UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DES SCIENCES MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES

Spécialité : algèbre et théorie des nombres

Sujet :

Déterminants de Hankel et applications

Présenté par :

REMAGUI TEMAM Khalida

Résumé : Soit A un anneau commutatif et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans A.la matrice de ***Hankel*** H_n associée est :

$$H_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & .... & \alpha_n \\ \alpha_1 & .... & & \\ .... & ... & & \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & & \alpha_{2n} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}_n$ = det H_n est appelé Déterminant de Hankel associé à la suite (α_n) . Nous étudions des matrices de Hankel et donnons une méthode pour évaluer leurs déterminants.

Le déterminant de Hankel permettent de savoir si la fonction génératrice $\sum \alpha_n z^n$ décrit ou non une fonction rationnelle.Un théorème de **Borel-Dwork** permet de caractériser les séries formelles à coefficients algébriques représentant des fractions rationnelles par une propriété sur des domaines de convergence dans le plongement p-adique

THESE DE MAGISTER :

Directeur de mémoire : **M**[er] **BENZAGHOU Benali** professeur a l'U.S.T.H.B

Dédicaces

C'est avec un cœur joyeux et un sentiment de bonheur profond que j'achève la présentation de mon mémoire pour passer aux dédicaces, Je citerai ainsi toutes les personnes qui me sont chères aux yeux.

Mon premier sentiment d'amour et d'affection sera pour mes chers parents sans lesquels je ne serais jamais arrivée là où j'en suis.
Je les remercie pour tous les sacrifices qu'ils ont consentit en ma faveur et cette fin de garantir mon avenir.

Pour mon adorable et chère mère qui a été compréhensive et aimante pendant toute la période de mes études …ou plutôt dirais-je toute ma vie.

Pour mon cher père qui m'a soutenu et aidé, qui m'a soulagé avec sa gentillesse et qui a veillé confort et surtout à mon transport, je précise même après mon mariage.

Je passe ensuite à mes frères et soeurs à qui je souhaite réussite et succès dans leurs vies futures surtout Souâd et Selma.

Je serais profondément heureuse de dédier ce modeste travail à mon mari Nabil pour m'avoir toujours encouragé malgré la distance qui nous sépare et je tiens à remercier mes beaux parents.
Je site aussi mon adorable grand-mère SALIMA à qui je souhaite une longue vie et mes chères tantes Houria et Samia pour leur soutien.
Sans oublier la charmante compagnie de mes amies : Aichouche, Zahia et particulièrement Safia à qui je souhaite beaucoup de bonheur et également l'ensemble de mes professeurs.
Je tiens à remercie mon amour et adorable bébé et binôme Réda qui m'a encouragé pour arrivé à ce jour, en restant calme, gentil en me déchirant quelques feuilles.

Remerciements

En premier lieu,je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de thèse le Docteur BENZAGHOU .B professeur à l'U.S.T.H.B.pour ses orientations et les conseils qu'il m'a donnés durant tout ce travail,malgré les divers responsabilités qu'il occupe.

Je remercie vivement tous les enseignants de l'U.S.T.H.B en particulier de la faculté de mathématique,qui m'ont enseigné depuis ma première année de graduation et m'ont donné tout au long de mes études des connaissances théoriques très riches.Des remerciements très particuliers sont adressés à Mr Zitouni .M,Mr Tadjine .A et le membre du groupe de travail qui contribuent à une ambiance chaleureuse et un lieu de travail très agréable.

Je remercie ma famille et plus particulièrement mes parents pour le soutien moral et financier qu'ils m'ont apporté durant mes études.Ce travail leur est entièrement dédié ainsi qu'a mon bébé Réda

REMAGUI TEMAM KHALIDA

Introduction

Chapitre 1

Chapitre 2

Chapitre3

Chapitre4

Introduction:

Soit A un anneau commutatif et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans A.La matrice de ***Hankel*** H_n associée est :

$$H_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & .... & \alpha_n \\ \alpha_1 & .... & & \\ .... & ... & & \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & & \alpha_{2n} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}_n$ = det H_n est appelé Déterminant de Hankel associé à la suite (α_n)

A partir de divers articles, nous étudions de manière plus détaillée des matrices de Hankel et donnons une méthode pour évaluer leur déterminant lorsque certaines conditions sur la fonction génératrice exponentielle, associée à la suite (α_n) sont données. Plusieurs cas particuliers bien connus sont ainsi déduits dans ce contexte (polynôme de Bell, d'Hermite, ….) .

Lorsque les matrices de Hankel associées à une même suite dans IR ont des déterminants tous positifs, elles permettent de définir un produit scalaire et donnent donc lieu à un système de polynômes orthogonaux.
Nous nous inspirons de ce fait pour définir des «produits scalaires généralisés » ainsi que des « systèmes de polynômes orthogonaux associés ».

L'idée de base consiste à relier une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ (dans un anneau A commutatif unitaire intégré, éventuellement un anneau de polynômes) à la base canonique $(x^n)_{n\geq 0}$ de A[x] par une application linéaire ϕ : $x^n \rightarrow \alpha_n$, appelée ombre de α (le terme est dû à Sylvester).

De plus, les déterminants de Hankel permettent également de savoir si la fonction génératrice $\sum \alpha_n z^n$ décrit ou non une fonction rationnelle.

Et que si K un corps de nombres et $f \in K[[x]]$ une série formelle à coefficients dans K. A chaque extension évaluée C de K correspond un domaine de convergence de *f* dans C.

Le théorème de **Borel-Dwork** permet de caractériser les séries formelles *f* représentant des fractions rationnelles par une propriété sur ces domaine de convergence

Chapitre 1

Polynômes de Bell

I.1 Polynômes de Bell

I.1.1 Définition :

Nous désignons par A un anneau unitaire commutatif intègre qui contient $\mathbb{Z}$. Cela peut être aussi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$, pour certain nombre premier p ou les anneaux de polynômes associés $\mathbb{Z}[t]$, $\mathbb{Z}_p[t]$ ou $\mathbb{Z}_{(p)}[t]$.

Les polynômes de Pochhammer

$$(x)_0 = 1,\ (x)_n = x(x-1)\ \dots\ (x-(n-1)) \qquad \text{pour } n \geq 1$$

Constituent une base de A module libre A[x] et considéreront l'application linéaire :

$$\Phi : A[x] \rightarrow A[x]$$
$$(x)_n \rightarrow x^n$$

On définit alors les polynômes et nombre des Bell par :

$$B_n(x) = \phi\ (x^n) \qquad et \qquad B_n = B_n(1) = \phi\,(\mathrm{x}^n)\big|_{x=1}$$

Les modèles de Sterling de deuxième espèce S(n,k)donnent de manière explicite

comme $$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k$$

$$B_n(x) = \phi\ (x^n) = \phi\ (\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x^k \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

Donc $B_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ et $B_n \in \mathbb{Z}$

Les premières valeurs B_n et $B_n(x)$ sont suivantes :

n	B_n	Polynômes de Bell $B_n(x)$
0	1	1
1	1	x
2	2	$x + x^2$
3	5	$x + 3x^2 + x^3$
4	15	$x + 7x^2 + 6x^3 + x^4$
5	52	$x + 15x^2 + 25x^3 + 10x^4 + x^5$
6	203	$x + 31x^2 + 90x^3 + 65x^4 + 15x^5 + x^6$
7	877	$x + 63x^2 + 301x^3 + 350x^4 + 140x^5 + 21x^6 + x^7$
8	4140	$x + 127x^2 + 966x^3 + 1701x^4 + 1050x^5 + 266x^6 + 28x^7 + x^8$
9	21147	$x + 255x^2 + 3025x^3 + 7770x^4 + 695x^5 + 2646x^6 + 462x^7 + 36x^8 + x^9$

I.1.2 Premières propriétés :

Par tous les entiers m,n ≥ 0, on a la relation :

$$x^n \phi\ ((x)_m) = x^{m+n} = \phi\ ((x)_{m+n}) = \phi\ ((x)_n (x-n)_m)$$

et par linéarité on

$$x^n\ \phi\ (f(x)) = \phi\ ((x)_n f(x-n)) \qquad \text{pour tout polynôme } f(x) \in A[x]$$

En particulier avec $n = 1$ cela donne

$$x\phi\ (f(x)) = \phi\,((x)f(x-1)) \qquad \text{pour tout polynôme } f(x) \in A[x]$$

et en prenant $f(x) = (x + 1)^n$ on trouve la relation de récurrence

$$B_{n+1}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x), \qquad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

$$B_{n+1}(x) = x\ \phi\ ((x+1)^n) = x\phi\ (\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k) = x\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\phi(x^k)$$

ou

$$B_{n+1}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)$$

On peut écrire également

$$\phi\ ((x)_n) = x^n = e^{-x}e^{x}x^n = e^{-x}x^n\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!} = e^{-x}\sum_{k\geq 0}\frac{x^{n+k}}{k!} = e^{-x}\sum_{k\geq n}\frac{x^k}{(k-n)!} = e^{-x}\sum_{k\geq 0}\frac{(k)_n}{k!}x^k$$

Alors

$$\phi\ ((x)_n) = e^{-x}\sum_{k\geq 0}\frac{(k)_n}{k!}x^k$$

Et par linéarité on a :

$$\phi(f(x)) = e^{-x}\sum\frac{f(k)}{k!}x^k \qquad \text{pour tout polynôme } f(x) \in \mathrm{A}[x]$$

En considérant en particulier $f(x) = x^n$ on obtient la formule de Dobinski :

$$B_n(x) = \phi(x^n) = e^{-x}\sum\frac{k^n}{k!}x^k, \quad B_n = \frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}$$

I.2.1 Polynômes de Bell (exponentiels) partiels :

Sont les polynômes $B_{n,k} = B_{n,k}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-k+1})$ de le suite infinie d'indéterminées $x_1, x_2, \ldots.$

Définies par le développement en série double (formelle)

$$\phi\ (t,u) = \exp(u\sum x_m\frac{t^m}{m!}) = \sum_{n,k\geq 0}B_{n,k}\frac{t^n}{n!}u^k$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=1}^{n}u^k B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots.)\right\}$$

Ou bien ce qui revient au même, par développement en série de simple :

$$\frac{1}{k!}\Big(\sum_{m\geq 1} x_m \frac{t^m}{m!}\Big)^k = \sum_{n\geq k} B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1})\frac{t^n}{n!} \qquad \text{avec} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Théorème : [1]

Les polynômes de Bell partiels sont à cœfficients entiers, homogènes de degré k, de poids n, et ont pour expression exacte :

$$B_{n,k}(x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots,x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{c_1!c_2!\ldots(1!)^{c_1}(2!)^{c_2}\ldots} x_1^{c_2} x_2^{c_2}\ldots$$

La sommation ayant lieu sur

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots = n$$
$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = k$$

Nous trouvons une autre formule pour $\phi\ (t,u)$

$$\phi(t,u) = exp\Big(u\Big(\sum_{m\geq 1} x_m \frac{t^m}{m!}\Big) = \sum_{k\geq 0} \frac{\Big(u\sum x^m \frac{t^m}{m!}\Big)^k}{k!} = \frac{u^k}{k!}\Big(\sum_{m\geq 0} x_m \frac{t^m}{m!}\Big)^k$$

$$\phi\ (t,u) = \sum_{k\geq 0}\frac{u^k}{k!}\left\{\sum_{c_1+c_2+\ldots\ldots=k}\frac{k!}{c_1!c_2!\ldots}\Big(x_1\frac{t}{1!}\Big)^{c_1}\Big(x_2\frac{t}{2!}\Big)^{c_2}\ldots\right\}$$

$$= \sum_{c_1+c_2+\ldots\ldots\geq 0}\frac{u^{c_1+c_2\ldots\ldots}t^{c_1+2c_2\ldots\ldots}}{c_1!c_2!\ldots\ldots(1!)^{c_1}(2!)^{c_2}} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \qquad (2)$$

On obtient la formule en utilisant l'identité multinomiale :

Si $x_1,x_2,\ldots,x_m$ sont des éléments permutables d'un anneau implique

$x_ix_j = x_jx$ *ou* $1\leq i,j\leq m$

On pour tout entier $n\geq 0$

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i\Big)^n = (x_1+x_2+,\ldots\ldots+x_m)^n = \sum_{a_1,a_2,\ldots\geq 0}\binom{n}{a_1,a_2,\ldots.a_m} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_m^{a_m}$$

La dernière sommation ayant lieu sur tous les m – uples $(a_1,\ldots\ldots a_m)$ d'entiers $a_i\geq 0$

Tels que $a_1+a_2+\ldots+a_m = n$

Les polynômes de Bell (exponentiels) complet Y_n

$Y_n = Y_n(x_1,x_2,.....x_n)$ sont définis par :

$$\phi\,(t,1) = exp(\sum_{m\geq 0} x_m \frac{t^m}{m!}) = 1 + \sum_{n\geq 1} Y_n(x_1,x_2,.....)\frac{t^n}{n!}$$

C'est-à-dire :

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(x_1,x_2,...,x_{n-k+1}) \qquad et \qquad Y_0 = 1$$

Séries de Bell pour les indices négatifs :

Nous allons définir maintenant les séries de Bell d'indices négatifs on commence par prolonger $\phi\,((x)_n) = x^n$ et les polynômes de Pochhammer comme :
$(x)_{n+1} = (x-n)(x)_n$ *avec* $(x)_0 = 1$, il convient de poser :

$$(x)_{-1} = \frac{1}{x+1} \;,\; (x)_{-2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \;,\; (x)_{-n} = \frac{1}{(x+n)_n}$$

On doit respecter la relation $x^n\Phi(f(x)) = \Phi((x)_n f(x-n))$ on peut ainsi écrire :

$$\phi\,((x)_{-n}) = x_{-n}\phi\,((x)_n(x-n)_{-n}) = x^{-n}\phi\,((x)_n\frac{1}{(x)_n}) = x^{-n}\phi\,(1) = x^{-n}$$

$$x^{-n} = \sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}(x)_{-k} = \sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}\frac{1}{(x+k)_k}$$

et il ne reste ainsi plus qu'à poser :

$$B_{-n}(x) = \phi\,(x^{-n}) = \phi\,(\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}\frac{1}{(x+k)_k}) = \phi\,(\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}(x)_{-k}) = \sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}\phi\,((x)_{-k})$$

$$= \sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} x^{-k} \text{ pour } n \geq 0$$

Alors

$$B_{-n}(x) = \sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} x^{-k}$$

Ou $\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = (-1)^{n+k}\, S(n,k)$

II- Nombres de Stirling (rappels)

II- 2 Nombres de Stirling de seconde espèce S(n,k)

Définition :

Le nombre $S(n,k)$ de k partitions d'une ensemble N à n éléments s'appelle nombre de Stirling de seconde espèce. Donc $S(n,k) > 0$ si $1 \leq k \leq n$

On pose $S(0,0) = 1$ et $S(0,k) = 0$ si $k \geq 1$

Théorème :

Le nombre de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ vaut :

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^k \binom{k}{j} (k-j)^n \quad 1 \leq k \leq n$$

La formule encore valable si $k>n$ ($\Rightarrow S(n,k) = 0$)

1- Diverses fonctions génératrices des *S(n,k)* :[1]

Théorème :

Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ ont pour fonction génératrice « verticale »

$$\phi_k(t) = \sum_{n \geq k} S(n,k) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^t-1)^k \qquad k \geq 0$$

Et on a comme résultats :

1. Les $S(n,k)$ ont pour fonctions génératrice « horizontale »

$$x^n = \sum_{0 \leq k \leq n} S(n,k)(x)_k$$

On identifie les coefficients de $\frac{t^n}{n!}$ dans les nombres extrêmes de :

$$\sum_{n \geq 0} x^n \frac{t^n}{n!} = e^{tx} = \{1 + (e^t-1)\}^x = \sum (x)_k \frac{(e^t-1)^k}{k!} = \sum_{0 \leq k \leq n} (x)_k \sum_{n \geq 0} S(n,k) \frac{t^n}{n!}$$

Car :

$$(1+t)^x = \sum_{n \geq 0} \binom{x}{n} t^n = \sum_{n \geq 0} (x)_n \frac{t^n}{n!}$$

