N° d'ordre :39 /2008-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En : Mathématiques

Spécialité : Algèbre et Théoriè des Nombres

Par

MEGUEDMI Djohra

Sujet

Théorie de Hecke des Formes Modulaires et Application en EDO et en Théorie des Nombres

Soutenu publiquement le:15 juillet 2008 devant le jury composé de

Mr.	**ZITOUNI**	Mohamed	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	**HACHAICHI**	Mohamed Salah	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	**REZAOUI**	Mohamed Salem	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	**HERNANE**	Mohand Ouamar	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr	**BENCHERIF**	Farid	Chargé de Cours	U.S.T.H.B.	Invité

Remerciements

A l'heure de soutenir cette thèse, je souhaite ici exprimer ma reconnaissance pour ceux qui m'ont aidé à en voir le terme. Leur soutien m'a permis de suporter les nombreux découragements; de mieux vivre tous les changements qui sont venus avec cette période

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Mohamed Zitouni, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Mohamed Salah Hachaïchi, mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé.

J*e remercie vivement Monsieur Mohand Ouamar Hernane, Maître de Conférences d'avoir accepté d'examiner ce travail.*
Que Monsieur Mohamed Salem Rezaoui, *Maître de Conférence qui a bien voulu faire partie du jury, trouve ici mes remerciements les plus sincères.*

Dedicace: A mes chers parents

Table des matières

Introduction

Dans ce travail on s'intéresse à la théorie de Hecke et ses applications en théorie des Nombres et en théorie des Equations Différentielles Ordinaires (EDO)
L'objectif principal est de trouver le lien qui existe entre équation différentielle, forme modulaire et théorie des nombres. Notre ressource principale est l'article de 'Yifan Yang'[22], intitulé :" On differential equations satisfied by modular forms". Cet article nous a mené vers l'irrationalité du nombre $\zeta(3)$ et la méthode utilisée est due à "F.Beukers"[3] .
Ce mémoire est structuré comme suit:

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques résultats classiques concernant les fonctions et les formes modulaires ainsi que le groupe modulaire et les sous-groupes de congruence. A la fin de ce chapitre on définit la fonction eta de Dedekind qui est un élément important pour la construction de formes modulaires et fonctions modulaires.

Dans le deuxième chapitre nous aborderons les équations différentielles et les formes modulaires, nous exposerons un théorème qui prouvera que sous certaines conditions toute fonction modulaire de poids k satisfait une équation différentielle d'ordre $k+1$. On donnera des informations sur les coefficients de cette équation différentielle.

Le dernier chapitre sera consacré à une application où on mettra en oeuvre le lien entre forme modulaire et équation différentielle ordinaire.

Chapitre 1

Groupe Modulaire, Sous-Groupe de Congruence, Forme Modulaire, Fonction Modulaire, Opérateurs de Hecke, Fonction Eta de Dedekind

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de rappeler les notions de la théorie des formes et fonctions modulaires. contenus dans plusieurs ouvrages [7], [1], [13], [9].

Nous commençons par le groupe modulaire et les sous-groupes de congruence, ensuite les fonctions et les formes modulaires

Nous décrivons la fonction Eta de Dedekind qui possede des propriétés importantes pour notre étude.

1.2 *Groupe Modulaire, Sous-Groupe de Congruence.*

1.2.1 Groupe modulaire

Transformation homographique dans le demi-plan $\mathcal{H}$

Considérons $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, le demi-plan de Poincaré. Soit $GL_2^+\mathbb{R}$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ des 2×2 matrice de déterminant positif. Ce groupe opère naturellement à gauche par: pour tout $z \in \mathcal{H}$ et $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{R})$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\gamma.z = \frac{az+b}{cz+d}$

Cette homographie prend les valeurs

$$\begin{aligned} \gamma\left(\tfrac{-d}{c}\right) &= \infty \\ \gamma(\infty) &= \tfrac{a}{c} \quad \text{si} \quad c \neq 0 \ . \\ \gamma(\infty) &= \infty \quad \text{si} \quad c = 0 \end{aligned}$$

Cette application γ est la transformation de Möbius.([1])
Le demi-plan $\mathcal{H}$ est conservé sous l'action de la transformation de Mobius.
Le groupe special linéaire $SL_2(\mathbb{R})$ est le sous groupe de $GL_2^+(\mathbb{R})$ des matrices γ de déterminant $ad - bc = 1$
On introduit l'application J_γ associée à la matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ par la formule

$$J_\gamma : \mathcal{H} \to \mathbb{C},\ J_\gamma(z) = cz + d, z \in \mathbb{C}$$

cette application possède les propriétés suivantes:

Lemme 1.2.1 *: soit une matrice $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$ et l'application J_γ associée*
i) $\frac{d\gamma(z)}{dz} = J_\gamma(z)^{-2}$
ii)$J_{\gamma_1\gamma_2}(z) = J_{\gamma_1}(\gamma_2(z))\, J_{\gamma_2}(z)$ *pour toutes matrices* $\gamma_1, \gamma_2 \in SL_2(\mathbb{R})$
iii) $|J_\gamma(z)|^2 \operatorname{Im} \gamma z = \operatorname{Im} z$.

Classification des transformations homographiques de Môbius ([**1**])

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$.
Un point z est un point fixe pour γ s'il vérifie $\gamma z = z$, cela implique l'équation quadratique $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, qui admet deux solution si $c \neq 0$

Exemple 1.2.1 *:*

(i) $z \longmapsto z + t$ *où* $t \in \mathbb{R}$: *c'est une translation dont le point fixe est* ∞

(ii) $z \longmapsto pz$ *avec* $p > 0$ *(c'est la dilatation, elle laisse fixe les points* 0 *et* ∞*)*

(iii) $z \longmapsto k(\theta) z$ *où* $k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *c'est une rotation elle laisse fixe le point* i

La classification se fait par le point fixe où par la matrice associée

Classification par le point fixe

Définition 1.2.1 *:*

i) *Une transformation elliptique de* $SL_2(\mathbb{R})$ *est une transformation qui admet deux points fixes complexes conjugués*

ii) *Une transformation hyperbolique de* $SL_2(\mathbb{R})$ *est une transformation qui admet deux points fixes réels.*

iii) *Une transformation parabolique de* $SL_2(\mathbb{R})$ *est une transformation qui admet un seul point fixe réel.*

Classification par la trace de γ

La trace de la matrice γ est égale à $Tr\gamma = a + d$

Proposition 1.2.1 *Soit* γ *une transformation homographique de valeur* $\gamma z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *avec* $z \in \mathbb{C}$*. Alors*

$$\textbf{i) } Si\ c = 0,\ \gamma \text{ est une matrice parabolique}$$

$$\textbf{ii) } si\ c \neq 0, \begin{cases} |a+d| > 2, & \gamma \text{est une matrice hyperbolique} \\ |a+d| = 2, & \gamma \text{ est une matrice parabolique} \\ |a+d| < 2, & \gamma \text{ est une matrice elliptique} \end{cases}.$$

Preuve. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \pm I \in SL_2(\mathbb{R})$. Les points fixes de γ sont les solutions de l'équation

$$cz^2 + (d-a) z - b = 0. \tag{1.2.1}$$

Le discriminant de cette équation est égal à

$$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = (d+a)^2 - 4(ad - bc) = (d+a)^2 - 4.$$

Nous distinguons plusieurs cas suivant la trace $|a+d|$.

Si $|a+d| = 2$, l'équation admet une solution donc γ est parabolique. Si $|a+d| > 2$, l'équation admet deux racines réelles et γ est donc hyperbolique.

Si $|a+d| < 2$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées; γ est elliptique.

Si $c = 0$, alors $ad = 1$ et l'équation devient devient du 1^{er} degré

$$(d-a)\,z - b = 0,$$

on distingue deux cas**:**

Si $d = a = \pm 1$ et $b = 0$, alors ∞ est le point fixe; si $d \neq a$ le point fixe est :$\dfrac{b}{d-a}$

. ■

Remarque 1.2.1 *Les matrices unités I_2 et $-I_2$ opèrent trivialement sur $\mathcal{H}$.*

Groupe Modulaire PSL$_2$ ($\mathbb{Z}$)

Soit, $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ avec } ad - bc = 1 \right\}$.

Définition 1.2.2 ([*1*]) *Le groupe $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\}$ .est le groupe projectif spécial linéaire.*

On donne dans la suite quelques propriétés du groupe modulaire $G = PSL_2(\mathbb{Z})$.

Théorème 1.2.1 *Le groupe modulaire infini non abélien $G = PSL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

avec $S^4 = I_2$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Preuve. Soit une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$

Si $c = 0$ alors $ad = 1$ donc $a = d = \pm 1$, d'où:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^b \text{où } \gamma = T^{-b}.$$

Si $c = 1$, alors $ad - b = 1$ et

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & ad-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^a S T^d.$$

On suppose que cette propriété est vraie pour toute matrice $\begin{pmatrix} * & * \\ \bigstar & * \end{pmatrix}$ dont le terme $\bigstar < c$.

On pose $d = cq + r$ avec $0 < r < c$, alors :

$$\gamma T^{-q} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -aq+b \\ c & r \end{pmatrix},$$

$$\gamma T^{-q} S = \begin{pmatrix} a & -aq+b \\ c & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aq+b & -a \\ r & -c \end{pmatrix}.$$

■

Remarque 1.2.2 *:[1]Chaque $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ peut se mettre sous la forme:*

$$\gamma = T^{n_1} S T^{n_2} S T^{n_3} .....ST^{n} \text{ où les } n_i \text{ sont des entiers}$$

Cette représentation n'est pas unique.

Exemple 1.2.2 : ([*1*] *p*29)*Soit* $\gamma = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$, *la formule* $25 = 11 \times 2 + 3$, *implique*

$\gamma T^{-2} S = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}$,

$-11 = 3 \times (-4) + 1$.*implique* $\gamma T^{-2} S T^4 S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = ST^{-3}$,

Nous obtenons la décomposition

$$\gamma = ST^{-3} ST^{-4} ST^2.$$

Domaine fondamental. On définit sur le demi plan $\mathcal{H}$ la relation binaire$\mathcal{R}$
pour tout couple (z_1, z_2) de $\mathcal{H}$, la relation binaire $z_1 \mathcal{R} z_2$ équivaut à une relation $z_1 = \lambda z_2$ pour un certain nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$. Cette relation binaire$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Elle est réflexive, symétrique et transitive. Les classes d'équivalence forment une partition de $\mathcal{H}$.

Définition 1.2.3 *:([1])Un sous ensemble $\mathcal{D}_G$ du demi-plan $\mathcal{H}$ est un domaine fondamental pour le groupe modulaire G si*

(i) *$\mathcal{D}_G$ est un ouvert de $\mathcal{H}$*

(ii) *il n'y a pas 2 points z_1 et z_2 dans $\mathcal{D}_G$ équivalents par une matrice de G*

(iii) *si $z \in \mathcal{H}$, alors il y'a un point z' dans la cloture $\overline{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ équivalent à z par G.*

Dans ce qui suit on va définir le domaine fondamental de $G = PSL_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 1.2.2 *([1]) et ([18])L'ensemble :*

$$\mathcal{D}_G = \left\{ z \in \mathcal{H} \quad | \quad |\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2} \text{ et } |z| > 1 \right\},$$

est le domaine fondamental pour le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Pointes et points elliptiques de $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ([1])

Pointes de $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Définition 1.2.4 *Une pointe est un point fixé par une transformation parabolique du groupe $PSL_2\mathbb{Z}$.*

Proposition 1.2.3 *L'ensemble des pointes de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est la réunion $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.*

Preuve. D'après la proposition 1.2.1 , les éléments qui sont fixés par une transformation parabolique sont les nombres rationnels $s \in \mathbb{Q}$ et le point à l'infini.
Inversement, soit un nombre rationel $s = \dfrac{a}{c}$, par le théorème de Bezout $ad - bc = 1$, pour des entiers b et d premiers entre eux. Alors $ad - bc = 1$ est le déterminant d'une matrice

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Son inverse est égal à

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ avec } \gamma^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty,$$

la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ du théorème 1.2.1 implique la relation.

$$\gamma T \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - ac & a^2 \\ -c^2 & ca + 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ et } \gamma T \gamma^{-1} \left(\frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c},$$

la trace de $\gamma T \gamma^{-1}$ est égale à 2 donc $\gamma T \gamma^{-1}$ est une transformation parabolique de point fixe $\frac{a}{c}$. Ainsi $\frac{a}{c}$ est une pointe de $PSL_2(\mathbb{Z})$, équivalente à ∞.

. ■

Points elliptiques de $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Définition 1.2.5 *Un élément de $\mathcal{H}$ est elliptique s'il est fixé par une transformation elliptique $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$.*

Les points elliptiques de $PSL_2(\mathbb{Z})$, satisfont le théorème suivant

Théorème 1.2.2 *([13] théorème 4)*
Soit le demi-plan $\mathcal{H}$
(i) *Tout point elliptique est équivalent à l'un des points i ou $\omega = e^{\pi i/3}$.*
(ii) *Le point i est un point elliptique d'ordre* 2
(iii) *Le point ω est un point elliptique d'ordre* 3
■

1.2.2 Sous-groupes de congruence

Le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$ contient plusieurs sous-groupes de congruence d'indice fini.

Définition 1.2.6 *Pour tout entier $N \geq 1$ le sous-groupe de congruence principal de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est égal à*

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid b \equiv c \equiv 0 \pmod{N},\ a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\},$$

Pour $N = 1$ le sous groupe de congruence principal est égal à $\Gamma(1) = PSL_2(\mathbb{Z})$

Définition 1.2.7 *Un sous-groupe* Γ *de* $PSL_2(\mathbb{Z})$ *est un sous-groupe de congruence s'il contient le sous-groupe* $\Gamma(N)$ *.*
Le niveau du sous-groupe Γ *est le plus petit entier* N *tel que* $\Gamma(N) \subset \Gamma$.

