N^0 d'ordre : 27 */2002- M/MT*

UNIVERSITE DES SCIENCES EST DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI- BOUMEDIENNE .
U.S.T.H.B

FACULTE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Thèse

Présentée Pour l'obtention du grade de

Magister en mathématiques

Spécialité Algèbre et Théories des Nombres .

BENDAHMANE SOUAD

MONODROMIE DES SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES A POINTS SINGULIERS REGULIERS SUR $P^1(\forall)$.

Soutenue le 17/11/2002 devant le jury

M^r	M.S .HACHAICHI ,	Professeur	, U.S.T.H.B	Président
M^r	K . BETINA	, Professeur	, U.S.T.H.B	Directeur de thèses
M^r	M . ZITOUNI	, Professeur	, U.S.T.H.B	Examinateur
M^r	A .KESSI	, Professeur	, U.S.T.H.B	Examinateur
M^r	A IDRIS BEY ,	Chargé de Cours	,U.S.T.H.B	Examinateur

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Considérons un système différentiel linéaire d'ordre p.

$$df(z) = \omega(z)\, f(z) \qquad (I)$$

où $\omega(z)$ est une matrice carrée d'ordre p dont les coefficients sont des 1-formes différentielles holomorphes sur la droite projective $P^1(\forall)$ privée d'un ensemble fini de points $\sum = \{ a_1, a_2, \ldots, a_N \}$.

Le système (I) admet un espace de solutions multiformes X de dimension p .

Le groupe fondamental $\Pi_1 (P^1 (\forall) - \sum)$ opère sur l'espace X par la représentation ρ :

$$\begin{aligned} \rho : \Pi_1(P^1 (\forall) - \sum) &\longrightarrow GL(X) \\ g_i &\longrightarrow \rho(g_i). \end{aligned}$$

ou g_i est une classe de lacets entourant le point singulier a_i

Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de X , $\rho(g_i)$ étant un automorphisme, il transforme la base $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ en une autre base $(f'_1, f'_2 \ \ldots, f'_p)$ et vérifie : $\left\{ \rho(g_i)\,(f_1, f_2, \ldots, f_p) = G_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_p \end{pmatrix} \right.$

La représentation ρ est appelée représentation de monodromie associée au système différentiel linéaire (I).

La matrice G_i est appelée matrice de monodromie associée au système différentiel linéaire (I).

Le groupe fondamental $\Pi_1 \ (P^1 (\forall) - \Sigma)$ est engendré par un nombre fini de générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_N$ vérifiant : $\prod_{i=1}^{N} g_i = Id$.

Comme : $\rho \left(\prod_{i=1}^{N} g_i \right) = \prod_{i=1}^{N} \rho\,(g_i)$ et que $\rho(Id) = Id_{GL(X)}$, les matrices G_i vérifiant alors :

$$\prod_{i=1}^{N} G_i = I_P \ .$$

Le problème posé est le suivant :

Soient $\sum = \{ a_1 , a_2 , \ldots , a_N \}$ un ensemble fini de points de $P^1(\forall)$ et soient $G_1 , G_2 , \ldots , G_N$ des matrices de $GL (p, \forall)$ vérifiant :

$$\prod_{i=1}^{N} G_i = I_P .$$

« prouver l'existence d'un système différentiel linéaire $df (z) = \omega (z) f (z)$ à singularité régulière en tout point a_i et dont les matrices G_i soient ses matrices de monodromie pour toutes i =1……N ».

La réponse au problème est positive, donnée par BLEMELJ et BIRKOFF , puis développeé récemment par le mathématicien russe A .A.BOLIBUKH et dont l'étude fera l'objet du chapitre II

CHAPITRE I

RAPPELS ET DEFINITIONS

I.1. Espace projectif complexe :

Définition I.1.1 :

L’espace projectif complexe de dimension m est l’espace des orbites de $\forall^*$ opérant sur $\forall^{m+1} - \{0\}$ par les homotheties.

L’opération $\Re : \forall^* \times \forall^{m+1} - \{0\} \longrightarrow \forall^{m+1} - \{0\}$

$$(\lambda , z) \longrightarrow \lambda . z$$

On note $\dfrac{C^{m+1} - \{0\}}{C^*}$ par $P^m(\forall)$.

$\dfrac{C^2 - \{0\}}{C^*}$ est noté $P^1(\forall)$, appelé droite projective complexe ou la sphère de Riemann.

Rappelons d'abord quelques résultats bien connus.

Théorème I. 1.1: (cf [1])

La droite projective complexe $P^1(\forall)$ est homéomorphe à la sphère S^2.

Le théorème se démontre par la proposition suivante :

Proposition I. 1.1: (cf [1])

L'espace projectif complexe $P^m(\forall)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant à $P^{m-1}(\forall)$ une boule D^{2m} au moyen de l'application :

$$q : S^{2m-1} \longrightarrow P^{m-1}(\forall)$$
$$z \longrightarrow \overline{z}\,.$$

q est appelée projection.

$D^{2m} = \{ z \in \forall^m \ / \ \|z\| \leq 1\}$.

$S^{2m} = \{ z \in \forall^m \ / \ \|z\| = 1\}$.

Où $\|.\|$ d désigne la mome hernitienne .

Par la projection q , tout point z de S^{2m-1} est identifié à $q(z) = \overline{z}$.

On a donc :

$$P^{m}(\forall) \cong P^{m-1}(\forall) \underset{q}{\cup} D^{2m} .$$

On a donc :

$$P^{m}(\forall) \cong P^{m-1}(\forall) \underset{q}{\cup} D^{2m} .$$

Par le résultat connu , $P^{0}(\forall) \underset{q}{\cup} D^{2}$ est homéomorphe à S^{2}, on en déduit que :

$P^{1}(\forall)$ est homéomorphe à S^{2}.

I.2. Groupe fondamental :

Soient X un espace topologique et I l'intervalle [0,1].

Définition I .2.1 :

Un chemin d'origine x et d'extrémité y est une application continue $C : I \longrightarrow X$ telle que : $C(0)= x$ et $C(1)= y$.

Définition I .2.2 : « Homotopie des chemins »

Deux chemins C' et C dans X ayant même origine x et même extrémité y sont homotopes s'il existe une application continue :

$$H : I \times I \longrightarrow X \quad \text{ayant les propriétés suivantes :}$$

$$(t, s) \longrightarrow H(t, s)$$

1) $H(t, 0) = c(t)$ et $H(t, 1) = c'(t)$, pour tout $t \in I$.

2) $H(0, s) = x$ et $H(1, s) = y$, pour tout $s \in I$.

<u>Proposition I .2.1 : (cf [I])</u>

L'homotopie des chemins joignant x à y est une relation d'équivalence.

On définit alors l'ensemble des classes d'homotopie des chemins joignant x à y est noté : $\Pi_{x,y}(X)$.

