

N°d'ordre : 05/ 2005-M/MT

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene



Faculté de Mathématiques

Mémoire Présenté

Pour l'obtention du diplôme de **Magister en Mathématiques**

Spécialité : **Systèmes Dynamiques**

Par : M^{elle} **METREF Nadia**

Sujet

**Sur
Un Chaos Déterministe**

Soutenu publiquement le : 21 / 02 /2005, devant le jury composé de :

Mr A.KESSI	Professeur	USTHB	Président.
Mr R.BEBBOUCHI	Professeur	USTHB	Directeur de thèse.
Mr M.ABID	Maître de conférence	USTHB	Examineur.
Mr M.AIDER	Maître de conférence	USTHB	Examineur.
Mr M.OUADJAOUT	Chargé de cours	ENP	Examineur.

Remerciements

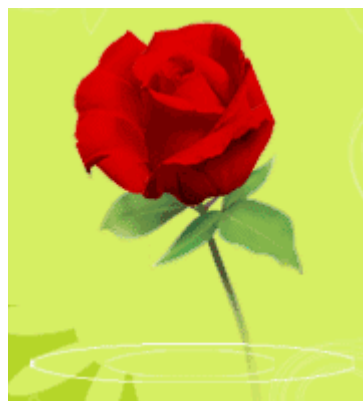
Je souhaite avant tout exprimer ma reconnaissance à M. R. BEBBOUCHI. J'ai beaucoup apprécié d'avoir travaillé avec lui. Je tiens à le remercier pour sa confiance sans faille et sa disponibilité. C'est avec un réel plaisir que j'ai préparé mon mémoire sous sa direction.

Je suis très honorée que M. A. KESSI ait accepté la charge de présider le jury. Je remercie très sincèrement Messieurs M. ABID et M. AIDER pour avoir bien accepté d'être membres du jury en tant qu'examineurs.

Ma reconnaissance va à M. M. OUADJAOUT qui m'a encouragé à préparer mon mémoire de Magister. Je suis très heureuse qu'il soit membre du jury.

Merci en particulier à LAADJ Tewfik pour son aide en informatique.

Enfin, ma reconnaissance va à ma famille pour son soutien et ses encouragements. Sa présence à mes côtés m'est été très précieuse.



MERCI A VOUS TOUS.

Table des matières

Introduction	3
1 Généralités	5
1.1 Introduction	5
1.2 Axiomatique	6
1.2.1 Transfert	6
1.2.2 Idéalisaton	7
1.2.3 Standardisation	8
1.3 Principes de permanence	8
1.3.1 Principe de Cauchy	9
1.3.2 Principe de Fehrele	10
1.4 Systèmes différentiels perturbés	11
1.4.1 Le lemme de l'ombre courte	12
1.4.2 Macroscopes et Microscopes	12
2 Brève histoire du chaos	14
2.1 Introduction	14
2.2 Généralisation	15
2.2.1 Quelques définitions	15
2.2.2 Les trajectoires	15

2.2.3	Transition vers le Chaos	16
2.3	Le Chaos déterministe	16
3	Étude du problème de Marzec et Spiegel	19
3.1	Introduction	19
3.2	Position du problème	22
3.3	Résultats obtenus	23
3.3.1	Étude du champ rapide R.	26
3.3.2	Nature des points singuliers	28
3.4	Étude du cas $\delta \ll 1$	32
3.5	Étude du cas $\delta \gg 1$	38
	Conclusion	40
	Bibliographie	41

Introduction

L'analyse non standard est aujourd'hui utilisée dans de nombreux domaines des mathématiques: systèmes dynamiques, calcul asymptotique, probabilités, algèbre, espaces de Banach. Elle s'est révélée un outil à la fois efficace et agréable à utiliser, ce dont témoignent de nombreux articles publiés, appliquant l'analyse non standard (ANS) à ces domaines.

La particularité de l'ANS réside dans la possibilité de distinguer parmi les objets mathématiques certains qui sont construits d'une manière unique et qu'on qualifiera d'objets standard et d'autres qui ne le sont pas, et de ce fait, ils sont non standard. L'usage des techniques non standard a porté ses fruits dans différents domaines, notamment dans les perturbations singulières où l'ANS a été d'un apport certain.

Dans la théorie des équations différentielles, les perturbations singulières apparaissent généralement comme des problèmes difficiles, nécessitant des techniques d'études particulières, dont la plus fréquente est l'usage des développements asymptotiques. L'analyse non standard fournit une procédure plus simple; en effet, au lieu d'étudier une famille d'équations différentielles dépendant d'un paramètre ε (tendant vers zéro), on n'en étudie qu'une seule, pour une valeur infiniment petite fixée de ε . Le passage aux ombres des trajectoires décrit complètement le comportement limite.

C'est dans le cas d'une famille d'équations dépendant d'un paramètre supplémentaire δ , que l'utilisation de l'outil non standard s'avère très avantageux car, comme ε

et δ varient simultanément, la compréhension et la description des bifurcations nécessiteraient probablement des développements très ardues.

Notre travail comporte un exemple d'étude d'une famille de système différentiel singulièrement perturbé. Il est constitué essentiellement de trois chapitres. Le premier chapitre est un rappel des principes de l'analyse non standard et la donnée de quelques définitions utiles pour la compréhension des techniques utilisées par la suite. Dans le second chapitre, nous parlerons du chaos déterministe et donnerons quelques définitions nécessaires à la compréhension du phénomène. Le troisième chapitre est consacré au système perturbé étudié par C.J.MARZEC et E.A.SPIEGEL, qui décrit l'influence d'un potentiel sur le déplacement unidimensionnel d'une particule élémentaire. On montrera que, pour des valeurs du paramètre δ très grandes devant 1, on n'a pas existence de cycle limite, par contre, pour des valeurs de δ très petites devant 1, on a l'existence d'un cycle limite (dont on calculera la période).

Une conclusion générale clôture le travail.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction

A la théorie axiomatique des ensembles de ZERMELO - FRAENKEL avec l'axiome du choix, qu'on notera Z.F.C, est adjoint un nouveau prédicat unaire "st" dont l'utilisation est gouvernée par trois axiomes. Une telle théorie est appelée théorie des ensembles internes.

Ainsi, la théorie des ensembles internes IST se manifeste comme une extension conservative de ZFC dans le sens que tout énoncé vrai dans Z.F.C le restera dans IST et qu'on n'introduit aucune contradiction . Une nouveauté apportée par l'IST est la possibilité de distinguer parmi les objets mathématiques certains qui sont " usuels", qu'on qualifiera d'objets standard, et d'autres qui ne le sont pas et sont, ainsi, non standard.

Sera donc qualifié d'interne tout énoncé exprimé en langage Z.F.C sans faire usage du nouveau prédicat "st" sur les variables. Sinon, il sera dit externe et seuls les énoncés internes peuvent être standard. (si toutes les constantes qui interviennent sont standards) ou non. Ainsi, il existe des ensembles internes et d'autres externes, une distinction qui aura un intérêt par la suite.

1.2 Axiomatique

1.2.1 Transfert

On adoptera les abréviations suivantes :

$\forall^{\text{st}} x, f(x)$: pour tout x standard, $f(x)$ est vérifiée

$\exists^{\text{st}} x, f(x)$: il existe x , x standard, tel que $f(x)$ soit vérifiée

Axiome 1 Pour toute formule standard $f(x)$ ne comportant aucune autre variable libre que x , on a:

$$\forall^{\text{st}} x, f(x) \implies \forall x, f(x)$$

ce qui signifie que toute formule standard est vérifiée pour tout x dès qu'elle est vérifiée pour tout x standard. On a, de même, l'énoncé équivalent suivant:

$$\exists x, f(x) \implies \exists^{\text{st}} x, f(x)$$

Ainsi, à chaque fois qu'une formule standard est vérifiée par un certain x , alors elle l'est aussi par un certain x standard. Par suite, si x est unique alors il est forcément standard, d'où un moyen d'identifier les objets standard et on a en général la règle suivante:

Règle 1 Tous les objets mathématiques construits d'une manière unique par une formule standard sont standard.

Mais, en pratique, on aura besoin de reformuler le principe de transfert dans un contexte un peu plus général et on a l'énoncé suivant :

Axiome 1' Pour toute formule standard $f(x, t_1, \dots, t_n)$ dont les seules variables libres sont x, t_1, \dots, t_n , on a :

$$\forall^{\text{st}} t_1, \dots, t_n : (\exists x, f(x, t_1, \dots, t_n)) \implies \exists^{\text{st}} x, f(x, t_1, \dots, t_n).$$

1.2.2 Idéalisation

L'axiome d'idéalisation nous permettra de distinguer des éléments non standard parmi les éléments d'ensembles standard tels que \mathbf{N} , \mathbf{Z} ou \mathbb{R} (car construits d'une manière unique).

On adoptera les définitions suivantes:

Un réel est illimité s'il est supérieur en valeur absolue à tout entier standard.

Un réel est limité s'il est inférieur en valeur absolue à un entier standard.

Un réel est infinitésimal s'il est inférieur en valeur absolue à tout réel standard strictement positif.