Exemple 1.2.3 **(i)** $PSL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(1)$ *est un sous-groupe de congruence de niveau 1.*
(ii) $\Gamma_0(N) = \{\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}\}$, $\Gamma^0(N) = \{\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid b \equiv 0 \pmod{N}\}$
$\Gamma_0(N), \Gamma^0(N)$ *sont les sous-groupes de congruence de Hecke.*
(iii) $\Gamma_1(N) = \{\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}$ *et* $a \equiv b \equiv \pm 1 \pmod{N}\}$

Propriétés des sous-groupes de congruence.de niveau N

Indice d'un sous-groupe de congruence de $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Proposition 1.2.4 ([*13*] *théorèmes* 4.21 *et* 4.2.4)
(i) $\Gamma(N)$ *est un sous-groupe normal de* $SL_2(\mathbb{Z})$ *.*
(ii) $|\Gamma(1) : \Gamma(N)| = \frac{N^3}{2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$, *p est un diviseur premier de N*
(iii) $|\Gamma_1(N) : \Gamma(N)| = N$.
(iv) *Si* $N \geq 3$ *l'indice est égal à:* $|\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)| = \frac{N}{2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, *p est un diviseur premiers de N*
(v) $|PSL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)| = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$, *le produit se fait sur tous les diviseurs premiers de N.*

■

Représentant d'une classe d'équivalence de $\Gamma_0(N)$ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$

Proposition 1.2.5 *([5], page 16 proposition 2.2.1)Soit une matrice* $\gamma_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$ *avec* $j = 1, 2$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*
(i) *les classes d'équivalence à droite de* $\Gamma_0(N)\gamma_1$ *et* $\Gamma_0(N)\gamma_2$ *sont égales.*
(ii) $c_1 d_2 \equiv c_2 d_1 \pmod{N}$.
(iii) *Il existe un entier r premier à N avec* $c_1 \equiv r c_2 \pmod{N}$, *et* $d_1 \equiv r d_2 \pmod{N}$.

■

Pointes d'un sous groupe de congruence

Proposition 1.2.6 *L'ensemble des pointes d'un sous-groupe de congruence* Γ *de* $PSL_2(\mathbb{Z})$ *est dans* $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$.

Preuve. D'après la proposition 1.2.3 , les pointes de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sont dans l'ensemble $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$
L'inclusion $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{Z})$, implique que les pointes de Γ sont dans l'ensemble $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$.
Inversement, soit un nombre rationnel $\frac{a}{c}$ par le théorème de Bezout alors $ad - bc = 1$. Ainsi $\frac{a}{c}$ est fixé par une matrice γ

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - acm & a^2m \\ -c^2m & 1 + acm \end{pmatrix}.$$

il suffit de prendre $m \mid N$ alors cette matrice est dans $\Gamma(N)$ et donc dans Γ, de plus sa trace est 2 et alors $\frac{a}{c}$ est une pointe de Γ.
. ■

Détermination des pointes de $\Gamma_0(N)$.

Pour déterminer les pointes d'un sous-groupe on a besoin des deux propositions suivantes.

Proposition 1.2.7 *(cf [5])*
Soit $\alpha_j = \frac{p_j}{q_j}$ $(\ j = 1, 2)$ *deux pointes; les deux assertions sont équivalente:*
(i) $\alpha_2 = \gamma\alpha_1$ *pour* $\gamma \in \Gamma_0(N)$.
(ii)*il existe un entier* r *premier à* N *avec* $q_2 \equiv rq_1 \,(\mathrm{mod}\, N)$ *et* $p_1 \equiv rp_2 \,\mathrm{mod}\,(pgcd(q_1, N))$.
■

Proposition 1.2.8 (*cf* [4])
Les pointes de $\Gamma_0(N)$, *sont en nombre fini et il y en a*

$$\nu_\infty = \sum_{d/N} \phi\,(pgcd\,(d, N/d))\,.$$

Où ϕ est la fonction indicatrice d'Euler.
Comme représentant de ces pointes dans $\Gamma_0(N)$, on choisit l'ensemble des nombres rationnels $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ tel que c parcourt l'ensemble des diviseurs de N. Soit $t =$pgcd$\left(c, \dfrac{N}{c}\right)$, alors pour chaque $0 \leq a_0 < t$ avec pgcd$(a_0, t) = 1$, on fixe un nombre a tel que:

$$a \equiv a_0 \bmod \frac{N}{c} \text{ avec } pgcd\,(a, c) = 1.$$

Exemple 1.2.4 *Les pointes de $\Gamma_0(6)$ sont ∞, 0, 1/2, 1/3.*

$\Gamma_0(6)$ possède quatre pointes que je détermine par la méthode citée.
Ces pointes sont de la forme $\dfrac{a}{c}$ où $c \in D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, ensemble des diviseurs de 6.
Si $c = 1$, soit $t = p\,\mathrm{gcd}\,(1, 6) = 1$. je choisit $a_0 = 0$ alors $a \equiv 0 \bmod 6$ *et* $p\,\mathrm{gcd}\,(a, 1) = 1$, ce qui nous donne $a = 6$.
il en résulte la pointe $\alpha_1 = \dfrac{1}{6}$ équivalente ∞
pour $c = 0$, je trouve la pointe $\alpha_1 = \infty$
pour $c = 2$, je touve la pointe $\alpha_2 = \frac{1}{2}$
pour $c = 3$, je trouve la pointe $\alpha_3 = \frac{1}{3}$
pour $c = 6$, je trouve la pointe $\alpha_4 = 0$

Largeur d'une pointe

Définition 1.2.8 *([4])On appelle largeur de la pointe $\dfrac{a}{c}$ du sous-groupe modulaire Γ, le plus petit entier m , tel que la matrice $\begin{pmatrix} 1 - acm & a^2m \\ -c^2m & 1 + acm \end{pmatrix} \in \Gamma$.*
Si $\dfrac{a}{c}$ est une pointe de $\Gamma_0(N)$, alors sa largeur est:

$$h = \frac{N}{c\ pgcd\,(c, N/c)}. \tag{1.2.2}$$

Exemple 1.2.5 *:*
Les pointes de $\Gamma_0(6)$ sont 0, ∞, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, en appliquant la formule (1.2.9) on trouve

$$h_0 = 6,\ h_\infty = 1,\ h_{\frac{1}{2}} = 3,\ h_{\frac{1}{3}} = 2.$$

Points elliptiques d'un sous groupe de congruence

Proposition 1.2.9 *(cf [17])*
Soit $\Gamma_0(N)$ un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini μ, et soient ν_2, ν_3 le nombre de points elliptiques d'ordre $2, 3$ respectivement, alors

$$\nu_2 = \begin{cases} 0 & si \quad 4 \mid N \\ \prod\limits_{p \mid N, p \neq 2} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) & si \quad sinon \end{cases}$$

$$\begin{cases} o & \text{si} \quad 9 \mid N \\ \prod\limits_{p \mid N,} \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right) & \text{si} \quad \text{sinon} \end{cases}.$$

où les symboles de Legendre

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = 2 \\ 1 & \text{si} \quad p \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si} \quad p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = 3 \\ 1 & \text{si} \quad p \equiv 1 \pmod 3 \\ -1 & \text{si} \quad p \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}.$$

■

Domaine fondamental d'un sous-groupe de congruence

Théorème 1.2.3 *(cf[12], [14])*
Considérons Γ un sous-groupe d'indice fini μ de $PSL_2(\mathbb{Z})$ et soient $T_1, T_2, ..., T_\mu$ des représentants des classes d'équivalence de $PSL_2(\mathbb{Z})/\Gamma$

$$PSL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma T_1 \cup \Gamma T_2 \cup \Gamma T_3 \cup ... \cup \Gamma T_\mu.$$

Si D est un domaine fondamental de $PSL_2(\mathbb{Z})$, alors

$$D_\Gamma = T_1 D \cup T_2 D \cup ... \cup T_\mu D,$$

est un domaine fondamental de Γ.

■

Exemple 1.2.6 *Soit* $\Gamma = \Gamma_0(6)$ *, d'après la proposition* 1.2.4 (**v**) *on a* $|PSL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(6)| = 12$. *l'application* $\varphi : \Gamma_0(6)/PSL_2(\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cup \{\infty\})^2$ *de valeur* $\Gamma_0(6)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (c,d)$ *est une bijection*

$$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 = \left\{ \begin{array}{c} (0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(1,2) \\ (5,2),(1,3),(2,3),(1,0),(3,2) \end{array} \right\}.$$

Donc les représentants des classes d'équivalences sont

$$\begin{aligned}
T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id \\
T_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = TST \\
T_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -ST^{-2}S \\
T_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} ST^3S \\
T_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} ST^2S \\
T_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}ST^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\
T_7 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = ST^2 \\
T_8 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = ST^3ST \\
T_9 &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = ST^{-2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} \\
T_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = ST^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} ST^2ST^{-1} \\ T_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S. \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.2.2 et théorème1.2.3 le domaine fondamental est la réunion

$$\mathcal{D}_{\Gamma_0(6)} = \bigcup_{i=1}^{i=12} T_i\mathcal{D}$$

Exemple 1.2.7 *([14]). On a* $|PSL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(2)| = 6$ *et* $PSL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(2) \approx SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
Les représentants des classes d'équivalence sont:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ TS &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ TST = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ TSTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

le sous groupe $\Gamma(2)$ *est engendré par des matrices* $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Genre d'un sous-groupe de congruence.

Proposition 1.2.10 (*cf SHIMURA proposition 1.40 p23*)
Soit Γ *un sous groupe de* $PSL_2(\mathbb{Z})$ *d'indice* m*, soient* ν_∞, ν_2, ν_3 *les nombres de pointes et de points elliptiques d'ordre* $2, 3$ *respectivement. Alors le genre de la surface de Riemann* $\mathcal{H}^*/\Gamma$

$$g(\mathcal{H}^*/\Gamma) = 1 + \frac{m}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_\infty}{2}.$$

■

Exemple 1.2.8 $\Gamma = \Gamma_0(6)$ *est de genre 0*
D'après la proposition 1.2.4, l'indice de $\Gamma_0(6)$ *dans* $PSL_2(\mathbb{Z})$ *est* 12.
D'après la proposition 1.2.9, $\nu_2 = 0$, $\nu_{3.} = 0$
D'après la proposition 1.2.8, le nombre ν_∞ *de pointes de* $\Gamma_0(6)$ *est* 4.*Par conséquent le genre de la surface de Riemann* $\mathcal{H}^*/\Gamma$ *est égal à*$1 + \frac{12}{12} - \frac{0}{4} - \frac{0}{3} - \frac{4}{2} = 0$

1.3 Formes modulaires, fonctions modulaires

1.3.1 Fonctions méromorphes

Désormais on note par $q = e^{2\pi iz}$ de sorte que $|q| < 1$ si $z \in \mathcal{H}$.

Soit f une fonction méromorphe sur $\mathcal{H}$ et de période $1, .$alors f admet un développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n, \text{où } q = e^{2\pi iz} \text{ avec } z \in \mathcal{H}.$$

On dira que f est méromorphe à l'infini s'il existe N tel que $a_n = 0$ si $n \leq -N$, f est holomorphe à l'infini si $a_n = 0$ pour $n < 0$, et que f s'annule à l'infini , si $a_n = 0$ pour $n \leq 0$.

1.3.2 Forme et fonction modulaires pour $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et pour un sous-groupe de congruence.

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{Z}$, et une fonction $f : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$

Je pose

$$f(z) \mid_{[\gamma]_k} = (\det\gamma)^{k/2} (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right). \tag{1.3.1}$$

Pour γ_1, $\gamma_2 \in GL_2^+(\mathbb{R})$ je trouve la valeur

$$f \mid_{[\gamma_1\gamma_2]_k} = \left(f_{|[\gamma_1]_k}\right) \mid_{[\gamma_2]}.$$

Définition 1.3.1 *Soit Γ un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini et un entier k. Une fonction holomorphe $f : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$ est dite une forme modulaire si elle vérifie les 2 conditions*

(i) *$f(z)_{|[\gamma]_k} = f(z)$ pour tout $z \in \mathcal{H}$ et $\gamma \in \Gamma$.*

(ii) *$f(z)$ est holomorphe en chaque pointe de Γ.*

une forme modulairef qui s'annule en chaque pointe, alors f est une forme parabolique où cuspidal..

L'ensemble des formes paraboliques est un espace vectoriel $\mathcal{S}_k(\Gamma)$.

Soit $\alpha = \dfrac{a}{c}$ une pointe de Γ, on choisit $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui vérifie $\sigma(\infty) = \dfrac{a}{c}$, ainsi f vérifie *la condition (i) si et seulement si la fonction* $g = f_{|[\gamma]_k}$ *est invariante par l'action de* $\sigma^{-1}\Gamma\sigma$. *Pour tout* $\gamma \in \Gamma$, g *est invariante en particulier par la translation* $z \mapsto z+h$, *où* h *la largeur de la pointe* $\alpha = \dfrac{a}{c}$. *Alors* g *admet un développement en série de Fourier* $\sum_{n\geq 0} a_{n,\alpha} e^{2\pi i n z/h}$. *Donc* f *est holomorphe .*

Remarque 1.3.1 :**i**) *Pour chaque pointe* α *de* Γ *on associe le développement en série de Fourier*

$$(cz+d)^{-k} f(\gamma_\alpha z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{\alpha,n} q_h^n, \quad q_h = \exp\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) \tag{1.3.2}$$

Avec $\gamma_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, *vérifiant* $\gamma_\alpha(\infty) = \alpha$.

ii) *Pour une pointe* α *de* Γ, *le stabilisateur de* α *est le sous-groupe*

$$\Gamma_\alpha = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\alpha = \alpha\}.$$

En particulier, on a $\Gamma_\infty = \left\{ T_{nh} = \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ n \in \mathbb{Z},\ h \text{ la largeur de } \infty \right\}$

Il existe une matrice $\gamma_\alpha \in \Gamma$ *avec* $\gamma_\alpha(\infty) = \alpha$

$$\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha \Gamma_\infty \gamma_\alpha^{-1}.$$

Chaque sous-groupe possède ces "cusp leader", pour $\Gamma_0(6)$ *dont les pointes sont* $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \infty$. *Shimura a introduit des matrices particuliéres* τ *du groupe* $SL_2(\mathbb{R})$, *pour tout entier* $N > 1$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{N} \\ \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{N}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\tau^2 = -I_2$ *et* $\tau^{-1}\Gamma_0(N)\tau = \Gamma_0(N)$. *Pour* $N = 6$ *j'obtiens les résultat*

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},\ \gamma_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}. \tag{1.3.3}$$

Proposition 1.3.1 *[9]Soit* : $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction méromorphe, alors* (**a**) *et* (**b**) *sont équivalents*

a) $f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$ *avec* $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$.

b) $f(z+1) = f(z)$, $f\left(\frac{-1}{z}\right) = z^k f(z)$.

