq_{su} Y$ si et seulement si :

$$G^{-1}F(x+y) \geq G^{-1}F(x) + G^{-1}F(y), \qquad \forall x, y \geq 0$$

1.3.8 L'ordres super-additif de renouvellement

On dit que la variable aléatoire X est inférieur à la variable Y en ordre superadditif de renouvellement (en anglais *Renewal Super-additive order*) et on note : $X \leq_{rsu} Y$ si et seulement si :

$$G^{-1}W(x+t) \geq G^{-1}W(x) + G^{-1}W(t), \quad t \geq 0$$

avec $W(t) = \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^t \overline{F}(u)du$, où $\mu = E(X)$

1.3.9 Ordre en renouvellement fort

Soit X et Y deux variables aléatoires non-négative de distributions absoluments continues F et G, respectivement. On dit que X est inférieure à Y au sens de *l'ordre en renouvellement fort*, en anglais (Strongly Renewal order) et on note : $X \leq_{sr} Y$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $L = \lim_{y \to 0} y^{-1}G^{-1}F(y)$ existe ;

(ii) $\dfrac{d}{dt}G^{-1}W(t) \geq L$ pour $t \geq 0$.

avec $W(t) = \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^t \overline{F}(u)du$, où $\mu = E(X)$

1.3.10 Ordre en moyenne de vie résiduelle

Soit X et Y deux variables aléatoires de fonctions de distributions absoluments continues F et G, respectivement et de fonctions de durée de vie résiduelles moyennes μ et ν respectivement telle que :

$$\mu(t) \leq \nu(t)$$

Alors X est inférieure à Y au sens de l'ordre moyenne de vie résiduelle, et on note $X \leq_{mrl} Y$ si et seulement si :

$$\frac{\int_t^\infty \overline{F}(u)du}{\int_t^\infty \overline{G}(u)du} \qquad \text{est décroissante en t,} \quad \{\forall t \geq 0, \int_t^\infty \overline{G}(u)du > 0\}$$

$$\Leftrightarrow G(t) \int_t^\infty \overline{F}(u)du \leq \overline{F}(t) \int_t^\infty \overline{G}(u)du \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$

Les implications suivantes, entre les ordres définis précédemment, on été démontrées [cf.Whitt,1985] :

$$\begin{tikzcd}
 & & \leq_{mrl} \arrow[drr] & & \\
\leq_{hr} \arrow[urr] \arrow[dr] & & & & \leq_{E} \arrow[dl] \\
 & \leq_{st} \arrow[rr] & & \leq_{icx} & \\
 & & \leq_{cx} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \leq_{su}
\end{tikzcd}$$

1.4 Principales lois paramétriques utilisées en fiabilité

Dans ce paragraphe, nous présenterons quelques distributions de vie qui interviennent le plus fréquemment dans l'analyse des données de vie et qui sont communes à plusieurs disciplines. Nous parlerons en particuliers des lois continues. Nous énoncerons les principales propriétés de ces lois (densité de probabilité, fonctions fiabilité et taux de défaillance).

1.4.1 La loi exponentielle

Cette loi a de nombreuses applications dans plusieurs domaines. C'est une loi simple, très utilisée en fiabilité et dont le taux de défaillance est constant. Elle décrit la vie des matériels qui subissent des défaillances subites.

La densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre λ s'écrit :

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad t \geq 0$$

La fonction de fiabilité :

$$R(t) = \exp(-\lambda t)$$

Le taux de défaillance est constant dans le temps :

$$\lambda(t) = \lambda$$

La loi exponentielle est également le modèle de " *durée de vie pour un système idéal sans usure*", $\frac{1}{\lambda}$ étant l'éspérance de vie du système. En effet on peut voir que l'âge du système ne joue aucun rôle quant aux chances de survie à un horizon donné à travers la propriété spécifique suivante :

Propriété sans mémoire de la loi exponentielle :

Une propriété principale de la loi exponentielle est d'être sans mémoire ou "Memoryless property" en anglais ([Bon, 1995], [Leemis, 1994]) :

$$P(X \geq t + \Delta t / X \geq t) = \frac{\exp -\lambda(t + \Delta t)}{\exp -\lambda t} = \exp -\lambda \cdot \Delta t = P(X \geq \Delta t) \qquad t > 0,\ \Delta t > 0$$

Ce résultat montre que la loi conditionnelle de la durée de vie d'un dispositif qui a fonctionné sans tomber en panne jusqu'à l'instant t est identique à la loi de la durée de vie d'un nouveau dispositif. Ceci signifie qu'à l'instant t, le dispositif est considéré comme neuf (ou "*as good as new*" en anglais), de durée de vie exponentielle de paramètre λ. Comme résultats de cette propriété,on constate les principales caractérisations suivantes :

caractérisation 1 d'absence de mémoire : $F \in \exp(\lambda) \Leftrightarrow \lambda(t) = \lambda \quad \forall t$ i.e le risque ne change pas $\forall t$

caractérisation 2 d'absence de mémoire : $R_t(x) = R(x)$, telle que $R_t(x) = 1 - F_t(x)$ la fiabilité d'un élément ne dépend pas de son âge

1.4.2 La loi de Weibull

C'est la plus populaire des lois, utilisée dans plusieurs domaines (électronique, mécanique,..). Elle permet de modéliser en particulier de nombreuses situations d'usure de matériel. Elle caractérise le comportement du système dans les trois phases de vie : période de jeunesse, période de vie utile et période d'usure ou vieillissement.
Dans sa forme la plus générale, la distribution de Weibull dépend des trois paramètres suivants : β, η et γ. La densité de probabilité d'une loi de Weibull a pour expression :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp -\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right) \qquad t \geq \gamma$$

où : β est le paramètre de forme ($\beta > 0$)
η est le paramètre d'échelle ($\eta > 0$)
γ est le paramètre de position ($\gamma \geq 0$),représente la durée de vie minimale.
La fonction fiabilité s'écrit :

$$R(t) = \exp -\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}$$

Le taux de défaillance est donné par :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

Suivant les valeurs de β, le taux de défaillance est soit décroissant ($\beta < 1$) soit constant ($\beta = 1$), soit croissant ($\beta > 1$). La distribution de Weibull permet donc de représenter les trois périodes de la vie d'un dispositif décrites par la courbe en baignoire.
Le cas $\gamma > 0$ correspond à des dispositifs dont la probabilité de défaillance est nulle jusqu'à un certain âge γ.

1.4.3 La loi Gamma

La loi gamma est la loi de l'instant d'occurrence du α^{me} évènement dans un processus de Poisson.
Soit $\{T_i\}_{i=1,\alpha}$ le vecteur représentant les durées inter-évènements (les temps entre les défaillances successives d'un système). Si ces durées sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre β, alors le temps cumulé d'apparition de α défaillances suit une loi Gamma de paramètre (α, β). Sa densité de probabilité s'écrit :

$$f(t) = \frac{\beta^{\alpha} \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)} \qquad t \geq 0, \alpha \geq 1 \; et \; \beta \geq 0$$

Le taux de défaillance est donné par :

$$\lambda(t) = \frac{\beta^{\alpha} \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta t}}{\int_t^{\infty} \Gamma(\alpha) f(u) du}$$

La loi gamma est très utilisée dans l'approche bayésienne, elle est la conjuguée naturelle de la loi exponentielle de paramètreλ.

1.4.4 La distribution de Makeham

La fonction de survie de Makeham est :

$$\overline{F}(t) = \exp[-\alpha t + (\frac{\beta}{\mu})(e^{\mu t} - 1)], \qquad t \geq 0, \alpha, \beta, \mu > 0$$

Et sa fonction taux de défaillance est :

$$\lambda(t) = \alpha + \beta e^{\mu t}$$

Il est clair que $\lambda(t)$ est strictement croissante pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Dans la littérature, la distribution Makeham est appelée plus souvent la distribution Gompertz-Makeham. C'est une généralisation de la distribution Gompertz (cf Lai et Xie (2006)). Cette distribution est largement utilisée dans l'assurance-vie, les études de la mortalité et en général, l'analyse de survie.

1.4.5 La distribution taux de défaillance linéaire (LFR)

La fonction de survie de la distribution LFR ("*Linear Failure Rate*" en anglais) est donnée par :

$$\overline{F}(t) = \exp\{-\mu_1 t - \mu_2 t^2/2\} \quad \mu_1, \mu_2, t \geq 0,$$

avec

$$\lambda(t) = \mu_1 + \mu_2 t$$

la distribution à taux de défaillance linéaire apparaît souvent dans la littérature de fiabilité probablement à cause de sa forme simple. Ce modèle simple à deux paramètres dans la classe IFR (les classes des distributions à taux de défaillance croissant) est un cas spécial simple du modèle du taux de défaillance du second degré (voir la Section 3.4.1) et une généralisation de la distribution exponentielle dans une direction distincte du gamma et Weibull. tandis que, dans le cas IFR, gamma et Weibull exigent que le taux de défaillance soit zéro 0 à $t = 0$, le modèle du taux de défaillance linéaire a $\lambda(0) = \mu_1 > 0$, donc fournissant une légère transition du taux de défaillance constant vers la propriété IFR stricte. La distribution à taux de défaillance linéaire a été motivée par son application aux données de survie humaines (Kodlin, 1967, Carbone et al, 1967). Ses propriétés ont été étudiées par plusieurs auteurs, particulièrement Bain (1974) et Sen et Bhattacharyya(1995).

1.5 Les lois non paramétriques

Ce qui caractérise les distributions non paramétriques,en général, est le fait que La distribution F appartient à la fois, à la classe non paramétrique C et à la classe duale de C si et seulement si elle est exponentielle.

1.5.1 La classe IFR

Une distribution F est dite à taux de défaillance croissant (IFR : *Increasing Failure Rate*) si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $F_t(x)$ est décroissante en t ,$\forall t \geq 0 \ \ et \ \ \forall x \geq 0$

(ii) Le risque cumulé $\Lambda(t) = -\log \overline{F}(t)$ est convexe sur t

(iii) $\lambda(t)$ est monotone croissant en t lorsque la densité existe.

Notons que le taux de défaillance instantané (risque instantané) n'existe pas toujours, cela dépend de l'existence de la densité de probabilité f(t).

1.5.2 La classe IFRA

Une distribution F est dite à taux de défaillance croissant en moyenne (*Increasing Failure Rate in Average*) notée $IFRA$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifier :

(i) $\dfrac{-1}{t} \log \overline{F}(t)$:le risque moyen (taux de défaillance moyen) est croissant en t.
Où $-\log \overline{F}(t)$: représente le taux de défaillance cumulé i.e $\int_0^t \lambda(u)\, du$ lorsque le taux de défaillance existe.

(ii) $\overline{F}(\alpha\ t) \geq (\overline{F}(t))^{\alpha}, \qquad \forall t \geq 0, \forall \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$

1.5.3 La classe IMRL

la distribution F est dite à durée moyenne de vie résiduelle croissante, notée $IMRL$ (*Increasing Mean Residual Life*) si :

$$\mu(t) = \frac{1}{\overline{F}(t)} \int_t^{\infty} \overline{F}(u)du \qquad \text{est croissante en } t,\ \forall t \geq 0.$$

i.e la moyenne de la durée de vie résiduelle est croissante en t.
La classe $DMRL$ est définie en changeant le sens de croissance (i.e la moyenne de la durée de vie résiduelle est décroissante en t)

1.5.4 La classe GIMRL

Une variable aléatoire X est dite $IMRL$ Généralisée (*Generalized Increasing Mean Residual life*) notée $GIMRL$, si pour tout $x \geq 0$,

$$K(x,t) = \frac{\int_t^{\infty} \overline{F}(u)du}{\overline{F}(t+x)} \text{ est croissante en t.}$$

Pour $x = 0$, on a $K(0,t) = \mu(t)$ est croissante en t.On retrouve ainsi la défonition de la classe $IMRL$.

1.5.5 La classe NBU

Une distribution F ou bien une variable aléatoire X est dite NBU (*New Better than Used*) si :

$$\overline{F}(x+y) \leq \overline{F}(x)\overline{F}(y) \qquad \text{pour } x \geq 0,\ y \geq 0$$

On écrit aussi :

$$\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(y)} \leq \overline{F}(x) \qquad \text{si } F(y) > 0$$

En terme de fiabilité la propriété NBU signifie que la fiabilité d'un élément usagé d'âge y est plus petite que celle d'un élément neuf, c'est -à- dire d'âge $y = 0$.
Ce qui veut dire que la durée de vie résiduelle d'un élément d'âge y est stochastiquement inférieur à la durée de vie d'un élément neuf, i.e $\overline{F}_y(x) \leq \overline{F}(x)$.

1.5.6 La classe NBUE

Une distribution de durée de vie F est dite NBU en moyenne, notée NBUE (*New Better than Used in Expectation*) si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) F a une moyenne finie

(ii) $\int_t^\infty \overline{F}(x)dx \leq \mu\overline{F}(t) \qquad \text{pour } t \geq 0$

Notons que $\displaystyle\int_t^\infty \frac{\overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)}$ représente la moyenne de la durée de vie résiduelle d'un élément d'âge t.
Autrement dit, La distribution F est NBUE si un élément usagé d'âge t a une durée de vie résiduelle moyenne inférieure à la durée de vie d'un élément neuf.

1.5.7 La classe HNBUE

Une distribution F de moyenne finie $\mu = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx$ est dite Harmoniquement NBU(*Harmonic New Better than Used in Expectation*), notée HNBUE si :

$$\int_t^\infty \overline{F}(x)dx \leq \mu \exp(-\frac{t}{\mu}) \qquad \text{pour } t \geq 0 \tag{1.1}$$

Les classes NBUE et HNBUE ont été introduite par Rolski(1975).
La raison pour laquelle la classe HNBUE a pris cette nomination est la suivante :
Supposons que $\overline{F}(t) > 0$ *pour* $t \geq 0$ et soit

$$\mu(t) = \frac{\int_t^\infty \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)}$$

dénote la durée de vie résiduelle moyenne d'un élément d'âge t.Alors l'inégalité (1.1) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{1}{\frac{1}{t}\int_0^t [\mu(x)]^{-1}dx} \leq \mu \qquad \text{pour } t \geq 0.$$

Ce qui signifie que la valeur moyenne de l'intégrale harmonique de $\mu(x)$ est inférieure ou égale à la valeur moyenne de l'intégrale harmonique de $\mu(0) = \mu$

1.5.8 La classe NBUC

Une variable aléatoire X de distribution F est dite NBU en ordre convexe " *New Better than Used in the Convex ordering*"($NBUC$) si :

$$X_t \leq_{icx} X \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$

Autrement dit :

$$\int_x^\infty \overline{F}(t+y)\ dy \leq \overline{F}(t) \int_x^\infty \overline{F}(y)dy, \quad x, t \geq 0$$

1.5.9 La classe NBUFR

Soit F une distribution absolument continue de taux de défaillance $\lambda_F(x)$. On dit que F est NBU en taux de défaillance est "*New Better than Used in Failure Rate*" ($NBUFR$) si

$$\lambda_F(x) \geq \lambda_F(o), \quad pour \quad x \geq 0$$

1.5.10 La classe NBUFRA

F est dite "*New Better than Used in the Faillure Rate Average*" si :

$$\lambda_F(0) \leq \frac{1}{x}\int_0^x \lambda_F(t)dt = \frac{-\log \overline{F}(x)}{x}$$

Remarque 1 La définition des classes de distributions duales des classes ci-dessus telles que : *NWU (New Worse than Used), NWUE (New worse than Used in Expectation), HN-WUE (Harmonic New Worse than Used), DFR(Décreasing Mean Residual Life), DMRL (Décreasing Mean Residual Life...*,sont obtenues à partir de celles données précédemment en inversant le sens des inégalités ou le sens de croissance.

