N° d'ordre: 11/2007 - M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse complexe

Par : Meraoum Samira

THEME

Variétés de Dirac

Soutenu le: 26/11/2007, devant le jury composé de:

Mr. K. BETINA, Professeur à L'U.S.T.H.B Président

Mr. A. AFFANE, Maître de conférences à L'U.S.T.H.B Directeur de thèse.

Mr. A. KESSI, Professeur à L'U.S.T.H.B Examinateur.

Mr. M. HACHAICHI, Maître de conférences à L'U.S.T.H.B Examinateur.

Mr. A. AROUCHE, Maître de conférences à L'U.S.T.H.B Examinateur.

Remerciements

Je voudrais sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur A. AFFANE mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Sa disponibilité alliée à sa gentillesse naturelle et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de cette thèse. Je lui dois toute ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus vifs à Monsieur K. BETINA Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements tout aussi vifs vont à Monsieur A. KESSI Professeur à l'U.S.T.H.B. et Monsieur M. HACHAICHI, Maître de conférences à L'U.S.T.H. et Monsieur A. AROUCHE, Maître de conférences à L'U.S.T.H.B qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Mes derniers et profonds remerciements vont à ma seur chahira et ma mére.

VARIÉTES DE DIRAC

Contents

1. INTRODUCTION

En Mécanique, les variables dynamiques position et impulsion évoluent dans le fibré cotangent d'une variété qui se trouve être le type même de variété symplectique. Tenir compte de contraintes pour le mouvement impose de se placer dans une sous-variété qui en général n'est plus symplectique mais seulement présymplectique. Une structure symplectique permet d'associer à toute fonction régulière un champ de vecteur et donc une équation de mouvement. Malheureusement, en général ce procédé n'existe plus pour toutes les fonctions sur une variété présymplectique. Cependant, il n'exige pas vraiment de structure symplectique, mais une notion plus faible, celle de structure de Poisson que l'on doit à A. Lichnerowicz [4]. La notion de variété de Dirac que nous présentons ici contient à la fois celle de variété présymplectique et celle de Poisson. Elle fut introduite par J.T. Courant dans un article fondateur [2] que nous étudions dans ce travail.

Dans la Section 2, nous rappelons quelques éléments de Calcul Différentiel sur les variétés puisés essentiellement dans [1]. Nous y introduisons aussi le crochet de Schouten-Nijenhuis [5]qui généralise le crochet de Lie pour les champs de vecteurs.

Dans la section suivante, on expose quelques éléments de Géométrie de Poisson: structure présymplectique, symplectique, de Poisson.

Enfin dans la dernière section, nous introduisons les variétés de Dirac qui généralisent celles étudiées auparavant. Nous verrons que les notions connues pour les variétés présymplectiques et de Poisson: champs hamiltoniens, algèbres de Poisson se généralisent aux variétés de Dirac. Le fait le plus remarquable, est la notion de structure de Dirac induite. En effet, on aboutit à une condition suffisante pour la restriction de structure de Dirac, condition moins exigente que celle donnée par A. Weinstein dans [7] pour les variétés de Poisson. Nous terminerons ce travail par un résultat de structure locale pour les variétés de Dirac. Ce résultat récent dû à J.P. Dufour et A. Wade[3] améliore celui donné dans [2] et renseigne sur la dimension du feuilletage singulier induit par une structure de Dirac.

2. CALCUL DIIFFERENTIEL SUR LES VARIETES

Dans tout ce travail, M est une variété de classe C^∞, de dimension m. On note TM (resp. T^*M) son fibré tangent (resp. cotangent). Plus généralement, T^r_sM désigne son fibré des tenseurs de type $\binom{r}{s}$ (r fois contravariant et s fois covariant). Ainsi, on a $T^1_0M = TM$ et $T^0_1M = T^*M$. Parmi les champs tensoriels, on distinguera les formes différentielles et les multivecteurs.

2.1. **Champs et formes.** Pour tout entier k non nul, on notera alors $\Omega^k(M)$ l'espace des formes différentielles de degré k sur M. Par convention, on pose $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$, puis on construit la somme directe

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k\geq 0} \Omega^k(M).$$

Sur $\Omega(M)$, on dispose d'un produit extérieur noté $\wedge$ qui en fait une algèbre graduée.

De manière analogue, on introduit les espaces $A^k(M)$ des champs tensoriels contravariants alternés de degré k et leur somme directe $A(M)$ qui sera aussi une algèbre graduée pour le produit extérieur.

Il existe deux relations entre ces deux algèbres graduées. La première est un crochet de dualité défini par

$$\left\langle \theta^1 \wedge ... \wedge \theta^s, v_1 \wedge ... \wedge v_r \right\rangle = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } r \neq s \\ \det(\theta^i(v_j)) \text{ pour } r = s \end{array} \right. .$$

les θ^iétant dans $\Omega^1(M)$ et les v_j dans $A^1(M)$. La seconde est le produit intérieur. En effet, à l'aide de tout $X \in A^1(M)$, on construit une application $i(X)$ de $\Omega(M)$ dans lui même définie par

$$i(X)(f) = 0 \text{ pour } f \in \Omega^0(M)$$

$$i(X)\omega(v_1, ...v_{p-1}) = \omega(X, v_1, ...v_{p-1}) \text{ pour } \omega \in \Omega^p(M) \text{ avec } p \geq 1.$$

On a alors la formule

$$i(X)(\eta\wedge\omega) = (i(X)\eta)\wedge\omega + (-1)^p\eta\wedge(i(X)\omega) \text{ pour } \eta \in \Omega^p(M) \text{ et } \omega \in \Omega(M).$$

Le produit intérieur se généralise sans difficulté à $A(M)$ de manière à avoir la formule

$$i(P \wedge Q) = i(P) \wedge i(Q)\ \forall P, Q \in A(\Omega).$$

On obtient alors que

$$(1) \qquad i(X_1 \wedge ... \wedge X_r)\omega = (-1)^{(r-1)r/2}\omega(X_1, ..., X_r) \text{ pour } \omega \in \Omega^r(M).$$

La différentielle extérieure d et la dérivée de Lie L sont les outils du calcul différentiel sur les variétés. Nous aurons besoin des formules suivantes:

$$di(P) = (-1)^p i(P)d \text{ pour } P \in A^p(M).$$

$$i(L_XP) = [L_X, i(P)] \text{ pour } X \in A^1(M) \text{ et } P \in A^p(M).$$

La différentielle extérieure et la dérivée de Lie sont reliées par la formule

$$d\omega(X_0, X_1, X_2, ..., X_s) = \sum_i (-1)^i X_i.\omega(X_0, .., \widehat{X_i}, .., X_s) +$$

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, .., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..X_s). \tag{2}$$

2.2. **Le crochet de Shouten-Nijenhuis.** Le crochet de Shouten-Nijenhuis est une généralisation de la notion de crochet de Lie.

Théorème 2.2.1. *Il existe une unique application* $\mathbf{R}$*-bilinéaire de* $A(M) \times A(M)$ *dans* $A(M)$ *appelée crochet de Shouten-Nijenhuis et notée* $(P, Q) \rightarrow [P, Q]$ *qui vérifie les identités:*

Propriété 1. Pour f *et* g *dans* $A^0(M)$, $[f, g] = 0$.

Propriété 2. Pour $X \in A^1(M)$ *et* $Q \in A(M)$, $[X, Q] = L_X Q$ *(la dérivée de Lie de* Q *relativement à* X*).*

Propriété 3. Pour $P \in A^p(M)$ *et* $Q \in A^q(M)$,

$$[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, P]. \tag{3}$$

Propriété 4. Pour $P \in A^p(M)$ *et* $Q \in A^q(M)$ *et* $R \in A(M)$*, on a*

$$[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R]. \tag{4}$$

Preuve:

Les propriétés 1, 2 et 3 déterminent le crochet $[P, Q]$ lorsque $\min(\deg P, \deg Q) \leq 1$. Puis, la propriété 4, donne par récurrence, le crochet sans restriction sur les degrés. D'où l'unicité. L'existence s'établit en suivant les étapes suivantes:

a) On pose $[f, g] = 0$, $[X, g] = L_X g = -[g, X], [X, Y] = L_X Y$ pour f et g des fonctions, X et Y des champs de vecteur.

b) Par récurrence sur le degré de Q, on définit les crochets $[P, Q]$ pour $\deg P \leq 1$ et ce en choisissant $\deg R = 1$ dans (4). Par construction alors, la Propriété 4 est assurée pour $\deg P \leq 1$ et $\deg R = 1$ En raisonnant par récurrence sur le degré de R, on l'étend à R quelconque.

c) Par l'identité (4), on définit alors les crochets $[P, Q]$ pour P et Q quelconques.

e) On s'assure des Propriétés 4,5 et 3.

Détaillons maintenant ces étapes.

i) Ici, il ne s'agit que d'imposer les crochets $[P, Q]$ pour $\max(\deg P, \deg Q) \leq 1$. Par construction, la Propriété 3 est assurée.

ii) Soit $R' = R \wedge X$ avec $\deg R = r$, $\deg X = 1$ et supposons (4). On a

$$[P, Q \wedge R'] = [P, (Q \wedge R) \wedge X] = [P, (Q \wedge R)] \wedge X + (-1)^{(p-1)(q+r)} (Q \wedge R) \wedge [P, X] =$$

$$\left\{ [P, Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R] \right\} \wedge X + (-1)^{(p-1)(q+r)} (Q \wedge R) \wedge [P, X] =$$

$$[P, Q] \wedge R' + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge \left\{ [P, R] \wedge X + (-1)^{(p-1)r} R \wedge [P, X] \right\}$$

Mais, par construction, on

$$\left[P,R'\right]=[P,R]\wedge X+(-1)^{(p-1)r}R\wedge[P,X]\,.$$

Ainsi, on a (4) pour $\deg P\leq 1$.

iii) On définit alors le crochet de Shouten-Nijenhuis $[P,Q]$ pour des champs quelconques par récurrence en posant pour $X\in A^1(M),P\in A(M),S\in A^s(M)$

$$[P\wedge X,S]=(-1)^{(s-1)}\,[P,S]\wedge X+P\wedge[X,S]\,. \tag{5}$$

Nous allons établir la Propriété 4 pour P quelconque en raisonnant par récurrence sur le degré p de P. Soit $X\in A^1(M),Q\in A^q(M),R\in A^r(M)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}[P\wedge X,Q\wedge R]&=(-1)^{(q+r-1)}\,[P,Q\wedge R]\wedge X+P\wedge[X,Q\wedge R]\\&=(-1)^{(q+r-1)}\left\{[P,Q]\wedge R+(-1)^{(p-1)q}Q\wedge[P,R]\right\}\wedge X\\&\quad+P\wedge\{[X,Q]\wedge R+Q\wedge[X,R]\}\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$[P\wedge X,Q]\wedge R+(-1)^{pq}Q\wedge[P\wedge X,R]=$$
$$(-1)^{(q-1)}\,[P,Q]\wedge X\wedge R+P\wedge[X,Q]\wedge R+$$
$$(-1)^{pq}Q\wedge\left\{(-1)^{(r-1)}\,[P,R]\wedge X+P\wedge[X,R]\right\}.$$

iv) Par construction, la Propriété 3 est vraie lorsque $\max(\deg P,\deg Q)\leq 1$. On étend dans une première étape cette propriété par récurrence sur $\deg Q$. En effet, X étant un champ de vecteur, on a

$$-(-1)^{(p-1)q}\,[P,Q\wedge X]=-(-1)^{(p-1)q}\left\{[P,Q]\wedge X+(-1)^{(p-1)q}Q\wedge[P,X]\right\}$$
$$=-(-1)^{(p-1)q}\left\{(-1)^{(p-1)(q-1)+1}\,[Q,P]\wedge X+(-1)^{(p-1)q+1}Q\wedge[X,P]\right\}=$$
$$(-1)^{(p-1)}\,[Q,P]\wedge X+Q\wedge[X,P]=[Q\wedge X,P]\,.$$

Enfin, on procède par récurrence sur $\deg P$. X étant toujours un champ de vecteur,on aura

$$-(-1)^{(q-1)p}\,[P\wedge X,Q]=-(-1)^{(q-1)p}\left\{(-1)^{(q-1)}\,[P,Q]\wedge X+P\wedge[X,Q]\right\}=$$
$$[Q,P]\wedge X+(-1)^{(q-1)p}P\wedge[Q,X]=[Q,P\wedge X]\,.\spadesuit$$

Proposition 2.2.1. *Le crochet de Shouten-Nijenhuis possède aussi les propriétés suivantes:*

Propriété 5. Si $P\in A^p(M),Q\in A^q(M)$ et $p+q\geq 1$, alors $[P,Q]\in A^{p+q-1}(M)$.