■

Remarque 1.3.2 *Une forme modulaire de* $SL_2(\mathbb{Z})$ *de poids* k *admet une série de Fourier*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \; q = e^{2\pi i n z}, \; z \in \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

qui converge pour $|q| < 1$ *et qui vérifie la formule*

$$f\left(\frac{-1}{z}\right) = z^k f(z)$$

Lemme 1.3.1 *([21])Soit :* $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction méromorphe et* k *un entier alors*

i)*Si* $f \in M_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$, *alors* k *est pair*

ii)*Soient* f *et* g *deux fonctions modulaires méromorphes de poids* k, k' *respectivement alors on a*

a) fg *est de poids* $k + k'$, **b**) f/g *est de poids* $k - k'$

■

Forme Modulaire de poids k entier positif

Il peut y avoir des formes modulaires de poids impair Les sous-groupes de Hecke $\Gamma_0(N)$, $\Gamma^0(N)$ ne contiennent pas de formes modulaires de poids impair. La fonction theta de Jacobi, $\theta_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2}$: la fonction θ_3^2 est une forme modulaire de poids 1 sur $\Gamma(2)$ (cf [22])

Signalons les documents

1). "Modular forms of half integral weight" de SHIMURA, dans LNM 320(1973, p59-75)

2). "Formes modulaires de poids 3/2" de ZAGIER, dans CRAS de paris n°281 (1975, p883-886)

Exemples de Forme Modulaire, Fonction Modulaire et de Forme Parabolique

1) Séries d'Eisenstein

Définition 1.3.2 *Soit* k *un entier plus grand que* 1.*Pour* $z \in \mathcal{H}$ *une série d'Eisenstein de poids* $2k$ *est de la forme:*

$$G_{2k}(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}, \; m \text{ et } n \text{ entiers}$$

Propriétés des Séries d'Eisenstein([9], [1],[7],[?]) **i**) Pour $k>1$, la série $G_{2k}(z) \in M_{2k}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ avec $G_{2k}(i\infty) = 2\zeta(2k)$, où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.
ii) G_{2k} possède un développement en série de Fourier de la forme

$$G_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)\,q^n, \text{où } q = e^{2\pi iz},$$

avec la fonction arithmétique somme des puissance d^k des diviseurs de n, $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, $\sigma_k(0) = 0$

G_{2k} est une forme modulaire de poids $2k$.

Exemple 1.3.1 *:*

$G_4(z) = \frac{1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + 126q^5 + ...$

$G_6(z) = \frac{-1}{540} + q + 33q^2 + 244q^3 + ...$

Définition 1.3.3 *La série d'Eisenstein normalisée est la série*

$$E_{2k}(z) = \frac{1}{2\zeta(2k)}G_{2k}(z)\,.\ \textit{avec } E_{2k}(i\infty) = 1.$$

Corollaire 1.3.1 *Pour $z \in \mathcal{H}$, $k = 2, 3, 4, ...$, la série d'Eisenstein normalisée :*

$$E_{2k}(z) = \frac{1}{2}\sum_{pgcd(m,n)=1}\frac{1}{(mz+n)^{2k}}.$$

Preuve. Soit la série d'Eisenstein

$$G_{2k}(z) = \sum_{\substack{m,n=-\infty\\(m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^{2k}} = \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{\text{pgcd}(m,n)=t}\frac{1}{(mz+n)^{2k}}\right), \text{ pour } k = 2, 3, 4, 5...$$

Posons $m = m't$ et $n = n't$ avec m' et n' premiers entre eux. Alors,

$$\begin{aligned} G_{2k}(z) &= \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{\text{pgcd}(m,n)=t}\frac{1}{(m'tz+n't)^{2k}}\right) = \sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t^{2k}}\sum_{\text{pgcd}(m',n')=1}\frac{1}{(m'z+n')^{2k}}\right) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t^{2k}}\right)\left(\sum_{\text{pgcd}(m',n')=1}\frac{1}{(m'z+n')^{2k}}\right) = \zeta(2k)\left(\sum_{\text{pgcd}(m',n')=1}\frac{1}{(m'z+n')^{2k}}\right). \end{aligned}$$

la définition 2.2.8 implique $E_{2k}(z) = \frac{1}{2\zeta(2k)}G_{2k}(z)$,j'obtiens

$$E_{2k}(z) = \frac{1}{2}\sum_{\text{pgcd}(m,n)=1}\frac{1}{(mz+n)^{2k}}.$$

. ■

Proposition 1.3.2 *(cf [9])*
Soit $k \equiv 0 \pmod 2$, $k \geq 4$ et $z \in \mathcal{H}$. Le développement de Fourier de la série d'Eisenstein normalisée E_{2k} est

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n,\ q = e^{2\pi i z},$$

■

La fonction arithmétique Zéta de Riemann

$$\zeta(k) = \frac{(2\pi)^k}{2(k!)} |B_k| = (-1)^{\left(1+\frac{k}{2}\right)} \frac{(2\pi)^k}{2(k!)} B_k.,$$

les B_k sont les nombres de Bernoulli, définis par le développement en série :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,\ \text{alors tous les nombres } B_{2k+1} = 0 \text{ pour } k > 1$$

$B_1 = \frac{-1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{48}$....Le rayon de convergence de la série du second membre est 2π.

Exemple 1.3.2 *:*
$E_4(z) = 1 + 240 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$, $E_6(z) = 1 - 504 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n$.

2) La forme parabolique Discriminant:

Définition 1.3.4 *(cf [15])*
Soit la forme modulaire discriminant $\Delta = \frac{(2\pi)^{12}}{12^3}\left(E_4^3 - E_6^2\right)$,
Cette forme est liée à la courbe elliptique d'équation de Weierstrass

$$y = 4x^3 - g_2(z)x - g_3. \in \mathbb{C}[g, y]$$

Propriétés de la fonction $\boldsymbol{\Delta}$.

Théorème 1.3.1 [*Silverman proposition 12.4*]
La fonction discriminant $\Delta(z)$ est une forme modulaire parabolique de poids 12 qui admet un développement de la forme

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n,\ q = e^{2\pi i z},\ \tau(1) = 1 \ \text{et}\ \tau(n) \in \mathbb{Z}$$

la fonction $n \mapsto \tau(n)$ *est la fonction Tau de Ramanujan de valeur*

$$\tau(n) = \frac{1}{12}\left(5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)\right) + \sum_{r+s=n}\left(100\sigma_3(r)\sigma_3(s) - 147\sigma_5(r)\sigma_5(s)\right) + 8000\sum_{r+s+t=n}\sigma_3(r)\sigma_3(s)\sigma_3(t).$$

■

Série d' Eisenstein de poids 2

Définition 1.3.5 *La série d'Eisenstein normalisée de poids 2, est égale à:*

$$E_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\,q^n = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}.$$

Remarque 1.3.3 *(cf[9], proposition 7)*
Cette série est holomorphe sur $\mathcal{H}$ *mais du fait qu'elle vérifie*

$$z^{-2}E_2\left(\frac{-1}{z}\right) = E_2(z) + \frac{12}{2\pi i z}$$

alors $E_2(z)$ n'est pas une forme modulaire (voir la proposition 2.2.1)

Exemple 1.3.3 *Soit* $\Gamma = \Gamma_0(6)$, *alors* A_N *définie par*

$$A_N = E_2(z) - NE_2(Nz), \ \ N \in \{2, 3, 6\},$$

est une forme modulaire de poids 2 pour Γ.

Pour $N \in \{2,3,6\}$, on a A_N est holomorphe sur $\mathcal{H}$ Reste à montrer la condition de modularité, pour cela soit la matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(6)$, $c \equiv 0 \bmod 6$:.$A_N(\gamma z) = (cz+d)^2 A_N(z)$.

$$E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 E_2(z) + \frac{6}{\pi i}c(cz+d),$$

l'hypothése $c \equiv 0 \pmod 6$, entraîne $\frac{c}{N} \in \mathbb{Z}$ et

$$E_2\left(N\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right) = (cz+d)^2 E_2(Nz) + \frac{6}{\pi i}\frac{c}{N}(cz+d).$$

la formule A_N ci dessus implique

$$\begin{aligned} A_N(\gamma z) &= (cz+d)^2 E_2(z) + \frac{6}{\pi i}c(cz+d) - N(cz+d)^2 E_2(Nz) - \frac{6}{\pi i}c(cz+d) \\ &= (cz+d)^2\left(E_2(z) - NE_2(Nz)\right), \end{aligned}$$

je trouve la valeur

$$A_N(\gamma z) = (cz+d)^2 A_N(z). \tag{1.3.4}$$

Pour étudier l'holomorphie des A_N aux pointes ∞, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, nous allons utiliser (1.3.1), (1.3.2) .Nous commençons par $A_{2.}$ On a:

$$A_2(z) = 1 + 24q + 24q^2 + 96q^3 + ... \tag{1.3.5}$$

Elle est holomorphe à la pointe ∞ (voir la définition 1.3.1, pour ∞ on prend $\gamma_0 = T$). D'autre part pour la pointe 0 on prend,

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}).$$

Par (1.3.4), (1.3.5) , on obtient:

$$A_2(\gamma_0 z) = \left(\sqrt{6}z\right)^2 \left(1 + 24q + 24q^2 + 96q^3 + ...\right)$$

Ainsi $A_2(\gamma_0 z)$ est holomorphe à la pointe 0 (voir la définition 1.3.1), Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, je choisis la matrice $\gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ Pour $\alpha = \frac{1}{3}$, je choisis la matrice $\gamma_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1.3.3 L'espace véctoriel des formes modulaires $M_k(\Gamma)$

Ce paragraphe a pour objet d'étudier la dimension des espaces $M_k(\Gamma)$, où Γ est un sous-groupe de congruence. je commence par la structure de M_k. espace vectoriel des formes modulaires entiéres de poids k sur le corps des nombres complexes

Formule des poids

Définition 1.3.6 *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathcal{H}$,non identiquement nulle et soit p un point de $\mathcal{H}$ Nous appellerons ordre de f en p, que nous noterons $v_p(f)$, l'entier n tel que:*

$$\frac{f}{(z-p)^n} \text{ soit holomorphe et non nulle en } p.$$

Cela implique

$$v_p(f)\begin{Bmatrix} >0 \ si\ p\ est\ un\ zéro \\ <0 \ si\ p\ est\ un\ pole \\ =0 \ dans\ les\ autres\ cas \end{Bmatrix}.$$

Proposition 1.3.3 *([9])*
Soit f une forme modulaire (resp fonction modulaire) de poids k, non identiquement nulle. Alors les nombres $\nu_p(f)$ ci dessus satisfont la formule

$$v_\infty(f)+\frac{1}{2}v_i(f)+\frac{1}{3}v_\omega(f)+\sum_{P\in\Gamma\diagdown\mathcal{H},P\neq i,\omega} v_p(f)=\frac{k}{12}$$

et i, ω sont les points elliptiques de $PSL_2(\mathbb{Z})$.

■

Proposition 1.3.4 *([16])*
Les pointes de $\Gamma_0(6)$ sont ∞, 0, $\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{3}$.
Soit f une forme modulaire non nulle de poids k sur $\Gamma_0(6)$. Alors $\nu_p(f)$ ci dessus satisfont la formule

$$v_\infty(f)+v_0(f)+v_{\frac{-1}{2}}(f)+v_{\frac{-1}{3}}(f)+\sum_{p\in\Gamma_0(6)\backslash\mathcal{H}} v_p(f)=k.$$

■

Proposition 1.3.5 *([7] proposition 1 page 304)*
Soientt $k\in\mathbb{Z}$.et $\mathcal{M}_k$ (resp $\mathcal{S}_k$) espace vectoriel des formes modulaires entiéres (resp des formes paraboliques) de poids k sur le corps des nombres complexes, alors:
(i) *$\mathcal{M}_k$ est nul si k si k est pair, négatif ou égal à 2*
(ii) *Si $k=0,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$, $\mathcal{M}_k$ est un espace vectoriel de dimension 1 admettant pour base (respectivement) $1,\ G_4,\ G_6,\ G_8,\ G_{10}$. De plus on a $\mathcal{S}_k=\{0\}$ dans ces conditions.*
(iii) *La multiplication par Δ définit un isomorphisme $\mathcal{M}_k\to\mathcal{S}_{k+12}$*

■

Corollaire 1.3.2 *([7] corollaire 1 page 304)*
L'espace vectoriel M_k.(resp $\mathcal{S}_k$) espace vectoriel des formes modulaires entiéres (resp des

formes paraboliques) de poids k sur le corps des nombres complexes, alors:

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right], & k \equiv 2 \mod 12 \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1, & \textit{si non} \end{cases}$$

et

$$\dim S_k = \begin{cases} 0, & \textit{si} \quad k = 2 \\ \left[\frac{k}{12}\right] - 1, & \textit{si} \quad k \equiv 2 \bmod 12, k \geq 14 \\ \left[\frac{k}{12}\right], & \textit{si} \quad \textit{si non} \end{cases}.$$

■

Corollaire 1.3.3 *([7] corollaire 2 page 304) L'espace $\mathcal{M}_k$ admet pour base la famille des monômes $G_4^{\alpha} G_6^{\beta}$, avec α et β entiers ≥ 0 et $4\alpha + 6\beta = k$.*

■

Dimension dans le cas général

Nous allons donner le théorème qui nous permettra de déterminer la dimension de $\mathcal{M}_k(\Gamma), \mathcal{S}_k(\Gamma)$ dans le cas où Γ est un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{Z})$,

Théorème 1.3.2 *([17], [14])*
Soit Γ un sous-groupe fini de $PSL_2(\mathbb{Z})$ et de genre g.(cf SHIMURA proposition 1.40 p23) Soit c le nombre de pointes non équivalentes de Γ et $e_1, e_2, e_3, ..., e_r$ l'ordre des points elliptiques non équivalents.
Soit k un entier pair, on a

$$\dim \mathcal{M}_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g-1) + \sum\limits_{i=1}^{r} \left\lfloor \frac{k}{2}\left(1 - \frac{1}{e_i}\right) \right\rfloor + \frac{kc}{2} & \textit{si} \quad k > 2 \\ g + c - 1 & \textit{si} \quad k = 2 \\ 1 & \textit{si} \quad k = 0 \\ 0 & \textit{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

et

$$\dim S_k(\Gamma) = \begin{cases} \dim \mathcal{M}_k(\Gamma) - c & \textit{si} \quad k > 2 \\ g & \textit{si} \quad k = 2 \\ 0 & \textit{si} \quad k \leq 0 \end{cases}$$

■

Exemple 1.3.4 *Soit* $\Gamma = \Gamma_0(6)$ *déterminons* $\dim M_4(\Gamma)$, $\dim S_4(\Gamma)$. *la propositon 1.2.10 implique que le sous groupe* $\Gamma_0(6)$ *est de genre 0.* $\Gamma_0(6)$ *admet 4 pointes, pour les points elliptiques, la proposition* 1.2.9, *implique que* $\nu_2 = 0$, $\nu_3 = 1$ *, j'obtiens*

$$\dim \mathcal{M}_4(\Gamma) = 5, \ \ \dim S_k(\Gamma) = 1.$$

1.4 Opérateurs de Hecke définis sur $\mathcal{M}_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$

1.4.1 Description des Opérateurs de Hecke

Selon Apostol, Hecke a determiné toutes les formes entiéres en introduisant une suite d'opérateurs linéaires $T_n, n = 1, 2, 3$...chaque opérateur T_n applique l'espace vectoriel M_k de formes modulaires dans lui même.

