N° d'ordre : 45/2008-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Science et de la Technologie
Houari Boumediene
Faculté des Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En : **MATHEMATIQUES**

Spécialité : **GEOMETRIE**

Par : **Mlle MAOUCHE Amal**

Sujet :

THEORIE DES VALUATIONS

Soutenu publiquement le : 08/09/2008, devant le jury composé de

Mr.D.BEHLOUL	**Maître de Conférences, USTHB**	Président
Mr .K.BETINA	**Professeur, USTHB**	Directeur de thèse
Mr.S.M REZAOUI	**Maître de Conférences, USTHB**	Examinateur
Mr.Y.AIT AMRANE	**Maître de Conférences, USTHB**	Examinateur

Table des matières

3

Introduction **4**

1 Valuations et anneaux de valuations **6**
1.1 Anneaux de valuations 6
1.2 Valuations 10
1.3 Relation entre valuations et anneaux de valuations 12

2 Rang et rang rationnel **16**
2.1 Rang d'une valuation 16
2.2 Valuations discrètes 21
2.3 Rang rationnel d'une valuation 25

3 Valuations composées **28**
3.1 Composition de valuations 28
3.2 Arbre associé à une famille de valuations 33

4 Prolongement d'une valuation **36**
4.1 Extension algébrique 37
4.2 Extension transcendante 41

5 Surface de Riemann abstraite **47**
5.1 Centre d'une valuation 47
5.2 Surface de Riemann 49
5.3 Exemples 54

Bibliographie **55**

Je remercie profondément toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont aidée ou encouragée dans mes études.

Introduction

En géométrie algébrique et en théorie des nombres, une valuation est une "mesure" de multiplicité. C'est une généralisation, en algèbre, de la notion de "degré" ou "ordre" d'annulation d'un polynôme, alors qu'en analyse complexe, elle généralise la notion d'ordre d'un pôle ou d'un zéro (exemple 5.3.1, page 54). En théorie des nombres, les valuations traduisent la notion de "divisibilité" par un nombre premier, de sorte que dans un anneau factoriel A, tout élément s'écrit sous la forme $x = \prod_{p\ irrductible} p^{\nu_p(x)}$, et la divisibilité d'un élément $b \in A$ par un autre $a \in A$ se produit lorsque $\nu_p(a) \leqslant \nu_p(b)$ pour tout $p \in A$ irréductible. ν_p est appelée **valuation p-adique** (exemple 5.3.2, page 54).

C'est Dedekind et Weber qui introduisirent, en 1882, pour la première fois la notion de **places** d'un corps K, plus ou moins équivalente à la notion de valuations de K, pour étudier les courbes algébriques planes et fournir des démonstrations purement algébriques des constructions de Riemann.

En 1897, Hensel définit la valuation p-adique, et la **valeur absolue p-adique** $||\ q||_p = p^{-\nu_p(q)}$ sur $\mathbb{Q}$ qui lui permit de construire la complétion $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$. On put alors établir le premier parallèle historique entre le corps des fonctions rationnelles et le corps des nombres : Sur une courbe algébrique $\mathcal{C}$, on put associer à chaque point non-singulier x, une valuation ν_x qui attribue à chaque fonction rationnelle f/g son ordre d'annulation $\nu_x(f) - \nu_x(g)$. L'analogie $\{\nu_p,\ p$ irréductible$\} \leftrightarrow \{\nu_x,\ x$ non-singulier$\}$ suggéra d'ailleurs, la notion de complétion $\mathfrak{m}_x$-adique, et plus tard la henselisation et a ouvert de nombreux autres corps en algèbre commutative.

En 1931, alors qu'on étudiait jusque là les valuations multiplicatives qui généralisent la notion de valeur absolue, Krull définit et étudia pour la première fois la notion de **valuation générale** sur un corps abstrait K, qui diffère dans la définition, des **valuations discrètes** (définition 2.2.1, page 21), par le fait qu'elle prend ses valeurs dans un groupe totalement ordonné "abstrait".

C'est encore à l'aide des valuations, que Zariski put formuler, en termes purement algébriques une preuve, en caractéristique 0, de la résolution des singularités des variétés algébriques de dimension 2 et 3. Il dut, pour cela, définir une topologie sur la **surface abstraite de Riemann** S (définition 5.2.1, page 50), qui fit de S un espace quasi-compact, en général non séparé.
En géométrie algébrique, la théorie des valuations est largement tombée en disgrâce, en 1964, lorsque Hironaka a aboutit à une preuve , en caractéristique 0, de la résolution des singularité, où il ne fit nul usage des valuations. Le manque de succès qu'on rencontra en tentant d'adapter les techniques de Hironaka en caractéristique positif a néanmoins fait revivre la théorie des valuations.

Ce travail est consacré à énoncer les définitions et principaux résultats avec démonstrations, élémentaires pour comprendre cette théorie aux diverses applications comme on vient de le voir. On y parle d'anneaux de valuations, de leur lien avec des classes de valuations qu'on définira. On définira le rang et le rang rationnel d'une valuation et on expliquera de quelle façon ils contribuent à l'étude des anneaux de valuations. On s'intéressera à la composition et le prolongement des valuations ainsi qu'à la variété de Riemann abstraite que Zariski a utilisé pour obtenir une résolution des singularités en caractéristique 0. Des exemples seront donnés tout au long de ce mémoire.

Chapitre 1

Valuations et anneaux de valuations

Ce chapitre est consacré aux définitions et propriétés des valuations et anneaux de valuations. Nous montrerons que ces deux notions sont équivalentes.

1.1 Anneaux de valuations

Rappels et terminologie 1. Tous les anneaux, dans ce chapitre et toute la suite, sont supposés commutatifs et unitaires.

Un anneau est dit **local** s'il n'a qu'un seul idéal maximal. On notera parfois $(A, \mathfrak{m})$ ou $(A, \mathfrak{m}, k)$ pour un anneau local A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de **corps résiduel** $k = A/\mathfrak{m}$. L'ensemble des éléments inversibles d'un tel anneau est alors l'ensemble $A \setminus \mathfrak{m}$.
Spec A désignera l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau A.

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. Un élément $x \in G$ est dit **élément de torsion** s'il existe $n \in \mathbb{Z}^n$ tel que $nx = 0$. Un groupe G est dit **de torsion** si tout élément de G est de torsion. G est dit **sans torsion** si le seul élément de torsion de G c'est 0.

Soient $(G_1, \prec_1), (G_2, \prec_2), \dots, (G_n, \prec_n)$ des groupes totalement ordonnés. On appelle **ordre lexicographique** sur le groupe produit $G_1 \times G_2 \times \dots G_n$ l'ordre total défini comme suit : $(a_1, a_1, \dots, a_n) \prec (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 \prec_1 b_1 & ou \\ \exists i \in \{1, \dots, n-1\} \mid \; a_1 = b_1, \dots a_i = b_i & et \;\; a_{i+1} \prec_{i+1} b_{i+1}. \end{cases}$$

On notera $(G_1 \times G_2 \times \dots G_n)_{lex}$, le groupe $G_1 \times G_2 \times \dots G_n$ muni de cet ordre.

Définition 1.1.1. *Soient* $(A, \mathfrak{m}_A)$ *et* $(B, \mathfrak{m}_B)$ *deux anneaux locaux. On dit que* B ***domine*** A *si* $A \subset B$ *et* $\mathfrak{m}_B \cap A = \mathfrak{m}_A$.

Définition 1.1.2.– *Un sous-anneau (intègre)* V *d'un corps* K *est dit* ***anneau de valuation*** *s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *V est un anneau local de corps des fractions K ;*
2. *Tout sous-anneau local W de K distinct de K dominant V est égal à V (i.e. V est maximal parmi les sous-anneaux locaux de K, ordonnés par la relation "B domine A").*

– *Plus généralement, un anneau intègre est dit* ***anneau de valuation*** *s'il est anneau de valuation pour son corps des fractions.*

D'autres définitions équivalentes sont énoncées dans le théorème suivant. Ce dernier présente les principales propriétés d'un anneau de valuation.

Théorème 1.1.3. *Soit V un sous-anneau intègre d'un corps K. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est un anneau de valuation de K.*
2. *Pour tout $x \in K^*$; si $x \notin V$ alors $x^{-1} \in V$.*
3. *K est le corps des fractions de V et l'ensemble des idéaux de V est totalement ordonné par l'inclusion.*

Remarque 1.1.4. Ces autres propriétés découlent du théorème 1.1.3 :

– **Tout anneau de valuation est intégralement clos**, i.e. l'ensemble des éléments de K entiers sur V coïncide avec V. C'est une conséquence de l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2). Si $x \in K$ est entier sur V tel que $x \notin V$ alors $x^{-1} \in V$ car V est un anneau de valuation et x vérifie une équation polynômiale unitaire à coefficients dans V : $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. Si on pose $\alpha = -a_0 x^{-1} = x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$, alors dire que $x \notin V$ implique que $\alpha = -a_0 x^{-1} \notin V$ contradiction ! L'élément x est donc forcement dans V.

– **Tout idéal de type fini d'un anneau de valuation est principal** et l'ensemble des idéaux principaux d'un anneau de valuation est totalement ordonné par l'inclusion. En effet, soit $I =< a_1, \ldots, a_n >$ un idéal de type fini. D'après la proposition (3) du théorème 1.1.3, l'ensemble des idéaux principaux sont totalement ordonnés ; en particulier, $< a_1 >, \ldots, < a_n >$ le sont aussi. il existe par conséquent $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \; < a_i > \subseteq < a_j >$. Ainsi $I =< a_j >$.

Démonstration. (*du théorème* 1.1.3)
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $x \in K$. Si x est entier sur V, on considère l'anneau $W = V[x]$. Le théorème de Cohen-Seïndenberg (voir par exemple [2]) dit que si A et B sont deux anneaux tels que $A \subset B$ et B est entier sur A, alors $\forall P \in \mathit{Spec}\, A, \quad \exists Q \in \mathit{Spec}\, B$ tel que $P = Q \cap A$. De ce fait, étant donné que $V \subset W$ et que W est entier sur V, il existe $Q \in \mathit{Spec}\, W$ tel que $\mathfrak{m}_V = V \cap Q$, l'anneau W_Q domine donc l'anneau de valuation V, d'où $W_Q = V$ $(x \in W \subset W_Q \subset V)$.
Si x n'est pas entier sur V, on considère l'anneau $W = V[x^{-1}]$, x^{-1} ne peut être inversible dans W, sinon x serait entier sur V. Il existe alors un idéal maximal Q de W qui contient x^{-1} et on a le morphisme canonique surjectif :

$$\varphi : V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\rho} W/Q$$

est surjectif. Le corps W/Q est alors égal à $\rho\big(W\big) = \rho\big(\phi(V)\big)\Big[\rho(x^{-1})\Big] = \rho\big(\phi(V)\big)$; ($x^{-1} \in Q$ donc $\rho(x^{-1}) = 0$). Par conséquent $\rho\big(\phi(V)\big) = \varphi(V)$ est un corps et $\phi^{-1}(Q) = \varphi^{-1}(Q)$ est maximal dans V, on en déduit que $V \cap Q = \mathfrak{m}_V$. D'un coté on a $\mathfrak{m}_V \subset Q = \mathfrak{m}_{\,W_Q}$ et de l'autre, on a W_Q domine V, d'où $W_Q = V$ et $x^{-1} \in V$.
(2) $\Rightarrow$ (3) : D'après (2), K est le corps des fractions de V . Soient I et J deux idéaux de V. Supposons que $J \not\subset I$. Il existe un élément $\exists x \in J$ tel que $x \notin I$ et pour tout élément $y \in I$, nous avons $x \notin (y)V$. Par conséquent $\frac{x}{y} \in K \setminus V$, d'où $\frac{y}{x} \in V$, c.à.d. $y \in (x)V$ et donc $y \in J$.
(3) $\Rightarrow$ (1) : L'ensemble des idéaux de V étant totalement ordonné par l'inclusion implique que V est un anneau local. Soit W un sous-anneau local de K qui domine V. Montrons que $W \subseteq V$. Soit $x \in W$, $\exists\; a, b \in V$ tels que $x = a/b$. D'après (3) on a soit $(a) \subset (b)$ ou $(b) \subset [a)$. Si $(a) \subset (b)$ alors a s'écrit en fonction de b avec des coefficients dans V d'où $x = \frac{a}{b} \in V$. Si $(b) \subset [a)$ alors b s'écrit en fonction de a avec coefficients dans V, donc $x^{-1} = \frac{b}{a} \in V \subset W$; ainsi x et $x^{-1} \in W$ d'où x^{-1} est inversible dans W et x^{-1} n'appartient ni à $\mathfrak{m}_W$ (voir 1.3.4) ni à $\mathfrak{m}_V \subset \mathfrak{m}_W$, par conséquent x^{-1} est inversible dans V. x^{-1} et x sont donc tous les deux dans V. $\square$

Corollaire 1.1.5. *Si V est un anneau de valuation d'un corps K alors parmi n éléments de V il y en a un qui divise tous les autres.*

Démonstration. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont de tels éléments alors les idéaux $(a_1), \ldots, (a_n)$ étant totalement ordonnés, on a le résultat. $\square$

Corollaire 1.1.6. *Si V est un anneau de valuation d'un corps K tel que V contient un sous-anneau A de K alors V contient la clôture intégrale de A dans K.*

Démonstration. L'anneau V étant intégralement clos, tout élément x de K entier sur A est à fortiori entier sur V qui est égal à sa clôture intégrale. Donc $x \in V$. $\square$

La proposition qui va suivre, prouve l'existence d'un anneau de valuation pour tout corps K. Soient A un sous-anneau d'un corps K et L un corps algébriquement clos. Soit $h : A \longrightarrow L$ un homomorphisme d'anneaux.

Proposition 1.1.7. *Il existe un anneau de valuation V de K et un homomorphisme $\widetilde{h} : V \longrightarrow L$ tels que $V \supseteq A$ et $\widetilde{h}$ prolonge h avec $\widetilde{h}^{-1}(0) = \mathfrak{m}_V$.*

Corollaire 1.1.8. *Tout sous-anneau local de K est dominé par au moins un anneau de valuation de K.*

Démonstration. soit $(A, \mathfrak{m}_A, k)$ un sous-anneau local quelconque de K. En appliquant la proposition 1.1.7 au morphisme canonique $h : A \to \overline{k}$, où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de k, on conclut l'existence d'un anneau de valuation $V \supseteq A$ de K et d'un homomorphisme $\widetilde{h} : V \longrightarrow \overline{k}$ qui prolonge h tel que $\ker \widetilde{h} = \mathfrak{m}_V$. L'homomorphisme $\widetilde{h}$ étant un prolongement de h, on a $\ker \widetilde{h} \cap A = \ker h = \mathfrak{m}_A$, or $\ker \widetilde{h} = \mathfrak{m}_V$, d'où $\mathfrak{m}_V \cap A = \mathfrak{m}_A$: V domine donc A. On a bien l'existence d'un anneau de valuation pour K. $\square$

Démonstration. (*de la proposition* 1.1.7)
L'ensemble $\mathcal{H}$ des couples (B, f), où les B sont les sous-anneaux de K et les $f : B \to L$ sont les homomorphismes d'anneaux, est un ensemble ordonné, l'ordre étant

défini par :

$$(B, f) \preceq (C, l) \Leftrightarrow B \subset C \text{ } et \text{ } l \text{ } prolonge \text{ } f$$

$\mathcal{H}$ muni de cet ordre est un ensemble inductif, c.à.d. tout sous-ensemble totalement ordonné admet une borne supérieure. La borne supérieure d'un sous-ensemble fini $\{(B_\alpha, f_\alpha) \mid \alpha \in I \text{ fini }\}$ de $\mathcal{H}$ est donnée par $\left(\bigcup_\alpha B_\alpha, f\right)$ où $f_{|B_\alpha} = f_\alpha$. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{H}$ admet un élément maximal $(\mathfrak{B}, \mathfrak{f})$. Soit maintenant $\mathcal{P}$ le noyau de $\mathfrak{f} : \mathfrak{B} \to L$. D'après la propriété universelle des anneaux quotients, il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\mathfrak{h} : \mathfrak{B}_\mathcal{P} \to L$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[r] \arrow[d, hook] & L \\ \mathfrak{B}_{\mathcal{P}} \arrow[ur, dotted, "\mathfrak{h}"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif ($\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_\mathcal{P}$ défini par $a \mapsto a/1$). l'homomorphisme $\mathfrak{h}$ appartient à $\mathcal{H}$ et prolonge $\mathfrak{f}$, or $\mathfrak{f}$ est maximal, par conséquent $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\mathcal{P}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{f}$. En particulier, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\mathcal{P}$ est un anneau de valuation V (il suffit de montrer que si $x \in K$ alors, x ou x^{-1} est dans $V = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\mathcal{P}$, la démonstration est analogue à celle du 1)$\Rightarrow$ 2) du théorème 1.1.3). On a $\mathfrak{h}$ prolonge h et $\mathfrak{h}^{-1}(0) = \mathcal{P} = \mathfrak{m}_V$. $\square$

1.2 Valuations

Sauf mention contraire, dans toute la suite, Γ désignera un groupe commutatif totalement ordonné et additif. En particulier, Γ est sans torsion. Posons $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ avec $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \{0\}$ et $\alpha < \beta$ si et seulement si $\alpha - \beta \in \Gamma^-$ et $\beta - \alpha \in \Gamma^+$.
On obtient un groupe totalement ordonné Γ_∞ en adjoignant à Γ un élément ∞ plus grand que tous les autres éléments, et on fixe les conventions suivantes : $\infty + \infty = \infty$ et pour tout $\alpha \in \Gamma$, $\infty + \alpha = \infty$.