<u>Cas ou x = y :</u>

<u>Définition I. 2.3 :</u> « Lacet »

Un lacet de base x dans X est un chemin d'origine et d'extrémité x. $\Pi_{x,x}(X)$ est muni d'une structure de groupe par la composition des lacets définie comme suit :

Soient c , c' deux éléments de $\Pi_{x,x}(X)$.

Le composé c , c' est défini comme suit :

$$c.c' : I \longrightarrow X$$

$$t \mapsto \begin{cases} c\,(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ c'\,(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

La composition est homotopiquement associative.

$(c_1 c_2)\, c_3 = c_1\,(c_2\ c_3)$ par l'application d'homotopie :

$$H : I \times I \longrightarrow X$$

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} c_1\left(\frac{4t}{1+s}\right) & 0 \le t \le \frac{1+s}{4} \\ c_2\,(4t - s - 1) & \frac{1+s}{4} \le t \le \frac{2+s}{4} \\ c_3\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \frac{2+s}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

<u>Elément neutre :</u>

Soit la classe de lacets : $c_x : I \longrightarrow X$

$$t \longrightarrow x$$

c_x est l'élément neutre à gauche.

En effet, pour tout $c \in \Pi_{x,x}(x)$, on a $cc_x = c$ par l'application d'homotopie :

$$H : (t,s) \mapsto \begin{cases} c\left(\frac{2t}{1+s}\right) & 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ x & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

c_x est aussi élément neutre à droite :

Pour tout $c \in \Pi_{x,x}(x)$, on a $cc_x = c$ par l'application d'homotopie :

$$H : I \times I \longrightarrow X$$

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} x & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ c\left(\frac{2t-1+s}{1+s}\right) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

<u>Elément inverse :</u>

Soit $c \in \Pi_{x,x}(x)$, l'inverse de c est noté $\bar{c}$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, $\bar{c}(t) = c(1 - t)$.

La composition des lacets de base x munit l'ensemble $\Pi_{x,x}(X)$ d'une structure de groupe , appelé groupe fondamental de base x et noté $\Pi_1(X, x)$.

<u>Proposition I.2.2 : (cf [1])</u>

Soit c un chemin d'origine x et d'extrémité y.

L'application :

$$\alpha_c : \Pi_1 (x , y) \longrightarrow \Pi_1 (X , x)$$

$$[\gamma] \longrightarrow [c \gamma \bar{c}]$$

est un isomorphisme ne dépendant que de la classe d'homotopie de c .

Proposition I.2.3 :

Si X est connexe par arcs alors tous ses groupes fondamentaux sont isomorphes.

Preuve :

Par définition de la connexité par arcs, pour tous points x et y de X , il existe un intervalle [a , b] de 3 , une application continue f , tels que : f (a) = x et f (b) = y .

On définit alors le chemin c comme suit :

$$c : [0 , 1] \longrightarrow X$$

$$t \longrightarrow f ((1- t) a + t b)$$

c joint x à y et par application de la proposition I.2.2 Π_1 (X , x) et Π_1 (X , y) sont isomorphes.

Invariance topologique du groupe fondamental.

Proposition I.2.4 : (cf [1])

Soient X et Y deux espaces topologiques .

Si f est un homémorphisme de X sur Y alors l'application :

$f_x : \Pi_1 (X , x) \to \Pi_1 (Y , f (x))$ est un homéomorphisme d'inverse $(f_x)^{-1} = f_x^{-1}$

$f \circ c : [o,1]\to Y$ est un lacet de base f(x) .

$t\to f(c(t))$

Conclusion :

$P^1(\forall)$ est homéomorphe à S^2 .

Pour tout i $\in\{1,2,\ldots,n\}$ on note bi l'image de ai par cet homéomorphisme .

P1($\forall$) - $\{ a_1 , \ldots, a_N \}$ étant homéomorphe à $S^2 - \{ b_1,\ldots, b_N \}$, qui est convexe par arcs, possède des groupes fondamentaux isomorphes représentés par un seul groupe fondamental noté :

$$\Pi_1 (P^1(\forall) - \{ a_1 , \ldots, a_N \} , z_0)$$

z_0 est appelé point de base.

Par la suite $\Pi_1 (P^1(\forall) - \{a_1 , \ldots, a_N\} , z_0)$ sera désigné par $\Pi_1 (P^1(\forall) - \{ a_1 , \ldots, a_N \})$.

<u>Proposition I.2.5 :</u>

Le groupe fondamental $\Pi_1 (P^1(\forall) - \{ a_1 , \ldots, a_N \})$ possède un système fini de générateurs.

<u>Preuve :</u>

Comme $\Pi_1 (P^1(\forall) - \{ a_1 , . . . , a_N \})$ est homéomorphe à $\Pi_1 (S^2 - \{b_1,\ldots, b_N\})$, il suffit de montrer que $\Pi_1 (S^2 - \{ b_1,\ldots, b_N \})$ possède un système fini de générateurs.

$$S^2 = \{ x \in 3^3 \ / \ \| x \| = 1\}$$

Soit (u , v) les coordonnées polaires de x .

x (u , v) = (cos v. cos u , cos v . sin u , 1+sin u) .

Par la projection stériographique à partir du point b_1 on a :

$$S^2 - \{ b_1 \} \rightarrow 3^2$$

$$X (u , v) \rightarrow \left(\frac{2 \cos v . \cos u}{1 - \sin v} , \frac{2 \cos v . \sin u}{1 - \sin v} \right) .$$

(sin v $\neq$ 1) $\Leftrightarrow$ (x $\neq$ b_1)

S^2 -{b_1 }est homémorphe à 3^2 .

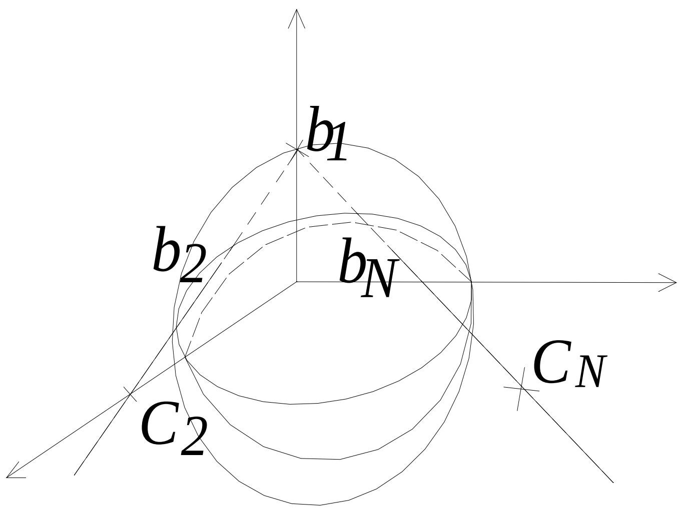


Fig.1

Ainsi (S^2 - { b_1}- { b_2 ,…, b_N }) est homémorphe à 3^2-{ c_2 ,…, c_N }.

c_i est le projeté stériographique de b_i à partir du point b_i , pour tout { 2,…,N }.