Un réel est appréciable s'il est limité et non infinitésimal

Deux réels sont équivalents si leur différence est infinitésimale.

Axiome 2. Pour toute formule interne f contenant au moins deux variables libres x et y , on a :

$$\forall^{\text{st, fini}} z, (\exists x, \forall y \in z : f(x, y) \implies \exists x, \forall^{\text{st}} y : f(x, y))$$

où $\forall^{\text{st, fini}} z$ désigne quelque soit z standard et fini

La partie gauche de l'équivalence indiquera que la formule est concourante.

La partie droite indiquera qu'il existe un élément en relation avec tous les éléments standard. Ainsi, si on prend pour $f(x, y)$ la relation interne et concourante

$$f(x, y) : x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N} \text{ et } x > y,$$

L'axiome **2** impliquera l'existence d'un x supérieur à tout entier standard, donc illimité.

De même \mathbb{R} contient des illimités et aussi des infinitésimaux inverses d'illimités; de tels éléments sont donc par définition non standard, mais on ne peut rien affirmer quant aux éléments limités. Cependant, on a la règle suivante :

Règle 2 Un ensemble est standard et fini si et seulement si tous ses éléments sont standard.

Ce fait découle de l'axiome précédent en utilisant la formule interne et concourante,

$$f(x, y) : x \in \mathbf{A} \text{ et } x \neq y .$$

1.2.3 Standardisation

L'axiome de standardisation nous permet d'associer d'une manière unique à tout ensemble interne ou externe un ensemble standard qui sera dit son standardisé, et on a l'énoncé suivant :

Axiome 3 Pour toute formule interne ou externe $f(z)$ on a :

$$\forall^{st} x, \exists^{st} y, \forall^{st} z : (z \in y \implies z \in x \text{ et } f(z)).$$

L'axiome **3** assure donc l'existence d'un ensemble standard y ayant pour seuls éléments standard les éléments standard z de x satisfaisant $f(z)$. L'ensemble y est unique, du moment que deux tels ensembles ont nécessairement les mêmes éléments standard, donc sont égaux du fait qu'ils sont standard.

Une première conséquence de cet axiome est l'existence d'un réel standard \mathbf{x} infiniment proche de tout réel limité \mathbf{x} qui sera appelé son ombre ou sa partie standard, et qu'on notera par 0x . Un élément qui admet une ombre sera dit presque standard.

1.3 Principes de permanence

On introduira dans ce qui suit une nouvelle notion d'ensemble, des ensembles qui, en un certain sens, échappent au lois de la mathématique classique; de tels ensembles sont dits externe. Les autres sont internes et il n'est pas chose aisée de distinguer un ensemble externe d'un ensemble interne. Seulement une formule interne définit un ensemble interne; par contre une formule externe peut définir un ensemble interne, comme pour l'ensemble $\{x \simeq 0, st(x)\}$ qui se réduit au singleton interne et standard $\{0\}$.

Maintenant, si on considère l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, x \simeq 0\}$ il devrait posséder une borne supérieure M du moment que toute partie majorée de \mathbb{R} possède une borne supérieure. Si M est supposée infinitésimale, $2M$ le serait aussi et elle est strictement supérieure à M ; si on la suppose appréciable, $\frac{M}{2}$ le serait aussi et à chaque fois on a une contradiction. Ainsi l'ensemble considéré ne vérifie pas au moins un théorème de l'analyse classique: il est externe. D'une manière générale on a la règle suivante:

Règle 2 Un sous ensemble d'un ensemble interne, défini au moyen d'une formule externe, est dit externe, si le fait de le supposer interne met en défaut au moins un théorème classique.

Si l'analyse classique s'avère incapable de gouverner de tels ensembles, l'analyse non standard (ANS), grâce aux principes de permanence, en tire profit et c'est dans l'utilisation de ces nouveaux outils qu'apparaît l'originalité des méthodes non standard.

1.3.1 Principe de Cauchy

Aucun ensemble externe n'est interne.

Ce principe nous permet d'étendre la validité d'une propriété interne à un domaine plus vaste que celui sur lequel elle a été vérifiée. Ainsi, si on considère une propriété interne $F(x)$ vraie pour tous les x ip, alors elle demeure vraie pour un certain x non infinitésimal, du moment que l'ensemble interne $\{x \in \mathbb{R}, F(x)\}$ contiendrait l'ensemble externe $\{x \in \mathbb{R}, x \simeq 0\}$, mais il ne peut lui être égal en vertu du principe précédent.

Si on considère la droite d'équation $y = \varepsilon x$ où ε est un infinitésimal, son standardisé se réduit au point $(0, 0)$.

Le standardisé ne s'avère pas comme étant une réplique fidèle d'un ensemble et on est alors amené à définir une nouvelle notion, dite ombre d'un ensemble, obtenue en prenant le standardisé non pas de l'ensemble lui même mais d'un ensemble qui lui est infiniment proche et on a dès lors la définition suivante :

Définition 1.1. Soit une partie A interne ou externe d'un espace topologique E .
On appelle ombre de A et on le note 0A l'ensemble standard.

$${}^0A =^s \{x \in E, \text{Hal}(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

où $\text{Hal}(x) = \{x \in E, y \simeq x\}$ est appelé **halo** de x .

L'ombre de la droite $y = \varepsilon x$ sera, ainsi, la droite d'équation $y = 0$.

Définition 1.2. Soient I et E deux ensembles internes. Un sous ensemble H de E est dit un halo de E s'il est externe et s'il existe une suite interne $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E strictement décroissante telle que

$$H = \bigcap_{i \in {}^\circ I} A_i$$

Où ${}^\circ I$ est l'ensemble qui contient tous les standards de I

Définition 1.3. soient I et E deux ensembles internes. Un sous ensemble G de E est dit une galaxie de E s'il existe une suite interne $(B_i)_{i \in I}$ de parties de E strictement croissante telle que :

$$G = \bigcup_{i \in {}^0 I} B_i$$

On a dès lors le principe suivant :

1.3.2 Principe de Fehrele

Aucun halo n'est une galaxie.

1.4 Systèmes différentiels perturbés

Définition 1.4. *Un système est perturbé **singulièrement** si le système perturbé et le système réduit ne sont pas du même ordre.*

Généralement au moins une des composantes se trouve multipliée par ε , un réel infiniment petit. De tels problèmes sont souvent rencontrés en physique, dans l'étude des oscillations élastiques, en électronique dans les circuits R.L.C, ou en mécanique des fluides.

Définition 1.5. *Un système **lent- rapide** est un problème différentiel (tel qu'une équation différentielle ou un champ de vecteur), dont les solutions adoptent alternativement deux types de comportements: **des phases lentes**, où la solution est une fonction régulière du temps, et **des phases rapides**, brèves, où la solution change d'une valeur à une autre au bout d'un temps court.*

Définition 1.6. *On appelle le passage d'une phase à une autre un "**saut**".*

Dans la pratique, les comportements lents- rapides sont dus à la présence d'un paramètre ε dont la valeur est petite en regards des autres paramètres.

Un champ lent rapide dans \mathbb{R}^3 est de la forme suivante:

$$\begin{cases} \varepsilon x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ou bien $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Dans le cas où $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, la composante x' de \mathbb{R}^2 est infiniment grande sauf dans le halo de la courbe d'équation :

$$f(x, y) = 0$$

appelée courbe lente.

Dans le cas où $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, c'est la composante x qui est infiniment grande sauf dans le halo de la surface d'équation

$$(g(x, y) = 0)$$

dite surface lente.

1.4.1 Le lemme de l'ombre courte

En comparant une équation standard $y' = f_0(x, y)$ avec une équation infiniment proche $y' = f(x, y)$, $f_0 \simeq f$, des propriétés de f se conservent pour f_0 ou entraînent d'autres propriétés pour f_0 . Le lemme de l'ombre courte, qu'on énoncera comme théorème, répond au problème inverse; il est très utile pour les trajectoriens.

Théorème 1.1. *Soit les équations $y' = f_0(x, y)$ et $y' = f(x, y)$ avec f_0 standard, continue, choisie de telle sorte qu'il y ait existence et unicité des solutions (on prendra par exemple f_0 localement lipschitzienne) et f infiniment proche de f_0 sur une partie H de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Soit $I_0 = [a_0, b_0]$ un intervalle standard de \mathbb{R} , u_0 une solution standard, définie sur I_0 et ψ_0 son graphe. S'il existe une partie interne K de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ telle que: $\text{hal}(\psi_0) \subset K \subset H$, alors toute solution u de l'équation non standard, issue d'un point $(x_1, u(x_1))$ du halo de ψ_0 , x_1 étant dans $[a_0, b_0]$, est prolongeable à I_0 tout entier et sa restriction à I_0 admet u_0 comme ombre.*

1.4.2 Macroscopes et Microscopes

Définition 1.7. *Une loupe centrée en un point (x_0, y_0) est une transformation $X = h(x)$ et $Y = k(y)$ telle que, $h(x_0) = k(y_0) = 0$ et pour y et (ou) x infiniment proches de y_0 et (ou) x_0 , $h(x)$ et (ou) $k(y)$ ne sont pas infiniment petits.*

Définition 1.8. *On appellera semi loupe une loupe telle que k soit l'identité. A titre d'exemple citons les loupes homothétiques: $X = \frac{x - x_0}{\varepsilon}, Y = \frac{y - y_0}{\eta}$, avec ε et η*

infiniment petits. Si $\eta = \varepsilon$, on dira que c'est une loupe homothétique de puissance $\frac{1}{\varepsilon}$; si $\eta \neq \varepsilon$, c'est une loupe variable.