Définition 1.2.1. *Soit A un anneau. On appelle* ***valuation*** *de A à valeur dans Γ toute application $\nu : A \longrightarrow \Gamma_\infty$ qui vérifie pour tout $x, y \in A$:*

V-1 $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$;

V-2 $\nu(x + y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y))$;

V-3 $\nu(0) = +\infty$

Remarque 1.2.2. La condition [V-1] fait d'une valuation un homomorphisme du groupe $(A^*, \times)$ dans le groupe $(\Gamma, +)$ et en particulier on a $\nu(1) = 0$.

Si l'anneau A est intègre, une valuation de A peut se prolonger à son corps des fractions :

Proposition 1.2.3. *Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. Si ν est une valuation de A à valeurs dans Γ telle que pour tout $x \neq 0$, $\nu(x) = \infty$, alors il existe une unique valuation μ sur K qui prolonge ν.*
De plus, $\nu(K^*)$ est le sous-groupe de Γ engendré par $\nu(A^*)$.

Définition 1.2.4. *On appelle **groupe des ordres** ou **groupe des valeurs** de la valuation ν le sous-groupe $\nu(K^*)$ de Γ.*

Démonstration. [de la proposition 1.2.3] Pour tout $z \in K^*$, il existe $x, y \in A^*$ tels que $z = x/y$, il suffit alors de poser $\mu(z) = \nu(x) - \nu(y)$. Nous vérifions immédiatement que $\mu(z)$ ne dépend pas du représentant x/y et que μ ainsi définie est une valuation de K qui prolonge ν, et qu'elle est unique.
Il est par ailleurs clair que, par construction, $\mu(K^*)$ est un sous-groupe de Γ engendré par le sous-groupe $\nu(A^*)$.

□

Remarque 1.2.5. Si $\nu : A \longrightarrow \Gamma_\infty$ est une valuation sur l'anneau A, alors $\nu^{-1}(+\infty)$ est un idéal premier $\mathcal{P}$ de A appelé **support** de ν (en effet, soient $x, y \in A$, alors $xy \in \mathcal{P}$ implique que $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) = +\infty$, on a donc soit $\nu(x) = +\infty$, ou $\nu(y) = +\infty$, en d'autres termes, soit $x \in \mathcal{P}$, ou $y \in \mathcal{P}$). Il est facile de vérifier que l'application $\widetilde{\nu} : A/\mathcal{P} \to \Gamma_\infty$, déduite par passage au quotient, définit une valuation de l'anneau intègre $A/\mathcal{P}$. L'image réciproque $\widetilde{\nu}^{-1}(+\infty)$ est alors réduite à (0). Dans le cas où A est un corps, $\mathcal{P}$ ne peut être que l'idéal (0). En d'autres termes

$$\nu(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

Définition 1.2.6. *Une **valuation** sur un corps K est une application $\nu : K \to \Gamma_\infty$, vérifiant pour tout x, y dans K :*

W-1 $\quad \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$;

W-2 $\nu(x+y) \geqslant \min\big(\nu(x),\ \nu(y)\big)$;

W-3 $\nu(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$

Soit $\nu : A \longrightarrow \Gamma_\infty$ une valuation sur un anneau A. On a alors les propriétés, faciles à démontrer, suivantes :

Propriétés 1.2.7.

1. $\nu(1) = \nu(-1) = 0$;
2. Pour tout $x \in A$ tel que $x^n = 1$, $\nu(x) = 0$;
3. Pour tout $x \in A$, $\nu(x) = \nu(-x)$;
4. Pour tout élément inversible $x \in A$, $\nu(x^{-1}) = -\nu(x)$;
5. Pour tout $x, y \in A$, $\nu(x) < \nu(y)$ implique $\nu(x+y) = \nu(x)$.

Plus généralement que la propriété 5, on a :

Proposition 1.2.8. *(1) Pour toute famille finie d'éléments $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de A :*

$$\nu\Big(\sum_1^n x_i\Big) \geqslant \min_{i=1,\ldots,n} \nu(x_i).$$

(2) S'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\forall i \neq k \quad \nu(x_k) < \nu(x_i)$ alors

$$\nu\Big(\sum_1^n x_i\Big) = \nu(x_k).$$

Démonstration. (1) se démontre facilement par récurrence sur n en utilisant la propriété [V-2].
(2) Grâce à (1), on peut se ramener au cas $n = 2$ déjà démontrée plus haut (propriété 5). □

1.3 Relation entre valuations et anneaux de valuations

Soit K un corps.

Proposition 1.3.1. *Soit $\nu : K^* \longrightarrow \Gamma$ une valuation sur K. Le sous-ensemble $V = \{x \in K \mid \nu(x) \geqslant 0\}$ de K est un anneau de valuation de K d'idéal maximal $\{x \in K \mid \nu(x) > 0\}$.*
Réciproquement, Si V est un anneau de valuation de K, on peut trouver une valuation ν de K à valeurs dans Γ qui vérifie $V = \nu^{-1}(\Gamma^+)$.

Remarque 1.3.2. En dehors de la relation existante entre un anneau de valuation d'un corps et une valuation sur ce corps, la proposition 1.3.1 adjointe à la proposition 1.1.7 prouve l'existence d'une valuation pour tout corps K.

Démonstration. D'après les axiomes qui définissent une valuation, V est un anneau de valuation de K :
Soit $x \in K$, alors soit $\nu(x) \geq 0$ ou $\nu(x) \leq 0$, ceci revient à dire qu'on a soit $\nu(x) \geq 0$ ou $\nu(\frac{1}{x}) \geq 0$, c.à.d. soit $x \in V$ soit $x^{-1} \in V$. D'où V est un anneau de valuation de K. Si $x \in K$ tel que $x, x^{-1} \in V$ alors $\nu(x) \geq 0$ et $-\nu(x) \geq 0$, par conséquent $\nu(x) = 0$ et $V \setminus \{x \in K \ / \ \nu(x) = 0\}$ est l'ensemble des éléments inversibles de V. L'idéal maximal de V est donc $\{x \in K \ / \ \nu(x) > 0\}$ (remarque 1.3.4).
Réciproquement, soit V un anneau de valuation. Construisons une valuation $\nu : K^* \longrightarrow \Gamma$ telle que $V = \{x \in K \ / \ \nu(x) \geq 0\}$. Commençons par décrire son groupe des ordres : soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de tous les idéaux principaux (par rapport à la multiplication) de V, différents de V. Posons

$$\Gamma = \mathcal{H} \coprod \{0\} \coprod -\mathcal{H},$$

et $\nu_{|V^*} : V^* \longrightarrow \Gamma$ telle que

$$\nu_{|V^*}(x) = (x) \in \mathcal{H},$$

$$\nu(0) = +\infty \quad \text{et}$$

$$\nu(\frac{x}{y}) = \nu_{|V^*}(x) - \nu_{|V^*}(y).$$

V étant un anneau de valuation, les idéaux principaux de V sont totalement ordonnés par l'inclusion : Posons

$$(a) \preceq (b) \Leftrightarrow (a) \supset (b) \Leftrightarrow \exists \alpha \in V \mid b = \alpha a.$$

Soient $a, b \in V$, alors soit $(a) \subset (b)$ ou $(b) \subset (a)$. Supposons par exemple que $(b) \subset (a)$. On a $\nu(ab) = (ab) = (a) + (b)$ et $\nu(a+b) = (a+b) \geqslant min\big((a),(b)\big) = (b)$ (car $a + b \in (a)$ et donc $(a+b) \subset (a)$). L'application ν ainsi définie est donc la valuation de K qu'on recherchait. $\square$

Définition 1.3.3. *L'anneau de valuation associé à une valuation ν de K est appelé* ***anneau de valuation*** *de ν.*

Notation 1. Dans toute la suite, $\mathcal{R}_\nu$ désignera l'anneau d'une valuation ν d'un corps K :

$$\mathcal{R}_\nu = \{x \in K \ \mid \ \nu(x) \geq 0\},$$

et $\mathfrak{m}_\nu$ son idéal maximal :

$$\mathfrak{m}_\nu = \{x \in K \ \mid \ \nu(x) > 0\}.$$

Quant à k_ν, il désignera le corps résiduel $\mathcal{R}_\nu/\mathfrak{m}_\nu$ de $\mathcal{R}_\nu$ et Γ_ν le groupe des valeurs de ν.
Le groupe des valeurs de ν sera, dans toute la suite, supposé égal à $\nu(K^*)$:

$$\Gamma_\nu = \nu(K^*).$$

Il arrivera qu'on note $\mathfrak{m}_V$ l'idéal maximal d'un anneau de valuation V pour un corps. On supposera dans toute la suite $\Gamma_\nu = \nu(K^*)$.

Remarque 1.3.4. L'ensemble $\mathcal{U}(V)$ des éléments inversibles d'un anneau de valuation V est égal à $V \setminus \mathfrak{m}_V$; en d'autres termes, si ν est la valuation associée à V, alors $\mathcal{U}(V) = \{x \in V \mid \nu(x) = 0\}$.

Proposition 1.3.5. *Si $\mathcal{U}(\mathcal{R}_\nu)$ est l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{R}_\nu$ alors :*

$$\Gamma_\nu \cong K^*/\mathcal{U}(\mathcal{R}_\nu).$$

Démonstration. Définissons sur K^* la relation de divisibilité :

$$x|y \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathcal{R}_\nu \ / \ y = ax \quad \Leftrightarrow \quad y \in (x)\mathcal{R}_\nu.$$

Cette relation est une relation d'ordre sur $K^*/\mathcal{U}(\mathcal{R}_\nu)$:

$$x \preceq y \Leftrightarrow x|y.$$

Cet ordre est total (si $x/y, x'/y' \in K^*$, alors xy' et $x'y$ sont dans $\mathcal{R}_\nu$. On a donc soit $(xy') \subset (x'y)$ ou $(x'y) \subset (xy')$. On en déduit que soit $x'y \in (xy')\mathcal{R}_\nu$ ou $xy' \in (x'y)\mathcal{R}_\nu$). On a :

$$y \succeq x \Rightarrow \nu(y) \geqslant \nu(x),$$

d'où l'isomorphisme de groupes ordonnés : $\nu : K^*/\mathcal{U}(\mathcal{R}_\nu) \longrightarrow \Gamma_\nu = \nu(K^*)$. □

La valuation ν associée à un anneau de valuation V de K n'est pas tout à fait unique, mais si ν' est une autre valuation de K d'anneau de valuation V, et si Γ, Γ' sont respectivement les groupes des ordres de ν et ν', alors il existe un isomorphisme $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ tel que $\nu' = \varphi \circ \nu$:

Définition 1.3.6. *Deux valuations ν et ν' de K sont dites* ***équivalentes*** *s'il existe un isomorphisme de groupe $\phi : \Gamma_\nu \longrightarrow \Gamma_{\nu'}$ qui préserve l'ordre et vérifie $\nu' = \phi \circ \nu$.*

Proposition 1.3.7. *Deux valuations ν et ν' sont* ***équivalentes*** *si et seulement si elles ont le même anneau de valuation.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$: évident.
$(\Leftarrow)$: $\mathcal{R}_\nu = \mathcal{R}_{\nu'} = A$ implique que $\Gamma_\nu \backsimeq \frac{K^*}{\mathcal{U}_A} \backsimeq \Gamma_{\nu'}$. □

Remarque 1.3.8. La précédente proposition établit que tout anneau de valuation définit une seule valuation à équivalence près, nous pouvons donc penser que les anneaux de valuations et les valuations sont deux aspects d'une même chose.

Définition 1.3.9. *Soient $k \subset K$ une extension de corps et ν une valuation de K. On dit que ν est une* ***valuation sur*** *K/k si la restriction de ν à k est triviale, i.e. $\forall x \in k^* : \nu(x) = 0$.*

Remarque 1.3.10. Dire d'une valuation ν sur un corps K qu'elle est une valuation sur K/k revient à dire que son anneau $\mathcal{R}_\nu$ est une k-algèbre ($k \subset \mathcal{R}_\nu$).
L'image de l'application naturelle $k \hookrightarrow \mathcal{R}_\nu$ est incluse dans $\mathcal{U}(\mathcal{R}_\nu)$, et en particulier on a $k \subset k_\nu$.

◊

Chapitre 2

Rang et rang rationnel

2.1 Rang d'une valuation

Soit ν une valuation à valeurs dans un groupe abélien totalement ordonné Γ.

Définition 2.1.1. *Un sous-ensemble non vide Δ de Γ est dit* ***segment*** *de Γ si $\forall \alpha \in \Delta$, $\forall \beta \in \Gamma$ tels que l'on ait soit $-\alpha < \beta < \alpha$ ou $\alpha < \beta < -\alpha$, alors $\beta \in \Delta$. Cela revient à dire que $\forall\ \alpha \in \Delta^+$ et $\forall\ \beta \in \Gamma$ tels que $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ alors $\beta \in \Delta^+$.*

Définition 2.1.2. *Un segment $\Delta \subsetneq \Gamma$ est dit* **sous-groupe isolé** *de Γ s'il est en plus un sous-groupe de Γ.*

L'ensemble des sous-groupes isolés de Γ est, par définition, totalement ordonné par inclusion.

Définition 2.1.3. *On appelle* ***rang*** *de ν ou* ***rang*** *de Γ_ν le nombre de sous-groupes isolés de Γ_ν. Ce nombre peut-être infini. Il est noté $\mathrm{rg}(\nu)$ ou $\mathrm{rg}(\Gamma_\nu)$.*

Le théorème qui va suivre décrit une analogie entre l'ensemble des sous-groupes isolés de Γ et *Spec*$\mathcal{R}_\nu$. Ça permettra de déterminer le rang d'une valuation ν comme étant la dimension de Krull de son anneau $\mathcal{R}_\nu$.

Notation 2. Soit E un sous-ensemble de l'anneau R_ν. On note $\Delta_E = \Gamma \backslash \{\pm\, \nu(x) \mid x \in E \setminus \{0\}\}$. Il est évident que si $E \subset E'$ alors $\Delta_{E'} \subset \Delta_E$.

Théorème 2.1.4. *Un sous-ensemble $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}_\nu$ est un idéal de $\mathcal{R}_\nu$ différent de $\mathcal{R}_\nu$ si et seulement si $\Delta_{\mathcal{I}}$ est un segment de Γ. De plus, l'application $\mathcal{I} \mapsto \Delta_{\mathcal{I}}$ est une bijection qui renverse l'ordre d'inclusion. Et on a $\mathcal{I}$ est premier si et seulement si $\Delta_{\mathcal{I}}$ est un sous-groupe isolé de Γ.*

Démonstration. L'ensemble $\Delta_{\mathcal{I}}$ n'est pas vide car $(0 \in \Delta_{\mathcal{I}})$, il est différent de Γ (car si $x \in \mathcal{I}$ alors $\nu(x) \notin \Delta_{\mathcal{I}}$). Montrons que $\Delta_{\mathcal{I}}$ est un segment : montrons donc que si $\alpha \notin \Delta_{\mathcal{I}}^+$, $\forall \beta \in \Gamma$ tel que $\alpha < \beta$ alors $\beta \notin \Delta_{\mathcal{I}}^+$.
Comme $\alpha \notin \Delta_{\mathcal{I}}^+$, il existe $x \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha = \nu(x)$. D'un autre coté, $\alpha < \beta$ implique que $\beta - \alpha \in \nu(\mathcal{R}_\nu)$, en d'autres termes, il existe $z \in \mathcal{R}_\nu$ tel que $\beta - \alpha = \nu(z)$. On a donc $\beta = \nu(x) + \nu(z) = \nu(xz)$. Étant donné que $\mathcal{I}$ est un idéal, $x \in \mathcal{I}$ implique que $xz \in \mathcal{I}$ et $\beta \in \nu(\mathcal{I})$. Par conséquent, $\beta \notin \Delta_{\mathcal{I}}^+$. Réciproquement, l'ensemble $\mathcal{I} = \{x \in \mathcal{R}_\nu \mid \nu(x) \notin \Delta\}$ associé à un segment Δ, est un idéal de $\mathcal{R}_\nu$: En effet, soient $x \in \mathcal{I} \subset \mathcal{R}_\nu$, et $y \in \mathcal{R}_\nu$. On a alors $\nu(x) \geqslant 0$ et $\nu(y) \geqslant 0$, de plus $\nu(x) \notin \Delta$. Il en découle que $\nu(x) + \nu(y) \notin \Delta$ (dans le cas contraire, on aurait $[0, \nu(x) + \nu(y)] \subset \Delta$, et comme $[0, \nu(x)] \subset [0, \nu(x) + \nu(y)]$ alors $[0, \nu(x)] \subset \Delta$. Contradiction avec $\nu(x) \notin \Delta$). La valeur $\nu(xy)$ n'appartient donc pas à Δ, ce qui revient à dire que $xy \in \mathcal{I}$. Soient maintenant x et y dans $\mathcal{I}$. On a $\nu(x)$ et $\nu(y) \notin \Delta$. Comme $\nu(x+y) \geqslant \min(\nu(x),\ \nu(y))$, alors $\nu(x+y) \notin \Delta$, d'où $x + y \in \mathcal{I}$, ce qui fait de $\mathcal{I}$.
Le renversement de l'ordre est une conséquence de la relation $I \subset J \Rightarrow \Delta_{\mathcal{I}} \supset \Delta_{\mathcal{J}}$. Par ailleurs, on a $\mathcal{I} \in \mathit{Spec}(\mathcal{R}_\nu))$ si et seulement si $\mathcal{R}_\nu \backslash \mathcal{I}$ est stable par multiplication, c.à.d. si et seulement si $\nu(\mathcal{R}_\nu \setminus \mathcal{I})$ est stable par addition. Donc $\mathcal{I} \in \mathit{Spec}(\mathcal{R}_\nu))$ si et seulement si $\Delta_{\mathcal{I}}$ est un sous-groupe isolé de Γ. Il en découle qu'on a une bijection entre les idéaux premiers de $\mathcal{R}_\nu$ et les sous-groupes isolés de Γ_ν qui renverse l'ordre d'inclusion et que le cardinal de $\mathit{Spec}\,\mathcal{R}_\nu$ est égal à $\mathit{rg}(\nu)$. □

Rappel 1. Rappelons que la **dimension** (de Krull) d'un anneau A est le nombre maximal de ses idéaux premiers propres formant une chaîne croissante par l'inclusion. Rappelons aussi que les idéaux premiers d'un anneau de valuation sont totalement ordonnés par inclusion (1.1.3- 3).