2. Les S(n,k) admettent la fonction génératrice rationnelle :

$$\sum_{0\le k\le n} S(n,k)u^{n-k} = \frac{1}{(1-u)(1-2u)...(1-ku)}$$

En effet la décomposition en éléments simple de la fraction rationnelle $u^k\ \varphi_k$ fait apparaître :

$$u^k\ \varphi_k = \frac{u^k}{(1-u).........(1-ku)} = \sum_{0\le j\le k} \frac{(-1)^j}{k!}\binom{k}{j}\frac{1}{1-(k-j)u}$$

$$= \sum_{0\le j\le k} \frac{(-1)^j}{k!}\binom{k}{j}\sum (k-j)^n u^n$$

$$= \sum_{n\ge 0}\left\{u^k\,\frac{1}{k!}\sum(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n\right\} = \sum_{n\ge k} S(n,k)u^n$$

Théorème :

On a la formule exacte $S(n,k) = \sum_{c_1+c_2+.......+c_k=n-k} 1^{c_1}2^{c_2}......k^{c_k}$

Par exemple :

$S(5,2) = 1^3 + 1^2.2 + 1.2^2 + 2^3 = 15$

2- Nombres de Stirling de première espèce *s(n,k)* et leurs fonctions génératrices[1]

Les $s(n,k)$ ont pour fonction génératrices « double »

$$\psi(t,u) = \sum_{n\ge k} s(n,k)\,\frac{t^n}{n!}\,u^k$$

Ou pour fonction génératrice « verticale »

$$\sum_{n\ge k} s(n,k)\,\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\big[\log(1+t)\ \big]^k$$

Donc $s(n,k) = 0$ si l'on n'a pas $1\le k\le n$ sauf $s(0,0) = 1$

La matrice triangulaire infinie (inférieure) des $s(n,k)$ et l'inverse de celle des $S(n,k)$

$|[s(n,k)]| = |[S(n,k)]|^{-1}$ ce qui signifie $f_n = \sum_{n\ge k} S(n,k)\, g_k \Leftrightarrow g_n = \sum_{n\ge k} s(n,k)\, f_k$

Théorème :

Les $s(n,k)$ ont pour fonction génératrice « horizontale »

$(x)_n = \sum_{k \le n} s(n,k)\, x^k$ *et* $\langle x \rangle_n = \sum_{0 \le k \le n} |s(n,k)| x^k$

Où

$(x)_n = x(x-1)\ldots\ldots(x-n+1)$

$\langle x \rangle_n = x(x+1)\ldots\ldots(x+n-1)$ $(x)_0 = \langle x \rangle_0 = 1$

Il suffit d'identifier les coefficients de $\frac{t^n}{n!}$ comme :

$$(1+t)^x = \sum_{n \ge 0} \binom{x}{n} t^n = \sum_{n \ge 0} (x)_n \frac{t^n}{n!}$$

Et

$$(1-t)^{-x} = \sum \binom{-x}{n} (-1)^n t^n = \sum_{n \ge 0} \langle x \rangle_n \frac{t^n}{n!}$$

Alors :

$$\sum_{0 \le k \le n} |s(n,k)| x^k \frac{t^n}{n!} = (1-t)^{-x} = \sum_{n \ge 0} \langle x \rangle_n \frac{t^n}{n!}$$

3. Les $s(n,k)$ ont pour fonction génératrice « horizontale »

$\psi(u) = \sum_{n \ge k} s(n,k)\, u^{n-k} = (1-u)(1-2u)\ldots\ldots(1-(n-1)u)$

$\psi(-u) = \sum_{1 \le k \le n} |s(n,k)|\, u^{n-k} = (1+u)(1+2u)\ldots\ldots(1+(n-1)u)$

Chapitre II

Matrice de Hankel

Nous considérons en toute généralité un anneau A unitaire, commutatif et intègre. Et une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ *dans* A . Une matrice dite de ***Hankel*** est de la forme :

$$H_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . & \alpha_n \\ \alpha_1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & . & . & . & \alpha_{2n} \end{pmatrix}$$

Nous étudions de manière plus détaillée des matrices de Hankel et donnons une méthode pour évaluer leurs déterminants lorsque certaines conditions sur la fonction génératrice exponentielle associée à la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ sont données et ceci pour plusieurs cas particuliers (polynôme de Bell, Euler, …)

II- Déterminant de Hankel :

II-1- Définition

Soit $a = (a_n)$ une suite d'éléments d'un corps K, on appelle déterminant de Hankel de rang n et d'ordre k de la suite a et on note $H_k^n(a)$ le déterminant $[\alpha_{ij}]$, $0\leq i\leq k$, $0\leq j\leq k$ où $\alpha_{ij} = a_{n+i+j}$

Le déterminant $\mathcal{H}_0^n(a)$ est appelé n^{ieme} déterminant de Kronecker de la suite (a) .

On définit le produit de Hurwitz $u\varpi v$ de deux suites u et v par le produit de deux séries de Hurwitz $g_u(x) = \sum_{n\geq 0} u(n)\frac{x^n}{n!}$ et $g_v(x) = \sum_{n\geq 0} v(n)\frac{x^n}{n!}$

$$g_u(x).g_v(x) = g_{u\varpi v(x)}$$

$$u\varpi v(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u(k)\,v(n-k)$$

Le groupe additif sous – jacent agit alors par le produit de Hurwitz sur l'ensemble.

$\mathcal{F}(|N, A) = \{$fonctions $\alpha : IN \to A\} = \{$suites $(\alpha_n)_{n\geq 0} \subset A\}$

Pour $a \in A$ et $\alpha \in \mathcal{F}(IN, A)$ on définit $T^a{}_\alpha \in \mathcal{F}(IN, A)$ par :

$$T^a\alpha = a^q\varpi\alpha \qquad \text{et } a^q \text{ est la suite } (a^n)$$

$$(T^a{}_\alpha)_n = a^{(q)}\varpi\alpha(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\alpha_k$$

On a $T^aT^b = T^{a+b}$ $(a,b \in A)$.

II-2- Etude d'opérateur de convolution T^a :

$P : N \to A[x]$ $\quad a \in A$

Une nouvelle suite $T^a P : |N \to A[x]$

$$(T^a P)_n(x) = T^a P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}P_k(x) = [P_q(x)\varpi\, a^q](n)$$

ou a^q *et* $p_q(x)$ *désignent les suites*

$(a^n)_{n\geq 0}$ et $(P(x))_{n\geq 0}$ des suites

La fonction génératrice exponentielle est donnée par :

$$g_{a^q \omega P_q(x)}(z) = g_{a^q}(z).g_{P_q(x)}(z)$$

avec $g_{a^q}(x) = e^{az} = \sum_{k\geq 0} a^k \frac{z^k}{k!}$ et $g_{P_q(x)}(z) = \sum_{k\geq 0} P_k(x) \frac{z^k}{k!}$

Alors

$$\sum_{k\geq 0} T^a P_k(x) \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^{\mathrm{az}} \sum_{k\geq 0} P_k(x) \frac{z^k}{k!}$$

II-3- Proposition : [2]

Si H_n est la matrice de Hankel (d'ordre n) associée à $\alpha \in \mathcal{F}(IN, A)$ alors la matrice de Hankel(d'ordre n) associée à la convolution $T^a\alpha \in \mathcal{F}(IN, A)$ est

$$H_{a,n} = SH_n\,{}^tS \text{ où } S = S_n(a) = \left(\binom{i}{j} a^{i-j}\right)_{0\leq i,\, j\leq n}$$

ou ${}^tS$ est la matrice transposée

Preuve :

Par calcul direct, nous avons

$$(SH\,{}^tS\,)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} S_{jk} \sum_{l=0}^{n} S_{il} H_{lk} = \sum_{k\geq 0} \binom{j}{k} a^{j-k} \sum_{l\geq 0} \binom{i}{l} a^{i-l} \quad \alpha_{l+k}$$

En posant $m = k + l$ et en utilisant la formule de convolution de Vandermonde, on obtient

$$(SH\,{}^tS\,)_{ij} = \sum_{m\geq 0} \sum_{k=0}^{m} \binom{j}{k} \binom{i}{m-k} a^{i+j-m} \alpha_m = \sum_{m\geq 0} \binom{i+j}{m} a^{i+j-m} \alpha_m$$

Autrement dit

$(SH^tS)_{ij} = (T^a{}_\alpha)_{i+j} = (Ha,n)_{ij}$ $k,m \leq n$

II-4-Proposition :[2]

Notons $F(z) = \sum \alpha_n \frac{z^n}{n!}$ la série génératrice exponentielle associée à une suite $\alpha \in \mathcal{F}(IN, A)$ et $\delta = \delta_Z$ l'opérateur de dérivation par rapport à la variable z. S'il existe des séries formelles $F_k(z) \in A[[z]]$ et des éléments $d_k \in A$ tels que :

1 $[\delta^n F_k(z)]_{z=0} = 0$ chaque fois que $k > n$

2/ $\sum_{k\geq 0} d_k F_k(y) F_k(z) = F(y+z)$

Alors les déterminants de Hankel sont données par :

$$\det H_n = \prod_{k=0}^{n} d_k [\delta^k F_k(z)]^2{}_{z=0}$$

Preuve :

A l'aide de l'identité binomiale, on peut écrire

$$F(y+z) = \sum \alpha_n \frac{(y+z)^n}{n!} = \sum_n \sum_{k+m=n} \frac{\alpha_{m+k}}{m!k!} y^k z^k = \sum_{n,k\geq 0} \alpha_{m+k} \frac{y^k z^k}{m!k!}$$

Comme $(y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k z^{n-k}$

Alors que les développements de Taylor :

$F_k(y) = \sum_{n\geq 0} \delta^n F_k(0) \frac{y^n}{n!}$ et $F_k(z) = \sum_{m\geq 0} \delta^m F_k(0) \frac{z^m}{m!}$ permettent d'expliquer :

$$\sum_{k\geq 0} d_k F_k(y) F_k(z) = \sum_{m,n\geq 0} \sum_{k\geq 0} d_k \delta^n F_k(0) \delta^m F_k(0) \frac{y^n}{n!} \frac{y^m}{m!}$$

Par identification, la deuxième condition exprime le fait que :

$$\alpha_{m+n} = \sum_{k\geq 0} d_k [\delta^n F_k(z)]_{z=0} [\delta^m F_k(z)]_{z=0}$$

(Remarque que la somme est finie, elle porte sur les indices $k = 0,1,\ldots, min(n,m))$. Ainsi la matrice de Hankel $H_n = (\alpha_{i+j})_{0\leq i,\, j\leq n}$ admet une décomposition $H_n = L_n D_n L_n{}^t$ ou

D_n = Diag $(d_0, d_1, \ldots\ldots, d_n)$ est une matrice diagonale et $L_n = (\delta^i F_j(z))_{z=0})_{0\leq i,j\leq n}$ une matrice triangulaire inférieure par la condition (1)

Un cas particulier :

Si A est un anneau de polynôme, on peut considérer des suites $P_n(x) = n$, de degré inférieure ou égale à n,pour la fonction génératrice exponentielle est alors

$F(x,z) = \sum_{n\geq 0} P_n(x) \frac{z^n}{n!}$ et dans des nombreux cas, on peut prendre :

$F_k(x,z) = \delta_x{}^k F(x,z)$ ou δ_x est l'opération de dérivation par rapport à x la première condition de la proposition est alors automatiquement vérifiée :

$[\delta_x{}^k F(x,z)]_{x=0} = [\delta_z{}^n \delta_x{}^k F(x,z)]_{x=0} = \delta_x{}^k[\delta_z{}^n F(x,z)]_{x=0} = \delta_x{}^k P_n(x)$ est nul dés que $k>n$

Ainsi s'il existe des polynômes $d_k(x)$ vérifiant :

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x) \delta_x{}^k F(x,z) \delta_x{}^k F(x,z) = F(x,y+z) \qquad (*)$$

Alors les déterminants de Hankel sont

$$det\ (P_{i+j}(x))_{0\leq i,j\leq n} = \prod_{k=0}^{n} d_k(x)(\delta^k P_k(x))^2$$

Exemple :

1- Celui de la base canonique $P_n(x) = x^n$, on a $F(x,z) = e^{xz}$, et la relation (*) peut s'écrire sous la forme suivante : $\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k = 1$, les polynômes constants

$d_0(x) = 1 \quad et \quad d_k(x) = 0$ si $\quad k\geq 0$

En effet

$\sum_{k\geq 0} d_k(x) \delta_x{}^k F(x,z) \delta_x{}^k F(x,z) = F(x,y+z)$ Implique $\sum_{k\geq 0} d_k(x) y^k e^{xy} z^k e^{xz} = e^{x(y+z)}$

$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k e^{x(y+z)} = e^{x(y+z)}$ le calcul donne le résultat

$$\sum_{k\geq 0} d_k(x)(yz)^k = 1 \Rightarrow \begin{cases} d_0(x) = 1 & si \quad k=0 \\ d_k(x) = 0 & si \quad k\geq 1 \end{cases}$$

alors $\qquad$ $\det(P_{i+j}) = 1$ (pour k=0) ou 0 (pour k>0)

2- Pour le polynôme $P_n(x) = n\,!x^n$ de fonction génératrice $F(x,z) = (1-zx)^{-1}$ on trouve

$\delta_x^k F(x,z) = k! z^k (1-zx)^{-k-1}$ car $\delta_x^k F(x,z) = \delta_x^k [(1-zx)]$

Et

$\delta_x^1 F(x,z) = z(1-zx)^{-2}$, $\delta_x^2 F(x,z) = 2z^2(1-zx)^{-3}$

Alors (*) est $\sum d_k(x) k!k! z^k y^k [(1-zx)(1-yx)]^{-k-1} = [1-x(y+z)]^{-1}$

$\sum d_k(x)(k!)^2 (zy)^k [1-x(y+z)+x^2 yz]^{-k-1} = [1-x(y+z)]^{-1}$

En considérant ici les polynômes $d_k(x) = \left(\frac{x^k}{k!}\right)^2$ on obtient

$$det\ (P_{i+j}(x))_{0\leq i,\, j\leq n} = \prod_{k=0}^{n} d_k(x)(\delta_x^k P_k(x))^2 = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{x^k}{k!}\right)^2 (k!)^4 = \prod_{k=0}^{n}(k!x^k)^2$$

$$= (\prod_{k=0}^{n} k!)^2 x^{n(n+1)}$$

3- Les polynômes $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (n)_k (-1)^{n-k} x^k$ engendrent les mêmes déterminants pour

la fonction génératrice exponentielle est donnée par

$F(x,z) = e^{-z}(1-xz)^{-1}$ et la relation (*)

$$\sum d_k(x)(k!)^2 (zy)^k [1-x(y+z)+x^2 yz]^{-k-1} = [1-x(y+z)]^{-1} \qquad \text{(A)}$$

Car

$\delta_x^k F(x,z) = \delta_x^k(e^{-z}(1-xz)^{-1}) = e^{-z}(k!z^k(1-zx)^{-k-1})$

$\delta_x^k F(x,z) = e^{-y}(k!y^k(1-yx)^{-k-1})$ et $\sum d_k(x)\delta_x^k F(x,y)\delta_x^k F(x,z) = F(x,y+z)$

donne

$$\sum d_k(x) e^{-(z+y)} (zy)^k [(1-zx)(1-yx)]^{-k-1} = e^{-(y+x)}(1-x(y+z))^{-1}$$

d'où la formule *(A)*

et pour $d_k(x) = \left(\frac{x^k}{k!}\right)^2$

$$det\ (P_{i+j}(x)) = det\ (P_{i+j}(x))_{0\leq i,\, j\leq n} = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{x^k}{k!}\right)^2 (k!)^4 = \prod_{k=0}^{n}(k!x^k)^2 = [(\prod_{k=0}^{n} k!)^2 x^{n(n+1)}]$$

De manière générale : nous avons les déterminants de Hankel engendrés par :

$P_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-a)^{n-k} P_k(x)$ une suite, et a $\in$ A et alors

$P_{0,n}(x) = P_n(x)$ (polynôme de Poisson – charlier)

Et les polynômes $D_n(x)$ s'obtiennent à partir de $P_n(x) = n!x^n$ *et* $a = 1$

C'est-à-dire :

$P_{1,n}$ *(x) =* D_n *(x) =* $P_{1,n}(x) = \sum \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! x^k$ et d'après le résultat suivant :

Le nombre de k – parties de N, $0 \le k \le n = |N|$, noté $\binom{n}{k}$ vaut

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

Alors

$$D_n(x) = \sum_{k \ge 0} (n)_k (-1)^{n-k} x^k$$

Pour x = 1 on a :

D_n (1) est le nombre de dérangements (permutations sans point fixe) d'un ensemble à n éléments