Définition 1.4.1 *Pour un entier k fixé et pour tout entier* $n = 1, 2, ...$ *l'opérateur de Hecke est l'application* T_n :$M_k \to M_k$ *de valeur* $(T_n f)(z) = n^{k-1}\sum_{d/n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{nz+bd}{d^2}\right)$, $n = 1, 2, 3, ...$

Dans le cas $n = p$ premier cette formule devient

$$(T_n f)(\tau) = p^{k-1} f(p\tau) + \frac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+b}{p}\right)$$

Remarque 1.4.1 *Si on pose* $A\tau = \frac{a\tau+b}{d}$ *alors on a*

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1}\sum_{\substack{a\geq 1\\ ad=n, 0\leq b<d}} d^{-k} f(A\tau) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{a\geq 1\\ ad=n\\ 0\leq b<d}} a^k f(A\tau) = \frac{1}{n}\sum_{A} a^k f(A\tau) \qquad (1.4.1)$$

1.4.2 Propriétés des opérateurs de Hecke

Le développement en série de Fourier de $\mathbf{T}_n f$

Proposition 1.4.1 *(cf [9])Soit* f *une forme modulaire de poids* k *avec son développement de Fourier*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m q^m \text{ où } q = e^{2\pi i z} \qquad (1.4.2)$$

Alors $T_n f$ admet un développement de Fourier égal à

$$\left(T_n f\right)(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{d/pdgc(m,n)} d^{k-1}c_{\left(\frac{mn}{d^2}\right)}\right) q^m,\ q = \exp\left(2\pi i z\right)$$

■

Théorème 1.4.1 *(cf [1])Si f une forme modulaire et $M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ une matrice de$PSL_2\left(\mathbb{Z}\right)$. Alors*

$$\left(T_n f\right)(Mz) = \left(\gamma z + \delta\right)^k \left(T_n f\right)(z) \tag{1.4.3}$$

■

Théorème 1.4.2 *([1]) Pour un entier k fixé et pour tout entier $n = 1, 2, ...$Les 2 espaces vectoriels M_k de formes modulaires et S_k de formes paraboliques sont stables pour l'opérateur de Hecke T_n.*

Les opérateurs de Hecke $T_n : M_k \to M_k$ sont multiplicatifs

■

Théorème 1.4.3 *[7]Soit les opérateurs de Hecke T_n*

1) *si m et n sont 2 entiers premiers entre eux, les opérateurs de Hecke véfifient: $T_m T_n = T_{mn}$*

2) *pour toute paire d'entiers (m, n) les opérateurs de Hecke commutent*

$$T_m T_n = T_n T_m = \sum d^{k-1} T\left(mn \mid d^2\right) \text{ où } d = \text{ diviseur du pgcd}(m,n)$$

3) pour p premier, les opérateurs T_n vérifient

$$T_p T_{p^r} = T_{p^{r+1}} + p^{k-1} T_{p^{r-1}}$$

■

Propriétés des coefficients du développement de Fourier

On va s'intéresser aux coefficients ν_n du développement en série de Fourier des opérateurs de Hecke.

Prenons $f \in \mathcal{M}_k\left(PSL_2\left(\mathbb{Z}\right)\right)$ avec

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m q^m,\ q = e^{2\pi i z}.$$

Par la proposition 1.4.2

$$\left(T_n f\right)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \nu_m q^m \text{ avec } \nu_m = \left(\sum_{d|p\,\mathrm{gcd}(m,n)} d^{k-1} c_{\left(\frac{mn}{d^2}\right)}\right)$$

Corollaire 1.4.1 *:*

(i) $\nu(o) = \sigma_{k-1}(n)\, c_{(0)},\ \ \nu(1) = c_{(n)}$

(ii) *Pour $n = p$ premier on a*

$$\nu(n) = \begin{cases} c_{(pm)} + p^{k-1} c_{\left(\frac{m}{p}\right)} & si \quad m \equiv 0 \pmod{p} \\ \quad \nu(m) = c_{(pm)} & si \qquad m \neq kp \end{cases}.$$

Preuve. Pour $n = 0$ j'obtiens $\nu(0) = \sum_{d|\mathrm{pgcd}(n,0)} d^{k-1} c_{(0)} = c_{(0)} \sum_{d|n} d^{k-1} = c_{(0)} \sigma_{k-1}(n)$ et pour $n = 1$ j'obtiens $\nu(1) = \sum_{d|\mathrm{pgcd}(n,1)} d^{k-1} c_{\left(\frac{n}{d^2}\right)} = c(n)$
comme $\nu(m) = \sum_{d|\mathrm{pgcd}(n,m)} d^{k-1} c_{\left(\frac{nm}{d^2}\right)}$, pour $n = p$ un nombre premier j'obtient:

$$\nu(m) = \sum_{d|\mathrm{pgcd}(p,m)} d^{k-1} c_{\left(\frac{pm}{d^2}\right)}$$

1^{er} cas: si $m \equiv 0 \pmod{p}$

$$\nu(m) = c_{(pm)} + p^{k-1} c\left(\frac{m}{p}\right)$$

2^{em} cas si $m \neq kp$ on a

$$\nu(m) = c_{(pm)}.$$

. ■

1.4.3 Fonction propre des opérateurs de Hecke

Apostol, Ogg,

Définition 1.4.2 *Une eigenforme d'un opérateur T_n de Hecke est la fonction $\lambda(n)$ dans la relation*

$$T_n f = \lambda_n f \qquad (n \geq 1), \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

Remarque 1.4.2 *Si f est une forme propre pour T_n $(n \geq 1)$ alors cf l'est aussi pour toute constante c.*

Propriétés des formes de Hecke

Définition 1.4.3 *Une forme de Hecke normalisée est une forme de Hecke de T_n telle que $c_{(1)} = 1$*

Lemme 1.4.1 *(cf[15])Soit f une forme propre de Hecke non nulle telle que*

$$f\left(z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n,\ \ q = e^{2\pi i z}$$

Alors :(**i**) $c_1 \neq 0$, (**ii**) $c_{(1)} = 0 \Rightarrow f = 0$, (**iii**) $c_{(1)} = 1 \Rightarrow c_{(n)} = \lambda_n$

Théorème 1.4.4 *(cf[**?**])Si f est une forme de Hecke normalisée admettant comme développement en série de Fourier $q + c_2 q^2 + ...$, alors:*

$$c_m c_n = \sum_{d | p\gcd(m,n)} d^{k-1} c_{\left(\frac{mn}{d^2}\right)}$$

■

1.4.4 Séries de Dirichlet et Formes modulaires, Théorème de Hecke

Définition 1.4.4 *Une série de Dirichlet est une série infinie de la forme*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s},\ \ s \in \mathbb{C}.$$

Elle converge pour $\operatorname{Re} s > 1 + c$ *si* $a_n = O\left(n^c\right)$.

la plus célèbre série de Dirichlet est la fonction Zeta de Riemann $\zeta\left(s\right) = \sum_{n\geq 1} n^{-s},\ s$ complexe

Ordre de grandeur des coefficients et convergence

Théorème 1.4.5 *(Théorème de Hecke, cf [15])*
(**i**) *Si f est une cusp forme de poids $2k$ alors:*

$$a_n = O\left(n^k\right)$$

D'une autre manière le quotient $\dfrac{|a_n|}{n^k}$ *est borné quand* $n \to \infty$
(**ii**) *Si* f $=G_{2k}$ *série d'Eseintiene, alors il existe* A, B *deux constantes positives telles que*

$$An^{2k-1} \leq |a_n| \leq Bn^{2k-1}.$$

(**iii**) *Si* f *est une forme modulaire de poids* $2k$ *avec* $(a_0 \neq 0)$ *alors :*

$$a_n = O\left(n^{2k-1}\right)$$

■

Il en résulte
(**i**) Si f est une forme parabolique de poids $2k$ alors la série de Dirichlet qui lui est associée, sera convergente pour

$$\operatorname{Re} s > 1 + k$$

(**ii**) Si f est une forme modulaire de poids $2k$, alors la série de Dirichlet $L\left(s, f\right)$ qui lui est associé est convergente pour

$$\operatorname{Re} s > 2k.$$

Série de Dirichlet associé à une forme modulaire

Définition 1.4.5 . *Soit une fonction holomorphe sur* $\mathcal{H}$, *admettant un développement en série de Fourier* $f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, $q = \exp\left(2\pi i z\right)$.
$L\left(s, f\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *est la série de Dirichlet associé à* f.
Si f *est une forme modulaire, on a* $a_n = O\left(n^{\nu}\right)$ *pour un* $\nu > 0$ *et donc* $L\left(s, f\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *converge absolument et uniformément sur tout sous compact pour* $\operatorname{Re}\left(s\right) > 1 + \nu$.

Théorème de Hecke:

Théorème 1.4.6 *:([1] p137)*
Soit $f \in \mathcal{M}_k\left(SL_2\left(\mathbb{Z}\right)\right)$ *une forme modulaire. Alors* $L\left(f, s\right)$ *possède un prolongement méromorphe dans tout le plan complexe.* $L\left(f, s\right)$ *est holomorphe si* $f \in \mathcal{S}_k$. *Sinon* $L\left(f, s\right)$ *possède un pôle simple de résidu* $\dfrac{\left(2\pi i\right)^k}{\left(k-1\right)!} a\left(0\right)$ *en* $s = k$ *et est holomorphe ailleurs.*
Le prolongement méromorphe de $L\left(f, s\right)$ *satisfait l'équation fonctionnelle*

$$\left(2\pi\right)^{-s} \Gamma\left(s\right) L\left(f, s\right) = \left(-1\right)^{\frac{k}{2}} \left(2\pi\right)^{s-k} \Gamma\left(k-s\right) L\left(f, k-s\right)$$

où $\Gamma(s)$ *est définie par*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \ s > 0.$$

■

1.5 Fonction Eta de Dedekind

Définition 1.5.1 *Soit* $z \in \mathcal{H}$ *et* $q = e^{2\pi i z \cdot}$*.La fonction Eta de Dedekind* $\eta(z)$ *est égale à:*

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

Remarque 1.5.1 *([9]):*
Pour $z \in \mathcal{H}$ *et* $|q| < 1$ *le produit infinis* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ *converge absolument et n'admet pas de zéros.*

1.5.1 Loi de transformation de $\eta(z)$.

Théorème 1.5.1 *([18] p 346)*
Soit $\mathcal{H}$ *le demi-plan de Poincaré. La fonction eta de Dekind vérifie les propriétés suivantes*
1) $\eta(z+1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(z)$, *pour tout* z *dans* $\mathcal{H}$
2) $\eta\left(\frac{-1}{z}\right) = (-iz)^{1/2} \eta(z)$, *pour tout* z *dans* $\mathcal{H}^*$.
3) $\Delta(z) = (2\pi)^{12} \eta(z)^{24}$, *pour tout* z *dans* $\mathcal{H}$

■

Fonctions arithmetique d'Euler et Symboles de Legendre

Définition 1.5.2 *(cf [2])*
1) Soit p *un nombre premier impair. Un entier* $a \neq 0 \pmod{p}$ *est un reste quadratique* $\pmod{p}$ *si l'équation* $x^2 \equiv a \pmod{p}$ *admet des solutions.*
2) Le symbole de Legendre $\left(\dfrac{a.}{p}\right)$ *prend les valeurs*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & si \quad a \equiv 0 \pmod{p} \\ 1 & si \quad est\ un\ reste\ quadratique\ \pmod{p} \\ -1 & si \quad est\ un\ non\ reste\ qudratique\ \pmod{p} \end{cases}.$$

Définition 1.5.3 *:Soit n un entier positif produit de puissances $p_i^{e_i}$ de facteurs premiers $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$. Alors le symbole de Jacobi d'un entier a est le produit des symboles de Legendre $\left(\frac{a}{n}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{a}{p_i}\right)^{e_i}$*

Proposition 1.5.1 *. Soit m et n deux entiers impairs premiers entre eux*

Alors les symboles de Jacobi vérifient les relations

(i) $\left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \left(\frac{ab}{n}\right)$,

(ii) $\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{mn}\right)$,

(iii) $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)$ *si* $a \equiv b \pmod{n}$,

(iv) $\left(\frac{a^2 b}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)$

(v) $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}$,

(vi) $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\left(n^2-1\right)/8}$,

(vii) $\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{(m-1)(n-1)/4}$; *c'est la loi de réciprocité quadratique.*

■

Théorème 1.5.2 *([1])Soit une matrice* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, *un nombre* $z \in .\mathcal{H}$ *et la fonction Eta de Dedekind. Alors:* $\eta(\gamma z) = \epsilon(a,b,c,d)\sqrt{\frac{cz+d}{i}}\eta(z)$ *si* $c > 0$, *où* ε *est la somme de Dedekind,* $\varepsilon^{24} = 1$

$$\varepsilon = \epsilon(a,b,c,d) = \begin{cases} \left(\frac{d}{c}\right) i^{(1-c)/2} e^{\pi i\left(bd\left(1-c^2\right)+c(a+d)\right)/12} & \text{si } c \text{ est impair} \\ \left(\frac{c}{d}\right) e^{\pi i\left(ac\left(1-d^2\right)+d(b-c+3)\right)/12} & \text{si } d \text{ est impair,} \end{cases}$$

où $\left(\frac{d}{c}\right)$ *est le symbole de Jacobi.*

■

Théorème 1.5.3 *:Soit la fonction Eta de Dedekind, N et h deux entiers positifs et un diviseur h de N,* $f(z) = \prod_{h|N} \eta(hz)^{e_h}$ *qui satisfait les 4 conditions*

(i) $\sum_{h|N} e_h \equiv 0 \bmod 4$, **(ii)** $\prod_{h|N} h^{e_h}$ *est un carré parfait,* **(iii)** $\sum_{h|N} e_h h \equiv 0 \bmod 24$,

(iv) $\sum_{h|N} e_h N/h \equiv 0 \bmod 24.$

Alors $f(z)$ *est une forme modulaire de poids* $\sum_{h|N} e_h/2$ *pour* $\Gamma_0(N)$.