Propriété 6. Pour $P\in A(M),Q\in A^q(M)$ et $R\in A^r(M)$, on a

$$[P\wedge R,Q]=P\wedge[R,Q]+(-1)^{(q-1)r}\,[P,Q]\wedge R.$$

Preuve:

i) Par définition, la Propriété 5 est vraie pour $p = 1$ et on l'étend par récurrence grâce à la formule (5).

ii) S'obtient en combinant les Propriétés 3 et 4. En effet, on a successivement

$$[P \wedge R, Q] = -(-1)^{(p+r-1)(q-1)} [Q, P \wedge R] =$$
$$-(-1)^{(p+r-1)(q-1)} \left\{ [Q, P] \wedge R + (-1)^{(q-1)p} P \wedge [Q, R] \right\} =$$
$$(-1)^{(p+r-1)(q-1)} \left\{ (-1)^{(p-1)(q-1)} [P, Q] \wedge R + (-1)^{(q-1)p} P \wedge (-1)^{(r-1)(q-1)} [R, Q] \right\}$$
$$= (-1)^{(q-1)r} [P, Q] \wedge R + P \wedge [R, Q] . \spadesuit$$

Nous avons aussi une identité de Jacobi généralisée pour ce crochet.

Proposition 2.2.2. *Pour $P \in A^p(M), Q \in A^q(M)$ et $R \in A^r(M)$ tels que $\min(p, q, r) \geq 1$, on a*

$$(-1)^{(p-1)(r-1)} [P, [Q, R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)} [Q, [R, P]] + (-1)^{(q-1)(r-1)} [R, [P, Q]] = 0$$

Preuve:

Observons que pour $p = q = r = 1$, cette identité est exactement celle de Jacobi pour le crochet de Lie des champs de vecteurs. On étend cette identité par récurrence. Par exemple pour $X \in A^1(M)$, notons, pour $i = 1, 2, 3$ T_i le $i^{ième}$ terme de la somme

$$S = (-1)^{(p-1)r} [P, [Q, R \wedge X]] + (-1)^{(q-1)(p-1)} [Q, [R \wedge X, P]]$$
$$+ (-1)^{(q-1)r} [R \wedge X, [P, Q]] .$$

Pour calculer T_1, on a besoin de

$$[P, [Q, R \wedge X]] = [P, [Q, R] \wedge X] + (-1)^{(q-1)r} [P, R \wedge [Q, X]] =$$
$$[P, [Q, R]] \wedge X + (-1)^{(p-1)(q+r-1)} [Q, R] \wedge [P, X] +$$
$$(-1)^{(q-1)r} \left\{ [P, R] \wedge [Q, X] + (-1)^{r(p-1)} R \wedge [P, [Q, X]] \right\} .$$

Pour le calcul de T_2, on écrit $[Q, [R \wedge X, P]] = (-1)^{r(p-1)+1} [Q, [P, R \wedge X]]$. Ceci permet d'utiliser le calcul précédent en échangeant P et Q. On obtient

$$[Q, [R \wedge X, P]] = (-1)^{r(p-1)+1} \left\{ [Q, [P, R]] \wedge X + (-1)^{(p+r-1)q} [P, R] \wedge [Q, X] \right\}$$
$$- \left\{ [Q, R] \wedge [P, X] + (-1)^{r(q-1)} R \wedge [Q, [P, X]] \right\} .$$

Enfin, on a par définition

$$[R \wedge X, [P, Q]] = (-1)^{p+q} [R, [P, Q]] \wedge X + R \wedge [X, [P, Q]] .$$

Après regroupement, et par l'hypothèse de récurrence, on trouve que les "coefficients" de $\wedge X$ et $R \wedge$ sont nuls. Il s'ensuit immédiatement que $S = 0$.$\spadesuit$

Proposition 2.2.3. *Le crochet de Shouten-Nijenhuis est un opérateur local.*

Preuve:

Soit ω un point d'un ouvert Ω sur lequel le champ tensoriel contravariant Q s'annule. On a alors $Q = f^2 Q$ où f est une fonction qui s'annule au voisinage de ω. La Propriété 4 donne $[P,Q] = [P,ffQ] = [P,f] \wedge fQ + (-1)^{p-1} fQ \wedge [P,f]$ expression qui s'annule au voisinage de ω.♠

Il est alors possible de définir la restriction du crochet de Shouten-Nijenhuis à un ouvert et d'effectuer alors les calculs dans des système de coordonnées.

On dispose d'une identité reliant, le produit intérieur, la différentielle extérieure et le crochet de Shouten-Nijenhuis.

Proposition 2.2.4. *On a la formule*

$$i([P,Q]) = [[i(P),d], i(Q)].$$

où les crochets du membre de droite sont les crochets d'endomorphismes de l'espace des formes différentielles.

Preuve:

Il s'agit d'établir l'identité

(6)

$$i(X_1)i(X_0)d\omega + i([X_0,X_1])\omega = i(X_0)di(X_1)\omega - di(X_0)i(X_1)\omega + i(X_1)di(X_0)\omega$$

La formule (2) s'écrit

$$\begin{aligned} i(X_1)i(X_0)d\omega(X_2,...,X_s) = X_0.\omega(X_1,..,X_s) - X_1.\omega(X_0,X_2,...,X_s) + \\ \sum_{i\geq 2}(-1)^i X_i.\omega(X_0,X_1,...,\widehat{X_i},..,X_s) \\ -\omega([X_0,X_1],X_2,...,X_s) + \sum_{j\geq 2}(-1)^j \omega([X_0,X_j],X_1,...,\widehat{X_j},..X_s) \\ -\sum_{2\leq j}(-1)^j\omega([X_1,X_j],X_0,...,\widehat{X_j},..X_s) + \\ \sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,X_{1,}..,\widehat{X_i},...,\widehat{X_j},..X_s). \end{aligned}$$

Un calcul direct donne:

$$\begin{aligned} i(X_0)di(X_1)\omega(X_2,...,X_s) = X_0.\omega(X_1,..,X_s) + \sum_{i\geq 2}(-1)^i X_i.\omega(X_0,X_{1,}..,\widehat{X_i},..,X_s) \\ + \sum_{j\geq 2}(-1)^j\omega([X_0,X_j],X_1,...,\widehat{X_j},..X_s) \\ + \sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,X_{1,}..,\widehat{X_i},...,\widehat{X_j},..X_s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} di(X_0)i(X_1)\omega(X_2,...,X_s) = -\sum_{i\geq 2}(-1)^i X_i.\omega(X_0,X_{1,}..,\widehat{X_i},..,X_s) \\ - \sum_{1\leq i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,X_{1,}..,\widehat{X_i},...,\widehat{X_j},..X_s), \end{aligned}$$

$$[i(X_1)di(X_0)\omega]\,(X_2,...,X_s) = -\sum_{i\geq 1}(-1)^i X_i.\omega(X_0,X_{1,}..,\widehat{X_i},..,X_s)$$
$$-\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j]\,,X_0,X_{1,}..,\widehat{X_i},...,\widehat{X_j},..X_s).$$

On calcul alors le membre de droite de (6) et on obtient le membre de gauche. Ainsi, on a la Proposition pour $\max(\deg P, \deg Q) \leq 1$. On la généralise par récurrence sur le degré de Q puis sur le degré de P. Par exemple, prenons $Q' = Q \wedge X$ avec $\deg X = 1$. On a

$$i(\left[P,Q'\right] = i([P,Q]\wedge X) + i(Q\wedge[P,X]) = i([P,Q])i(X) + i(Q)i([P,X]) =$$
$$[[i(P),d]\,,i(Q)]\,i(X) + i(Q)\,[[i(P),d]\,,i(X)]$$

et $[[i(P),d]\,,i(Q')] = [[i(P),d]\,,i(Q)i(X)]$. En développant, on arrive à une identification.♠

Corollaire 2.2.1. *Soit $P \in A^p(M)$, avec $p \geq 1$ et $f \in C^\infty(M)$. Pour toute forme $\eta \in \Omega^{p-1}$, on a:*

$$\langle \eta, [P,f]\rangle = \langle \eta \wedge df, P\rangle\,.$$

Preuve:

D'après la formule (1), $(-1)^{(p-2)(p-1)/2}\langle \eta,[P,f]\rangle = i([P,f])\eta = [[i(P),d]\,,i(f)]\,\eta = [i(P)d-(-1)^p di(P),i(f)]\,\eta$

$= (i(P)di(f) - i(f)i(P)d)\eta = i(P)(df\wedge\eta) = (-1)^{p(p-1)/2}\langle df\wedge\eta,P\rangle = (-1)^{p(p-1)/2+(p-1)}\langle df\wedge\eta,P\rangle$ et on conclut par le fait que $p(p-1)/2+(p-1)$ et $(p-2)(p-1)/2$ ont même parité.♠

Corollaire 2.2.2. *Soit $P \in A^p(M)$ avec $p \geq 1$ et $f_1,...,f_p$ dans $A^0(M)$. On a*

$$\langle df_1\wedge ...\wedge df_p, P\rangle = [...\,[[P,f_p]\,f_{p-1}]\,...,f_1]\,.$$

Preuve:

On applique le Corollaire précédent avec $\eta = df_1\wedge ...\wedge df_{p-1}$ et $f = f_p$. On obtient

$$\langle df_1\wedge ...\wedge df_p, P\rangle = \langle df_1\wedge ...\wedge df_{p-1},[P,f_p]\rangle$$

et on répète cette opération.♠

3. ELEMENTS DE GEOMETRIE DE POISSON

3.1. **Variétés présymplectiques.** Une 2-forme différentielle ω sur M induit un morphisme de fibrés $\flat : TM \to T^*M$ défini par

$$\langle \flat(X), Y \rangle = \omega(X, Y) = i_X \omega(Y).$$

Définition 3.1.1. *Une structure présymplectique sur M est une 2-forme différentielle fermée ω sur M. Le couple (M, ω) est appelé variété présymplectique. Lorsque $\flat$ est un isomorphisme, on dit que (M, ω) est une variété symplectique.*

Exemple 3.1.1. *Le fibré cotangent*

Soit $\pi : T^*M \to M$ le fibré cotangent de la variété M. A partir d'un système de coordonnées $\left\{x^i\right\}_{i=1}^m$ au dessus d'un ouvert U de M, on construit le système de coordonnées $\left\{q^1, ...q^m, p_1, ..., p_m\right\}$ sur l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ par les formules

$$q^i = x^i \circ \pi; \quad \xi = p_i(x, \xi) dx^i \text{ pour } x \in M \text{ et } \xi \in T_x^*M.$$

On vérifie sans difficultés qu'en posant $\theta = p_i dq^i$, on obtient une 1-forme sur T^*M. La forme $\omega = d\theta$ fait de T^*M une variété symplectique. Observons que $\omega = dp_i \wedge dq^i$.