Remarque 1.1. On a aussi des loupes exponentielles dues à Benoît :

$$Y = y^{[\varepsilon]} = \begin{cases} y^\varepsilon & \text{si } y > 0 \\ -(-y)^\varepsilon & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

avec ε infiniment petit positif. Ces différents types de loupes vont servir à étudier le halo de courbes ou de points importants.

Remarque 1.2. Un **macroscop** a la fonction inverse d'une loupe. Les macroscopes serviront à explorer les régions "non observables", en dehors des régions limitées.

Chapitre 2

Brève histoire du chaos

2.1 Introduction

La théorie du Chaos est une discipline basée sur la théorie des systèmes dynamiques, qui résulte en partie des travaux du mathématicien Henri Poincaré, à la fin du *XIX*^{ème} siècle.

Cette théorie est utilisée pour prévoir l'évolution des populations avec la transformation de Myberg (encore appelée transformation logistique).

Il existe beaucoup d'autres domaines dans lequel le Chaos est utilisé: l'étude du système solaire, l'écoulement des fluides, les rythmes biologiques, les télécommunications,

L'Objectif de ce chapitre est de donner quelques définitions élémentaires sur les systèmes dynamiques, afin d'appréhender ce qu'est le Chaos.

2.2 Généralisation

2.2.1 Quelques définitions

Supposons un système dynamique à n dimensions décrit par le système d'équations différentielles suivant :

$$A : \begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad \text{avec } X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t)),$$

X_0 la condition initiale du système $X(t)$ est appelé le vecteur d'état.

$F(X(t), t) = (F_1(X(t), t), \dots, F_n(X(t), t))$ définit une fonction à n dimensions F de $IR^n \times IR^+$ dans IR^n .

L'espace des variables X_1, X_2, \dots, X_n définit l'espace des phases IR^n .

2.2.2 Les trajectoires

a) La trajectoire la plus simple est le **point fixe**.

Un point fixe y est une solution du système F précédent telle que $F(y, t) = 0$ pour tout t .

La trajectoire du point y est le point lui même.

b) Un autre type de trajectoire est **l'orbite périodique** encore appelé **cycle**. Une trajectoire est dite périodique si pour tout point X_p de cette trajectoire on a :

$$F(X_p, t) = F(X_p, t + T) \text{ où } T \text{ est la } \mathbf{période} \text{ du cycle.}$$

c) Une troisième éventualité existe dans laquelle la trajectoire ne dépasse jamais sa position d'origine X_0 (condition initiale) bien qu'elle soit dans une région finie de l'espace.

L'évolution d'un point $X(t)$ au cours du temps apparaît comme aléatoire; par contre l'observation de la trajectoire dans l'espace des phases, lorsque t tend vers l'infini,

décrit une forme particulière qui présente une structure **feuilletée**. Cette géométrie particulière est appelée **attracteur étrange**. C'est la signature du Chaos.

Une trajectoire **Chaotique** se caractérise par une dépendance très sensible aux conditions initiales: deux trajectoires à conditions initiales très proches divergent très rapidement.

L'ensemble des points X_0 de l'espace des phases définissant la condition initiale de chacune des trajectoires $\varphi(X_0, t)$ qui convergent asymptotiquement vers l'attracteur est appelé **bassin d'attraction**.

2.2.3 Transition vers le Chaos

Il existe trois grands schémas de route vers le Chaos.

1. Doublement de période ou route de Feigenbaum, qui correspond à une succession de bifurcations fourches.
2. L'intermittence du chaos qui a lieu lorsque le système se trouve à proximité d'une bifurcation tangente prise en revers.
3. Route par quasi-périodicité qui se traduit par des bifurcations de Hopf répétées.

Remarque 2.1. *Par la suite on s'intéressera à la route de **Feigenbaum**.*

2.3 Le Chaos déterministe

La notion du Chaos **déterministe**, qui trouve ses fondements dans l'article de LORENTZ, [9] a connu un développement mathématique dans les années 70 [13] suivi d'un véritable essor scientifique et populaire dans les années 80.

Le Chaos marque un profond bouleversement dans la manière d'envisager les systèmes dynamiques.

Le développement de l'informatique n'est pas étranger au succès rencontré, de par, la facilité des simulations et la beauté de certains résultats obtenus.

Il est intéressant de noter que le Chaos déterministe apparaît sur des systèmes à petits nombres de variables.

Une condition nécessaire à l'apparition du Chaos est que le système soit non linéaire. C'est la complexité des dynamiques produites par des systèmes simples qui a, dans un premier temps, étonné les chercheurs et suscité l'essentiel des travaux entrepris sur la question. Pour des systèmes dont le nombre de variables d'état est élevé, l'étude s'est développée plus tardivement.

La définition suivante du chaos contient trois concepts véritablement clés dans un comportement chaotique: imprédictibilité, irréductibilité et un élément de régularité.

L'évolution du système dynamique est imprédictible en ce sens qu'elle est sensible aux conditions initiales.

La sensibilité aux conditions initiales (**S.C.I**) se définit comme suit

Définition 2.1. [6] L'application $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ possède **une sensibilité aux conditions initiales** s'il existe δ strictement positif tel que, pour tout \mathbf{x} de \mathbf{X} et un certain voisinage $\mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ de x , il existe y de \mathbf{V} tel que: $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$.

L'irréductibilité empêche le système chaotique d'être décomposé en sous systèmes (sous-ensembles ouverts invariants qui n'interagissent pas sous l'application). Cette propriété s'appelle la transitivité topologique.

Définition 2.2. [6] L'application $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ est dite **transitive topologiquement** si pour toute paire d'ensembles ouverts $\mathbf{U}, \mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ il existe $k > 0$ tel que

$$f^k(\mathbf{U}) \cap \mathbf{V} \neq \Phi.$$

Contrairement aux comportements purement aléatoires, les systèmes chaotiques possèdent une certaine régularité qui se traduit par le fait que les points périodiques sont denses.

Voici une définition, ou plutôt une caractérisation du chaos:

Définition 2.3. Soit (\mathbf{X}, d) un espace métrique et $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ une application continue. Alors le système dynamique (\mathbf{X}, d) est chaotique si:

- 1) f est topologiquement transitive.
- 2) Les points périodiques de f sont denses dans \mathbf{X} .
- 3) f est sensible aux conditions initiales.

Chapitre 3

Étude du problème de Marzec et Spiegel

3.1 Introduction

Soit une particule élémentaire de masse unité qui se déplace d'une façon unidimensionnelle sous l'influence d'un potentiel $U(x, z)$, où x est la position et z un paramètre dépendant du temps. Elle est soumise au système:

$$X = \begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\partial U(x, z)}{\partial x} - vy \\ z' = -\varepsilon(z + g(x)) \end{cases}$$

où v est une constante strictement positive, ε un petit paramètre ($0 < \varepsilon \leq 0,1$) et g un polynôme en x .

Comme $\text{div}X = -(\varepsilon+v) < 0$, les volumes des nuages de points de phase décroissent continûment vers zéro.

A la limite, les nuages se condensent autour de structures de volume nul appelées "attracteurs".

Si l'ensemble attracteur a la structure d'un ensemble de Cantor, il est dit "**étrange**".
L'apparition d'un attracteur étrange coïncide avec une allure **apériodique des solutions** .

Le cas

$$U(x, z) = \frac{x^4}{4} - z\frac{x^2}{2}$$

a été étudié par Lorenz en 1963 et beaucoup d'autres auteurs

Le cas

$$U(x, z) = \frac{x^4}{4} - \delta x - z\frac{x^2}{2}$$

perturbation du problème précédent, reste à étudier.

C.J. Marzec et A. Spiegel s'intéressent au cas

$$U(x, z) = \frac{x^4}{4} - zx - \delta\frac{x^2}{2}$$

avec δ constante et

$$g(x) = x - x^3$$

ainsi que $v = 0$.

Le système à étudier devient alors :

$$X = \begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 + \delta x + z \\ z' = -\varepsilon(z + x - x^3) \end{cases} \quad (3.1)$$

Concernant les résultats numériques de **Marzec** et **Spiegel**, nous avons :

Pour $0 < \delta \leq 0.619$, après un temps suffisamment long, les trajectoires du champ X spiralent autour d'un **cycle limite**.(Voir figure 3.1)

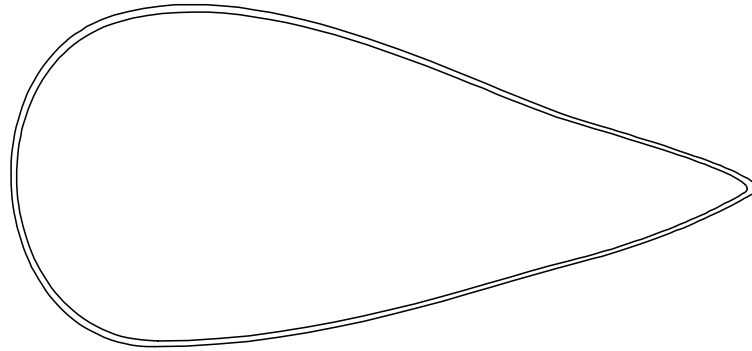


Figure 3.1: La projection du cycle limite dans le plan (x, y) .