■

Preuve. Soit la matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ avec $c \geq 0$ et $f(z) = \prod_{h|N} \eta(hz)^{e_h}$.
Les valeurs $c = 0$, et $a = d = 1$, impliquent

$$f(z+b) = \prod_{h|N} \eta(h(z+b))^{e_h} = \prod_{h|N} e^{\pi i e_h bh/12} \eta(hz)^{e_h} = \exp\left\{\frac{\pi i b}{12} \sum_{h|N} e_h h\right\} f(z).$$

l'hypothése $\sum_{h|N} e_h h \equiv 0 \pmod{24}$ implique $\exp\left\{\frac{\pi i b}{12} \sum_{h|N} e_h h\right\} = 1$, j'obtiens :$f(z+b) = f(z)$

Si $c > 0$, considérons le cas N pair et d impair.
Posons $h' = \frac{N}{h}$ et $\sum_{h|N} e_h = e$. Ainsi pour tout diviseur h de N j'obtiens la valeur

$$h\gamma z = \frac{ahz + bh}{cNz + d} = \frac{a(hz) + bh}{c\frac{N}{h}(hz) + d} = \begin{pmatrix} a & bh \\ ch' & d \end{pmatrix} (hz)$$

le théorème 1.5.2 implique la relation $\eta(h\gamma z) = \epsilon(a, bh, ch', d)\sqrt{\frac{ch'hz+d}{i}}\eta(hz)$:

Il en résulte la valeur de la fonction f

$$f(\gamma z) = \prod_{h|N} \left(\frac{cNz + d}{i}\right)^{\frac{e_h}{2}} \prod_{h|N} \eta(hz)^{e_h} \prod_{h|N} \epsilon(a, bh, ch', d)^{e_h} \tag{1.5.1}$$

l'hypothèse (3) du théorème implique $e \equiv 0 \pmod 4$ et

$$(-i)^{e/2} = (-1)^{e/4+e/2} = (-1)^{3e/4} = (-1)^{e/4}. \tag{1.5.2}$$

j'obtiens la valeur

$$\prod_{h|N} \left(\frac{cNz + d}{i}\right)^{\frac{e_h}{2}} = (cNz + d)^{\sum_{h|N} \frac{e_h}{2}} (-1)^{\frac{e}{4}}. \tag{1.5.3}$$

Pour calculer le produit $\prod\limits_{h|N} \epsilon\left(a, bh, ch', d\right)^{e_h}$. j'utilise les résultats $\sum\limits_{h|N} |e_h| \equiv 0 \pmod 2$, $\prod\limits_{h|N} h^{e_h}$ est un carré parfait et $\prod\limits_{h|N} \left(\frac{ch'}{d}\right)^{e_h} = \left(\frac{\prod\limits_{h|N} (ch)^{|e_h|}}{d}\right) = 1$, j'obtiens la valeur

$$\prod_{h|N} \epsilon\left(a, bh, ch', d\right)^{e_h} = \exp\left\{\frac{\pi i}{12} \sum_{h|N} e_h \left(ach' \left(1 - d^2\right) + d\left(bh - ch' + 3\right)\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\pi i}{12} ac\left(1 - d^2\right) \sum_{h|N} e_h h' + \frac{\pi i}{12} db \sum_{h|N} e_h h - \frac{\pi i}{12} dc \sum_{h|N} e_h h' + 3\frac{\pi i}{12} \sum_{h|N} e_h\right\}. \qquad (1.5.4)$$

les hypothéses $\sum_{h|N} e_h h \equiv 0 \pmod{24}$, $\sum_{h|N} e_h h' \equiv 0 \pmod{24}$ et $\sum_{h|N} e_h \equiv 0 \pmod 4$ impliquent le produit

$$\prod_{h|N} \epsilon\left(a, bh, ch', d\right)^{e_h} = \exp\left\{\frac{\pi i}{12} ac\left(1 - d^2\right) 24k_1 + \frac{\pi i}{12} db 24k_2 - \frac{\pi i}{12} dc 24k_3 + \pi ik\right\} \qquad (1.5.5)$$

$$= \exp\left\{2\pi i\left(r_1 + r_2 + r_3\right)\right\} \exp \pi ik = (-1)^k. \qquad (1.5.6)$$

1.5.5 , 1.5.3 (1.4.1) impliquent la valeur

$$f\left(\gamma z\right) = \left(cNz + d\right)^{\sum\limits_{h/N} \frac{e_h}{2}} f\left(z\right).$$

■

1.5.2 Calcul de $\eta\left(rz\right)$ au voisinage d'une pointe

Pour déterminer le comportement de la fonction $\eta\left(rz\right)$ au voisinage d'une pointe $\frac{a}{c}$, choisissons une matrice $\sigma \in PSL_2\left(\mathbb{Z}\right)$ avec $\sigma\infty = \frac{a}{c}$, et considérons $\eta\left(rz\right)_{|[\sigma]_{\frac{1}{2}}}$. $(cf\ 1.3.1)$. Nous allons prendre un sous-groupe de Hecke dont les pointes sont connues. Nous étudions le comportement de la forme modulaire au voisinage de la pointe.

Exemple 1.5.1 *:*

Soit $\Gamma_0\left(6\right)$ *le sous groupe de congruence dont les pointes sont* $\infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, *considèrons la fonction* $g\left(z\right) = \frac{\eta(6z)^8 \eta(z)^4}{\eta(2z)^8 \eta(3z)^4}$

Calculons les valeurs de la fonction g *aux 4 pointes*

Pour la pointe $i\infty$, j'obtiens

$$g(i\infty) = \lim_{z\to i\infty} \frac{\eta(6z)^8\,\eta(z)^4}{\eta(2z)^8\,\eta(3z)^4}.$$

j'obtiens

$$\lim_{z\to i\infty} g(z) = g(\infty) = 0.$$

Pour la pointe $\left(\frac{1}{2}\right)$, choisissons la matrice **:**

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z}),\ \sigma(\infty) = \frac{1}{2}.$$

$$\eta(\sigma z) = \eta\left(\frac{3z+1}{2(3z)+3}\right) = \eta\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}(3z)\right). \tag{1.5.7}$$

le théorème 1.5.2 implique

$$\begin{aligned}
\eta\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}(3z)\right) &= \epsilon(1,1,2,3)\sqrt{\frac{2z+3}{i}}\eta(3z),\ \eta\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(6z)\right) = \epsilon(1,2,1,3)\sqrt{\frac{z+3}{i}}\eta(6z),\\
\eta\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}(z)\right) &= \epsilon(3,1,2,1)\sqrt{\frac{2z+1}{i}}\eta(z),\ .\eta\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(2z)\right) = \epsilon(3,2,1,1)\sqrt{\frac{z+1}{i}}\eta(2z)
\end{aligned}$$

je trouve $g\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\infty} g(\sigma z) = \lim_{z\to\infty} \frac{\eta(6\sigma z)^8\eta(\sigma z)^4}{\eta(2\sigma z)^8\eta(3\sigma z)^4}$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\infty} g(\sigma z) = 0.$$

Pour $g\left(\frac{1}{3}\right)$,je prends la matrice $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ et je trouve la valeur $g\left(\frac{1}{3}\right) = 1$.

Pour $g(0)$, je prends la matrice $\sigma = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et je trouve la valeur $g(0) = \frac{1}{9}$.

Remarque 1.5.2 *(cf [9]) Par dérivation logarithmique de la fonction $\eta(z)$, j'obtiens*

$$\frac{\eta'(z)}{\eta(z)} = \frac{2\pi i}{24}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\right) = \frac{2\pi i}{24}E_2(z)$$

$$\text{où } E_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n},\ q = \exp(2\pi i z)$$

Chapitre 2

Formes Modulaires et Equations Différentielles linéaires

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons montrer que toute forme modulaire de poids k satisfait une équation différentielle linéaire.En nous inspirant des articles de Klein, de Fricke et de Poincaré P.Stiller [19].a utilisé un langage plus moderne en 1981

Nous utilisons les 2 opérateurs différentiels D_t et D_q suivant [22]

$$D_t = t\frac{d}{dt} \qquad \text{et} \qquad D_q = q\frac{d}{dq}, \text{ avec } q = e^{2\pi iz} \text{ pour } z \in \mathcal{H} \; . : D_q = \frac{d}{2\pi idz}$$

2.2 Equation Différentielle linéaire et forme modulaire

Théorème 2.2.1 *:[22]*
Soit Γ un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$ commensurable avec $SL_2(\mathbb{Z})$ et les opérateurs D_t, D_q ci dessus. On suppose que $t = t(q)$ est une fonction modulaire non constante, invariante par Γ. Notons par $F(t) = F(t(q))$ une forme modulaire méromorphe de poids k pour Γ. Alors les fonctions

$$F(t), \; zF(t), \; z^2F(t), \; ..., \; z^kF(t),$$

sont des solutions linéairement indépendantes d'une équation différentielle linaire d'ordre $k+1$ de la forme :

$$D_t^{k+1}F + r_k(t)\, D_t^k F + r_{k-1}(t)\, D_t^{k-1}F + ... + r_0(t)\, F = 0 \tag{2.2.1}$$

Où les $r_m(t)$ sont des fonctions algébriques de t. posons

$$G_1 = \frac{D_q t}{t},\ G_2 = \frac{D_q F}{F},\ p_1(t) = \frac{D_q G_1 - 2G_1 G_2/k}{G_1^2},\ p_2(t) = -\frac{D_q G_2 - G_2^2/k}{G_1^2}$$

Alors nous obtenons pour $k = 1$ l'équation différentielle d'ordre 3

$$D_t^2 F + p_1 D_t F + p_2 F = 0$$

pour $k = 2$, nous obtenons l'équation d'ordre 4

$$D_t^3 F + 3p_1 D_t^2 F + \left(2p_1^2 + tp_1' + 2p_2\right) D_t F + \left(2p_1 p_2 + tp_2'\right) F = 0.$$

Les coefficients $r_m(t)$ sont des polynômes en t, p_1, p_2 et les dérivées de p_1, p_2
.$\blacksquare$ *La preuve de ce théorème repose sur le :*

Lemme 2.2.1 *:On considère les fonctions t, F, G_1 et G_2 du théorème. Alors*
(**i**) *G_1 est une forme modulaire méromorphe de poids 2.*
(*ii*) *$D_q G_1 - 2G_1 G_2/k$ et $D_q G_2 - G_2^2/k$ sont des formes modulaires méromorphes de poids 4 pour Γ.*

Preuve. de 1) Soit $\overset{\bullet}{f}(z)$ la dérivée de $f(z)$ par rapport à z. Les fonctions t, F, G_1 et G_2 sont méromorphes, Pour une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $z \in \mathcal{H}$, comme t est une fonction modulaire méromorphe, invariante sur Γ, alors nous obtenons la relation $t(\gamma z) = t(z)$ Par dérivation logarithmique, nous obtenons

$$\frac{(t(\overset{\bullet}{\gamma} z))}{t(\gamma z)} = \frac{\overset{\bullet}{t}(z)}{t(z)} \tag{2}$$

Les fonctions dérivées satisfont la relation

$$(t(\overset{\bullet}{\gamma} z)) = \overset{\bullet}{t}(\gamma z)\,.\overset{\bullet}{\gamma}(z) = \overset{\bullet}{t}(\gamma z)\,(cz+d)^{-2}\,. \tag{3}$$

Les formules (3) et (2) ,impliquent

$$\frac{\overset{\bullet}{t}(\gamma z)(cz+d)^{-2}}{t(\gamma z)} = \frac{\overset{\bullet}{t}}{t}(z)$$

Il en résulte l'équation

$$\frac{\overset{\bullet}{t}}{t}(\gamma z) = (cz+d)^2 \frac{\overset{\bullet}{t}}{t}(z) \tag{4}$$

Par hypothése, la fonction modulaire F(z) prend la valeur $F(\gamma z) = (cz+d)^k F(z)$

La dérivée logarithmique de F:

$$\frac{\overset{\bullet}{F}}{F}(\gamma z) = kc(cz+d) + (cz+d)^2 \frac{\overset{\bullet}{F}}{F}(z). \tag{5}$$

l'hypothése $G_1 = \frac{D_q t}{t} = \frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{tdz} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\overset{\bullet}{t}}{t}$ implique l'image $G_1(\gamma z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\overset{\bullet}{t}}{t}(\gamma z)$

$$G_1(\gamma z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\overset{\bullet}{t}}{t}(\gamma z) = \frac{1}{2\pi i}(cz+d)^2 \frac{\overset{\bullet}{t}}{t}(z) = (cz+d)^2 G_1(z), \tag{6}$$

Ce qui prouve que G_1 est une fonction modulaire méromorphe de poids 2.