Exemple 3.1.2. *sous-variété d'une variété présymplectique*

Soit (M, ω) une variété présymplectique et $j : N \to M$ une sous-variété; alors $(N, j^*\omega)$ est aussi une variété présymplectique.

Proposition 3.1.1. *Le noyau du morphisme $\flat$ est stable par le crochet de Lie.*

Preuve:
Elle repose sur la formule:

(7)
$$d\omega(X_0, X_1, X_2) = \sum_i (-1)^i X_i.\omega(X_0, \widehat{X_i}, X_2) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, X_2).$$

Puisque ω est fermée, on aura $\omega([X_0, X_1] X_2) = 0$ si X_0 et X_1 sont dans $Ker\flat$.♠

Ainsi, une structure présymplectique induit un feuilletage singulier au sens de [6] lorsque $Ker\flat$ est une distribution.

Définition 3.1.2. *Un champ de vecteur X est dit hamiltonien lorsqu'il existe une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que*

$$i_X \omega = df.$$

Cette notion est l'analogue de celle de gradient en Géométrie Riemannienne.

Proposition 3.1.2. *L'espace vectoriel des champs hamiltoniens est stable par le crochet de Lie. Plus précisément, si X_0 et X_1 sont hamiltoniens, alors*

$$i_{[X_0,X_1]}\omega = d\left[\omega(X_1, X_0)\right].$$

Preuve:

On a

$$0 = d\omega(X_0, X_1, X_2) = X_0.\omega(X_1, X_2) - X_1.\omega(X_0, X_2) + X_2.\omega(X_0, X_1)$$
$$-\omega(\left[X_0, X_1\right], X_2) + \omega(\left[X_0, X_2\right], X_1) - \omega(\left[X_1, X_2\right], X_0).$$

Si X_0 et X_1 sont hamiltoniens, choisissons alors pour $i = 0, 1$, des fonctions f_i telles que

$$\omega(X_i, X_2) = X_2 f_i \text{ pour tout champ de vecteur } X_2.$$

On aura

$$0 = X_0X_2f_1 - X_1X_2f_0 - X_2X_0f_1 - \omega(\left[X_0, X_1\right], X_2) - \left[X_0, X_2\right] f_1 + \left[X_1, X_2\right] f_0.$$

Il s'ensuit que $\omega(\left[X_0, X_1\right], X_2) = -X_2X_1f_0 = -X_2(\omega(X_0, X_1))$, ce qui suffit.♠

On introduit à présent l'ensemble des fonctions admissibles

$$\mathcal{P}_\omega = \left\{f \in C^\infty(M)/\ \exists X \in T^1M \text{ tel que } i_X\omega = df\right\}$$

Remarquons que la solution de l'équation $i_X\omega = df$ est unique modulo le noyau $Ker\flat$ On peut donc définir dans $\mathcal{P}_\omega$ le crochet

$$\{f, g\} = \omega(X, Y) \text{ lorsque } i_X\omega = df \text{ et } i_Y\omega = dg.$$

On a alors

$$\{f, g\} = Yf = -Xg$$

Définition 3.1.3. *Une algèbre de Poisson est une algèbre commutative associative muni d'un crochet* **R***-bilinéaire, antisymétrique et vérifiant les identités*

$$\{f, gh\} = \{f, g\} h + \{f, h\} g \text{ (Condition de Leibniz),}$$
$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \text{ (Condition de Jacobi).}$$

Proposition 3.1.3. *Munie de ce crochet, $\mathcal{P}_\omega$ est une algèbre de Poisson.*

Preuve:

Montrons d'abord que $\mathcal{P}_\omega$ est stable pour le produit. De fait, si $i_X\omega = df$ et $i_Y\omega = dg$, alors $i_{gX+fY}\omega = dfg$. De plus, étant donnée une troisième fonction $h \in \mathcal{P}_\omega$ et Z tel que $i_Z\omega = dh$, on aura $\{h, fg\} = \omega(Z, fY + gX) = f\{g, h\} + g\{f, h\}$ et donc la règle de Leibniz. De plus, d'après la Proposition 3.1.2, on a $d\{g, h\} = i_{[Z,Y]}\omega$ et ainsi $\mathcal{P}_\omega$ est stable par le crochet. Enfin, on a

$$\{f, \{g, h\}\} = -\{f, Yh\} = XYh,$$
$$\{g, \{h, f\}\} = -YXh,$$
$$\{h, \{f, g\}\} = [Y, X]h.$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient l'identité de Jacobi.♠

3.2. **Variétés de Poisson.**

Définition 3.2.1. *Une structure de Poisson sur M est une sructure d'algèbre de Poisson sur $C^\infty(M)$. Une variété de Poisson est une variété munie d'une structure de Poisson.*

Exemple 3.2.1. *Le dual d'une algèbre de Lie de dimension finie.*

1/ Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ son duale. Puisque $\mathcal{G}$ est de dimension finie, on l'identifie à $\mathcal{G}^{**}$ et l'on peut donc considérer $\mathcal{G}^{**}$ comme une algèbre de Lie. On a besoin aussi de l'application linéaire ad_X^* de $\mathcal{G}^*$ dans $\mathcal{G}^*$ définie pour tout $X \in \mathcal{G}^{**}$ par

$$\langle Y, ad_X^*(\xi)\rangle = \langle [Y,X], \xi\rangle\,;\ \forall Y \in \mathcal{G}^*,\ \xi \in \mathcal{G}^{**}.$$

Pour $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$, on définit la fonction df de $\mathcal{G}^*$ dans $\mathcal{G}^{**}$ par

$$\langle df(x), h\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}\ \ \forall x \in \mathcal{G}^*,\ h \in \mathcal{G}^*.$$

et on munit $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ du crochet

$$\{f,g\}(x) = \langle [df(x), dg(x)], x\rangle$$

où $[.,.]$ représente le crochet de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}^{**}$ et $\langle .,.\rangle$ la dualité entre $\mathcal{G}^{**}$ et $\mathcal{G}$. Il est clair que ce crochet est bilinéaire et antisymétrique. Par ailleurs, la formule de différentiation d'un produit assure que ce crochet satisfait à la règle de Leibniz. Il nous reste à établir le point le moins évident qu'est l'identité de Jacobi. Soient donc f, g, h dans $C^\infty(\mathcal{G}^*)$. Par définition, on a

$$d\{f,g\}(x)(y) = \langle [df(x), dg(x)], y\rangle + \left\langle \left[d^2 f(x)(y), dg(x)\right], x\right\rangle + \left\langle \left[df(x), d^2 g(x)(y)\right], x\right\rangle$$

$$= \langle [df(x), dg(x)], y\rangle + \left\langle d^2 f(x)(y), ad^*_{dg(x)}x\right\rangle - \left\langle d^2 g(x)(y), ad^*_{df(x)}x\right\rangle =$$

$$\langle [df(x), dg(x)], y\rangle + \left\langle d^2 f(x)(ad^*_{dg(x)}x), y\right\rangle - \left\langle d^2 g(ad^*_{df(x)}x), y\right\rangle.$$

D'où l'identité

$$d\{f,g\}(x) = [df(x), dg(x)] + d^2 f(x)(ad^*_{dg(x)}x) - d^2 g(ad^*_{df(x)}x)$$

et il s'ensuit que

$$\{\{f,g\},h\}(x) = \langle [[df(x), dg(x)], dh(x)], x\rangle + \left\langle \left[d^2 f(x)(ad^*_{dg(x)}x), dh(x)\right], x\right\rangle$$

$$- \left\langle \left[d^2 g(x)(ad^*_{df(x)}x), dh(x)\right], x\right\rangle$$

La somme des termes obtenus par permutations circulaires de f, g et h est constitué d'un premier terme

$$\langle [[df(x), dg(x)], dh(x)], x\rangle + \langle [[dg(x), dh(x)], df(x)], x\rangle + \langle [[dh(x), df(x)], dg(x)], x\rangle$$

qui est nul par l'identité de Jacobi dans $\mathcal{G}^{**}$. La dérivée seconde $d^2 f(x)$ intervient dans

$$\left\langle \left[d^2 f(x)(ad^*_{dg(x)}x), dh(x)\right], x\right\rangle - \left\langle \left[d^2 f(x)(ad^*_{dh(x)}x), dg(x)\right], x\right\rangle =$$

$$\left\langle d^2f(x)(ad^*_{dg(x)}x), ad^*_{dh(x)}x \right\rangle - \left\langle d^2f(x)(ad^*_{dh(x)}x), ad^*_{dg(x)}x \right\rangle = 0$$

par symétrie de la dérivée seconde. De même; les contributions des dérivées secondes de f et g sont nulles.

Exemple 3.2.2. *L'espace* $\mathbf{R}^3$.

On munit $\mathbf{R}^3$ du produit scalaire usuel $(u, v) \rightsquigarrow \langle u, v \rangle$ et du produit vectoriel $(u, v) \rightsquigarrow u \times v$. On sait que $\mathbf{R}^3$ muni du produit vectoriel est une algèbre de Lie. Comme le produit scalaire permet d'identifier $\mathbf{R}^3$ à son dual, alors comme cas particulier de l'exemple précédent, on obtient que le crochet

$$\{f, g\}(x) = \langle x, gradf(x) \times gradg(x) \rangle$$

définit une structure de Poisson sur $\mathbf{R}^3$.

Exemple 3.2.3. *Une variété symplectique.*

C'est un cas particulier de la Proposition 3.1.3 où $\mathcal{P}_\omega = C^\infty(M)$.

Etant donnée une fonction $f \in C^\infty(M)$, par la condition de Leibniz, l'application $g \rightsquigarrow \{f, g\}$ est une dérivation de l'algèbre $C^\infty(M)$. Il existe donc un champ de vecteur $X_f \in A^1(M)$ tel que

$$\{f, g\} = X_f g \;\forall g \in C^\infty(M).$$

Définition 3.2.2. *Un champ de vecteur X est dit hamiltonien s'il existe une fonction f telle que $X = X_f$.*

Théorème 3.2.1. *L'application $f \rightsquigarrow X_f$ de $C^\infty(M)$ dans T^1M est un morphisme d'algèbres de Lie. De plus, on a la règle $X_{fg} = fX_g + gX_f$.*

Preuve:

$i)$ L'identité de Jacobi se traduit par $X_f X_g h - X_g X_f h - X_{\{f,g\}} = 0$.

$ii)$ C'est une conséquence de la règle de Leibniz. En effet, on a $X_{fg}h = \{fg, h\} = gX_f h + fX_g h$.♠

Corollaire 3.2.1. *L'espace des champs de vecteurs hamiltoniens est stable par le crochet de Lie.*

Une autre conséquence importante de la condition de Leibniz est le caractère local du crochet $\{., .\}$. En effet, on a le

Lemme 3.2.1. *Si f s'annule sur un ouvert V, alors, pour toute fonction g, $\{f, g\}$ s'annule aussi sur V.*

Preuve:

Pour un point $p \in V$, on peut trouver une fonction α nulle dans un voisinage de p et telle que $f = \alpha f$. La condition de Leibniz au point p donne

$$\{f, g\}(p) = \{\alpha f, g\}(p) = \alpha(p)\{f, g\}(p) + f(p)\{\alpha, g\}(p) = 0.♠$$

Ainsi, on peut donc définir la restriction d'une structure de Poisson à un ouvert, ce qui permettra d'introduire un peu plus loin la notion de tenseur de Poisson. Pour celà, il nous faut exploiter encore la condition de Leibniz.