Corollaire 2.1.5. *Le **rang** d'une valuation ν est égal à la dimension de son anneau* *de valuation $\mathcal{R}_\nu$:*

$$\mathrm{rg}(\nu) = \dim R_\nu$$

Remarque 2.1.6. L'idéal maximal $\mathfrak{m}_\nu$ est l'idéal premier associé au sous-groupe isolé $\Delta_{\mathfrak{m}_\nu} = \{0\}$, et l'idéal (0) est quant à lui associé à $\Delta_{(0)} = \Gamma$.

Nous allons à présent décrire une autre analogie : une bijection entre l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{R}_\nu$ et l'ensemble des sous-anneaux locaux de K contenant $\mathcal{R}_\nu$. Au passage, cela nous permettra d'affirmer que le **rang** d'une valuation ν de K est égal au nombre des sous-anneaux locaux de K contenant $\mathcal{R}_\nu$.

Proposition 2.1.7. *Soit V un anneau de valuation d'un corps K. On a les propositions suivantes :*

1. *Tout sous-anneau local B de K contenant V ($V \subset B \subset K$) est un anneau de valuation de K.*
2. *L'idéal maximal $\mathfrak{m}_B$ est un idéal premier de V*
3. *L'application $\varphi : P \mapsto V_P$ de l'ensemble des idéaux premiers P de V dans l'ensemble des sous-anneaux locaux de K contenant V est une bijection décroissante.*

Démonstration.

1. Soit $x \in K$. Si $x \notin B$ alors $x \notin V$, comme V est un anneau de valuation, $x^{-1} \in V$. Par conséquent $x^{-1} \subset B$. L'anneau B est donc un anneau de valuation (théorème 1.1.3).
2. Soit $x \in \mathfrak{m}_B$, donc $x^{-1} \notin B$ et $x^{-1} \notin V$ d'où $x \in \mathfrak{m}_V$ (voir remarque 1.3.4). On a donc $\mathfrak{m}_B \subset \mathfrak{m}_V \subset V$. De l'autre coté, comme $\mathfrak{m}_B$ est un idéal premier de B, il est aussi un idéal premier de V.
3. Montrons que l'image inverse φ^{-1} de notre application φ est $B \mapsto \mathfrak{m}_B$. Tout d'abord, φ^{-1} est bien définie puisque d'après (2) $\mathfrak{m}_B$ est premier dans V. Soit B un anneau local contenant V. On a $\varphi\varphi^{-1}(B) = \varphi(\mathfrak{m}_B) = V_{\mathfrak{m}_B}$. Montrons que $V_{\mathfrak{m}_B} = B$. L'inclusion $\mathfrak{m}_B \subset \mathfrak{m}_V$ implique $V_{\mathfrak{m}_B} \subset B_{\mathfrak{m}_B} = B$ (rappelons que si I est un idéal premier d'un anneau A, alors $A_I = \{\frac{a}{i} \mid a \in A,\ i \notin I\}$). D'un autre coté, soit $x \in B$, si $x \in V$ alors $x \in V_{\mathfrak{m}_B}$ et si $x \in B \backslash V$ on a $x^{-1} \in V \subset B$, d'ou $x^{-1} \notin \mathfrak{m}_B$ (voir remarque 1.3.4). par conséquent $x = \frac{xx^{-1}}{x^{-1}} = \frac{1}{x^{-1}} \in V_{\mathfrak{m}_B}$. On en déduit que $\varphi\varphi^{-1}(B) = B$.

Réciproquement, soit P un idéal premier de V. On a alors $\varphi^{-1}\varphi(P) = \varphi^{-1}(V_P) = \mathfrak{m}_{V_P} = PV_P$.

□

Corollaire 2.1.8. *L'ensemble des sous-anneaux locaux de K contenant V est totalement ordonné par inclusion. Leur nombre est égal au rang de la valuation associée à V.*

C'est une conséquence directe du fait que l'ensemble des idéaux premiers de V soit totalement ordonné (théorème 1.1.3).
On déduit de la démonstration de la proposition 2.1.7, le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.9. *Tout sous-anneau local de K contenant un anneau de valuations V de K est un anneau de valuation égal à $V_{\mathcal{P}}$ pour un idéal premier $\mathcal{P}$ de V, son idéal maximal est l'idéal $\mathcal{P}V_{\mathcal{P}}$.*

Remarque 2.1.10. Soit V un anneau de valuation d'un corps K associé à une valuation ν de rang fini r.
Pour $i = 1, \ldots, r$ notons $\mathcal{P}_i$, V_i et Δ_i respectivement les idéaux premiers de V, les sous-anneaux locaux de K contenant V et les sous-groupes isolés de Γ_ν le groupe des ordres de ν. On a vu que :

$$\mathcal{P}_i = \mathfrak{m}_{V_i} \ ; \quad V_i = V_{\mathcal{P}_i} \ ; \quad \Delta_i = \Delta_{\mathcal{P}_i}.$$

Rappelons que pour tout $i = 0, \ldots, r$ on a $\Delta_i = \Delta_{\mathcal{P}_i} = \Gamma \setminus \{\pm\nu(x) \mid x \in \mathcal{P}_i \setminus \{0\}\}$, $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{\Delta_i} = \{x \in V \mid \nu(x) \notin \Delta_i\}$ et $V_i = V_{\mathcal{P}_i}$.
Les idéaux $\mathcal{P}_i$ sont totalement ordonnés (théorème 1.1.3). Supposons alors que les indices $i \in \{1, \ldots, r\}$ sont ordonnés de façon à ce que $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_r = \mathfrak{m}_V$. On a alors :

$$(0) = \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_r = \mathfrak{m}_V \ ; \tag{2.1}$$

$$K = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_r = V \ ; \tag{2.2}$$

$$et \ \ \Gamma_\nu = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_r = (0); \tag{2.3}$$

Si, pour tout $i = 0, \ldots, r$, on note ν_i la valuation de K associée à l'anneau V_i et Γ_i son groupe des valeurs, alors $\Gamma_i \simeq \Gamma/\Delta_i$ et ν_i est la composée de la valuation $\nu : K^* \longrightarrow \Gamma$ et de l'homomorphisme canonique $\theta_i \ : \ \Gamma \longrightarrow \Gamma_i = \Gamma/\Delta_i$:

Proposition 2.1.11. *Soit V l'anneau d'une valuation ν sur un corps K. Soit $\mathcal{P}_i$ un idéal premier de V et $\Delta_i = \Delta_{\mathcal{P}_i}$. Alors la valuation associée à l'anneau de valuation $V_i = V_{\mathcal{P}_i}$ est donnée par $\nu_i = \theta_i \circ \nu$, où $\theta_i : \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Delta_i$ est l'homomorphisme canonique.*

Démonstration. Le sous- groupe Δ_i étant isolé, Γ/Δ_i est un groupe ordonné avec $\overline{a} \leqslant \overline{b} \Rightarrow \exists d \in \Delta_i \mid a \leqslant b + d$. Il est très facile de vérifier que ν_i ainsi définie est une valuation. Il suffit donc de montrer que $V_i = V_{\mathcal{P}_i}$: On a $V_i = \{x \in K \mid \nu_i(x) \geqslant 0\} = \{x \in K \mid \theta_i \circ \nu(x) \geqslant 0\}$.
$\subset$) : Soit $x \in K$, $x = a/b$ tel que $a, b \in V^*$ et $b \neq 0$. Comme $x \in V_i$, on a $\nu_i(x) = \theta_i\big(\nu(a) - \nu(b)\big) = \theta_i\big(\nu(a)\big) - \theta_i\big(\nu(b)\big)$ positif dans Γ/Δ_i. Il existe donc $d \in \Delta_i$ tel que $\nu(a+d) \geqslant \nu(b)$. L'élément d étant dans Δ_i, il existe $y \in K$ tel que y, $y^{-1} \notin \mathcal{P}_i$ et $d = \nu(y)$. Donc $\nu(a) + \nu(y) \geqslant \nu(b)$ et $\nu(a/b) \geqslant \nu(y^{-1})$ d'où $a/b \in (y^{-1})V$. Par ailleurs, on a $y \in V$ ou $y^{-1} \in V$; si $y \in V$ alors $a/b \in (y^{-1})V \subset V_{\mathcal{P}_i}$ (car $y \notin \mathcal{P}_i$) et si $y^{-1} \in V$ alors $a/b \in V \subset V_{\mathcal{P}_i}$.
$\supset$) : Soit $a/b \in V_{\mathcal{P}_i}$, on a alors $b \notin \mathcal{P}_i$ i.e. $\nu(b) \in \Delta_i$, donc $\theta_i\big(\nu(b)\big) = 0$. On en déduit que $\nu_i(a/b) = \theta_i\big(\nu(a)\big) \geqslant 0$, d'où $a/b \in V_i$. □

EXEMPLE . 2.1.12. *La* ***valuation triviale*** *d'un corps K, i.e. la valuation définie par $\nu(x) = 0$ pour tout $x \in K^*$, est l'unique valuation de rang zéro.*

EXEMPLE . 2.1.13. *Soient k un corps et x, y deux indéterminées. On définit une valuation sur $k(x, y)$ à valeurs dans $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_{|lex}$ en posant :*

$$\nu(x) = (1, 0) \quad , \quad \nu(y) = (0, 1),$$

et pour tout $f = \sum a_{ij} x^i y^j \in k[x, y]$:

$$\nu(f) = \inf\{(i, j) \mid a_{ij} \neq 0\}.$$

c'est bien une valuation (voir l'exemple 4.2.5). Son anneau de valuation $\mathcal{R}_\nu$ est

égal au sous-anneau de $k(x,y)$ engendré par les monômes de la formes x^iy^j tels que $i \geqslant 0$ et les monômes de la forme y^j avec $j \geqslant 0$, en effet :
Un élément $\frac{f}{g} \in k(x,y)$ s'écrit sous la forme

$$\frac{\sum a_{ij}x^iy^j}{\sum b_{kl}x^ky^l}.$$

Supposons que $\nu(f) = (r,s)$ et $\nu(g) = (n,m)$, alors :

$$(r,s) \geqslant (n,m) \Leftrightarrow \begin{cases} r \geqslant n & s \text{ quelconque , ou} \\ r = n \text{ et } s \geqslant m. \end{cases}$$

Si $r \geqslant n$, alors f/g peut s'écrire sous la forme $\frac{f}{g} = x^{r-n}y^j\frac{f'}{g'}$, $\frac{f'}{g'} \in k[x,y]$ et si $s \geqslant m$, $\frac{f}{g}$ s'écrit $\frac{f}{g} = y^{s-m}\frac{f''}{g''}$, $\frac{f''}{g''} \in k(x,y)$. Par conséquent $\mathcal{R}_\nu$ est inclus dans le sous-anneau de $k(x,y)$ engendré par les monômes de la forme x^iy^j tels que $i \geqslant 0$ et les monômes de la forme y^j avec $j \geqslant 0$. Par ailleurs, si $i \geqslant 0$, alors $\nu(x^iy^j) \geqslant 0$ et si $j \geqslant 0$, $\nu(y^j) \geqslant 0$. De la même façon on démontre que son idéal maximal est l'idéal engendré par les monômes de la formes x^iy^j tels que $i > 0$ et les monômes de la forme y^j avec $j > 0$.
Un élément de $\mathcal{R}_\nu$ peut toujours s'écrire sous la forme f/g avec $f = a_i(y)x^i + \cdots + a_n(y)x^n$ et $g = b_0(y) + \cdots + b_m(y)x^m$ tel que $a_i(y)b_0(y) \neq 0$ avec soit $j > 0$ soit $\nu(a_i(y)) \geqslant \nu(b_0(y))$. Donc $\mathcal{R}_\nu$ est un sous-anneau de l'anneau local $k[x,y]_x$ dont le seul idéal premier non trivial est l'idéal (x), celui-ci correspond au sous-groupe isolé $\{0\} \times \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z} \times Z$. Alors la valuation $\nu_{(x)}$ décrite dans la proposition 2.1.11 est la valuation $\nu_{(x)} = \theta \circ \nu$, où $\theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est la première projection.

2.2 Valuations discrètes

Définition 2.2.1. *Une valuation ν est **discrète** si son groupe des ordres $\Gamma = \nu(K^*)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^k$. En particulier, si $k = 1$, on dit que ν est une valuation **discrète de rang** 1 et que son anneau de valuation est discret de rang 1.*

Proposition 2.2.2. *Soit $A \subset K$ un sous-anneau qui ne soit pas un corps. On a alors équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *A est l'anneau d'une valuation de rang 1 ;*
2. *A est un anneau de valuation et ses idéaux premiers se réduisent à (0) et*

$\mathfrak{m}_A$;

3. *A est maximal parmi les sous-anneaux de K distincts de K.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) : C'est une conséquence directe des inclusions (2.1),(2.2) et (2.3) page 19.
3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) : Soit A maximal parmi les sous-anneaux de K distinct de K. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Si $V \neq K$ est un anneau de valuation qui domine $A_\mathfrak{m}$ alors $A \subset A_\mathfrak{m} \subset V \subset K$, or A est maximal, d'où $A = A_\mathfrak{m} = V$ (V existe, corollaire 1.1.8). L'anneau A est donc un anneau de valuation de K. De plus, comme A est maximal alors ses idéaux premiers sont $\{0\}$ et $\mathfrak{m}$ et $rg\, A = 1$ (voir (2.1) et (2.2) page 19). □

Proposition 2.2.3. *Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné différent de (0). Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$rg(\Gamma) = 1$;*
2. *Γ **archimédien** (ie. $\forall x > 0$ avec $x, y \in \Gamma$ alors il existe $n \geqslant 0$ tel que $y < nx$, ou encore Γ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$).*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) : Soit $x > 0$. Posons $\mathcal{H}_x = \{y \in \Gamma \mid \exists n \geqslant 0 \ : \ |y| \leqslant nx\}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{H}_x$ est un sous-groupe isolé de Γ et que si Δ est un sous-groupe isolé contenant x alors $\mathcal{H}_x \subset \Delta$. Donc $\mathcal{H}_x$ est le plus petit sous-groupe isolé contenant x. le fait que $rg(\nu) = 1$ indique que le seul sous-groupe isolé de Γ est (0), or $\mathcal{H}_x \neq (0)$ car $x \in \mathcal{H}_x$, d'où $\mathcal{H}_x = \Gamma$.
2) $\Rightarrow$ 1) : Si Γ archimédien alors $\Gamma = \mathcal{H}_x$, et ce pour tout $x > 0$. Soit Δ un sous-groupe isolé de Γ différent de (0), il existe alors $x_0 > 0$ tel que $\mathcal{H}_{x_0} \subset \Delta$, d'où $\Delta = \Gamma$, et $rg(\nu) = 1$. □

Proposition 2.2.4. *Soit A un anneau local intègre de corps de fractions K. Il y' a équivalence entre les propositions suivantes :*

1. *A est un anneau de valuation discrète de rang 1 ;*
2. *A est principal ;*
3. *$\mathfrak{m}_A$ est principal et A est noéthérien ; ;*
4. *A est un anneau de valuation noéthérien.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) : Soit ν la valuation discrète associée à A. Soit $t \in A$ tel que $\nu(t) = 1$. Un tel élément existe car le groupe des ordres de ν est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathfrak{m}_A$ non nul, $\nu(x) > 0$, il existe donc $n > 0$ tel que $\nu(x) = n$. Par conséquent $\nu(\frac{x}{t^n}) = \nu(x) - n\nu(t) = 0$. Donc pour tout élément non nul $x \in \mathfrak{m}_A$, on peut écrire $x = ut^n$ où u est un élément inversible de A (i.e. $\nu(u) = 0$). En particulier, $\mathfrak{m}_A = tA$ pour tout $t \in A$ tel que $\nu(t) = 1$.
Maintenant, soit $I \neq (0)$ un idéal quelconque de A. Soit $\Delta = \{\nu_A(x) \mid x \in I \setminus \{0\}\}$, les éléments de Δ sont tous positifs ($I \subset A$) et admettent un plus petit élément n. Si $n = 0$, alors I contient un élément inversible de A et ne peut donc être inclus dans $\mathfrak{m}_A$, d'où $I = A$. Si maintenant $n > 0$, alors il existe $x \in I$ tel que $\nu(x) = n$ avec $I \subset \mathfrak{m}_A = tA$. On en déduit que $I = t^n A$. D'où A est principal.
2) $\Rightarrow$ 3) : évident.
3) $\Rightarrow$ 4) : Posons $\mathfrak{m} = \max A = (t)$ avec $t \in A$. A est noéthérien donc $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{m}^n = (0)$, ($\mathfrak{m}^0 = A$). On peut alors définir la valuation $\mu : K^* \to \mathbb{Z}$ telle que $\forall x \in A$:

$$\mu(x) = \max\{n \mid x \in \mathfrak{m}^n\}.$$

On a $\mu(x) \geqslant m$ si et seulement si $x \in \mathfrak{m}^m$. On a par ailleurs que tout élément $x \in A$ s'écrit $x = ut^n$ avec u inversible dans A et $n = \mu(x) \in \mathbb{N}$. Et tout élément $y \in K$ s'écrit $y = u't^m$ avec u' inversible dans A et $m = \mu(y) \in \mathbb{Z}$. On a bien $A = \{x \in \mathcal{R}_\mu \mid \mu(x) \geqslant 0\}$, d'où A est un anneau de valuation.
4) $\Rightarrow$ 1) : Soit ν la valuation associée à l'anneau noéthérien A. Supposons $rg\,\nu > 1$. Soit $\alpha \in \Delta^+$. Comme Δ est un groupe, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $n\alpha \in \Delta$. Soit $\beta \in \Gamma^+ \setminus \Delta$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \beta > n\alpha$ (car Δ est un segment). On a une chaîne strictement décroissante :

$$\beta > \beta - \alpha > \cdots > \beta - n\alpha > \dots$$

d'éléments positifs, d'où une chaîne strictement décroissante de segments de Γ et donc une chaîne infinie strictement croissante d'idéaux de A, ce qui contredit le fait que A soit noéthérien.
D'autre part, A noéthérien implique que toute suite croissante d'idéaux de A se stabilise, par conséquent, toute suite décroissante de segments de Γ se stabilise aussi. Il existe alors, un plus petit élément $\alpha \in \Gamma^+$. On a $\{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe isolé de Γ (en effet, c'est clairement un sous-groupe de Γ et s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $n\alpha < \gamma < (n+1)\alpha$, alors $0 < \gamma - n\alpha < \alpha$, ce qui contredit le fait que α soit minimal, c'est donc aussi un segment). Comme $rg\,\nu = 1$ alors $\Gamma = \{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. $\square$

Corollaire 2.2.5. *L'anneau de valuation R_ν est noéthérien si et seulement si le* *groupe des valeurs* Γ *de* ν *est isomorphe à* $\mathbb{Z}$.