Déterminons alors Π_1 (3^2-{ c_2 ,…, c_N }) . par récurrence finie sur { 2,…, N }.

Par translation 3^2-{ c_2 } est homémorphe à 3^2- { (0 , 0) }.

Sachant que :

$$3^2 - \{ (0 , 0) \} \rightarrow S^1$$

$$(x , y) \longrightarrow \frac{1}{\|(x, y)\|} .(x, y)$$ est un homémorphisme .

On a :

Π_1 (3^2-{ c_2 }) est homémorphe à alors Π_1 (S^1)

On définit la projection *:*

$$\wp : \quad 3 \longrightarrow S^1$$

$$t \longrightarrow \exp(2i\pi t)$$

$$0 \longrightarrow e$$

Et pour tout $n \in Z$, on définit le lacet:

$$\gamma_n : I \longrightarrow S^1$$

$$t \longrightarrow \wp (n\, t)$$

γ_n est un lacet de base e dans S^1 .

Théorème I.2.1 : (cf [1])

La correspondance $n \rightarrow [\gamma_n]$ est un isomorphisme de 9 dans Π_1 (S^1 , e).

Par la suite considérons Γ le générateur de Π_1 (S^1 , e) .

$$\Pi_1 (3^2 - \{c_2\}) \cong \Pi_1 (S^1 , e)$$

$$\gamma \quad \to \Gamma$$

tel que :

$$\Gamma(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} \; .$$

Déterminons $\Pi_1 (3^2 - \{c_2 , c_3\})$.

$\Pi_1 (3^2 - \{c_2 , c_3\}) \longrightarrow \Pi_1 (S^1) \times \Pi_1 (S^1)$ est un homéomorphisme .

$$\gamma (t) \longrightarrow (\Gamma_2 (t) , \Gamma_3 (t))$$

$\Gamma_2(t) = \dfrac{\gamma(t) - c_2}{\|\gamma(t) - c_2\|}$ lacet entourant c_2 .

$\Gamma_3(t) = \dfrac{\gamma(t) - c_3}{\|\gamma(t) - c_3\|}$ lacet entourant c_3.

Par récurrence finie jusqu'à l'ordre N.

$$\Pi_1 (3^2 - \{ c_1 , c_2 ,\ldots, c_N\}) \longrightarrow \Pi_1 (S^1) \text{x}\ldots\text{x}\, \Pi_1 (S^1)$$

$$\gamma (t) \qquad\qquad \longrightarrow (\Gamma_2 (t) ,\ldots, \Gamma_N (t))$$

(est un homéomorphisme) tel que :

$$\Gamma_i(t) = \frac{\gamma(t) - c_i}{\left\| \gamma(t) - c_i \right\|} \quad , \quad 2 \le i \le N \ ;$$

est un lacet entourant le point c_i de 3^2 .

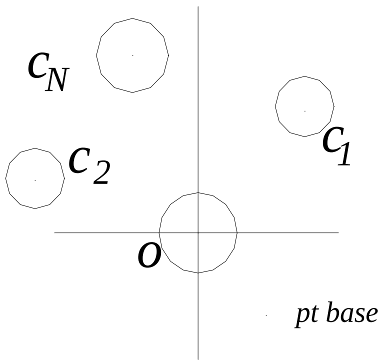


Fig . 2

I.3. <u>Fonctions multiformes :</u>

Soit B un espace topologique.

<u>Définition I.3.1 :</u>

Une fonction multiforme sur B est une fonction holomophe sur le revêtement universel de B.

<u>Définition I.3.2 :</u>

Un revêtement de B est la donnée d'un espace topologique E et d'une application continue : $\Pi : E \longrightarrow B$ ayant la propriété de trivialisation locale : pour tout point b de B, il existe un voisinage V , un espace discret non vide F est un homéomorphisme :

$$\varphi \;:\; \Pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times F \quad ,$$

tels que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \Pi^{-1}(V) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & V \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ V & \end{tikzcd}$$

C'est à dire : $P_1 \circ \varphi = \Pi$.

On dit que :

$$\prod : E \longrightarrow B \text{ est un revêtement}$$

B est la base du revêtement .

E est l'espace total .

$\prod$ est la projection .

$\prod^{-1}(b)$ est la fibre au-dessus du point b de B .

<u>Définition I.3.3 :</u>

Un revêtement :

$\prod : E \longrightarrow B$ est galoisien s'il vérifie :

i/ E est connexe .

ii/ $\mathrm{Aut}\,E$ opère transitivement sur chaque fibre $\prod^{-1}(b)$ c'est à dire :

$$\forall\ x \in \Pi^{-1}(b) \quad , \quad \{f \,.\, x \ / \ f \in \mathrm{Aut}\, E\ \} \ = \ \Pi^{-1}(b)\ .$$

Définition I.3.4 :

Un revêtement universel de B est un revêtement galoisien de B ;

$\prod : E \longrightarrow B$

tel que tout revêtement de B soit isomorphe à un revêtement associé à E .

C'est à dire :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Pi} & B \\ \uparrow \Pi' & & \uparrow \Pi'' \\ E' & \approx & E'' \end{array}$$

Le revêtement galoisien est unique à isomorphisme prés.

Dans la suite du travail, on fera appel à deux résultats classiques :

Proposition I.3.1 : cf. [1]

La projection Π d'un revêtement est un homémorphisme local.

Proposition I.3.2 : cf. [1]

Tout endomorphisme d'un revêtement galoisien est un automorphisme.

CHAPITRE II

SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES A POINTS SINGULIERS REGULIERS.

II.0. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre on construira la matrice $\omega(z)$ répondant au problème posé en s'inspirant de la méthode de Plemelj et Birkhoff , développée récemment par le mathématicien A.A.Bolibrukh .

Construire explicitement $\omega(z)$ revient à construire une matrice multiforme T (y) qui soit :

1) inversible dans $P^1(\forall) - \Sigma$.

2) à croissance polynomiale en tout point a_i de Σ .

Il suffit donc de prendre $\omega(z) = \frac{dT(z)}{dz}.T(z)^{-1}$.

II.1. Systèmes différentiels linéaires équivalents :

On considère l'anneau θ des fonctions holomorphes sur $P^1(\forall)$ - Σ

et K = ∀ {{z}} corps des fonctions méromorphes au voisinage de 0

.**Définition II.1.1 :**

Deux systèmes différentiels linéaires dF(z) = A(z) F(z) dz et dF(z) = A(z) F(z) dz sont dits K- équivalents, s'il existe une matrice de passage M de GLn(K) telle que :

$$B = M^{-1} A\, M - M^{-1}\frac{dM}{dz}.$$

Remarque :

(F est solution de dF(z) = B(z) F(z) dz) ⇔ (MF est solution de dF(z) = A(z) F(z) dz).