Lemme 3.2.2. *Si f est constante, alors X_f est nul.*

Si $f \equiv 1$, pour toute autre fonction g, on aura $\{f,g\} = \left\{f^2, g\right\} = 2\{f,g\}$ et donc $\{1,g\} = 0$. Si λ est une constante, on aura $\{\lambda, g\} = \lambda\{1,g\} = 0$.♠

Théorème 3.2.2. *Il existe un unique tenseur antisymétrique $P \in A^2(M)$ tel que*

$$\{f,g\} = P(df, dg)\ \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Preuve:

Soit $\left\{x^i\right\}$ un système de coordonnées sur un ouvert U de M. Etant données deux fonctions f et g, on peut supposer, quitte à diminuer U et en vertu de la formule de Taylor que sur U, on ait pour tout $x \in U$ et $y \in U$

$$f(x) = f(y) + (x^i - y^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(y) \text{ et } g(x) = g(y) + (x^i - y^i)\frac{\partial g}{\partial x^i}(y).$$

En utilisant la $\mathbf{R}$-bilinéarité du crochet et le Lemme précedent, on obtient l'identité

$$\{f,g\} = \left\{x^i, x^j\right\}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}. \tag{8}$$

sur$U$. Le tenseur P est défini par ses composantes $P^{ij} = \left\{x^i, x^j\right\}$ dans tout système de coordonnées$\left\{x^i\right\}$.♠

P est appelé tenseur de Poisson de la structure étudiée.

Théorème 3.2.3. *Le tenseur de Poisson vérifie l'identité*

$$P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial x^s} + P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial x^s} + P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial x^s} = 0 \tag{9}$$

Preuve:

La formule (8) donne

$$\left\{x^i, \left\{x^j, x^k\right\}\right\} = P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial x^s}.$$

En sommant, on obtient

$$\left\{x^i, \left\{x^j, x^k\right\}\right\} + \left\{x^j, \left\{x^k, x^i\right\}\right\} + \left\{x^k, \left\{x^i, x^j\right\}\right\} = P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial x^s} + P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial x^s} + P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial x^s}$$

L'identité de Poisson découle alors de celle de Jacobi.♠

Réciproquement, à partir d'un champ de 2-vecteurs $P \in A^2(M)$, on construit le crochet

$$\{f,g\} = \langle df \wedge dg, P\rangle.$$

De manière évidente, ce crochet est $\mathbf{R}$-bilinéaire, antisymétrique et vérifie la règle de Leibniz. Lichnerowicz a montré que le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P,P]$ est nul si et seulement si le crochet associé vérifie l'identité de Jacobi. En effet, par le Corollaire 2.2.2, on a

$$\{f,g\} = [[P,g], f] = -[[P,f], g].$$

Théorème 3.2.4. *Avec les notations ci-dessus, on a la formule*

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=\frac{1}{2}\left\langle df\wedge dg\wedge dh,[P,P]\right\rangle.$$

Preuve:

Elle utilise l'identité de Jacobi graduée. Posons $[P,g]=Y$ et $[P,h]=Z$. On a

$$\{f,\{g,h\}\}=\left[\left[P,\left[\left[P,h\right],g\right]\right],f\right]=-\left[\left[P,\left[\left[P,g\right],h\right]\right],f\right]=-\left[\left[P,\left[Y,h\right]\right],f\right].$$

Or par l'identité de Jacobi, on a

$$[P,[Y,h]]=[Y,[h,P]]+[h,[P,Y]]=[Y,[P,h]]+[h,[P,Y]]=$$
$$[Y,Z]+[h,[P,Y]].$$

L'identité de Jacobi donne encore

$$[P,Y]=[P,[P,g]]=-[P,[g,P]]-[g,[P,P]]$$

et donc

$$2\,[P,Y]=-[g,[P,P]]=--\left[\left[P,P\right],g\right].$$

Il s'ensuit que

$$\{f,\{g,h\}\}=-\left[\left[Y,Z\right],f\right]-\frac{1}{2}\left[\left[\left[\left[P,P\right],g\right],h\right],f\right].$$

D'un autre côté, un calcul direct donne

$$\{g,\{h,f\}\}=[Y,[Z,f]]\ \text{ et }\ \{h,\{f,g\}\}=-[Z,[Y,f]].$$

En sommant, on obtient

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=-\frac{1}{2}\left[\left[\left[\left[P,P\right],g\right],h\right],f\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left\langle df\wedge dh\wedge dg,[P,P]\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle df\wedge dg\wedge dh,[P,P]\right\rangle.\spadesuit$$

Calculons maintenant le crochet $[P,P]$. On a en utilisant les règles de calcul pour le crochet de Schouten-Nijenhuis

$$[P,P]=[P,P^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}]=[P,P^{ij}]\wedge\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}+P^{ij}[P,\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}].$$

Mais

$$[P,P^{ij}]=[P^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\wedge\frac{\partial}{\partial x^\beta},P^{ij}]=P^{\alpha\beta}[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\wedge\frac{\partial}{\partial x^\beta},P^{ij}]$$

et

$$[P,\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}]=[P^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\wedge\frac{\partial}{\partial x^\beta},\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}]=[P^{\alpha\beta},\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}]\wedge\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\wedge\frac{\partial}{\partial x^\beta}.$$

En regroupant, on obtient

$$[P,P]=2P^{\alpha\beta}[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\wedge\frac{\partial}{\partial x^\beta},P^{ij}]\wedge\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}=4P^{sk}\frac{\partial P^{ij}}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}\wedge\frac{\partial}{\partial x^k}=$$
$$8\sum_{i<j<k}(P^{sk}\frac{\partial P^{ij}}{\partial x^s}+P^{si}\frac{\partial P^{jk}}{\partial x^s}+P^{sj}\frac{\partial P^{ki}}{\partial x^s})\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}\wedge\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

En conclusion, nous pouvons dire qu'une structure de Poisson équivaut à la donnée d'un champ de tenseurs deux fois contravariant alterné P vérifiant soit l'identité (9) soit l'identité $[P,P]=0$.

4. VARIETES DE DIRAC

Dans cette section, V désigne un espace vectoriel réel de dimension finie m et V^* son dual. Nous savons que sur l'espace vectoriel V il n'existe pas de structure géométrique privilégiée (produit scalaire, volume). Il n'existe pas aussi de moyen privilégié de l'identifier à son dual. Pas plus qu'il n'existe d'application naturelle de V sur son dual ou vice versa. Par bonheur, la somme directe $\mathcal{V} = V \oplus V^*$ possède des structures naturelles qui sont la base algébrique de la Théorie des Variétés de Dirac. Dans toute la suite, on notera ρ et ρ^* les projections respectives de $\mathcal{V}$ sur V et V^*.

4.1. **Structures algébriques naturelles sur $\mathcal{V}$.** L'espace $\mathcal{V}$ est munie de la forme bilinéaire symétrique naturelle

$$\langle (x,\xi),(y,\eta)\rangle = \frac{1}{2}(\xi(y)+\eta(x)).$$

Proposition 4.1.1. *La forme bilinéaire $\langle .,.\rangle$ est non dégénérée et de signature (m,m).*

Preuve:

A partir d'une base $e = \{e_i\}_{i=1}^m$ de V et de sa base duale $e^* = \left\{e^i\right\}_{i=1}^m$, on construit dans $\mathcal{V}$ la base

$$\left\{(e_1,e^1),...,(e_m,e^m),(e_1,-e^1),...,(e_m,-e^m)\right\}.$$

Dans cette base, la forme $\langle .,.\rangle$ est représentée par la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & -\mathbf{1}_m \end{bmatrix}.\spadesuit$$

L'on dispose aussi d'une forme volume naturelle sur l'espace $\mathcal{V}$. En effet, à une base $e = \{e_i\}_{i=1}^m$ de V et sa base duale $e^* = \left\{e^i\right\}_{i=1}^m$, on associe la base

$$\mathcal{E} = \left\{(e_1,0),...,(e_m,0),(0,e^1),...,(0,e^m)\right\}.$$

de $\mathcal{V}$.

Proposition 4.1.2. *La forme déterminant dans cette base $\mathcal{E}$ est indépendante du choix de la base e.*

Preuve:

Soit e' une seconde base de V et $\mathcal{E}'$ la base de $\mathcal{V}$ qui lui est associée. Si P est la matrice de passage de e à e', on passe de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix}$$

qui est de déterminant 1.$\spadesuit$

4.2. **Structure de Dirac linéaire.** Etant donné un sous-espace vectoriel L de $\mathcal{V}$, on notera $L^{\perp}$ son orthogonal pour la forme bilnéaire $\langle .,. \rangle$.

Définition 4.2.1. *Un sous-espace vectoriel L de $\mathcal{V}$ est dit isotrope si $L \subseteq L^{\perp}$.*

Proposition 4.2.1. *La dimension d'un sous espace isotrope est au maximum m.*

Preuve:
L'inclusion $L \subseteq L^{\perp}$ implique $\dim L \leq 2m - \dim L$ et donc $\dim L \leq m$.♠

Définition 4.2.2. *Une structure de Dirac linéaire sur V est un sous-espace isotrope de dimension m.*

Exemple 4.2.1. *Structure de Dirac induite par un sous-espace vectoriel.*

Soit E un sous-espace vectoriel de V et

$$Ann(E) = \{\theta \in V^* / \ \theta(x) = 0 \ \forall x \in E\}.$$

L'espace $L = E \oplus Ann(E)$ est de manière évidente une structure de Dirac.

Exemple 4.2.2. *Structure de Dirac induite par une 2-forme.*

Soit ω une forme bilinéaire antisymétrique sur V. A l'aide du produit intérieur, on lui associe une application linéaire ω_b de V dans V^* définie par

$$\omega_b(x)(y) = \omega(x, y) \text{ pour } x \in V, \ y \in V.$$

Par construction, on a l'identité $\omega_b(x)(y) + \omega_b(y)(x) = 0$. Il s'ensuit que le sous-espace graphe de ω_b

$$G_\omega = \{(x, \omega_b(x)); \ x \in V\}$$

est isotrope. Comme c'est un graphe d'une application linéaire sur V, sa dimension est celle de V.

Exemple 4.2.3. *Structure de Dirac induite par une 2-vecteur.*

Soit P une forme bilinéaire antisymétrique sur V^* et $P^{\#}$ l'application linéaire de V^* dans V définie par

$$\eta(P^{\#}(\xi)) = P(\eta, \xi) \text{ pour } \xi \in V^*, \eta \in V^*.$$

Dans ce cas aussi, l'identité $\eta(P^{\#}(\xi)) + \xi(P^{\#}(\eta)) = 0$ assure que le graphe

$$G_P = \left\{(P^{\#}(\xi), \xi); \ \xi \in V^*\right\}$$

est une structure de Dirac linéaire sur V.

4.3. **Structure de Dirac linéaire induite.**

Proposition 4.3.1. *Soit ε une forme bilinéaire antisymétrique sur un sous-espace vectoriel E de V. Alors le sous-espace*

$$L(E,\varepsilon)=\{(x,\xi)\in\mathcal{V}/\ x\in E\ \textit{ et } \varepsilon(x,y)=\xi(y)\ \forall y\in E\}$$

est une structure de Dirac linéaire sur V.