$d(n) = D_n(1) = n!(1 - \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!})$ (ne possède aucun point fixe $\sigma(x) \neq x$)

$$d(n) = D_n(1) = \sum_{0 \le k \le n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

4- I_n le nombre d'involutions sur un ensemble à n élément, c'est-à-dire le nombre de permutation $\sigma \in Sym(n)$ d'ordre 2. Nous avons $I_0 = I_1 = 1$ et la relation de récurrence

$I_{n+1} = I_n + n I_{n-1}$ conduit à la fonction génératrice $\sum I_n \frac{z^n}{n!} = e^{z+z^2/2}$,il faut construire

des polynômes $I_n(x)$ par exemple considérer $\sum I_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{xz+z^2} = F(x,z)$

On a $I_n(1) = I_n$ et en dérivant F(x,z) par rapport à z, on trouve

$I_{n+1}(x) = x I_n(x) + n I_{n-1}(x)$ ce qui montre du même coup que les polynômes $I_n(x)$ sont unitaires avec deg $I_n(x) = n$

La relation (*) devient $\sum_{k \ge 0} d_k(x)(yz)^k = e^{yz}$ car $\delta_x^k F(x,z) = e^{z^2/2} z^k e^{xz}$

$\delta_x^k F(x,y) = e^{y^2/2} y^k e^{xy}$ et $F(x, y+z) = e^{x(y+z)+(y+z)^2/2}$ avec $d_k(x) = \frac{1}{k!}$

det $(I_{i+j}(x)) = \prod \left(\frac{1}{k!}\right)(k!)^2 = \prod_{k=0}^{n} k!$

5- Les polynômes d'Hermite $H_n(\mathbf{x})$ admettent la fonction génératrice

$$F(x,z) = e^{2xz - z^2} = \sum \frac{H_n(x) z^n}{n!}$$

et satisfaite la relation de récurrence

$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}$ la relation (*) devient $\sum d_k(x)(4yz)^k = e^{-2yz}$ car

$$\sum d_k(x)\delta_x^k F(x,z)\delta_x^k F(x,y) = F(x,y+z) \qquad (*)$$

la formule(*) implique

$$\sum d_k(x)e^{-z^2}e^{2xz}(2z)^k e^{-y^2}e^{2xy}(2y)^k = e^{2x(y+z)-(y+z)^2} = e^{2x(y+z)-y^2-z^2-2yz}$$

Alors

$\sum d_k(x)(4zy)^k = e^{-2yz}$ elle est vérifiée pour les polynômes constants

$$d_k(x) = \frac{1}{(-2)^k k!}$$

Et comme le coefficient dominant de $H_k(x)$ est 2^k, on trouve

$$det\,(H_{i+j}(x)) = \prod \frac{1}{(-2)^k k!}(2^k k!)^2 = \prod k!(-2)^{n(n+1)/2}$$

6- Considérant maintenant les polynômes de Bell $B_n(x)$ étudiés avant on a

$F(x,z) = e^{xg(x)}$ avec $g(x) = e^x - 1$

$F(x,z) = e^{x(e^x-1)}$ alors la relation (*) devient $\sum d^k(x)(e^{y+z} - e^y - e^z + 1) = e^{x(e^{y+z}-e^y-e^x+1)}$

Car $\delta_x^k F(x,z) = (e^z - 1)^k e^{x(e^x-1)}$

$\delta_x^k F(x,z) = (e^y - 1)^k e^{x(e^y-1)}$ et $F(x,y+z) = e^{x(e^{(y+z)}-1)}$

$$(e^x-1)^k(e^y-1)^k = e^{x(e^{(y+z)}-1-e^x-e^y+2)} = e^{z+y} - e^z - e^y + 1 = e^{x(e^{y+z}-e^x-e^y+1)}$$

Ceci est vérifié pour $d_k(x) = \dfrac{x^k}{k!}$ et on obtient

$$\det\,(B_{i+j}(x)) = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{x^k}{k!}\right)(k!)^2 = \prod_{k=0}^{n} k!\,x^k = (\prod_{k=0}^{n} k!)x^{n(n+1)/2}$$

7- Les nombres d'Euler en $(n\geq 0)$ peuvent être définis par :

$F(z) = \sum En\dfrac{Z^n}{n!} = \dfrac{1}{\cos z}$ Cette fonction génératrice exponentielle vérifie :

$$F(y+z) = \frac{1}{\cos(y+z)} = \frac{\cos y\cos z}{\cos y\cos z - \sin y\sin z}\frac{1}{\cos y\cos z} = \frac{(1-\tan y\tan z)^{-1}}{\cos y\cos z}$$

Ce qui à l'aide d'une série géométrique, peut s'exprimer

$$F(y+z) = \frac{1}{\cos y\cos z}\sum_{k\geq 0}(\tan y)^k(\tan z)^k = \sum_{k\geq 0}\frac{(\tan y)^k}{\cos y}\frac{(\tan z)^k}{\cos z}$$

La deuxième condition de la proposition est donc vérifiée si l'on considère les constantes $d_k(x) = 1$ les fonctions $F(z) = \frac{(\tan z)^k}{\cos z}$ la première condition l'est également :

$E_{n,k} = [\delta^n F_k(z)]_{z=0} = \delta^n \frac{\tan z}{\cos z} = 0$ lorsque $k>n$ et vaut $n\,!$ si $k = n$

En fin de compte, la proposition 2 fournit : $\det(E_{i+j})_{0\le i,j\le n} = (\prod_{k=0}^{n} k!)^2$

II-5- Fonction génératrice exponentielle

Dans l'exemple des nombres d'Euler (de fonction génératrice $F(z) = \frac{1}{\cos z}$) nous avons introduit les fonctions $F_k(z) = g(z)^k F(z)$ où $g(z) = \tan z$ vérifie l'équation différentielle $g'(z) = 1 + g(z)^2$ avec la condition initiale g(0) = 0. Cette situation peut être généralisée comme suit

II-5-1-Théorème : [3], [4] et [5]

On considère une fonction $F(z) = e^{G(z)}$ avec $G(0) = 0$ et on suppose que $g(z) = G'(z) - G'(0)$ vérifie $g'(z)=\alpha+\beta g(z)+\gamma(g(z))^2$ pour certains paramètres $\alpha \neq 0$, β et γ dans A alors

$$F(y+z) = \sum_{k\ge 0} \frac{1(1+\gamma)...(1+(k-1)\gamma)}{k!\alpha^k} g(y)^k F(y) g(z)^k F(z)$$

Les déterminants de Hankel correspondant sont donnés par

$$\det H_n = \alpha^{n(n+1)/2} \prod_{k=0}^{n} (k!(1+\gamma)...(1+(k-1)\gamma)$$

Preuve :

Pour $k\ge 0$, on considère les fonctions $F_k(z) = g(z)^k F(z)$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\delta F_k &= kg^{k-1} g' F + g^k F' \\ &= kg^{k-1}(\alpha + \beta g + \gamma g^2) + g^k GF \quad \text{car } g' = \alpha + \beta g + \gamma g^2 \text{ et } F = e^G \\ &= (k\alpha g^{k-1} + (G'(0) + k\beta) g^k + (1+k\gamma) g^{k+1}) F \\ &= k\alpha F_{k-1} + (G'(0) + k\beta) F_k + (1+k\gamma) F_{k+1}\end{aligned}$$

Par convention, $F_k(z) = 0$ pour $k<0$ c'est-à-dire :

$\delta F_k(z) = \delta^n [k\alpha F_{k-1}(z) + (G'(0) + k\beta) F_k(z) + (1+k\gamma) F_{k+1}(z)]$ pour $n \ge 0$ cette relation nous permet d'établir les faits suivants

$[\delta^n F_k(z)]_{z=0} = 0$ chaque fois que *k>n*

$[\delta^n F_n(z)]_{z=0} = n\alpha[\delta^{n-1} F_{n-1}(z)]_{z=0} = ... = n!\alpha^n$

Un calcul direct montre que :

$$\delta^{n+1} F_k(z)\delta^m F_k(z) - \delta^n F_k(z)\delta^{m+1} F_k(x) = k\alpha H_{k-1}(z) - (1+k\gamma)H_k(z)$$

Avec $H_k(z) = \delta^m F_{k+1}(z)\delta^m F_k(z) - \delta^m F_k(z)\delta^n F_{k+1}(z)$ *(= 0 si k<0)*

Considérant alors les éléments (dans *Frac A*, coups des fonctions de *A*)

$$d_k = \frac{(1+\gamma)...(1+(k-1)}{k!\alpha^k} = 1 \qquad \text{si } k = 0$$

Ils vérifient $d_{k+1}(k+1)\alpha = d_k(1+k\gamma)$, de sorte que tous les éléments de la somme

$$\sum_{k\geq 0} d_k[\delta^{n+1} F_k(z)\delta^m F_k(z) - \delta^n F_k(z)\delta^{m+1} F_k(z)] = \sum_{k\geq 0} d_k[k_\alpha H_{k-1}(z) - (1+k\gamma)H_k(z)]$$

Il s'agit d'une somme télescopique nulle pour tout entier m,n ≥0

$$\sum d_k[\delta^n F_k(z)\delta^m F_k(z)]_{z=0} = \sum d_k\delta^{n-1} F_k(z)\delta^{m+1} F_k(z) = ... = \sum d_k F_k(z)\delta^{m+n} F_k(z)$$

Et en évaluant cette expression en *z = 0*, il vient

On a donc $\sum d_k[\delta^n F_k(z)\delta^m F_k(z)]_{z=0} = \sum d_k F_k(0)[\delta^{m+n} F_k(z)]_{z=0} = [\delta^{m+n} F(z)]_{z=0}$

Cela montre que pour la suite qui admet la fonction génératrice *F(z),* on peut utiliser la proposition (II-4) avec les éléments d_k et les fonctions $F_k(z)$ définis au-dessus.

Voici les données correspondantes aux exemples (1 à 7)

	F(z)	*G(z)*	*g(z)*	*α*	*β*	*γ*
Base canonique	e^{xx}	*xz*	*x*	*0*	*0*	*0*
$P_n(x) = n\,!x^n$	$(1\text{-}xz)^{-1}$	$\text{-}log(1 - xz)$	$\frac{x}{1-xz} - x$	x^2	2x	*1*
Polynôme de dérangement	$e^{-x}(1\text{-}xz)^{-}$	$\text{-}z\text{-}log(1 - xz)$	$\frac{x}{1-xz} - x$	x^2	2x	*1*
Polynômes d'involution	$e^{xz+z^2/2}$	$xz + z^2/2$	*z*	*1*	*0*	*0*
Polynômes d'Hermite	e^{2xz-z^2}	$2xz - z^2$	*-2z*	*-2*	*0*	*0*
Polynômes de Bell	$e^{x(e^z-1)}$	$x(e^x - 1)$	$x(e^z\text{- }1)$	*X*	*1*	*0*
Nombres d'Euler	*1/cos z*	*-log(cos z)*	*tan z*	*1*	*0*	*1*

Ajouter les exemples suivants

8- La suite décalée des polynômes de Bell $(B_{n+1}(x))_{n\geq 0}$ admet la fonction génératrice $F(x,z) = xe^z e^{x(e^z-1)}$ elle mène à $g(z) = x(e^z - 1)$ comme pour la suite *($B_n(x)$)* et donc

$$\det(B_{i+j+1}(x))_{0\leq i,j\leq n} = \det(B_{i+j}(x))_{0\leq i,j\leq n} = (\prod_{k=0}^{n} k!)x^{n(n+1)/2} \qquad \text{pour } n \geq 0$$

Et pour tout n≥0

9- Les polynômes d'Euler $(E_n^m(x))$ d'ordre *m≥1* sont définis par la fonction génératrice $F(x,z) = \left(\frac{2}{e^z+1}\right)^m e^{xz}$ on peut considérer la fonction génératrice $F(z) = F(0,z)$ pour évaluer le déterminant de Hankel associés. On trouve $g(z) = m\left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2}\right)$ et on peut appliquer la théorème avec $\alpha = \frac{-m}{4}$, *β = 0* et $\gamma = \frac{1}{m}$

$$\det H_n(x) = \left(\frac{-1}{4}\right)^{n(n+1)/2} \prod_{k=0}^{n} k!m(m+1)...(m+k-1) = \det H_n(0)$$

II-6- Fonctions génératrices ordinaires :

Le théorème précédent, concernent les fonctions génératrices exponentielles (ou « série de Hurwitz »), pour des fonctions génératrices $F(z) = \frac{\alpha_k z^k}{k!}$

$$F(z) = e^{G(z)} = \sum \frac{G(z)^k}{k!} \text{ avec } G(0) = 0,$$

Nous nous intéressons à des fonctions génératrices ordinaires de la forme

$$F(z) = \sum G(z)^k = \frac{1}{1 - G(z)} \text{ avec } G(0) = 0$$

L'opérateur de dérivation δ tirait son importance du fait qu'il est associé à la base polynomiale $f_n(z) = \frac{z^n}{n!}$ dans le sens ou $\delta f_0(z) = 0$ et $\delta f_n(z) = f_{n-1}(z)$ pour *n≥1*

Son analogue dans notre nouveau contexte est donné par

$\nabla : f(z) \rightarrow \dfrac{f(z)-f(0)}{z}$, Opérateur associé à la base canonique *(z^n)*

II-6-1- Théorème :

Considérons une fonction génératrice ordinaire $F(z)=\dfrac{1}{1-G(z)}$ avec *G(0) = 0* et supposons que

$g(z)=\nabla G(z)-\nabla G(0)=\dfrac{G(z)}{z}-G'(0)$ Vérifie une relation

$g(z)=z(\alpha+\beta g(z)+\gamma g(z)^2)$ pour certains paramètres $\alpha \neq 0$, β et γ dans *A* alors les déterminants de Hankel sont donnés par

$$\det H_n = \alpha^{n(n+1)/2}\gamma^{n(n-1)/2}$$

Preuve :

Les fonctions $F_k(z)=g(z)^k F(z)$ vérifient :

$$\nabla F_0(z)=\frac{F_0(z)-F_0(0)}{z}=\frac{g(z)^0F(z)-g(0)^0F(0)}{z}=\frac{F(z)-F(0)}{z}$$

$\nabla F_0(z)=\dfrac{\dfrac{1}{1-G(z)}-\dfrac{1}{1-G(0)}}{z}$ et comme *G(0) = 0*

$\nabla F_0(z)=\dfrac{G(z)}{z(1-G(z))}=\dfrac{g(z)+G'(0)}{1-G(z)}$ car $\dfrac{G(z)}{z}=g(z)+G'(0)$

alors $\nabla F_0(z)=\dfrac{g(z)+G'(0)}{1-G(z)}=F(z)(g(z)+G'(0))$

$$= F(z)g(z)+F(z)G'(0)=F_1(z)+G'(0)F_0(z)$$

Et $\nabla F_k(z)=\alpha F_{k-1}(z)+\beta F_k(z)+\gamma F_{k+1}(z)$ pour tour k≥1

En effet $\nabla F_k(z)=\dfrac{F_k(z)-F_k(0)}{z}=\dfrac{g(z)^kF(z)-g(0)^kF(0)}{z}=\dfrac{g(z)^kF(z)}{z}$

$$=\frac{z^k(\alpha+\beta g(z)+\gamma(g(z)^2)^kF(z)}{z}=(\alpha+\beta g(z)+\gamma g(z)^2)^{k-1}z^{k-1}F(z)$$

$$= \alpha + \beta g(z) + \gamma g(z)^2 (g(z)^{k-1} F(z))$$

$$= \alpha g(z)^{k-1} F(z) + \beta g(z)^k F(z) + \gamma g(z)^{k+1} F(z)$$

$$\nabla F_k(z) = \alpha F_{k-1}(z) + \beta F_k(z) + \gamma F_{k+1}(z)$$

Par induction on obtient $[\nabla^n F_k(z)]_{z=0} = 0$ si k>n , $[\nabla^n F_k(z)]_{z=0} = \alpha^n$

D'autre part $\nabla^{n+1} F_k(z) \nabla^m F_k(z) - \nabla^n F_k(z) \nabla^{m+1} F_k(z) = \begin{cases} -H_0(z) & si \quad k=0 \\ \alpha H_{k-1}(z) - \gamma H_k(z) & si \quad k \geq 1 \end{cases}$

Avec $H_k(z) = \nabla^m F_{k+1}(z) \nabla^n Fk_k(z) - \nabla^m F_k(z) \nabla^n F_{k+1}(z)$