II.2 . Monodromie de système différentiel linéaire :

Considérons le système différentiel linéaire $dF(z) = \omega(z)\ F(z)$

où $\omega(z)$ est une matrice de 1-forme holomorphe sur $P^1(\forall) - \Sigma$ et notons par X , l'espace de ses solutions .

Soit $\Pi : S \to (P^1(\forall) - \Sigma , z_0)$ un revêtement universel de $P^1(\forall) - \Sigma$.

Soient $z_0 \in P^1(\forall) - \Sigma$ et $y_0 \in \Pi^{-1}(z_0)$ fixés .

Π est un homéomorphisme local , donc au voisinage d'un point a_i ; au lacet g_i de $\Pi_1 (P^1(\forall) - \Sigma , z_0)$ correspond un lacet de $\Pi_1(\tilde{S}, y_0)$ noté g_i^{-1} .

$$\begin{aligned} g_i : [0 , 1] &\longrightarrow (P^1(\forall) - \Sigma , z_0) \\ t &\longrightarrow z_0\, e^{2i\pi t} \end{aligned}$$

La transformation associées dans $P^1(\forall)$ est la suivante :

$$\Gamma : z \mapsto e^{2i\pi} . z \ .$$

Action de g_i sur l'espace X :

La représentation de monodromie :

$$\rho : \Pi_1 (P^1(\forall) - \Sigma , z_0) \longrightarrow GL(X)$$

$$g_i \longrightarrow \rho (g_i)$$

est définie par :

$$\rho(g_i)f(y) = f(g_i^{-1} y) \text{ , pour tout } y \in \tilde{S} .$$

Par la suite l'opérateur ρ (g_i) sera noté g_i^*.

Proposition II.2.1 :

Si deux systèmes différentiels linéaires sont K- équivalents alors ils ont la même monodromie.

Preuve :

Soient :

$$dF(z) = A(z) . F(z) dz \qquad (1)$$

$$dF(z) = B(z) . F(z) dz \qquad (2)$$

deux systèmes différentiels linéaires K- équivalents.

Soit T (y) une matrice fondamentale de solutions de (1).

$$(g_i^* T(y)) = T(y) . G_i$$

d'où :

$$T(y)^{-1}(g_i^* T(y)) = G_i .$$

Soit $Y(y)$ une matrice fondamentale de solutions de (2).

$$g_i^* Y(y) = Y(y) . L_i$$

d'où :

$$Y(y)^{-1}(g_i^* Y(y)) = L_i .$$

Comme (1) et (2) sont K-équivalents, il existe une matrice $M \in GL_n(K)$ telle que :

$$Y(y) = M\ T(y) .$$

On a alors :

$$(T(y)^{-1} M^{-1})(g_i^* (M\ T(y))) = L_i$$

$$(T(y)^{-1} M^{-1})(g_i^* (M)\ g_i^* (T(y))) = L_i$$

M , étant méromorphe au voisinage du point a_i , ne change pas après un tour g_i .

$$g_i^*(M) = M$$

On a alors :

$$(T(y)^{-1} M^{-1})(M . g_i^* T(y)) = L_i$$

$$G_i = L_i$$

II.3. Systèmes différentiels linéaires à points singuliers réguliers :

Soient a_i un point quelconque de Σ , D un disque ouvert centré en a_i dans $\forall$.

$D^* = D - \{a_i\}$.

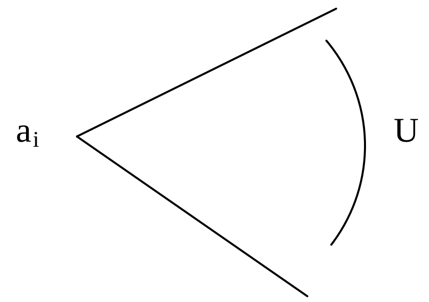
$\Pi_i : \tilde{D}^* \longrightarrow D^*$ un revêtement universel de D^*.

$\tilde{D}^*$ est l'espace total du revêtement

Définition II.3.1 : (**Croissance polynomiale**) :

On dit qu'une fonction holomorphe f sur $\tilde{D}^*$, à valeurs vectorielles, est à croissance polynomiale s'il existe un nombre réel λ tel qu'on ait :

$\lim\limits_{z \to a_i} (y - a_i)^{-\lambda} f(y) = 0$, pour tout $y \in \Pi_i^{-1}(z) \subset \Pi_i^{-1}(a_i)$ et pour tout secteur U d'angle inférieur à 2π .



Exemple :

Une fonction méromorphe en a_i , est à croissance polynomiale .

Définition II.3.2 :

Le système différentiel linéaire $df(z) = \omega(z) f(z)dz$ a une singularité régulière en a_i si toutes ses solutions ont une croissance polynomiale.

Exemple :

Soient :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{16} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système différentiel linéaire $df(z) = (z^{-2}C_1 + C_2) f(z)dz$ a une singularité régulière en 0.

En effet, sa solution :

$$f(z) = \begin{pmatrix} z^{\frac{1}{4}} & z^{\frac{3}{4}} \\ \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} & \frac{3}{4} z^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$ est à croissance polynomiale en zéro.

Pour $\lambda = -\frac{5}{4}$, on a :

$\lim\limits_{z \to 0} z^{-\lambda} f(z) = 0$, pour tout secteur U de sommet 0 et d'angle $< 2\pi$.

II-4 : description de l'espace des solutions X au voisinage de a_i :

On va décrire l'espace X au voisinage de la singularité a_i .

Chaque composante $f_j(y)_{1\leq j \leq p}$ du vecteur solution f (y) s'écrit sous forme de somme finie appelée somme logarithmique .

$$f_j(y) = \sum_{k,\ell\in\sigma} (y-a_i)^{e_k} h_{k\ell}(z) \, Ln^{b_\ell}(y-a_i) \quad \text{avec ;}$$

σ est un ensemble fini de $\angle$, $b_\ell \in 9$, $b_\ell > 0$, $e_k \in \forall$ et $0 \leq \Re e\, e_k \leq 1$.>

$$Ln(y-a_i) = \int_\gamma \frac{d(z-a_i)}{z-a_i} \quad \text{définie sur } \tilde{D}^*$$

$h_{k\ell}(z)$ est une série de LAURENT avec sa partie principale finie .

$$h_{k\ell}(z) = \sum_{n=-r}^{+\infty} \alpha_n (z-a_i)^n .$$

$h_{k\ell}(z)$ a un pôle a_i d'ordre r et $(z-a_i)^r h_{k\ell}(z)$ homolorphe en a_i .

Définition II.4.1 :

L'ordre du pôle a_i de $h_{k\ell}(z)$ précédé du signe "–" est appelé la $i^{\underline{\text{ième}}}$ normalisation de la série $h_{k\ell}(z)$ en a_i et est noté : $\varphi_i (h_{k\ell}(z))$.