Et lorsque δ dépasse la valeur 0.61915, la période de l'oscillation **double**. Si on considère les points d'intersection des orbites avec le plan $x = 0$, on obtient le pitchfork (figure 3.2) et on met en évidence la constante η de Feigenbaum.:

$$\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta_n - \delta_{n-1}}{\delta_{n+1} - \delta_n} = 5.75, \text{ avec une erreur de } 5\%.$$

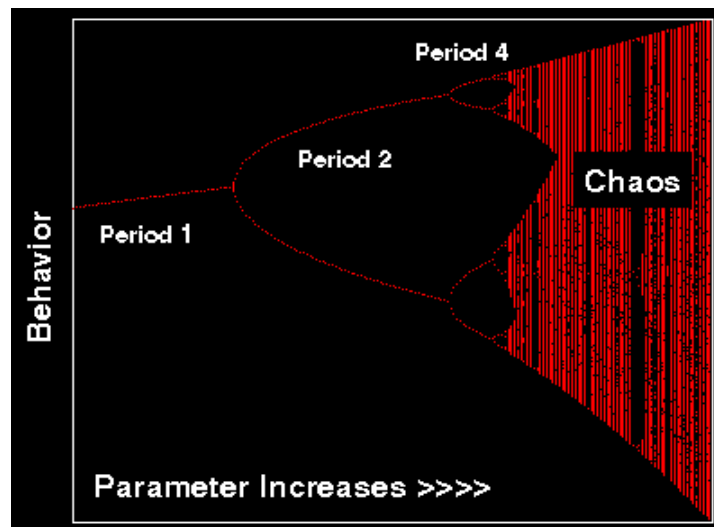


Figure 3.2: Cascade de doublement de période (le pitchfork)

3.2 Position du problème

Soit le champ \mathbf{X}_δ défini par:

$$\mathbf{X}_\delta : \begin{cases} x' = y \\ y' = z + \delta x - x^3 \\ z' = -\varepsilon(z + x - x^3) \end{cases}$$

On prend ε un réel infiniment petit positif fixé et δ une constante strictement positive.

Le champ \mathbf{X}_δ est une perturbation régulière du champ standard intégrable

$$\mathbf{X}'_\delta : \begin{cases} x' = y \\ y' = z + \delta x - x^3 \\ z' = 0 \end{cases}$$

dont les deux intégrales premières sont

$$z = z_0 \text{ et } \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{\delta x^2}{2} - z_0 x + k = 0$$

où k est une constante d'intégration.

D'après le lemme de l'ombre courte, les trajectoires de \mathbf{X}_δ vont longer des trajectoires de \mathbf{X}'_δ pendant un temps infiniment grand et en longer d'autres après.

Pour voir ce qui se passe après des temps assez longs, on fait le changement de temps $\tau = \varepsilon t$, le champ \mathbf{X}_δ devient alors:

$$\mathbf{X}''_\delta : \begin{cases} \varepsilon x' = y \\ \varepsilon y' = z + \delta x - x^3 \\ z' = -(z + x - x^3) \end{cases}$$

où \mathbf{X}''_δ est une perturbation singulière du champ \mathbf{X}_δ .

L'objet de notre étude est de montrer qu'il existe des valeurs de δ (paramètre de contrôle) pour lesquelles il existe un unique cycle limite dont on donnera une approximation de la période.

3.3 Résultats obtenus

Soit le champ \mathbf{X}''_{δ} défini par:

$$\mathbf{X}''_{\delta} : \begin{cases} \varepsilon x' = y \\ \varepsilon y' = z + \delta x - x^3 \\ z' = -(z + x - x^3) \end{cases}$$

\mathbf{X}''_{δ} est un champ lent rapide. Le champ rapide \mathbf{R} est donné par le système:

$$\mathbf{R} : \begin{cases} x' = y \\ y' = z + \delta x - x^3 \\ z = z_0 \end{cases}$$

avec z_0 fixé et le champ lent \mathbf{L} est défini par les solutions de l'équation différentielle:

$$z' = -(z + x - x^3)$$

Les points singuliers du champ \mathbf{X}''_{δ} sont les points de la courbe d'équations:

$$y = 0 \text{ et } z + x - x^3 = 0$$

lorsque $\delta = 1$ et se réduisent à l'unique point $(0, 0, 0)$ lorsque $\delta \neq 1$.

\mathbf{X}''_{δ} a pour courbe lente, la courbe d'équations:

$$y = 0 \text{ et } z + \delta x - x^3 = 0$$

C'est une cubique dans le plan $y = 0$.

Dans le halo de la courbe lente, les trajectoires du champ \mathbf{X}_δ'' sont orientées dans le sens :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Des } z \text{ croissants si } z < x^3 - x \\ \text{Des } z \text{ décroissants si } z > x^3 - x \end{array} \right\} \text{ lorsque } \delta < 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Des } z \text{ croissants si } z > x^3 - x \\ \text{Des } z \text{ décroissants si } z < x^3 - x \end{array} \right\} \text{ lorsque } \delta > 1.$$

En dehors du halo de la courbe lente, les trajectoires de \mathbf{X}_δ'' restent dans le halo d'un plan horizontal $z = cte$. En considérant le temps \mathbf{T} défini par $\tau = \tau_0 + \varepsilon T$, les ombres des trajectoires de \mathbf{X}_δ'' paramétrées par \mathbf{T} , sur un intervalle limité, sont des trajectoires du champ rapide \mathbf{R} , d'après le lemme de l'ombre courte.

Donc l'étude détaillée du champ rapide \mathbf{R} est nécessaire.

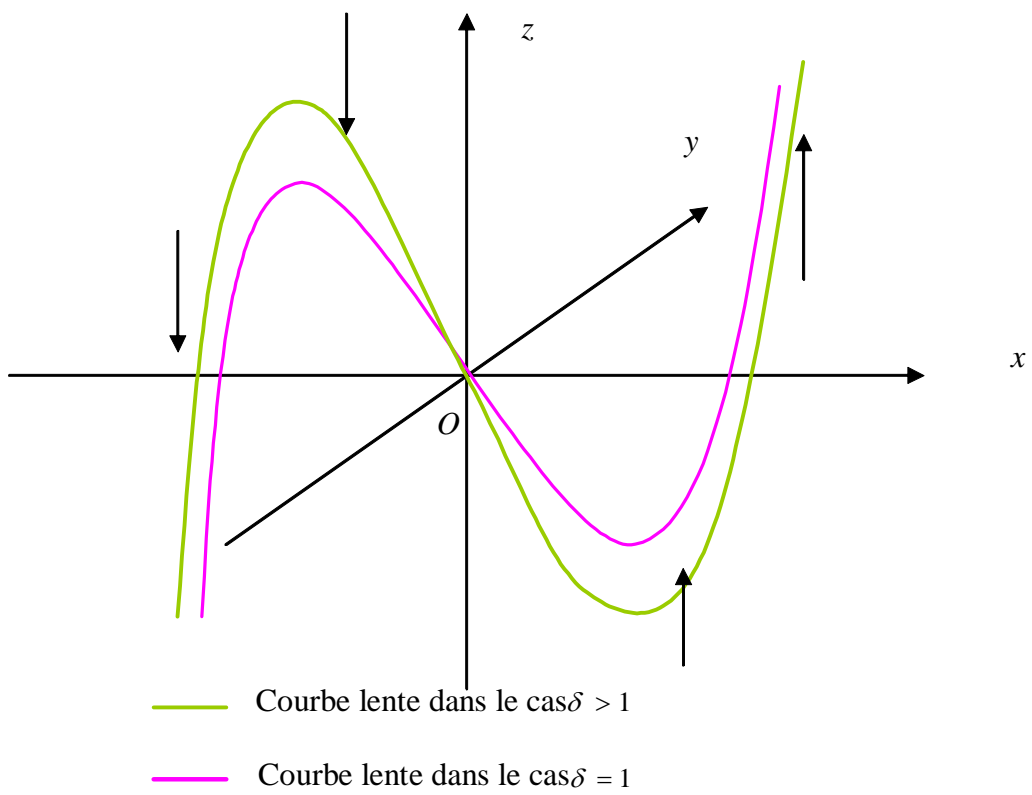
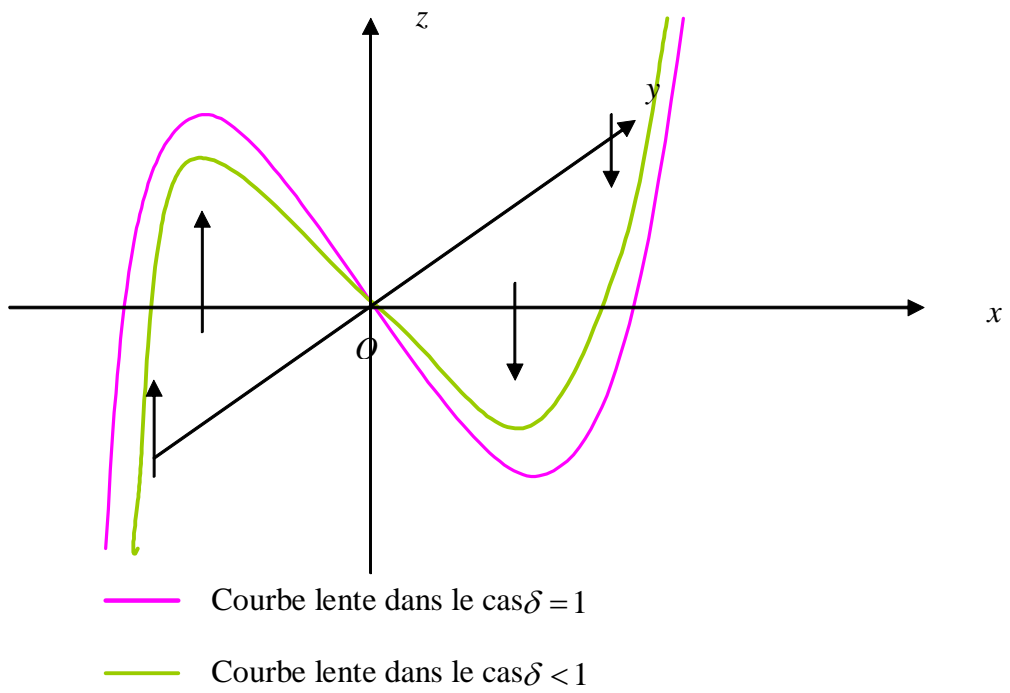