En considérant les éléments $d_0 = 1$ et $d_k = \dfrac{\gamma^{k-1}}{\alpha^k}$ pour *k≥1*

On vois que : $\sum_{k \geq 0} d_k [\nabla^{n+1} F_k(z) \nabla^m F_k(z) - \nabla^n F_k(z) \nabla^{m+1} F_k(z)]$

Est une somme télescopique nulle pour tous les entiers *m,n≥0*, on pet écrire

$$\sum d_k \nabla^n F_k(z) \nabla^m F_k(z) = \sum d_k \nabla^{n-1} F_k(z) \nabla^{m+1} F_k(z) = ... = \sum d_k F_k(z) \nabla^{m+n} F_k(z)$$

En $z = 0$ donne :

$$\sum d_k [\nabla^n F_k(z) \nabla^m F_k(z)] = [\nabla^{m+n} F(z)]_{x=0}$$

On applique la proposition (II-4) on trouve

$$\det H_n = \alpha^{n(n+1)/2} \gamma^{n(n+1)/2}$$

Remarque :

Comme $\dfrac{G(z)}{z} = \dfrac{1}{z}\left(1 - \dfrac{1}{F(z)}\right) = \dfrac{F(z)-1}{zF(z)}$ tend vers F'(0) lorsque z tend vers 0,on peut expliquer

$g(z) = \dfrac{F(z)-1}{zF(z)} - F'(0)$ Donc $F(z) = (1 - F'(0)z - zg(z))^{-1}$ de plus la condition initiale

g(0) = 0 et la relation quadratique $g(z) = z(\alpha + \beta g(z) + \gamma g(z)^2)$ montrent que :

$$g(z) = \frac{1 - \beta z - \sqrt{(1-\beta z)^2 - 4\gamma \alpha z^2}}{2\gamma z} \quad (\text{si } \gamma \neq 0)$$

Exemple :

1- Pour les nombres de Catalan $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ on a $F(z) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$ donc

$$g(z)=\frac{1-\sqrt{1-4z}-2z}{z(1-\sqrt{1-4z})}-1=\frac{4z-2z(1+\sqrt{1-4z}}{4z^2}-1=\frac{1-2z-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

On peut utiliser le théorème avec $\alpha = 1, \beta = 2$ et $\gamma = 1$

on obtient det $H_n = 1$ pour tout entier $n \geq 0$

2-Les nombres de Motzkin, définis par la fonction

génératrice $F(z)=\frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}$ engendrent les mêmes déterminants avec $(\gamma = \beta = \alpha = 1)$

Les polynômes de Legendre sont définis par $F(x,z)=(1-2xz+z^2)^{-1/2}$ et le théorème peut être utilisé avec $\alpha=\frac{x^2-1}{2}$, $\beta = x$ *et* $\gamma = 1/2$ on trouve alors : $\det H_n(x)=\frac{(x^2-1)^{n(n+1)/2}}{2^{n^2}}$

Exemple :

Nombres de Catalan généralisé : [12]

Résumé :

Rappelons que le n^{ieme} nombre de Catalan C_n est donné par la formule :

$C_n=\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ ce nombre a très nombreuse interprétation combinatoire par exemple depuis Euler on sait qu'il n'est autre que le nombre de décomposition en triangles d'un polygone convexe de (n+2) cotés par les diagonales formés de n nombres 1 et de n nombres – 1 à somme partielles toutes positives ou nulles

- Une nouvelle propriété sera démontrer par une technique algébrico-analytique remontant à Sylvester quel que soit n, le déterminant de Hankel de dimension n formé sur les nombres de Catalan vaut 1 cet article en donne maintenant une preuve directe et élémentaire il calcule aussi l'inverse de cette matrice.

Théorème :

Soit H_n la matrice de Hankel construite sur la suite de Catalan

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & . & . & C_n \\ 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & . & . & C_{n+1} \\ 2 & 5 & 14 & 42 & 132 & . & . & C_{n+2} \\ 5 & 14 & 42 & 132 & 429 & . & . & C_{n+3} \\ 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ C_n & . & . & . & . & . & . & C_{2n} \end{bmatrix}.$$

$\forall n, \quad \det(H_n) = 1$

Démonstration :

A- le coefficient de x^{i+j+1} dans $(1-x)^2(1+x)^{2i+2j}$ vaut

B-

$$\binom{2i+2j}{i+j+1} - 2\binom{2i+2j}{i+j-1} + \binom{2i+2j}{i+j-1} = -2C_{i+j}$$

B- D'autre part, le coefficient de x^a dans $(1-x)(1+x)^{2i}$ vaut

$$\binom{2i}{a} - \binom{2i}{a-1} = \binom{2i}{a}\frac{2i-2a+1}{2i-a+1}$$

C- Ainsi, en considérant le terme x^{i+j+1} dans l'identité triviale

$(1-x)^2(1+x)^{2i+2j} = \left[(1-x)(1+x)^{2i}\right]\left[(1-x)(1+x)^{2j}\right]$

Puisque en exploitant l'antisymétrique des coefficients de ces polynômes on a :

$$C_{i+j} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k+1}\frac{2i-2(i+k+1)+1}{2i-(i+k+1)+1}\binom{2j}{j-k}\frac{2j-2(j-k)+1}{2j-(j-k)+1}$$

Où $\binom{a}{b} = 0$ lorsque b<0 ou b>0

$$C_{i+j} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k+1} \frac{2k+1}{i+k+1} \binom{2j}{j-k} \frac{2k+1}{j+k+1}$$

C'est-à-dire $C_{i+j} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} T_{i,k} T_{j,k}$

Moyennant $T_{i,k} = \dfrac{\binom{2i}{i+k}(2k+1))}{i+k+1}$

Appelons T_n la matrice triangulaire inférieure formée par ces coefficients $T_{i,k}$ Appelons T_n la matrice triangulaire inférieure formée par ces coefficients $T_{i,k}$

$$T_n = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
5 & 9 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & . \\
14 & 28 & 20 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & . \\
42 & 90 & 75 & 35 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & . \\
132 & 297 & 275 & 154 & 54 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & . \\
429 & 1001 & 2001 & 637 & 273 & 77 & 13 & 1 & 0 & 0 & \cdots & . \\
1430 & 3432 & 3640 & 2548 & 1260 & 440 & 104 & 15 & 1 & 0 & \cdots & . \\
4862 & 11934 & 13 & 9996 & 5508 & 2244 & 663 & 135 & 17 & 1 & \cdots & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \cdots & . \\
T_{n,0} & T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & T_{n,4} & T_{n,5} & T_{n,6} & T_{n,7} & T_{n,8} & T_{n,9} & \cdots & T_{n,n}
\end{bmatrix}.$$

Notre dernier résultat peut s'écrire maintenant $T_n U_n = H_n$

U_n désignant la transposée de T_n.

Puisque tous les éléments diagonaux de T_n valent 1, on obtient

$\det(H_n) = \det(T_n)$, $\det(U_n) = 1.1 = 1$

comme annoncé.

2-Inverse de H_n :

Posons

$$\alpha_{n,i,j} = \left(H_n^{-1}\right)_{i,j}$$

D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n} T_{n,k} \sin(2k+1)\alpha = 2^{2n} \sin\alpha \cos^{2n} \alpha$$

D'autre part, par récurrence,

$$\sin(2n+1)\alpha = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n+k}{n-k} 2^{2k} \sin\alpha \cos^{2k} \alpha$$

.

On voit donc que T_n^{-1}, matrice triangulaire inférieure inverse de celle des $T_{n,k}$ est formée des $(-1)^{n+k}\binom{n+k}{n-k}$

Il en résulte

$$\alpha_{n,i,j} = (-1)^{i+j} \sum \binom{k+i}{k-i}\binom{k+j}{k-j}$$

Ainsi que l'identité

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+i} \binom{k+i}{k-i} T_{j,k} = \delta_{ij}$$

CHAPITRE III

Polynômes orthogonaux

III-1- Produits scalaires et polynômes orthogonaux :

On suppose que A est un sous anneau de IR ainsi pour $a>0$ fixé associons à

$\Phi : A[x] \to A[x]$

$(x)_n \to x^n$

L'application symétrique bilinéaire Φ_a définie par

$(f;g) \to \Phi_a(f(x)g(x)) = \Phi(f(x)g(x))\Big|_{x=a} = e^{-a}\sum_{k\geq 0}\frac{f(k)g(k)}{k!}a^k$ est un produit scalaire sur $A[x]$. Nous pouvons nous restreindre à un sous – ensemble

V_n = {Polynôme $\in$ A[x] de degré $\leq$ N} $\subset A[x]$

Il s'agit d'un A module libre de rang $N + 1 < \infty$ et la matrice de Gram associée au produit scalaire (* | *)$_a$: $V_N \, x \, V_N \to$ |R par rapport à la base $\{1, x, ..., x^n\}$est donnée par $B_{i+j}(a))_{0\leq i,j\leq N}$ pour deux polynômes $f(x) = \sum a_k x^k$ et $g(x) = \sum b_k x^k$ dans V_N, nous avons $\Phi(f(x)g(x)) = (a_0 a_1 ... a_N).H_N(x).(b_0 b_1 ... b_N)^t$ avec $H_N(x) = B_{i+j}(a))_{0\leq i,j\leq N}$

avec $B_i(x)$: polynômes de Bell

Nous nous proposons de trouver la famille de polynômes unitaires $P_n(x) = P_{a,n}(x)$ avec deg $P_{a,n}(x) = n$, qui sont orthogonaux pour le produit scalaire (* | *)$_a$ issu de Φ_a.

L'orthogonalité de $P_{a,n}(x)$ face aux polynômes de V_{n-1} se traduit par le fait que :

$\Phi((x)_m P_{a,n}(x))$ est nul pour $m = 0,1, ..., n-1$

Nous avons $\Phi((x)_m P_{a,n}(x)) =_{(1)} a^m \Phi(P_{a,n}(x+m)) =_{(2)} a^m \Phi(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \nabla^k P_{a,n}(x)$

$$=_{(3)} a^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Phi \nabla^k P_{a,n}(x)\Big|_{x=a} =_{(4)} a^m \sum \binom{m}{k} \delta^k \Phi(P_{a,n}(x))\Big|_{x=a}$$

Pour A anneau unitaire, commutatif et intègre qui contient Z et les polynômes de Pohhammer

$(x)_0 = 1$, $(x)_n = x(x-1)...(x-(n-1))$ *(n≥0)*

ou la propriété suivante :

$\Phi((x)_n f(x-n)) = x^n \Phi(f(x))$ pour tout polynôme $f(x) \in A[x]$

Nous déduisons

$$\Phi_a((x)_m P_{a,n}(x)) = \Phi((x)_m P_{a,n}(x))\Big|_{x=a} = x^m \Phi(P_{a,n}(x+n))\Big|_{x=a} = a^m \Phi(P_{a,n}(x+n))\Big|_{x=a}$$

car *x = a, d'où la (1)*

Et pour montrer (2), il faut définir, la base canonique *$(x)_n$* est associée à l'opérateur de différence finie :

$\nabla : A[x] \to A[x]$

$\quad f(x) \to f(x+1) - f(x)$

Et la base canonique *$(x^n)_{n\geq 0}$* est associée à l'opération de dérivation

$\delta : A[x] \to A[x]$

$\quad f(x) \to f'(x)$

Par un calcul direct

$$\Phi(\nabla^k (x)_n) = \Phi((n)_k (x)_{n-k}) = (n)_k \Phi((x)_{n-k}) = (n)_k x^{n-k} \quad . \qquad (1)$$

Correspond à la k^ieme dérivée de $\Phi((x)_n)$

De plus d'après la propriété de $P_{a,n}(x)$ on a : $P_{a,n}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y)_{n-k} P_{a,k}(x)$

Alors $P_{a,m}(x+n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (n)_{m-k} P_{a,k}(x)$

$$a^m \Phi(P_{a,n}(x+n)) = a^m \Phi_a(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (n)_{m-k} P_{a,k}(x))$$

Avec la relation (1) on obtient m $a^m \Phi(P_{a,n}(x+n)) = a^m \Phi_a(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \nabla^k P_{a,k}(x))$

D'où l'égalité (3)

Et comme l'application Φ relie ces deux bases, relie de manière naturelle les opérations associées : par linéarité, il suit alors

$\Phi\nabla^k = \delta^k\Phi$ C'est-à-dire $\Phi(\nabla^k f(x)) = \delta^k\Phi(f(x))$ pour tout polynôme $f(x) \in A[x]$

Alors on a l'égalité (4)

Et en considérant successivement les entiers *m = 0,1,....,n-1*, il suit que *x = a* annule le polynôme $\Phi(P_{a,n}(x))$ ainsi que ses *n – 1* premières dérivées. Autrement dit $(x-a)^n$ divise $\Phi(P_{a,n}(x))$ mais comme ces polynômes sont unitaires et de même degré, il sont identiques , on obtient le développement de Mahler

$$P_{a,n}(x) = \Phi^{-1}((x-a)^n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-a)^{n-k}(x)_k \qquad (2)$$

Les polynômes $P_{a,n}(x)$ sont appelés polynômes de Poisson – Charlier

On a la formule (2) car

$$\Phi((x)_n) = x^n$$

alors

$$\Phi^{-1}(x^n) = (x)_n = x(x-1)...(x-(n-1))$$

En prenant *m = n* dans la relation précédente (2), on trouve de même

$$\|P_{a,n}(x)\|_a^2 = (P_{a,n}(x)|(x)) = a^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\delta^k\Phi(P_{a,n}(x))\Big|_{x=a} = a^n\delta^n\Phi(P_{a,n}(x))\Big|_{x=a}$$

Comme $\Phi(P_{a,n}(x))$ est un polynôme unitaire de degré n, sa n^ième^ dérivée vaut n ! en tout point, et on a donc $\|P_{a,n}(x)\|_a^2$

D'autre part le procédé d'orthogonalisation de Gram – Schmidt permet d'écrire

$$P_{a,N}(x) = \frac{1}{\det H_{N-1}(a)}\begin{vmatrix} B_0(a) & B_1(a) & . & . & . & B_N(a) \\ B_1(a) & B_2(a) & . & . & . & B_{N+1}(a) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{N-1}(a) & B_N(a) & . & . & . & B_{N-1}(a) \\ 1 & x & . & . & . & x \end{vmatrix}$$

$$\|P_{a,N}\|_a^2 = (P_{a,N}(x)|P_{a,N}(x))_a = (P_{a,N}(x)|x^N)_a = \det H_N(a)|\det H_{N-1}(a)$$

et il s'ensuit

$\det H_N(a) = \|P_{a,N}\|_a^2.\det H_{N-1}(a) = \|P_{a,N}(x)\|_a^2.\|P_{a,N-1}(x)\|_a^2...\|P_{a,0}(x)\|_a^2$

C'est-à-dire : $\det H_N(a) = a^{N(N+1)/2} 0!1!...N!$ ceci étant valable pour tout entier a>0

On en déduit le

III-1-1- Théorème : [6]

La matrice $H_N(x) = (B_{i+j}(x)) 0 \leq i, j \leq N$ admet le déterminant

$$\det H_N(x) = (\prod_{k=0}^{N} k!) x^{N(N+1)/2}$$

On dit que $H_N(x)$ est la matrice de Hankel d'ordre N construite avec les polynômes de Bell et on remarque que pour $a>0$, la matrice de Hankel $H_N(a)$ correspond à la matrice de Gram associée au produit scalaire issu de $x^n \to B_n(a)$

Exemple 1 : (preuve de Delsarte)

Dans la base canonique $\{1, x, \dots, x^n\}$ de V_n, nous pouvons exprimer (avec les nombres de Stirling de première espèce noté $s(n,k) = \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$

$$P_{a,n}(x) = \left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle x + ... + \left\langle \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rangle x^n \text{ avec } \left\langle \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\rangle = (-1)^{n-i} \sum \binom{n}{k} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} a^{n-k} = \left\langle \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\rangle_a$$

(en particulier $\left\langle \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rangle = 1$ et $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = 0$ si $k \langle n \rangle$ et formé la matrice triangulaire

$$Q_N(a) = \left(\left\langle \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\rangle \right)_{0 \leq i, j \leq N} = \begin{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} o \\ 0 \end{matrix} \right\rangle & 0 & . & . & . & 0 \\ \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle & \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ \left\langle \begin{matrix} N \\ 0 \end{matrix} \right\rangle & \left\langle \begin{matrix} N \\ 1 \end{matrix} \right\rangle & . & . & . & \left\langle \begin{matrix} N \\ N \end{matrix} \right\rangle \end{pmatrix}$$

Le déterminant $\det Q_N(a) = 1$ les conditions d'orthogonalité de la suite $(P_{a,n}(x))_{n \geq 0}$ se traduisent par la relation matricielle.