Définition II.4.2 :

Le nombre $\varphi_i (f_j) = \min\limits_{k,\ell\in\sigma} \varphi_i (h_{k\ell})$ est appelé la $i^{\underline{\text{ème}}}$ normalisation de la somme logarithmique .

Le nombre $\varphi_i (f (y)) = \min\limits_{j=1,\dots,p} (f_j)$ est appelé la $i^{\underline{\text{ème}}}$ normalisation de f au voisinage de a_i .

Par définition , la normalisation de la fonction f (y) = 0 est ∞ .

Exemple :

$f_1 (z) = z^2 - \dfrac{1}{z}$, $\varphi (f_1) = -1$.

$f_2 (z) = y^{1/2} . \dfrac{1}{z^3} Ln^2 (y)$, $\varphi (f_2) = -3$.

Lemme :

Pour tout réel λ , tel que : $\lambda < \varphi_i (f)$ on a :

$\lim\limits_{z\to a_i} (y - a_i)^{-\lambda} f (y) = 0$, pour tout $y \in \Pi_i^{-1}(z)$ et tout secteur U de sommet a_i et d'angle $< 2\pi$.

Preuve :

Pour tout j , $1 \leq j \leq p$,

$$f_j(y) = \sum_{\substack{k,\ell\in\sigma \\ \text{finie}}} (y-a_i)^{pk}\, h_{k\ell}(z) \,.\, \mathrm{Ln}^{b\ell}(y-a_i)$$

$$\lim_{z\to a_i} (y-a_i)^{-\lambda} f_j(y) = \sum_{\substack{k,\ell\in\sigma \\ \text{finie}}} \lim_{z\to a_i} (y-a_i)^{-\lambda} (y-a_i)^{pk}\, h_{k\ell}(z) \,.\, \mathrm{Ln}^{b\ell}(y-a_i)$$

Il suffit de montrer que :

$$\lim_{z\to a_i} (y-a_i)^{-\lambda}\ h_{k\ell}(z) = 0 \,, \qquad \text{pour tout } y \in \Pi_i^{-1}(z) \subset \Pi_i^{-1}(a_i)$$

et pour tout secteur U de sommet a_i et d'angle $< 2\pi$.

$$h_{k\ell}(z) = \frac{\alpha - r}{(z-a_i)} + \ldots\ldots + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-a_i)^n$$

Comme $\varphi_i(f_j) = \min_{k,\ell\in\sigma} (\varphi_i (h_{k\ell}(z)))$,

la fonction $(y-a_i)^{-\varphi_i(f_j)}\ h_{k\ell}(z)$ est holomorphe au voisinage de a_i ,

donc elle est bornée .

On a :

$$(y-a_i)^{-\lambda} h_{k\ell}(z) = (y-a_i)^{-\lambda+\varphi_i(f)} \,.\, (y-a_i)^{-\varphi_i(f)}\ h_{k\ell}(z)$$

comme $\varphi_i(f) - \lambda > 0$

$$\lim_{z \to a_i} (y - a_i)^{-\lambda + \varphi_i(f)} = 0 .$$

Et

$$(y - a_i)^{-\varphi_i(f)}\, h_{k\ell}(z) \text{ est bornée au voisinage de } a_i ,$$

on a :

$$\lim_{z \to a_i} (y - a_i)^{-\lambda}\, h_{k\ell}(z) = 0$$

Résultat :

Les solutions de l'espace X sont à croissance polynomiale .

Par la suite , φ_i (f) sera défini comme suit :

$$\varphi_i(f) = \mathrm{Sup}\,\{k \in 9 \,/\, \forall\, \lambda \in 3 ,\ \lambda < k ,\ \lim_{z \to a_i} (y - a_i)^{-\lambda} f(y) = 0 \}$$

φ_i (f) est appelé ordre de f au point a_i .

Propriétés de l'ordre :

Pour tout i $\in$ { 1,…,N} , on a :

1) $\varphi_i(f + g) \geq \mathrm{Min}(\varphi_i(f), \varphi_i(g))$.

2) $\varphi_i(cf) = \varphi_i(f)$ pour tout c $\in \forall^*$.

3) $\varphi_i(g_i^* f) = \varphi_i(f)$, l'opérateur de monodromie g_i^* préserve l'ordre .

Preuve de 3 :

Montrons que : $\varphi_i(g_i^* f) = \varphi_i(f)$.

Pour tout j , $1 \leq j \leq p$,

$$(g_i^* f_j) (y) = \sum_{\substack{k,\ell\in\sigma \\ \text{finie}}} g_i^* ((y - a_i)^{pk} h_{k\ell}(z) . Ln^{b\ell} (y - a_i))$$

$$= \sum_{\substack{k,\ell\in\sigma \\ \text{finie}}} g_i^* ((y - a_i)^{pk} g_i^* (h_{k\ell}(z)) . g_i^* (Ln^{b\ell} (y - a_i))$$

On a :

$$g_i^* h_{k\ell}(z) = g_i^* (\sum_{n=-r}^{+\infty} \alpha_n (z - a_i)^n) .$$

Et on a aussi que :

$$g_i^* ((z - a_i)^n) = (z - a_i)^n . e^{2i\pi n}.$$

n étant entier , $e^{2i\pi n} = 1$.

D’ou :

$$g_i^* (h_{k\ell}(z)) = h_{k\ell}(z) .$$

Et vu les définitions II.4.1 et II.4.2 , on a :

$$\varphi_i (g_i^* f) = \varphi_i (f) .$$

II.5.construction de la matrice $T_i(y)$:

Rappels :

L’exponentielle d’une matrice A est définie par la serie :

$$e^A = I + \sum_{m=}^{+\infty} \frac{A^m}{m!} \quad \text{convergente pour toute matrice } A .$$

Si $AB = BA$ alors :

$$e^{A+B} = e^A . e^B .$$

-A et A commutent alors :

$$e^{-A} = (e^A)^{-1}.$$

Riemann définit la fonction logarithme sur $\tilde{D}^*$ par :

$$L_n(y - a_i) = \int_\gamma \frac{d(z - a_i)}{z - a_i}$$

γ est un chemin continu joignant z_i^0 et $\prod(y)$.

Z_i^0 est le point de base des lacets de D^* entourant le point a_i

g_i agit sur la fonction Ln comme suit :

$$g_i^{*}(L_n(y-a_i)) = L_n(y-a_i) + 2i\pi. \quad (i^2 = -1)$$

La matrice G_i de $GL_p(\forall)$ est Jordanisable, il existe une matrice P de de $GL_p(\forall)$ telle que :

$$P\,G_i\,P^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & . & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . & . \\ . & . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & . & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & J_m \end{pmatrix}$$

J_j : bloc de Jordan.

m : nombre de valeurs propres distinctes, de G_i.