Figure3.1a : L'orientation du champ.

3.3.1 Étude du champ rapide \mathbf{R} .

Soit le champ rapide \mathbf{R} défini par le système

$$\mathbf{R} : \begin{cases} x' = y \\ y' = z + \delta x - x^3 \\ z = z_0 \end{cases}$$

(z_0 fixé, indépendant du temps)

\mathbf{R} est un champ hamiltonien, dont l'énergie totale est donnée par l'expression:

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{\delta x^2}{2} - z_0 x.$$

Cette énergie se conserve le long d'une trajectoire $\phi(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ avec z_0 fixé.

Ainsi l'étude des courbes de niveaux

$$(H(x, y, z_0) = cte = E(x, y))$$

détermine entièrement les trajectoires de \mathbf{R} . (Voir figure 3.2a)

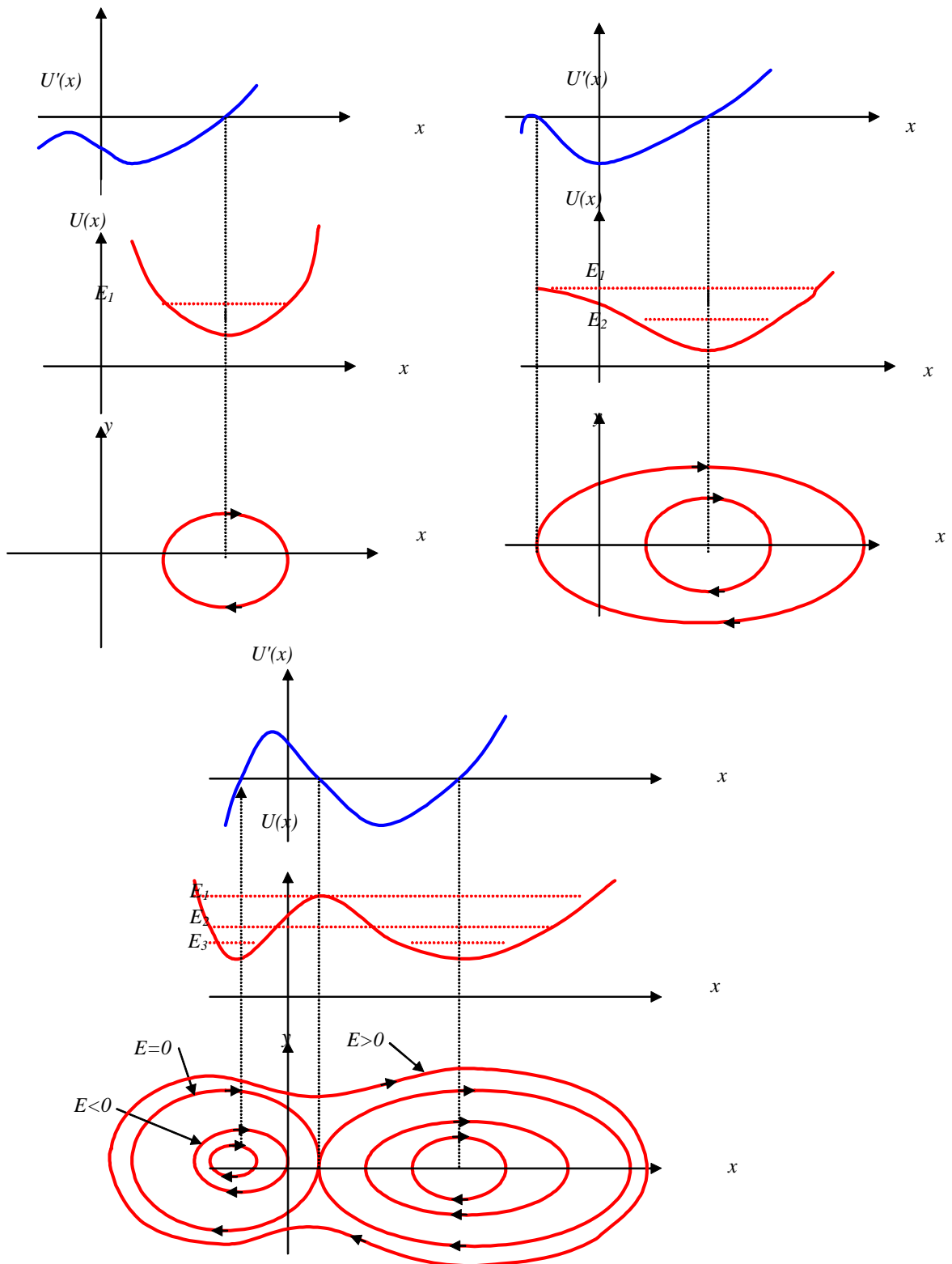


Figure 3.2a : Les courbes de niveaux d'énergie $E(x, y)$

Les points singuliers de \mathbf{R} sont les points $(x, 0, z_0)$ tel que x est solution de l'équation:

$$x^3 - \delta x - z_0 = 0.$$

Proposition 3.1. *Le champ rapide \mathbf{R} possède:*

1. Un seul point singulier, lorsque $|z_0| > \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$.
2. Deux points singuliers, lorsque $|z_0| = \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$.
3. Trois points singuliers, lorsque $|z_0| < \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$.

3.3.2 Nature des points singuliers

Nous avons d'après la classification de Poincaré:

1. Des centres lorsque: $|x| > \sqrt{\frac{\delta}{3}}$.
2. Des cols lorsque: $|x| < \sqrt{\frac{\delta}{3}}$.

Proposition 3.2. *Lorsque $|x| = \sqrt{\frac{\delta}{3}}$, les points singuliers sont des nœuds cols*

Preuve. les points d'abscisses x tels que $x = \sqrt{\frac{\delta}{3}}$ et $x = -\sqrt{\frac{\delta}{3}}$ sur la cubique, sont des points, des orbites homoclines entourant un point centre appartenant à la courbe lente située sur les plans d'équation: $z = -\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$, $z = \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$ respectivement.

On note par E (resp C) les points de coordonnées respectives $(-\sqrt{\frac{\delta}{3}}, 0, +\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}})$, $(+\sqrt{\frac{\delta}{3}}, 0, -\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}})$

Pour montrer que E (resp C) est un nœud col, il suffit de montrer que les trajectoires des points de la région gauche (resp droite) du point E (resp C) sont attirées par E (resp C)

Pour cela on applique une loupe centrée aux points E et C, on étudie le flot au voisinage du centre $(0, 0, 0)$

Vue la symétrie du champ initial X''_δ , on fera l'étude au voisinage d'un point seulement.

Soit la loupe centrée au point $E \left(-\sqrt{\frac{\delta}{3}}, 0, +\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}\right)$ donnée par :

$$\begin{cases} \mu X = x + \sqrt{\frac{\delta}{3}} \\ \nu Y = y \\ \eta Z = z - \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

avec μ, ν et η des paramètres positifs infiniment petits tel que: $\eta = \mu^2 = \frac{1}{\varepsilon\nu}$ et $t = \eta\tau$

Sous cette loupe, la courbe

$$z = x^3 - \delta x,$$

devient :

$$Z = (Cte)X^2$$

avec $Cte < 0$. C'est une parabole de maximum le point E .