Preuve:

Pour (x,ξ) et (y,η) dans $L(E,\varepsilon)$, on a $2\langle(x,\xi),(y,\eta)\rangle=\xi(y)+\eta(x)=\varepsilon(x,y)+\varepsilon(y,x)=0$ et ainsi, $L(E,\varepsilon)$ est isotrope. Soit $e=\{e_i\}_{i=1}^m$ une base de V telle que $\{e_i\}_{i=1}^{\dim E}$ engendre E et $e^*=\left\{e^i\right\}_{i=1}^m$ sa base duale. Un couple (x,ξ) est dans $L(E,\varepsilon)$ si et seulement si

$$e^i(x)=0 \text{ pour } i>\dim E \text{ et } \xi(e_i)-\varepsilon(x,e_i)=0 \text{ pour } i\leq\dim E.$$

On voit que $L(E,\varepsilon)$ est caractérisée par m conditions linéaires. Donc $\dim L(E,\varepsilon)\geq 2m-m$ et par isotropie, on a $\dim L(E,\varepsilon)=m$.♠

Proposition 4.3.2. *Réciproquement, toute structure de Dirac linéaire L sur V est de la forme $L(E,\varepsilon)$ où $E=\rho(L)$.*

Preuve:

Soit L une structure de Dirac linéaire sur V et $E=\rho(L)$. Soient $x\in E$, $\xi\in V^*$, $\xi'\in V^*$ telles que $(x,\xi)\in L$ et $(x,\xi')\in L$. Pour un élément y de E, choisissons $\eta\in V^*$ tel que $(y,\eta)\in L$. Par isotropie, on a $\xi(y)=-\eta(x)=\xi'(y)$. D'où une application θ de E dans E^* qui à un élément x associe la restriction à E de toute forme ξ telle que (x,ξ) soit dans L. Comme L est isotrope, on a l'identité $\theta(x)(y)+\theta(y)(x)=0$ sur E. D'où la forme bilinéaire antisymétrique ε sur E définie par $\varepsilon(x,y)=\theta(x)(y)$. D'après la proposition précédente et pour une raison de dimension, pour s'assurer que $L(E,\varepsilon)=L$, il suffit d'établir l'inclusion $L\subseteq L(E,\varepsilon)$. Or, si $(x,\xi)\in L$, par construction de θ, la restriction de ξ à E est justement $\theta(x)$ et ainsi, $(x,\xi)\in L(E,\varepsilon)$.♠

Proposition 4.3.3. *Soit F un sous-espace vectoriel de V^* et ε^* une forme bilinéaire antisymétrique sur F. Alors le sous-espace*

$$L^*(F,\varepsilon^*)=\{(x,\xi)\in\mathcal{V}/\ \xi\in F\ \textit{ et } \varepsilon^*(\xi,\eta)=\eta(x)\ \forall\eta\in F\}$$

est une stucture de Dirac linéaire sur V.

Preuve:

Pour (x,ξ) et (y,η) dans $L^*(F,\varepsilon^*)$, on a $2\langle(x,\xi),(y,\eta)\rangle=\xi(y)+\eta(x)=\varepsilon^*(\eta,\xi)+\varepsilon^*(\xi,\eta)=0$ et ainsi, $L^*(F,\varepsilon^*)$ est isotrope. Puis, on choisit une base $\left\{e^i\right\}_{i=1}^m$ de V^* dont les premiers éléments engendrent F. Cette base peut être considérée comme duale d'une certaine base $\{e_i\}_{i=1}^m$ de V. On voit alors que (x,ξ) est dans $L^*(F,\varepsilon^*)$ si et seulement si

$$\xi(e_i)=0 \text{ pour } i>\dim F \text{ et } \varepsilon^*(\xi,e^i)=e^i(x) \text{ pour } i\leq\dim F.$$

Il s'ensuit que $\dim L^*(F,\varepsilon^*)\geq m$, ce qui suffit.♠

On a aussi une réciproque.

Proposition 4.3.4. *Toute structure de Dirac linéaire L sur V est de la forme $L^*(F, \varepsilon^*)$ avec $F = \rho^*(L)$.*

Preuve:

Soit L une structure de Dirac linéaire sur V et $F = \rho^*(L)$. Etant donné un élément ξ de F, on montre que si (x, ξ) et (x', ξ) sont deux éléments de L, alors $\eta(x) = \eta(x')$ pour tout η dans F. D'où une application linéaire θ^* de F dans F^* définie par

$$\theta^*(\xi)(\eta) = \eta(x) \ x \text{ étant tel que } (x, \xi) \in L.$$

L'isotropie de L assure que la forme bilnéaire définie sur F par $\varepsilon^*(\xi, \eta) = \theta^*(\xi)(\eta)$ est antisymétrique. Pour conclure, il suffit d'observer l'inclusion $L \subseteq L^*(F, \varepsilon^*)$.♠

Grâce à la Proposition 4.3.2, on peut introduire la notion de structure de Dirac induite. En effet, soit L une structure de Dirac linéaire sur V et W un sous-espace vectoriel de V. On peut considérer cette structure de Dirac de la forme $L = L(E, \varepsilon)$. Soit alors $E' = E \cap W$, i l'injection naturelle de E' dans E et ε' l'application de E' dans E'^* définie par

$$\varepsilon'(x')(y') = \varepsilon(i(x'), i(y')).$$

Comme visiblement ε' est antisymétrique, le sous-espace

$$L_W = \left\{(x', \xi') \ / \ x' \in E',\ \xi' \in W^* \text{ et } \varepsilon'(x')(y') = \xi'(y') \ \forall y' \in E'\right\}$$

est une structure de Dirac linéaire sur W.

Plus loin, nous aurons besoin de la

Proposition 4.3.5. *L'espace L_W est isomorphe au quotient*

$$\frac{L \cap (W \oplus V^*)}{L \cap (\{0\} \oplus W^0)}.$$

Preuve:

Un élément de $L \cap (W \oplus V^*)$ est un couple (x, ξ) tel que $x \in W \cap E$, $\xi \in V^*$ et $\xi(y) = \varepsilon(x, y)$ pour tout $y \in E$. A ce couple (x, ξ) on associe le couple (x', ξ') défini par $i(x') = x$ et $\xi' = \xi \mid_W$. On obtient ainsi une application linéaire R_W de $L \cap (W \oplus V^*)$ dans L_W. Par construction, on a $\ker R_W = L \cap (\{0\} \oplus W^0)$ et il suffit donc de s'assurer que R_W est surjective. Pour celà, choisissons une décomposition

$$V = E \oplus G$$

qui va induire une décomposition

$$W = (W \cap E) \oplus (W \cap G).$$

A partir d'un élément (x', ξ') dans L_W, on construit $\eta \in E^*$ défini par $\eta(y) = \varepsilon(i(x), y)$ et un prolongement θ à G de la restriction de ξ' à $W \cap G$. Puis, on forme $\xi \in V^*$ en posant $\xi = \eta$ sur E et $\xi = \theta$ sur G. Par construction, on a $(i(x'), \xi) \in L \cap (W \oplus V^*)$. De plus tout $w \in W$ se décompose en $w' \oplus w''$ avec

$$\xi(w'') = \xi'(w'') \text{ et } \xi(w') = \eta(i(w')) = \varepsilon'(x', w') = \xi'(w').$$

On voit donc que $(x', \xi') = R_W(i(x), \xi)$.♠

4.4. **Structure de Dirac sur une variété.**

4.4.1. *Définition et généralités.* Sur $TM \oplus T^*M$, on définit les deux formes $C^\infty(M)$ bilinéaires

$$\langle (X,\xi),(Y,\eta)\rangle_+ = \frac{1}{2}(\xi(Y)+\eta(X)),$$

$$\langle (X,\xi),(Y,\eta)\rangle_- = \frac{1}{2}(\xi(Y)-\eta(X)).$$

La première est symérique, la seconde est alternée. On introduit également le crochet de Courant

$$[(X,\xi),(Y,\eta)] = ([X,Y], L_X\eta - L_Y\xi + d(\langle (X,\xi),(Y,\eta)\rangle_-)).$$

Ce crochet est bien alterné mais en général ne vérifie pas l'identité de Jacobi.

On se donne un fibré de Dirac L au dessus de la variété M, c'est à dire un sous-fibré vectoriel $L \subseteq TM \oplus T^*M$ dont la fibre en chaque point σ soit une structure de Dirac linéaire de $T_\sigma M$. Observons que si (X,ξ) et (Y,η) sont deux sections de L, alors

$$\langle (X,\xi),(Y,\eta)\rangle_- = \xi(Y) = -\eta(X)$$

et un calcul direct donne

$$[(X,\xi), f(Y,\eta)] = f\,[(X,\xi),(Y,\eta)] + X(f)(Y,\eta).$$

En effet,

$$[(X,\xi), f(Y,\eta)] = (([X,fY], L_X f\eta - L_{fY}\xi + d(f\,\langle (X,\xi),(Y,\eta)\rangle_-)) =$$

$$(X(f)Y + f\,[X,Y], X(f)\eta + fL_X\eta - fL_Y\eta - \xi(Y)df + fd(\langle (X,\xi),(Y,\eta)\rangle_-))$$

$$+\xi(Y)df = f\,[(X,\xi),(Y,\eta)] + X(f)(Y,\eta).$$

Définition 4.4.1. *Un algèbroïde de Lie est un fibré vectoriel A au dessus d'une variété M avec les conditions supplémentaires suivantes:*

- *il existe un crochet d'algèbre de Lie $[.,.]$ sur l'espace $\Gamma(A)$ des sections de A,*
- *il existe un morphisme de fibrés $\rho : A \to TM$ dite ancre vérifiant la règle de dérivation*

$$[\mu, f\eta] = f\,[\mu,\eta] + (\rho(\mu).f)\eta,$$

- *cette application ρ est un morphisme d'algèbres de Lie sur les sections.*

Exemple 4.4.1. *Variété de Poisson.*

Etant donné $P \in A^2(M)$, cherchons à présent un crochet sur $\Omega^1(M)$ vérifiant

$$[\alpha, \beta]_P = -[\beta, \alpha]_P\,, \tag{10}$$

$$[\alpha, f\beta]_P = ((P^\#\alpha).f)\beta + f\,[\alpha, \beta]_P\,, \tag{11}$$

$$[\alpha, \beta]_P = dP(\alpha, \beta) \tag{12}$$

La condition (11) assure que ce crochet est local. On peut donc, en travaillant dans un système de coordonnées voir que nécessairement

$$[\xi, \eta]_P = L_{P^\#(\xi)}\eta - L_{P^\#(\eta)}\xi + d(P(\eta, \xi)). \tag{13}$$

Il s'avère par la suite que le crochet défini par cette formule convient. Puis, on cherche les conditions pour lesquelles ce crochet vérifie l'identité de Jacobi. Par le Théorème 3.2.4 , on voit que l'identité

$$d\,\langle df \wedge dg \wedge dh, [P, P]\rangle = 0$$

est une condition nécéssaire et suffisante. Mais cette condition s'écrit aussi (en prenant $f = \alpha\beta$)

$$\langle d\beta \wedge dg \wedge dh, [P, P]\rangle\, d\alpha + \langle d\alpha \wedge dg \wedge dh, [P, P]\rangle\, d\beta = 0.$$

Cette dernière identité équivaut à

$$\langle d\beta \wedge dg \wedge dh, [P, P]\rangle = 0$$

puis à

$$[P, P] = 0.$$

Ainsi, le crochet défini par (13) vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si (M, P) est une variété de Poisson. Dans ce cas le morphisme $P^\# : T^*M \to TM$ défini par

$$\beta(P^\#\alpha) = P(\alpha, \beta)$$

est une ancre. En effet pour trois formes exactes df, dg, dh, on a

$$P^\#([df, dg]_P).h = P^\#(d\,\{f, g\}).h = P(d\,\{f, g\}\,, dh) =$$

$$\{\{f, g\}\,, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} =$$

$$\Big\{f, (P^\# dg).h\Big\} - \Big\{g, (P^\# df).h\Big\} = \Big[P^\# df, P^\# dg\Big]\,.h.$$