L'espace des solutions X est invariant par monodromie et s'écrit :

$$X = \bigoplus_{j=1}^{m} {}^{j}X$$

où ${}^{j}X$ est l'espace engendré par les vecteurs propres associés à J_j

Les fonctions vectorielles de ${}^{j}X$ ont des ordres $\varphi_i^{k_j}$ distincts et ordonnés par décroissance :

$$\varphi_i^{k_1} > \varphi_i^{k_2} > \ \ldots\ > \varphi_i^{k_j} \quad \text{avec} \quad k_j \leq \dim {}^{j}X$$

Proposition II.5.1 :

Les sous espaces ${}^{j}X^{\ell} = \{\, f \in {}^{j}X \ /\ \varphi_i(f) \geq \varphi_i^{k_\ell} \,\}$ définissent une filtration de ${}^{j}X$.

Preuve :

En effet : $\begin{cases} {}^{j}X^{\ell} \neq \phi. \\ \phi \subset {}^{j}X^{1} \subset {}^{j}X^{2} \subset \ldots \subset {}^{j}X^{k_j} = {}^{j}X \\ \text{avec} : \dfrac{{}^{j}X^{k_{\ell+1}}}{{}^{j}X^{k_\ell}} \neq \phi \end{cases}$

Pour tout ℓ, il existe au moins une fonction f de ${}^{j}X$ d'ordre égal à $\varphi_i^{k_\ell}$ avec $\ell \leq j$

Soit $f \in {}^{j}X^{k\ell}$, $\varphi_i(f) \geq \varphi_i^{k_\ell}$ et $\varphi_i^{k_\ell} > \varphi_i^{k_{\ell+1}}$.

Donc :

$$f \in {}^{j}X^{k_{\ell+1}}.$$

Les inclusions sont alors vérifiées.

Montrer que $\dfrac{{}^{j}X^{k_{\ell+1}}}{{}^{j}X^{k_{\ell}}} \neq \emptyset$ revient à montrer l'inclusion stricte : ${}^{j}X^{k_{\ell}} \subset {}^{j}X^{k_{\ell+1}}$.

Considérons la fonction f telle que :

$$\varphi_i(f) = \varphi_i^{k_{\ell+1}}.$$

$$f \in {}^{j}X^{k_{\ell+1}} \quad \text{et} \quad f \notin {}^{j}X^{k_{\ell}}.$$

Sinon : $\varphi_i^{k_{\ell+1}} \geq \varphi_i^{k_{\ell}}$ ce qui contredit les hypothèses .

Remarque :

l'opérateur de monodromie g_i^{*} préserve la filtration .

II.5.1 Base associée au système différentiel linéaire :

Soit $({}^{j}e_1, {}^{j}e_2, \ldots, {}^{j}e_r)$ une base de ${}^{j}X^{1}$ dont la matrice de monodromie est le bloc de Jordan J_1 .

On complète $({}^{j}e_1, {}^{j}e_2, \ldots, {}^{j}e_r)$ pour obtenir une base de ${}^{j}X^{2}$.

Par complétion, on obtient une base $({}^{j}e)$ de l'espace ${}^{j}X$.

Comme $X = \bigoplus_{j=1}^{m} {}^{j}X$, on obtient une base (e) en prenant :

$$(e) = ({}^{1}e,\ {}^{2}e, \ldots, {}^{m}e) \text{ d'ordre p .}$$

La base ainsi obtenue est appelée base associée au système différentiel linaire [I].

Propriétés de la base associée :

Par construction de la base (e) :

$${}^{j}e_1,\ {}^{j}e_2, \ldots, {}^{j}e_r \text{ ont des ordres } \varphi_i^{k_1}, \ldots, \varphi_i^{k_r} \quad \text{avec} \quad r < \dim {}^{j}X .$$

a) $\varphi_i({}^{j}e_r) \geq \varphi_i({}^{j}e_{r+1})$ pour tout j , $1 \leq j \leq m$ et pour tout r , $1 \leq r \leq \dim {}^{j}X$.

Considérons alors la matrice fondamentale T_i (y) dont les colonnes sont les vecteurs $e_1(y)$, ..., $e_p(y)$ de la base associée.

$T_i(y) = (e_1(y) , e_2(y) ,\ldots, e_p(y)))$ est inversible au voisinage du point a_i.

Par la suite on note :

$$E_i = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} G_i .$$

e_i^j les valeurs propres de E_i telles que : $0 \leq \operatorname{Re}(e_i^j) < 1$.

$$A_i = \operatorname{diag}(\varphi_i(e_1), \ldots, \varphi_i(e_p)).$$

Proposition 1I .5.2 :

La fonction matricielle $(z-a_i)^{A_i} E_i (z-a_i)^{-A_i}$ est holomorphe au voisinage du point a_i.

Pour tout $\varepsilon > 0$, la matrice $(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\varepsilon}$ tend vers zéro quand z tend vers a_i dans tout voisinage θ_i de a_i .

$$y \in \pi_i^{-1}(z) \text{ et } \pi_i^{-1}(z) \subset \pi_i^{-1}(\theta_i)$$

Preuve :

Par définition :

$$(z-a_i)^{A_i} = \exp(A_i \operatorname{Ln}(z-a_i))$$

$$= I_p + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{[A_i \operatorname{Ln}(z-a_i)]^m}{m!}$$

$$= I_p + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{A_i^m \, Ln(z-a_i)}{m!}$$

Si $A_i = \mathrm{diag}(\varphi_i(e_1),\dots,\varphi_i(e_p))$ alors ,

$$A_i^m = \mathrm{diag}(\varphi_i^m(e_1),\dots,\varphi_i^m(e_p)).$$

Ainsi :

$(z-a_i)^{A_i} =$

$$\begin{pmatrix} 1+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\varphi_i^m(e_1)\,Ln^m(z-a_i)}{m!} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & . & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . & . \\ . & . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & . & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\varphi_i^m(e_p)\,Ln^m(z-a_i)}{m!} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}\left((z-a_i)^{\varphi_i(e_1)},\dots,(z-a_i)^{\varphi_i(e_p)}\right).$$

De même :

$$(z-a_i)^{-A_i} = \mathrm{diag}\left((z-a_i)^{-\varphi_i(e_1)},\dots,(z-a_i)^{-\varphi_i(e_p)}\right).$$

En posant $E_i = (\theta_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le p}}$ on a :

$$(z-a_i)^{Ai}E_i(z-a_i)^{-Ai} = ((z-a_i)^{\varphi_i(e_k)}\theta_{kj}(z-a_i)^{-\varphi_i(e_j)})_{\substack{1\le i\le p\\1\le k\le p}} .$$

Donc :

$$(z-a_i)^{A_i} E_i (z-a_i)^{-A_i} = ((z-a_i)^{\varphi_i(e_k)-\varphi_i(e_j)} \theta_{kj})_{\substack{1\le i\le p\\1\le k\le p}} .$$

Chaque composante $(z-a_i)^{\varphi_i(e_k)-\varphi_i(e_j)}.\theta_{kj}$ est holomorphe au voisinage de a_i .