Le champ X''_δ devient après ce changement de variables équivalent (d'après le lemme de l'ombre courte) au champ défini par:

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = 0 \\ Z' = (\delta - 1)\sqrt{\frac{\delta}{3}} \end{cases}$$

Restreint au plan XOY , ce champ a pour courbe intégrale la courbe d'équation

$$Y = Cte$$

et son linéarisé admet une valeur propre double nulle, l'origine $(0, 0)$ est alors un point col.

Ainsi, le point E est un nœud col (Voir figure 3.3). ■

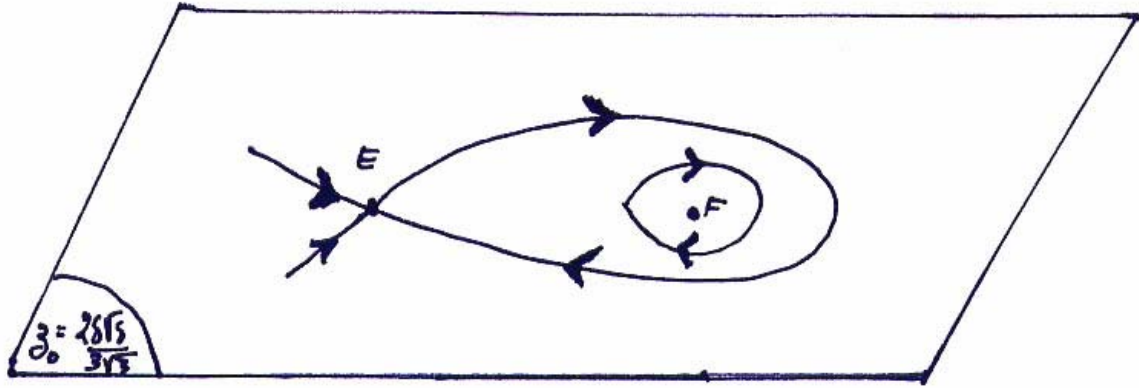


Figure 3.3: Le nœud col E.

- Proposition 3.3.** – Lorsque $|z_0| > \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$, on a un centre.
- Lorsque $|z_0| = \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$, on a un centre et un nœud col.
 - Lorsque $|z_0| < \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$, on a un col et deux centres.

(Voir figure 3.4)

Comme l'orientation de notre champ, dans le halo de la courbe lente, dépend de la valeur de δ devant 1, on fait l'étude de X_δ'' pour $\delta \ll 1$ et $\delta \gg 1$ séparément.

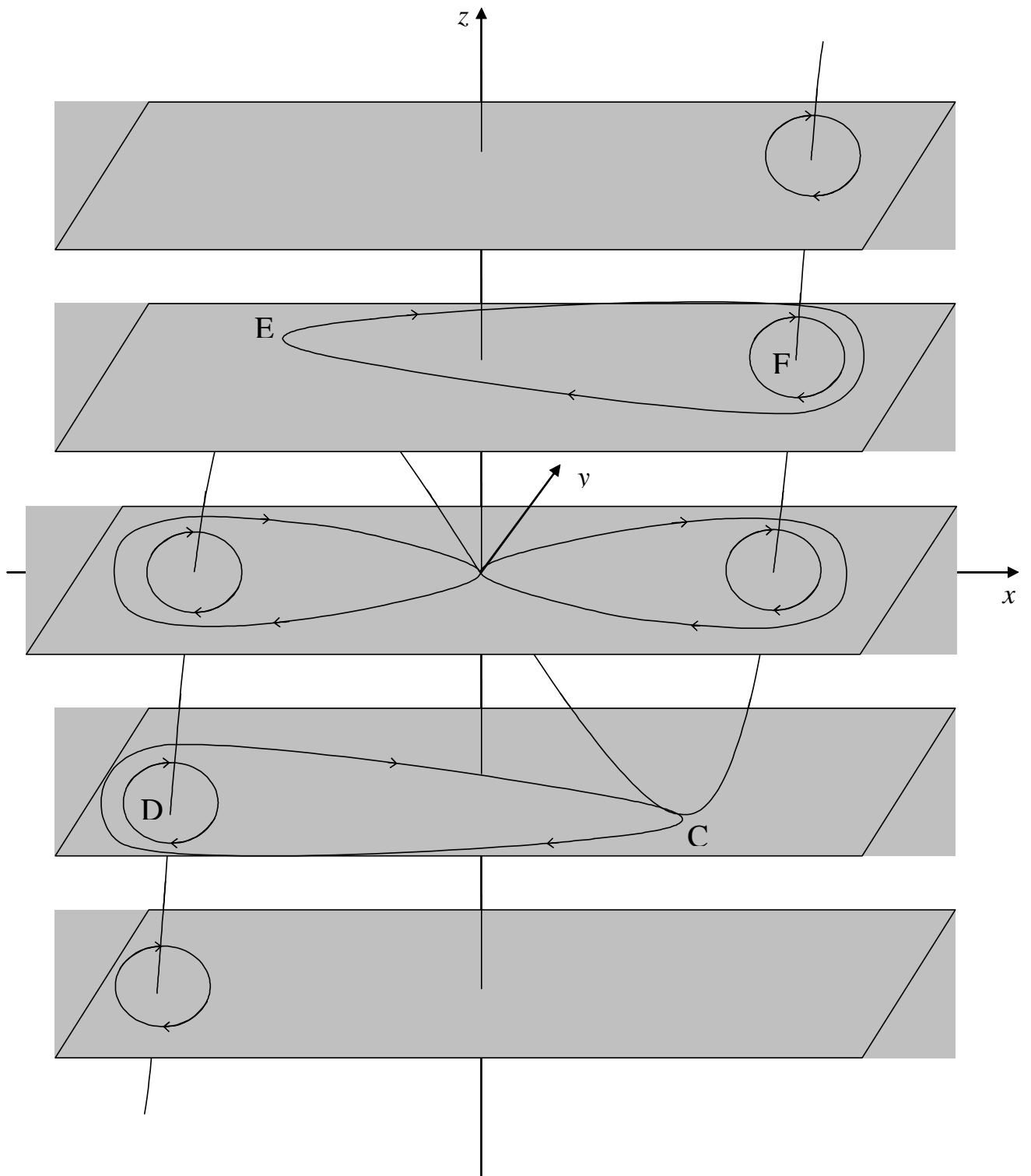


Figure 3.4: Trajectoires du champ rapide

3.4 Étude du cas $\delta \ll 1$

Soit A le solide formé de quatre cylindres pleins C_1, C_2, P_1 et P_2 .

- C_1 (resp C_2) a pour âme DE (resp CF), où DE et CF sont les morceaux des deux branches stables de la courbe lente.

- P_1 (resp P_2) contient la portion de surface entourée par la courbe intégrale qui contient la trajectoire homocline du point singulier C (resp E) d'épaisseur très petite. (Voir figure 3.5) :

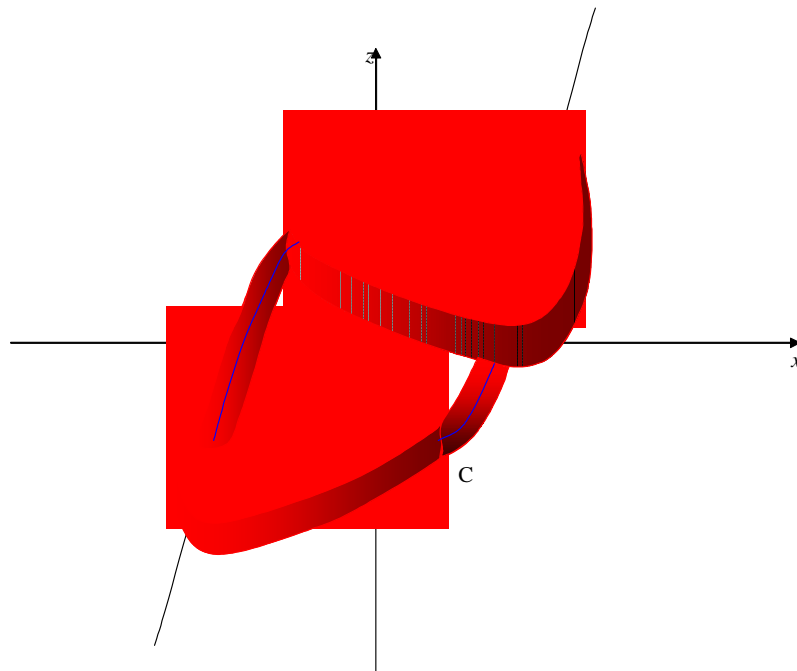


Figure 3.5: Le solide A (piège à trajectoire).

Proposition 3.4. *Le solide A est un piège à trajectoires .*

Preuve. Soit $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de \mathbb{R}^3 tel que:

$$z_0 > \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$$

La trajectoire issue de P_0 longe une des trajectoires du champ rapide \mathbf{R} dans le halo du plan $z = z_0$ en se dirigeant vers la branche stable de la courbe lente. Une fois dans le halo de cette branche, elle se déplacera jusque dans le halo du point C , minimum de la cubique, sous l'action du champ lent, en longeant des morceaux des trajectoires du champ rapide \mathbf{R} pendant des temps non limités, du fait que l'énergie décroît dans cette région.