Nous avons la chaine d'implications entre les classes non paramétrique ci-dessous : adapté par Deshpande et al(1986), Kochar et Wiens(1987)et Cao et Wang (1991)

$$\begin{array}{l}IFR \Longrightarrow IFRA \Longrightarrow NBU \Longrightarrow NBUFR \Longrightarrow NBUFRA \\ \quad\Downarrow \qquad\qquad\qquad\quad \Downarrow \\ DMRL \Longrightarrow\Longrightarrow NBUC \Longrightarrow NBUE \Longrightarrow HNBUE\end{array}$$

Notons qu'une chaîne partielle $IFR \Longrightarrow IFRA \Longrightarrow NBU \Longrightarrow NBUE$ a été établie par Barlow et Proschan(1981).
Plus récemment, Saidi (2010) a donné une classification plus détaillé, qui porte d'autres type de classes qui ne font pas l'objet de ce travail.

1.6 Les principales opérations de fiabilité

1.6.1 Le produit de convolution

Lorsqu'un composant en panne est remplacé par un autre de secours, la durée de vie totale accumulée est obtenue en additionnant les deux durées de vie. Considérons donc la distribution de la somme de durées de vie indépendantes. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires positives indépendantes de fonction de distribution F_1 et F_2 respectivement.
La fonction de distribution de la somme $S = X_1 + X_2$ est le produit de convolution des fonctions F_1 et F_2 défini par :

$$F(t) = F_1 * F_2(t) = \int_0^t F_2(t-x)dF_1(x)$$

Le produit de convolution de n variables aléatoires $\{X_i, i \geq 0\}$ indépendantes de même fonction de distribution F est donné par récurrence sous la forme :

$$F^n(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x)dF(x) = \int_0^t F(t-x)dF^{(n-1)}(x)$$

1.6.2 Mélange de distribution

Soit F_α un ensemble de distributions indexeés par α, où l'indice α est une variable aléatoire de distribution G. On appelle mélange des distributions F_α relativement à G, la fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(x)dG(\alpha)$$

La distribution F_α peut représenter la fiabilité d'un composant fabriqué par la machine N°α, alors $F(x) = \sum_{\alpha=1}^{M} G(\alpha)F_\alpha(x)$, où $G(\alpha)$ est la probabilité pour qu'un composant donné soit fabriqué par la machine N°α. Une interprétation similaire peut être donnée dans le cas où α est un paramètre continu.

1.7 Processus stochastique

Un processus stochastique $X_t, t \in T$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre dans R^+ou N et définies sur un même espace de probabilité (Ω, Q, P).

Le paramètre t est généralement interprété comme le temps et appartient à un ensemble ordonné T. Si T est à valeurs discrètes on parle de processus à temps discret ; si l'ensemble des valeurs de T est continu, on parle de processus à temps continu.

La variable X_t représente l'état du processus au temps t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelé l'espace des états du processus.

Tout événement élémentaire $\omega \in \Omega$ définit une affectation de valeurs à la variable d'état $X_t = X_t(\omega)$pour tout t $\in T$. Ces valeurs représentent une évolution particulière du système appelée *trajectoire* ou *réalisation.*

Voici quelque exemples de phénomènes physiques susceptibles d'être modélisés par des processus stochastique :

- Le nombre de défaillances se produisant par jour dans un système technique ;
- Le nombre d'appels arrivant dans un central téléphonique ;
- Le temps "d'attente" d'un événement (une panne, un client,...) ;
- Le nombre de clients dans une file d'attente à un instant donné t.

1.7.1 Processus de renouvellement

Soit un flux d'événement aléatoires $\{t_n, n \geq 1\}$. La suite $\{X_n = t_n - t_{n-1}, n \geq 1\}$ forme une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
Notons pour $n \geq 2$: $F(t) = P(X_n \leq t)$ et pour $n = 1$: $F_1(t) = P(X_1 \leq t)$.

Le processus de comptage (ou de dénombrement) $N(t)$ des événement du flux dans l'intervalle $(0, t)$ est appelé processus ordinaire de renouvellement si $F(t) = F_1(t)$; il est attardé si $F(t) \neq F_1(t)$.
La fonction de renouvellement notée par $H(t) = E(N(t))$ représentant le nombre moyen

de renouvellement dans l'intervalle $(0,t)$,est solution de l'équation intégrale

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x)dF(x)$$

ou

$$H(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)dH(x)$$

Si la fonction de renouvellement a une dérivée continue alors la fonction $\rho(t) = \dfrac{dH(t)}{dt}$ représente le nombre moyen de renouvellement dans l'intervalle infiniment petit $(t, t+\Delta t)$. On l'appelle la densité de renouvellement.
Les processus de renouvellement jouent un rôle important dans la pratique, notamment en fiabilité et files d'attente.

1.8 Fonction de répartition empirique

Nous abordons ici une variable aléatoire fonctionnelle, c'est-à-dire dont les réalisations sont en fait des fonctions. Nous nous contenterons de l'étudier en un point x fixé pour rester dans le cadre des variables aléatoires prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1 *Pour tout $x \in R$, on appelle valeur de la fonction de répartition empirique en x, la statistique, notée $F_n(x)$,définie par :*

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(X_i)$$

Où $I_{(-\infty,x]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $(-\infty, x]$ à savoir

$$\begin{cases} I(-\infty,x](u) = 1, & si\ u \in (-\infty, x]\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

En d'autres termes $F_n(x)$ est la variable aléatoire « proportion » des n observations $X_1, X_2, \ldots, X_n$ prenant une valeur inférieure ou égale à x. Chaque X_i ayant une probabilité $F(x)$ d'être inférieure ou égale à x, $nF_n(x)$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, F(x))$.

En conséquence $F_n(x)$ est une v.a discréte prenant les valeurs $\frac{k}{n}$, où $k = 0, 1, \ldots, n$, avec probabilités :

$$P(F_n(x) = \frac{k}{n}) = P(nF_n(x) = k) = C_n^k[F(x)]^k[1-F(x)]^{n-k}.$$

1.9 Moment empirique d'ordre r

Nous en venons maintenant à la notion de moments, lesquels sont des espéerances mathématiques des puissances de X. Leur intérêt vient du fait qu'ils permettent souvent de caractériser les distributions. Ainsi on connait déjà que la moyenne (puissance 1) fournit une valeur centrale. Les puissances supérieures fournissent diverses caractéristiques de la forme de la distribution.

Définition 2 *On appelle moment simple d'ordre r de la v.a. X, où r est un entier positif, la valeur (si elle existe) μ_r telle que :*

$$\mu_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r dF(x). \tag{1.2}$$

Bien sûr, pour les variables aléatoires non negatives, la limite inférieure de l'intégrale peut être remplacée par 0.

Ainsi μ_1 est la moyenne de X que l'on note plus simplement μ. En fait les caractéristiques de forme reposent plutôt sur les moments centrés, c'est-à-dire sur les espérances mathématiques des puissances de $X - E(X)$, ou $X - \mu$, transformation de X appelée centrage de X.

L' estimateur naturel de ce paramètre, appelé *moment empirique d'ordre* r, est donné par le moment correspondant de la fonction de la distribution de l'échantillon F_n.

Donc μ_r est estimé par :

$$\overline{X}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Dans le but de calcul, la formule (1.2) n'est pas toujours la plus commode, surtout lorsque ni la fonction de distribution de probabilité ni la densité existent, ou lorsque il n'existe pas une expression simple pour $\overline{F}$. Dans ce cas, et pour certains buts théoriques, il est utile de noter l'expression alternative :

$$E(X^r) = r\int_0^{\infty} \overline{F}(x)x^{r-1}dx.$$

Existence des moments

Si μ_r existe alors les moments d'ordres inférieurs $\mu_{r-1}, \mu_{r-2}, \ldots, \mu_1$ existent, et donc $\mu_r^{'}$ (la dérivée) existe. En effet la fonction x^{r-1} étant dominée par la fonction x^r au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, la convergence de l'intégrale contenant x^r entraîne celle de l'intégrale contenant x^{r-1}. Notons, pour mémoire, que la variance existe si et seulement si μ_2 existe. Par ailleurs, pour l'existence du moment d'ordre r, la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^r| f(x)dx = E(|x^r|)$ est une condition suffisante.

Chapitre 2

Distributions non paramétriques de type nouveau renouvellement

Nous présentons, dans ce chapitre des nouvelles classes de distributions non paramétriques de survie, introduites récemment par plusieurs auteurs, à savoir, Abouammoh et al (2000), Li et Xu (2008), Bhattacharjee et al (2000) construites en se basant sur la comparaison des variables aléatoires X_t et $\widetilde{X}$, $\widetilde{X}_t$ et $\widetilde{X}$, ainsi que $\widetilde{X}_t$ et X au lieu des variables X_t et X. Nous discutons les propriétés de conservation et la classification de ces lois, mais aussi nous mettons le point la question de trivialité des classes de type NRBU, NRBUE, HNRBUE.

2.1 Définitions

2.1.1 La classe de distributions NRBU

Une variable aléatoire X ou bien sa distribution est dite " un nouveau renouvellement meilleur qu'un usagé" (en anglais "*New Renewal Better than Used*") notée par $NRBU$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifie :
pout tout $t \geq 0$

(i) $\overline{F_t}(x) \leq \overline{W}(x) \qquad \forall x \geq 0$

(ii) $X_t \leq_{st} \widetilde{X}$

(iii) $\mu\, \overline{F}(t+x) \leq \overline{F}(t) \int_x^{\infty} \overline{F}(u)du \qquad \forall x \geq 0$

2.1.2 La classe de distributions NRBUE

Une variable aléatoire X est dite NRBU en moyenne (en anglais "*New Renewal Better than Used in Expectation*") notée par $NRBUE$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifie : pout tout $t \geq 0$

(i) La durée de vie résiduelle moyenne est inférieure à la durée de vie moyenne de la variable renouvelée, i.e $E(X_t) \leq E(\widetilde{X}) \qquad \forall t \geq 0$

(ii) $2\ \mu \int_t^\infty \overline{F}(u)du \leq \mu_{(2)}\overline{F}(t) \qquad \forall t \geq 0$

Où μ désigne la durée de vie moyenne et $\mu_{(2)}$ est le moment d'ordre deux, les deux quantités sont supposées finies.

2.1.3 La classe de distributions HNRBUE

Dans ce paragraphe nous présentons deux définitions de la classe $HNRBUE$, la première est celle de Abouammoh et al(2000) définie en utilisant l'ordre stochastique, la deuxième donnée par Mughdadi et al (2005a) qui ont défini cette classe, en changeant l'ordre convexe croissant au lieu de l'ordre stochastique, et cela par identification aux propriétés de la classe $HNBUE$, pour contourner le problème de trivialité posé en utilisant la définition de Abouammoh et al (2000), nous reviendrons sur la spécifité de cette classe dans ce qui suit.

Définition 3 (*Abouammoh et al* (2000)) Une variable aléatoire X est dite harmoniquement NRBUE" *Harmonic New Renewal Better than Used in Expectation*" notée par $HNRBUE$ si :

$$\widetilde{X} \leq_{st} X_e(\mu_W)$$

où $X_e(\mu)$ est une variable aléatoire exponentielle de moyenne finie $\mu_W = E(\widetilde{X})$.
Autrement dit :

$$\overline{W}_F(t) \leq \exp -(\frac{t}{\mu_W})$$

telle que *:* $\exp -(\frac{t}{\mu_W})$ est la fonction de survie d'une variable aléatoire exponentielle de moyenne μ_W*.*

Définition 4 (*Mughdadi et al*(2005a)) Une variable aléatoire X est dite harmoniquement NRBUE " *Harmonic New Renewal Better than Used in Expectation*" notée par $HNRBUE$ si :

$$\widetilde{X} \leq_{icx} X_e(\mu_W)$$

Où $X_e(\mu_W)$ est une variable aléatoire exponentielle de même moyenne que la variable renouvelée, c'est-à-dire $\mu_W = E(\widetilde{X})$.
Ce qui est equivalent à :

$$\int_t^\infty \overline{W}_F(u)du \leq \mu_W \exp -(\frac{t}{\mu_W})$$

2.1.4 La classe de distributions NBRU

Une variable aléatoire X de moyenne finie μ est dite" un nouveau élément meilleur qu'un usagé de renouvellement" (en anglais "*New Better than Renewal Used*" notée $NBRU$ si

$$\widetilde{X}_t \leq_{st} X$$

Autrement dit :

$$\int_{x+t}^{\infty} \overline{F}(u)du \leq \overline{F}(x) \int_{t}^{\infty} \overline{F}(u)du, \qquad \forall x, t \geq 0$$

Cette classe correspond à la classe $NBUC$ définie par Cao et Wang (1991), et est appelée aussi $NBEU$ (*New is Better than Equilibrium Used*) dans Mugdadi et al (2005b)

2.1.5 La classe de distributions NBRUE

Une variable aléatoire Xest dite NBRU en moyenne (en anglais "*New Better than Renewal Used in Expectation*")notée $NBRUE$ si :

$$E(\widetilde{X}_t) \leq E(X)$$

i.e

$$\int_{t}^{\infty} \Big(\int_{x}^{\infty} \overline{F}(u)du\Big)dx \leq \mu \int_{t}^{\infty} \overline{F}(u)du, \qquad \forall x, t \geq 0$$

2.1.6 La classe de distributions HNBRUE

Une variable aléatoire X ou bien sa distribution est dite Harmoniquement NBRUE (en anglais "*Harmonic New Better than Renewal Used in Expectation*") notée $HNBRUE$ si et seulement si :

$$\int_{t}^{\infty} \int_{x}^{\infty} \overline{F}(u)dudx \leq \exp -(\frac{t}{\mu}) \int_{0}^{\infty} \int_{x}^{\infty} \overline{F}(u)dudx \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.1}$$

Avec une petite manipulation algébrique, (2.1) peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{1}{t} \int_{0}^{t} \frac{1}{\mu_W(y)} dy \geq \frac{1}{\mu}$$

2.1.7 La classe de distributions RNBU

Une variable aléatoire X ou bien sa distribution est dite NBU renouvelée (en anglais "*Renewal New Better than Renewal Used* ") notée par $RNBU$ si : pour tout $t \geq 0$,

$$\overline{W}_F(t+x) \leq \overline{W}_F(x)\ \overline{W}_F(t)$$

Autrement dit :

$$\int_{x+t}^{\infty} \overline{F}(u)du \leq \frac{1}{\mu} \left(\int_{x}^{\infty} \overline{F}(u)du \right) \left(\int_{t}^{\infty} \overline{F}(u)du \right)$$

2.1.8 La classe de distributions RNBUE

Une variable aléatoire X ou bien sa distribution est dite NBU renouvelée en moyenne (en anglais "*Renewal New Better than Renewal Used in Expectation*"), notée par $RNBUE$ si : pout tout $t \geq 0$,

$$E(\widetilde{X}_t) \leq E(\widetilde{X})$$

Autrement dit :

$$2\mu \int_{x}^{\infty} \int_{u}^{\infty} \overline{F}(w)dw\ du \leq \mu_{(2)} \int_{x}^{\infty} \overline{F}(u)du$$

Remarque 2

- *les classes $NRBU$, $NRBUE$ figurent dans Mugdadi et al (2005b) sous l'appelation $NEBU$(New Equilibrium is Better than Used), $NEBUE$ (New Equilibrium is Better than Used in Expectation)respectivement.*
- *les classes $HNRBUE$, $RNBU$, $RNBUE$ figurent dans l'article de Yonglu et Xiaoling (1997) sous l'appelation de $EHNBUE$(Equilibrium distribution Harmonic New Better than Used in Expectation), $ENBU$ (Equilibrium distribution New Better than Used), $ENBUE$ (Equilibrium distribution New Better than Used in Expectation) respectivement.*

2.1.9 La classe de distributions NBRU$_{rh}$

Cette nouvelle notion de vieillissement est définie par Li et Xu (2008) et figurait déjà sous une forme implicite dans Klefsjö (1982).
Une variable aléatoire X ou bien sa distribution est dite NBRU en taux de hasard inversé (en anglais "*New Better than Renewal Used in the Reversed Hazard Rate*"), notée par $NBRU_{rh}$ si :

$$\frac{F(t)}{\int_0^t \overline{F}(u)du} \text{ est décroissante en t,} \qquad \forall t \geq 0.$$

2.1.10 La classe de distributions NBURFR

Une variable aléatoire X ou bien sa distribution F sur $[0, \infty)$ de taux de défaillance $\lambda_F(t)$ est dite NBU en taux de défaillance renouvelé (en anglais "*New Better than Used*

Renewal Failure Rate") notée $NBURFR$ si :

$$\lambda_F(0) \leq \lambda_W(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

2.1.11 La classe de distributions NBARFR

une variable aléatoire durée de vie X de distribution F définit sur $[0, \infty)$ de taux de défaillance $\lambda_F(t)$ est dite "New Better than Average in Renewal Failure Rate ", notée NBARFR si :

$$\lambda_F(0) \leq t^{-1} \int_0^t \lambda_W(u)du \qquad \forall t \geq 0.$$

2.1.12 La classe RIFRA

Une variable aléatoire X ou bien sa distribution F est dite à taux de défaillance renouvelé croissant en moyenne (*Renewal Increasing Failure Rate in Average*) notée $RIFRA$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifier(W(t) est la distribution d'équilibre correspondante à la variable X) :

(i) $\dfrac{-1}{t} \log \overline{W}(t)$: le risque renouvelé moyen (taux de défaillance renouvelé moyen) est croissant en t.
Où $-\log \overline{W}(t)$: représente le taux de défaillance renouvelé cumulé i.e $\int_0^t \lambda_W(u)\ du$ lorsque le taux de défaillance renouvelé existe.

