Considérons un système différentiel linéaire d'ordre p.

$$df\,(z) = \omega\,(z)\, f\,(z) \qquad\qquad (I)$$

où ω (z) est une matrice carrée d'ordre p dont les coefficients sont des 1-formes différentielles holomorphes sur la droite projective $P^1(\forall)$ privée d'un ensemble fini de points $\Sigma = \{ a_1, a_2, \ldots, a_N \}$.

Le système (I) admet un espace de solutions multiformes X de dimension p .

Le groupe fondamental Π_1 (P^1 $(\forall)$ $-\Sigma$) opère sur l'espace X par la représentation ρ :

$$\rho : \Pi_1(\; P^1\, (\forall) - \Sigma\,) \longrightarrow GL\,(X)$$

$$g_i \qquad \longrightarrow \rho\,(g_i\,).$$

ou g_i est une classe de lacets entourant le point singulier a_i

Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de X , $\rho(g_i)$ étant un automorphisme, il transforme la base $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ en une autre base $(f'_1, f'_2 \ \ldots, f'_p)$ et vérifie : $\left\{ \rho(g_i) (f_1, f_2, \ldots, f_p) = G_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_p \end{pmatrix} \right.$

La représentation ρ est appelée représentation de monodromie associée au système différentiel linéaire (I).

La matrice G_i est appelée matrice de monodromie associée au système différentiel linéaire (I).

Le groupe fondamental $\Pi_1 (P^1 (\forall) - \Sigma)$ est engendré par un nombre fini de générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_N$ vérifiant : $\prod_{i=1}^{N} g_i = Id$.

Comme : $\rho \left(\prod_{i=1}^{N} g_i \right) = \prod_{i=1}^{N} \rho (g_i)$ et que $\rho(Id) = Id_{GL(X)}$, les matrices G_i vérifiant alors :

$$\prod_{i=1}^{N} G_i = I_P .$$

Le problème posé est le suivant :

Soient $\sum = \{ a_1 , a_2 , . . . , a_N \}$ un ensemble fini de points de $P^1(\forall)$ et soient $G_1 , G_2 , . . . , G_N$ des matrices de $GL (p, \forall)$ vérifiant :

$$\prod_{i=1}^{N} G_i = I_P \ .$$

« prouver l'existence d'un système différentiel linéaire $df (z) = \omega (z) f (z)$ à singularité régulière en tout point a_i et dont les matrices G_i soient ses matrices de monodromie pour toutes $i =1……N$ ».

La réponse au problème est positive, donnée par BLEMELJ et BIRKOFF , puis développeé récemment par le mathématicien russe A .A.BOLIBUKH et dont l'étude fera l'objet du chapitre II