$Q_N(a)H_N(a)Q_N(a)' = Diag(0!a^0, 1!a^1, ..., N!a^N)$ et le théorème est vrai en prenant le déterminant.

Remarque :

Lorsque a>0, les polynômes de Poisson – Charlier $P_{a,n}(x)$ $(n \geq 0)$ forment un système orthogonal (pour le produit scalaire issu de Φ_a) et vérifient de ce fait certaines relations de récurrence (qui restent valables pour tout $a \in R$)

1/ $P_{a,n+1}(x) = xP_{a,n}(x-1) - aP_{a,n}(x)$

2/ $P_{a,n+1}(x) = (x-n-a)P_{a,n}(x) - naP_{a,n}(x)$

Preuve :

Par calcul direct on trouve

1/ $P_{a,n}(x) = \Phi^{-1}((x-a)^n) = \Phi^{-1}(x(x-a)^{n-1}) - a\Phi^{-1}((x-a)^{n-1})$

$$= xP_{a,n-1}(x-1) - a\Phi^{-1}((x-a)^{n-1}) = xP_{a,n-1}(x-1) - aP_{a,n-1}(x)$$

Comme la base canonique de Pochhammer est associée à ∇ on voit que $P_{a,0}(x) = 1$

et $\nabla P_{a,n}(x) = nP_{a,n-1}(x)$ pour $n \geq 1$

(En particulier $(P_{a,n}(x))_{n \geq 0}$ est une suite de Scheffer par rapport à l'opérateur ∇)

On calcul directement (pour $n \geq 1$)

2/ $(x-n-a)P_{a,n}(x) - naP_{a,n-1}(x) = (x-a)P_{a,n}(x) - n(P_{a,n}(x) + aP_{a,n-1}(x))$

$$= (x-a)P_{a,n}(x) - nxP_{a,n-1}(x-1)$$

$$= x(P_{a,n}(x) - nP_{a,n-1}(x-1)) - aP_{a,n}(x)$$

$$xP_{a,n}(x) - aP_{a,n}(x) = P_{a,n+1}(x)$$

Remarque :

L'orthogonalité des polynômes de Charlier $P_{a,n}(x)$ pour le produit scalaire engendré par Φ_a (lorsque $a>0$) découle immédiatement de la propriété :

$$\Phi(f(x)g(x)) = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}(\delta^k \Phi g(x))$$ Valable pour tout les polynômes $f(x), g(x) \in A[x]$

Preuve :

Les polynômes de Pochhammer $(x)_n$ étant de type binomial (puisqu'ils sont associés à un delta – opérateur), on a

$$\Phi((x)_m (x)_n) = x^m \Phi((x+m)_n) = x^m \Phi(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)_{n-k}(m)_k = x^m \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^{n-k}(m)_k$$

Autrement dit

$$\Phi((x)_m (x)_n) = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}(n)_k x^{n-k}(m)_k x^{m-k} = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}(\delta^k \Phi(x)_m)(\delta^k \Phi(x)_n)$$

Et le fait que les polynômes de Charlier généralisés

$$P_{z,n}(x) = \Phi^{-1}((x-z)^n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-z)^{n-k}(x)_k$$

(Dans *A[x]* avec *A* = Z [z] ou Z $_p$[z]) vérifient

$$\Phi_z(P_{z,m}(x)P_{z,n}(x)) = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}(\Phi^{-1}(x-z)^m)(\Phi^{-1}(x-z)^n)$$

$$\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}(\delta^k(x-z)^m(\delta^k(x-z)^n)\Big|_{x=0} = \begin{cases} n!z^n & si \quad m=n \\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

Remarque :

La relation $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(y)_{n-k}P_{a,k}(x)$ (pour les polynômes de Charlier)

Fournit :

$$(P_{a,m}(x+\alpha)\Big| P_{a,n}(x+\beta))_a = \sum_{k\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{m}{k}\binom{n}{l}(\alpha)_{m-k}(\beta)_{n-l}(P_{a,k}(x)\Big| P_{a,l}(x))_a$$

$$= \sum_{i\geq 0}\binom{m}{l}\binom{n}{i}(\alpha)_{m-i}(\beta)_{n-i}a^i i!$$

III-2- Polynômes orthogonaux :

Supposons toujours que *A* est un sous anneau de IR et pour une suite donnée $\alpha \in \mathcal{F}$(IN,A)

on considère l'application A -linéaire $\Phi : A[x] \to A$

$x^n \to \alpha_n$

Nous supposons de plus que les déterminants de Hankel sont tous positifs. Cela signifie que pour un entier n fixé, la matrice symétrique H_n est définie positive et que l'application bilinéaire

$(f,g) \to (f/g) = \Phi(f(x)g(x))$

Est un produit scalaire sur $V_n[x] = \{p(x) \in A[x] : \deg p \leq n\}$(la matrice de Gram dans la base canonique étant donnée par la matrice de Hankel H_n) comme ceci est valable pour tout entier $n \geq 0$, cette application définit un produit scalaire sur $A[x]=U_{n\in IN}V_n[x]$ une famille orthogonale de polynômes unitaires est alors obtenue par le procédé d'orthogonalisation de Gram – Schmidt

$$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{\det H_{n-1}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & . & . & . & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_1 & . & . & . & \alpha_n & x \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_n & . & . & . & \alpha_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \text{ pour } n \geq 1$$

Et on notera :

$P_n(x) = P_{n,0} + P_{n,1}x + P_{n,2}x^2 + ... + P_{n,n-1}x^{n-1} + x^n \, (P_{n,n} = 1)$

ces polynômes unitaires admettent des coefficients dans Frac A et vérifient une relation de récurrence.

$P_{n+1}(x)=(x-\lambda_n)P_n(x)-\mu_n P_{n-1}(x)$ (pour $n \geq 1$)

Avec $\lambda_n = P_{n,n-1} - P_{n+1,n}$ et $\mu_n = \|P_n(x)\|^2 \big| \|P_{n-1}(x)\|^2$

Comme la matrice de Hankel (d'un certain ordre n) est symétrique définie positive, elle admet une unique décomposition de la forme $H = LD\,{}^tL$ où la matrice L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur une diagonale et $D = Diag(d_0, d_1, ..., d_n)$ est une matrice diagonale et la relation $L^{-1}H\,{}^t(L^{-1}) = D$ montre alors que

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} P_{0,0} & 0 & . & . & . & 0 \\ P_{1,0} & P_{1,1} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ P_{n,0} & P_{n,1} & . & . & . & P_{n,n} \end{pmatrix}$$

La k – ieme ligne de L^{-1} est formé avec les coefficients de $P_k(x)$ est on a $\|P_k(x)\|^2 = d_k$ on en déduit ainsi que $\mu_k = \dfrac{d_k}{d_{k-1}}$ on en déduit ainsi que $\mu_k = \dfrac{d_k}{d_{k-1}}$

Et que

$$H_n = \|P_0(x)\|^2 . \|P_1(x)\|^2 ... \|P_n(x)\|^2$$

D'autre part, la matrice $M = L^{-1}$ admet le polynôme caractéristique $P_M(x) = (1-x)^{n+1}$ et le théorème de Cayley – Hamilton permet d'exprimer formellement (avec l'opérateur ∇ défini précédemment)

$$L = M^{-1} = -\frac{1}{\det M}[\nabla P_M(x)]_{x=M} = \sum_{l=1}^{n+1}\binom{n+1}{l}(-1)^{l-1}M^{l-1}$$

On considérant les éléments situés juste au-dessus de la diagonale de $M, M^2, ..., M^n$ on a :

$L_{k+1,k} = -P_{k+1,k}$ de sorte que $d_k = L_{k+1,k} - L_{k,k-1}$

III-2-1- Théorème : [7]

Si les déterminants de Hankel sont tous positifs et sont déterminés par la fonction génératrice exponentielle vérifiant les hypothèses du (Théorème II-5 -1) (resp ordinaire, théorème II-6 -1) alors

$\lambda_n = G'(0) + n\beta$ et $\mu_n = n_\alpha(1+(n-1)\gamma)$ pour tout n≥1

(resp $\lambda_1 = \beta_1, \mu_1 = \alpha$ et $\lambda_n = \beta, \mu_n = \alpha\gamma$ pour tout n≥2)

Preuve :

Avec les conditions précédentes on a

$$\mu_n = \frac{\|P_n(x)\|^2}{\|P_{n-1}(x)\|^2} = \frac{d_n[\delta^n F_n(z)]^2{}_{z=0}}{d_{n-1}[\delta^{n-1}F_{n-1}(z)]^2{}_{z=0}}$$

D'après (II-5 -1) les fonctions génératrices exponentielles (théorèmeII-6 -1) et la relation suivante $[\delta^n F_k(z)]_{z=0} = 0$ chaque fois que $k>n$

Mais pour $k = n$ alors on a $[\delta^n F_n(z)]_{z=0} = \alpha n[\delta^{n-1}F_{n-1}(z)]_{z=0} = ... = n!\alpha^n$

Et comme $d_n(1+n\gamma) = d_{n+1}(1+n)\alpha$ alors

$$\frac{d_n}{d_n - 1} = \frac{1+(n-1)\gamma}{n\alpha}$$

En remplaçant dans la formule (1)

$\mu_n = (n\alpha)^2 \dfrac{1+(n-1)\gamma}{n\alpha}$

d'où le résultat

Remarque :

Soit $\alpha \in \mathcal{F}$(IN,A) une suite dont la fonction génératrice exponentielle (resp ordinaire) vérifie les hypothèses du théorème II-5 -1 (resp du théorème II-6-1) on a alors de manière plus explicite.

$P_0(x) = \alpha_0 = 1$, $P_1(x) = x - \alpha$ et la relation de récurrence

$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_1 - n\beta)P_n(x) - n\alpha(1+(n-1)\gamma)P_{n-1}(x)$ pour n≥1

Dans le cas exponentiel car $(G'(0) = F'(0) = \alpha_1)$, respectivement $P_2(x) = (x-\beta)P_1(x) - \alpha P_0(x)$, $P_{n+1}(x) = (x-\beta)P_n(x) - \alpha P_{n-1}(x)$ pour n≥2

III-2-2- Proposition :[2]

Si une base polynomiale $(P_n(x))_{n\geq 0}$ est orthogonale pour le produit scalaire issu de $\alpha \in \mathcal{F}$ (IN,A)alors la famille $(P_n(x-a))_{n\geq 0}$ est une base orthogonale pour le produit scalaire de $T_\alpha^a \in \mathcal{F}$(IN,A)

Preuve :

Notons H_n (resp $H_{a,n}$) les matrices de Hankel (d'ordre n) associés à la suite α (resp T_α^a)

Et considérons la matrice $P = (P_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$ dont la m – ieme ligne est formée avec les coefficients de $P_m(x)$ où $P_m(x) = P_{m,0} + P_{m,1}x + ... + P_{m,m}x^m$

Par construction, la matrice $D = PH_nP^t$ est diagonale et en reprenant les notations de la proposition (I-1)

On a $D = PH_n{}^tP \ = PS_n(a)^{-1}H_{a,n}{}^t(S_n(a)^{-1})\ {}^tP$ car $H_{a,n} = SH_n{}^tS$

Où $S = S_n(a) = \left(\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} a^{i-j}\right)_{0\leq i,j\leq n}$ et $a \in A$

La matrice $S_n(a)$ est triangulaire inférieure et qu'elle vérifie

$S_n(a)^{-1} = S_n(-a)$ alors

$D = PH_nP^t = PS_n(-a)H_{a,n}(PS_n(-a))^t$

Chapitre IV

Théorème de rationalité :

IV-1-1- Introduction

Soient K un corps de nombres et $f \in K[[x]]$ une série formelle à coefficients dans K. A chaque extension valuée $\mathbb{C}$ de K correspond un domaine de convergence de f dans $\mathbb{C}$.

Un des moyens de reconnaître, parmi les séries formelles à coefficients dans K, celles qui sont des fractions rationnelles consiste à étudier les fonctions analytiques associées à f dans des domaines sont « assez grande ».

IV-1-2- Proposition :

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série formelle à coefficients entiers définissant dans $\mathbb{C}$ une fonction méromorphe dans un disque de rayon strictement supérieur à 1, alors f est une fraction rationnelle.

IV-2- Critères algébriques ,déterminants :

Soit $\mathcal{H}_n(a)$= $H_k^n(a)$ le déterminant de Hankel de rang n et d'ordre k

IV-2-1- Proposition: [8]

Pour que la série formelle : $f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ soit une fraction rationnelle il faut et il suffit qu'il existe k tel que, pour n assez grand, $H_n^k(a)=0$

Preuve : (avec la relation de Sylvester)

Supposons d'abord que f soit une fraction rationnelle

Soient $Q(x)=q_0 a_n + q_1 x + ...+ q_k x^k$ un dénominateur de f et $P=Qf$ alors pour n>deg P

$q_0 a_n + q_1 a_{n-1} + ...+ q_k a_{n-k} = 0$ donc, pour n + k>deg P, $H_n^k(a)=0$

Montrer la réciproque avec la relation de Sylvester

Soit $H=[a_{ij}]$ $0\leq i\leq m$, $0\leq j\leq m$, un déterminant d'ordre $m+1$: c'est un polynôme homogène de degré $m+1$ par rapport à l'ensemble des variables a_{ij} de degré 1 par rapport à chacune d'entre elles.

Notons A_{ij} le coefficient de a_{ij} dans H, et d le déterminant $d=[a_{ij}]$ 0≤i≤m-1, 0≤j≤m-1, (d est le déterminant extrait de H en supprimant les lignes et les colonnes extrêmes), alors la relation de Sylvester s'énonce :

$Hd = A_{00}A_{mm} - A_{0m}A_{m0}$

Pour la montrer, on peut considérer le déterminant $H'=[b_{ij}]$, où $b_{oj}=A_{0j}, b_{mj}=A_{mj}$ et pour $i\neq 0, m$, $b_{ij}=\delta_{ij}$ (ie 1 pour i = j et 0 si non)

On obtient $HH'=H^2 d = H(A_{00}A_{mm}-A_{0m}A_{m0})$ comme le polynôme H n'est pas nul, la relation de Sylvester en résulte. Appliquée aux déterminants de Hankel d'une suite a

Elle devient :

$H_n^k H_{n+2}^{k-2} = H_{n+2}^{k-1} H_n^{k-1} - (H_{n+1}^{k-1})^2$ pour k≥2 (S)

Supposons la suite a non stationnaire : si elle l'est f est rationnelle

IV-2-2- Lemme:

Soit a une suite non stationnaire, s'il existe k et n_0 tels que, pour $n\geq n_0$ et $H_n^k(a)=0$, il existe h et n_1 tels que $H_n^k(a)=0$ pour $n\geq n_1$ et $H_n^{h-1}(a)\neq 0$ pour

$n \geq n_1 + 1$ nous dirons que *k* est admissible pour *a,* si pour $H_n^k = 0$ pour n assez grand. Remarquant que $H_n^0 = a_n$ donc 0 n'est pas admissible (*a* non stationnaire).

Par hypothèse, il existe *k* admissible, soit *h* le plus petit entier admissible et soit n_1 le plus petit indice tel que $H_n^h = 0$ pour $n \geq n_1$

Si h = 1, on conviendra que $H_n^{-1} = 1$ et la relation (S) est encore vraie pour $k \geq 1$ (elle s'écrit alors $H_n^1 = a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2$).