Remarque 2.2.6. Soit ν une valuation discrète de rang 1 de K. On a vu dans la démonstration de la précédente proposition que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\nu$ est engendré par tout élément $t \in \mathcal{R}_\nu$ tel que $\nu(t) = 1$, et que tout élément $y \in K$ s'écrit sous la forme $y = ut^n$, où $u \in \mathcal{R}_\nu \setminus \mathfrak{m}$ et $n \in \mathbb{Z}$, et on a $\nu(y) = n$. La valuation ν vérifie :

$$\nu(y) \geqslant n \Leftrightarrow y \in \mathfrak{m}^n,$$

et tout idéal de $\mathcal{R}_\nu$ est de la forme $\mathcal{P}_n = (t^n)$ avec $\mathcal{P}_n = \{x \in \mathcal{R}_\nu \mid \nu(x) \geqslant n\}$.

Définition 2.2.7. *La valuation* ν *décrite plus haut (remarque 2.2.6), est appelée* ***valuation*** $\mathfrak{m}-$***adique*** *ou encore* ***valuation*** t***-adique****. Toute élément* t *qui engendre l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *est appelé* **uniformisante**. *Il vérifie* $\nu(t) = 1$ *et il est non nilpotent.*

Corollaire 2.2.8. *Si on est dans l'un des 4 cas de la proposition 2.2.4 , alors les idéaux de* A *sont tous de la forme* $\mathcal{P}_n = (t^n) = \{x \in \mathcal{R}_\nu \mid \nu(x) \geqslant n\}$*, où* $(t) = \mathfrak{m}_A$*,* t *(non nilpotent).*

Corollaire 2.2.9. *Un anneau local intègre, intégralement clos* $(A, \mathfrak{m})$ *dont le spectre est réduit à* (0) *et* $\mathfrak{m}$ *est un anneau de valuation discrète de rang 1.*

Démonstration. A est donc un anneau local de dimension 1, intégralement clos, donc $\mathfrak{m} = (t)$ est principal et A est l'anneau de la valuation t-adique. □

Corollaire 2.2.10. *Si* A *est un anneau local, intègre, intégralement clos et noéthérien et si* p *est un idéal premier minimal (non nul) de* A*, alors* A_p *est un anneau de valuation discrète de rang 1.*

2.3 Rang rationnel d'une valuation

Soit Γ un groupe commutatif totalement ordonné.

Définition 2.3.1. *On appelle **rang rationnel** de Γ, le nombre*

$$\text{rg.rat}\,\Gamma = \dim_{\mathbb{Q}} \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

*C'est en fait le plus grand entier r tel qu'il existe r éléments de Γ, $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants. Le **rang rationnel** d'une valuation ν est le rang rationnel de son groupe des ordres Γ_ν. Il est noté :* $\text{rg.rat}(\nu) = \text{rg.rat}\,\Gamma_\nu$.

EXEMPLE . 2.3.2.*Le groupe additif ordonné $G = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Il est de rang 1 et de rang rationnel 2.*

Proposition 2.3.3. *Le rang rationnel d'un groupe commutatif Γ est nul si et seulement s'il est de torsion. Si en plus, Γ est totalement ordonné, alors Γ est de rang rationnel 0 si et seulement si $\Gamma = \{0\}$ (c'est le cas en particulier d'un groupe des ordres d'une valuation triviale).*

Démonstration. $\Rightarrow$: Si $rg.rat\,\Gamma = 0$ alors le nombre d'éléments de Γ, $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, est nul, donc $\forall x, y \in \Gamma$, $\exists \alpha$, $\beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha x + \beta y = 0$. En particulier, $\exists \alpha$, $\beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha x + \beta x = 0$, i.e. $(\alpha + \beta)x = 0$. Le groupe Γ est par conséquent de torsion.
$\Leftarrow$: Γ de torsion implique que pour tout $x \in \Gamma$, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha x = 0$. Supposons que $r = rg.rat\,\Gamma > 0$, il existe donc $x_1, \ldots, x_r \in \Gamma$ $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, i.e. si $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = 0$ avec pour tout $i = 1, \ldots, r$ $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Pourtant Γ étant de torsion, il existe pour tout $i = 1, \ldots, r$ un entier $\beta_i \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\beta_i x_i = 0$ qui fait que $\sum_{i=1}^{r} \beta_i x_i = 0$: contradiction !
Supposons Γ totalement ordonné et montrons qu'il est de torsion si et seulement si $\Gamma = \{0\}$: $\Rightarrow$) : montrons que Γ ne contient qu'un seul élément, notamment 0. Supposons $x_1 \neq x_2$ dans Γ avec $x_1 < x_2$. le groupe Γ étant de torsion, il existe $n, m \in \mathbb{Z}^*$ tels que $nx_1 = mx_2 = 0$. Par conséquent, on a $nmx_1 = nmx_2 = 0$. De l'autre coté $x_1 < x_2$ implique que soit $nmx_1 \lneqq nmx_2 = 0$, soit $nmx_2 \lneqq nmx_1 = 0$ $(n, m \neq 0)$: contradiction ! L'implication inverse est évidente. $\square$

Proposition 2.3.4. *Soit Γ un groupe commutatif et Γ' un sous-groupe de Γ. On a :*

$$\mathrm{rg.rat}(\Gamma) = \mathrm{rg.rat}(\Gamma') + \mathrm{rg.rat}(\Gamma/\Gamma'). \tag{2.4}$$

De plus, quand Γ est totalement ordonné, on a :

$$\mathrm{rg}(\Gamma) \leqslant \mathrm{rg}(\Gamma') + \mathrm{rg.rat}(\Gamma/\Gamma'). \tag{2.5}$$

Démonstration. - D'après la définition du rang rationnel, on a $rg.rat\,\frac{\Gamma}{\Gamma'} = rg.rat\,\Gamma - rg.rat\,\Gamma'$, d'où l'égalité (2.4).

- Pour l'inégalité (2.5), faisons une récurrence sur le nombre n donné par la suite croissante des sous-groupes isolés de Γ :

$$\Gamma_0 \subsetneq \Gamma_1 \subsetneq ... \subsetneq \Gamma_n \subsetneq \Gamma,$$

avec $n \leqslant rg\,\Gamma$. Montrons que :

$$n \leqslant rg\,\Gamma' + rg.rat\,\frac{\Gamma}{\Gamma'}. \tag{2.6}$$

L'inégalité (2.6) est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie pour $n-1$, c.a.d. que :

$$n - 1 \leqslant rg\,\Gamma' + rg.rat\ \frac{\Gamma}{\Gamma'}. \tag{2.7}$$

On a donc on a $n-1 \leqslant rg\ (\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}) + rg.rat\ \frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}}$. Deux cas se présentent. Si $\Gamma' \cap \Gamma_{n-1} = \Gamma'$ alors $\Gamma' \subset \Gamma_{n-1}$. Donc $n-1 \leqslant rg(\Gamma') + rg.rat\ \frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma'}$. Comme le groupe $\frac{\Gamma}{\Gamma_{n-1}}$ est totalement ordonné alors il est sans torsion et vérifie $rg.rat\,\frac{\Gamma}{\Gamma_{n-1}} \geqslant 1$ c.à.d., $rg.rat\,\Gamma_{n-1} \leqslant rg.rat\,\Gamma - 1$ (proposition 2.3.3). Et d'après (2.4) $rg.rat\,\frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma'}$ est égal à $rg.rat\,\Gamma_{n-1} - rg.rat\,\Gamma'$ qui est inférieur ou égal à $(rg.rat\,\Gamma - 1) - rg.rat\,\Gamma' = rg.rat\,\frac{\Gamma}{\Gamma'} - 1$. D'où $n \leqslant rg.rat + rg.rat\,\frac{\Gamma}{\Gamma'}$. Si maintenant $\Gamma' \cap \Gamma_{n-1} \neq \Gamma'$, alors $rg\,\Gamma' \geqslant rg(\Gamma' \cap \Gamma_{n+1}) + 1$ (car $\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}$ est un sous-groupe isolé propre de Γ'). Par ailleurs $rg.rat\,\frac{\Gamma}{\Gamma'} \geqslant rg.rat\,\frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}}$, donc (2.7) nous donne $n \leqslant rg\,\Gamma + rg.rat\,\frac{\Gamma}{\Gamma'}$.

□

Corollaire 2.3.5. *Le rang rationnel d'une valuation ν est supérieur ou égal à son rang :*

$$\mathrm{rg}\,\nu \leqslant \mathrm{rg.rat}\,\nu.$$

Démonstration. Il suffit de remplacer Γ' par $\{0\}$ dans la proposition 2.3.4. $\square$

$\lozenge$

Chapitre 3

Valuations composées

3.1 Composition de valuations

Soit K un corps et μ une valuation de K.

Définition 3.1.1. *La valuation μ de K est dite **composée** avec une autre valuation ν de K, si $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{R}_\nu$.*

Rappel 2. Les anneaux de valuations de K qui contiennent $\mathcal{R}_\mu$ sont totalement ordonnés par inclusion et ils sont tous de la forme $(\mathcal{R}_\mu)_\mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est un idéal premier de $\mathcal{R}_\mu$ (corollaires 2.1.8 et 2.1.9).
Rappelons aussi que pour chacun de ces anneaux $V_i = (\mathcal{R}_\mu)_{\mathcal{P}_i}$, la valuation ν_i qui lui est associée est définie par $\theta_i \circ \mu$, où $\theta_i : \Gamma_\mu \to \Gamma_\mu/\Delta_i$ et Δ_i est le sous-groupe isolé de Γ_μ associé à l'idéal $\mathcal{P}_i$ (proposition 2.1.11).

Soit V un anneau de valuation de K et R un sous-anneau local de K contenant V.

Proposition 3.1.2. *Supposons $V \neq R$; on a alors :*

1. *$\mathfrak{m}_R \subset \mathfrak{m}_V \subset V \subset R$ et $\mathfrak{m}_R \neq \mathfrak{m}_V$.*
2. *$\mathfrak{m}_R$ est un idéal premier de V et $R = V_{\mathfrak{m}_R}$.*
3. *$V/\mathfrak{m}_R$ est un anneau de valuation du corps résiduel $k_\nu = R/\mathfrak{m}_R$.*
4. *Pour tout anneau de valuation $\overline{S}$ de $R/\mathfrak{m}_R = k_\nu$, soit S l'mage inverse de $\overline{S}$ dans R par l'homomorphisme canonique $R \to R/\mathfrak{m}_R$. S est alors un anneau*

de valuation du même corps des fraction K que R.
En particulier, pour $\overline{S} = V/\mathfrak{m}_R$ et $S = V$.

Démonstration. 1. Si $x \in \mathfrak{m}_R$ alors $x^{-1} \notin R$ (remarque 1.3.4). Donc $x^{-1} \notin V$ et $x \in V$, x n'étant pas inversible dans V, on a $x \in \mathfrak{m}_V$.

2. Voir corollaire 2.1.9, page 19.
3. $V/\mathfrak{m}_R$ est un anneau de valuation de $R/\mathfrak{m}_R$: Soit $\overline{x}$ un élément non nul de $R/\mathfrak{m}_R$. Soit x un représentant de $\overline{x}$ dans R. Si $x \in V$ alors $\overline{x} \in V/\mathfrak{m}_R$. Et si $x \notin V$ alors $x^{-1} \in V$, car V est un anneau de valuation. Donc $\overline{x^{-1}} = \overline{x}^{-1} \in V/\mathfrak{m}_R$.
4. Soit $x \in K$, où K est le corps de fractions de R.. On a $\mathfrak{m}_R \subset S$ et $\overline{S} = S/\mathfrak{m}_R$, donc si $x \in R$ et $x \notin S$ alors x est inversible dans R et $\overline{x} \notin \overline{S}$. Ainsi, $\overline{x^{-1}} = \overline{x}^{-1} \in \overline{S}$, ($\overline{S}$ anneau de valuation). Donc $x^{-1} \in S$. Si maintenant $x \in K \setminus R$ alors $x^{-1} \in \mathfrak{m}_R \subset S$.

□

Définition 3.1.3. *L'anneau de valuation S dans (4.) est dit **composé** avec R et $\overline{S}$. Si ν est la valuation associée à R et $\overline{\nu}$ est la valuation associée à $\overline{S}$, on dit que la valuation μ associée à S est **composée avec** ν et $\overline{\nu}$ et on note : $\mu = \nu \text{ o } \overline{\nu}$.*

Remarques 3.1.4. 1. En particulier, R est égal à $V_{\mathcal{P}}$ où $\mathcal{P}$ est un idéal premier de V et l'anneau V est donc composé avec R et $V/\mathfrak{m}_R = V/\mathcal{P}$.

2. Par définition, un anneau de valuation V est composé avec R si et seulement si $V \subsetneq R \subset K$. En particulier V doit être de rang strictement supérieur à 1.

Soit ν une valuation d'un corps K, d'anneau V et de groupe des valeurs Γ. Si $rg\,\nu > 1$ alors Γ admet un sous-groupe isolé propre $\Delta \neq (0)$. Soit m' l'idéal premier de V associé à Δ par le théorème 2.1.4. On sait d'après la proposition 2.1.7 et le corollaire 2.1.9 que l'anneau $V' = V_{m'}$ est un anneau de valuation de K d'idéal maximal m' tel que $V \subset V'$, et si on note ν' la valuation de K associée à V', et Γ' son groupe des ordres, alors :

$$\nu = \nu' \circ \overline{\nu'},$$

où $\overline{\nu'}$ est la valuation de $k_{\nu'}$ d'anneau V/m'. On a également que $\nu' \sim \nu_{m'} = \theta_{m'} \circ \nu$, où $\theta_{m'} : \Gamma \to \Gamma/\Delta$ est l'application naturelle décrite dans la proposition 2.1.11.

Mais alors, à quoi ressemble la valuation $\overline{\nu'}$?

Soit V l'anneau associé à une valuation ν du corps K. Soient $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ deux idéaux premiers de V et $\Delta' \supset \Delta$ les sous-groupes isolés de Γ_ν correspondants à $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$. On a alors $V_\mathcal{P} \subset V_{\mathcal{P}'} \subset K$.
Soient les homomorphismes canoniques :

$$\theta : \Delta' \longrightarrow \frac{\Delta'}{\Delta},$$

$$\psi : V_{\mathcal{P}'} \longrightarrow k_{\mathcal{P}'} = \frac{V_{\mathcal{P}'}}{\mathcal{P}'V_{\mathcal{P}'}}.$$

Proposition 3.1.5. *L'application $\overline{\nu}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}} : k_{\mathcal{P}'} \longrightarrow \Delta'/\Delta$ définie par :*

$$\forall x \in V_{\mathcal{P}'},\, x \notin \mathcal{P}' \quad : \quad \overline{\nu}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}\big(\psi(x)\big) = \theta \circ \nu(x)$$

est une valuation de $k_{\mathcal{P}'}$, d'anneau $V_\mathcal{P}/\mathcal{P}'V_\mathcal{P}$ d'idéal $\mathcal{P}/\mathcal{P}'$ et de groupe des ordres Δ'/Δ.

Démonstration. On a $V_P \subset V_{\mathcal{P}'}$, donc d'après la proposition 3.1.2 $\mathcal{P}'\mathcal{V}_{\mathcal{P}'}$ est un idéal premier de $V_\mathcal{P}$, $V_{\mathcal{P}'} = \big(V_\mathcal{P}\big)_{\mathcal{P}'\mathcal{V}_{\mathcal{P}'}}$ et $V_\mathcal{P}$ est composé avec $V_{\mathcal{P}'}$ et $V_\mathcal{P}/\mathcal{P}'V_{\mathcal{P}'}$. En particulier, $V_\mathcal{P}/\mathcal{P}'V_\mathcal{P}$ est un anneau de valuation de $k_{\mathcal{P}'}$. Il suffit donc de montrer que $\overline{\nu}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}$ est bien définie et que la valuation associée à $V_\mathcal{P}/\mathcal{P}'V_\mathcal{P}$ correspond à $\overline{\nu}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}$:

– Soient $x, y \in V_{\mathcal{P}'}$, x, $y \notin \mathcal{P}'$ tels que $\psi(x) = \psi(t) \neq 0$. x s'écrit $x = a/b$ avec $a \in V$, $b \in V \setminus \mathcal{P}'$, donc $\nu(b) \in \Delta'$. Par ailleurs, $x \notin \mathcal{P}'$ donc $a \notin \mathcal{P}'$, i.e. $\nu(a) \in \Delta'$. On a la même chose pour y, donc $\nu(x)$ et $\nu(y)$ sont dans Δ'. Par contre $\psi(x) = \psi(y)$ implique que $\psi(x - y) = 0$, d'où $x - y \in \mathcal{P}'$, i.e. $\nu(x - y) \notin \Delta'$. Par conséquent, $\nu(x) = \nu(y)$ car sinon, $\nu(x - y)$ serait égal à $\nu(x)$ ou $\nu(y)$ qui eux, sont dans Δ' : L'application $\overline{\nu}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}$ est bien définie.
– Soit $x \in V_{\mathcal{P}'}$, $x \notin \mathcal{P}'$ tel que $\overline{\nu}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}\big(\psi(x)\big) \geqslant 0$. L'élément x s'écrit $x = a/b$ avec $a, b \in V\setminus\mathcal{P}'$. le fait que $\theta\big(\nu(x)\big) \geqslant 0$ implique que quelque soit $\alpha \in \Delta,\ \nu(x)+\alpha \geqslant 0$. L'élément α étant dans Δ implique qu'il existe $y \notin \mathcal{P}, y^{-1} \notin \mathcal{P}$ tel que $\alpha = \nu(y)$. Dès lors, on a $\nu(x) + \nu(y) \geqslant 0$, i.e. $\nu(\frac{ay}{b}) \geqslant 0$. Par conséquent, $\frac{ay}{b} \in V$. On a donc $a/b \in (y^{-1})V \subset V_\mathcal{P} \subset V_\mathcal{P}/\mathcal{P}'V_\mathcal{P}$.