Ce qui prouve l'identité $P^\#([df, dg]_P) = \left[P^\# df, P^\# dg\right]$. La condition (11) permet d'étendre cette identité à des formes quelconques. Nous avons donc démontré le

Théorème 4.4.1. *Soit P un champ de bivecteur sur une variété M. Alors le triplet $(T^*M, P^\#, [.,.]_P)$ est un algèbroïde de Lie si et seulement si (M, P) est une variété de Poisson.*

Pour $s_1,\ s_2$ et s_3 dans $\Gamma(L)$, on pose

$$T(s_1, s_2, s_3) = \langle [s_1, s_2], s_3 \rangle_+ . \tag{14}$$

Un calcul direct donne que pour trois sections $s_i = (X_i, \omega_i)$ de L, on a

$$2T(s_1, s_2, s_3) = \tag{15}$$

$$X_1.\omega_2(X_3)+X_2.\omega_3(X_1)+X_3.\omega_1(X_2)+\omega_1([X_2,X_3]+\omega_2([X_3,X_1]+\omega_3([X_1,X_2]$$

Proposition 4.4.1. *T est $C^\infty(M)$-multilinéaire.*

Preuve:

Il suffit d'établir la $C^\infty(M)$-linéairité par rapport à s_2. Pour celà écrivons les sections sous la forme $s_i = (X_i, \omega_i)$, on aura alors

$$T(s_1, fs_2, s_3) = \langle [s_1, fs_2], s_3 \rangle_+ = \langle f[s_1, s_2], s_3 \rangle_+ + X_1(f) \langle s_2, s_3 \rangle_+ =$$
$$fT(s_1, s_2, s_3)$$

puisque $\langle s_2, s_3 \rangle_+ = 0$.♠

Ainsi, la valeur de $T(s_1, s_2, s_3)$ en un point x de M ne dépend que des $s_i(x)$.

Corollaire 4.4.1. *$\Gamma(L)$ est stable par le crochet de Courant si et seulement si $T \equiv 0$.*

Preuve:

Supposons $T \equiv 0$. Soit s_1 et s_2 deux sections de L; en tout point x, $[s_1, s_2](x) \in L_x^\perp = L_x$. Réciproquement, si $\Gamma(L)$ est stable par le crochet de Courant, on aura pour deux sections quelconques s_i et en tout point x, $[s_1, s_2](x) \in L_x = L_x^\perp$ et donc pour toute troisième section s_3, $T(s_1, s_2, s_3)(x) = 0$.♠

Théorème 4.4.2. *Lorsque $T = 0$, $\Gamma(L)$ muni du crochet de Courant est une algèbre de Lie.*

Preuve:

Supposons $T = 0$ et montrons l'identité de Jacobi. Soit donc pour $i = 1, 2, 3$ $s_i = (X_i, \omega_i)$ trois sections de L. On a

$$[(X_1, \omega_1), (X_2, \omega_2)] = ([X_1, X_2], L_{X_1}\omega_2 - L_{X_2}\omega_1 + d\omega_1(X_2)).$$

Comme $\Gamma(L)$ est stable par le crochet de Courant, la composante sur T^*M de $[[(X_1, \omega_1), (X_2, \omega_2)], (X_3, \omega_3)]$ sera

$$L_{[X_1,X_2]}\omega_3 - L_{X_3}\{L_{X_1}\omega_2 - L_{X_2}\omega_1 + d\omega_1(X_2)\} - d\omega_3([X_1, X_2]) =$$
$$L_{X_3}(L_{X_2}\omega_1 - L_{X_1}\omega_2) - d\{X_3.\omega_1(X_2)\} + L_{[X_1,X_2]}\omega_3 - d\omega_3([X_1, X_2]).$$

En sommant selon l'identité de Jacobi et après multiplication par (-1), la composante sur T^*M sera

$$-L_{X_3}(L_{X_2}\omega_1 - L_{X_1}\omega_2) + d\{X_3.\omega_1(X_2)\} - L_{[X_1,X_2]}\omega_3 + d\omega_3([X_1, X_2])+$$
$$-L_{X_1}(L_{X_3}\omega_2 - L_{X_2}\omega_3) + d\{X_1.\omega_2(X_3)\} - L_{[X_2,X_3]}\omega_1 + d\omega_1([X_2, X_3])+$$
$$-L_{X_2}(L_{X_1}\omega_3 - L_{X_3}\omega_1) + d\{X_2.\omega_3(X_1)\} - L_{[X_3,X_1]}\omega_2 + d\omega_2([X_3, X_1]). =$$

$$d\{X_3.\omega_1(X_2)+\omega_1([X_2,X_3]+X_1.\omega_2(X_3)+\omega_2([X_3,X_1]+X_2.\omega_3(X_1)+\omega_3([X_1,X_2]\}$$
$$=2dT(s_1,s_2,s_3)=0.$$

Définition 4.4.2. *Un fibré de Dirac sur une variété M est un sous fibré L de $TM\oplus TM^*$ dont la fibre L_x au dessus de chaque point x est une structure de Dirac linéaire de l'espace tangent M_x.*

Définition 4.4.3. *Une structure de Dirac sur la variété M est la donnée d'un fibré de Dirac L stable par le crochet de Courant. Une variété de Dirac est un couple (M,L) où L est une structure de Dirac sur la variété M.*

Une structure de Dirac peut être vue comme la donnée d'un fibré de Dirac L tel que le triplet constitué de L, de la première projection ρ et du crochet de Courant soit un algèbroïde de Lie.

Voici quelques exemples.

Exemple 4.4.2. *Structure de Dirac induite par un feuilletage régulier.*

Soit Δ une distribution involutive et de rang constant. On a déjà vu (Exemple 4.2.1) qu'en tout point x de la variété M, l'espace $L_x=\Delta_x\oplus Ann(\Delta_x)$ est une structure de Dirac linéaire sur l'espace tangent T_xM. Comme Δ est de rang constant, ces espaces L_x constituent un fibré de Dirac L. De plus la stabilté de Δ par le crochet de Lie assure celle de L par le crochet de Courant.

Exemple 4.4.3. *Structure de Dirac induite par une forme présymplectique.*

Soit (M,ω) une variété présymplectique. La forme ω induit un morphisme de fibrés $\omega_b : TM \to T^*M$. Le graphe L de ce morphisme sera donc un fibré de Dirac (voir Exemple 4.2.2). Soit (X,ξ), (Y,η) deux sections de L et Z un champ de vecteur; un calcul direct donne l'identité

$$\left\{L_X\eta - L_Y\xi + d(\langle\langle(X,\xi),(Y,\eta)\rangle\rangle_-)\right\}(Z)=d\omega(X,Y,Z)+\omega([X,Y]\,,Z).$$

On voit donc que l'hypothèse $d\omega=0$ assure la stabilité de L par le crochet de Courant.

Exemple 4.4.4. *Structure de Dirac sur une variété de Poisson.*

Soit P un champ de bivecteur sur M. A partir de l'Exemple 4.2.3,on voit que le graphe L du morphisme de fibrés $P^\# : T^*M \to TM$ est un fibré de Dirac. A deux formes ξ et η, on associe les sections $(P^\#(\xi),\xi)$ et $(P^\#(\eta),\eta)$ de la structure de Dirac associée. Le crochet de Courant de ces deux sections vaut exactement

$$(\left[P^\#(\xi),P^\#(\eta)\right],[\xi,\eta]_P).$$

D'après le Théorème 4.4.1, on obtient la

Proposition 4.4.2. *Soit $\pi : T^*M \to TM$ un morphisme antisymétrique de fibrés. Alors son graphe L est une structure de Dirac si et seulement si (M,π) est une variété de Poisson.*

Soit L est une structure de Dirac; puisque le triplet $(L, \rho, [.,.])$ est un algèbroïde de Lie, la distribution $\Delta = \rho(L)$ est intégrable au sens de Sussman et induit donc un feuilletage singulier sur la variété M.

Nous allons voir que les feuilles sont des variétés présymplectiques. De fait, nous disposons d'une 2- forme Ω_L sur le fibré L, à savoir la restriction de la forme naturelle $\langle .,. \rangle_{-}$. Par construction, on a

$$\Omega_L((X,\xi),(Y,\eta)) = \xi(Y) = -\eta(X).$$

Sur une feuille $\mathcal{F}$, la forme Ω_L induit une 2-forme différentielle $\Omega_{\mathcal{F}}$ définie par

$$\Omega_{\mathcal{F}}(X,Y) = \xi(Y) = -\eta(X) \text{ dès que } (X,\xi) \text{ et } (Y,\eta) \text{ sont des sections de } L.$$

Proposition 4.4.3. *La forme $\Omega_{\mathcal{F}}$ est fermée.*

Preuve:

Soit X_1, X_2, X_3 des champs de vecteurs sur la feuille $\mathcal{F}$ et pour $i = 1, 2, 3$ $s_i = (X_i, \omega_i)$ trois sections de L. On a

$$d\Omega_{\mathcal{F}}(X_1, X_2, X_3) = X_1.\Omega_{\mathcal{F}}(X_2, X_3) + X_2.\Omega_{\mathcal{F}}(X_3, X_1) + X_3.\Omega_{\mathcal{F}}(X_1, X_2)$$

$$-\Omega_{\mathcal{F}}([X_1, X_2], X_3) + \Omega_{\mathcal{F}}([X_1, X_3], X_2) - \Omega_{\mathcal{F}}([X_2, X_3], X_1) =$$

$$X_1.\omega_2(X_3) + X_2.\omega_3(X_1) + X_3.\omega_1(X_2) + \omega_3([X_1, X_2] + \omega_2([X_3, X_1] + \omega_1([X_2, X_3]$$

$$= 2T(s_1, s_2, s_3) = 0.\spadesuit$$

Nous venons donc de prouver la

Proposition 4.4.4. *Une variété de Dirac possède un feuilletage constitué de variétés présymplectiques.*

4.4.2. *L'algèbre de Poisson et les champs de vecteur hamiltoniens d'une variété de Dirac.*

Définition 4.4.4. *Soit (M, L) une variété de Dirac; une fonction $f \in C^\infty(M)$ est dite admissible s'il existe un champ de vecteur X tel que (X, df) soit une section de L. On notera $\mathcal{P}_L$ l'ensemble de ces fonctions.*

On peut définir aussi la notion d'admissibilité locale. Dans le cas d'une variété de Poisson, $\mathcal{P}_L = C^\infty(M)$ tandis que dans le cas d'une stucture de Dirac induite par une forme présymplectique ω, on a $\mathcal{P}_L = \mathcal{P}_\omega$. Il est alors naturel d'envisager une structure d'algèbre de Poisson sur $\mathcal{P}_L$.