Soit un indice tel que $H_m^{h-1} = 0$, si $m \geq n+1$, la relation de Sylvester appliquée à $n = m - 1$

$$H_{m-1}^h H_{m+1}^{h-1} = H_{m+1}^{h-1} H_{m-1}^{h-1} - (H_{m+1}^{h-1})^2$$

Montre par récurrence, que $H_m^{h-1} = 0$ pour m'≥m. S'il en est ainsi, $h - 1$ est admissible, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, pour $m \geq n_1 + 1$ $H_m^{h-1} \neq 0$ et le lemme est démontré

Fin de la preuve de la proposition :

Supposons a stationnaire, et satisfaisant l'hypothèse du lemme, choisissons *h* et *n* comme dans le lemme

Soit (E_n) l'équation linéaire par rapport aux inconnues $Y_0, \ldots, Y_h$:

$$Y_0 a_n + Y_1 a_{n-1} + \ldots + Y_h a_{n-h} = 0$$

Le système d'équation (E_n), $N + h \leq n \leq N + 2h$ a pour déterminant H_N^h

Pour $N \geq n_1$ il admet donc une solution, mais il est de rang $h - 1$, car H_{N+1}^{h-1} est un des ses mineurs d'ordre *h* et est non nul. Donc ce système admet une solution unique telle que $Y_h = 1$

Alors si $Q(x) = x^h + Y_{h-1} X^{h-1} + \ldots + Y_0$

Q est un polynôme, et *f* est rationnelle

IV-3- Le théorème de BOREL – DWORK

Soit *K* un corps de nombres, les places de *K* les classes de valeurs absolues équivalentes sur *K.* Les places finies de *K* sont en bijection avec les idéaux premiers de l'anneau des entiers de *K*, on notera *P(K)* l'ensemble de ces idéaux premiers.

Si $\beta \in P(K)$ on notera $|x|_{\beta}$ la valeur absolue β – adique normalisée associée à β.

Soient p le nombre premier divisant β et $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de Q_p on notera $\mathbb{C}_{\beta}$ l'extension de K isomorphe à $\mathbb{C}_p$ munie de l'unique valeur absolue $|x|_{\beta}$ prolongent la valeur absolue β – adique normalisée de K.

De même, à toute place infinie de K, est associée une valeur absolue $|x|_i$

$1 \leq i \leq r + s$, qui est la valeur absolue induite par le prolongement correspondant de K dans C muni de la valeur absolue usuelle $|z|^2 = z\bar{z}$.

Noterons C un corps valué complet algébriquement alors, extension de K, et dont la valeur absolue normalisée suivante : C est donc ou bien $\mathbb{C}$, ou bien $\mathbb{C}_{\beta}$

IV-3-1- Définition :

Soients $f(x) = \sum a_n x^n$ une série formelle à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $R > 0$, nous dirons que f définit une fonction méromorphe dans le disque de centre O et de rayon R, si quelque soit $r<R$, il existe un polynôme Q_r tel que la série Q_r f converge pour $|x| \leq r$.

IV-3-2-Théorème 1 : (Borel – Dwork) [9]

Soient K un corps de nombres et $f(x) = \sum a_n x^n$ une série formelle à coefficients dans K. S'il existe une partie finie $P_1(K)$ de $P(K)$ telle que :

i/ pour tout $\beta \notin P_1(K)$ et tout n≥0, $|a_n|_{\beta} \leq 1$

ii/ pour chacune des r + s places infinies de K, f définit dans C une fonction méromorphe dans un disque ouvert de centre O et de rayon R_i , $i = 1, \ldots\ldots, r + s$

iii/ pour $\beta \in P_1(K)$, , f définit dans C une fonction méromorphe dans un disque ouvert de centre O et de rayon R_{β}

iv/ le produit $R = \prod_{i=1}^{r+s} R_i^{N(i)} x \prod_{\beta \in P_1(k)} R_{\beta}$ satisfait R>1,(R le rayon de convergence)

alors f est une fraction rationnelle

La proposition (IV-1-2)est un corollaire de ce théorème (BOREL – DWORK)si f satisfait les hypothèses de la proposition (IV-1-2),en prenant $K = Q$, la condition *(i)* est satisfaite par

$P_1(Q) = \Phi$ *et implique* $a_n \in \mathbb{Z}$

la condition (µ) pour $R_1 = R$, la condition (iii) est vide, et (iv) est satisfaite puisque R>1, donc f est rationnelle.

- Le théorème initiale de Borel est la généralisation de la proposition(IV-1-2) .

IV-3-3-Lemme :

Avec les notations du théorème, et si la condition (i) est satisfaite, pour tout $\beta \in P_1(K)$ et pour tout n et k $\left|H_n^k(a)\right|_\beta \le 1$

En effet,

Le sous anneau de K constitué des x tels que $|x|_\beta \le 1$ contient es a_n donc contient aussi la valeur au point $(a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+2k})$ de tout les polynômes à coefficients entiers et en particulier $H_n^k(a)$.

Et par majoration de la valeur absolue de H_n^k relative à une place pour laquelle *f* définit une fonction méromorphe dans un disque du corps C correspondant

La majoration obtenue, jointe à la condition (iv) et à la formule du produit, permettra de montrer que, sous les hypothèses du théorème, il existe k telle que pour n assez grand $H_n^k(a) = 0$, d'après la proposition (IV-2-1)

IV-3-4-Lemme : [9]

Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ une série entière à coefficients dans **C**, définissant une fonction meromorphe dans le disque ouvert de centre O et de rayon *R*. soient *r*<*R* et *Q* un polynôme de degré *s* tel que *Qf* converge pour $|x| \le r$ et soit k≥s, alors il existe M tel que, pour n≥0 :

$\left|H_n^k\right| \le M b^{-ns} r^{-n(k-s)}$

Où *b* désigne la borne inférieure des $|z|$ lorsque z parcourent les zéros de *Q*

Preuve du théorème (IV-3-2)

D'après le lemme(IV-3-4)

Soient les réels r_i pour $i = 1, \ldots, r+s$ et r_β, $\beta \in P_1(K)$, de telle sorte que $r_i<R_i$ et $r_\beta<R_\beta$ et que le produit : $r = \prod r_i^{N(i)} \prod r_\beta > 1$

Notons v un indice parcourant $V = \{1, ..., r+s\} \cup P_1(K)$ pour $v \in V$

Soit Q_v un polynôme de degré s_v satisfaisant « $Q_v(0) \neq 0$ et fQ_v converge dans $\boldsymbol{C}_v$ pour $|x| \leq \langle r_v \rangle$ et soit b_v la borne inférieure des z_v où z parcourt les zéros de Q_v

Soit s la borne supérieure des s_v alors pour $k \geq s$, il existe des constantes $M_{v,k}$ telles que :

$\prod_{v \in V} \left| H_n^k \right|_v^{N(v)} \leq \prod_{v \in V} (M_{v,k} b_v^{-ns_v} r_v^{-n(k-sv)})^{N(v)}$ où $N(v) = 1$ si $v = \beta$

Posons : $\Delta_v(k) = (b_v^{-sv} r_v^{-(k-sv)N(v)}$ et $\Delta(k) = \prod_{v \in V} \Delta_v(k)$

Alors

$\lim(\Delta(k))^{1/k} = 1/2$, donc on peut choisir k de telle sorte que $\Delta(k) < 1$

Fixons un tel k, et soit $\Delta = \Delta(k)$ alors en posant $M = \prod_{v \in V} M_{v,k}^{N(v)}$ on a :

$\prod_{v \in V} \left| H_n^k \right|_v^{N(v)} \leq \Delta^n M$ avec $\Delta < 1$

Compte tenu du lemme (III-3-3) et de la formule du produit $H_n^k(a) \neq 0$ entraîne $M\Delta^n \geq 1$ donc pour n assez grand, $H_n^k(a) = 0$ ce qui prouve le théorème

Preuve du lemme (IV-3-4)

Nous utilisons l'inégalité de HADAMARD

Soit $H = [a_{ij}]$ un déterminant d'ordre m + 1 et soit $A_j = (a_{0j}, ..., a_{mj}) \in C^{m+1}$

On munit C^{m+1} de la norme $\|x\|$ qui au vecteur $X = (x_i)$

Associé $\|x\| = \max |x_i|$ si C = $\boldsymbol{C}_\beta$

Et $\|x\| = [\ |x_0^2| + ... + |x_m^2|\ ]^{1/2}$ C = $\boldsymbol{C}_\beta$

Alors $|H| \leq \|A_0\| \|A_1\| ... \|A_m\|$ (*)

Cette inégalité étant triviale lorsque des A_j est nul pour $\|A_j\| = 1$, j = 0, … ,m

Dans ce cas :

- Si C = $\boldsymbol{C}_\beta$ les a_{ij} sont dans l'anneau de valuation de $\boldsymbol{C}_\beta$ donc H aussi et $|H| \leq 1$
- Si C = $\boldsymbol{C}$ et $H \neq 0$ et si $U_0, ..., U_m$ est une suite orthogonale construite à partir de A_j par le procédé de Schmidt

$H(U_0, ..., U_m) = 1 \geq H(A_0, ..., A_m) = H$

Avec les hypothèses de lemme

Noterons : $a_n(f)$ la suite des coefficients de f et g = Qf

Où $Q(x) = q_0 + ... + q_s x^s$

Noterons aussi $A_n^k(f) = (a_n(f),...,a_{n+k}(f)) \in K^{k+1}$

$H_n^k(a(f)) = H_n^k = \det(A_n^k(f), A_{n+1}^k(f),...A_{n+k}^n(f))$

De plus pour k≥s et m≥s $A_m^k(g) = q_0 A_m^k(f) + q_1 A_{m-1}^k(f) + ... + A_{m-s}^k(f)$

On a donc, pour k≥s

$H_n^k = \det(A_n^k(f),..., A_{n+s-1}^k(f), A_{n+s}^k(g),..., A_{n+k}^k(g))$

Or f(resp. g) définit une fonction analytique bornée dans le disque $|x| < b$ (resp $|x| \le r$) de C et C algébrique clos, donc d'après les inégalités de Cauchy, il existe deux constantes L et L' telle que, pour n≥0, $|a_n(f)| \le Lb^{-n}$ (resp $|a_n(g)| \le L' r^{-n}$) on en déduit, pour tous n et k

$$\|A_n^k(f)\| \le \begin{cases} Lb^{-1}\max(1, b^{-k}) si & \text{Si } C = \mathbb{C}_\beta \\ Lb^{-1}(1 + b^{-2} + ... + b^{-2k})^{1/2} & \text{Si } C = \mathbb{C} \end{cases}$$

Il existe deux constantes L_1 et $L_1^{'}$ telles que, pour tout n≥0 (k fixé)

$\|A_n^k(f)\| \le L_1 b^{-n}$ et $\|A_n^k(g)\| \le L_1^{'} r^{-n}$

En appliquant l'inégalité (*) de Hadamard, on en déduit, pour $k \ge s$ et $n \ge 0$

$|H_n^k| \le Mb^{-ns} r^{-n(k-s)}$

Avec $M = L_s^s L_1^{'k-s+1} b^{-s(s-1)/2} r^{-(k-s+1)(k-s+2)/2}$ ce qui prouve le lemme

IV-4-Diamètre transfini : [10]

Soient E un espace métrique, B une partie de E, pour $n \ge 0$, on pose

$$D_n(B) = \sup\left\{ \prod_{i \ne j} d(x_i, x_j) \middle| x = (x,...x_n) \in B^n \right\}$$

$$d_n(B) = (D_n(B))^{1/n(n-1)}$$

Alors

$\lim_{n \to \infty} d_n(B)$ existe

On note $d(B)$ cette limite et c'est le diamètre transfini de B

- Si B est borné, $D_n(B) = +\infty$ alors $d(B)$ est fini mais on s'intéresse à des parties bornées de E
- Si B est borné, soit $D_n(B)$ son diamètre

$D(B)=\sup\{d(x,y)|(x,y)\in B_2\}$

Alors $D_2(B) = D(B)^2$ et pour $n \geq 0$, on a $d_n(B) \leq D(B)^{2n}$

On a donc $d(B) \leq D(B)$ et si on remplace la distance h par une distance h' on a

$d'(x,y) = rd(x,y) \qquad r > 0$

La quantité $d_n^{'}(B)$ correspond à d' et $rd_n(B)$

Supposer que $D(B) \leq 1$ posons $g_n(x_1,...x_n) = \prod_{i+j} d(x_i, x_j) = g_n(x)$

Alors $g_{n+1}(x_1,........,x_{n+1})^n = t_1,......,t_{n+1}$

Où $h_i = g_n(x^i)$, $x^i = (x_1,........,x_j,........,x_{n+1}) \in B^n$

Donc $(D_{n+1}(B))^n \leq D_n(B)^{n+1}$, $d_{n+1}(B) \leq (d_n(B))^{1+1/n} \leq d_n(B)(H(B))^{1/n}$

Si $D(B) < 1$, la suite $d_n(B)$ est décroissante et minorée donc convergente

IV-4-1- Lemme : [10]

Soit B une partie bornée du corps valué K, on note P_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans K, et :

$S_n(B) = Inf\{\sup(|P(x)|)|P \in P_n\}$, $s_n(B) = (S_n(B))^{1/n}$

Alors $s_n(B) \to d(B)$, $n \to \infty$

- Si f est une fonction définie sur B et à valeurs dans K ou |R, nous noterons :

  $\|f\|_B = \sup\{|f(x)|, x \in B\}$ donc $S_n(B) = Inf\{\|P\|_B | P \in P_n\}$

Choisissons $y = (y_1,........,y_n) \in B^n$

Et soit $P_y(x) = (x-y).........(x-y_n)$ alors $g_{n+1}(x, y_1, y_2,........y_n) = P_y(x)^2 g_n(y_1,....,y_n)$

Pour $\varepsilon > 0$, on peut associer $P_y \in P_n$ et satisfaisant cette inégalité

D'où $S_n(B) \leq (D_{n+1}(B)/D_n(B))^{1/n}$

Or quand $n \to \infty$ $(D_{n+1}(B)/D_n(B))^{1/n}$ tend vers $d(B)^2$

On a donc $\lim s_n(B) \leq d(B)$

D'autre part on a : $g_n(x_1,...x_n) = |V(x_1,...x_n)|^2$ ou $V(x_1,...x_n)$ et le déterminant de Van der Monde associée à $x_1,...,x_n$, $V = \lfloor b_{ij} \rfloor$, $b_{ij} = x_i^{j-1}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$

Soit $P \in P_{n-1}$ alors $V(x_1,...x_n)$ est encore égale au déterminant obtenu en remplaçant, dans la dernière colonne de V par x_i^{n-1}. En développant cette dernière expression de V par rapport aux éléments de la dernière colonne, alors $V(x_1,...x_n) = \sum_i V_i P(x_i)$ V_i est le déterminant de Van der Monde de $(x_1,...,x_j,...,x_{n+1})$

Choisissons $x = (x_1,...,x_n)$ de telle sorte que : $g_n(x) \ge D_n(B)(1-\varepsilon)$ on a :

$(1-\varepsilon)D_n(B) \le n^2 \|P\|_B^2 D_{n-1}(B)$ quel que soit $P \in P_{n-1}$ alors

$S_{n-1}(B))^2 \ge D_n(B)/n^2 D_{n-1}(B)$

Et $\lim s_n(B) \ge d(B)$ d'où la proposition

IV-4-2- Corollaire : [8]

Soient *B* une partie bornée de *K*, *d(B)* son diamètre transfini, $\varepsilon > 0$ et $r > 1$, il existe un entier *n* et un polynôme $P \in P_n$ tels que :

$B \subseteq \{x \in K / |P(x)| \le (d(B)+\varepsilon)^n r\}$

En effet, pour *n* assez grand, $s_n(B) \le (d(B)+\varepsilon)^n$, pour un *tel n*, il existe $P \in P_n$ tel que :

$\|P\|_B \le rS_n(\mathrm{B})$

Exemple :

Supposons K non archimédien et algébriquement clos, $B = B(P,M)$ défini par un polynôme unitaire *P* de degré $q \ge 1$ est une constante *M* a un diamètre transfini $d(B) \le M^{1/q}$.