Elle quitte le halo du point C en longeant d'abord la trajectoire homocline et se rapproche du point D de l'autre branche stable de la cubique.

Elle dérive le long de la branche stable de la cubique jusque dans le halo du point E , maximum de la cubique, de la même manière que de l'autre côté de la courbe lente.

Puis elle quitte le halo du point E en longeant la trajectoire homocline et se rapprochant du point F . Et le scénario recommence.

La trajectoire ne pourra plus sortir du solide A. (Voir figure 3.6). ■

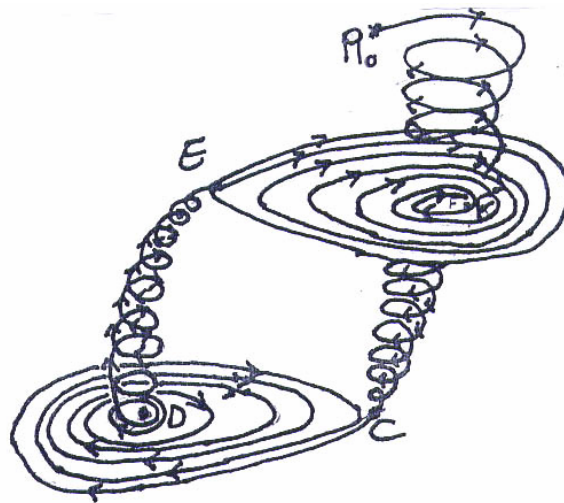


Figure 3.6: Trajectoire du point P_0 .

Théorème 3.1. *Il existe un cycle limite unique.*

Preuve. a) Existence du cycle limite

Soit le plan d'équation z égale à une constante standard comprise strictement entre $-\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$ et $+\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$. Son intersection avec le cylindre C_1 est un disque standard D_1 centré au point "a", intersection de la cubique avec ce plan.

La trajectoire d'un point standard G de ce disque, distant du point "a" d'une distance égale à d_1 , suit un chemin similaire à celui de la trajectoire de P_0 . Cette trajectoire recoupe le disque D_1 en un point distant de "a" d'une distance d_2 tel que $d_2 < d_1$, du fait que l'énergie est décroissante dans cette région de la cubique. On définit ainsi l'application de premier retour de Poincaré, qui est une contraction.

Le théorème du point fixe s'applique, ce qui assure l'existence du cycle limite.

b) L'unicité du cycle limite

Le cycle ne peut qu'être stable. S'il y a existence d'un autre cycle limite, il sera aussi stable.

Et comme entre deux cycles stables, il doit exister un cycle instable, on aboutit à une contradiction. (Voir figure 3.6a) ■

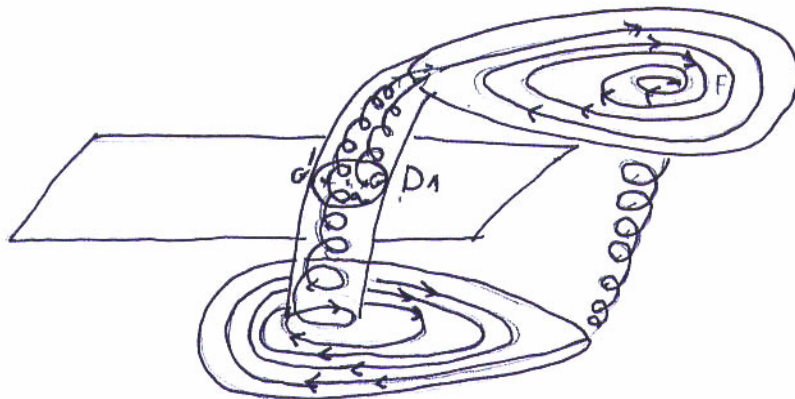


Figure 3.7: L'application de premier retour de Poincaré.

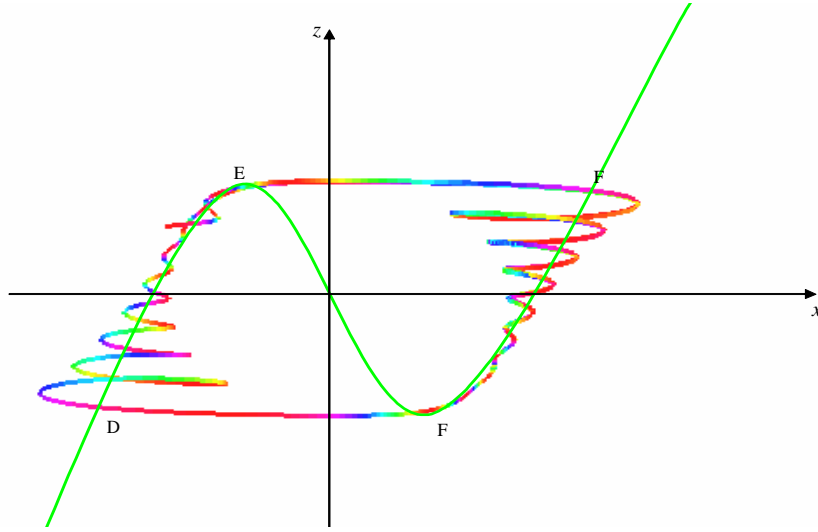


Figure 3.8: L'allure asymptotique du cycle limite

Proposition 3.5. *L'ombre du cycle limite est formée de deux surfaces S_1 et S_2 limitées par les orbites homoclines situées respectivement sur les plans d'équations:*

$$z = +\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}} \text{ et } z = -\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$$

chacune, et de deux morceaux FC et DE des branches stables de la courbe lente.

Preuve. Soit un point P de coordonnées (x_0, y_0, z_0) avec $z_0 \gg +\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$.

a) Description de la surface S_1

Lorsque la trajectoire issue du point P arrive dans le halo du plan $z_1 = +\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$, elle se trouve piégée par l'orbite homocline entourant S_1 , du point $E \left(-\sqrt{\frac{\delta}{3}}, 0, \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}} \right)$ et entourant le point F de la branche stable de la courbe lente. Une fois à l'intérieur de celle-ci, la trajectoire spirale, pendant des temps non limités, pour atteindre le halo du point F , du fait que l'énergie :

$$E(x(\tau), y(\tau)) = \frac{1}{2}y^2(\tau) + \frac{1}{4}x^4(\tau) - \frac{\delta x^2}{2} - z_1 x(\tau)$$

dans cette région, décroît du point E , réalisant le maximum du potentiel $U(x, z_1) = \frac{1}{4}x^4(\tau) - \frac{\delta x^2}{2} - z_1 x(\tau)$ vers le point F , réalisant le minimum de $U(x, z_1)$.

b) Description du morceau FC

Arrivée dans le halo de la courbe lente au point F , la trajectoire dérive le long de celle-ci sous l'action du champ lent pour atteindre le halo du point C $(\sqrt{\frac{\delta}{3}}, 0, -\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}})$, maximum du potentiel $U(x, z_2)$, qui réalise l'ensemble limite de l'orbite homocline entourant la surface S_2 dans le plan $z_2 = -\frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$ contenant le point D de la branche stable, avec une énergie décroissante. Ainsi, le morceau FC constitue l'ombre de la trajectoire le long de cette branche stable.

(Voir figure 3.9). ■

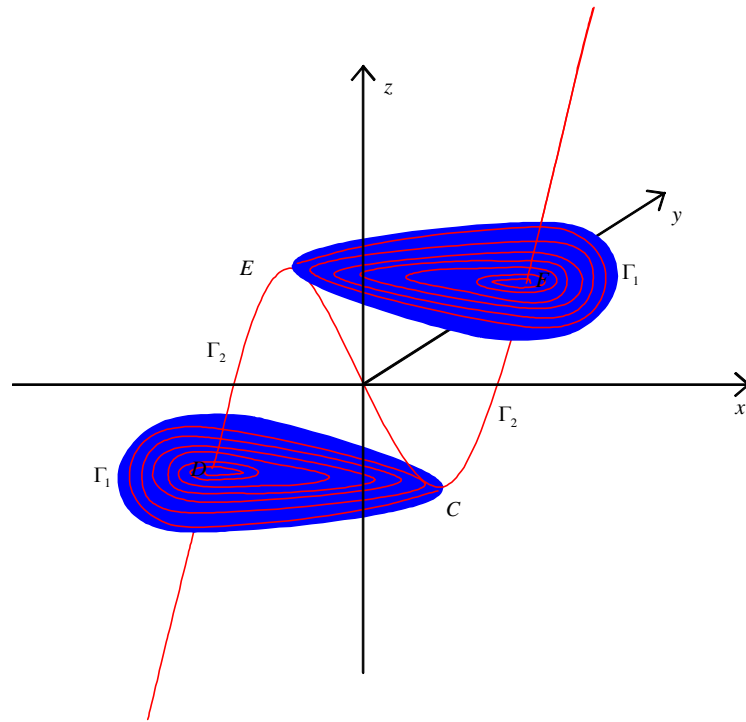


Figure 3.9: L'ombre du cycle limite

Proposition 3.6. *La période du cycle limite Γ est presque égale à*

$$2\left(\frac{3\delta - 2\delta \ln 2}{2(\delta - 1)}\right) + 2T_{\Gamma_1}$$

avec

$$T_{\Gamma_1} = \int_{\frac{\delta^2}{12}}^{-\frac{13\delta^2}{12}} \left(2 \int_{-\sqrt{\frac{\delta}{3}}}^{\sqrt{\frac{\delta}{3}}} \frac{dx}{\sqrt{2\left(K - \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \delta\frac{x^2}{2} - \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}x\right)\right)}} \right) dK$$

Preuve. Nous avons $T = T_{\Gamma_1} + T_{\Gamma_2}$ et $\Gamma = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2)$

1. Calcul de T_{Γ_2}

Γ_2 est le morceau attractif de la courbe lente d'équations: $y = 0, z = x^3 - \delta x$.