Proposition 4.4.5. *$\mathcal{P}_L$ est une sous-algèbre de $C^\infty(M)$.*

Preuve:

On vérifie aisément que si (X, df) et (Y, dg) sont deux sections de L, $(gX + fY, d(fg))$ l'est aussi.$\spadesuit$

On construit un crochet sur $\mathcal{P}_L$ en reprenant le procédé utilisé pour les variétés présymplectiques. De fait, soit f et g dans $\mathcal{P}_L$ et choisissons X_f et X_g tels que (X_f, df) et (X_g, dg) soient deux sections de L. On vérifie sans difficultés que la fonction $X_f.g = -X_g f$ est indépendante du choix de X_f et X_g. Posons alors

$$\{f, g\} = X_f.g \text{ pour } f \text{ et } g \text{ dans } \mathcal{P}_L.$$

Théorème 4.4.3. *Munie de ce crochet, l'algèbre $\mathcal{P}_L$ est de Poisson.*

Preuve:

i) Assurons nous en premier lieu de la stabilité de $\mathcal{P}_L$ par ce crochet. Elle découle de l'identité

$$[(X_f, df), (X_g, dg)] = ([X_f, X_g], d(X_f g)). \tag{16}$$

ii) L'antisymétrie de ce crochet découle de l'identité $X_f.g = -X_g f$.

iii) La règle de Leibniz est une conséquence directe de la formule $X_f.(gh) = hX_f g + gX_f h$.

iv) Soit f, g, h dans $\mathcal{P}_L$ et $(X_f, df), (X_g, dg)(X_h, dh)$ trois section de L. On a

$$\begin{gathered}
2T((X_f, df), (X_g, dg)(X_h, dh)) = \langle [(X_f, df), (X_g, dg)], (X_h, dh)\rangle_+ = \\
\langle ([X_f, X_g], d\{f, g\}), (X_h, dh)\rangle_+ = \\
X_h.\{f, g\} + [X_f, X_g].h = X_h.\{f, g\} + X_f\{g, h\} - X_g\{f, h\} = \\
\{h, \{f, g\}\} + \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\}.
\end{gathered}$$

L'identité de Jacobi résulte alors du Corollaire 4.4.1;♠

Parallèlement à la notion de fonction admissible, on introduit la

Définition 4.4.5. *Soit (M, L) une variété de Dirac; un champ de vecteur X sur M est dit hamiltonien s'il existe une fonction f telle que (X, df) soit une section de L. Le champ X est dit localement hamiltonien si pour tout point x de M, il existe un voisinage U de x et une fonction $f \in C^\infty(U)$ tels que (X, df) soit une section de L au dessus de U.*

De la formule (16), on déduit la

Proposition 4.4.6. *Chacun des espaces de champs hamiltoniens ou localement hamiltoniens est stable par le crochet de Lie.*

4.4.3. *Invariance par les flots.* Soit X un champ de vecteur sur M. A partir du groupe local à un paramètre $\{\varphi_t\}$ associé, on construit le flot $\{\phi_t\}$sur $TM \oplus T^*M$ défini par

$$\phi_t(Y, \eta) = (\varphi_{t*}Y, \varphi_{-t}^*\eta).$$

Définition 4.4.6. *On dira qu'une structure de Dirac L est invariante par le flot du champ de vecteur X lorsque*

$$\phi_t(L_p) \equiv L_{\varphi_t(p)}.$$

A partir du champ de vecteur X, on définit naturellement la dérivée de Lie sur les sections de $TM \oplus T^*M$ par la formule

$$L_X(Y, \eta) = ([X, Y], L_X\eta).$$

Définition 4.4.7. *La structure de Dirac L est dite stable par le champ de vecteur X si*

$$(Y,\eta) \in \Gamma(L) \Rightarrow L_x(Y,\eta) \in \Gamma(L).$$

Pour un champ de vecteur dans $\rho(L)$ ces deux notions sont équivalentes.

Proposition 4.4.7. *Soit (X,ω) une section d'une structure de Dirac L.Alors, L est invariante par le flot de X si et seulement si elle est stable par X.*

Preuve:

Notons $\{\phi_t\}$ le groupe local à un parmètre engendré par X. Soit (Y,η), (Z,θ) deux sections de L,considérons alors la fonction définie sur $\mathbf{R} \times M$ par

$$\psi(t,p) = \left\langle (d_p\phi_t Y_p, (d_{\phi_t(p)}\phi_{-t})^*\eta_p), (Z_{\phi_t(p)}, \psi_{\phi_t(p)}) \right\rangle_+ .$$

On a clairement

$$\psi(0,p) = 0,\ \psi(t+s,p) = \psi(t, \phi_t(p))$$

$$2\psi(t,p) = \eta_p \left[d_{\phi_t(p)}\phi_{-t} Z_{\phi_t(p)} \right] + \left[(d_p\phi_t)^* \psi_{\phi_t(p)} \right] Y_p$$

$$\frac{d\psi}{dt}(0,p) = \langle (Y,\eta)(p), L_X(Z,\theta)(p) \rangle_+$$

La Proposition est alors immédiate.♠

Proposition 4.4.8. *Une structure de Dirac L est invariante par le flot de tout champ de vecteur localement hamiltonien.*

Preuve:

Soit (X,ω),(Y,η), (Z,θ) trois sections de L.On a

$$[(X,\omega),(Y,\eta)] = ([X,Y], L_X\eta - L_Y\omega + d(\omega(Y)))$$
$$= L_X(Y,\eta) - (0, i_Y d\omega).$$

Il s'ensuit que $\langle L_X(Y,\eta),(Z,\theta\rangle_+ = d\omega(Y,Z)$ qui est nul si ω est fermée.♠

Pour le cas des variétés de Poisson, on a une espèce de réciproque faible.

Proposition 4.4.9. *Soit (M,P) une variété de Poisson et L la structure de Dirac induite. Si L est invariante par le flot d'un champ de vecteur X, ce dernier est de Poisson i.e*

$$X\{f,g\} = \{Xf,g\} + \{f,Xg\}.$$

Preuve:

Etant données f et g dans $C^\infty(M)$, les couples $(P^\# df, df)$ et $(P^\# dg, dg)$ sont des sections de L. Par hypothèse, L est stable par X. On aura donc

$$0 = 2\left\langle (\left[X, P^\# df\right], L_X df), (P^\# dg, dg) \right\rangle_+ =$$

$$\left[X, P^\# df\right].g + L_X df(P^\# dg) =$$

$$X(P^\# df.g) - P^\# df(X.g) + X(P^\# dg.f) - \left[X, P^\# dg\right].f =$$

$$X\{f,g\} - \{f,Xg\} + P^\# dg.(X.f) =$$

$$X\{f,g\} - \{f, Xg\} + \{g, Xf\}.$$

D'où la Proposition.♠

4.4.4. *Structure de Dirac induite sur une sous-variété.* Soit N une sous-variété d'une variété M sur laquelle on dispose d'un fibré de Dirac L. En chaque point x de N, le procédé décrit dans 4.3, donne la structure de Dirac linéaire induite L'_x sur $N_x$par la structure de Dirac linéaire L_x de M_x. Deux questions se posent:

- sous quelles conditions, les espaces L'_x s'organisent ils en fibré de Dirac sur N?
- dans ces conditions, est ce que ce fibré est en fait une structure de Dirac sur N?

Notons j le plongement naturel de N dans M. Grâce à ce plongement, on construit sur N les fibrés

$$j^*(TM \oplus T^*M) = \left\{(x, X, \xi)/\ x \in N,\ (X, \xi) \in M_{j(x)} \oplus M^*_{j(x)}\right\}$$

$$j^*(L) = \left\{(x, X, \xi)/\ x \in N,\ (X, \xi) \in L_{j(x)}\right\},$$

$$j^*(T^*M) = \left\{(x, \xi)/\ x \in N,\ \xi \in M^*_{j(x)}\right\}$$

$$TN^0 = \left\{(x, \xi)/\ x \in N,\ \xi \in (j_* N_x)^0\right\}$$

La réponse à ces questions dépend de l'agencement de ces sous-fibrés vectoriels.

Pour le voir, on introduit le morphisme de fibré $\kappa : TN \oplus\ j^*(T^*M) \to TN \oplus\ T^*N$ défini par $\kappa(x, X, \xi) = (x, X, j^*\xi)$ dont le noyau est exactement TN^0. on a alors le

Théorème 4.4.4. *Les deux assertions suivantes*

i) la dimension des sous-espaces $L_x \cap [TN \oplus\ j^*(T^*M)]_x$ *est constante,*

ii) la dimension des sous-espaces $L_x \cap (TN^0)_x$ *est constante,*

sont équivalentes et assurent que $L' = \dot{\bigcup\limits_{x \in N}} L'_x$ *est un fibré de Dirac au dessus de* N*.*

Preuve:

Le morphisme κ induit en chaque point x de N une application linéaire κ_x de $L_x \cap [TN \oplus\ j^*(T^*M)]_x$ dans $N_x \oplus\ N^*_x$ dont le noyau est $L_x \cap (TN^0)_x$ et l'image L'_x. La dimension de L'_x étant constante, on a l'équivalence entre les assertions $i)$ et $ii)$. De plus sous l'une de ces deux hypothèses, les deux intersections $L \cap [TN \oplus\ j^*(T^*M)]$ et $L \cap TN^0$ sont deux sous-fibrés de $j^*(L)$. Puisque le noyau du morphisme de fibré κ de $L \cap [TN \oplus\ j^*(T^*M)]$ sur $TN \oplus\ T^*N$ est un sous-fibré, l'image L' est un fibré de Dirac.♠

La réponse à la deuxième question est le

Théorème 4.4.5. *Sous la condition* $i)$ *du Théorème précédent, si* L *est une structure de Dirac,* L' *est une structure de Dirac sur* N*.*

Preuve:

Nous allons voir que le 3-tenseur défini sur L' par la formule (14) est nul. En utilisant le morphisme κ, étant donnée une section (X, ω) de L' et un point n de N, on peut trouver un voisinage Ω de n dans N et une section $\widetilde{\omega}$ de T^*M au dessus de Ω tels que le couple $(X, \widetilde{\omega})$ soit une section de L au dessus de Ω et $\omega = j^*\widetilde{\omega}$. Pour trois sections (X_i, ω_i), on a d'après l'identité (15)

$$2T'((X_1, \omega_1), (X_2, \omega_2), (X_3, \omega_3)) =$$

$$X_1.\widetilde{\omega}_2(X_3) + X_2.\widetilde{\omega}_3(X_1) + X_3.\widetilde{\omega}_1(X_2) + \widetilde{\omega}_1([X_2, X_3] + \widetilde{\omega}_2([X_3, X_1] + \widetilde{\omega}_3([X_1, X_2]$$

$$= 2T((X_1, \widetilde{\omega}_1), (X_2, \widetilde{\omega}_2), (X_3, \widetilde{\omega}_3)) = 0.\spadesuit$$

Examinons le cas d'une variété de Poisson M. La structure de Dirac ici est le graphe L d'un morphisme de fibré antisymétrique $P^\# : T^*M \to TM$. Ainsi, pour une sous-variété Q, on a

$$L \cap TQ^0 = \left\{(0, \omega) \in L / \ \omega \in TQ^0\right\}$$

qui s'identifie à $TQ^0 \cap KerP^\#$. Par ailleurs, en tout point x de Q, on a

$$L'_x = \left\{(X, \omega \mid_{TQ}) / X \in T_xQ, \ \omega \in T^*_xM, \ X = P^\#\omega\right\}.$$

Il s'ensuit que $L' \cap TQ$ s'identifie à $TQ \cap P^\#(TQ^0)$. On peut à présent énoncer le

Théorème 4.4.6. *Soit (M, P) une variété de Poisson et Q une sous-variété de M telle que*

i) $TQ^0 \cap KerP^\#$ soit de dimension constante,

ii) $TQ \cap P^\#(TQ^0) = \{0\}$.

Alors la restriction de la structure de Dirac L de M à Q est une structure de Poisson.

Preuve:

L'hypothèse i) entraîne que L induit une structure de Dirac L' sur Q. La seconde hypothèse assure que L' est le graphe d'un morphisme antisymétrique $\pi : T^*Q \to TQ$. D'après la Proposition 4.4.2, le couple (Q, π) est une variété de Poisson.$\spadesuit$

Ce résultat améliore celui de A. Weinstein [7] où l'on exige la condition $TQ^0 \cap KerP^\# = \{0\}$ au lieu de la condition i).