(ii) $W(\alpha\ t) \geq (W(t))^{\alpha}, \qquad \forall t \geq 0, \qquad \forall \alpha, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$

Remarque 3 La définition des classes de distributions duales des classes définies précédemment telles que : *NRWU (New Renewal Worse than Used), NRWUE (New Renewal worse than Used in Expectation), HNRWUE (Harmonic New Renewal Worse than Used), NWRU (New Worse than Renewal Used),...* sont obtenues à partir de celles données précédemment en inversant le sens des inégalités.

2.2 Caractérisation des distributions non paramétriques de renouvellement en terme d'ordres stochastiques

Les classes de distributions non paramétriques de type nouveau renouvellement peuvent être caractérisées par une comparaison stochastique entre deux des variables, l'une à l'état d'équilibre et l'autre à l'état d'origine et cela à deux instant différent : l'instant initial et l'instant t. Autrement dit, on compare X et $\widetilde{X}_t$, ou bien $\widetilde{X}$ et X_t, ou encore $\widetilde{X}$ et $\widetilde{X}_t$.

La caractérisation des distributions non paramétriques de survie en terme d'ordres stochastiques a été établie par plusieur auteurs, à savoir Abouammoh et al (2000), Li et Xu (2008), Bhattacharjee et al (2000), Mugdadi et al (2005a).

Saidi (2010) a donnée un recapitulatif des caractérisations des distributions non paramétriques de survie en terme d'ordres stochastiques y compris les classes de renouvellement. les caractérisations concernant ces dernières classes en terme d'ordres stochastiques sont données dans le théorème suivant.

Théorème 2 *Soient X la durée de vie d'un élément, X_t la durée de vie résiduelle, $\widetilde{X}$ est la variable d'équilibre. Alors,*

(1) X *est NRBU ssi* :$X_t \leq_{st} \widetilde{X}$

(2) X *est NRBUE ssi* :$X_t \leq_{E} \widetilde{X}$

(3) X *est HNRBUE ssi* :$\widetilde{X} \leq_{icx} Y$ *où* Y *est une v.a exponentielle de moyenne* μ_W

(4) X *est NBRU ssi* :$\widetilde{X_t} \leq_{st} X$

(5) X *est NBRUE ssi* :$\widetilde{X_t} \leq_{E} X$

(6) X *est NBRUE ssi* :$\widetilde{X} \leq_{icx} X$

(7) X *est HNBRUE ssi* :$\widetilde{X_t} \leq_{icx} Z$ *où* Z *est une v.a exponentielle de moyenne* μ

(8) X *est RNBU ssi* :$\widetilde{X_t} \leq_{st} \widetilde{X}$

(9) X *est RNBUE ssi* :$\widetilde{X_t} \leq_{E} \widetilde{X}$

(10) X *est* $NBRU_{rh}$ *ssi* :$\widetilde{X} \leq_{rh} X$

(11) X *est NBRU ssi* :$X \leq_{rsu} Z$ *où* Z *est une v.a exponentielle de moyenne* μ

(12) X *est NBURFR ssi* :$X \leq_{sr} Z$ *où* Z *est une v.a exponentielle de moyenne* μ

Preuve. Pour 1, 2, 3, 4 , 5, 8, 9 ce sont des résultats immédiats qui découlent des définitions de ces classes.

$$\begin{aligned} \text{6) X est NBRUE} &\Leftrightarrow E(\widetilde{X_t}) \leq \mu \qquad t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \int_t^\infty \overline{W}(u)du \leq \int_t^\infty \overline{F}(u)du \qquad t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \widetilde{X} \leq_{icx} X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{7) X est HNBRUE} &\Leftrightarrow \int_t^\infty \int_x^\infty \overline{F}(u)du\, dx \leq \exp -(\frac{t}{\mu}) \int_0^\infty \int_x^\infty \overline{F}(u)du\, dx \qquad \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \int_t^\infty \overline{W}(u)du \leq \exp -(\frac{t}{\mu}) \int_0^\infty \overline{W}(u)du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{11) X est NBRU} \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{x+t}^{\infty} \overline{F}(u)du \leq \overline{F}(x) \int_{t}^{\infty} \overline{F}(u)du, \qquad \forall x, t \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{W}(t+x) \leq \overline{F}(x)\, \overline{W}(t) \\
&\Leftrightarrow \quad -\log \overline{W}(t+x) \geq -\log \overline{F}(x) - \log \overline{W}(t) \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

D'autre part nous avons : Z est une variable aléatoire exponentielle de moyenne μ
C'est à dire de distribution

$$G(t) = 1 - \exp(-\mu t), \quad \mu > 0, \quad t \geq 0,$$

Alors

$$G^{-1}(t) = -\mu^{-1} \log(1-t)$$

Cela veut dire :

$$G^{-1}F(t) = -\mu^{-1} \log \overline{F}(t) \qquad (2.3)$$

$$G^{-1}W(t+x) = -\mu^{-1} \log \overline{W}(t+x) \qquad (2.4)$$

En Substituant les équations (2.3),(2.4) dans l'équation (2.2),on obtient :

$$G^{-1}W(t+x) \geq G^{-1}F(x) + G^{-1}W(t)$$

D'où :

$X \leq_{rsu} Z$ où Z est une v.a exponentielle de moyenne μ. ■

Proposition 3 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est HNRBUE*

(ii) *$\widetilde{X} \leq_{icx} Y$ où Y est une v.a exponentielle de moyenne μ_W*

(iii) *$\widetilde{X}^{(2)} \leq_{st} Y$ où Y est une v.a exponentielle de moyenne μ_W*

Preuve. Nous avons par définition :

$$\begin{aligned}
\text{X est HNRBUE} \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{t}^{\infty} \overline{W}(u)du \leq \mu_W \exp -(\frac{t}{\mu_W}) \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{X} \leq_{icx} Y \qquad \text{où Y est une v.a exponentielle de moyenne } \mu_W \\
&\Leftrightarrow \quad \mu_W \int_{t}^{\infty} \overline{W}(u)\ du \leq \exp -(\frac{t}{\mu_W}) \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{X}^{(2)} \leq_{st} Y \qquad \text{où Y est une v.a exponentielle de moyenne } \mu_W. \ ■
\end{aligned}$$

Proposition 4 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est HNBRUE*

(ii) *$\widetilde{X} \leq_{icx} Z$ où Z est une v.a exponentielle de moyenne μ*

(iii) $\widetilde{X}^{(2)} \leq_{st} Y$ *où* Y *est une v.a exponentielle de moyenne* μ

Preuve. Nous avons par définition :

$$\begin{aligned}
\text{X est HNBRUE} \quad &\Leftrightarrow \quad \int_t^\infty \overline{W}(u)\ du \leq \exp -(\frac{t}{\mu}) \int_0^\infty \overline{W}(u)du \qquad \forall t \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_t^\infty \int_x^\infty \overline{F}(u)dudx \leq \exp -(\frac{t}{\mu}) \int_0^\infty \int_x^\infty \overline{F}(u)\ du\ dx \qquad \forall t \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_t^\infty \overline{W}(u)\ du \leq \exp -(\frac{t}{\mu}).\widetilde{\mu} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu_W} \int_t^\infty \overline{W}(u)\ du \leq \exp -(\frac{t}{\mu}) \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{F}_{\widetilde{X}^{(2)}}(t) \leq \exp -(\frac{t}{\mu}) \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{X}^{(2)} \leq_{st} Z \qquad \text{où Z est une v.a exponentielle de moyenne } \mu. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3 Relation d'inclusion entre la classe HNRBUE et la loi exponentielle

Mugdadi et al ont fondé leur objection à la définition de la classe HNRBUE décrite par Abouammoh et al sur les propriétés de la classe HNBUE données dans la proposition suivante et cela en raisonnant d'une façon analogue pour redéfinir la classe renouvelée.

Proposition 5 *Les assertions suivantes sont equivalentes :*

(i) X *est HNBUE*

(ii) $\widetilde{X} \leq_{st} Z$ *où* Z *est une v.a exponentielle de moyenne* μ

(iii) $X \leq_{icx} Z$ *où* Z *est une v.a exponentielle de moyenne* μ

Proposition 6 *Soit* X *une variable aléatoire non négative et continue de distribution* F *et* $F(0) = 0$. *Supposons que les moments d'ordre* 1 *et* 2 *sont finis (c'est à dire* $E(X) = \mu$ *et* $E(X^2) = \mu_{(2)}$*). Si* X *ou bien sa distribution est* $HNRBUE$ *, alors* X *a une distribution exponentielle. C'est-à-dire :*

$$\overline{F}(t) = \exp -(b\ t) \qquad \text{où} \ \ b = \frac{2\mu}{\mu_2}$$

Réciproquement une telle distribution est $HNRBUE$.

Preuve. Soit X une variable aléatoire qui possède la propriété $HNRBUE$. La définition implique que :

$$\widetilde{X} \leq_{st} Y \qquad \text{où Y est une v.a exponentielle de moyenne } \mu_W$$

En utilisant le lemme suivant, on peut écrire que X a une distribution exponentielle de moyenne μ_W.

Lemme 1 (*Shaked et Shanthikumar*(1994)) *Soit X et Y deux variables aléatoires non négatives et continues telle que :*
$X \leq_{st} Y$.Si $E(X) = E(Y)$,alors X et Y ont la même distribution.

$$\int_t^\infty \frac{\overline{F}(u)du}{\mu} = \exp -(\frac{t}{\mu_W}) \qquad \forall t \geq 0$$

La dérivation produit :

$$\overline{F}(t) = \frac{\mu}{\mu_W} \exp -(\frac{t}{\mu_W}) \qquad \text{où} \;\; \mu_W = \frac{\mu_{(2)}}{2\mu}$$

et la condition initiale $\overline{F}(0) = 1$ donne $\mu = \mu_W$. ■

En se basant sur la définition1(*Abouammoh et al*(2000)), on remarque qu'elle n'est pas consistante avec la proposition3. En fait *Bon et al*(2002) ont montré que cette définition conduit à des classes triviales au sens où elles contiennent uniquement des variables exponentielles.

Mughdadi et al (2005a) ont donné une autre définition (la définition 2) de la classe HNR-BUE, par analogie à la proposition 3. La première définition conduit à une classe triviale (l'exponentielle) et la seconde conduit à une classe non triviale (qui contient strictement l'exponentielle).

2.3.1 Relation d'inclusion entre les classes de renouvellement

Les relations entre les classes de renouvellement ont étés étudiées par plusieurs auteurs. Abouammoh et al (2000), Bon et al (2002),ont données une chaîne d'implications entre les classes NRBU,NRBUE,HNRBUE mais aussi leurs relations avec les classes $GIMRL$, $RIFRA$, et les classes de renouvellement de type $RNBU$, $RNBUE$, $RHNBUE$.

Les relations d'inclusion entre les classes de renouvellement de type $NBRU$, $NBRUE$, $HNBRUE$ ont été établie par Bhattacharjée et al (2000), ainsi que Elkahlout (2005). Toutes les relations qui existent entre ces classes sont présentées dans les théorèmes suivants :

Théorème 3

$GIMRL \Rightarrow NRBU \Rightarrow NRBUE \Rightarrow HNRBUE.$

Preuve.
1)Par définition, X est $GIMRL$ si :

$$\text{pour toute } x \geq 0, \qquad \frac{\int_t^{\infty} \overline{F}(u)du}{\overline{F}(t+x)} \nearrow \text{en t.}$$

C'est à dire

$$\frac{\int_{t+y}^{\infty} \overline{F}(u)du}{\overline{F}(t+y+x)} \geq \frac{\int_t^{\infty} \overline{F}(u)du}{\overline{F}(t+x)}$$

Posons $v = t + x$ cette inégalité devient :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \frac{\int_v^{\infty} \overline{F}(u)du}{\overline{F}(v+y)} \geq \frac{\int_0^{\infty} \overline{F}(u)du}{\overline{F}(v)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\int_v^{\infty} \overline{F}(u)du}{\int_0^{\infty} \overline{F}(u)du} \geq \frac{\overline{F}(v+y)}{\overline{F}(v)} \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{\int_v^{\infty} F(u)du}{\mu} \geq \overline{F}_t(v)$$

$$\text{i.e} \qquad \overline{W}(v) \geq \overline{F}_t(v)$$

Donc, F est $NRBU$

2)Nous avons par définition :

$$\text{X est } NRBU \Leftrightarrow X_t \leq_{st} \widetilde{X}$$

C'est à dire :

$$\overline{F}_{X_t}(x) \leq \overline{W}(x) \tag{2.5}$$

En intégrant les deux côtés de la relation (2.5) en variant t de $(0, \infty[$, on obtient :

$$\int_0^{\infty} \overline{F}_{X_t}(x)dx \leq \int_0^{\infty} \overline{W}(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \mu(t) \leq \mu_W \qquad \forall t \geq 0$$

i.e X est $NRBUE$

3)

$$\begin{aligned} \text{X est NRBUE} \quad &\Leftrightarrow \quad \mu(t) \leq_{st} \mu_W \qquad \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)} \leq \mu_W \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{F}(t)}{\int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx} \geq \frac{1}{\mu_W} \end{aligned} \tag{2.6}$$

En intégrant les deux côtés de la relation (2.6) en variant t de $(0, t[$,on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int_0^t \frac{-\overline{F}(t)}{\int_t^\infty \overline{F}(x)\ dx} \geq \int_0^t \frac{-dx}{\mu_W} \\
&\Rightarrow \log \overline{W}(t) \leq \frac{-t}{\mu_W} \\
&\Rightarrow \overline{W}(t) \leq \exp -(\frac{t}{\mu_W}) \\
&\Rightarrow \int_x^\infty \overline{W}(t)\ dt \leq \int_x^\infty \exp -(\frac{t}{\mu_W})dt \\
&\Leftrightarrow \widetilde{X} \leq_{icx} Y \qquad \text{où Y est une v.a exponentielle de moyenne } \mu_W
\end{aligned}$$

D'où X est $HNRBUE$ ■

Le thèorème suivant donne la relation entre RIFRA(IFRA renouvelé),NRBU et RNBU.