Preuve de 2) par hypothése

$$G_2(z) = \frac{D_q F}{F} = \frac{1}{2\pi i}\frac{dF}{Fdz} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\overset{\bullet}{F}}{F}. \tag{7}$$

l'action d'une matrice γ sur G_2 implique la valeur

$$G_2(\gamma z) = \frac{1}{2\pi i}kc(cz+d) + (cz+d)^2 G_2(z) \tag{8}$$

Sa dérivée est égale à $(G_i \overset{\bullet}{(\gamma z)}) = \overset{\bullet}{G}_i(\gamma z).(cz+d)^2$, $i = 1, 2$

Par dérivation de (6) et (8) par rapport à z, j' obtiens

$$\overset{\bullet}{G}_1(\gamma z) = 2c(cz+d)^3 G_1(z) + (cz+d)^4 \overset{\bullet}{G}_1(z), \tag{9}$$

$$\overset{\bullet}{G}_2(\gamma z) = \frac{1}{2\pi i}kc^2(cz+d)^2 + 2c(cz+d)^3 G_2(z) + (cz+d)^4 \overset{\bullet}{G}_2(z). \tag{10}$$

Celà implique les 2 équations différentielles

$$\overset{\bullet}{G}_1(\gamma z) - \frac{4\pi i}{k} G_1(\gamma z) G_2(\gamma z) = (cz+d)^4 \left\{ \overset{\bullet}{G}_1(z) - \frac{4\pi i}{k} G_1(z) G_2(z) \right\} \text{ et} \tag{11}$$

$$\overset{\bullet}{G}_2(\gamma z) - \frac{2\pi i}{k} G_2^2(\gamma z) = (cz+d)^4 \left\{ \overset{\bullet}{G}_2(z) - \frac{2\pi i}{k} G_2(z)^2 \right\}. \tag{12}$$

Par définition de l'opérateur différentiel D_q j'obtiens

$$D_qG_1 = \frac{1}{2\pi i}\frac{dG_1}{d\tau} = \frac{1}{2\pi i}\overset{\bullet}{G}_1,\ D_qG_2 = \frac{1}{2\pi i}\frac{dG_2}{dz}.$$

En multipliant les deux membres de (11) (12) par $\frac{1}{2\pi i}$ j'obtiens les 2 équations différentielles

$$D_qG_1(\gamma\tau) - \frac{2}{k}G_2(\gamma\tau)G_1(\gamma\tau) = (c\tau+d)^4\left\{D_qG_1(\tau) - \frac{2}{k}G_2(\tau)G_1(\tau)\right\}$$

$$D_qG_2(\gamma\tau) - \frac{2}{k}G_2(\gamma\tau)^2 = (c\tau+d)^4\left\{D_qG_2(\tau) - \frac{2\pi i}{k}G_2(\tau)^2\right\}$$

Il en résulte que $D_qG_1 - 2G_1G_2/k$ et $D_qG_2 - G_2^2/k$ sont des fonctions modulaires méromorphes de poids 4 sur Γ. ■

Preuve. du théorème. Par hypothése

$$D_tF = t\frac{dF}{dt} = t\frac{q\frac{dF}{dq}}{q\frac{dt}{dq}} = t\frac{D_qF}{D_qt}. \tag{13}$$

De $G_1 = \dfrac{D_qt}{t}$ et $G_2 = \dfrac{D_qF}{F}$,on obtient $D_qF = G_2F$, $D_qt = tG_1$. (13) implique

$$D_tF = t\frac{G_2F}{tG_1} = F\frac{G_2}{G_1},\ D_t\frac{G_2}{G_1} = \frac{t}{G_1}\frac{dG_2}{dt} - t\frac{G_2}{G_1^2}\frac{d_tG_1}{dt},\ D_t\frac{G_2}{G_1} = \frac{t}{G_1}\frac{D_qG_2}{D_qt} - t\frac{G_2}{G_1^2}\frac{D_qG_1}{D_qt} \tag{14}$$

la définition de G_1 implique

$$D_t\frac{G_2}{G_1} = \frac{D_qG_2}{G_1^2} - \frac{G_2^2}{G_1^3}D_qG_1 \tag{15}$$

le lemme 2.1.1 implique que les fonctions $D_qG_1 - 2G_1G_2/k$ et $D_qG_2 - G_2^2/k$ sont des formes modulaires méromorphes de poids 4 sur Γ. Comme G_1 est une forme modulaire de poids 2 alors G_1^2 serait de poids 4, alors $\dfrac{D_qG_1 - 2G_1G_2/k}{G_1^2}$ et $\dfrac{D_qG_2 - G_2^2/k}{G_1^2}$ sont de poids 0, donc elles pourront être exprimées en fonction algébrique de la fonction t.
je pose $p_1(t) = \frac{D_qG_1 - 2G_1G_2/k}{G_1^2}$, $p_2(t) = \frac{D_qG_2 - G_2^2/k}{G_1^2}$ j'obtiens

$$D_qG_1 = G_1^2p_1(t) + 2G_1G_2/k,\ D_qG_2 = G_1^2p_2(t) + G_2^2/k.$$

(15) implique

$$D_t\frac{G_2}{G_1} = \frac{G_1^2p_1(t) + 2G_1G_2/k}{G_1^2} - \frac{G_2^2}{G_1^3}\left(G_1^2p_2(t) + G_2^2/k\right). = -\frac{G_2^2}{kG_1^2} - p_1\frac{G_2}{G_1} - p_2 \tag{16}$$

Comme $D_t^n(F) = D_t\left(D_t^{n-1}F\right)$ alors pour $n = 2$ j'obtiens

$$D_t^2 F = D_t\left(D_t F\right) = D_t\left(F\frac{G_2}{G_1}\right) = \frac{G_2}{G_1}D_t F + F D_t\frac{G_2}{G_1} \tag{17}$$

$(14), (16), (17)$ impliquent

$$D_t^2 F = \frac{G_2}{G_1}\left(F\frac{G_2}{G_1}\right) + F\left(-\frac{G_2^2}{kG_1^2} - p_1\frac{G_2}{G_1} - p_2\right) = F\left\{\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{G_2^2}{G_1^2} - p_1\frac{G_2}{G_1} - p_2\right\} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
D_t^3 F &= D_t\left(D_t^2 F\right) = D_t\left(F\left\{\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{G_2^2}{G_1^2} - p_1\frac{G_2}{G_1} - p_2\right\}\right)\\
&= F\left\{\left(1-\frac{1}{k}\right)D_t\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2 - \frac{G_2}{G_1}D_t p_1 - p_1 D_t\frac{G_2}{G_1} - D_t p_2\right\}\\
&\quad +F\frac{G_2}{G_1}\left\{\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{G_2^2}{G_1^2} - p_1\frac{G_2}{G_1} - p_2\right\}
\end{aligned}$$

$$D_t\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2 = 2\frac{G_2}{G_1}D_t\frac{G_2}{G_1} = -2\frac{G_2^3}{kG_1^3} - p_1\frac{G_2^2}{G_1^2} - p_2\frac{G_2}{G_1}$$

j'obtiens

$$D_t^3 F = F\left\{(1-1/k)(1-2/k)\frac{G_2^3}{G_1^3} + (3/k-3)\,p_1\frac{G_2^2}{G_1^2} + \left((2/k-3)\,p_2 - tp_1' + p_1^2\right)\frac{G_2}{G_1} + p_1p_2 - tp_2'\right\}.$$

Pour $k = 1$ j'obtiens l'équation suivante

$$D_t^2 F = -p_1 D_t F - p_2 F, \tag{19'}$$

pour $k = 2$ j'obtiens

$$D_t^3 F = -3p_1 D_t^2 F + \left(-2p_1^2 - tp_1' - 2p_2\right)D_t F - \left(2p_1p_2 + tp_2'\right)F.$$

par dérivation à l'ordre n j'obtiens

$$D_t^n F = F\left\{\frac{G_2^n}{G_1^n}\prod_{j=1}^{n-1}(1-j/k) + s_{n,n-1}\frac{G_2^{n-1}}{G_1^{n-1}} + s_{n,n-2}\frac{G_2^{n-2}}{G_1^{n-2}} + ...\right\}, \tag{19}$$

où les $s_{n,j}$ sont des polynômes en t, p_1, p_2 et les dérivées de p_1, p_2.
Commençons par déterminer $D_t\left(\frac{G_2^n}{G_1^n}\right)$.

$$D_t\left(\frac{G_2^n}{G_1^n}\right) = D_t\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^n = n\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n-1}D_t\left(\frac{G_2}{G_1}\right), \tag{20}$$

(16) et (20) impliquent

$$D_t\left(\frac{G_2^n}{G_1^n}\right) = -\frac{n}{k}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n+1} - p_1 n\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n} - p_2 n\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n-1}. \qquad (21)$$

$$\begin{aligned} D_t\left(D_t^n F\right) &= \left\{\frac{G_2^n}{G_1^n}\prod_{j=1}^{n-1}(1-j/k) + s_{n,n-1}\frac{G_2^{n-1}}{G_1^{n-1}} + s_{n,n-2}\frac{G_2^{n-2}}{G_2^{n-2}} + ...\right\} D_t F + \qquad (22)\\ & F\left\{\prod_{j=1}^{n-1}(1-j/k)\, D_t\frac{G_2^n}{G_1^n} + s_{n,n-1} D_t\frac{G_2^{n-1}}{G_1^{n-1}} + \frac{G_2^{n-1}}{G_1^{n-1}} D_t s_{n,n-1} + ...\right\} \end{aligned}$$

Par dérivation, j'obtiens

$$\begin{aligned} D_t\left(D_t^n F\right) &= F\left\{\frac{G_2^{n+1}}{G_1^{n+1}}\prod_{j=1}^{n-1}(1-j/k) + s_{n,n-1}\frac{G_2^{n}}{G_1^{n}} + s_{n,n-2}\frac{G_2^{n-1}}{G_1^{n-1}}\right\} + \\ & F\left\{\prod_{j=1}^{n-1}(1-j/k)\left(-\frac{n}{k}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n+1} - p_1 n\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n} - p_2 n\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n-1}\right)\right. \\ & \left. + s_{n,n-1}\left(-\frac{n-1}{k}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n} - p_1(n-1)\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n-1} - p_2(n-1)\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{n-2}\right) + ...\right\}. \end{aligned}$$

j'obtiens

$$D_t^{n+1}F = F\left\{\frac{G_2^{n+1}}{G_1^{n+1}}\prod_{j=1}^{n}(1-j/k) + s_{n+1,n}\frac{G_2^{n}}{G_1^{n}} + s_{n+1,n-1}\frac{G_2^{n-1}}{G_1^{n-1}} + s_{n+1,n-2}\frac{G_2^{n-2}}{G_2^{n-2}} + ...\right\}$$

avec

$$s_{n+1,n} = \left(1-\frac{n-1}{k}\right)s_{n,n-1} - p_1 n\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{k}\right) \qquad (23')$$

$$s_{n+1,n-1} = \left(1-\frac{n-2}{k}\right)s_{n,n-2} - p_1(n-1)\prod_{j=1}^{n-2}\left(1-\frac{j}{k}\right) \qquad (24')$$

$$s_{n+1,n-2} = \left(1-\frac{n-3}{k}\right)s_{n,n-3} - p_2.n\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{k}\right) - (n-2)\,p_1 s_{n,n-2} + D_t\left(s_{n-1,n-2}\right). \qquad (25')$$

pour $n = k+1$ le coefficient de $\dfrac{G_2^n}{G_1^n}$ s'annule. Alors $D_t^{k+1}F$ s'écrit en somme linéaire de dérivée de F

Soit la matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. On note $\widetilde{F}$, $\widetilde{q}$, $\widetilde{G_1}$, $\widetilde{G_2}$ les fonctions $F(\gamma z)$, $q(\gamma z)$, $G_1(\gamma z)$, $G_2(\gamma z)$ appliquons l'opérateur D_q à ces fonctions

$$D_{\widetilde{q}}\widetilde{F} = \widetilde{q}\frac{d\widetilde{F}}{d\widetilde{q}} = q(\gamma z)\frac{dF(\gamma z)}{dq(\gamma z)} = q(\gamma z)\frac{dF(\gamma z)}{dz}\frac{dz}{dq(\gamma z)} = \frac{1}{2\pi i}F'(\gamma z).$$

$$D_{\widetilde{q}}\widetilde{F} = F(\gamma z)\, G_2(\gamma z) = \widetilde{F}\widetilde{G_2} \tag{23}$$

et

$$D_{\widetilde{q}}t = \frac{(cz+d)^2}{2\pi i}t'(z) = \frac{1}{2\pi i}t'(\gamma z) = t(\gamma z)\, G_1(\gamma z) = t\widetilde{G_1}. \tag{24}$$

par dérivation de $\widetilde{F}$ j'obtiens

$$D_t\widetilde{F} = t\frac{d\widetilde{F}}{dt} = \frac{t}{dt}\widetilde{q}\frac{d\widetilde{F}}{d\widetilde{q}}\frac{d\widetilde{q}}{\widetilde{q}}$$

$(23), (24)$ impliquent

$$D_t\widetilde{F} = \widetilde{F}\frac{\widetilde{G_2}}{\widetilde{G_1}}, \tag{25}$$

pour $z \in \mathcal{H}$ alors $\gamma z \in \mathcal{H}$ et $D_tF(\gamma z) = \left(F\frac{G_2}{G_1}\right)(\gamma z) = (D_tF)(\gamma z)$. Pour $D_t\widetilde{G_2}/\widetilde{G_1}$ je trouve

$$D_t\frac{\widetilde{G_2}}{\widetilde{G_1}} = -\frac{\widetilde{G_2}^2}{k\widetilde{G}_1^2} - p_1(t)\frac{\widetilde{G_2}}{\widetilde{G_1}} - p_2(t), \tag{2.2.2}$$

j'obtiens les images par l'opérateur D_t

$$D_t\frac{G_2}{G_1}(\gamma z) = \left(-\frac{G_2^2}{kG_1^2} - p_1(t)\frac{G_2}{G_1} - p_2(t)\right)(\gamma z),\ D_t\frac{G_2(\gamma z)}{G_1(\gamma z)} = \left(D_t\frac{G_2}{G_1}\right)(\gamma z)$$

J'en déduis que $\widetilde{F}$ est solution de l'équation (1).

Suivant 1.2.8, soit N la largeur de la pointe ∞ et la matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ avec $c \neq 0$, je prends la matrice $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ Il en résulte que $\gamma\sigma^j \in \Gamma$, ainsi les fonctions

$$F\left(\gamma\sigma^j z\right) = (cz + Njc + d)^k F(z), j = 0, 1, 2, ..., k$$

sont toutes des solutions de l'équation $(2.2.1)$. Comme l'espace vectoriel des polynômes en la variable z, de degré $\leq k$ est engendré par $(cz + Njc + d)^k$, $j = 0, 1, 2, 3..., k$, j'en déduis

$$F, zF, z^2F, ..., z^kF$$

sont toutes des solutions de l équation $(2.2.1)$.