Inversement, si $x \in V_{\mathcal{P}}$, $x \notin \mathcal{P}'$ alors $x = a/b$ avec $a, b \in V$, $a \notin \mathcal{P}$ et $b \notin \mathcal{P}'$. En particulier, $\nu(b) \in \Delta$. On a alors $\overline{\nu}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}\big(\psi(x)\big) = \theta\big(\nu(a) - \nu(b)\big)$, d'où $\overline{\nu}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}\big(\psi(x)\big)$ est égal à $\theta\big(\nu(a)\big)$ qui est positif car $\nu(a) \geqslant 0$.

□

Remarque 3.1.6. La valuation $\overline{\nu'}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}}$ est de rang 1 si et seulement si les idéaux premiers $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ sont successifs.

Corollaire 3.1.7. *Si ν et ν' sont deux valuations du corps K telles que $\nu = \nu' \circ \overline{\nu'}$, alors*

$$\overline{\nu'} \sim \overline{\nu}_{\mathfrak{m}_{\nu'}\mathfrak{m}_{\nu}},$$

où $\overline{\nu}_{\mathfrak{m}_{\nu'}\mathfrak{m}_{\nu}}$ est la valuation décrite dans la proposition 3.1.5, et

$$\nu' \sim \nu_{\mathfrak{m}_{\nu'}} = \theta_{\mathfrak{m}_{\nu'}} \circ \nu$$

Démonstration. Supposons que $V \subset V'$. La proposition 2.1.11 nous dit qu'il existe un idéal premier $\mathcal{P}' = \mathfrak{m}_{V'}$ de V tel que $\nu' = \theta_{\mathfrak{m}_{V'}} \circ \nu : K \to \Gamma_\nu/\Delta_{\mathfrak{m}_{V'}}$, avec $V' = V_{\mathfrak{m}_{V'}}$. De l'autre coté et d'après la proposition 3.1.2, on a $V \subset V'$ implique que $V/\mathfrak{m}_{V'}$ est un anneau de valuation de $V'/\mathfrak{m}_{V'}$ pour une valuation $\overline{\nu'}$ de $k_{\nu'} = V'/\mathfrak{m}_{V'}$ et $\nu = \nu' \circ \overline{\nu'}$. Or $\overline{\nu}_{\mathfrak{m}_{V'}\mathfrak{m}_V}$ est aussi une valuation de $k_{\nu'}$, d'anneau $V/\mathfrak{m}_{V'}$: On a $\mathfrak{m}_{V'} \subset \mathfrak{m}_V \subset V$. Soient $\Delta_{\mathfrak{m}_{V'}} \supset \Delta_{\mathfrak{m}_V} = (0)$ les sous-groupes isolés de Γ_ν correspondants. Soit L'application canonique $\psi : V' \to V'/\mathfrak{m}_{V'}$. D'après la proposition 3.1.5, la valuation :

$$\overline{\nu}_{\mathfrak{m}_{V'}\mathfrak{m}_V} : V'/\mathfrak{m}_{V'} \longrightarrow \Delta_{\mathfrak{m}_{V'}}$$

et est définie par :

$$\forall x \in V',\, x \notin \mathfrak{m}_{V'}, \ : \ \overline{\nu}_{\mathfrak{m}_{V'}\mathfrak{m}_V}\big(\psi(x)\big) = \nu(x),$$

et on a $\overline{\nu}_{\mathfrak{m}_{V'}\mathfrak{m}_V}\big(\psi(x)\big) \geqslant 0$, donc $\nu(x) \geqslant 0$ et $x \in V$. Ce qui est équivalent à $\psi(x) \in V/\mathfrak{m}_{V'}$. Donc $\overline{\nu'} \sim \overline{\nu}_{\mathfrak{m}_{V'}\mathfrak{m}_V}$. On a bien $\nu = \nu' \circ \overline{\nu}_{\mathfrak{m}_{V'}\mathfrak{m}_V}$. □

Remarque 3.1.8. Les groupes de valeurs respectifs de ν, ν' et $\overline{\nu'}$ sont Γ_ν, $\Gamma_\nu/\Delta_{\mathfrak{m}_{V'}}$ et $\Delta_{\mathfrak{m}_{V'}}$, d'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\overline{\nu'}} \longrightarrow \Gamma_\nu \longrightarrow \Gamma_{\nu'} \longrightarrow 0.$$

Corollaire 3.1.9. *Si μ, ν sont deux valuations d'un corps K telles que $\mu = \nu \circ \overline{\nu}$, alors*

1. *Γ_ν est naturellement isomorphisme à Γ_μ/Δ.*
2. *$\Gamma_{\overline{\nu}}$ est isomorphisme à Δ.*

où Δ est le sous-groupe isolé de Γ_μ associé à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_\nu$ de $\mathcal{R}_\mu$, et :

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\overline{\nu'}} \longrightarrow \Gamma_\nu \longrightarrow \Gamma_{\nu'} \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

est une suite exacte.

Corollaire 3.1.10. *Si μ est une valuation composée avec deux valuations ν et $\overline{\nu}$, alors :*

1. $\mathrm{rg}(\mu) = \mathrm{rg}(\nu) + \mathrm{rg}(\overline{\nu})$.
2. $\mathrm{rg.rat}(\mu) = \mathrm{rg.rat}(\nu) + \mathrm{rg.rat}(\overline{\nu})$.

Démonstration. 1. Montrons que $rg(\nu) = rg(\Delta) + rg(\Gamma/\Delta)$. Considérons l'homomorphisme canonique surjectif $\Gamma \to \Gamma/\Delta$. Les sous-groupes isolés de Γ qui contiennent Δ correspondent aux sous-groupes isolés de Γ/Δ, et comme un sous-groupe isolé de Γ est soit contenu dans Δ ou contient Δ, on a le résultat voulu .

2. C'est un résultat direct de la proposition 2.3.4

□

Proposition 3.1.11. *Soit μ la valuation composée avec $\nu : K^* \to \Gamma_\nu$ et $\overline{\nu} : k_\nu^* \to \Gamma_{\overline{\nu}}$. Alors l'anneau de valuation associé à μ est donné par :*

$$V = \{x \in R_\nu \mid \overline{\nu}(\overline{x}) \geqslant 0\},$$

où $\overline{x}$ est la classe de x dans $k_\nu = R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$.

Démonstration. Comme précédemment, soit ψ l'application canonique $R_\nu \to R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$. On sait que $\mathcal{R}_{\overline{\nu}} = \mathcal{R}_\mu/\mathfrak{m}_\nu$ (proposition 3.1.2), d'où $\mathcal{R}_\mu = \psi^{-1}(\mathcal{R}_{\overline{\nu}})$. Or $R_{\overline{\nu}} = \{\overline{x} \in k_\nu \mid \overline{\nu}\big(\psi(x)\big) \geqslant 0\}$ (proposition 3.1.5), donc $\mathcal{R}_\mu = \{x \in R_\nu \mid \overline{\nu}\big(\psi(x)\big) = 0\}$. □

Corollaire 3.1.12. *Le corps résiduel k_μ de la valuation $\mu = \nu \circ \overline{\mu}$ est égal au corps résiduel $k_{\overline{\nu}}$ de $\overline{\nu}$.*

Remarque 3.1.13. Soient μ et ν deux valuations de K telles que $\mu = \nu \circ \overline{\nu}$. Si ν est discrète de rang 1, i.e. $\Gamma_\nu \backsimeq \mathbb{Z}$, alors la suite (4.1) est toujours scindée, ie $\Gamma_\mu \backsimeq \Gamma_\nu \times \Gamma_{\overline{\nu}}$. Nous pouvons alors décrire la valuation composée $\mu = \nu \circ \overline{\nu}$ comme suit :
Comme la valuation ν est discrète alors il existe un élément $t \in \mathcal{R}_\nu$ tel que $\mathfrak{m}_\nu = (t)$ et $\forall x \in \mathcal{R}_\nu$, x s'écrit sous la forme $x = ut^n$ avec u inversible dans $\mathcal{R}_\nu$ et $n \in \mathbb{N}$ (remarque 2.2.6). Soit $\overline{y}$ l'image de $xu^{-\nu(x)} \in \mathcal{R}_\nu$ dans k_ν par l'application canonique : $\mathcal{R}_\nu \to k_\nu$. Alors pour tout $x \in \mathcal{R}_\nu^*$, on définit :

$$\mu(x) = \big(\nu(x), \overline{\nu}(\overline{y})\big) \qquad \in \Gamma_\nu \times \Gamma_{\overline{\nu}} \ ,$$

et $\forall \frac{x}{x'} \in K^*$, $\mu(\frac{x}{x'}) = \mu(x) - \mu(x')$.

EXEMPLE . 3.1.14. *Considérons la valuation ν de $k(x,y)$ décrite dans l'exemple 2.1.13. L'anneau de la valuation ν_x associé à l'idéal (x) de $\mathcal{R}_\nu$ est égal à $k[x,y]_{(x)} = (\mathcal{R}_\nu)_{(x)}$. Son corps résiduel n'est autre que le corps $k(y) = \frac{(\mathcal{R}_\nu)_{(x)}}{(x)(\mathcal{R}_\nu)_{(x)}}$.*
Notons $\overline{f}$ l'image de $f \in \mathcal{R}_{\nu_x}$ par la surjection canonique $\phi : \mathcal{R}_{\nu_x} \to k_{\nu_x}$. Alors, d'après la proposition 3.1.2 et le corollaire 3.1.7, $\nu = \nu_x \circ \overline{\nu_x}$ telle que $\overline{\nu_x}$ est la valuation du corps k_{ν_x} à valeurs dans $\{0\} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $f \in k[x,y]_{(x)} = \mathcal{R}_{\nu_x}^*$ par :

$$\overline{\nu_x}(\overline{f}) = \nu(f).$$

Son anneau est égal à $k[y]_{(y)} = \frac{\mathcal{R}\nu}{(x)}$ (proposition 3.1.5 et corollaire 3.1.7).

3.2 Arbre associé à une famille de valuations

Soit K un corps.
On peut définir un ordre partiel sur l'ensemble des valuations de K de la façon suivante :

$$\nu \preceq \nu' \;\; \Leftrightarrow \;\; \mathcal{R}_{\nu'} \subset \mathcal{R}_\nu \Leftrightarrow \;\; \nu' \text{ composée avec } \nu. \tag{3.2}$$

On dit que ν est **plus fine** que ν' ou que ν' est **moins fine** que ν.

Définition 3.2.1. *Deux valuations d'un corps K sont dites* ***incomparables*** *si aucune n'est composée avec l'autre.*

Corollaire 3.2.2. *Deux valuations ν et ν' d'un corps K admettent toujours une borne inférieure dans l'ensemble des valuations de K par rapport à l'ordre partiel (3.2).*

Démonstration. Si elle existe, la borne inférieure $\inf\{\nu, \nu'\}$ correspond à la moins fines des valuations ν'' de K telles que $\nu'' \preceq \nu$ et $\nu'' \preceq \nu'$ et son anneau de valuation sera alors le plus petit anneau de valuation contenant $V = \mathcal{R}_\nu$ et $V' = \mathcal{R}_{\nu'}$. Or le plus petit anneau contenant V et V' est l'anneau produit VV'. Il suffit alors de montrer que c'est un anneau de valuation : Soit $x \in K$, si $x \notin VV'$ alors $x \notin V$ et $x \notin V'$. Les anneaux V, V' étant des anneaux de valuations implique que x^{-1} appartient à V et V', et par conséquent, à VV', d'où VV' est un anneau de valuation. □

Remarque 3.2.3. Soient ν et ν' deux valuations de K d'anneaux (V, m) et (V', m') respectivement. Dire qu'il existe un anneau de valuation (V'', m'') de K tel que $V \subset V''$ et $V' \subset V''$ revient à dire que si ν'' est la valuation de K associée à V'', alors ν et ν' sont toutes les deux composées avec ν''.

Définition 3.2.4. *Deux valuations ν, ν' de K sont dites* ***indépendantes*** *si* $\inf\{\nu, \nu'\}$ *est la valuation triviale. Ça revient à dire que ν et ν' ne sont composée en commun avec aucune valuation de K autre que la valuation triviale.*

EXEMPLE . 3.2.5. *Deux valuations de rang 1 d'un corps K sont indépendantes (puisque leurs anneaux de valuations sont maximaux parmi les anneaux de valuations de K).*

Définition 3.2.6. *Si $\nu_1, \ldots, \nu_n$ sont des valuations de K 2 à 2 non équivalentes, on appelle* ***arbre*** *associé à la famille $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ l'ensemble des valuations de K composées avec au moins l'une des ν_i, $i = 1, \ldots, n$.*

◊

Si ν_1 est une valuation d'un corps K, et ν_2 une valuation du corps résiduel k_1 de ν_1, alors on peut définir la valuation composée :

$$\mu_1 = \nu_1 \circ \nu_2;$$

c'est une valuation de K de corps résiduel égal au corps résiduel de ν_2 : $k_{\mu_1} = k_2$ (corollaire 3.1.12). Si ν_3 est une valuation du corps résiduel $k_2 = k_{\mu_1}$, alors on peut définir la valuation composée :

$$\mu_2 = \ \mu_1 \circ \nu_3 = \ \nu_1 \circ \nu_2 \circ \nu_3;$$

c'est une valuation du corps K de corps résiduel égal au corps résiduel $k_{\mu_2} = k_3$ de la valuation ν_3 et puisque ν_1 est une valuation de K, alors $\nu_2 \circ \nu_3$ est une valuation sur k_1 corps résiduel de ν_1.
Encore une fois, si ν_4 est une valuation sur le corps résiduel $k_3 = k_{\mu_2}$ de la valuation ν_3, alors on peut construire la valuation composée :

$$\mu_3 = \ \mu_2 \circ \nu_4 = \ \mu_1 \circ \nu_2 \circ \nu_4 = \ \nu_1 \circ \nu_2 \circ \nu_3 \circ \nu_4;$$

c'est une valuation de K, de corps résiduel égal au corps résiduel $k_{\mu_3} = k_4$, et puisque ν_1,μ_1 et μ_2 sont des valuations de K, alors ν_4, $\nu_3 \circ \nu_4$ et $\nu_2 \circ \nu_3 \circ \nu_4$ sont des valuations des corps résiduels k_{μ_2}, k_{μ_1} et k_1 des valuations μ_2, μ_1 et ν_1 respectivement.
Ainsi, par récurrence, on peut définir une valuation composée de K :

$$\mu = \nu_1 \circ \nu_2 \circ \cdots \circ \nu_n, \tag{3.3}$$

telle que ν_1 est une valuation de K ; et pour tout $i = 2, \ldots, n$, ν_i est une valuation du corps résiduel k_{i-1} de la valuation ν_{i-1} et pour tout $i = 1, \ldots, n$ $\omega_i = \nu_1 \circ \cdots \circ \nu_i$ est une valuation de K et $\overline{\omega}_i = \nu_{i+1} \circ \cdots \circ \nu_n$ est une valuation du corps résiduel k_{ω_i} de ω_i.
Si on note W_i l'anneau de valuation de ω_i, alors les valuations $\omega_1, \ldots, \omega_n$ correspondent à la chaîne $W_n \subset W_{n-1} \subset \cdots \subset W_1 \subset K$.

Définition 3.2.7. *On appelle la valuation $\mu = \nu_1 \circ \nu_2 \circ \cdots \circ \nu_n$ la* ***valuation composée avec la famille*** *$\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$.*

$\Diamond$

Chapitre 4

Prolongement d'une valuation

Soient $K \subset L$ une extension de corps et W un anneau de valuation de L pour une valuation μ, alors $V = K \cap W$ est un anneau de valuation de K pour la valuation $\nu = \mu_{|K}$ et on a W domine V. En particulier, $k_\nu \subset k_\mu$.
En effet, il est très facile de verifier que la valuation $\nu = \mu_{|K}$ vérifie tous les axiomes d'une valuation. Son groupe des ordres $\Gamma_\nu = \mu(|K^*)$ est un sous-groupe de $\Gamma_\mu = \mu(L^*)$ groupe des ordres de μ. L'anneau de valuation $\mathcal{R}_\nu = V$ d'idéal maximal $\mathfrak{m}_\nu$ sont respectivement inclus dans $\mathcal{R}_\mu = W$ et $\mathfrak{m}_\mu$. En fait, $V = W \cap K$ et $\mathfrak{m}_\nu = \mathfrak{m}_\mu \cap K$, d'où W domine V.