Théorème 4

(a) $RIFRA \Rightarrow RNBU$

(b) $NRBU \Rightarrow RNBU$

Preuve. Pour démontrer (a)

Soit une distribution F suposée RIFRA, cela veut dire que :

$$\text{Pour } s, t > 0 \qquad s \log \overline{W}(s+t) \leq (s+t) \log \overline{W}(s) \tag{2.7}$$
$$t \log \overline{W}(s+t) \leq (s+t) \log \overline{W}(t) \tag{2.8}$$

En faisant l'addition de (2.7) et (2.8),on obtient :

$$\begin{aligned}
&\log \overline{W}(s+t) \leq \log \overline{W}(t) + \log \overline{W}(s) \\
\Leftrightarrow\ &\log \overline{W}(s+t) \leq \log[\overline{W}(t)\ \overline{W}(s)] \\
\Leftrightarrow\ &\overline{W}(s+t) \leq \overline{W}(t)\ \overline{W}(s)
\end{aligned}$$

d'où F est $RNBU$

b) Soit une distribution F supposée NRBU, cela veut dire que :

$$\begin{aligned}
&\overline{F}_s(t) \leq \overline{W}(t) \\
\Leftrightarrow\ &\overline{F}(s+t) \leq \overline{F}(s)\ \overline{W}(t)
\end{aligned}$$

En intégrant les deux cotés par rapport à s de $[x, \infty)$,$x \geq 0$ et divisant par μ on obtient :

$$\frac{1}{\mu} \int_x^\infty \overline{F}(s+t)ds \leq \frac{1}{\mu} \int_x^\infty \overline{F}(s)\overline{W}(t)ds$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{W}(s+t) \leq \overline{W}(x)\ \overline{W}(t)$$

d'où F est RNBU. ■

Remarque 4 *On signale les équivalences suivantes :*

(i) X *est RNBU* $\Leftrightarrow \widetilde{X}$ *est* NBU

(ii) X *est RNBUE* $\Leftrightarrow \widetilde{X}$ *est* $NBUE$

(iii) X *est RHNBUE* $\Leftrightarrow \widetilde{X}$ *est* $HNBUE$

Autrement dit, la propriété RNBU correspond à la propriété NBU pour la variable d'équilibre (ie NBU renouvelé)(et de même pour RNBUE,RHNBUE correspndent respectivements aux propriétés NBUE et HNBUE renouvelées).

Théorème 5 (*Abouamoh et al* (2000))

(i) *NRBUE* $\Rightarrow$ *RNBUE*

(ii) *HNRBUE* $\Rightarrow$ *RHNBUE*

Preuve.
(i) Soit F une distribution qu'on suppose $NRBUE$.

Cela est équivalent à :

$$\begin{aligned} & \mu(t) \leq \mu_W \\ \Leftrightarrow \quad & \int_{s+t}^{\infty} \overline{F}(u)\ du \leq \mu_W\ \overline{F}(t+s) \end{aligned} \tag{2.9}$$

En intégrant les deux cotés de l'inégalité (2.9) en variant s de t à ∞ on obtient :

$$\int_t^{\infty} \int_{s+t}^{\infty} \overline{F}(u)\ du\ ds \leq \mu_W \int_t^{\infty} \overline{F}(t+s)\ ds$$

En posant $x = s + t$ et divisant par μ on obtient :

$$\mu_W(t) \leq \mu_W$$

Et cela signifie que F est $RNBUE$

(ii) Soit F une distribution possédant la proprieté $HNRBUE$.

Cela signifie d'après la définition de *Abouamoh et al* (2000) que :

$$\widetilde{X} \leq_{st} Y \qquad \text{où } Y \text{ est une v.a exponentielle de moyenne } \mu_W$$

$$\overline{W}(t) \leq exp(-\frac{t}{\mu_W})$$

En intégrant les deux cotés de l'inégalité précédente, en variant t de s à ∞, on obtient :

$$\int_s^\infty \overline{W}(t)\ dt \leq \int_s^\infty exp-(\frac{t}{\mu_W})\ dt$$

Par conséquant $\widetilde{X}$ est $HNBUE$, ou bien X est RHNBUE ■

Remarque 5 *Comme on l'a signalé plus haut la définition de* Abouamoh et al*(2000)pour la classe HNRBUE n'est pas consistante et conduit à une classe triviale, ainsi l'implication (ii) du théorème 5 est arrangée selon la définition de* Mughdadi et al*(2005),ainsi on obtient :*
(ii') HNRBUE ⇔ RHNBUE

Preuve.
D'après la définition de *Mughdadi et al*(2005),on a :

$$\begin{aligned} F \text{ est HNRBUE } &\Leftrightarrow X \leq_{icx} Y \qquad \text{où } Y \text{ est une v.a exponentielle de moyenne } \mu_W \\ &\Leftrightarrow \overline{W}(t) \leq exp(-\frac{t}{\mu_W}) \end{aligned}$$

Cela est équivalent à dire que $\widetilde{X}$ est HNBUE ou bien X est $RHNBUE$. ■

Lemme 2 *NBUE ⇒ NBRUE ⇒ HNBRUE*

Preuve.
1)Rappelons que la proprieté de veillissement standard NBUE est definie par :

$$\begin{aligned} &\mu(t) \leq \mu \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\int_t^\infty \overline{F}(u)du}{\overline{F}(t)} \leq \mu \qquad \text{pour t} \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &\int_t^\infty \overline{F}(u)du \leq \mu\overline{F}(t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

En faisant une intégration des deux cotés de l'inégalité (3.6), en variant t de x à ∞,on obtient :

$$\int_x^\infty \int_t^\infty \overline{F}(u)\ du\ dt \leq \mu \int_x^\infty \overline{F}(t)dt$$

En divisant par μ cela devient :

$$\begin{aligned}
& \int_x^\infty \overline{W}(t)\ dt \leq \mu\ \overline{W}(t) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\int_x^\infty \overline{W}(v)\ dv}{\overline{W}(t)} \leq \mu \\
\Leftrightarrow\ & \mu_W(x) \leq \mu
\end{aligned}$$

d'où X est NBRUE.

2)

$$\begin{aligned}
\text{F est NBRUE} \ \Leftrightarrow\ & \mu_W(x) \leq \mu \\
\Leftrightarrow\ & \int_x^\infty \overline{W}(u)\ du \leq \mu\ \overline{W}(x) \\
\Rightarrow\ & \frac{-\overline{W}(x)}{\int_x^\infty \overline{W}(u)\ du} \leq \frac{-1}{\mu} \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés de la relation (3.7), en variant x dans $(0, t[$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \frac{-\overline{W}(x)dx}{\int_x^\infty \overline{W}(u)du} \leq \int_0^t \frac{-dx}{\mu} \\
\Rightarrow\ & \left[\log \int_x^\infty \overline{W}(v)dv\right]_0^t \leq \frac{-t}{\mu} \\
\Rightarrow\ & \int_t^\infty \overline{W}(v)\ dv \leq \mu_W \exp(\frac{-t}{\mu}) \\
\Rightarrow\ & \int_t^\infty \int_v^\infty \overline{F}(u)\ du\ dv \leq \exp(\frac{-t}{\mu}) \int_0^\infty \int_v^\infty \overline{F}(u)\ du\ dv \\
\Leftrightarrow\ & \text{F est HNBRUE.} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Théorème 6 (*Elkahlout* 2005)

$NBU \Rightarrow NBRU \Rightarrow NBRUE \Rightarrow HNBRUE$

Preuve.
Nous donnons la démonstration de la première et la deuxième implication, la dernière implication est déjà donnée dans le théorème précédent.
1) Soit F une distribution possède la propriété NBU,i.e.

$$\overline{F}(t+x) \leq \overline{F}(t)\overline{F}(x) \qquad \forall x \geq 0, t \geq 0.$$

En intégrant les deux cotés de l'inégalité précédente, en variant t de 0 à ∞ on obtient :

$$\int_y^\infty \overline{F}(t+x)dx \leq \overline{F}(t)\int_y^\infty \overline{F}(x)dx, \qquad \forall y \geq 0.$$

Autrement dit :

$$\frac{\int_y^\infty \overline{F}(t+x)dx}{\int_y^\infty \overline{F}(x)dx} \leq \overline{F}(t), \qquad y > 0 \text{ avec } \overline{F}(y) > 0.$$

cela est equivalent à :

$$\overline{W}_t(y) \leq \overline{F}(t), \qquad y > 0 \quad \text{avec} \quad \overline{F}(y) > 0 \text{ et } \ \mu > 0.$$

Alors F est $NBRU$.

2) Soit F une distribution $NBRU$.Alors pour $s \geq 0$,$t \geq 0$

$$\overline{W}(t+s) \leq \overline{W}(s)\ \overline{F}(t)$$

En intégrant les deux cotés de l'inégalité précédente, en variant t de 0 à ∞ on obtient, :

$$\int_0^\infty \overline{W}(t+s)dt \leq \overline{W}(s)\int_0^\infty \overline{F}(t)du$$

Posons $u = t+s$, on trouve :

$$\int_s^\infty \overline{W}(u)du \leq \overline{W}(s)\ \mu, \qquad y > 0.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{\int_s^\infty \overline{W}(u)du}{\overline{W}(s)} \leq \mu, \qquad s \geq 0 \quad \text{avec} \quad \overline{W}(s) > 0.$$

Cela veut dire :

$$\mu_W(s) \leq \mu, \qquad s \geq 0.$$

Ainsi F est $NBRUE$. ■

Théorème 7 (*Abouamoh et Quamber* 2003)

(i) *NBU* $\Rightarrow$ *NBRU*

(ii) *NBRU* $\Rightarrow$ *NBUE*

Preuve.

$$\begin{aligned} \text{F est NBRU} &\Leftrightarrow \overline{W}_t(x) \leq \overline{F}(x), \qquad \forall t, x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{W}(t+x)}{\overline{W}(t)} \leq \overline{F}(x) \\ &\Leftrightarrow \overline{W}(t+x) \leq \overline{F}(x)\, \overline{W}(t) \\ &\Leftrightarrow \frac{\int_{t+x}^{\infty} \overline{F}(u)du}{\overline{F}(x)} \leq \int_t^{\infty} \overline{F}(u)du \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\int_x^{\infty} \overline{F}(u)du}{\overline{F}(x)} \leq \int_0^{\infty} \overline{F}(u)du \\ \Leftrightarrow\ & \mu(t) \leq \mu \end{aligned}$$

D'où F est NBUE. ■

Théorème 8 (*Abouammoh et Ahmed* 1992)

$NBUFR \Rightarrow NBURFR \Rightarrow NBARFR$

Preuve.
soit F une distribution de survie definie sur l'intervalle $[0, \infty)$tel que $F(0) = 0$ de densité f et de taux de défaillance $\lambda(t)$.

F est $NBUFR$ signifie :

$$\lambda_F(0) \leq \lambda_F(x) \qquad \forall x \geq 0$$

Cela est équivalent à :

$$\overline{F}(x) \leq \frac{1}{\lambda_F(0)} f(x)$$

En intégrant les deux cotés de l'inégalité précédente, de t à ∞ on obtient, :

$$\int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx \leq \frac{\overline{F}(t)}{\lambda_F(0)}$$

Alors F est NBURFR.
L'inégalité précédente peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\frac{\overline{F}(t)}{\int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx} \geq \lambda_F(0)$$

En faisant une intégration, de t à ∞ on obtient :

$$-\log \int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx \geq t\ \lambda_F(0)$$

Alors F est NBARFR. ■

2.4 Classification des lois non paramétriques de type nouveau renouvellement

Nous présentons dans ce paragraphe, un récapitulatif des relations qui existent et que nous avons pu cerné, à travers la bibliographie que nous avons consulté, entre les classes de distributions de renouvellement et les classes standards de même type.

Le diagramme suivant montre les relations entre les classes de distributions de type NBU, et NBU renouvelées.

$$\begin{tikzcd}
NBUFR \arrow[r, Rightarrow] & NBURFR \arrow[r, Rightarrow] & NBARFR & \\
NBU \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr] & NBRU \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & NBRUE \arrow[r, Rightarrow] & HNBRUE \\
 & NBUE \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ur] & HNBUE \arrow[ur] & \\
 & NBRU_{rh} \arrow[u, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

Le diagramme suivant montre les relations entre certaines classes de type renouvelé :

$$\begin{tikzcd}
GIMRL \arrow[r, Rightarrow] & NRBU \arrow[r, Rightarrow] & NRBUE \arrow[r, Rightarrow] & HNRBUE \arrow[d, Leftrightarrow] \\
RIFRA \arrow[r, Rightarrow] & RNBU \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & RNBUE \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & RHNBUE
\end{tikzcd}$$

2.5 La conservation des distributions non paramétrique de type nouveau renouvellement

Ce paragraphe est consacré aux propriétés de conservation des classes de type nouveau renouvellement, par rapport aux principales opérations de fiabilité (le produit de convolution, et le mélange de distribution).

2.5.1 Conservation par convolution

Nous présentons dans ce qui suit quelques resultats sur les propriétés de conservation des classes de type nouveau renouvellement.

Le contre exemple suivant montre que les classes de distributions de survie $NRBU$, $NRBUE$ et $HNRBUE$ ne sont pas conservées par convolution.

Exemple 1 *On considère la convolution de deux variables i.i.d de loi exponentielle de paramétre* $\lambda = 1$

$$G(t) = 1 - \exp(-t), \qquad t \geq 0$$

Le résultat de la convolution des deux distributions de survie est donné par :

$$F(t) = 1 - (1 + t)\exp(-t)$$

Par ailleurs cette distribution ne possède pas la propriété $NRBU$.

En tenant en compte des implications entre les classes $NRBU$, $NRBUE$ et $HNRBUE$,on constate que ces dernières ne sont pas conservées par convolution.

La classe duale $HNWRUE$ n'est pas conservée par convolution comme le montre le contre exemple suivant :

Exemple 2 *soit* $F(t) = \exp(-t)$ $\qquad$ *pour* $t \geq 0$

une distribution de survie qui possède la propriété $HNWRUE$.

La convolution de F *avec elle même donne la distribution suivante :*

$$G(t) = F * F(t) = 1 - (1 + t)\exp(-t), \qquad pour\ t \geq 0$$

Le taux de défaillance est donné par :

$$\lambda_G(t) = t(1 + t)^{-1}$$

Il est clair que $\lambda_G(t)$ *est un taux de défaillance strictement croissant pour* $t \geq 0$.
d'où la convolution G *n'est pas* $HNRWUE$. *Cependant nous avons ici que* F *est* $HNWRUE$.
Par conséquent, $NWRU$,$NWRUE$ *et* $HNRWUE$ *ne sont pas conservées par convolution.*

Exemple 3 *La convolution de deux unitées i.i.d exponentielles est* IFR*(suit une distribution gamma) ainsi cette distribution ne possède ni la propriètè NWRUE ni HNWRUE, alors ces classes ne sont pas conservées par convolution.*

Théorème 9 (*Abouammoh et Ahmed* 1992) *Soit* $F_i, i = 1, 2$ *deux distributions de survie absolument continues de type* $NBURFR$. *Alors la convolution* $F_1 * F_2$ *est aussi* $NBURFR$.

Preuve.(voir [*Abouammoh et Ahmed* 1992])

2.5.2 La conservation par mélange

Le contre exemple suivant montre que les classes NRBU, NRBUE et HNRBUE ne sont pas conservées par mélange général.

Exemple 4 *On considère le mélange $H(t)$ de distributions suivantes : $\overline{F}_\alpha(t) = \exp(-\alpha t)$ et $G(\alpha) = \exp(-\alpha)$, tel que :*

$$H(t) = \int_\alpha \overline{F}_\alpha(t)\ dG(\alpha) = (1+t)^{-1}$$

On peut remarquer facilement que $F_\alpha(t)$ est une distribution $NRWU$, et donc aussi $NRWUE$et $HNRWUE$, tandis que le mélange $H(t)$ possède une distribution à taux de défaillance décroissant à savoir $\lambda(t) = (1+t)^{-1}$ alors $H(t)$ n'est pas NRWU.