En effet, $\|P^k\|_B = M^k \ge S_{qk}(B)$ donc $d(B) = M^{1/a}$. D'autre part, si Q est un polynôme unitaire de degré *kq*, soit :

$Q = Q_0 + Q_1 P + ... + Q_k P^k$ ou $\deg Q_i < q$

IV-4-3- Corollaire :

Soit $Q \in K[x]$, $Q = Q_0 + Q_1 + ... + Q_k P^k$, l'unique représentation de Q ou les Q_i soient des polynômes de degré < q alors :

$\|Q\|_c = Max(\|Q_i\|_c M^i)$ à l'aide de ce corollaire on a :

Q_k=1 et $\|Q\|_B \geq \|Q\|_c \geq \|Q_k\|_c M^k = M^k$ donc $S_{nq}(B) = M^k$ et $d(B)=M^{1/q}$

IV-4-4- Lemme:

Soient ***C*** un corps complet pour une valeur absolue et algébriquement clos (par exemple C= ***C*** ou C = ***C***$_\beta$) et

$f(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{a^k}{x^k}$, $a_k \in$ C soit $P \in$ C$[x]$, $q = \deg P \geq 1$, $d > 0$ et

$B'(P, d^q) = B' = \{x \in$ C$, |P(x)| \geq d^q\}$, si f es prolongeable en une fonction de $H_0(B')$

$\overline{\lim} |H_1^k|^{2/k^2} \leq d$

Corollaire A :

Soit $f \in H_0(B')$, il existe une constante $M(f)$ telle que, pour tout polynôme Q :

$|a_1(Qf)| \leq Mf \|Q\|_c$ où :

$|a_1(\ Q\ (f))| \leq M(f) \|\ Q\ \|_c$

Et si L la longueur de C,on a d'après l'inégalité de Cauchy

$|a_1(\ Q f)| \leq \frac{L}{2\pi} \|\ Q\ \|_c \|f\|_c = M(f) \|\ Q\ \|_c$

avec

$H(B')$: L'espace des éléments analytiques sur B'

$H_0(B')$: le sous espace de ceux qui tendent vers zéro à l'infini

Notons C_j la courbe orientée dans le plan associée à C_j

$$a_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xrightarrow{c}} f(z)dz \quad \text{avec } z \in T$$

Preuve du lemme (IV-4-4)

Soit $T = \{x \in C / |P(x)| = d^q\}$, on sait (par le corollaire *A* si ***C*** non archimédien et corollaire *B* si C = ***C*** qu'il existe une constante *M(f)* telle que, pour tout polynôme *Q* :

$|a_1(fQ)| \leq M(f)\|Q\|_T$

Soient $P_1,...,P_k$ des polynômes unitaires, $P_k \in P_{k-1}$

Par définition $H_1^k = [a_{ij}]$ou $a_{ij} = a_{i+j-1}$, $i = 1,...,k$

$j = 1,...,k$ par une combinaison linéaire des colonnes de D_1^k on voit que, si

$P_j(x) = x^{j-1} + P_{j1}x^{j-2} + ... + P_{j,j-1}$ et $P_j f = \sum_{k>-j} b_{kj} / x^k$

On a aussi $H_1^k = [b_{ij}]$, $i = 1,...,k$, $j = 1,...,k$. En faisant une combinaison analogue sur les lignes de H_1^k on voit que $H_1^k = [a_1(P_iP_jf)]$, $i = 1,...,k$, $j = 1,...,k$

Posons $P_i = \|P_i\|_T$ il existe une constante $M(f)$ telle que $\lfloor a_1(P_iP_jf) \rfloor \leq M(f)P_iP_j$

Posons $S_k = Max(P_1,.......,P_k)$ si C est non archimédien

et $S_k = (P_1^2 + ... + P_k^2)^{1/2}$

si C = ***C*** en appliquant l'inégalité de Hadamard, on obtient :

$|H_1^k(f)| \leq M(f)^k P_1....P_k(S_k)^k$

Choisissons $P_1,.......,P_k$ de telle sorte que $P_k \leq (d+\varepsilon)^k$ pour *k* assez grand

Supposons d'abord $d < 1$et notons L une constante alors, en choisissant ε assez petit pour que $d + \varepsilon < 1$, on a $S_k \leq kL$, $P_1,......,P_k \leq L(d+\varepsilon)^{k(k-1)/2}$ d'où :

2/ $k^2 \log|H_1^k(f)| \leq L/k + \log(d+\varepsilon)/k + L$

Lorsque $k \to +\infty$, on en déduit

$\lim |D_1^k|^{2/k^2} \leq d + \varepsilon$

Si $d < 1$, le lemme est démontré or, soit $\lambda \in K$ et soit $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, f_λ est prolongeable en un élément de $H_0\left(\frac{1}{\lambda}B'\right)$, ou $\frac{1}{\lambda}B'$et l'image de B' dans l'homothétie de centre O et de rapport $1/\lambda$ il est clair que :

$H_1^k(f_\lambda) = \lambda^{-k^2} H_1^k(f)$ et $d\left(\frac{1}{\lambda}B'\right) = \frac{1}{|\lambda|}d$ on en déduit que si le lemme est vrai pour $d < 1$, il est vrai pour tout $d > 0$

IV-5-Fonctions méromorphes

Si a fonction f(x) définie par la série $\Sigma a_n x^n$ dans la région D a coefficients dans C peut être représentée comme :

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Où $f_1(x)$ à seulement des pôles dans le plan fini, et $f_2(x)$ est régulière dans D, alors f(x) est méromorphe dans D.

On obtiendra une condition nécessaire et suffisante due à HADAMARD, pour que la série soit méromorphe dans le disque de convergence.

On note $H_{n,m}$ le déterminant de Hankel

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m} \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+m} & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Les a_i sont les coefficient de la série $\Sigma a_n x^n$. Si R est le rayon de la convergence alors :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|H_{n,m}|} \leq \frac{1}{R^{m+1}} \qquad (1)$$

la preuve de cette proposition dépend des deux lemmes suivant, dont on procède à établir :

IV-5-1-Lemme:

On donne k suite de nombres positifs :

$$\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}$$

alors :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\alpha_n^{(1)} \alpha_n^{(2)} \ldots \alpha_n^{(k)}\right] \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n^{(1)} \, \overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n^{(2)} \ldots \overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n^{(k)}$$

comme

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n^{(i)} = \rho_i \quad ; \text{i} = 1, 2, \dots ,\text{k}$$

par définition il existe un nombre n_0 tel que pour $n>n_0$ on a :

$$\alpha_n^{(i)} < \rho_i(1+\varepsilon),$$

$$\alpha_n^{(1)}\alpha_n^{(2)}...,\alpha_n^{(k)} < \rho_1\rho_2...\rho_k(1+\varepsilon)^k \ , \text{i} = 1,2, \dots ,\text{k}$$

pour η>0 arbitraire, on choisi ε très petit et $(1+\varepsilon)^k < 1+\eta$

$$\alpha_n^{(1)}\alpha_n^{(2)}...,\alpha_n^{(k)} < \left[\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n^{(1)}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n^{(2)}...\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n^{(k)}\right](1+\eta)$$

et donc :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\alpha_n^{(1)}\alpha_n^{(2)}...\alpha_n^{(k)}\right] \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n^{(1)}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n^{(2)}...\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n^{(k)}$$

La conséquence de ce lemme est : pour un entier positif arbitraire m :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{\left|a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}...a_{\alpha_{m+1}}\right|} \leq \frac{1}{R^{m+1}}$$

où $\alpha_j = n + i_j$, i_j est un nombre fixe dépends de j tel que $0 \leq i_j \leq 2m$

L'inégalité est vérifiée pour chaque valeur de j

en effet, pour un i donné

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|a_{n+i_j}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n+i_j]{\left|a_{n+i_j}\right|}$$

Comme :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_{n+i_j}\right|^{\frac{1}{n+i_j}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\left|a_{n+i_j}\right|^{\frac{1}{n}}\right\}^{\frac{n}{n+i_j}}$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| a_{n+i_j} \right|^{\frac{1}{n}}$$

D'où : $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| a_{n+i_j} \right|} = \sqrt[n]{\left| a_n \right|} = \frac{1}{R}$$

Pour un m donné :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{m+1}} \right|} \leq \frac{1}{R^{m+1}}$$

IV-5-2-Lemme :

Soient p série de Taylor, avec les coefficients $\left\{A_n^{(1)}\right\}, \left\{A_n^{(2)}\right\}, \ldots, \left\{A_n^{(p)}\right\}$ respectivement.

Si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{\left| A_n^{(1)} + A_n^{(2)} + \ldots + A_n^{(p)} \right|} \leq \frac{1}{\rho}$$

où ρ est le nombre le plus petit des ρ_k

la série $\sum A_n^{(k)} x^n$ converge pour $|x| \leq \rho_k$

d'où $|x| < \rho$

et la série

$\sum \left[A_n^{(1)} + A_n^{(2)} + \ldots + A_n^{(p)} \right] x^n$, admet un rayon de convergence R qui est plus grand que ρ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{\left| A_n^{(1)} + A_n^{(2)} + \ldots + A_n^{(p)} \right|} = \frac{1}{R} \leq \frac{1}{\rho}$$

On écrit $H_{n,m}$ sous la forme

$$H_{n,m} = A_n^{(1)} + A_n^{(2)} + ... + A_n^{(m+1)!}$$

Où chaque terme est de la forme $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} ... a_{\alpha_{m+11}}$

Alors, comme conséquence du lemme, on a pour tout m:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|A_n^{(k)}\right|} \leq \frac{1}{R^{m+1}} \quad , \text{k} = 1, 2, \ldots, (\text{m}+1)!$$

Et

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|H_{n,m}\right|} \leq \frac{1}{R^{m+1}}$$

IV-5-3-Théorème : [11]

Si la série admet p pôles et pas d'autres singularités sur le cercle de convergence alors:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|H_{n,p}\right|} < \frac{1}{R^{p+1}}$$

Par hypothèse, il existe un polynôme $P_p(x) = 1 + A_1x+\ldots+A_px^p$ tel que la série:

$\Sigma b_nx^n=(1 + A_1x + \ldots + A_px^p)\ \Sigma a_nx^n$

$b_{k+p} = a_{k+}p + A_1a_{k+p-1}+\ldots+A_pa_k$ (2)

Admet un rayon de convergence R_1 qui excède R. Le terme constant de $P_P(x)$ est égal à 1, car par hypothèse la série donné est régulière al'origine, et avec la relation (2), le déterminant $H_{n,p}$ est réduit à $\begin{vmatrix} a_n & \ldots & a_{n+p-1} & b_{n+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+p} & \ldots & \ldots & b_{n+2p} \end{vmatrix}$

On note $\Delta_{n,i}$ le minorant de b_{n+i} alors :

$$H_{n,p} = \pm \sum_{i=p}^{2p} (-1)^{i-p} b_{n+i} \Delta_{n,i}$$

Notons $\Delta_{n,i}$ le déterminant d'ordre p, on obtient:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\Delta_{n,i}|} < \frac{1}{R^p}$$

on a par le choix de $P_p(x)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{R_1} < \frac{1}{R}$$

D'où, finalement :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|H_{n,p}|} \leq \frac{1}{R^p}\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R^{p+1}}$$

IV-5-4-Théorème :

S'il existe un métier m on a

i / $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|H_{n,m-1}|} = \frac{1}{R_m}$

et

ii / $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|H_{n,m}|} = \frac{1}{R^m R^1} < \frac{1}{R^{m+1}}$

Alors, pour m donné

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|H_{n,m_{-1}}|} = \frac{1}{R^m}$$

On veut monter pour ε >0, il existe n_0 tel que

$$|H_{n,m-1}| \rangle \left(\frac{1-\varepsilon}{R^m}\right)^n pour n \rangle n_0$$

Considérons le déterminant

$$H_{n-1,m} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{n+m-1} \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{n+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+m-1} & \ldots & \ldots & a_{n+2m-1} \end{vmatrix}$$

Parmi les minorants $H_{n+1,m-1}$, $H_{n-1,m-1}$ $H_{n,m-1}$, de ce déterminant on obtient la relation

$$H_{n+1,m-1}H_{n-1m-1} - H_{n,m-1}^{2} = H_{n-1,m}H_{n+1,m-2} \tag{3}$$

Ici m est fixe. On utilise en premier l'identité (3) pour montrer que :
Pour n assez grand on peut obtenir une inégalité de la forme.

$$\left|H_{n-1,m}H_{n+1,m-2}\right| \langle \left[k\alpha \frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}} \right]^{2n} \tag{4}$$

Où, en prenant ε assez petit, le k est une constante positive inférieure à 1. Pour cette hypothèse, on introduit temporairement $\varepsilon', \varepsilon'', \eta', \eta''$, chacune d'elle peut être construite arbitrairement petite.

Avec n grand, ε assez petit qu'on veut.

En fait, donné ε', on a pour ii), en prenant n assez large.

$$\left|H_{n-1,m}\right| \langle \left[\frac{1+\varepsilon^{1}}{R^{m}R^{1}}\right]^{n-1}$$

Et comme

$\left|\dfrac{H_{n_0+1,m-1}}{H_{n_0,m-1}}\right| \rangle \alpha(1-k)^{2n_0}$ pour n assez grand , on a

$$\left|H_{n-1,m}H_{n+1,m-2}\right| \langle \frac{(1+\varepsilon'')^{n-1}(1+\varepsilon'')^{n+1}}{R'^{n-1}R^{2mn-n-1}} \langle \left[\frac{R^{1/2+1/2n}}{R'^{1/2-1/2n}}\frac{1+\eta'}{R^{m}}\right]^{2n}$$

où $1+\eta' \rangle (1+\varepsilon')^{1/2-1/2n}(1+\varepsilon'')^{1/2+1/2n}$

$$\left[\frac{R^{1/2+1/2n}}{R'^{1/2-1/2n}}\frac{1+\eta'}{R^m}\right]^{2n}\langle\left[\sqrt{\frac{R}{R'}}\frac{1+\eta''}{R^m}\right]^{2n}$$

Où $\quad 1+\eta''\rangle R^{\frac{1}{2n}}R'^{\frac{1}{2n}}(1+\eta')$

$$\left[\sqrt{\frac{R}{R'}}\frac{1+\eta''}{R^m}\right]^{2n}=\left[\sqrt{\frac{R}{R'}}\frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{R^m}\frac{1+\eta''}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{2n}=\left[(1+\eta)\sqrt{\frac{R}{R'}}\frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{R^m}\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{2n}$$

Où $1+\eta=\dfrac{1+\eta''}{1-\varepsilon}$

En écrivant alors $k=(1+\eta)\sqrt{\dfrac{R}{R'}}\quad,\ \alpha=\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\Big/R^m$

L’inégalité désirée est prouvée pour (3) et (4) pour tout n suffisamment grand, on a donc l’inégalité

$$\left|H_{n+1,m-1}H_{n-1,3-1}-H^2_{n,m-1}\right|\langle\left[k\alpha\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{2n} \tag{5}$$

Donné ε, peut importe qu’il soit petit, il existe une infinité de n pour qui $\left|H_{n,m-1}\right|\rangle\alpha^n$, pour i) si c’est vraie pour tout n, n suffisamment grand, le théorème est prouvée.

Si non, il existera un ε, et il peut être donné aussi petit qu’on souhaite, pour qu’il existera un $H_{n_0,m-1}$ excédent α^{no} en valeur absolue, précédé pour un $H_{n_0-1,m-1}$ qui en valeur absolue est au plus aussi grand que α^{no-1} et ceci pour n_0 arbitrairement grand .

Mais par (5).

en prenant $n = n_0$ on a

$$\left|\frac{H_{n_0+1,m-1}H_{n_0-1,m-1}}{H^2_{n_0,m-1}}\right|=\left|\frac{H_{n_0-1}}{H^2_{n_0,m-1}}\right|\langle\left[k\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{2n_0}\langle k^{2n_0}$$

d’où on a

$$\left|\frac{H_{n_0+1,m-1}H_{n_0-1,m-1}}{H^2_{n_0,m-1}}\right|\rangle 1-k^{2n_0}$$

Comme $\left|H_{n_0,m-1}\right|\rangle\alpha^{n_0}$, $\left|H_{n_0-1,m-1}\right|\leq\alpha^{n_0-1}$, cette inégalité donne ce qui suit

$$\left|H_{n_0+1,m-1}\right|\rangle\alpha^{n_0+1}(1-k)^{2n_0} \tag{6}$$

et pour la même raison, aussi la suite

$$\left|\frac{H_{n_0+1,m-1}}{H_{n_0,m-1}}\right|\rangle\alpha(1-k)^{2n_0} \tag{7}$$

En particulier, pour n_0 suffisamment grand, k étant inférieur à 1, on peut écrire (6) de la forme suivante :

$$\sqrt[n_0+1]{\left|H_{n_0+1,m-1}\right|}\rangle\alpha\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}} \tag{6'}$$

On souhaite obtenir les inégalités de la forme (6), (7) (6'), vérifié pour n_0+i, où i est arbitraire à condition que n_0 soit suffisamment grand.