4.4.5. *Structure Locale d'une variété de Dirac.* Dans cette section, nous allons reprendre le travail de Aïssa Wade pour donner une structure locale d'une variété de Dirac.

Proposition 4.4.10. *Soit $(M, \ L)$ une variété de Dirac. Si la feuille présymplectique qui passe par un point x_0 est un singleton, alors il existe un voisinage U de x_0, tel que $L_{|U}$ soit le graphe d'une structure de Poisson.*

Preuve:

Supposons que la feuille présymplectique qui passe par x_0 soit $P = \{x_0\}$. Alors il existe des champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$ et des 1 formes $\alpha^1, ..., \alpha^m$ définies dans un voisinage U de x_0, tels que $L_{|U}$ soit engendré par les sections locales $e_i = \left(X_i,\ \alpha^i\right)$ et $X_i\,(x_0) = 0$ pour tout $i = 1, ..., m$. On peut supposer que U est le domaine d'un système de coordonnées locales $\left\{y^j\right\}_{j=1}^m$ tel que $y^j\,(x_0) = 0$ et où l'on a la décomposition

$$X_i = \sum_j X_{ij}\frac{\partial}{\partial y^j} \text{ avec } X_{ij}(x_0) = 0 \text{ et } \alpha^i = \sum_j \alpha_{ij} dy^j.$$

Sur U, on considère l'application à valeurs matricielle

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} X_{11} & . & . & . & X_{1m} & \alpha_{11} & . & . & . & \alpha_{1m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ X_{m1} & . & . & . & X_{mm} & \alpha_{m1} & . & . & . & \alpha_{mm} \end{bmatrix}.$$

Comme les fibres L_x sont de dimension m, cette matrice est de rang constant égal à m et puisque la sous-matrice $(X_{ij}(x_0))$ est nulle, la matrice $(\alpha_{ij}(x_0))$ est inversible. Par continuité, on peut supposer la matrice (α_{ij}) inversible sur U et on notera (α^{ij}) son inverse. Sur U, on introduit les sections suivantes du fibré L

$$e\prime_i = \sum_{j=1}^m \alpha^{ij} e_j \ \forall\ i = 1, ..., m.$$

Par construction, chaque e_i' est de la forme

$$e_i' = \left(\sum_{j=1}^m X\prime_{ij}\frac{\partial}{\partial y^j},\ dy^i\right)$$

et l'isotropie de L donne $X\prime_{ij} = -X\prime_{ji}$. Ceci permet de construire le champ de bivecteur

$$P = \sum_{i<j} X\prime_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Par construction, au dessus de U, L est le graphe de P et comme L est une structure de Dirac, c'est le graphe d'une structure de Poisson par la Proposition 4.4.2.♠

Passons à présent au cas d'un point x_0 dont la feuille présymplectique est une sous-variété N de dimension $r > 0$. Par le théorème du rang constant, il existe dans un voisinage U de x_0 un système de coordonnées $\left\{x^1, ..., x^r,\ y^1, ..., y^s\right\}$ tel que

$$x^i(x_0) = 0\ \forall i = 1, ..., r;\ y^j(x_0) = 0\ \forall j = 1, ..., s,$$

$$y^j = 0\ \forall j = 1, ..., s \text{ sur } U \cap N.$$

Par commodité, on utilisera les notations

$$x = \left\{x^1, ..., x^r\right\},\ y = \left\{y^1, ..., y^s\right\}.$$

Puisque sur $U \cap N$, le fibré tangent à N est engendré par les champs $\frac{\partial}{\partial x^i}$, on peut supposer qu'il existe sur U des champs de vecteurs $Y_i(x, y),\ Z_j(x, y)$, des formes $\alpha_i(x, y),\ \beta_j(x, y)$ tels que

$$Y_i(x, y) = Z_j(x, y) = 0 \text{ sur } U \cap N$$

et que les sections

$$\mathcal{S}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i\left(x, y\right),\ \alpha_i\left(x,\ y\right)\right),\ \mathcal{T}_j = \left(Z_j\left(x, y\right), \beta_j\left(x, y\right)\right)$$

engendrent L. On souhaite construire au voisinage de x_0 une nouvelle famille de sections $\left\{\mathcal{S}_i', \mathcal{T}_j'\right\}$ d'expression plus simple. Pour celà, posons

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{r} \widehat{Y}_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{s} \widetilde{Y}_{il} \frac{\partial}{\partial y_l}.$$

Comme la matrice $\mathbf{1} + \widehat{Y}_{ij}$ vaut $\mathbf{1}$ sur $U \cap N$, on peut la supposer inversible sur U et on note (f_{ij}) son inverse. On aura alors

$$\sum_{k=1}^{r} f_{ik}\left(x, y\right) X_k = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{s} Y\prime_{il}\left(x, y\right) \frac{\partial}{\partial y_l}.$$

Il s'ensuit qu'au dessus de U, la structure de Dirac L est engendrée par des sections de la forme

$$\mathcal{S}_i' = (\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{s} Y_{ij}' \frac{\partial}{\partial y_j}, \alpha_i'),\ \mathcal{T}_j = \left(Z_j\left(x, y\right), \beta_j\left(x, y\right)\right).$$

avec $i = 1, ..., r$ et $j = 1, ..., s$. Il faut observer que

$$Y_{ij}' = 0 \text{ sur } U \cap N.$$

Soit la décomposition

$$Z_i = \sum_{k=1}^{r} \widehat{Z}_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{s} \widetilde{Z}_{il} \frac{\partial}{\partial y_l}$$

et posons

$$\mathcal{T}_j' = \mathcal{T}_j - \sum_{k=1}^{r} \widehat{Z}_{ik} \mathcal{S}_k'.$$

Au dessus de U, la structure L est encore engendrée par la famille de sections $\left\{\mathcal{S}_i', \mathcal{T}_j'\right\}$ et chaque $\mathcal{T}_j'$ est de la forme

$$\mathcal{T}_j' = (\sum_{l=1}^{s} Z_{il}' \frac{\partial}{\partial y_l}, \beta_j') \text{ avec } \widehat{Z}_{ik} = 0 \text{ sur } U \cap N.$$

Ainsi, sur $U \cap N$, on a

$$\mathcal{S}'_i = (\frac{\partial}{\partial x_i}, \alpha'_i) \text{ et } \mathcal{T}'_j = (0, \beta'_j).$$

Par isotropie, on a $\beta'_j(\frac{\partial}{\partial x_i}) = 0$ sur $U \cap N$ où l'on aura $\beta'_j = \sum_{l=1}^{s} \beta'_{jl} dy^l$. Comme les sections $\mathcal{S}'_i$ et $\mathcal{T}'_j$ sont linéairement indépendantes, la sous-matrice (β'_{jk}) est inversible sur $U \cap N$. Par continuité, on peut la supposer inversible sur U et on note (g_{jk}) son inverse. On considère alors la famille

$$\mathcal{T}''_i = \sum_{j=1}^{s} g_{ij}(x, y) \mathcal{T}\prime_j$$

dont chaque élément est de la forme

$$\mathcal{T}''_j = (\sum_{l=1}^{s} Z''_{jl} \frac{\partial}{\partial y_l}, dy_j + \sum_{k=1}^{r} \beta''_{jk}(x,\ y) dx_k.$$

Finalement, on écrit

$$\mathcal{S}'_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{s} Y'_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}, \sum_{k=1}^{r} \eta_{ik}(x, y) dx^k + \sum_{k=1}^{s} \eta\prime_{ik}(x, y) dy^k \right)$$

et on pose

$$\mathcal{S}''_i = \mathcal{S}'_i - \sum_{k=1}^{s} \eta\prime_{ik}(x, y) \mathcal{T}''_k$$

Cette famille finale $\left\{ \mathcal{S}''_i, \mathcal{T}''_j \right\}$ engendre L au voisinage de x_0. On a donc prouvé le

Théorème 4.4.7. *Soit $(M,\ L)$ une variété de Dirac. Si la feuille N passant par un point x_0 est de dimension $r > 0$, il existe un système de coordonnées $\left\{x^1, ..., x^r,\ y^1, ..., y^s\right\}$ $(s = m - r)$ dans un voisinage U de ce point tel que $y^1 = ... = y^s = 0$ sur $U \cap N$ et que sur U le fibré L soit engendré par des sections de la forme*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{s} X_{ik}(x,\ y) \frac{\partial}{\partial y_k},\ \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik}(x,\ y) dx_k \right),\ i = 1, ..., r \\ \mathcal{N}_j &= \left(\sum_{k=1}^{s} Z_{jk}(x,\ y) \frac{\partial}{\partial y_k},\ dy_j + \sum_{k=1}^{r} \beta_{jk}(x,\ y) dx_k \right),\ j = 1, ..., s \end{aligned}$$

avec $X_{ik}(x_0) = Z_{jk}(x_0) = 0$ pour tous $i \in \{1, ..., r\},\ j \in \{1, ..., s\}$.

En écrivant par isotropie $\langle \mathcal{N}_j, \mathcal{N}_j \rangle_+ = 0$, on obtient l'antisymétrie

$$Z_{jk} + Z_{kj} = 0 \text{ sur } U.$$

Corollaire 4.4.2. *Si $(M,\ L)$ est une variété de Dirac, les feuilles présymplectiques du feuilletage singulier induit par $\rho(L)$ sont de même parité.*

Preuve:

Dans un premier cas, considérons un point x_0 tel que la feuille passant par ce point soit réduite à ce point. Dans un voisinage de ce point, L est le graphe d'une structure de Poisson et donc la distribution $\rho(L)$ est de dimension paire au voisinage de ce point.Dans le second cas, on suppose que la feuille présymplectique qui passe par x_0 est de dimension $r > 0$. Soit alors la famille de sections $\{\mathcal{H}_i, \mathcal{N}_j\}$ donnée au voisinage U de x_0 par le théorème précédent. Sur U la distribution $\rho(L)$ est engendré par la famille de champs de vecteurs

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{s} X_{ik}(x,\ y)\,\frac{\partial}{\partial y_k},\ \sum_{k=1}^{s} Z_{jk}(x,\ y)\,\frac{\partial}{\partial y_k} \mid i = 1, ...r,\ j = 1, ..., s\right\}$$

dans le repère induit par le système de coordonnées $\left\{x^1, ..., x^r, y^1, ..., y^s\right\}$ cette famille est représentée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & * \\ 0 & (Z_{jk}) \end{pmatrix}$$

Comme la matrice (Z_{jk}) est antisymétrique, elle est de rang paire et ainsi sur U la distribution $\rho(L)$ a la parité de r sur U.

References

[1] R. ABRAHAM, J.E MARSDEN, *Foundations of Mechanics,* 2nd ed. [1978].

[2] J. T. COURANT, *Dirac manifolds,*Trans. Amer. Math. Soc, Volume 319, Number 2, June 1990.

[3] J.P. DUFOUR, A. WADE, *On the local structure of Dirac manifolds,* arXi: math.SG/0405257 v2 15 Juin 2004.

[4] A. LICHNEROWICZ, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées,* J. Differential Geometry **12**, 253-300, [1977].

[5] C. M. MARLE, *Variétés symplectiques et Variétés de Poisson,* cours de DEA, Univ. Pierre et Marie Curie, 1998-1999.

[6] H. SUSSMAN, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions,* Trans. Amer. Soc. **180,** 171-188.

[7] A. WEINSTEIN, *The local srtucture of Poisson Manifolds,* J. Differential Geometry **18,** 523-557, [1983].