Remarque 6 *Les classes de distributions de survie $NRBU$, $NRBUE$ et $HNRBUE$ ne sont pas conservées par le mélange général.*

Théorème 10 *La propriété NBRUE est conservée par convolutions*

Théorème 11 *Le mélange de distributions HNWRUE de même moyenne est HNWRUE.*

Preuve.(Voir Bhattacharjée et al (2000))

Exemple 5 *Soit les distributions $F_\alpha(t) = \exp-(\alpha\ t)$ et $\overline{P}(\alpha) = \exp-(\alpha), \qquad \alpha > 0.$ Alors le mélange de distributions donné par :*

$$F(t) = \int_0^\infty F_\alpha(t) P(d\alpha) = (1+t)^{-1}$$

est une fonction de survie strictement DRF , donc cette dernière ne possède ni la propriètè NBRUE, ni HNBRUE. Donc les propriétés NBRUE et HNBRUE ne sont pas conservées par mélange.

Les classes de distributions NBURFR et NBARFR ne sont pas conservées par le mélange général , comme le montre le contre exemple suivant.

Exemple 6 *On considère le mélange de $\overline{F}_\alpha(t) = \exp(-\alpha t)$ et $H(\alpha) = \exp(-\alpha)$ qui est donné par :*

$$F(t) = \int_\alpha \overline{F}_\alpha(t)\ dH(\alpha) = (1+t)^{-1}$$

Notons que la distribution $F_\alpha(t)$ possède les propriétés NBURFR et NBARFR , alors que le mélange $F(t)$ a le taux de défaillance $\lambda(t) = (1+t)^{-1}$ qui est strictement décroissant. Par conséquent $F(t)$ n'est ni NBURFR, ni NBARFR.

Nous présentons un récapitulatif sur la conservation des classes étudiées par rapport aux principales opérations de fiabilité dans le tableau suivant.

Classes de distributions	**Produit de Convolution**	**Mélange de distribution**
NRBU	Non	Non
NRBUE	Non	Non
HNRBUE	Non	Non
NRWU	Oui	?
NRWUE	Oui	Oui
HNRWUE	Oui	?
NBRU	Oui	Non
NBRUE	Oui	Non
HNBRUE	?	Non
NWRU	Non	Non
NWRUE	Non	?
HNWRUE	Non	?
$NBRU_{rh}$	?	Non
$NWRU_{rh}$	Non	?
$NBURFR$	Oui	Non
$NBARFR$	Oui	Non

TAB. 2.1 – La conservation des distributions non paramétriques de survie de type nouveau renouvellement par rapport aux principales opérations de fiabilité.

Chapitre 3

Tests pour classes non paramétrique de type nouveau renouvellement

La problématique d'identification d'une loi non paramétrique a été largement discutée dans la littérature statistique, particulièrement en relation avec les problèmes de fiabilité.

Il existe des méthodes de tests d'ajustements (Khi-deux ou Kolmogorov) mais qui ne fonctionnent que pour les lois paramétriques du paragraphe 1.4.

En effet, bien que qualifiés de non paramétriques, les tests d'ajustements au moment de l'application concrète sur des données réelles nécessite de connaître la loi de la statistique du test (ou critère) sous l'hypothèse nulle, en particulier les paramètres. Les praticiens ont ainsi recours à l'astuce suivante : les paramètres inconnus de la loi "*paramétrique*" sont estimés avec les techniques usuelles de statistique paramétrique ponctuelle (la méthode de maximum de vraisemblance, la méthode des moment, moindre carrés ordinaire...). Cette astuce ne marche pas dans le cas présent, car l'allure "*paramétrique*" ou non de la distribution est inconnue car le but ici, n'est pas d'identifier la loi elle-même, mais seulement la classe à laquelle elle appartient. Si on utilise l'astuce qui consiste à tester une classe , disons IFR, il n'y a pas de paramètre à estimer.

Le problème de test d'exponentialité contre les alternatives différentes classes de vieillissement a vu une grande attention de la part de plusieurs auteurs : Hollander et Proschan ont développé les tests contre les alternatives NBU, NBUE(1972, 1975), Klefsj*ö* a discuté le test contre l'alternative HNBUE et Ahmed (2001) à construit un test contre les alternatives IFR, NBU, NBUE, HNBUE basé sur les inégalités des moments.

Dans ce chapitre, on se focalise notre étude sur les nouveaux tests fourni pour tester les classes non paramétriques renouvelées de survie. Nous présentons la procédure général des tests fondée sur des concepts statistiques spécifiques : les inégalités des moments, les U-statistiques, l'efficacité asymptotique de Pitman.
Dans le même esprit des travaux réalisés par Ahmed (2001), des inégalités des moments sont fournis, elles servent à construire les statistiques des tests qui reposent à leur tour sur la théorie des U-statistiques.

3.1 Les U-statistiques

La théorie de base des U-statistiques a été développée par Hoeffding(1948) et d'autres études plus détaillées sur cette théorie se trouvent dans Serfling (1980), Lee(1990), Denker(1985). L'interêt des U-statistiques provient du fait qu'elle forment une classe d'estimateurs sans biais d'un certain paramètre avec une variance minimum(Holzmam 2004).

3.1.1 Définition

soit $X_1, X_2, \ldots$une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de distribution F, on considère la "fonction paramètre" $\theta = \theta(F)$ pour laquelle il existe un estimateur sans biais qui s'exprime comme suit :

$$\theta(F) = E_F(h(X_1, \ldots, X_m)) = \int \int h(x_1, \ldots, x_m) dF(x_1) \ldots dF(x_m)$$

pour une certaine fonction $h = h(x_1, \ldots, x_m)$ appelée "*noyau*".Restant dans le cadre général, on suppose que h est symétrique. Pour le cas contraire elle peut être remplacée par le noyau symétrique suivant :

$$\frac{1}{m!} \sum_p h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$$

où $\sum_p$ est la somme sur $m!$ permutation $(i_1, \ldots, i_m)$ de $1 \ldots m$. Pour n'importe quelle noyau h, la U- statistique correspondante pour l'estimation de θ, sur la base d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de taille $n \geq m$, est obtenue en faisant une moyenne du noyau h symétriquement sur les observations :

$$U_n = U(X_1, \cdots, X_n) = \frac{1}{C_n^m} \sum_c h(X_{i_1}, \cdots, X_{i_m}) \tag{3.1}$$

Où $\sum_C$ est la somme sur C_n^m combinaison de m éléments distincts $\{i_1, \ldots, i_m\}$ parmi l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.Tout simplement U_n est un estimateur sans biais de θ.

Exemples

(i) $\theta(F)$ = *la moyenne de* $F = \mu(F) = \int x dF(x)$. *Pour le noyau* $h(x) = x$, *la U-statistique correspondante est :*

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X},$$

C'est la moyenne empirique

(ii) $\theta(F) = \mu^2(F) = [\int x dF(x)]^2$. *Pour le noyau* $h(x_1, x_2) = x_1\ x_2$, *la U-statistique correspondante est :*

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j.$$

(iii) $\theta(F)$ = *la variance de* $F = \sigma^2(F) = \int (x - \mu)^2 dF(x)$. *Pour le noyau*

$$h(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2}{2} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

La U-statistique correspondante est :

$$\begin{aligned} U(X_1, \ldots, X_n) &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(X_i, X_j) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right) \\ &= s^2. \end{aligned}$$

i.e la variance empirique.

3.1.2 La variance de la U-statistique

Considérons un noyau symmetrique $h(x_1, \ldots, x_m)$ satisfaisant

$$E[h(X_1, \ldots X_m)]^2 < \infty.$$

Alors la variance de la U-statistique U_n définie par l'expression (3.1) a une forme explicite. Pour dériver $Var(U_n)$, on a besoin de quelque notation.
pour $k = 1, \ldots m$, soit

$$\begin{aligned} h_k(x_1, \ldots, x_k) &= E[h(X_1, \ldots, X_m) | X_1 = x_1, \ldots, x_k = x_k] \\ &= E[h(x_1, \ldots, x_k, X_{k+1}, \ldots, X_m)]. \end{aligned}$$

Notons que $h_m = h$. En utilisant les propriétés des U-statistiques (la structure des U-statistiques par les martingales), on peut monter que

$$h_k(x_1, \ldots, x_k) = E[h_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, X_{k+1})].$$

On définit $\widetilde{h}_k = h_k - E[h(X_1, \ldots, X_m)]$,
$k = 1, \ldots, m$, et $\widetilde{h} = \widetilde{h}_m$. Alors, pour n'importe quelle U_n definie par(3.1) :

$$U_n - E(U_n) = \frac{1}{C_n^m} \sum_C \widetilde{h}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}).$$

Théorème 12 (*Hoeffding*1948) *Pour la U-statistique U_n donnée par l'expression* (3.1) *avec $E[h(X_1, \ldots, X_m)]^2 < \infty$,on a*

$$Var(U_n) = \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=1}^{m} C_m^k C_{n-m}^{m-k}\, \zeta_k,$$

telle que :

$$\zeta_k = Var(h_k(X_1, \ldots, X_k)).$$

Si $\zeta_m < \infty$, alors $Var(U_n) \sim m^2 \zeta_1^2 / n$, pour n grand.

Preuve.(voir *Hoeffding*1948)

Corollaire 1 *Sous les conditions du théorème* (12)*, on a*

(i) $\frac{m^2}{n}\zeta_1 \leq Var(U_n) \leq \frac{m}{n}\zeta_m$,

(ii) $(n+1)Var(U_{n+1}) \leq nVar(U_n)$ *pour tout* $n \geq m$,

(iii) *Pour tout m fixe et $k = 1, \ldots, m$, si $\zeta_j = 0$ pour $j < k$ et $\zeta_k > 0$, alors :*

$$Var(U_n) = \frac{k!(C_m^k)^2 \zeta_k}{n^k} + O(\frac{1}{n^{k+1})}.$$

3.1.3 Distribution asymptotique de la U-statistique

Considérons le noyau $h = h(x_1, \ldots, x_m)$ pour une estimation sans biais de $\theta = \theta(F) = E_F(h)$, avec $E_F(h^2) < \infty$. Soit $0 = \zeta_0 \leq \zeta_1 \leq \ldots \leq \zeta_m = Var_F(h)$ comme c'est défini ci-dessus.

On se limite au cas où $k = 1$, qui couvre la majorité des applications.Le resultat donné dans le théorème suivant a été établi par Hoeffding(1948).

Théorème 13 (*Hoeffding*1948) *Si $E_F(h^2) < \infty$ et $\zeta_1 > 0$, alors :*

$$n^{\frac{1}{2}}(U_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, m^2\zeta_1),$$

C'est à dire :

$$U_n \textit{ est asymptotiquement normale } \mathcal{N}(\theta, \frac{m^2\zeta_1}{n}) \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

3.2 Inégalités des moments

Les statistiques de test sont habituellement basées sur quelques propriétés qui caractérisent une classe de vieillissement sous H1. Une mesure $\Delta(F)$ d'écart de F depuis la distribution l'exponentielle est souvent dérivée. Parmi les propriétés usuelles on cite :

- Les inégalités des moments
- Les inégalités pour les fonctions de la survie.
- Les statistiques d'ordre.
- Les ordres partiel avec l'exponentiel.
- statistique d'echelle (Scaled) TTT.

Dans ce travail, on se restreint aux inégalités des moments qui sont à la base des tests étudiés.

Les inégalités des moments ont été étudiées dans la littérature depuis plusieurs années pour les classes de vieillissement élémentaires (Barlow et Proschan,1981).
Notons que la caractéristique marquante de ces inégalités réside dans leurs simplicité. L'intérêt des inégalités des moments a été consacré ces dernières années pour plusieurs classes. L'objectif principales de ces inégalités est de formuler les statistiques de tests, pour tester si une distribution appartient à une classe de vieillissement particulière ; malheureusement certaines ont une expression complexe.

Ahmed (2001) a présenté des inégalités des moments pour les classes IFR, NBU, $NBUE$ et $HNBUE$.
Récemment, Ahmed et Mugdadi (2004) ont fourni des inégalités pour $IFRA$, $NBUC$, $DMRL$ mais aussi des inégalités dérivées de la comparaison de la durée de vie avec la forme d'équilibre, autrement dit : les inégalités des moments des classes de renouvellement (Ahmed et Mugdadi (2005)).
Dans ce chapitre, on focalise sur les inégalités des moments pour les classes renouvelées étudiées par Abu Youssef (2004), Mahmoud et al (2005), Abdel-Aziz (2007), Stoyanov et al (2010)... en se restreingnant à certaines classes qu'on va utiliser dans la suite.

Dans ce qui suit, on suppose que les v.a X_i, i=1,...,n sont indépendantes identiquement distribuées de distribution F ; r et s sont deux entiers, dans le même esprit que le travail de Ahmed (2001), On énonce et on prouve les théorèmes suivants qui concernent les inégalités des moments des classes : $NRBU$, $RNBUE$, $HNBRUE$.

Théorème 14 *Si F est $NRBU(NRWU)$, alors :*

$$\frac{1}{(2r+2)!}\mu\ \mu_{(2r+2)}! \leq (\geq) \frac{1}{(r+1)!(r+2)!}\mu_{(r+1)}\ \mu_{(r+2)}, \qquad r \geq 1. \tag{3.2}$$

Preuve. Comme F est $NRBU$, alors d'aprés la définition de cette classe on a :

$$\mu\,\overline{F}(t+x) \leq \overline{F}(t)\int_x^{\infty}\overline{F}(u)du \qquad \forall x \geq 0 \tag{3.3}$$

où :

$$\nu(t) = \int_t^{\infty}\overline{F}(u)du.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité (3.3) par $x^{r_1}\ t^{r_2}$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ et en intégrant sur$(0,\infty)$ par rapport à x et t, on obtient :

$$\mu\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{r_1}t^{r_2}\overline{F}(x+t)dx\ dt \leq (\geq)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{r_1}t^{r_2}\overline{F}(x)\nu(t)dx\ dt. \tag{3.4}$$

Posons $x+t = u_1$, $u_2 = t$ dans l'inégalité(3.4)
D'où, la partie gauche de l'inégalité (3.4) devient :

$$\begin{aligned}
\mu\int_0^{\infty}\int_0^{u_2} &(u_1-u_2)^{r_1}u_2^{r_2}\overline{F}(u_1)du_2\ du_1 \\
&= \int_0^{\infty} u_1^{r_1+r_2+1}\overline{F}(u_1)\int_0^{u_2}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{r_2}\left(1-\frac{u_2}{u_1}\right)^{r_1} d\left(\frac{u_2}{u_1}\right), \\
&= \frac{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}{\Gamma(r_1+r_2+2)}\int_0^{\infty} u_1^{r_1+r_2+1}\overline{F}(u_1)du_1.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

comme

$$\int_0^{\infty} u_1^{r_1+r_2+1}\overline{F}(u_1)du_1 = \frac{\mu_{(r_1+r_2+2)}}{(r_1+r_2+2)}, \tag{3.6}$$

Alors, l'équation (3.5) devient :

$$\mu\int_0^{\infty}\int_0^{u_2}(u_1-u_2)^{r_1}u_2^{r_2}\overline{F}(u_1)du_2\ du_1 = \frac{r_1!r_2!}{(r_1+r_2+2)!}\mu_{(r_1+r_2+2)}. \tag{3.7}$$

la partie droite de l'inégalité (3.1) est donnée par :

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{r_1}t^{r_2}\overline{F}(x)\nu(t)dx\ dt = \frac{\mu_{(r_1+1)}}{(r_1+1)}\int_0^{\infty} t^{r_2}\nu(t)dt \tag{3.8}$$

Puisque $\nu'(t) = -\overline{F}(t)$, alors :

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{r_1}t^{r_2}\overline{F}(x)\nu(t)dt\ dx = \frac{\mu_{(r_1+1)}\mu(r+1)}{(r_1+1)(r_2+1)(r_2+2)}. \tag{3.9}$$

En remplaçant (3.7) et (3.9) dans (3.1) et posant $r_1 = r_2 = r$, le résultat du théorème découle. ■

Théorème 15 *Si F est $RNBUE$, alors :*

$$\frac{\mu\mu(r+3)}{r+3} \leq \frac{1}{2}\mu_{(2)}\mu_{(r+2)}, \qquad r \geq 1, \tag{3.10}$$

où

$$\mu_{(r)} = E(X^r) = r\int_0^\infty x^{r-1}\overline{F}(u)du.$$

Preuve. La démonstration se fait, en suivant la même procédure que le théorème précèdent.