. ■

2.2.1 Coefficients de l'équation différentielle(1)

Soit F une forme modulaire de poids k sur Γ alors le théorème 2.2.1 implique l'équation

$$D_t^{k+1}F + r_k(t)\, D_t^k F + r_{k-1}(t)\, D_t^{k-1}F + ... + r_0(t)\, F = 0 \tag{2.2.1}$$

Par dérivation à l'ordre n j'obtiens

$$D_t^n F = F\left\{ \frac{G_2^n}{G_1^n} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - j/k) + s_{n,n-1} \frac{G_2^{n-1}}{G_1^{n-1}} + s_{n,n-2} \frac{G_2^{n-2}}{G_1^{n-2}} + ... \right\}. \tag{19}$$

Lemme 2.2.2 *Soit F une forme modulaire de poids k qui vérifie les équations* (2.2.1) *et* (19) *alors les nombres $s_{i,j}$ sont égaux à*

$$s_{n,n-1} = -p_1 \frac{n(n-1)}{2} \prod_{j=1}^{n-2} \left(1 - \frac{j}{k}\right) \tag{27}$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur n

. ■

Lemme 2.2.3 *Soit F une forme modulaire de poids k qui vérifie les équations* (2.2.1) *et* (19) *alors:*

$$s_{n,n-2} = p_1^2 f_k(n) - t p_1' g_k(n) - p_2 h_k(n) \tag{28'}$$

avec

$$f_k(n) = \prod_{j=1}^{n-3} \left(1 - \frac{j}{k}\right) \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{(m-1)(m-2)^2}{2} \right]$$

$$g_k(n) = \prod_{j=1}^{n-3} \left(1 - \frac{j}{k}\right) \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{(m-1)(m-2)}{2} \right]$$

$$h_k(n) = \prod_{j=1}^{n-3} \left(1 - \frac{j}{k}\right) \sum_{m=1}^{n} \left[(m-1)\, 1 - \frac{m-2}{k} \right].$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur n

. ■

Lemme 2.2.4 *:*

Soit F une forme modulaire qui satisfait l'équation différentielle (2.2.1), *ses coefficients r_j sont égaux à*

$$r_k = k(k+1)\, p_1/2 \qquad r_{k-1} = d_1 p_2 + d_2 t p_1' + d_3 p_1^2$$

avec

$$d_1 = \frac{k^2}{6} + \frac{k}{2} + \frac{1}{3} = \frac{(k+1)(k+2)}{6}$$
$$d_2 = \frac{k^3-k}{6} = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$
$$d_3 = \frac{k^4}{8} + \frac{k^3}{12} - \frac{k^2}{8} - \frac{k}{12} = \frac{(k-1)k(k+1)(3k+2)}{24}.$$

Preuve. La démonstration de ce lemme utilise les lemmes 2.2.2 et 2.2.3 .

. ■

Corollaire 2.2.1 *On obtient*

$$p_1 = \frac{2r_k}{k(k+1)}$$

et

$$p_2 = \frac{6k(1+k)r_{k-1} + (2+k-3k^2)r_k^2 + 2kt(1-k^2)r_k'}{k(k+1)^2(k+2)}.$$

■

2.2.2 Solutions d'une équation différentielle satisfaite par une forme modulaire avec second membre, dans le cas $k = 2$

Dans ce paragraphe j'étudie le cas d'une'équation différentielle avec second membre.et $k = 2$.

Intégrale d' Eichler

Définition 2.2.1 *(cf[6]):Soit F une forme modulaire de poids k,et une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$ de valeur*

$$F(\gamma z) = (cz+d)^k F(z), \ z \in \mathcal{H} \ .$$

$F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n q^n$, $q = e^{2\pi i z}$, admet pour l'opérateur D_q le développement $q\frac{d}{dq}F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} n a_n q^n$

l'intégrale d' Eichler $E_i^{k-1}(F)$ représente la $(k-1)$ ième dérivée itérée de $F(z)$

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\right)^{k-1} E_i^{k-1}F = F(z)$$

et ainsi

$$E_i^{k-1}F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k-1}} q^n.$$

Proposition 2.2.1 *([6]):Si* $h(z)$ *est solution de l'équation différentielle*

$$D_t^3 f + r_2(t) D_t^2 f + r_1(t) D_t f + r_0(t) f = w(t) \tag{28}$$

Alors $h(\gamma z)$ *est aussi une solution,* h *est de la forme* $h = Fg$
F *solution de l'équation*

$$D_t^3 f + r_2(t) D_t^2 f + r_1(t) D_t f + r_0(t) f = 0. \tag{29}$$

Chapitre 3

Irrationnalité de $\zeta(3)$

3.1 La fonction Zéta de Riemann

La fonction Zéta de Riemann est définie par la série de Dirichlet $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ où $s = r + it \in \mathbb{C}$. Elle converge dans le demi-plan $r > 1$. Elle se met sous la forme de produit eulérien $\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} (1-p^{-s})^{-1}$. Elle est liée à la fonction $\Gamma(s)$ par la formule intégrale

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x} dx, \ \ s = r + it, \ \ r > 1$$

Son équation fonctionnelle est égale à:

$$\Lambda(s) = \Lambda(s-1) \ \text{ où } \Lambda(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$$

D'autres détails dans "The Zéta-Function of Riemann" (Cambridge 1930) , par E.C.TiTCHMARSH. Cette fonction opère sur les nombres réels: pour tout entier $k > 0$ elle est égale à :

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} B_{2k} \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} \text{ où les } B_{2k} \text{ sont les nombres de Bernouilli..}$$

Certains chercheurs ont étudié des nombres $\zeta(2k+1)$. En particulier Apery a prouvé en 1978 que le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel. En 1985, Beukers a trouvé une preuve basée sur des formes modulaires.

3.2 Formes modulaires et fonction Zéta de Riemann

Proposition 3.2.1 *:*

Soit $\mathcal{H}$ *le demi plan de Poincaré et* $z \in \mathcal{H}$ *pour* $q = e^{2\pi iz}$, $\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$, *soit les fonctions*

$$t = t(z) = \left(\frac{\eta(z)\,\eta(6z)}{\eta(2z)\,\eta(3z)}\right)^{12} = q - 12q^2 + 66q^3 - 220q^4 + 496q^5 + ...$$

$$F(z) = \frac{(\eta(2z)\,\eta(3z))^7}{(\eta(z)\,\eta(6z))^5} = 1 + 5q + 13q^2 + 23q^3 + 29q^4 + 30q^5 + 31q^6 + ...$$

t, F *vérifient:*

(**i**) t *est une fonction modulaire sur* $\Gamma_0(6)$ *et* $q = t + 12t^2 + 222t^3 + ...$

(**ii**) F *est une forme modulaire de poids* 2 *sur* $\Gamma_0(6)$, $F(t) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n t^n = 1 + 5t + 73t^2 + 1445t^3 + 33005t^5 + ...$

(**iii**) F *vérifie l'équation différentielle*

$$\left(1 - 34t + t^2\right) D_t^3 F + \left(3t^2 - 51t\right) D_t^2 F + \left(3t^2 - 27t\right) D_t F + \left(t^2 - 5t\right) F = 0$$

(**iv**) *Pour* $z \in \mathcal{H}$ *et* E_4,*.la série d'Eisenstein normalisé soit*

$$G(z) = \frac{1}{240}\left(E_4(z) - 28E_4(2z) + 63E_4(3z) - 36E_4(6z)\right)$$

alors $G(z)$ *est une forme modulaire de poids 4 sur* $\Gamma_0(6)$ *et*
$G(z) = q - 19q^2 + 91q^3 - 179q^4 + ...$

Preuve. Le théorème 1.3.3 implique que t est une fonction modulaire pour $\Gamma_0(6)$, F est une forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma_0(6)$.
Par la définition de $\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$, j'obtiens les développement

$$\begin{aligned} t &= q - 12q^2 + 66q^3 - 220q^4 + 496q^5 - 804q^6 + ... \\ F &= 1 + 5q + 13q^2 + 23q^3 + 29q^4 + 30q^5 + 31q^6 + ... \end{aligned}$$

J'obtiens avec le calcul

$$F(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n = 1 + 5t + 73t^2 + 1445t^3 + 33005t^5 + ... \tag{3.2.1}$$

. ■

Preuve. de iii) Soit $\Gamma_0(6)$ le sous-groupe de congruence de $PSL_2(\mathbb{Z})$, de genre zéro, d'après la proposition 1.1.10, il possède quatre pointes:

$$i\infty,\ 0,\ 1/2,\ 1/3.$$

Soit la fonction modulaire g, égal à

$$g(z) = \frac{\eta(6z)^8 \eta(z)^4}{\eta(2z)^8 \eta(3z)^4}$$

les valeurs de g aux pointes sont égales à

$$g(i\infty) = 0,\ g(0) = \frac{1}{9},\ g(1/2) = \infty,\ g(1/3) = 1.$$

g n'a qu'un seuk pôle simple $1/2$ alors g est un générateur du corps des fonctions modulaire de $\Gamma_0(6)$ $(voir$ [22])

la fonction t prend les valeurs .

$$t(i\infty)=0,\ t(0)=0,\ t\left(\frac{1}{2}\right)=\infty,\ t\left(\frac{1}{3}\right)=\infty,$$

Il en résulte que t possède un facteur de la forme $(g - g(i\infty))(g - g(0))$ $t\left(\frac{1}{3}\right) = \infty$ implique $\frac{1}{3}$ est un pôle simple et

$$t = ag\frac{1-9g}{1-g},$$

Il en résulte le développement de t

$$t = ag\left(1 - 8g - 8g^2 - 8g^3 - ...\right). \tag{40"}$$

En utilisant l'équation (1.5.7) j'obtiens le produit

$$g = q\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^n + q^{2n}\right)^8. \tag{40'''}$$

les formules (40'''), (40") impliquent

$$t = g\frac{1-9g}{1-g}. \tag{40'}$$

Avec les opérateurs différentiels $D_t = t\dfrac{d}{dt}$, $D_q = q\dfrac{d}{dq}$ j'obtiens

$$G_1 = \frac{D_q t}{t},\ G_2 = \frac{D_q F}{F}.$$

Par dérivation logarithmique des fonctions j'obtiens

$$\frac{1}{12}\frac{D_q t}{t} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\eta'(z)}{\eta(z)} + \frac{6\eta'(6z)}{\eta(6z)} - \frac{2\eta'(2z)}{\eta(2z)} - \frac{3\eta'(3z)}{\eta(3z)}\right\}. \tag{40}$$

et $\frac{\eta'(z)}{\eta(z)} = \frac{2\pi i}{24}E_2(z)$, avec $E_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}$ série normalisée d'Eisenstein de poids 2 qui n'est pas modulaire pour $PSL_2(\mathbb{Z})$. Il en résulte les relations

$$G_1(z) = \frac{1}{2}\{E_2(z) + 6E_2(6z) - 2E_2(2z) - 3E_2(3z)\}. \tag{41}$$

$$G_2(z) = \frac{1}{24}\{14E_2(2z) + 21E_2(3z) - 5E_2(z) - 30E_2(6z)\}. \tag{42}$$

les fonctions

$$A_2 = E_2(z) - 2E_2(2z),\ A_3 = E_2(z) - 3E_2(3z),\ A_6 = E_2(z) - 6E_2(6z)$$

sont des formes modulaires de poids 2 sur $\Gamma_0(6)$. L'espace $M_4(\Gamma_0(6))$ est de dimension 5 engendré par $A_2^2,\ A_3^2,\ A_6^2,\ A_2A_3,\ A_2A_6$. $D_qG_1 - G_1G_2$, $D_qG_2 - G_2^2/2$ sont des formes modulaires de poids 4. Avec le calcul j'obtiens

$$D_qG_1 - G_1G_2 = \frac{1}{24}\left(2A_2^2 + 2A_3^2 + A_6^2 + 5A_2A_3 - 9A_2A_6\right), \tag{44}$$

$$D_qG_2 - G_2^2/2 = \frac{-25}{768}A_2^2 - \frac{25}{768}A_3^2 - \frac{3}{256}A_6^2 - \frac{25}{576}A_2A_3 + \frac{125}{1152}A_2A_6. \tag{45}$$

j' introduis la fonction P de valeur

$$P = \frac{1}{3}P_{1/2} - \frac{1}{2}P_{1/3}$$

avec

$$P_{1/2} = \frac{-3}{8}\left(E_2(z) - 4E_2(2z) - E_2(3z) + 4E_2(6z)\right) \text{ et } P_{1/3} = \frac{-1}{6}\left(E_2(z) - E_2(2z) - 9E_2(3z) + 9E_2(6z)\right)$$

Alors:

$$P = \frac{1}{24}\left(-E_2(z) + 10E_2(2z) - 15E_2(3z) + 6E_2(6z)\right). \tag{47}$$

Valeurs particulieres

$$P_{1/2}(0) = P_{1/2}(\infty) = 0,\ P_{1/3}(0) = P_{1/3}(\infty) = 0$$

(43) implique les séries normalisées

$$E_2(2z) = \frac{1}{2}(E_2(z) - A_2(z)), \; E_2(3z) = \frac{1}{3}(E_2(z) - A_3(z)), \; E_2(6z) = \frac{1}{6}(E_2(z) - A_6(z))$$

(47) implique la fonction

$$P = \frac{1}{24}(-5A_2 + 5A_3 - A_6)$$

A_2, A_1, A_3 sont des formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma_0(6)$ alors $P \in M_2(\Gamma_0(6))$ .P possède deux zéros 0 et ∞.