Ces inégalités sont

$$\left|\frac{H_{n_0+i,m-1}}{H_{n_0+i-1,m-1}}\right|\rangle\alpha\left[1-k^{2n_0}\right]\left[1-k^{2(n_0+1)}\right]..\left[1-k^{2(n_0+i-1)}\right] \tag{8}$$

$$\left|H_{n_0+i,m-1}\right|\rangle\alpha^{n_0+i}\left[1-k^{2n_0}\right]^i\left[1-k^{2(n_0+1)}\right]^{i-1}...\left[1-k^{2(n_0+i-1)}\right] \tag{9}$$

$$\sqrt[n_0+i]{\left|H_{n_0+1,m-1}\right|}\rangle\alpha\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}} \tag{10}$$

Et on le montrera par (récurrence), c'est vérifié pour i = 1, si c'est vérifié pour i, on le montre pour i+1.

Si on applique (10), dans la forme :

$$\left|H_{n_0+i,m-1}\right| \rangle \left[\alpha \frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{n_0+i}$$

à avec(5), on a

$$\left|\frac{H_{n_0+i+1,m-1}H_{n_0+i,m-1}}{H^2_{n_0+i,m-1}}-1\right| \langle \frac{\left[k\alpha \frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{2(n_0+i)}}{\left[\alpha \frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{2(n_0+i)}} \qquad = k^{2(n_0+i)}$$

Conséquence

$$\left|\frac{H_{n_0+i+1,m-1}H_{n_0+i,m-1}}{H^2_{n_0+i,m-1}}\right| \rangle 1-k^{2(n_0+i)}$$

et

$$\left|\frac{H_{n_0+i+1,m-1}}{H_{n_0+i,m-1}}\right| \rangle \left|\frac{H_{n_0+i,m-1}}{H_{n_0+i-1,m-1}}\right| \left[1-k^{2(n_0+i)}\right]$$

Mais ceci appliqué à (8) implique immédiatement l'inégalité correspondante pour i+1, appelé

$$\left|\frac{H_{n_0+i+1,m-1}}{H_{n_0+i,m-1}}\right| \rangle \alpha\left[1-k^{2n_0}\right]..\left[1-k^{2(n_0+i)}\right] \tag{11}$$

et si on multiplie cette inégalité par (9), on obtient la seconde inégalité pour (i+1)

$$\left|H_{n_0+i+1,m-1}\right\rangle \alpha^{n_0+i+1}\left[1-k^{2n_0}\right]\ldots\left[1-k^{2(n_0+i)}\right] \qquad (12)$$

L'inégalité (10) pour (i+1) est une conséquence immédiate de (11) et (12).
D'après (12)

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt[n_0+i+1]{\left|H_{n_0+i+1,m-1}\right|}\rangle\left[1-k^{2n_0}\right]^{\frac{i+1}{n_0+i+1}}\left[1-k^{2(n_0+1)}\right]^{\frac{i}{n_0+i+1}}\ldots\left[1-k^{2(n_0+i)}\right]^{\frac{1}{n_0+i+1}}$$

$$\rangle\left[1-k^{2n_0}\right]\left[1-k^{2(n_0+1)}\right]\ldots\left[1-k^{2(n_0+i)}\right]$$

$$\rangle 1-\left[k^{2n_0}+k^{2(n_0+1)}+\ldots+k^{2(n_0+1)}\right]$$

$$\rangle 1-\frac{k^{2n_0}}{1-k^2}$$

Finalement, si alors on prend n_0 assez grand tel que

$$\frac{k^{2n_0}}{1-k^2}\langle\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$$

L'inégalité (10) sera établit comme conséquence de (8) et (9), quel que soit la valeur de i.
L'inégalité (10) est celle voulait voir.
En fait, en remplaçant a par sa valeur

$$\alpha=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Big/R^m \quad \text{, on a}$$

$$\left|H_{n,m-1}\right|\rangle\left[\frac{1-\varepsilon}{R^m}\right]^n \quad , n>n_0$$

qui est ce qu'on voulait prouver.
Il est naturel de dire que si α est l'unique limite de la séquence $\{\alpha_n\}$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n = \alpha$$

La séquence converge régulièrement vers α. Cette terminologie est due à Hadamard.

IV-5-5-Théorème :

Sous les hypothèses du théorème (IV-5-4) les séries ont dans le cercle de convergence, exactement m pôles et pas d'autres singularités.

En premier, supposons que les séries, ayant seulement des pôles dans le cercle de convergence, ont m-r pôles, r étant un entier positif. Alors d'après le corollaire du théorème (IV-3)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|H_{n,(n-r)+(r-1)}\right|}\langle\frac{1}{R^{(m-r)+(r-1)+1}}$$

alors $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|H_{n,m-1}\right|}\langle\frac{1}{R^{m}}$

qui contredit l'hypothèse i)

On tente après de déterminer un polynôme de degrés m

$$p_m(x) = 1 + \sum_{i=1}^{m} A_i x^i \qquad , A_m \neq 0$$

tel que les séries représentant les fonctions

$$\phi(x) = P_m(x) f(x) = \sum b_n x^n$$

Où, pour un nombre fini de termes

$$b_{n+m} = a_{n+m} + a_{n+m-1}A_1 + ... + a_n A_m$$

Converge dans le cercle de rayon plus grand que R.

D'après le théorème (IV-4), on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|H_{n,m-1}|}\langle\frac{1}{R^m}$$

alors $H_{n,m-1}$ n'est pas un zéros pour $n> n_0$, par conséquence il existe des ensemble des nombres $A_1^{(n)}, A_2^{(n)},\dots, A_m^{(n)}$ qui satisfont un système d'équation de la forme.

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+m} + a_{n+m-1} A^{(n)} + a_{n+m-2}\, A_2^{(n)} + \dots\dots + a_n A_m^{(n)} = 0 \\ a_{n+m+1} + a_{n+m}\, A_1^{(n)} + \dots\dots + a_{n+1}\, A_{n+}^{(n)} = 0 \\ . \\ . \\ a_{n+2m-1} + a_{n+2m-2}\, A_1^{(n)} + \dots + a_{n+m-1}\, A_{m+}^{(n)} = 0 \end{array}\right\} \qquad 14$$

Si on considère

$$\delta_h^{(n)} = A_h^{(n+1)} - A_h^{(n)} \quad , \ h = 1 , 2 , \dots m \qquad n= n_0 \ , n_{0+1} \ , \dots ,$$

le système d'équation devient

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+m}\, \delta_1^{(n)} + a_{n+m-1}\, \delta_2^{(n)} + \dots\dots + a_{n+1}\, \delta_m^{(n)} = 0 \\ a_{n+m+1}\, \delta_1^{(n)} + \dots\dots + a_{n+2}\, \delta_m^{(n)} = 0 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots \\ a_{n+2m-2}\, \delta_1^{(n)} + \dots\dots + a_{n+m-1}\, \delta_m^{(n)} = 0 \\ a_{n+2m-1}\, \delta_1^{(n)} + \dots\dots + a_{n+m}\, \delta_m^{(n)} = - L_{n+m} \end{array}\right\} \qquad 15$$

$$-L_{n+m} + a_{n+2m} + a_{n+2m-1}A_1^{(n)} + \dots + a_{n+m}\, A_m^{(n)} = 0 \qquad (16)$$

Eliminant $A^{(n)},\ldots, A_n^{(n)}$ pour (14) et (15) , on obtient

$$L_{n+m} = \frac{H_{n,m}}{H_{n,m-1}}$$

D'après (15)

$$\delta_h^{(n)} = -\frac{H_{n+1,m-2}^{(h)}}{H_{n+1,m-1}} L_{n+m} = \frac{H_{n,m} H_{n+1,m-2}^{(h)}}{H_{n,m-1} H_{n+1,m-1}}$$

Où $H_{n+1,m-2}^{(h)}$ d'ordre m-1, composé des coefficients de la série donnée par la suite

$$\left| H_{n+1,m-2}^{(h)} \right| \langle \left(\frac{1+\varepsilon}{R^{m-1}} \right)^n$$

Pour n assez grand et comme on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| H_{n,m-1} \right|} \langle \frac{1}{R^m}$$

et

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| H_{n,m} \right|} < \frac{1}{R^m R^1} < \frac{1}{R^{m+1}}$$

il doit existé un entier n^1, indépendant de h, tel que pour $n \geq n^1$, on aura :

$$\left| H_{n,m} \right| < \left(\frac{1+\varepsilon}{R^m R^1} \right)^n$$

$$\left| H_{n,m-1} \right| > \left(\frac{1-\varepsilon}{R^m} \right)^n$$

$$\left| H_{n+1,m-1} \right| > \left(\frac{1-\varepsilon}{R^m} \right)^n$$

$$\left| H_{n+1,m-1}^{(h)} \right| < \left(\frac{1+\varepsilon}{R^{m-1}} \right)$$

pour $n \geq n^1$

$$\left| \delta_h^{(n)} \right| < \left[\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \frac{R}{R'} \right] = \left[(1+\eta) \frac{R}{R'} \right]^n$$

Si on suppose ε petit, la quantité entre parenthèse est inférieur a 1. Alors les séries $\sum_{n=n_0}^{\infty} \delta_h^{(n)}$ convergent.

Soit $A_h = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_h^{(n)}$, h = 1 , 2 , …., m

Cette limite existe puisque

$$\sum_{j=n_0}^{n_0+k-1} \delta_h^{(j)} = A_h^{(n_0+k)} - A_h^{(n_0)}$$

On peut montrer que les séries $\sum b_n x^n$ pour ϕ (x) converge dans le cercle de rayon plus grand que R. On a

$$\left| A_h - A_h^{(n_0+k)} \right| = \left| \sum_{j=n_0+k}^{\infty} \delta_h^{(j)} \right| \leq \sum_{j=n_0+k}^{\infty} \left[(1+\eta) \frac{R}{R'} \right]^j$$

et

$$b_{n+m} = a_{n+m-1}(A_1 - A_1^{(n)}) + a_{n+m-2}(A_2 - A_2^{(n)}) + \ldots + a_n(A_m - A_m^{(n)})$$

et comme

$$b_{n+m} - a_{n+m} = a_{n+m-1}A_1 + \ldots + a_n A_m$$

et

$$a_{n+m} = -a_{n+m-1}A_1^{(n)} - \ldots - a_n A_m^{(n)}$$

La dernière inégalité montre que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n+m]{|b_{n+m}|} \leq \frac{R}{R'}(1+\eta)\frac{1}{R} < \frac{1}{R}$$

Exemple :

4- Nombres de Catalan généralisés : [12]

Résumé :

Rappelons que le n^{ieme} nombre de Catalan C_n est donné par la formule :

$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ ce nombre a très nombreuses interprétation combinatoire par exemple depuis Euler on sait qu'il n'est autre que le nombre de décomposition en triangles d'un polygone convexe de (n+2) cotés par les diagonales formés de n nombres 1 et de n nombres – 1 à somme partielles toutes positives ou nulles

- Une nouvelle propriété sera démontrer par une technique algébrico-analytique remontant à Sylvester quelque soit n, le déterminant de Hankel de dimension n formé sur les nombres de Catalan vaut 1 cet article en donne maintenant une preuve directe et élémentaire il calcule aussi l'inverse de cette matrice.

Théorème :

Soit H_n la matrice de Hankel construite sur la suite de Catalan

$$
H_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & . & . & C_n \\ 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & . & . & C_{n+1} \\ 2 & 5 & 14 & 42 & 132 & . & . & C_{n+2} \\ 5 & 14 & 42 & 132 & 429 & . & . & C_{n+3} \\ 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ C_n & . & . & . & . & . & . & C_{2n} \end{bmatrix}.
$$

$\forall n$, $\det(H_n) = 1$

Démonstration :

A- le coefficient de x^{i+j+1} dans $(1-x)^2(1+x)^{2i+2j}$ vaut

$$
\binom{2i+2j}{i+j+1} - 2\binom{2i+2j}{i+j-1} + \binom{2i+2j}{i+j-1} = -2C_{i+j}
$$

B- D'autre part, le coefficient de x^{a} dans $(1-x)(1+x)^{2i}$ vaut

$$
\binom{2i}{a} - \binom{2i}{a-1} = \binom{2i}{a}\frac{2i-2a+1}{2i-a+1}
$$

C- Ainsi, en considérant le terme x^{i+j+1} dans l'identité triviale

$$
(1-x)^2(1+x)^{2i+2j} = \left[(1-x)(1+x)^{2i}\right]\left[(1-x)(1+x)^{2j}\right]
$$

Puisque en exploitant l'antisymétrique des coefficients de ces polynômes on a :

$$
C_{i+j} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k+1}\frac{2i-2(i+k+1)+1}{2i-(i+k+1)+1}\binom{2j}{j-k}\frac{2j-2(j-k)+1}{2j-(j-k)+1}
$$

Où $\binom{a}{b} = 0$ lorsque b<0 ou b>0

$$
C_{i+j} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k+1}\frac{2k+1}{i+k+1}\binom{2j}{j-k}\frac{2k+1}{j+k+1}
$$

C'est-à-dire $C_{i+j} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} T_{i,k}T_{j,k}$

Moyennant $T_{i,k} = \dfrac{\binom{2i}{i+k}(2k+1))}{i+k+1}$

Appelons T_n la matrice triangulaire inférieure formée par ces coefficients $T_{i,k}$

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 5 & 9 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 14 & 28 & 20 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 42 & 90 & 75 & 35 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 132 & 297 & 275 & 154 & 54 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 429 & 1001 & 2001 & 637 & 273 & 77 & 13 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 1430 & 3432 & 3640 & 2548 & 1260 & 440 & 104 & 15 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 4862 & 11934 & 13 & 9996 & 5508 & 2244 & 663 & 135 & 17 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ T_{n,0} & T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & T_{n,4} & T_{n,5} & T_{n,6} & T_{n,7} & T_{n,8} & T_{n,9} & . & . & . & T_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Notre dernier résultat peut s'écrire maintenant $T_n U_n = H_n$

U_n désignant la transposée de T_n.

Puisque tous les éléments diagonaux de T_n valent 1, on obtient
$\det(H_n) = \det(T_n)$, $\det(U_n) = 1.1 = 1$
comme annoncé.

2-Inverse de H_n :
Posons

$$\alpha_{n,i,j} = \left(H_n^{-1}\right)_{i,j}$$

D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n} T_{n,k} \sin(2k+1)\alpha = 2^{2n} \sin\alpha \cos^{2n}\alpha$$

D'autre part, par récurrence,

$$\sin(2n+1)\alpha = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n+k}{n-k} 2^{2k} \sin\alpha \cos^{2k}\alpha$$

.

On voit donc que T_n^{-1}, matrice triangulaire inférieure inverse de celle des $T_{n,k}$ est formée des $(-1)^{n+k}\binom{n+k}{n-k}$

Il en résulte

$$\alpha_{n,i,j} = (-1)^{i+j} \sum \binom{k+i}{k-i} \binom{k+j}{k-j}$$

ainsi que l'identité

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+i} \binom{k+i}{k-i} T_{j,k} = \delta_{ij}$$

Bibliographie

[1] Louis COMTET, Analyse combinatoire tome 1 et 2 puf (1970).

[2] Alexandre Junod, Congruence par l'analyse *p-adique* et le calcul symbolique(thèse de Doctorat,juin 2003,Université de Newchatel faculté des sciences)

[3] M. AIGER, A characterization of the Bell number. Discret Mathematics 205 (1999), p. 207-210.

[4] P. DELSARTE, Nombres de Bell et polynômes de Charlier. Comptes Rendus Acad. Science 287 série A (1978), p. 271-273.

[5] R. EHRENBORG, The Hankel Determinant of exponentiel polynomials, American Math.
Monthly 107 (2000), p. 557-560.

[6] E.W.WEISSTAIN, Concise encyclopedia of Mathematics, CSC Press (1999).

[7] C. RADOUX, Addition Formulas and Hankel determinants for some classical sequences
of Integers. Journal of comput and applied Math. 115 (2000), p. 471- 477.

[8]Y.AMICE, Les Nombres P-Adiques, Press univ de France, coll. SUP, le mathématicien
(1975).

[9] DWORK (Bernard), On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer.
J. of Math, 82 (1960), p.631-648.

[10] BERTRANDLAS (Françoise), diamètre transfini dans un corps valué application au prolongement analytique, Sem. Delange-Pisot, n°3, Paris 1963-1964.

[11] Mandelbryt,The Rice Institute PAMPHLET, Vol.XIV Oct 1927 No, 4.

[12] Cristian Radoux, Calcul effectif de certains déterminants de Hankel, Bulletin de la société mathématique de Belgique, XXX I, 1(série B), 49-55 (1979).