Théorème 16 *Supposons que F est une fonction de distribution arbitraire de la classe $HNBRUE$.Alors les assertions suivantes sont vraies :*

(i) *Tout les moments de F sont finis, i.e, $\mu_k = \int_0^\infty x^k dF(x) < \infty$ pour toutes valeurs de $k = 1, 2, \ldots$*

(ii) *Les moments de F satisfont les inégalités*

$$\mu_{k+2} \leq \frac{1}{2}(k+2)!\mu_1^k\mu_2, \qquad pour\ k = 1, 2, \ldots$$

Remarque 7 *Comme il est déjà connu ,L'intersection de toute classe non paramétrique avec toute classe duale est la classe des fonctions exponentielles. On dit que la classe des fonctions exponentielles est la frontière entre les classes de vieillissement positives et les classes négatives. Le même principe se conserve pour les inégalités des moments, i.e si l'égalité est vérifiée alors la distribution est exponentielle.*

3.3 La procédure du test

Dans le développement de tests statistiques pour les lois non paramétriques, il est de coutume de tester l'exponentialité contre l'alternative d'une loi non paramétrique donnée C. Comme la distribution exponentielle est toujours une borne d'une classe de vieillissement C (dans le cas univarié), un format habituel pour le test est :

H_0 (hypothèse nulle) : *F est exponentielle* contre

H_1 (alternative) : *$F \in C$ mais F n'est pas exponentielle.*

On accepte l'alternative $H_1 : F \in C$, dans le cas d'un rejet de H_0 Un plan général de ces procédures est :

(i) Trouver une mesure de l'écart entre F (sous H_1) de l'exponentielle (sous H_0).

(ii) En se basant sur ce critère de test, on se ramène à une sorte d'U-statistique.

(iii) On prouve des propriétés asymptotiques comme la normalité asymptotique ou la consistance .

(iv) on calcule l'efficacité asymptotique relative de Pitman habituellement pour les familles de distributions suivantes (avec le facteur d'échelle $= 1, \alpha \geq 0, x \geq 0$) :

(a) La distribution de Weibull $\overline{F}(x) = \exp -x^{\alpha}$.

(b) la distribution à taux de défaillance linéaire $\overline{F}(x) = exp{-x} - \alpha x^2/2$.

(c) la distribution de Makeham (ou Gompertz-Makeham) $exp[-x + \alpha(x + \exp(-x) - 1)]$.

(d) La distribution gamma avec densité $f(x) = x^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)e^{-x}$.

Les propriétés de fiabilité de base de ces distributions de vieillissement ont été donné dans le chapitre précédent. Toutes ces distributions sont IFR ou DFR selon la valeur de α ;de là ils appartiennent tous à une classe plus large. De plus, toutes ces distributions se réduisent à la distribution exponentielle quand $\alpha = 0$ ou un $\alpha = 1$.

Nous présenterons dans ce qui suit les procédures statistiques pour tester l'exponentialité d'une distribution de survie contre différentes alternatives. Les alternatives considérées ici sont NRBU, RNBUE et HNBRUE. Récemment, Ahmad (2001) et Ahmad et Mugdadi (2004) ont développé des tests basés sur les inégalités des moments pour tester l'exponentialité contre IFR, IFRA, NBU, NBUE, HNBUE, NBUC, ou DMRL.

Dans le même esprit que les travaux de Ahmad (2001) et Ahmad et Mugdadi (2004). Des nouveaux tests conçus pour tester NRBU, RNBUE et HNRBUE ont été proposé par Abu- Youssef (2004), Abdel-Aziz (2007) et Al-Zahrani et Stoyanov (2010).

3.3.1 Le test contre les alternatives $NRBU(NWBU)$

Le test présenté dans ce paragraphe est basé sur un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ extrait d'une population de distribution F.On voudrait tester
l'hypothèse nulle H_0 : *F est exponentielle de moyenne* μ contre
H_1 : *F est $NRBU$ ($NWBU$) et pas exponentielle.*
En utilisant le théorème (14), on peut utiliser l'expression suivante comme une mesure d'écart de H_0 en faveur de H_1 :

$$\delta_{NR1} = \frac{1}{(r+1)!(r+2)!}\mu_{(r+1)}\mu_{(r+2)} - \frac{1}{(2r+2)!}\mu\mu_{(2r+2)} \geq (\leq)0. \tag{3.11}$$

Notons que sous $H_0 : \delta_{NR} = 0$, tandis que sous $H_1 : \delta_{NR} > (<)0$.
Ainsi pour estimer δ_{NR1} par $\widehat{\delta}_{NR1}$, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire de F, soit $dF_n(x) = 1/n$ et μ est estimé par $\overline{X}$. Alors $\widehat{\delta}_{NR1}$ est donnée par l'expression suivante

et cela en utilisant l'équation(3.11)

$$\widehat{\delta}_{NR1_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{(r+1)!(r+2)!}X_i^{r+1}X_j^{r+2} - \frac{1}{(2r+2)!}X_iX_j^{(2r+2)}\right) \tag{3.12}$$

Ainsi,pour rendre le test statistique invariant par changement d'échelle, on fait la transformation suivante :

$$\widehat{\Delta}_{NR1_n} = \frac{\widehat{\delta}_{NR1_n}}{\overline{X}^{2r+3}}, \tag{3.13}$$

où $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ est la moyenne empirique usuelle.
Posons :

$$\phi(X_1, X_2) = \frac{1}{(r+1)!(r+2)!}X_1^{r+1}X_2^{r+2} - \frac{1}{(2r+2)!}X_iX_j^{2r+2}$$

alors $\widehat{\Delta}_{NR1_n}$est équivalente à la U-statistique :

$$\frac{1}{C_n^2}\sum_{i<j}\psi(X_i, X_j).$$

Le théorème suivant résume les propriétés asymptotiques de $\widehat{\Delta}_{NR1_n}$ ou bien U_n.

Théorème 17 (*Abu-Youssef*(2004)) *Lorsque $n \to \infty$, $\sqrt{n}(\widehat{\Delta}_{NR1_n} - \Delta_{NR1})$ est asymptotiquement normale de moyenne 0 et de variance σ^2 donnée par l'expression suivante :*

$$\sigma^2 = \mu^{-(4r+4)}Var\left(\frac{X^{r+1}\mu_{(r+2)} + X^{r+2}\mu_{(r+1)}}{(r+1)!(r+2)!} - \frac{X\mu_{(2r+2)} + X\mu^{(2r+2)}}{(2r+2)!}\right). \tag{3.14}$$

Sous $H_0, \Delta_{NR1} = 0$ et de variance σ_0^2 donnée par :

$$\begin{aligned}\sigma_0^2 \quad &= \frac{(2r+2)!}{((r+1)!)^2} + \frac{(2r+4)!}{((r+2)!)^2} + \frac{(4r+4)!}{((2r+2)!)^2} + \frac{2(2r+3)!}{(r+1)!(r+2)!} \\ &-\frac{2(3r+3)!}{(r+1)!(2r+2)!} - \frac{2(3r+4)!}{(r+2)!(2r+2)!} - 2, \qquad r \geq 1. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Preuve.
Comme $\widehat{\Delta}_{NR1_n}$ et $\widehat{\delta}_{NR1_n}/(\mu^{2r+2})$ ont la même distribution limite, on utilise $\sqrt{n}(\widehat{\delta}_{NR1_n} - \delta_{NR1_n})$. D'aprés les propriétés des U-statistiques, cette dernière est asymptotiquement normale de moyenne 0 et de variance $\sigma^2 = Var[\phi(X_1]$, où :

$$\phi(X_1) = E[\phi(X_1, X_2) \mid X_1] + E[\phi(X_2, X_1) \mid X_1].$$

Mais

$$\phi(X_1) = \frac{X_1^{r+1}\mu_{(r+2)} + X_1^{r+2}\mu_{(r+1)}}{(r+1)!(r+2)!} - \frac{X_1\mu_{(2r+2)} + \mu X_1^{2r+2}}{(2r+2)!}.$$

Ainsi l'expression (3.14)découle.
Sous H_0,

$$\phi(X_1) = \frac{(r+2)X_1^{r+1} + (r+1)X_1^{r+2}}{(r+1)!(r+2)!} - \frac{X_1\mu_{(2r+2)} + \mu X_1^{2r+2}}{(2r+2)!}.$$

D'où (3.15) découle. Le théorème est prouvé. ■
Pour $r = 1$,

$$\delta_1 = \frac{1}{12}\mu_{(2)}\mu_{(3)} - \frac{1}{24}\mu\mu_{(4)},$$

Dans ce cas $\sigma_0^2 = 14$ et la statistique de test est :

$$\widehat{\delta}_{NR1_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{12}X_i^2X_j^3 - \frac{1}{24}X_iX_j^4\right)$$

et

$$\widehat{\Delta}_{NR1_n} = \frac{\widehat{\delta}_{NR_n}}{\overline{X}^5}, \tag{3.16}$$

qui est une statistique trés simple.
Pour tester H_0 contre l'alternative H_1, on calcule la valeur de la quantité $\sqrt{n}\widehat{\Delta}_{NR1_n}/\sigma_0^2$ pour $r = 1$ et on rejete H_0 si cette valeur dépasse la valeur critique $Z_{1-\alpha}$ de la distribution normal centré réduite au seuil α.

3.3.2 Le test contre les alternatives $RNBUE(RNWUE)$

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une population de distribution F. on teste l'hypothèse nulle
H_0 : $\overline{F}$ *est exponentielle de moyenne* μ contre
l'alternative H_1 : $\overline{F}$ *est* $RNBUE$ *et pas exponentielle.*
d'après le théorème 15, on peut utiliser la quantité suivante comme une mesure d'écart pour H_0 en faveur de H_1 :

$$\delta_{NR2}(r) = \frac{1}{2}\mu_{(2)}\mu_{(r+2)} - \frac{\mu\mu_{(r+3)}}{r+3} \tag{3.17}$$

Notons que sous H_0 : $\delta_{NR2}(r) = 0$, et cette quantité est positive sous H_1.
Pour rendre le test invariant par changement d'échelle sous H_0, on utilise

$$\Delta_{NR2}(r) = \frac{\delta_{NR2}(r)}{\mu^{r+4}}$$

Elle peut être estimée, en se basant sur un échantillon aléatoire $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de F par :

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}_{NR2}(r) &= \frac{\widehat{\delta}_{NR2}(r)}{\overline{X}^{r+4}} \\
&= \frac{1}{\overline{X}^{r+4}} \left[\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \sum \left(\frac{X_i^2 X_j^{r+2}}{2} - \frac{X_i X_j^{r+3}}{r+3} \right) \right] \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

De plus, $\widehat{\Delta}_{NR2}(r)$ et $\widehat{\delta}_{NR2}(r)$ ont la même distribution limite. Mais comme $\widehat{\Delta}_{NR2}(r)$ est la U-statistiques usuelle, en ayant recours à la théorie des U-statistique ,on peut monter qu'elle est asymptotiquement normale de moyenne 0 et de variance $\sigma^2_{(r)}$ (cf selfring (1980)). Le théorème suivant résume les propriétés asymptotiques de $\widehat{\Delta}_{NR2}(r)$ ou bien de la U-Statistique correspondante.

Théorème 18 (*Abdel-Aziz*(2007)) *Lorsque $n \to \infty$,$\sqrt{n}(\widehat{\Delta}_{NR2}(r) - \Delta_{NR2}(r))$ est asymptotiquement normale de moyenne zéro et de variance :*

$$\mu^{-2(r+4)} Var \left[\frac{X_1^2 \mu_{(r+2)} + \mu_2 X_1^{r+2}}{2} - \frac{X_1 \mu_{(r+3)} + \mu X_1^{r+3}}{r+3} \right],$$

Sous H_0,cette valeur se réduit à

$$(2r+4)! - 2(r+2)[(r+2)!]^2$$

Preuve.
La démonstration se fait en suivant la même démarche que le théorème précedent. ■
Pour r=1,

$$\delta_{NR2}(1) = \frac{1}{2}\mu_{(2)}\mu_{(3)} - \frac{1}{4}\mu\mu_{(4)}$$

Dans ce cas $\sigma_0 = 22,4$ et la statistique de test est

$$\widehat{\delta}_{NR2}(1) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \sum \left(\frac{X_i^2 X_j^3}{2} - \frac{X_i X_j^4}{4} \right),$$

et

$$\widehat{\Delta}_{NR2}(1) = \frac{\widehat{\delta}_{NR2}(1)}{\overline{X}^5} \qquad (3.19)$$

qui est une statistique trés simple. On peut utiliser le test proposé pour calculer $\frac{\sqrt{n}\widehat{\Delta}_{NR2}}{\sigma_0}$ et rejeter H_0 si $\frac{\sqrt{n}\widehat{\Delta}_{NR2}}{\sigma_0} \geq Z_\alpha$, où Z_α est le quantile d'ordre α de la distribution normale standard.

3.3.3 Test contre les alternatives $HNBRUE(HNWRUE)$

Dans cette section, on présente un test non paramétrique pour la classe HNRBUE Supposons que la durée de vie X d'un composant admet une fonction de distribution F. En outre , supposons qu'on dispose d'un échantillon aléatoire $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de F et on désire tester l'hypothèse nulle H_0 conte l'alternative H_1, telle que :

H_0 : F *est exponentielle,* contre

H_1 : F *appartient à la classe* $HNRBUE$ *et n'est pas exponentielle.*

En utilisant le théorème (16), on suggère la quantité δ comme une mesure d'écart par rapport à H_0 telle que :

$$\delta = \frac{1}{2}(k+2)! m_1^k m_2 - m_{k+2}. \tag{3.20}$$

Il est évident que si F est exponentielle, alors $\delta = 0$, tandis que sous H_1, on a $\delta > 0$. Comme la quantité δ est inconnue, on a besoin de construire $\widehat{\delta_n}$ un estimateur de δ et cela on se basant sur échantillon aléatoire $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tiré de la distribution F. Alors $\widehat{\delta_n}$ est donné comme suit :

$$\widehat{\delta_n} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k)} \sum_{i_1 \neq \cdots \neq i_{k+1}} \cdots \sum \left\{ \prod_{j=2}^{k+1} \frac{1}{2}(k+2)! X_{i_1}^2 X_{i_j} - X_{i_1}^{k+2} \right\} \tag{3.21}$$

On peut montrer que $\widehat{\delta_n} \xrightarrow{\text{P}} \delta$ lorsque $n \to \infty$ où $\xrightarrow{\text{P}}$ représente la convergence en probabilité, on utilise $\widehat{\Delta}_n^{(1)}$ pour rendre la statistique de test $\widehat{\delta_n}$ invariante par changement d'échelle, où

$$\widehat{\Delta}_n^{(1)} = \frac{\widehat{\delta_n}}{\overline{X}^{k+2}}. \tag{3.22}$$

Les propriétés asymptotiques :

Pour tout échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}$, on définit la fonction suivante :

$$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) = \prod_{j=2}^{k+1} \frac{1}{2}(k+2)! X_1^2 X_j - X_1^{k+2} \tag{3.23}$$

On définit aussi la fonction symétrique de noyau comme suit :

$$\overline{\phi}(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_p \phi(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}), \tag{3.24}$$

Où la somme est sur toutes les permutations de $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}$.