<u>Montrons que :</u>

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \lim_{z\to a_i} (z-a_i)^{A_i} (y-a_i)^{E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\varepsilon} = 0$$

Chaque composante de la matrice

$(z-a_i)^{A_i} (y-a_i)^{E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\varepsilon}$ s'écrit :

$(z-a_i)^{\varphi_i(e_k)-\varphi_i(e_j)}.B_{kj}(y)(y-a_i)^{\varepsilon}$ Pour tout : $1\le k\le p$ et $1\le i\le p$, B_{kj} :

terme provenant de $(y-a_i)^{E_i}$

$(z-a_i)^{\varphi_i(e_k)-\varphi_i(e_j)}.B_{kj}(y)$ est holomorphe au voisinage de a_i donc bornée au voisinage de a_i et ,

$$\lim_{z \to a_i} (z-a_i)^{A_i} (y-a_i)^{E_i} (z-a_i)^{-A_i} (y-a_i)^{\varepsilon} = 0$$ pour

tout $\varepsilon > 0$.

Proposition II.5.3:

La fonction matricielle :

$T_i(y).(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}$ est invariante par monodromie et

est holomorphe au voisinage de a_i .

Preuve :

On a : $\rho(g_i)T_i(y) = T_i(y).G_i$.

Et

$\rho(g_i)\,(T_i(y)(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i})$

$= \rho(g_i)T_i(y).\rho(g_i)(y-a_i)^{-E_i}\rho(g_i).(z-a_i)^{-A_i}$

$= T_i(y).G_i.\exp(-E_i[\mathrm{Ln}(y-a_i)+2i\pi].(z-a_i)^{-A_i}$

$=T_i(y).G_i.\exp(-2i\pi E_i)\exp(-E_i\,\mathrm{Ln}(y-a_i)).(z-a_i)^{-A_i}.$

Comme $G_i = \exp(2i\pi E_i)$, on a :

$$G_i \exp(-2i\pi E_i) = I_P$$

d'où

$$\rho(g_i)\,[(T_i(y).(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}] = T_i(y)\,(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}$$

d'où l'invariance par l'opérateur $\rho(g_i)$.

Pour montrer que : $T_i(y).(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}$ est holomorphe au voisinage de a_i , il suffit de montrer que :

$T_i(y).(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\varepsilon}$ tend vers zéro lorsque $z \to a_i$ dans tout voisinage de a_i et pour tout $\varepsilon > 0$.

On pose :

$$T_i(y)(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\varepsilon} = S_1(y).S_2(y) \text{ avec :}$$

$$S_1(y) = T_i(y).(y-a_i)^{-A_i+\frac{\varepsilon}{2}I_P}$$

$$S_2(y) = (z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\frac{\varepsilon}{2}I_P}.$$

La j<u>ième</u> colonne de $S_1(y)$ s'écrit :

$$e_j(y).(y-a_i)^{-\varphi_i(e_j)+\frac{\varepsilon}{2}}$$

$e_j(y)$ étant à croissance polynomiale et $\varphi_i(e_j)-\frac{\varepsilon}{2}<\varphi_i(e_j)$

on a :

$$\lim_{z\to a_i} e_j(y).(y-a_i)^{-\varphi_i(e_j)+\frac{\varepsilon}{2}}=0$$

d'où

$$\lim_{z\to a_i} S_1(y)=0\,.$$

$$S_2(y)=(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\frac{\varepsilon}{2}}\ .$$

En appliquant la proposition II.5.2, on a :

$\lim_{z\to a_i} S_2(y)=0$ dans tout voisinage de a_i .

Il existe alors une matrice $U_i(z)$ holomorphe, inversible et invariante par monodromie au voisinage de a_i ,telle que :

$$T_i(y)(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}=U_i(z)$$

Par la suite :

$$T_i(y) = U_i(z)(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}$$

II.6.Expressionn de la matrice ω_i (z) :

Au voisinage de la singularité a_i , la matrice ω_i (z) est définie par :

$$\omega_i(z) = \frac{dT_i(y)}{dz}\, T_i^{-1}(y)$$

On a :

$$T_i(y) = U_i(z).(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}.$$

$$T_i^{-1}(y) = (y-a_i)^{-E_i}.(z-a_i)^{-A_i}\, U_i^{-1}(z)$$

Calcul de, $\frac{dT_i(y)}{dz}$:

$$\frac{dT_i(z)}{dz} = \frac{dU_i}{dz}(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i} + U_i(z).\frac{d}{dz}[(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}]$$

Calcul de $\frac{d}{dz}(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}$:

$$\frac{d}{dz}(\exp[A_i\, L_n(z-a_i)].\exp E_i(\int_\gamma \frac{d(z-a_i)}{z-a_i})]$$

$$=\frac{A_i}{z-a_i}(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}+(z-a_i)^{A_i}\frac{E_i}{(z-a_i)}.(y-a_i)^{E_i}$$

Ainsi :

$$\omega_i(z)=\frac{dU_i}{dz}(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}U_i^{-1}(z)$$

$$+U_i(z).[\frac{A_i}{z-a_i}(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}+(z-a_i)^{A_i}\frac{E_i}{(z-a_i)}.(y-a_i)^{E_i}]$$

$$\times (y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}U_i^{-1}(z)$$

Donc :

$$\omega_i(z)=\left(\frac{dU_i}{dz}.U_i^{-1}(z)+\frac{U_i(z)}{z-a_i}\left[A_i+(z-a_i)^{A_i}E_i(z-a_i)^{-A_i}\right]U_i^{-1}(z)\right)dz.$$

Par la suite, nous montrerons que pour toutes singularités a_i , a_j de $\sum$, les matrices ω_i (z) et ω_j (z) sont des prolongements analytiques l'une de l'autre.

On fera appel à quelques définitions.

II.7 . Prolongement analytique :

Définitions II.7.1

Soit X un espace topologique :

On appelle élément de fonction, le couple ordonné(f,D) où D est un domaine ouvert de X et f une application holomorphe sur D.

Deux éléments de fonctions (f_0 , D_0) et (f_1 , D_1) sont des prolongements directs , l'un de l'autre si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) $D_0 \cap D_1 \neq \Phi$

2) $f_0(z) = f_1(z)$, pour tout $z \in D_0 \cap D_1$.

On écrit alors :

$$(f_0, D_0) \approx (f_1, D_1)$$

Proposition II.7.1 :

Soient D_0 , D_1 et D_2 trois domaines ouverts de X tels que :

$$D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \Phi$$

Si $(f_0, D_0) \approx (f_1, D_1)$ et $(f_1, D_1) \approx (f_2, D_2)$ alors :

$$(f_0, D_0) \approx (f_2, D_2).$$

Considérons un recouvrement fini $\{U_\alpha\}$ de $P^1(\forall) - \Sigma$ par des ouverts simplement connexes avec des intersections simplement connexes . z_0 étant le point de base des lacets de $\Pi_1(P^1(\forall) - \Sigma)$.