Les formes modulaires de poids '2' sur $\Gamma_0(6)$ n'admettent que deux zéros ([22]) ,
$G_1/P = (a_0 + a_1 g + a_2 g^2) / (b_0 + b_1 g + b_2 g^2)$ où $(b_0 + b_1 g + b_2 g^2) = (g - g(i\infty))(g - g(0))$.
(41), (47) impliquent que dans le développement en série de Fourier de G_1/P le premier terme est q^{-1}.Valeurs de G_1/P aux pointes 1/2 et 1/3

$$\frac{G_1}{P}(1/2) = -1 = \lim_{g \longrightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 g + a_2 g^2}{g(1-9g)}$$

cela implique $a_2 = 9$.
$g\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ et $\frac{G_1}{P}(1/3) = 1$ impliquent $\frac{G_1}{P}(1/3) = 1 = \frac{a_0 + a_1 g\left(\frac{1}{3}\right) + a_2 g^2\left(\frac{1}{3}\right)}{g\left(\frac{1}{3}\right)\left(1 - 9g\left(\frac{1}{3}\right)\right)}$ et par suite

$$a_0 + a_1 + a_2 = -8, \; a_0 + a_1 = -17.$$

le développement en série de Fourier de G_1/P commence par q^{-1} alors $a_0 = 1$, d'où:

$$\frac{G_1}{P} = \frac{1 - 18g + 9g^2}{g(1-9g)}$$

j' obtiens

$$\frac{A_2}{P} = \frac{-1 - 18g + 27g^2}{g(1-9g)}, \; \frac{A_3}{P} = \frac{-2 - 12g - 18g^2}{g(1-9g)}, \; \frac{A_6}{P} = \frac{-5 + 6g - 9g^2}{g(1-9g)}.$$

de (44) , (45) j'obtiens

$$\frac{D_q G_1 - G_1 G_2}{G_1^2} = \frac{-17g + 171g^2 - 171g^3 + 81g^4}{(1 - 18g + 9g^2)^2}, \; \frac{DG_2 - G_2^2/2}{G_1^2} = \frac{10g - 101g^2 + 108g^3 - 81g^4}{2(1 - 18g + 9g^2)^2}$$

(40′) implique

$$p_1(t) = \frac{D_q G_1 - G_1 G_2}{G_1^2} = \frac{-17t + t^2}{1 - 34t + t^2}, \; p_2(t) = \frac{DG_2 - G_2^2/2}{G_1^2} = \frac{t^2 - 10t}{2(1 - 34t + t^2)}$$

F est une forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma_0(6)$ c'est une solution de l'équation différentielle

$$D_t^3F + 3p_1D_t^2F + \left(2p_1^2 + tp_1' + 2p_2\right)D_tF + \left(2p_1p_2 + tp_2'\right)F = 0$$

$$\left(1 - 34t + t^2\right)D_t^3F + \left(3t^2 - 51t\right)D_t^2F + \left(3t^2 - 27t\right)D_tF + \left(t^2 - 5t\right)F = 0.$$

C"est une équation différentielle d'ordre 3

. ■

Preuve. de iv) L'holomorphie est vérifié sur $\mathcal{H}$ (E_4 est holomorphe sur $\mathcal{H}$), reste à prouver la condition de modularité.
Soit la matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(6)$,

$$G(\gamma z) = \frac{1}{120}\left(E_4(\gamma z) - 28E_4(2\gamma z) + 63E_4(3\gamma z) - 36E_4(6\gamma z)\right).$$

j'obtiens

$$E_4(N\gamma z) = E_4\left(\frac{aNz + bN}{cz + d}\right) = E_4\left(\frac{a(Nz) + bN}{\frac{c}{N}(Nz) + d}\right) \text{ pour } N \in \{1, 2, 3, 6\} \qquad (48)$$

$c \equiv 0 \pmod 6$ implique $\frac{c}{N} \in \mathbb{Z}$, l'hypothese $E_4 \in M_4(PSL_2\mathbb{Z})$ et (48) impliquent

$$E_4(N\gamma z) = E_4\left(\frac{aNz + bN}{cz + d}\right) = \left(\frac{c}{N}(Nz) + d\right)^4 E_4(Nz)$$

. ■

Corollaire 3.2.1 *([3])Soit $F(t) = \sum_{n\geq 0} a_nt^n$, solution de l'équation différentielle*

$$\left(1 - 34t + t^2\right)D_t^3F + \left(3t^2 - 51t\right)D_t^2F + \left(3t^2 - 27t\right)D_tF + \left(t^2 - 5t\right)F = 0,$$

les coefficients a_n, satisfont la relation récurrente

$$(n+1)^3 a_{n+1} - (2n+1)\left(17n^2 + 17n + 5\right)a_n + n^3a_{n-1} = 0, \ n \geq 1 \qquad (49)$$

Remarque 3.2.1 (*cf [20]*) (**i**) *Dans la démonstration de Apéry les a_n sont égaux à $a_0 = 1$, $a_1 = 5$ et*

$$a_n = \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{j}^2$$

Remarque 3.2.2 *:Si $G = \sum_{n\geq 0} a_nq^n$ alors $g = E_i^3G = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^3}q^n$ ou E_i^3 est l'intégral d' Eichler*

3.2.1 Convergence des séries L

Soit $F(z)$ (resp $h(z)$) une solution de (29) (resp (28).). et $h(z) = F(z)\,g(z)$ où $g(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{n^3} q^n$, $q = e^{2\pi iz}$.

$$\begin{aligned}\lim_{q\to\infty}\frac{h(t)}{F(t)} &= \lim_{t\to\infty}\frac{\lim\limits_{N\to\infty} b_0+b_1t+...+b_Nt^N}{\lim\limits_{M\to\infty} a_0+a_1t+...+a_Mt^M} = \lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{b_0+b_1t+...+b_Nt^N}{a_0+a_1t+...+a_Nt^N}\\ &= \lim_{N\to\infty}\lim_{t\to\infty}\frac{b_0+b_1t+...+b_Nt^N}{a_0+a_1t+...+a_Nt^N} = \lim_{N\to\infty}\frac{b_N}{a_N}.\end{aligned}$$

Posons $t(0) = \infty$ je peux trouver une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $A(0) = \binom{1}{2}$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{b_N}{a_N} = \lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{F(t)} = \lim_{z\to 0}\frac{\widetilde{h}(z)}{\widetilde{F}(z)} = \lim_{z\to 0}\widetilde{g}(z) = \lim_{q\to 1}\sum_{n\geq 1}\frac{c_n}{n^3}q^n = L_G(3)$$

3.3 Irrationnalité de $\zeta(3)$

Soit le sous-groupe de congruence $\Gamma = \Gamma_0(6)$ et les fonctions

$$F(z) = \frac{(\eta(2z)\,\eta(3z))^7}{(\eta(z)\,\eta(6z))^5} = 1+5q+13q^2+23q^3+29q^4+30q^5+31q^6+...,\ q = e^{2\pi iz}$$

$$t(z) = \left(\frac{\eta(z)\,\eta(6z)}{\eta(2z)\,\eta(3z)}\right)^{12} = q-12q^2+66q^3-220q^4+496q^5+...$$

la proposition 3.1.1 implique

$$F(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n = 1+5t+73t^2+1445t^3+33005t^5+... \qquad (3.3.1)$$

qui vérifie l'équation différentielle:

$$\left(1-34t+t^2\right)D_t^3F + \left(3t^2-51t\right)D_t^2F + \left(3t^2-27t\right)D_tF + \left(t^2-5t\right)F = 0$$

où a_n vérifie la récurrence (49), ces coefficients jouissent des propriétés suivantes

(**i**) Pour n grand l'équation (49) n'a un sens que si

$$a_{n+1} - 34a_n + a_{n-1} \to 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante,

(iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha$,alors $a_n\to c\alpha^n$ où c est une constante positive et α est solution de l'équation $x^2-34x+1=0$

$$\alpha=\left(1+\sqrt{2}\right)^4 \text{ où } \alpha=\left(1-\sqrt{2}\right)^4.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de premier terme $a_0=1>1-\sqrt{2}$ implique $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n}$.

Soit $h(t)=\sum_{n\geq 0}b_nt^n$ qui vérifie (cf [6], [3])

$$\left(1-34t+t^2\right)D_t^3h+\left(3t^2-51t\right)D_t^2h+\left(3t^2-27t\right)D_th+\left(t^2-5t\right)h=6t,$$

la proposition 2.2.1 implique

$$h=FE_i^3G \tag{3.3.2}$$

où G est une forme modulaire de poids 4. Dans ce cas(cf [3]) :

$$G(z)=\frac{1}{240}\left(E_4(z)-28E_4(2z)+63E_4(3z)-36E_4(6z)\right)=q-19q^2+91q^3-179q^4+....$$

(3.1.2) implique

$$E_i^3G=\sum_{n\geq 1}\frac{c_n}{n^3}q^n \tag{3.3.3}$$

De (3.2.1), (3.2.2) et (3.2.3) j'obtiens,

$$h(t)=\sum_{n\geq 0}b_nt^n=t+\frac{117}{8}t^2+\frac{62531}{216}t^3+\frac{11424695}{1728}t^4+\frac{35441621103}{21600}t^5+.... \tag{3.3.4}$$

Les coefficients b_n vérifient la propriété suivante :

Lemme 3.3.1 *([3])*

b_n est un nombre rationnel dont le dénominateur est un diviseur de d_n^3 avec

d_n.le plus petit multiple commun des entiers $1,2,3,...$

On a besoin du résultat suivant:

Théorème 3.3.1 *([2])*

Soit $n\in\mathbb{N}$ et d_n le plus petit multiple commun des nombres $(1,2,3,...,n)$ alors $\lim_{n\to\infty}\log\frac{d_n}{n}=1$

Lemme 3.3.2 *Soient a_n et b_n les coefficients des formes modulaires définies dans* (3.3.1), (3.3.4) *et G la forme modulaire définie précédemment alors:* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = L_G(3) = \frac{1}{6}\zeta(3)$

Preuve. (3.1.3) implique que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L_G(3)$$

Où $L_G(s)$ est la série de Dirichlet associé à la forme modulaire $G(z)$. (cf le théorème de Hecke) $L_G(s)$ est définie par le produit

$$L_G(s) = \zeta(s)\zeta(s-3)\left(1 - \frac{28}{2^s} + \frac{63}{3^s} - \frac{36}{6^s}\right).$$

Pour $s = 3$ j' obtiens:

$$L_G(3) = \zeta(3)\zeta(0)\frac{-1}{3}$$

$\zeta(0) = \frac{-1}{2}$ implique:$L_G(3) = \frac{1}{6}\zeta(3)$. ■

Fixons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres qui vérifient les conditions citées dans les sections 3.2.2 et 3.2.3.

Théorème 3.3.2 :$\zeta(3)$ *est un nombre irrationnel.*

Preuve. Lemme 3.2.5, implique que

$$\lim_{n\to\infty} a_n\zeta(3) - 6b_n = 0$$

a_n et b_n vérifient l'expression (49) ,impliquent $a_n\zeta(3) - 6b_n$ la vérifie aussi Ainsi :

$$a_n\zeta(3) - 6b_n \to c\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} \text{ car } \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} = 0.$$

Le dénominateur de b_n est un diviseurs de d_n^3 (cf lemme 3.2.2) alors $d_n^3 6b_n \in \mathbb{Z}$. par théorème 3.2.1 j'obtient

$$d(n)^3 \text{ est équivalente à } e^{3n} \text{ pour } n \to \infty$$

Par conséquent on a:

$$d_n^3(a_n\zeta(3) - 6b_n) \text{ est équivalente à } c\left(e^3\left(\sqrt{2}-1\right)^4\right)^n, \text{ avec } c > 0$$

ce qui donne:

$$\lim_{n\to\infty} d_n^3(a_n\zeta(3) - 6b_n) = 0.$$

supposons que $\zeta(3) \in \mathbb{Q}$ dont le dénominateur est m.comme $d_n^3 6b_n \in \mathbb{Z}$.alors

$$d_n^3 \left(a_n \zeta(3) - 6b_n\right) = \frac{a}{m},\ a \in \mathbb{Z}^*.$$

On remarque que la valeur minimale que peut prendre $\left|d_n^3 \left(a_n \zeta(3) - 6b_n\right)\right|$ est $\frac{1}{m}$.
et par conséquent la suite $md_n^3 \left(a_n \zeta(3) - 6b_n\right)$ ne s'annule jamais ce qui contredit le fait que

$$\lim_{n\to\infty} d_n^3 \left(a_n \zeta(3) - 6b_n\right) = 0.$$

Donc l'hypothèse que $\zeta(3) \in \mathbb{Q}$ est fausse d'ou le théorème d'Apéry. ■

3.4 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons établis que toute forme modulaire satisfait une équation différentielle. Nous avons donné une application de la théorie de Hecke en E D O et en Théorie des nombres. Nous pensons que le sujet est trés vaste. Le long de ma modeste recherche j'ai pu rencontré des mots tel que: Mirror maps, Mirror symmetry qui sont à la frontière entre les Mathématiques et la Physique et qui illustrent comment une théorie peut enrichir l'autre.
Sur le plan purement mathématique, je me pose des questions qui me semblent naturelles telle que la comparaison entre l'équation différentielle satisfaite par une forme modulaire f et celle satisfaite par $g = T_n f$ obtenue en faisant agir un opérateur de Hecke sur f.
La théorie des formes modulaires peut être considérée comme une synthèse de l'Analyse (théorie spectrale des opérateurs de Hecke), de la Géométrie (groupes agissant sur le demi-plan de Poincaré) et de la Théorie des Nombres.

Bibliographie

[1] T M. APOSTOL, Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, Band 41, Springer, 1987

[2] T M. APOSTOL,. Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics.Springer, first edition, 1976.

[3] F.BEUKERS, Irrationality proofs using modular forms. Astéerisque 147–148,(1987) Journées Arithmétiques de Besançon (1985)

[4] CH DELAUNAY, Formes Modulaires et invariants de courbes elliptiques d´efinies sur $\mathbb{Q}$, thèse Université Bordeaux 1, 2002

[5] J CREMONA, 2nd édition Algorithms for Modular Elliptic Curves, Cambridge University.Press, (1997)

[6] HELENA VERRILL, Graduate School of Mathematics and Applications Lectures by Helena Verrill Modular forms and differential equations

[7] YVES HELLEGOURCH, Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles, Masson Paris (2001).

[8] A. W. KNAPP, Elliptic Curves, Mathematical Notes, 40, Princeton University Press (1992).

[9] N. KOBLITZ, Introduction to Elliptic Curves and Modular forms. Graduate Texts in Mathematics (1993).

[10] S. LANG,. Introduction to modular forms. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, No.222

[11] LIAN, B.H., Yau, S.-T.: Mirror Maps, Modular Relations and Hypergeometric Series I. Preprint, http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/9507151

[12] J. S. MILNE, Modular functions and modular forms. Notes from the course math 678,1997, available at http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/math678.htm

[13] T. MIYAKE,. Modular forms. Springer-Verlag, Berlin, 1989

[14] R.C.GUNNING :Lectures on modular forms(Annals of Mathematics Studies Number 48)1962

[15] J.-P.SERRE,. Cours d'arithmétique. Presses Universitaires de France, Paris (1970).

[16] J. SHIGEZUMI, On the zeros of Eisenstein series for$\Gamma_0^*(p)$ and g $\Gamma_0(p)$ of low levels, M.S. thesis, Kyushu University,2006.

[17] G. SHIMURA, Introduction to the ArithmeticTheory of Automorphic functions, Princeton University Press (1971).

[18] JOSEPHE SILVERMAN, The arithmetic of elliptic curves, Graduate texts in Mathematics 106, Springer-Verlag (1986).

[19] P STILLER, Special values of Dirichlet series, monodromy, and the periods of automorph forms.Mem Am. Math. Soc. 49 (299), iv+116

[20] A VANDERPOORTEN, A proof that Euler missed. .Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. Math. Intelligencer 1, 195–203, (1978/79).

[21] W. STEIN, The Modular Forms Database. <http://modular.fas.harvard.edu/Tables, 2004>.livre :Explicitly Computing Modular Forms.

[22] YANG YIFAN, On differential equations satisfied by modular forms, Math. Z. 246 (2004), pp.1–19.

.