Alors la statistique de test $\widehat{\Delta}_n^1$ donnée par (3.22) est équivalente à la U-statistique U_n

d'ordre $k+1$ telle que :

$$U_n = \frac{1}{C_n^{k+1}} \sum_{i_1<\cdots<i_{k+1}} \ldots \sum \overline{\phi}(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k+1}) \tag{3.25}$$

En se basant sur la théorie des U-statistics (cf Serfling(1980)), le théorème suivant résume les propriétés asymptotiques de $\widehat{\Delta}_n^{(1)}$ définie en (3.22)

Théorème 19 (*Al-Zahrani et Stoyanov*(2010)) *lorsque* $n \to \infty$,$\sqrt{n}(\widehat{\Delta}_n^{(1)} - \Delta^{(1)})$ *est asymptotiquement normal de moyenne 0 et de variance* σ^2*, telle que :*

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mu^{2(k+2)}} Var\left\{\frac{1}{2}(k+2)!X_1(X_1 m_1^k + k m_1^{k-1} m_2) - X_1^{k+2} - k m_{k+2}\right\} \tag{3.26}$$

Preuve.(cf *Al-Zahrani et Stoyanov*(2010)). ■

Corollaire 2 *Si l'hypothèse nulle* H_0 *est vraie ,i.e, la distribution de durée de vie* F *est exponentielle, alors comme on l'a mentionné ci-dessus,* $\delta = 0$*, et on peut calculer explicitement la variance* σ_0^2 *:*

$$\sigma_0^2 = 6[(k+2)!]^2 - (k+2)!\Gamma(k+5) + \Gamma(2k+5). \tag{3.27}$$

Pour k=1, la mesure δ donnée par (3.20) devient :

$$\delta_{NR3} = 3m_2 m_1 - m_3. \tag{3.28}$$

Dans ce cas, $\sigma_0^2 = 216$ et la statistique de test définie en (3.22) devient :

$$\widehat{\Delta}_{NR3_n} = \frac{1}{n(n-1)\overline{X}^3} \sum_{i \neq j} \sum \{3X_i^2 X_j - X_i^3\}. \tag{3.29}$$

3.3.4 Les valeurs critiques de la distribution nulle via la méthode de Monté Carlo

En pratique, les centiles simulés pour les petits échantillons sont généralement utilisés par les statisticiens et les analystes de fiabilité. Les valeurs centiles supérieurs ont été simulées via la méthode de Monté Carlo, pour le niveau de signification égale à : 90%, 95%, 98% et 99%. Les calculs sont basés sur 5000 échantillons simulés de taille n = 5(1)40 à partir d'une distribution exponentielle standard . Nous trouvons dans la partie annexe les tables des valeurs critiques correspondantes aux tests présentés. Les points critiques empiriques ont été calculés pour $\widehat{\Delta}_{NR1_n}$, $\widehat{\Delta}_{NR2_n}$,$\widehat{\Delta}_{NR3_n}$.respectivement et cela pour la valeur de $r = 1$.

A partir des figures illustrées, on remarque que les valeurs critiques augmentent proportionnellement au niveau de signification par contre, ils diminuent légèrement lorsque la taille de l'échantillon augmente.

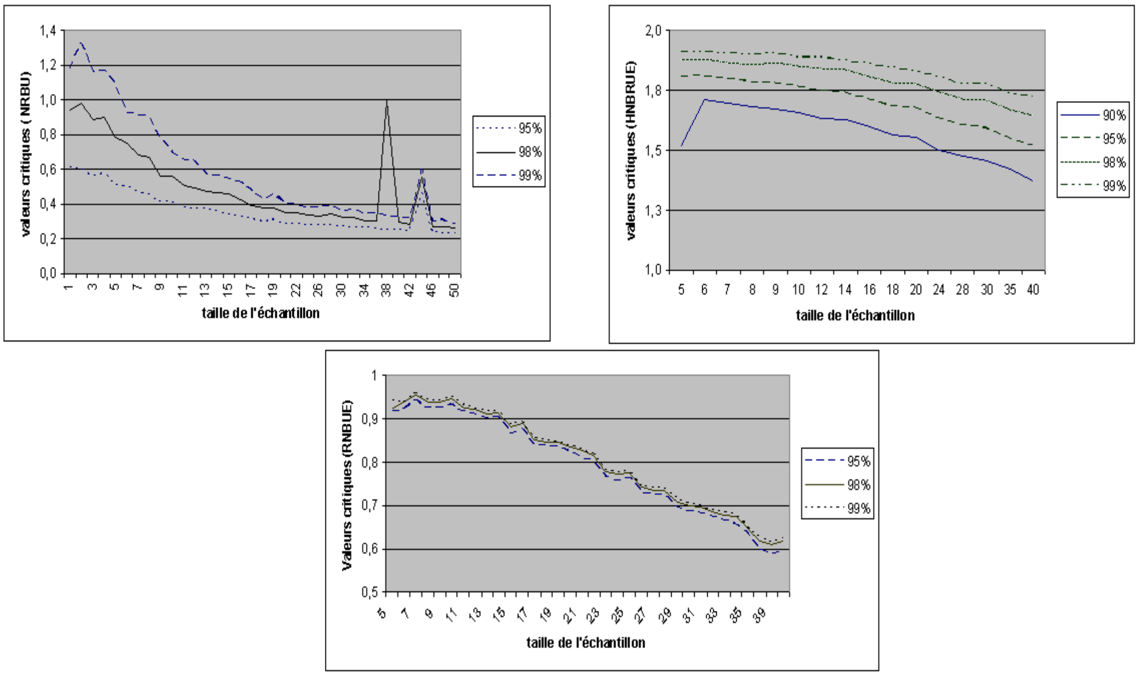

FIG. 3.1 – La relation entre les valeurs critiques, la taille de l'échantillon et le niveau de signification pour les tests (NRBU, RNBUE, HNBRUE)

3.3.5 Efficacité Relative Asymptotique de Pitman(PARE)

L'efficacité asymptotique est la caractéristique la plus connue et utile pour comparer des tests non-paramétrique.

Soit T_n et V_n deux statistiques basées sur n observations et choisies pour tester l'hypothèse nulle H_0 contre l' alternative H_1. Nous supposons que l'alternative est caractérisée par un paramètre θ et pour $\theta = \theta_0$ varie dans H_0.

Notons par $N_T(\alpha, \beta, \theta)$ la taille de l'échantillon nécessaire pour la séquence T_n pour atteindre la puissance β sous le niveau α et la valeur alternative du paramètre θ. Le nombre $N_V(\alpha, \beta, \theta)$ est défini de la même façon.

L'efficacité relative de la séquence T_n par rapport à la séquence V_n est spécifiée comme étant la quantité :

$$e_{T,V}(\alpha, \beta, \theta) = \frac{N_V(\alpha, \beta, \theta)}{N_T(\alpha, \beta, \theta)}$$

Donc c'est le ratio réciproque des tailles de l'échantillon N_T et N_V.

L'efficacité du Pitman introduite à la fin des années quarante par Pitman (1949) est

le type d'ARE le plus célèbre et étudié avec soin. La propriété de normalité asymptotique d'une statistique de test sous l'hypothèse nulle et sous l'alternative facilite le calcul de PARE. Dans ce cas Pitman ARE(*"Pitman Asymptotic Relatif efficiency"* est un nombre qui ne dépend pas de α et β. elle a été calculée dans de nombreux papiers Selfring(1980), Nikitin(1995)....
Le résultat principal est donné comme suit.

Théorème 20 *Soit $\Theta = R^1$ et $\Theta_0 = (-\infty, \theta_0]$.Supposons que la séquence de statistiques T_{1n} possède les trois propriétés suivantes.*

(i) *il existe des fonctions μ_1 et σ_1 telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} p_{\theta_n}\left(\frac{T_{1n}-\mu_1(\theta_n)}{\sigma_1(\theta_n)} < z\right) = \Phi(z) \tag{3.30}$$

pour tout $z \in R^1$ et $\theta_n = \theta_0 + kn^{-\frac{1}{2}}, k \geq 0$

(ii) *il existe la dérivée à droite $\mu'(\theta_0) > 0$.*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu'(\theta_n)}{\mu'(\theta_0)} = 1, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma(\theta_n)}{\sigma(\theta_0)} = 1.$

Soit T_{2n} une autre séquence de statistiques qui satisfait les mêmes conditions avec les fonctions μ_2 et σ_2. Alors, l'efficacité relative de Pitman (PARE) existe pour tout $0 < \alpha < \beta < 1$ et peut être calculée par la formule suivante :

$$e_{T_{1n},T_{2n}}(\alpha,\beta,\theta_0) \equiv e_{T_{1n},T_{2n}}(\theta_0) = \left\{\frac{\mu_1'(\theta_0)}{\sigma_1(\theta_0)} \Big/ \frac{\mu_2'(\theta_0)}{\sigma_2(\theta_0)}\right\}^2 \tag{3.31}$$

où $\mu_i'(\theta_0) = \lim\limits_{n\to\infty}\{\frac{\partial}{\partial\theta}E(T_{in})\}_{\theta\to\theta_0}$ et $\sigma_i^2(\theta_0) = \lim\limits_{n\to\infty} Var_0(T_{in}), i = 1,2$ est la variance nulle.

Comme la statistique de test $\widehat{\Delta}_{NR1_n}$ dans l'équation (3.13) est nouvelle et qu'aucun test n'est connu pour la classe NRBU, on compare cette dernière à d'autres classes. Abou youssef (2004) a choisi à cette fin le test K^* présenté par Kanjo (1993) et cela en utilisant le concept de "Pitman ARE".
Notons que l'efficacité asymptotique de Pitman (*Pitman Asymptotic efficiency*(PAE) est donnée par :

$$PAE(\Delta_R(\theta)) = \left\{\frac{d}{d\theta}\Delta_{NR}(\theta)\big|_{\theta\to\theta_0}\right\} \Big/ \sigma_0. \tag{3.32}$$

Après calcul et simplification de (3.32), on obtient :

$$\begin{aligned} PAE(\Delta_{NR}(\theta_0)) &= (r+2)!\mu'_{(r+1)} + (r+1)!\mu'_{(r+2)} \\ &- \frac{(r+1)!(r+2)!}{(2r+2)}[\mu'_{(2r+2)} - (2r+2)!]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Pour la comparaison de l'efficacité relative asymptotique, trois familles de distributions paramétriques ont été considérées, à savoir, la distribution de taux à défaillance linéaire, la distribution Makeham et la distribution Gamma. Celles-ci dépendent d'un paramètre réel θ. Pour $\theta = \theta_0$ une distribution devient équivalente à hypothèse nulle, alors que $\theta > \theta_0$ correspond à l'alternative. Ce sont :

(i) la distribution à Taux de Défaillance Linéaire(*Linear Failure Rate*(LFR)) :

$$\overline{F}_\theta(x) = \exp(-x - \frac{\theta}{2}x^2), \qquad x \geq 0, \theta \geq 0.$$

(ii) la distribution Makeham :

$$\overline{F}_\theta(x) = \exp(-x - \theta(e^{-x} + x - 1), \qquad x \geq 0, \theta \geq 0.$$

(iii) la distribution de Weibull :

$$\overline{F}_\theta(x) = \exp(-x^\theta), \qquad x \geq 0, \theta \geq 1.$$

L'hypothèse nulle est obtenue à $\theta = 0$ pour (i),(ii) et à $\theta = 1$ pour (iii).
Le calcul direct de l'efficacité asymptotique de Pitman (PAE) pour les trois alternatives ci-dessus donne les résultats suivants :

(1) Le test de l' alternative NRBU

$$PAE(\Delta_{NR}, LFR) = (r+2)!(r+1)!(r+1)r, \qquad r \geq 1. \tag{3.34}$$

$$PAE(\Delta_{NR}, Makham) = (r+2)!(r+1)! \left[\frac{1}{2} + 2^{-(2r+2)} - 2^{-(r+2)} - 2^{-(r+1)}\right]. \tag{3.35}$$

(2) Le test de l'alternative RNBUE

$$PAE(\Delta_{NR}, LFR) = (r+1)(r+2)!. \tag{3.36}$$

$$PAE(\Delta_{NR}, Makham) = (r+2)! \left[\frac{3}{4} - (\frac{1}{2})^{r+3}\right]. \tag{3.37}$$

$$PAE(\Delta_{NR}, Weibull) = (r+2)! \left[\sum_{i=1}^{r+2} \frac{1}{i} - 1\right]. \tag{3.38}$$

(3) Le test de l'alternative HNBRUE

$$PAE(\Delta_{NR}, LFR) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{-r(r+1)! - 3(r+2)! + \frac{1}{2}(r+2)(r+3)!\right\}. \tag{3.39}$$

$$PAE(\Delta_{NR}, Makham) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{-\frac{1}{2}r(r+1)! - (r+2)! \left(\frac{5}{4} - (r+1) - 2^{-(r+2)}\right)\right\} \tag{3.40}$$

Comme aucun test n'a été déja proposé pour tester l'exponentialité contre l'alternative RNBUE, alors il parait utile pour ce problème de le comparer avec d'autre tests. Abdel-Aziz (2007) a choisit les test K^* et $\delta_{(3)}$ qui ont été proposé respectivement par Kanjo(1993) et Mugdadi et Ahmed (2005).

Pour la même raison Al-Zahrani et Stoyanov(2010) ont proposé de comparer la valeur de PAE du test HNBRUE avec celles des tests V^*, T^* et $\widehat{\Delta}^{(2)}_{F_n}$, où V^*, T^* sont respectivement les tests pour les classes DMRL et NBUE présentés par Hollander et Prochan (1972,1975) et $\widehat{\Delta}^{(2)}_{F_n}$ est le test pour la classe NBRU présenté par Hendi et Abouammouh (2001).

Les tables (3.1),(3.3) et (3.5) résument les résultats obtenus de calculs des PAE et cela pour chacune des classes étudiées NRBU, RNBUE, HNRBUE.

Distribution	$\widehat{\Delta}_{RN1}$		K^*	$\delta_{\widehat{F}_n}$
	r=1	r=2		
LFR	0.535	0.05	0.433	4.592
Makham	0.067	0.039	0.144	0.291

TAB. 3.1 – Efficacité asymptotique de Pitman(PAE)de $\widehat{\Delta}_{NR1}$ et K^*

Distribution	$e_{F_i}(\widehat{\Delta}_{RN1}, K^*)$	$e_{F_i}(\widehat{\Delta}_{RN1}, \widehat{\delta}_{F_n})$
LFR	1,24	0.12
Makham	0,47	0.23

TAB. 3.2 – Efficacité relative asymptotique de Pitman(PARE)de $\widehat{\Delta}_{NR1}$, K^* et $\widehat{\delta}_{F_n}$

Distribution	$\widehat{\Delta}_{RN2}$	K^*	$\delta_{(3)}$
LFR	0.535	0.433	0.408
Makham	0.184	0.144	0.039
Weibull	0.223	0.132	0.170

TAB. 3.3 – Efficacité asymptotique de Pitman(PAE)de $\widehat{\Delta}_{NR2}$, K^* et $\delta_{(3)}$

Distribution	$e_{F_i}(\widehat{\Delta}_{RN2}, K^*)$	$e_{F_i}(\widehat{\Delta}_{NR2}, \delta_{(3)})$
LFR	1.24	1.31
Makham	1.28	4.72
Weibull	1.69	1.31

TAB. 3.4 – Efficacité relative asymptotique de Pitman(PARE)de $\widehat{\Delta}_{NR2}$, K^* et $\delta_{(3)}$

Distribution	V^*	T^*	$\widehat{\Delta}_{F_n}$	$\widehat{\Delta}_{NR3}$
LFR	0.906	0.871	1.917	1.089
Makham	0.242	0.289	0.811	0.289

TAB. 3.5 – Efficacité asymptotique de Pitman(PAE)de $\widehat{\Delta}_{NR3}$, T^*,V^* et $\widehat{\Delta}^{(2)}_{F_n}$

Distribution	$e_{F_i}(\widehat{\Delta}_{RN3},V^*)$	$e_{F_i}(\widehat{\Delta}_{NR3}, T^*)$	$e_{F_i}(\widehat{\Delta}_{NR3},\widehat{\Delta}^{(2)}_{F_n})$
LFR	1,20	1,25	0,57
Makham	1,19	1,00	0,36

TAB. 3.6 – Efficacité relative asymptotique de Pitman(PARE)de $\widehat{\Delta}_{NR3}$,V^*, T^* et $\widehat{\Delta}^{(2)}_{F_n}$

D'aprés la lecture de la table (3.1), le test statistique $\widehat{\Delta}_{NR1}$ est plus efficace que K^* lorsque r=1.
Notons que comme $\widehat{\Delta}_{NR1}$ définit une classe de test statistique de paramètre r, nous choisissons r qui maximise le PAE (Efficacité Asymptotique de Pitman) des distribution alternatives. Si on prend r=1, notre test aura une efficacité meilleure que les autres tests pour l'alternative LFR. Dans les tables (3.2),(3.4),(3.6), on trouve les PAREs (Efficacité Relative Asymptotique de Pitman) pour chacun des tests étudiés et cela en ce qui concerne les statistiques des tests utilisées pour la comparaison.