Définition 4.0.8. *Soit $K \subset L$ une extension de corps. Une valuation μ de L est dite* ***prolongement*** *d'une valuation ν de K si $\mu_{|K} = \nu$.*

Théorème 4.0.9. *Soit $K \subset L$ une extension de corps. Toute valuation ν de K admet au moins un prolongement à une valuation μ de L.*

Démonstration. L'anneau de valuation R_ν est un sous-anneau de L et d'après le corollaire 1.1.8, il existe W anneau de valuation de L qui domine $\mathcal{R}_\nu$. On a donc $\mathcal{R}_\nu \subset W$ et $\mathfrak{m}_W \cap \mathcal{R}_\nu = \mathfrak{m}_\nu$. En particulier, $\mathcal{R}_\nu \subset W \cap K$. L'inclusion inverse est aussi vérifiée : si $x \in K$ et $x \notin \mathcal{R}_\nu$ alors $x^{-1} \in \mathfrak{m}_\nu \subset \mathfrak{m}_W$, par conséquent $x \notin W$. On a ainsi $\mathcal{R}_\nu = W \cap K$, ça implique que la valuation de L associée à W restreinte à K est équivalente à la valuation ν de K. Notons μ la valuation de L associée à W. $\mu_{|K} \sim \nu$ implique qu'il existe un isomorphisme entre leurs groupes des ordres respectifs :

$$\theta : \Gamma_{\mu_{|K}} \longrightarrow \Gamma_\nu.$$

Soit E le groupe extension de $\frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_{\mu_{|K}}}$ par $\Gamma_\nu \simeq \Gamma_{\mu_{|K}}$. θ se prolonge donc en un isomorphisme

$$\widetilde{\theta} : \Gamma_\mu \longrightarrow E.$$

On a alors une valuation de L définie pour tout $x \in L^*$ par $\omega(x) = \widetilde{\theta}\big(\mu(x)\big)$ et on a $\omega_{|K} = \nu$. Il existe donc une valuation ω de L qui prolonge la valuation ν de K. $\square$

Deux situations se distinguent dans le prolongement d'une valuation d'un corps K à une extension L de K. Selon que l'extension L soit algébrique ou transcendante.

4.1 Extension algébrique

Soient $K \subset L$ une extension de corps algébrique. Soit ν une valuation de K et μ un prolongement à L de ν.

Définition 4.1.1.– *On appelle **indice de ramification** de μ relatif à ν l'élément de $\mathbb{N} \cup +\infty$ égal à l'indice :*

$$e(\mu/\nu) = [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu].$$

– *On appelle **degré résiduel** de μ par rapport à ν l'indice :*

$$f(\mu/\nu) = [k_\mu, k_\nu],$$

qui appartient aussi à $\mathbb{N} \cup +\infty$.

Remarque 4.1.2. Si μ' est un prolongement à une extension L' de L de la valuation μ, alors μ' est aussi un prolongement de ν et on a :

$$e(\mu'/\nu) = e(\mu'/\mu).e(\mu/\nu),$$

$$f(\mu'/\nu) = f(\mu'/\mu).f(\mu/\nu).$$

Remarque 4.1.3. L'indice de ramification $e = e(\mu/\nu)$ est égal à l'ordre de Γ_μ/Γ_ν, s'il est fini, cela implique qu'il existe exactement e éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ non nuls de Γ_μ tels que $\forall i \neq j$ dans $\{1, \ldots, e\}$ on a $\alpha_i \neq \alpha_j \mod [\Gamma_\nu]$. Ça revient à dire qu'il existe $x_1, \ldots, x_e \in L^*$ tels que $\forall i \neq j$ dans $\{1, \ldots, e\}$, on a $\mu(x_i) \neq \mu(x_j) \mod [\Gamma_\nu]$.

Proposition 4.1.4. *Si L est une extension algébrique de K de degré n, nous avons :*

$$e(\mu/\nu).f(\mu/\nu) \leq n.$$

En particulier, $f(\mu/\nu) \leq n$ et $e(\mu/\nu) \leq n$.

Démonstration. – Il suffit de montrer que l'on a $rs \leq n$ pour tout $r, \ s$ vérifiant $r \leq e(\mu/\nu)$ et $s \leq f(\mu(\nu))$. Posons donc les hypothèses suivantes :

Hyp 1 : $\exists x_1, ..., x_r \in L$ tels que $\forall i \neq j$ on a $\nu(x_i) \neq \nu(x_j) \mod [\Gamma_\nu]$ et

Hyp 2 : $\exists y_1, ..., y_s \in R_\mu \setminus \mathfrak{m}_\mu$ tels que $\overline{y}_1, ..., \overline{y}_s \in k_\mu$ sont linéairement indépendants sur k_ν.

Montrons que les $r \times s$ éléments $x_i y_i$ sont linéairement indépendants sur K. Procédons par l'absurde. Soit :

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i y_j = \sum_i x_i \big(\sum_j a_{ij} y_j \big) = 0, \quad a_{ij} \in K \tag{4.1}$$

une relation de dépendance sur K .

– Soit (α, β) une paire d'indices tel que $\forall (i,j)$ on ait $\mu(a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta) \leqslant \mu(a_{ij} x_i y_j)$. On a alors $\frac{a_{ij} x_i y_j}{a_{\alpha\beta} x_\alpha} \in \mathcal{R}_\mu$. En particulier $a_{\alpha\beta} \neq 0$. Si $i \neq j$, alors on a $\mu(a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta) \neq \mu(a_{ij} x_i y_j)$ et par conséquent, $\forall i \neq j$, $\frac{a_{ij} x_i y_j}{a_{\alpha\beta} x_\alpha} \in \mathcal{M}_\nu$. En effet, si $\mu(a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta) = \mu(a_{ij} x_i y_j)$, alors $\mu(x_i) - \mu(x_j) = \mu(a_{\alpha\beta}) - \mu(a_{ij}) = \nu(a_{\alpha\beta}) - \nu(a_{ij}) \in \Gamma_\nu$ ($\forall j, \ \mu(y_j)$ car $y_j \notin \mathfrak{m}_\mu$). On aurait alors $\nu(x_i) = \nu(x_j) \mod [\Gamma_\nu]$, ce qui contredit l'hypothèse 1.

Multiplions (4.1) par $(a_{\alpha\beta} x_\alpha)^{-1}$, on obtient

$$\sum_j \frac{a_{1j} x_1}{a_{\alpha\beta} x_\alpha} y_j + \cdots + \sum_j \frac{a_{\alpha j} x_\alpha}{a_{\alpha\beta} x_\alpha} y_j + \cdots + \frac{a_{rj} x_r}{a_{\alpha\beta} x_\alpha} = 0$$

.

$$\sum_{i \neq k} \sum_j \frac{a_{ij} x_i}{a_{\alpha\beta} x_\alpha} y_j + \sum_j \frac{a_{\alpha j}}{a_{\alpha\beta}} y_j = 0$$

C'est une équation de la forme $z + \sum_j \frac{a_{\alpha j}}{a_{\alpha\beta}} y_j = 0$, où $z \in \mathcal{M}_\mu$ et $b_j = a_{\alpha j}/a_{\alpha\beta} \in R_\nu$, car $\mu(a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta) = \mu(a_{\alpha j}x_\alpha y_j)$, $\mu(\frac{a_{\alpha\beta}}{a_{\alpha j}}) = \mu(a_{\alpha\beta}) - \mu(a_{\alpha j}) = \mu(x_\alpha) - \mu(x_\mu)$. Ainsi, au passage dans le corps résiduel k_μ, on a une relation $\sum \overline{b}_j \overline{y}_j = 0$, avec $\overline{b}_\beta = 1$. Contradiction avec l'hypothèse 2.

□

Proposition 4.1.5. *Soient $K \subset L$ une extension algébrique de corps, μ un prolongement à L de la valuation ν de K. Alors le groupe Γ_μ/Γ_ν est de torsion et le corps résiduel k_μ est algébrique sur k_ν.*

Démonstration. – Soit $y \in L$ et soit $\mu(y) = \beta \in \Gamma_\mu$. L est algébrique sur K, il existe donc une relation de dépendance algébrique :

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in K,\ a_0 = 1.$$

Notons $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. L'élément $\mu(a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n)$ est :

$$\begin{cases} \geqslant \min_{i\in I}\{\mu(a_i y^{n-i})\} & si\ \exists i,j \in I \mid \mu(a_i y^{n-i}) = \mu(a_j y^{n-j}), \\ = \min_{i\in I}\{\mu(a_i y^{n-i})\} & si\ \forall i,j \in I \mid \mu(a_i y^{n-i}) \neq \mu(a_j y^{n-j}). \end{cases}$$

Mais $\mu(a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n) = \mu(0) = +\infty$. Il existe donc $i \neq j$ dans I tels que $\mu(a_i y^{n-i}) = \mu(a_j y^{n-j})$. Il en résulte que $(j-i)\mu(y) = \nu(a_i) - \nu(a_j) \in \Gamma_\nu$. En d'autres termes, il existe $n = j - i \neq 0$ tel que $n\overline{\beta} = n\overline{\mu(y)} = 0$ dans Γ_μ/Γ_ν qui, de ce fait, est de torsion.

– Il est évident que $k_\nu \subset k_\mu$. Soit $x \in \mathcal{R}_\nu \setminus \mathfrak{m}_\mu \subset L$; x est algébrique sur K. Il existe alors une relation de dépendance algébrique

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \ \ a_i \in K. \tag{4.2}$$

Si tous les $a_i \in \mathcal{R}_\nu$, alors l'équation (4.2) induit une relation de dépendance algébrique de l'image $\overline{x}$ de x dans k_ν. Si ce n'est pas le cas, il existe des $a_i \notin \mathcal{R}_\nu$, i.e. $\nu(a_i) < 0$. Alors si $\nu(a_{i_0}) = \min_i\{\nu(a_i) \mid \nu(a_i) < 0\}$, les coefficients de :

$$a_{i_0}^{-1}(x^n + \cdots + a_0) = 0 \tag{4.3}$$

sont tous dans $\mathcal{R}_\nu$ et (4.3) induit une relation de dépendance algébrique de $\overline{x}$ sur k_ν (les coefficients de (4.3) ne sont pas dans $\mathfrak{m}_\nu \subset \mathfrak{m}_\mu$, proposition 3.1.2).

□

Remarque 4.1.6. Si $k \subset K$ est une extension algébrique de corps, alors le prolongement ν à K de la valuation triviale ν_k de k (exemple 2.1.12) est la valuation triviale de K : en effet, $\Gamma_\nu/\Gamma_{\nu_k} \backsimeq \Gamma_\nu$ est d'après la proposition 4.1.5, de torsion, et donc Γ_ν est réduit à $\{0\}$ (voir proposition 2.3.3).

Corollaire 4.1.7. *Soit μ un prolongement à L d'une valuation ν de K. Alors :*

1. $\mathrm{rg.rat}\,\Gamma_\mu = \mathrm{rg.rat}\,\Gamma_\nu$,
2. *Si $k \subset K \subset L$ est un sous corps tel que $\nu_{|k}$ est trivial, i.e. $\forall x \in k^*$, $\nu(x) = 0$, alors* $\deg.\mathrm{tr}_\mathrm{k}\, k_\mu = \deg.\mathrm{tr}_\mathrm{k}\, k_\nu$.

Démonstration. 1. C'est un résultat direct de la proposition 2.3.3.

2. La valuation ν est triviale sur k, donc $k \subset k_\nu \subset k_\mu$. L'égalité des degrés de transcendance vient alors du fait que k_μ est algébrique sur k_ν.

□

Lemme 4.1.8. *Soient Γ' un groupe totalement ordonné et Γ un sous-groupe de Γ'. Soient S' et S les ensembles composés des sous-groupes isolés de Γ' et Γ respectivement ($S \subset S'$).*
Alors l'application $\varphi : S' \to S$ qui à $\Delta' \in S'$ associe $\Delta' \cap \Gamma \in S$ est surjective. Si de plus Γ'/Γ est de torsion, alors φ est bijective.

Démonstration. Il est évident que φ est bien définie. Soit $\Delta \in S$. L'ensemble $\Delta' = \{x \in \Gamma' \mid \exists h \in \Delta\ , -h \leqslant x \leqslant h\}$ est un sous-groupe isolé de Γ' et on a $\Delta' \cap \Gamma = \Delta$. Supposons maintenant que Γ'/Γ est de torsion et montrons que φ est injective. Soient Δ'_1 et Δ'_2 deux éléments de S' qui vérifient $\Delta'_1 \cap \Gamma = \Delta'_2 \cap \Gamma$. L'ensemble S' étant totalement ordonné, supposons alors $\Delta'_2 \subset \Delta'_1$. On a donc $\Delta'_2 = \Delta'_1 \cap \Gamma$. Il en résulte que Δ'_1/Δ'_2 est un sous-groupe isolé de Γ'/Γ, il est donc de torsion ; $\forall x \in \Delta'_1$, $\exists n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $nx \in \Delta'_2$, donc $-nx \in \Delta'_2$. On a soit $-nx \leqslant x \leqslant nx$ ou $nx \leqslant x \leqslant -nx$, d'où $x \in \Delta'_2$ puisque Δ'_2 est un sous-groupe isolé. En fin de compte $\Delta'_1 = \Delta'_2$. □

Corollaire 4.1.9. *Soit μ un prolongement à L d'une valuation ν de K. Alors*

$$rg(\mu) = rg(\nu);$$

Démonstration. Le groupe Γ_ν est un sous-groupe de Γ_μ avec Γ_μ/Γ_ν de torsion. Donc si S' et S sont les ensembles composés des sous-groupes isolés de Γ_μ et Γ_ν, respectivement, alors $rg\,\mu = Card\,S' = Card\,S = rg\,\nu$. □

Corollaire 4.1.10. *Si $K \subset L$ extension algébrique finie, et μ un prolongement à L d'une valuation ν de K, alors μ est une valuation discrète si et seulement si ν est une valuation discrète.*

Démonstration. Soient S' et S les ensembles composés des sous-groupes isolés de Γ_μ et Γ_ν, respectivement, et φ l'application de S' dans S qui à $\Delta' \in S'$ associe $\Delta' \cap \Gamma_\nu \in S$.
Soient $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$ deux sous-groupes isolés successifs de Γ_ν, donc (Δ_{i+1}/Δ_i) est de rang 1. Il est par conséquent isomorphe à un sous-groupe de $(R,+)$. Ainsi, si Γ_ν est discret, i.e. isomorphe à $\mathbb{Z}^k$, alors $\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} \simeq \mathbb{Z}$. Réciproquement si tous les groupes quotients $\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}$, le groupe Γ_ν est discret.
Il suffit alors de montrer que :

$$\Big(\Delta'_{i+1}/\Delta'_i \simeq \mathbb{Z}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\Delta_{i+1}/\Delta_i \simeq \mathbb{Z}\Big).$$

$\Delta_i \subset \Delta'_i$ et $\Delta_{i+1} \subset \Delta'_{i+1}$, donc Δ_{i+1}/Δ_i est un sous-groupe non trivial de Δ'_{i+1}/Δ'_i.
$\Leftarrow$) : Si $\Delta'_{i+1}/\Delta'_i \simeq \mathbb{Z}$ alors $\Delta_{i+1}/\Delta_i \simeq p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.
$\Rightarrow$) : $[L,K] < +\infty$ donc l'indice $[\Delta'_{i+1}/\Delta'_i, \Delta_{i+1}/\Delta_i]$ est fini, il s'en suit que si $\Delta_{i+1}/\Delta_i \simeq \mathbb{Z}$ alors $\Delta'_{i+1}/\Delta'_i \simeq \mathbb{Z}$. □

4.2 Extension transcendante

Soit ν une valuation d'un corps K.

Proposition 4.2.1. *Soit Γ un groupe totalement ordonné tel que $\Gamma_\nu \subset \Gamma$ et soit ξ un élément de Γ.*

1. *Soit $\nu_\xi : K(X) \longrightarrow \Gamma_\infty$ l'application définie par :*

$$\nu_\xi\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\Big) = \min_{0,\dots,n}\{\nu(a_i) + i\xi\} \quad \in \Gamma_\nu + \mathbb{Z}.\xi;$$

$$\nu_\xi(f/g) = \nu_\xi(f) - \nu_\xi(g) \quad \forall f, g \in K[X], g \neq 0.$$

Alors ν_ξ est une valuation du corps $K(X)$ qui prolonge ν. Si de plus $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $n.\xi \in \mathbb{Z}$ implique $n = 0$, alors ν_ξ est la seule valuation de $K(X)$ prolongeant ν telle que $\nu_\xi(X) = \xi$ et on a $k_{\nu_\xi} = k_\nu$.

2. *Il existe une unique valuation μ de $L = K(X)$ prolongeant ν telle que $\mu(X) = 0$ et telle que l'image t de X dans k_μ soit transcendante sur k_ν, et on a $k_\mu = k_\nu(t)$ et $\Gamma_\mu = \Gamma_\nu$.*

Remarques 4.2.2. 1. Cette proposition montre que contrairement au cas des extensions algébriques, le groupe Γ_μ/Γ_ν n'est pas toujours de torsion.

2. Il n'y a pas que ces deux types de prolongements à $K(X)$ de ν. Il peut exister d'autres prolongements μ de ν à l'extension monogène $L = K(X)$, tel que le groupe Γ_μ/Γ_ν soit un groupe de torsion et tel que le corps résiduel k_μ soit une extension algébrique de k_ν.

Démonstration. 1. On vérifie facilement que pour tout $\xi \in \Gamma$, l'application ν_ξ vérifie les propriétés d'une valuation. Il est alors manifeste que ça restriction à K est égale à ν.
Supposons que $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $n.\xi \in \mathbb{Z}$ implique $n = 0$.

– L'unicité : Soit μ une autre valuation qui prolonge ν à $K(X)$ et vérifiant $\mu(X) = \xi$. Si $\Gamma_\mu \ni \nu(a_i X^i) = \nu(a_j X^j)$ alors $\nu(a_i) - \nu(a_j) = (j-1)\xi$, dès lors et par hypothèse, on a $j - i = 0$. Par conséquent $\nu(\sum_{i=0}^n a_i X^i) = \min_{0,\dots,n}\{\nu(a_i) + i\xi\} = \nu_\xi(\sum_{i=0}^n a_i X^i)$, d'où l'unicité.