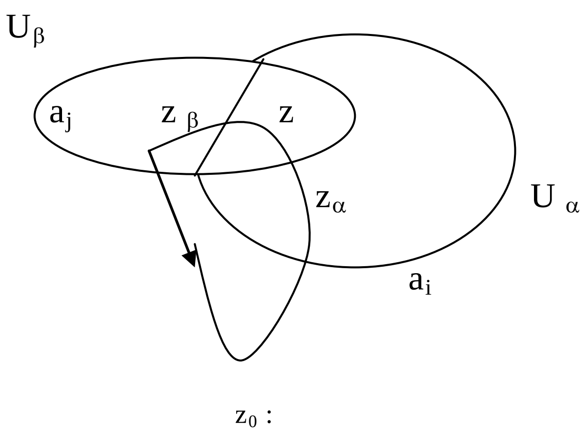
Considérons alors γ_α un chemin joignant z_0 à un point fixe z_α de U_α

.

pour tout z de $U_\alpha \cap U_\beta$, on note $t_\alpha(z)$ un chemin joignant z_α à z contenu dans U_α .

On définit alors sur $U_\alpha \cap U_\beta$, la fonction :

$$g_{\alpha\beta}(z) = \rho\left(\gamma_\alpha\, t_\alpha(z)\, t_\beta^{-1}(z)\, \gamma_\beta^{-1}\right)$$



Résultats :

Par la composition des lacets, on a :

1) $t_\alpha(z) \cdot t_\beta^{-1}(z)$ est un chemin joignant z_α à z_β .

2) $\gamma_\alpha\, t_\alpha(z) \cdot t_\beta^{-1}(z) \cdot \gamma_\beta^{-1}$ est un lacet de base z_0 et d'inverse

$\gamma_\beta\, t_\beta(z) \cdot t_\alpha^{-1}(z) \gamma_\alpha^{-1}$ qui est aussi un lacet de base z_0 .

3) la condition du cocycle est vérifiée :

$$g_{\alpha\beta}\ g_{\beta\upsilon} = g_{\alpha\upsilon}$$

$$\left(\gamma_\alpha\, t_\alpha(z) \cdot t_\beta{}^{-1}(z) \gamma_\beta{}^{-1}\right)\left(\gamma_\beta\, t_\beta(z) \cdot t\ {}^{-1}(z) \cdot\ {}^{-1}\right) = \quad t\ (z).t^{-1}(z)\ \ {}^{-1}.$$

Considérons par la suite, les matrices différentielles :

$$\omega_\alpha(\mathrm{z}) = \frac{dT_\alpha(\mathrm{y})}{d\mathrm{z}}\, T_\alpha^{-1}(\mathrm{y})$$

$T_\alpha(\mathrm{y})$: matrice fondamentale de solutions définie sur l'espace total du U_α revêtement universel de U_α .

On a :

Pour tout $z \in U_\alpha \cap U_\beta , T_\alpha^{-1}(y) g_{\alpha\beta}(z) = T_\beta^{-1}(y)$

Comme $\gamma_\alpha \, t_\alpha(z) \cdot t_\beta^{-1}(z) \cdot \gamma_\beta^{-1}$ est un chemin fermé d'un ouvert simplement connexe, il est donc homotope au lacet identitiée et $g_{\alpha\beta}(z) = I_P$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$ et en déduit que :

$$\omega_\alpha = \omega_\beta \text{ sur } U_\alpha \cap U_\beta$$

Et on a donc :

$$(\omega_\alpha , U_\alpha) \approx (\omega_\beta , U_\beta) .$$

Ainsi la famille $\{\omega_\alpha\}$ définit une forme différentielle globale holomorphe sur $P^1(\forall) - \Sigma$ est notre problème est résolu .

Le vocabulaire mathématique classique réserve le mou de « singularité régulière » au cas où $\omega(z)$ possède un pôle simple .

Notre probleme est analogue au 21^{iene} problème de Hilbert :

« Pour tous points $a_1,a_2,\ldots,a_n$ de $P^1(\forall)$ et pour toutes matrices $G_1,G_2,\ldots,G_n$ de $GL(p, \forall)$ vérifiant $\prod_{i=1}^{n} G_i = Ip$, prouver l'existence d'un système à pôle simples dont les matrices G_i , $i=1,2,..,n$,soient ses matrices de monodromie » le problème a été suppose résolu et ce n'est qu'aux années 1980 que le mathématicien russe A. Bolibukh remet en question les démonstrations classiques de Plemelj et Birkhoff et donne une sens de centre – exemples Il démontre le théoreme suivant :

<u>Théoréme :</u>

Soit ρ une représentation ρ Π_1 $(P^1(\forall)-\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}) \rightarrow GL(p,\forall)$

satisfaisant :

1) ρ n'est pas irréductible .
2) Chacune des matrices G_i a une seule valeur propre u_i est un seul bloc de Jordan
3) $\prod_{i=1}^{n} u_i = 1$

Alors ρ n'est pas isomorphe à la représentation de monodromie d'un système à pole simples .

Et (donne un contre –exemple) par l'application, du théorème , Bolibukh donne le contre-exemple suivant :$\Sigma=\{a_1,a_2,a_3\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] : Claude Godbillon

Eléments de topologie algébrique.

[2] : Arnand Beaurille

Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (Séminaire Baubaki 1992-93 N° 765) .

[3] : A.Bolibrukh

The Riemann-Hilbert problem Russian-Math Surveys 45-2 p(1 -47)(1990) .

[4] : Grantmacher R

Theory of matrix , Vol.II , chelsea New York (1959) .

[5] : Vlademir Petrov Kostov

Monodromiy groups of regular systems on Riemann's sphere Prepublication N° 401 sept 1994 .

[6] : E . Ince

Ordinary differential equations , Dover , New York (1959)

[7] : Walter Rudin

Real and complex analysis .

SOMMAIRE

CHAPITRE I : Rappels Et Definitions

CHAPITRE II: Systèmes Différentiels Linéaires à Points Singuliers Réguliers.

Remerciements :

Je tains à exprimer ma profonde gratitude à Mr K, BETINA qui a accepté de diriger le travail .

Mes remerciements vont aussi à Mr S , Hachaichi qui m'a honorée par sa présidence du jury .

Je pris aussi redevable à Mr M, Zitouni , Mr A, Kassi et Mr A, Idris bey qui ont examine le travail .

Je tiens aussi à remercier mes parents , mon frère , mes sœurs et mon mari pour leur soutien moral inégalé , sans oublier mes chères amies Hassiba et Fadila