En examinant les résultats obtenus dans ces table, on constate que le test proposé pour la classe NRBU est plus efficace que le test présenté par Kanjo (1993) pour la distribution LFR. Toutefois, il n'est pas meilleur que le test RNBU, proposé par Mahmoud et al (2005).

Il semble clair de la Table (3.4) que la statistique $\widehat{\Delta}_{NR2}$ pour la classe RNBUE est plus performante pour les distributions alternatives LFR, Makeham, et Weibull et sont plus efficaces et plus simples que les deux statistiques K^* et $\delta_{(3)}$ proposés respectivement par Kanjo (1993) et Mugdadi et Ahmed (2005). Comme Δ_{RN2} définit une classe de statistiques de tests de paramètre r, on choisit r qui maximise la PAE pour ces alternatives. Si on prend $r = 1$ alors notre test RNBUE sera plus efficace que les autres tests.

L'observation des résultats de test pour la classe HNBRUE dans la table (3.6) nous conduit à conclure que ce test est plus efficace que ceux des deux classes DMRL et NBUE proposés par Holander et prochan (1972, 1975) et cela pour les deux alternatives LFR et Makeham. Mais il est moins efficace que celui proposé par Hendi et Abouammoh (2001)pour la classe NBRU.

3.3.6 Exemple numérique pour les tests NRBU, RNBUE, HNBRUE

Considérons les données de Abouammoh et al (1994). Ces données représentent 40 patients souffrant de cancer du sang de l'un des Hôpitaux de Ministère de la Santé dans l'Arabie séoudite et les durées de vie ordonnées sont données dant la table suivante :

115	181	255	418	441	461	516	739	743	789
807	865	924	983	1024	1062	1063	1169	1191	1222
1222	1251	1277	1290	1357	1369	1408	1455	1478	1549
1578	1578	1599	1603	1604	1696	1735	1799	1815	1852

TAB. 3.7 – Nombre de jours de survie de 40 malades souffrants du cancer de sang [Abouammoh et al (1994)].

(i) Test NRBU :

En se basant sur les données de la table(3.7), Le calcul de la valeur de la statistique de test, en utilisant l'équation(3.16) donne le résultat $\widehat{\Delta}_{NR1} = 1.9076$.
Selon la table 1 des valeurs critiques (cf. annexe : table A.2), cette valeur est inférieure à la valeur critique au niveau de signification 95%, donc on accepte l'hypothèse H_0 : 'les données sont exponentille', i.e elles n'ont pas la propiété NRBU.

(ii) Test RNBUE :

En utilisant l'équation(3.19), on obtient que la valeur de la statistique de test $\widehat{\Delta}_{NR2} = 0.1378$ est inférieure à la valeur critique(cf. annexe : table A.3) ce qui conduit à accepter l'hypothèse H_0 au niveau de signification 0.95% i.e les données possédent la propriété exponentielle.

(iii) Test HNBRUE :

En utilisant l'équation(3.29) et en se basant sur l'ensemble de données précèdentes, la valeur de la statistique de test $\widehat{\Delta}_{NR3} = 2.011$. Cette valeur conduit à rejeterl'hypothèse nulle H_0 en faveur de l'alternative H_1 au niveau de signification $1-\alpha = 0.95\%$ (cf. annexe : table A.1). Par conséquent les données possédent la propriété HNBRUE.

3.3.7 remarque de conclusion

Les méthodes de tests peuvent être comparées en se basant sur le point de vue statistique, mais on doit considérer la facilité de mise en oeuvre et l'interprétation.
Statistiquement, il y a un principe général que nous pouvons appliquer dans n'importe quel test statistique. Lorsqu'un nouveau test est proposé , ses performances sont évaluées à partir de certains critères tels que la consistance, l'absence de biais et/ou la normalité asymptotique. S'il existe d'autres tests pour la même alternative de vieillissement, on peut calculer et comparer les puissances ou les efficacités asymptotiques de Pitman.
Toutefois, il faut tenir compte également de la facilité d'implémentation et d'interprétation.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des distributions non paramétriques de survie de type nouveau renouvellement, introduites récemment dans la littérature.

Nous avons tout au long de ce travail, donné une description des classes de vieillissements renouvelées, leur caractérisation en terme d'ordre stochastique, la conservation par rapport aux principales opérations de fiabilité. Ainsi, nous avons établi les relations d'inclusion entre les différentes classes de renouvellement, mais aussi avec les classes standards.

Nous avons étudié la polémique sur la définition de la classe HNRBUE. La définition de cette classe, donnée par Abouammoh et al en fait une classe peu intéressante (comme démontré par Bon et al) au sens où cette classe se réduit à la classe triviale des distributions exponentielles. La définition de Mugdadi et al conduit à une classe non triviale, mais qu'il reste à situer un peu plus exactement dans le diagramme de classification des distributions de type nouveau renouvellement. En revanche, la définition initiale de la classe HRNBUE présentée par Abouammoh et al donne une nouvelle caractérisation de la loi exponentielle, parmi les nombreuses existantes dans la littérature.

Enfin, nous avons présenté les procédures de test basées sur les inégalités des moments pour ce type de classe. Nous nous sommes concentrés sur trois classes de type différent : NRBU, RNBUE, HNBRUE, illustrée par une application numérique sur des données de santé. Ce qui nous a permis de conclure que la procédure est facile à mettre en œuvre.

En conclusion, les classes de type nouveau renouvellement ont attiré l'attention de beaucoup de chercheurs statisticiens et fiabilistes. Des études sur les caractéristiques de ces distributions sont en cours de réalisation : l'existence des fonctions génératrices des moments et les bornes pour ces classes de lois.

Comme perspective, il pourrait être intéressant, dans les travaux futurs, d'étudier ces tests en se basant sur d'autres approches : les tests d'ajustement,la transformée TTT (Total Time on Test) et faire une comparaison entre les différentes approches.

Annexe A

Tables des valeurs critiques

n	90%	95%	98%	99%
5	1,5171	1,8051	1,8769	1,9080
6	1,7088	1,8061	1,8793	1,9059
7	1,6927	1,7964	1,8665	1,9038
8	1,6819	1,7849	1,8570	1,8963
9	1,6760	1,7834	1,8633	1,8998
10	1,6579	1,7643	1,8493	1,8836
12	1,6334	1,7464	1,8384	1,8854
14	1,6265	1,7432	1,8343	1,8733
16	1,5943	1,7090	1,8051	1,8576
18	1,5623	1,6856	1,7824	1,8440
20	1,5562	1,6777	1,7759	1,8297
24	1,4984	1,6311	1,7402	1,8010
28	1,4745	1,6036	1,7098	1,7763
30	1,4574	1,5923	1,7056	1,7751
35	1,4216	1,5506	1,6684	1,7356
40	1,3748	1,5171	1,6430	1,7194

TAB. A.1 – Table des valeurs critiques de $\widehat{\Delta}_{NR3}$(test HNBRUE).

n	95%	98%	99%
1	0,6053	0,9443	1,1801
2	0,5989	0,9782	1,3314
3	0,5608	0,8892	1,1600
4	0,5786	0,9006	1,1731
5	0,5120	0,7888	1,0851
6	0,4980	0,7473	0,9256
7	0,4717	0,6829	0,9177
8	0,4526	0,6707	0,8990
9	0,4132	0,5660	0,7732
10	0,4118	0,5672	0,7020
11	0,3786	0,5105	0,6568
12	0,3712	0,4914	0,6525
13	0,3685	0,4690	0,5712
14	0,3566	0,4614	0,5661
15	0,3323	0,4593	0,5484
16	0,3317	0,4308	0,5293
17	0,3161	0,3954	0,4760
18	0,3011	0,3789	0,4303
19	0,3047	0,3820	0,4553
20	0,2854	0,3505	0,4037
22	0,2858	0,3510	0,4007
24	0,2813	0,3384	0,3814
26	0,2768	0,3294	0,3806
28	0,2792	0,3442	0,3905
30	0,2708	0,3209	0,3591
32	0,2672	0,3216	0,3682
34	0,2608	0,3058	0,3442
36	0,2602	0,3077	0,3479
38	0,2531	0,9960	0,3314
40	0,2522	0,2973	0,3246
42	0,2404	0,2855	0,3147
44	0,4627	0,5569	0,6026
46	0,2344	0,2707	0,3011
48	0,2312	0,2705	0,3080
50	0,2271	0,2628	0,2856

TAB. A.2 – Table des valeurs critiques de $\widehat{\Delta}_{NR1}$(test NRBU).

n	95%	98%	99%
5	0,916	0,925	0,941
6	0,924	0,938	0,933
7	0,943	0,953	0,959
8	0,925	0,938	0,942
9	0,927	0,936	0,939
10	0,934	0,945	0,951
11	0,917	0,926	0,931
12	0,911	0,922	0,927
13	0,899	0,912	0,917
14	0,906	0,913	0,917
15	0,867	0,881	0,887
16	0,878	0,888	0,892
17	0,839	0,852	0,857
18	0,837	0,846	0,849
19	0,834	0,845	0,846
20	0,826	0,833	0,837
21	0,811	0,825	0,828
22	0,804	0,816	0,819
23	0,768	0,777	0,783
24	0,758	0,771	0,775
25	0,765	0,775	0,778
26	0,731	0,744	0,747
27	0,723	0,734	0,739
28	0,722	0,735	0,74
29	0,696	0,708	0,715
30	0,687	0,7	0,706
31	0,683	0,697	0,701
32	0,673	0,685	0,69
33	0,666	0,678	0,685
34	0,657	0,673	0,677
35	0,633	0,645	0,649
36	0,6	0,618	0,628
39	0,59	0,608	0,614
40	0,597	0,617	0,622

TAB. A.3 – Table des valeurs critiques de $\widehat{\Delta}_{NR2}$(test RNBUE).

Bibliographie

[1] A.A. Abdel-Aziz. On testing exponentiality against rnbrue alternatives. *Applied Mathematical Sciences*, 1(35) :1725 – 1736, 2007.

[2] A. M. Abouammoh. On the criteria of the mean remaining life. *Statistics and Probability Letters*, 6 :205–211, 1988.

[3] A.M. Abouammoh and A.N. Ahmad. On renewal failure rate classes of life distributions. *Statistics and Probability Letters*, 14 :211–217, 1992.

[4] A.M. Abouammoh, A.N. Ahmad, and A. Khalique. On new renewal better than used classes of life distributions. *Statistics and Probability Letters*, 48 :189–194, 2000.

[5] A.M. Abouammoh, A. Khalique, and M.I Hendi. Shock models with nbrue and hnbrue properties. *Journal of King Saoudite university*, 7(2) :299–317, 1995.

[6] A.M. Abouammoh and I.S. Qamber. New better than renewal used classes of life distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, 52(2) :150–153, 2003.

[7] A.M. Abouammoh and I.S. Qamber S.A. Abdulghani. On partial orderings and testing of new better than renewal used classes. *Reliability Engineering and System Safety*, 43 :37–41, 1994.

[8] S.E. Abu-Youssef. Moment inequality on new renewal better than used class of life distributions with hypothesis testing application. *Applied Mathematics and Computation*, 149 :651–659, 2004.

[9] A. Ibrahim Ahmad. Moments inequalities of aging families of distributions with hypotheses testing applications. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 92 :121–132, 2001.

[10] I.A. Ahmad and A. R. Mugdadi. Moment inequalities derived from comparing life with its equilibruium form. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 134 :303–317, 2005b.

[11] I.A. Ahmad and A.R. Mugdadi. Further moments inequalities of life distributions with hypothesis testing applications : the ifra, nbuc and dmrl classes,. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 120(4) :1–12, 2004.

[12] I.A. Ahmad and A.R. Mugdadi. Bounds of moment generating functions of some life distributions. *Statistic Papers*, 46 :575–585, 2005a.

[13] A.S. Al-Ruzaiza, M.I. Hendi, and S.E. Abu-Youssef. A note on moments inequalities for the harmonic new better than used in expectation property with hypothesis testing application. *Nonparametric Statistics*, 15(3) :267–272, 2003.

[14] Bander Al-Zahrani and Jordan Stoyanov. Moment inequalities for hnbrue with hypothesis testing application. *Statistical Methodology*, 7 :58–67, 2010.

[15] R.E. Barlow and F. Proschan. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing.* New York, 1975.

[16] M.C. Bhattacharjee, A. M. Abouammoh, A. N. Ahmed, and A. M. Barry. Preservation results for life distributions based on comparisons with asymptotic remaining life under replacements. *Journal of Applied Probability*, 37 :999–1009, 2000.

[17] Jean-Louis Bon and Abbas Illayk. A note on some new renewal ageing notions. *Statistics and Probability Letters*, 57 :151–155, 2002.

[18] J.H. Cao and Y.D. Wang. The nbuc and nwuc classes of life distributions. *Journal of Applied Probability*, 28 :473–479, 1991.

[19] J.V. Deshpand, S.C. Kochar, and H. Singh. Aspects of positive ageing. *Journal of Applied Probability*, 23 :748–758, 1986.

[20] G.R. Elkahlout. On testing statistics of harmonic new better than renewal used in expectation class of life distridutions. *Umm Al-Quara university*, 17(2) :183–198, 2005.

[21] M. Hollander and F. Proschan. Testing whether new better than used. *the Annals of Mathematicals Statistics*, 43 :1136–1146, 1972.

[22] A. Ibrahim and Ahmad. Moments inequalities of aging families of distributions with hypotheses testing applications. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 92 :121–132, 2001.

[23] B. Klefsjo. the hnbue and hnbue classes of life distributions. *naval research logistics quarterly*, 29(2) :331–344, 1982.

[24] V.S Koroljuk and Y. V. Broovskich. *Theory of U-Statistics.* New York,NY, 1994.

[25] C.D. Lai and M. Xie. *Stochastic Ageing and Dependencefor Reliability.* New York, 2006.

[26] A.J. Lee. *U-Statistics.* Marcel Dekker,New York, 1990.

[27] X. Li and M. Xu. Reversed hazard rate order of equilibrium distributions and a related aging notion. *Statistical Papers*, 49 :749–767, 2008.

[28] M.A.W. Mahmoud, S.M El-Arishy, and L.S Diab. Testing renewal new better than used life distributions based on u-test. *Applied Mathematical Modelling*, 29 :784–796, 2005.

[29] Albert W. Marshall and Ingram Olkin. *Life Distributions, Structure of Nonparametric, Semiparametric, and Parametric Families.* USA, 2007.

[30] Y. Nikitin. *asymptotic efficiency of non paramétric test.* Cambridge University Press, 1995.

[31] E.J.G. Pitman. *Some Basic Theory for Statistical Inference*. London, 1979.

[32] G. Saidi. *Lois non Paramétriques de Survie et leurs Applications*. PhD thesis, ENS-SEA, Alger, 2010.

[33] G. Saidi and A. Aissani. Bounds on moment generating functions of hnbue class and its variants. *Advances and Applications in Statistics*, 15(2) :181–194, 2010.

[34] R.J. Serfling. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. New York, 1980.

[35] Moshe. Shaked and J.George. Shanthikumar. *Stochastic Orders*. New York, 2007.

[36] W.Hoeffding. A class of statistics with asymptotically normal distribution. *the Annals of Mathematicals Statistics*, 19 :293–325, 1948.

[37] D. Yonglu and Y. Xiaoling. Some new partial orderings describing aging property. *Applied Mathematics*, 12(B) :381–388, 1997.