Nous avons $z = x^3 - \delta x$. ce qui implique: $z' = (3x^2 - \delta)x'$.

Comme $z' = -z - x + x^3$ alors $x' = \frac{(\delta - 1)x}{3x^2 - \delta}$.

Or $x' = \frac{dx}{dt}$ ce qui entraîne $dt = \frac{dx}{x'}$.

Par suite $dt = \frac{3x^2 - \delta}{(\delta - 1)x}$, d'où $T_{\Gamma_2} \simeq \int dt = \frac{1}{\delta - 1} \int_{-\sqrt{\frac{\delta}{3}}}^{+\sqrt{\frac{\delta}{3}}} \frac{3x^2 - \delta}{x} dx$.

Après calcul on obtient: $T_{\Gamma_2} \simeq \frac{3\delta}{2(\delta - 1)} - \frac{\delta \ln 2}{(\delta - 1)}$.

2. Calcul de T_{Γ_1} :

Γ_1 est l'ombre du cycle limite sur le plan d'équation $z = \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}$,

il contient les ombres des courbes d'équation: $K = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \delta\frac{x^2}{2} - \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}x$.

On a $T_K = \int dt = \int \frac{dx}{\frac{dx}{dt}} = 2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{y} = 2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2\left(K - \frac{x^4}{4} + \delta\frac{x^2}{2} + \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}x\right)}}$

où $x_0 = -\sqrt{\frac{\delta}{3}}$ et $x_1 = 2\sqrt{\frac{\delta}{3}}$.

Par suite, en appliquant le résultat de T. Sari[14]

$$T_{\Gamma_1} = \int_{K_0}^{K_1} T_K dK = \int_{K_0}^{K_1} \left(2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2\left(K - \frac{x^4}{4} + \delta\frac{x^2}{2} + \frac{2\delta\sqrt{\delta}}{3\sqrt{3}}x\right)}} \right) dK.$$

avec $K_0 = E(x_0) = \frac{\delta^2}{12}$, $K_1 = E(x_1) = \frac{-13\delta^2}{12}$ où E désigne l'énergie. (Voir figure 3.10). ■

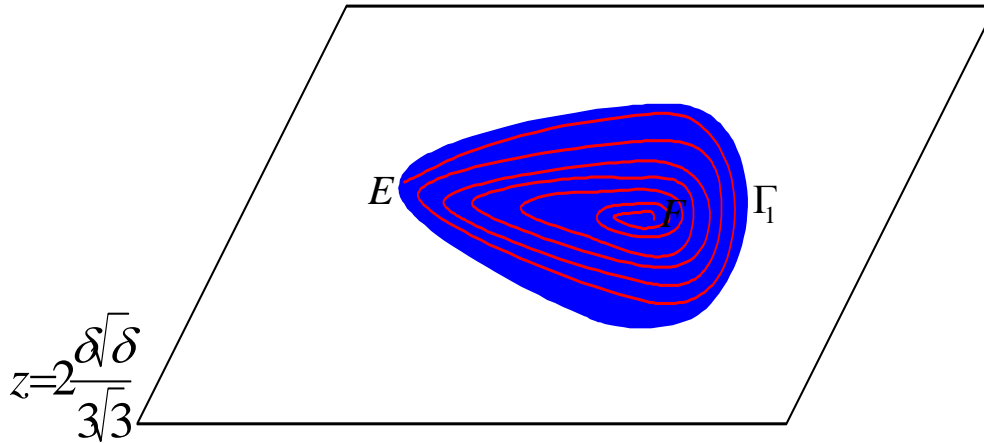


Figure 3.10: L'orbite homocline du point E.

3.5 Étude du cas $\delta \gg 1$

Théorème 3.2. *Il n'existe pas de cycle limite pour $\delta \gg 1$.*

Preuve. Vue l'orientation du champ dans ce cas (voir fig 3) et vu le fait que l'énergie est croissante dans le halo de la courbe lente, il ne peut y avoir de cycle limite entourant le point singulier $(0, 0, 0)$.

En effet, la trajectoire issue d'un point $P(x_0, y_0, z_0)$ longe d'abord une des trajectoires du champ rapide \mathbf{R} dans le halo du plan d'équation $z = z_0$ et se dirige vers le halo de la branche stable. Une fois dans le halo de celle-ci, elle tend vers l'infini en spiralant. (Voir figure 3.11). ■

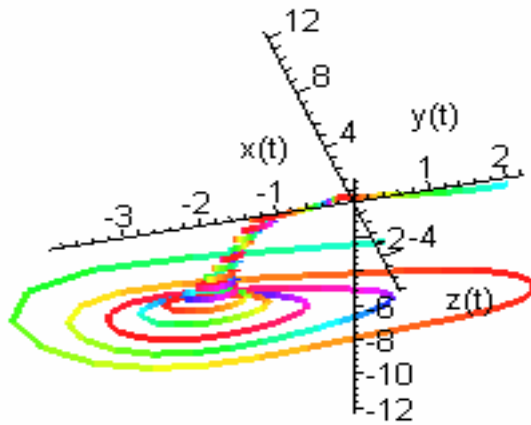


Figure 3.11: L'allure de la trajectoire du point P_0 .

Conclusion : Nous venons de voir que lorsque δ traverse la valeur 1, il y'a disparition du cycle limite. Cet état du système peut s'accompagner de solutions canards.

Conclusion

Tous les résultats ont été énoncés en termes d'analyse non standard. Pour une reformulation classique, ils demeureront vrais pour certains ε non infiniment petits, conséquence du principe de permanence.

Dans notre travail, nous avons illustré la facilité que procure l'analyse non standard dans l'étude des perturbations singulières. L'allure du cycle limite et l'approximation de sa période sont la preuve de l'utilisation du théorème de Tikhonov, version améliorée par: **C.Lobry**, **T.Sari** et **S.Touhami.**, en affaiblissant les hypothèses données par Tikhonov à l'aide des outils de l'analyse non standard [14].

L'existence du cycle limite, pour des valeurs de δ très petites devant 1 et sa disparition lorsque δ prend des valeurs très grandes devant 1 entraînent que, pour des valeurs très proches de 1, on a un retard à la bifurcation. De plus, comme le cas $\delta = 1$ est caractérisé par le fait que l'ensemble des points singuliers de notre système a même ombre que la courbe lente, l'étude de cette dernière sous une bonne loupe peut peut-être nous renseigner sur l'existence ou non des solutions canards.

Cette étude fera l'objet d'un prochain travail.

Bibliographie

- [1] V. Arnold, "Chapitre supplémentaires sur la théorie des équations différentielles ordinaires" édition MIR, 1978.
- [2] V. Arnold, "Equations différentielles ordinaires" édition MIR, 1974.
- [3] R. Bebbouchi, "Equations différentielles ordinaires".OPU.
- [4] R. Bebbouchi, "Equations différentielles perturbées et analyse non standard." OPU, 1990.
- [5] P. Cartier, "Perturbations singulières des équations ordinaires et analyse non standard". Séminaire Bourbaki, novembre 1981, Astérisque 92-93, p.p:21-40, 1982.
- [6] R. Devaney, "A First course in chaotic dynamical systems". Addison-Wesley, sixth pr.1998.
- [7] F. Diener, "Famille d'équations à cycle limite unique".C.R.A.S.Paris 289, serie A(1979), 571-574.)
- [8] V. Gauthron et E.Isambret, "Lire l'analyse non standard"
- [9] E.N. Lorenz, "Déterministic nonperiodic flow ", J.Atmospheric Sci, 20(1963), pp.130-141.

- [10] C.J.Marzec et E.A.Spiegel, "Ordinary differential equations with strange attractors".SIAM J.of appl Math. Vol 33, N°3, Juin 1980.p403-421.
- [11] G. Reeb et F. Diener, "Analyse non standard", Herman, 1989.
- [12] H. Reinhard, "Equations différentielles" Bordas, Paris, 1982.
- [13] D. Ruelle.et F. Takens, "On the nature of turbulence" comm.Math.Phys.,20(1971), pp167-192.
- [14] T. Sari, C Lobry, S Touhami."On Tikhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems".Electronic Journal of Differential Equations, Vol.1998(1998), N°19,pp.1-22.
- [15] G. Vallet,"Entrée-Sortie dans un tourbillon".Université de Poitiers,(1985)12.