– $k_{\nu_\xi} = k_\nu$: ν_ξ prolonge ν, donc $k_{\nu_\xi} \supset k_\nu$. Tout élément f de $K(X)$ peut s'écrire sous la forme $f = X^n b(1 + \widetilde{f})$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $b \in K^*$ et $\widetilde{f} \in K(X)$ tel que $\nu_\xi(\widetilde{f}) > 0$. Si f est dans k_{ν_ξ}, alors $\nu_\xi(f) = 0 = k\xi + \nu(b) + 0$. Par conséquent $k\xi = -\nu(b) \in \Gamma_\nu$, et par hypothèse, on a $k = 0$ et $\nu(b) = 0$, c.à.d. $b \in \mathcal{R}_\nu \setminus \mathfrak{m}_\nu$. En d'autres termes, f modulo $\mathfrak{m}_\nu$ est un élément de $\mathcal{R}_\nu$: On a bien $k_{\nu_\xi} = k_\nu$.

2. D'après 1., la valuation ν_0 prolonge ν à $K(X)$ et envoie X vers 0. On a aussi pour toute $\sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$, $\nu_0(\sum_{i=0}^n a_i X^i) = \min_{0,\dots,n}\{\nu(a_i)\}$ et $\Gamma_{\nu_0} = \Gamma_\nu + 0.\mathbb{Z} = \Gamma_\nu$.

– t transcendant sur k_ν : Si t était algébrique sur k_ν, on aurait une relation $\sum \overline{a}_j t^j = 0$ dans k_{ν_0} à coefficients dans k_ν. On aurait alors $\sum a_i X^j \in \mathcal{R}_\nu \setminus \mathfrak{m}_\nu$, i.e. $\nu_0(\sum a_j X^j) = \min_{0,\dots,n}\{\nu(a_j)\} \gneqq 0$, en particulier, $\forall j$, $\nu(a_j) \gneqq 0$. Donc pour tout j, $a_j \in \mathcal{R}_\nu \setminus \mathfrak{m}_\nu$ et $\overline{a}_j = 0$.

– L'unicité : Soit μ une valuation de $K(X)$ telle que $\mu(X) = 0$ qui prolonge ν. Soit $f \in K[X]$ non nul, f peut s'écrire sous la forme $\sum_0^n a_i X^i$ tel que $\nu(a_i) \geqslant 0$ et tel que l'un des $\nu(a_i)$ s'annule (quitte à diviser f par a_k avec $\nu(a_k) = \min_{0,\dots,n}\{\nu(a_i)\}$). On a alors $\mu(f) = \mu(\sum_i a_i X^i) = \min_i\{\nu(a_i)\} \geqslant 0$, d'où $f \in \mathcal{R}_\nu$. L'image $\overline{f}$ de f dans k_μ s'écrit $\overline{f} = \sum \overline{a}_i t^i \in k_\mu$ où $\overline{a}_i$ désigne l'image de a_i dans k_ν. Or il existe k tel que $\nu(a_k) = 0$, par conséquent $a_k \in \mathcal{R}_\nu \setminus \mathfrak{m}_\nu$ et $\overline{a}_k \neq 0$. Donc $\overline{f}$ est non nul et inversible dans $\mathcal{R}_\nu$, i.e. $\mu(f) = 0 = \min_i\{\nu(a_i)\} = \nu_0(f)$.

– $k_{\nu_0} = k_\nu(t)$: Soit $f = \sum_I a_i X^i \in K[X]$, I fini, alors $\overline{f} = \sum_I \overline{a}_i t^i \in k^*_{\nu_0}$ si et seulement si $\nu_0(f) = 0$ et si et seulement si $\min_I\{\nu(a_i)\} = 0$. Donc $\forall\ i \in I \nu(a_i) \geqslant 0$, i.e. $\overline{a}_i \in k_\nu$, on a $\overline{f} = \sum_I \overline{a}_i t^i \in k_\nu(t)$. D'où $k_{\nu_0} \subset k_\nu$. l'autre inclusion est évidente.

□

On peut généraliser le résultat précédent pour une extension de degré de transcendance fini supérieur à 1. Soient (K, ν) un corps valué et $K \subset L$ une extension transcendante de corps. Soit μ un prolongement à L de ν. Notons $\deg.\operatorname{tr}_K L$ le degrés de transcendance (fini) de L sur K.

Théorème 4.2.3.– *Soient $x_1, \dots, x_s$ des éléments de R_μ tels que leurs images $\overline{x_1}, \dots, \overline{x}_s$ dans k_μ soient algébriquement indépendants dans k_ν ($k_\nu(\overline{x_1}, \dots, \overline{x}_s)$ est une extension de degré de transcendance s sur k_ν).*

– *Soient $y_1, \dots, y_r$ des éléments de L tels que les images canoniques de $\mu(y_1), \dots, \mu(y_r)$ dans Γ_μ/Γ_ν soient algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Alors :*

1. *les $r + s$ éléments $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r$ de L sont algébriquement indépendants sur K ;*
2. *La valuation $\omega = \mu_{|K(x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_r)}$, restriction de μ, admet comme groupe des valeurs $\Gamma + \mu(y_1)\mathbb{Z} + \cdots + \mu(y_r)\mathbb{Z}$ et son corps résiduel est $k_\omega = k_\nu(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_s)$.*
3. *Pour $f = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \in K[x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s]$,*

$$\omega(f) = \min_{\alpha,\beta}\{\nu(a_{\alpha\beta}) + \sum_1^r \beta_i \mu(y_i)\}.$$

Démonstration. Par récurrence sur $r+s$.

– Pour $r+s=0$, c'est évident ;

– Supposons que le théorème est vrai pour $r'+s'$ où $r' \leqslant r$, $s' \leqslant s$ et $r'+s' \leqslant r+s-1$. On a alors $x_1,..,x_{s'},y_1,..,y_{r'}$ algébriquement indépendants sur K, et si $\omega_{s'+r'} = \mu_{|K(x_1,..,x_{s'},y_1,..,y_{r'})}$ alors $\Gamma_{\omega_{s',r'}} = \Gamma_\nu + \mu(y_1)\mathbb{Z} + \cdots + \mu(y'_r)\mathbb{Z}$ et $k_{\omega_{s',r'}} = k_\nu$. Montrons qu'il reste vrai pour $r'+s'+1$: i.e. on rajoute soit $x_{s'+1} \in \mathcal{R}_\mu$ soit $y_{r'+1} \in L$ aux $x_1,..,x_{s'},y_1,..,y_{r'}$ et on montre dans le premier cas que $\Gamma_{\omega_{r'+s'+1}} = \omega_{r'+s'}$ et $k_{\omega_{r'+s'+1}} = k_{\omega_{r'+s'}}$ et dans le deuxième cas que $\Gamma_{\omega_{r'+s'+1}} = \omega_{r'+s'} + \mu(y'_s + r' + 1)\mathbb{Z}$ et $k_{\omega_{r'+s'+1}} = k_{\omega_{r'+s'}}$.

Ça revient en fait à démontrer le théorème dans le cas $r+s=1$. On a alors deux cas :

1. Soit $r=0$, $s=1$, i.e. il existe $x \in \mathcal{R}_\mu$ tel que $\overline{x} \in k_\mu$ est transcendant sur k_ν,
2. Soit $r=1$, $s=0$, i.e. il existe $y \in L$ tel que $\mu(y)$ vérifie $\exists n \in \mathbb{Z} \mid n.\mu(y) \in \Gamma_\nu \Rightarrow n=0$.

Dans le premier cas, x est transcendant sur K : s'il était algébrique, $L = K(x)$ serait une extension algébrique de K, et d'après la proposition 4.1.5, k_μ serait algébrique sur k_ν. Ce qui ne peut être le cas puisque $\overline{x} \in k_\mu$ est transcendant sur k_ν.

Dans le deuxième cas, y est transcendant : S'il était algébrique, toujours selon la proposition 4.1.5, Γ_μ/Γ_ν serait de torsion, ce qui ne saurait être le cas puisque $\exists n \in \mathbb{Z} \mid n.\mu(y) \in \Gamma_\nu \Rightarrow n=0$.

En ce qui concerne Γ_ω et k_ω, les deux cas se ramènent à la dernière proposition. Dans le premier cas, $\overline{x}$ transcendant sur k_ν, on est donc dans le deuxième cas de la proposition 4.2.2 : $\Gamma_\omega = \Gamma_\nu$, $k_\omega = k_\nu(\overline{x})$ et $\omega(\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta) = \min_{\alpha\beta}\{\nu(a_{\alpha\beta})\}$. Dans le deuxième cas, $\exists n \in \mathbb{Z} \mid n.\mu(y) \in \Gamma_\nu \Rightarrow n=0$ nous conduit au premier cas de la proposition 4.2.2 : $\Gamma_\omega = \Gamma_\nu + \mu(y)\mathbb{Z}$, $k_\omega = k_\nu$ et $\omega(\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta) = \min_{\alpha\beta}\{\nu(a_{\alpha\beta}) + \beta\mu(y)\}$. □

Corollaire 4.2.4. *Dans les conditions du théorème 4.2.3, on a :*

a)

$$rg.rat(\Gamma_\mu/\Gamma_\nu) + \deg.\mathrm{tr}_{k_\nu} k_\mu \leqslant \deg.\mathrm{tr}_K L. \tag{4.4}$$

et si $K \subset L$ est une extension finie et qu'on a l'égalité dans (4.4), alors Γ_μ/Γ_ν est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et k_μ est une extension de type fini de k_ν.

b)

$$\mathrm{rg}(\mu) + \deg.\mathrm{tr}_{k_\nu} k_\mu \leqslant \mathrm{rg}(\nu) + \deg.\mathrm{tr}_K L. \tag{4.5}$$

et si L est une extension finie de K, $\Gamma_\nu \simeq \mathbb{Z}^k$ muni de l'ordre lexicographique et qu'on a l'égalité dans (4.5), alors $\Gamma_\mu \backsimeq \mathbb{Z}^l$ et k_μ est une extension de type fini de k_ν.

Démonstration. **a)** Soient r et s deux entiers naturels tels que $r \leqslant rg.rat\,\Gamma_\mu/\Gamma_\nu$ et $s \leqslant \deg.\mathrm{tr}_{k_\nu} k_{k_\mu}$, alors d'après le théorème 4.2.3, il existe $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r \in L$ algébriquement indépendants sur K. On a donc $s + r \leqslant \deg.\mathrm{tr}_K L$.
Si on a l'égalité dans (4.4) avec $\deg.\mathrm{tr}_K L = d < +\infty$, alors $r = rg.rat\,\Gamma_\mu/\Gamma_\nu$ et $s = \deg.\mathrm{tr}_{k_\nu} k_\mu$ sont aussi finis, et $s + r = d$. En particulier, l'extension $k(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_n) \subset L$ est une extension algébrique. Donc d'après le proposition 4.1.4, on a $[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$ et $[k_\mu, k_\nu]$ finis. Or d'après le théorème 4.2.3, on a :

$$\Gamma_\omega = \Gamma_\nu + \nu(y_1)\mathbb{Z} + \cdots + \nu(y_r)\mathbb{Z}, \ et$$

$$k_\omega = k_\nu(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_s).$$

Donc Γ_μ/Γ_ν est un $\mathbb{Z}$-module de type fini (il est isomorphe à la somme de $[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$ - copies de $\mathbb{Z} + \nu(y_1)\mathbb{Z} + \cdots + \nu(y_r)\mathbb{Z}$), et $k_\nu \subset k_\mu$ est une extension de type fini ($k_\omega \subset k_\mu$ extension algébrique et $k_\omega = k_\nu(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_s)$).

b) On sait que $rg\,\Gamma_\mu/\Gamma_\nu \leqslant rg.rat\,\Gamma_\mu/\Gamma_\nu$ (proposition 2.3.4), d'où l'inégalité (4.5).
Si maintenant on a l'égalité dans (4.5), alors on l'a aussi dans (4.4) et par conséquent Γ_μ/Γ_ν est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et $k_\nu \subset k_\mu$ est une extension de type fini. Donc si $\Gamma_\nu \backsimeq \mathbb{Z}^k$, alors $\Gamma_\mu \backsimeq \mathbb{Z}^{k+rg.rat\,\Gamma_\mu/\Gamma_\nu}$.

□

EXEMPLE . 4.2.5.*Soit k un corps et x, y deux indéterminées. L'application de $k(x,y)$ à valeurs dans $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_{|lex}$ définie par :*

$$\nu(x) = (1,0) \quad , \quad \nu(y) = (0,1),$$

et pour tout $f = \sum a_{ij} x^i y^j \in k[x,y]$:

$$\nu(f) = \inf\{(i,j) \mid a_{ij} \neq 0\}.$$

est une valuation, en effet, $(1,0)$ et $(0,1)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants, ν est le prolongement à $k(x,y)$ de la valuation triviale sur k décrite dans le théorème

4.2.3 :

$$\nu(f) = \nu(\sum a_{ij}x^iy^j) = \min\{i(1,0) + j(0,1) \mid a_{ij} \neq 0\}.$$

Il a deja été question de cette valuation dans l'exemple 2.1.13 et l'exemple 3.1.14.

Chapitre 5

Surface de Riemann abstraite

5.1 Centre d'une valuation

Soit K un corps, et A un sous-anneau de K.

Définition 5.1.1. *Une valuation ν de K est dite **centrée** en A si $A \subset \mathcal{R}_\nu$. On appelle alors **centre** de ν dans A, l'idéal premier $P = A \cap \mathfrak{m}_\nu$.*

Remarque 5.1.2. En fait, le **centre** de ν dans A est l'unique idéal premier P de A tel que R_ν domine A_P. Inversement, si P est le centre de ν dans A, alors R_ν domine A_P. On peut se restreindre aux anneaux locaux A, le centre de ν dans A est alors l'idéal maximal de A.

Proposition 5.1.3. *Une valuation ν de K est centrée dans un sous-corps $k \subset K$ si et seulement si elle est triviale sur k, i.e. de valeurs nulles pour tout élément de k^*.*

Démonstration. k peut être considéré comme un sous-anneau local de K, d'idéal maximal $\{0\}$. Pour tout $x \in \mathcal{R}_\nu \setminus \mathfrak{m}_\nu$, on a $\nu(x) = 0$. Or dire que ν est centrée dans k est équivalent à dire que $k \subset \mathcal{R}_\nu$ et que $\{0\} = \mathfrak{m}_\nu \cap k$, c'est aussi équivalent à $k \subset \mathcal{R}_\nu$ et $\forall x \in k \setminus \max k = k^*,\ \nu(x) = 0$ (remarque 1.3.4). $\square$

Lemme 5.1.4. *Soit $A \subset K$ un sous-anneau, et P un idéal premier de A. Alors il existe un anneau de valuation $\mathcal{R}_\nu$ de K centré dans A en P, i.e. $A \subset \mathcal{R}_\nu$ et $P = \mathfrak{m}_\nu \cap A$.*

Démonstration. Remplaçant A par A_p, on peut supposer A local d'idéal maximal $p = \mathfrak{m}_A$.
Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-anneaux B de K contenant l'anneau A, tels que $1 \notin pB$. A appartient à $\mathcal{H}$.
Si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ totalement ordonné par inclusion, alors la réunion de tous les éléments de $\mathcal{F}$ est aussi un élément de $\mathcal{H}$. Donc, d'après le lemme de Zorn, $\mathcal{H}$ admet un élément maximal R pour l'inclusion. $1 \notin pR$ donc $pR \neq R$, il existe alors un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R contenant l'idéal pR, de sorte que $R \subset R_\mathfrak{m} \in \mathcal{H}$. Or R est maximal, on en déduit que $R = R_\mathfrak{m}$. R est un anneau local et $p = \mathfrak{m} \cap A$, car p est l'idéal maximal de A et il est inclus dans $\mathfrak{m}$. Il reste ainsi juste à montrer que R est un anneau de valuation de K.
Soit $x \in K$ avec $x \notin R$. Montrons que $x^{-1} \in R$.
Dire que $x \notin R$ implique que $R[x] \notin \mathcal{H}$. Pourtant $A \subset R[x] \subset K$, donc $1 \notin pR[x]$. Par conséquent, il existe une relation de la forme :

$$1 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\,, \qquad a_i \in pR. \tag{5.1}$$

L'élément $1 - a_0$ étant inversible, car il appartient à $\mathfrak{m}$ (voir 1.3.4), la relation (5.1) peut s'écrire sous la forme :

$$1 = b_1 x + \cdots + b_n x^n\,, \qquad b_i \in \mathfrak{m}. \tag{5.2}$$

Si $x^{-1} \notin R$, on aurait de même une relation de la forme :

$$1 = c_1 x^{-1} + \cdots + c_m x^{-m}\,, \qquad c_i \in \mathfrak{m}. \tag{5.3}$$

Parmi toutes les relations (5.2), (5.3) possibles, soient n' et m' les plus petits possibles parmi n et m respectivement :

$$1 = b'_1 x + \cdots + b'_{n'} x^{n'}\,, \qquad b'_i \in \mathfrak{m}. \tag{5.4}$$

$$1 = c'_1 x^{-1} + \cdots + c'_{m'} x^{-m'}\,, \qquad c'_i \in \mathfrak{m}. \tag{5.5}$$

Si $n' \geqslant m'$, multiplions la relation (5.5) par $b'_{n'} x^{n'}$ et soustrayons le résultat de (5.4). On obtient une relation de la forme (5.2) pour un $n < n'$. Contradiction.

De même, si $n' < m'$ et si on multiplie la relation (5.4) par $c_{m'}x^{-m'}$ et qu'on soustrait le résultat de (5.5), on obtient une contradiction. Au définitif, x^{-1} appartient bien à R, ce qui fait de R un anneau de valuation. □

Proposition 5.1.5. *Si A est un anneau intègre et que K est son corps des fractions, alors pour tout idéal premier P de A, la clôture intégrale de A_P est égale à l'intersection de tous les anneaux $\mathcal{R}_\nu$ des valuations de K centrées en P dans A, si on note $\mathfrak{N}(P)$ l'ensemble de ces valuations, on a :*

$$\overline{A_P} = \bigcap_{\nu_i \in \mathfrak{N}(P)} R_{\nu_i}.$$

Démonstration. Soient $\mathfrak{B} = \bigcap_{\nu_i \in \mathfrak{N}(P)} R_{\nu_i}$ et $B = A_P$. Tout anneau de valuation est intégralement clos (remarque 1.1.4), il est donc évident que pour tout $\nu_i \in \mathfrak{N}(P)$, on a $\overline{A_P} \subset R_{\nu_i} \subset \mathfrak{B}$.
Pour l'autre inclusion, il suffit de montrer que pour tout élément $x \in K$ qui ne soit pas entier sur B, il existe un anneau de valuation centré dans B qui ne contienne pas x : Remarquons que l'idéal $(x^{-1})B[x^{-1}]$ ne contient pas l'élément unité 1, car sinon, 1 s'écrirait sous la forme $1 = a_1x^{-1} + a_2x^{-2} + \cdots + a_nx^{-n}$, et x vérifierait $x^n = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$, ce qui contredit le fait que x ne soit pas entier sur B. Il existe, par conséquent, un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $B[x^{-1}]$ qui contient $(x^{-1})B[x^{-1}]$, et d'après le lemme 5.1.4, il existe un anneau de valuation $\mathcal{R}_\nu$ de K centré dans $B[x^{-1}]$ en $\mathfrak{M}$, i.e. $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_\nu \cap B[x^{-1}]$. Le fait que $x^{-1} \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{m}_\nu$ implique que $x \notin \mathcal{R}_\nu$ (remarque 1.3.4). □

5.2 Surface de Riemann

Soient K un corps et $A \subset K$ un sous-anneau. Notons $S(K/A)$ l'ensemble des valuations non triviales de K centrées dans A . On considère $S(K/A)$ comme espace topologique, muni de la topologie suivante :

Pour $x_1, \ldots, x_n \in K$, posons

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x_1,\ldots,x_n) &= S(K/A[x_1,\ldots,x_n])\\ &= \{\nu \in S(K/A) \mid A[x_1,\ldots,x_n] \subset \mathcal{R}_\nu\}.\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{U}(x_1,\ldots,x_n)\cap\mathcal{U}(y_1,\ldots,y_n) = \mathcal{U}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$, alors la collection $\mathfrak{F} = \{\mathcal{U}(x_1,\ldots,x_n) \mid n \geqslant 0,\ \textit{et}\ x_i \in K\}$ constitue une base d'ouverts pour une topologie sur $S(K/A)$, i.e. un ouvert pour cette topologie, est un sous-ensemble de $S(K/A)$ qui peut être écrit comme réunion d'éléments de $\mathfrak{F}$.

Définition 5.2.1. *La topologie définie ci-dessus est dite* ***topologie de Zariski*** *sur $S(K/A)$. L'ensemble $S(K/A)$ muni de la topologie de Zariski est appelé* ***variété abstraite de Riemann-Zariski*** *ou* ***surface de Riemann*** *de K sur A.*

Soit k un corps. Une valuation ν de K est centrée dans k si et seulement si elle est triviale sur k (proposition 5.1.3). Dans ce cas là, $S(K/k)$ est l'ensemble des valuations ν de K dont la restriction à k est la valuation triviale. La topologie de Zariski sur $S(K/k)$ est alors la topologie dont la base d'ouverts $\mathfrak{F}$ est constituée des ensembles $\mathcal{U}(B)$, où B parcourt l'ensemble des sous k-algèbres de type fini de K, c.à.d. de la forme $B = k[x_1,\ldots,x_n]$, $x_1,\ldots,x_n \in K$:

$$\mathcal{U}(B) = \{\nu \in S(K/k) \mid B \subset \mathcal{R}_\nu\}.$$

Remarque 5.2.2. On a $\mathcal{U}(k) = S(K/k)$ et $\mathcal{U}(B)\cap\mathcal{U}(B') = \mathcal{U}([B,B'])$ où $[B,B']$ désigne le sous-anneau de K engendré par B et B', i.e. $[B,B'] = \{b_ib'_j \mid b_i \in B\ \textit{ et }\ b'_j \in B'\}$. Remarquons aussi que si $B \subset B'$ alors $\mathcal{U}(B) \supset \mathcal{U}(B')$.

Remarque 5.2.3. Si $k \subset K$ est une extension algébrique, alors d'après la proposition 4.1.5, le seul prolongement à K de la valuation triviale sur k, est la valuation triviale sur K et $S(K/k)$ est vide.

Supposons donc que K est une extension de degré de transcendance fini du corps k.

Théorème 5.2.4. *La clôture d'un élément ν de $S(K/k)$ est l'ensemble des valua-*

tions μ de $S(K/k)$ obtenues par composition avec ν :

$$\begin{aligned}\overline{\{\nu\}} &= \{\mu \in S(K/k) \ \mid \ R_\mu \subset R_\nu\} \\ &= \{\mu \in S(K/k) \ \mid \ \nu \preceq \mu\}.\end{aligned}$$

Démonstration. $\subseteq$) : Soit $\mu \in \overline{\{\nu\}}$, si μ n'était pas composée avec ν alors $\mathcal{R}_\mu \not\subseteq \mathcal{R}_\nu$, i.e. il existe $x \in K$ tel que $\mu(x) \geqslant 0$ et $\nu(x) < 0$. Posons $B = k[x]$, on a alors $\nu \notin \mathcal{U}(B)$ et $\mu \in \mathcal{U}(B)$, c.à.d. ν appartient au fermé $S(K/k) \setminus \mathcal{U}(B)$ alors que μ n'y appartient pas ! Contradiction avec le fait que $\mu \in \overline{\{\nu\}}$ censé être l'intersection de tous les fermés contenant ν.
$\supseteq$) : Supposons μ composé avec ν, donc $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{R}_\nu$. Pour toute k-algèbre B de type fini de K, telle que ν appartient au fermé $S(K/k) \setminus \mathcal{U}(B)$, on a $B \not\subseteq \mathcal{R}_\nu$, et à fortiori $B \not\subseteq \mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{R}_\nu$,d'où μ appartient aussi au fermé $S(K/k) \setminus \mathcal{U}(B)$. En d'autres termes, tout fermé de base qui contient ν contient aussi μ, donc $\mu \in \overline{\{\nu\}}$. □

Corollaire 5.2.5.*La clôture $\overline{\{\nu\}}$ est isomorphe à la variété abstraite de Riemann $S(k_\nu/k)$ du corps résiduel de ν sur k.*

Démonstration. Considérons l'application $\psi : \overline{\{\nu\}} \to S(k_\nu/k)$ qui à toute valuation μ composée avec ν associe la valuation $\overline{\nu}$ de k_ν telle que $\mu = \nu \circ \overline{\nu}$. Cette application est clairement bijective, la réciproque étant assurée par la proposition 3.1.11. □

Corollaire 5.2.6.*Si* $\operatorname{deg.tr}_{\mathrm{k}} K = 1$ *alors tout point de $S(K/k)$ est fermé*

Démonstration. Supposons $\operatorname{deg.tr}_{\mathrm{k}} K = 1$. Soit $\nu \in S(K/k)$, c'est donc un prolongement de la valuation triviale ν_0 de k. D'après le corollaire 4.2.4, on a $rg\,\nu + \operatorname{deg.tr}_{\mathrm{k}} k_\nu \leqslant \operatorname{deg.tr}_{\mathrm{k}} K$, i.e. $rg\,\nu + \operatorname{deg.tr}_{\mathrm{k}} k_\nu \leqslant 1$. Par conséquent, ν n'étant pas la valuation triviale de K, elle est de rang 1. En d'autres termes, le nombre de valuations μ de K telles que $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{R}_\nu$ est zéro, i.e.$\overline{\{\nu\}} = \{\nu\}$.

□

La surface de Riemann n'est, en général, pas un espace de Séparé, mais il est quasi-compact :

Proposition 5.2.7. *La variété de Riemann $S(K/k)$ munie de la topologie de Zariski est un espace quasi-compacte.*

Démonstration. Soient $Z = \{0, +, -\}$ et Z^k l'ensemble de toutes les applications $\varphi : K \to Z$. Si l'on muni Z de la topologie dont les ouverts sont $\emptyset$, $\{0, +\}$ et Z, et Z^k de la topologie produit (i.e. dont les ouverts de base sont de la forme $V(x, U) = \{\varphi \in Z^k \mid \varphi(x) \in U\}$, où $x \in K$ et U est un ouvert de Z), alors on peut considérer $S(K/k)$ comme un sous-espace topologique de Z^k. En effet, une valuation $\nu \in S(K/k)$ peut s'écrire sous la forme $\nu : K \to Z$ et la topologie de Z^k induite sur $S(K/k)$ est alors définie comme suit :
Pour tout $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$, l'ensemble $\mathcal{V}(x_1, \ldots, x_n) = \cap_{i=1}^{n} V(x_i,\ \{0, +\})$ est un ouvert de Z^k inclus dans S, il est en fait égal à l'ouvert de base $\mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{U}(B),\ B = k[x_1, \ldots, x_n]$ de la topologie de Zariski. Les $\mathcal{V}(x_1, \ldots, x_n)$, forment une base d'ouverts pour la topologie de $S(K/k)$.

Maintenant, si on munit Z d'une topologie plus fine qui fait de Z un espace séparé et de $S(K/k)$ un fermé de Z^k, alors Z étant fini, serait compact. On pourrait alors conclure que, Z^k étant muni de la topologie produit et que $S(K/k)$ étant un fermé de Z^k, sont aussi compacts. Donc si l'on muni Z d'une topologie moins fine, $S(K/k)$ serait quasi-compact.
La topologie plus fine que l'on va considérer sur Z est la topologie discrète, c.à.d. la topologie dont les ouverts sont les sous-ensembles de Z. Il est évident que pour cette topologie, Z est séparé, et donc compact (puisqu'il est fini.)
Reste à montrer que $S(K/k)$ est fermé dans Z^k pour cette topologie.

Soit $x \in K$. Posons

$$\psi_x : Z^k \to Z$$
$$\varphi \mapsto \varphi(x)$$

L'image inverse de tout ouvert U de Z par ψ_x c'est l'ouvert $V(x, U)$, ψ est par conséquent une application continue.

Posons, à présent, pour tout $x,\ y \in K$:

$$F_{xy} = A_{xy} \cap M_{xy},$$

où

$$A_{xy} = \psi_x^{-1}\Big(\{-\}\Big) \ \bigcup \ \psi_y^{-1}\Big(\{-\}\Big) \ \bigcup \ \psi_{x+y}^{-1}\Big(\{0,+\}\Big)$$

et

$$M_{xy} = \psi_x^{-1}\Big(\{-\}\Big) \ \bigcup \ \psi_y^{-1}\Big(\{-\}\Big) \ \bigcup \ \psi_{xy}^{-1}\Big(\{0,+\}\Big)$$

Un élément $\varphi \in Z^k$ est dans $S(K/k)$ si et seulement s'il vérifie les trois conditions suivantes :

1. L'ensemble $V = \{x \in K \mid \varphi(x) \in \{0,+\}\}$ est un anneau, i.e. stable par l'addition et la multiplication ;
2. L'anneau k est inclus dans V ;
3. Si $x \in K$, alors soit $x \in V$, soit $x^{-1} \in V$.

On en déduit que $\varphi \in S(K/k)$ si et seulement s'il vérifie les trois conditions suivantes :

1. $\forall x, y \in K$ tels que $\varphi(x) \geqslant 0$ et $\varphi(y) \geqslant 0$: $\varphi(x+y) \geqslant 0$ et $\varphi(xy) \geqslant 0$;
2. $\forall x \in k : \varphi(x) \geqslant 0$;
3. $\forall x \in K$: soit $\varphi(x) \geqslant 0$, soit $\varphi(x^{-1}) \geqslant 0$.

Et donc si et seulement si

1. $\forall x, y \in K : \varphi \in F_{xy} = A_{xy} \cap M_{xy}$ qui est fermé dans Z^k ;
2. $\forall x \in K : \varphi \in \psi_x^{-1}\Big(\{0,+\}\Big)$, c'est un fermé de Z^k ;
3. $\forall x \in K : \varphi \in \Big(\psi_x^{-1}(\{0,+\}) \bigcup \psi_{x^{-1}}^{-1}(\{0,+\})\Big)$, qui est encore un fermé de Z^k.

$S(K/k)$ est donc un sous-espace fermé de Z^k, et il est donc quasi-compacte pour la topologie de Zariski. □

Remarque 5.2.8. Quand K est un corps de fonctions algébriques sur un un corps algébriquement clos k de caractéristique 0 (c.à.d., K est une extension de type fini de k), Zariski a donné une classification des anneaux de valuations de K contenant k, et utilisant cela et la quasi-compacité de la variété de Riemann $S(K/k)$, il a réussi à démontrer en caractéristique 0, de façon purement algébrique, à travers la notion d'**uniformisation local**, la résolution des singularités d'une variété algébrique de dimensions 2 et 3, mais on ne développera pas ce point ici. C'est dire les vastes domaines d'application de la théorie des valuations. Pour plus de détail, voir [5], [6], [7] et[8]

Pour finir, donnons quelques autres exemples de valuations.

5.3 Exemples

EXEMPLE . 5.3.1.*Soit k un corps algébriquement clos. Soit X l'espace affine $\mathbb{A}^1_k$. Soient p un point de X et $\mathcal{O}_{X,p}$ l'anneau des fonctions rationnelles régulières en p. Le corps k étant algébriquement clos, tout élément $h \in \mathcal{O}_{X,p}$ s'écrit sous la forme :*

$$h = (x-p)^n \frac{f}{g};$$

*où $f(p) \neq 0$ et $g(p) \neq 0$. En particulier, f/g est inversible dans $\mathcal{O}_{X,p}$. On déduit que l'anneau $\mathcal{O}_{X,p}$ est un anneau de valuation discrète de rang 1, avec $x - p$ comme uniformisante. Le corps des fractions de $\mathcal{O}_{X,p}$ est $k(x)$. On obtient ainsi une valuation ν discrète de rang 1 de $k(x)$, où $\nu(h)$ est l'**ordre du zéro** s'il est positif, ou l'**ordre du pôle** s'il est négatif de f en p.*

EXEMPLE . 5.3.2.*Soit K un corps. Soient x, y deux indéterminées et α un nombre irrationnel positif. Alors l'application définie pour tout $f = \sum c_{ij}x^iy^j \in k[x,y]$ par :*

$$\nu(f) = \min\{i + j\alpha \mid c_{ij} \neq 0\}$$

est une valuation de $k(x,y)$. En effet, c'est le prolongement à l'extension transcendante $k(x,y)$ de la valuation triviale de k ; 1 et α étant $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants avec $\nu(x) = 1$ et $\nu(y) = \alpha$.

EXEMPLE . 5.3.3.*Soit A un anneau factoriel. Alors tout élément x de A s'écrit sous la forme*

$$x = \prod_{p_i} {p_i}^{n_i} \tag{5.6}$$

où les p_i parcourent l'ensemble des élément irréductibles de A (i.e. (p_i) parcourt l'ensemble des idéaux premiers de A). Pour tout i, on a la valuation ν_{p_i} de K corps des fractions de A définie par :

$$\nu_{p_i}(x) = n_i,$$

*où n_i est l'exposant de p_i dans (5.6). Cette valuation est dite **valuation p_i-adique** de A. Son anneau de valuation est l'ensemble $\{x/y \in K \mid \nu_{p_i}(x) \geqslant \nu_{p_i}(y)\}$ qui n'est autre que l'anneau local $A_{(p_i)}$.*

EXEMPLE . 5.3.4.*Soit k un corps. Il est facile de vérifier que l'application ν définie pour tout polynôme $f \in k[x]$ par :*

$$\nu(f) = -d^\circ f$$

est une valuation de $k(x)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Son anneau est l'anneau local $k[x^{-1}]_{(x^{-1})}$. En effet, si $h \in k(x)$ alors h s'écrit sous la forme $h = f(x)/g(x)$. L'élément h est dans $\mathcal{R}_\nu$ si et seulement si $d^\circ f \leqslant d^\circ g$. Posons :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, \quad b_m \neq 0.$$

On a alors :

$$f(x) = x^n(a_0 x^{-n} + \cdots + a_n), \quad a_n \neq 0,$$

$$g(x) = x^m(b_0 x^{-m} + \cdots + b_m), \quad b_m \neq 0.$$

Donc l'élément h est dans $k[x^{-1}]_{(x^{-1})}$ si et seulement si $n \leqslant m$.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki. *Algèbre commutative, Chapitres 5, 6 et 7.* Masson, 1985.

[2] H. Matsumura. *Commutative Algebra.* Benjamin/Cumming Publ. Co, 1980.

[3] P. Ribenboim. *Théorie des valuations.* Les Presses de l'Universite de Montréal, 1964.

[4] M. Vaquié. Valuations. *Progr. in Math. 181*, Resolution of singularities. A research text- book in tribute to Oscar Zariski, 2000.

[5] O. Zariski. The reduction of the singularities of an algebraic surface. *Annals of Math.*, (40) :639–389, 1939.

[6] O. Zariski. Local uniformization of algebraic varieties. *Annals of Math.*, (41) :852–896, 1940.

[7] O. Zariski. A simplified proof for the resolution of singularitites of an algebraic surface. *Annals of Math.*, (43) :583–593, 1942.

[8] O. Zariski. Reduction of the singularities of algebraic three dimentional varieties. *Annals of Math.*, (45) :472–511, 1944.

[9] O. Zariski and P. Samual. *Commutative algebra II.* Van Nostrand, 1958.