N° d'ordre : 15/2008-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l′ Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des Mathématiques

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de MAGISTER
En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Mathématique Discréte et Optimisation

Par : **Fatma MESSAOUDI**

Sujet

Sur les nombres de subdivision de la domination double et la domination Couplée

Soutenu publiquement le 13/12/2008, devant le jury composé de :

M^r M. MOULAÏ	Maître de Conférence.	U.S.T.H.B.	Président
M^{elle} I. BOUCHEMAKH	Professeur	U.S.T.H.B.	Directrice de thèse
M^r S. BOUROUBI	Maître de Conférence.	U.S.T.H.B.	Examinateur
M^{me} M. AHMANE	Chargé de Cours	U.S.T.H.B.	Invité

Remerciement

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma reconnaissance à ma directrice de thèse, I.BOUCHEMAKH, Professeur à l'U.S.T.H.B de m'avoir introduit dans ce sujet et d'avoir accepté de m'encadrer, aussi que pour sa patience et ses conseils tout au long de mon travail.

Je remercie tous les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'en faire partie .

Je remercie vivement M. MOULAI, Maitre de conférence, d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie S. BOUROUBI, Maitre de Conférence à l'U.S.T.H.B, d'avoir accepté d'examiner mon travail .

je remercie , M.AHMANE, Chargé de Recheche à l'U.S.T.H.B, d'avoir accepté d'examiner mon travail, et pour tout le temps qu'elle m'a consacré.

Je remercie tous les membres de ma famille surtout ma très chère mère pour toutes ses prières et ses encouragements qui, sans ceux je n'aurais jamais pu avancer dans mon travail.

Je remercie également tous mes amis qui m'ont encouragé à aborder le domaine de la recherche et de m'y accrocher malgré tous les obstacles.

Enfin, je remercie toute personne qui m'a aidé de prés ou de loin pour achever ce modeste manuscrit.

Table des matières

Introduction générale

La théorie des graphes est une branche très vaste de la Recherche Opérationnelle et constitue un moyen très puissant pour étudier les différentes propriétés de certaines situations ou relations, qui peuvent exister entre des objets ou des éléments dans la vie quotidienne dont la résolution ou la modélisation peuvent être difficile ou compliquée par d'autres moyens. Ces relations seront représentées par des points et des traits qu'on appellera graphe.

Parmi les domaines de la théorie des graphes, on s'intéresse dans notre travail à certaines propriétés de la domination qui est un domaine très récent et dont l'origine se trouve dans les jeux d'échecs. Elle a pris un aspect théorique grâce a Claude Berge en 1958.

Un sous ensemble S de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est un dominant si tout sommet de G est soit dans S soit adjacent à un sommet de S. Actuellement, plus de 80 types de domination sont introduits dans la littérature (voir par exemple [2, 7]). Le nombre de domination d'un graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble dominant, le probleme de la détermination de ce nombre est un problème NP-Complet pour un graphe quelconque [55].

La domination trouve des champs d'applications dans les domaines d'informatique, de biologie, de chimie, de sociologie et dans les problèmes de localisations ...

Parmi les types d'ensembles dominants qui existent nous nous intéressons à la domination double et la domination couplée.

Un sous-ensemble S de sommets de G est dit ensemble dominant double si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins deux sommets de S et tout sommet de S est adjacent a au moins un sommet de S. On appelle nombre de domination double, le cardinal minimum d'un ensemble dominant double.

Un dominant S est dit couplé si le sous graphe induit par les sommets de S contient au moins un couplage parfait.On appelle la taille minimum (respectivement maximum) d'un dominant couplé le nombre de la domination couplé inférieur (respectivement supérieur).

Dans le but de faire augmenter le nombre de domination dans certaines classes de graphes, les chercheurs ont introduit la notion de subdivision de la domination qui consiste à subdiviser un nombre minimum d'arêtes dans un graphe pour faire augmenter ce nombre. Parmi les travaux qui existent dans la littérature on cite ceux de T.Haynes et al [35, 37] qui se sont intéréssés au nombre de subdivision de la domination et la domination stable ; H. Karami et al [51] se sont intéréssés au nombre de subdivision de la domination totale.

L'objectif principal de notre travail est de déterminer des bornes ou des valeurs exactes pour le nombre de subdivision de la domination double et de la domination couplée.

Dans le chapitre 1, nous donnons les définitions de base de la théorie des graphes et un aperçu sur certains types de domination.

Le chapitre 2 est consacré à la subdivision de la domination et de la domination totale où nous donnons les différentes bornes qui on été établies pour ce concept.

Dans la première partie du chapitre 3 nous présentons les différents résultats qui existent dans la littérature concernant la domination double. la deuxième partie est consacrée aux résultats nouveaux que nous avons obtenu pour le même invariant.

Le chapitre 4 est consacré à la domination couplée. Nous commençons d'abord par exposer les différentes bornes qui existent sur le nombre de la domination couplée ensuite nous prouvons d'autres résultas obtenus.

Enfin nous terminons par une conclusion générale et quelques perspectives pour les nombres de subdivision de la domination double et la domination couplée.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes

Dans ce chapitre nous présentons d'abord certaines définitions de bases nécessaires à notre travail [10, 11] ensuite nous donnons un aperçu sur la domination suivi de quelques types d'ensembles dominants.

1.1 Définitions et notations

Un Graphe $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles , un ensemble fini V de points appellés sommets et un ensemble fini E
de traits appellés arêtes. Une arête e est une paire de sommets (u, v) notée par $e = uv$ ou bien $e = vu$, où u et v sont les extrémités de e.

L'ordre d'un graphe G est le nombre de ses sommets.
On dit que G est *simple* s'il ne contient ni boucle (arête reliant x avec lui même) ni arêtes multiples.

Adjacence dans un graphe. Deux sommet x et y d'un graphe $G = (V, E)$ sont dits *adjacents (voisins)* s'ils sont reliés par une arête. L'ensemble des voisins d'un sommet x sera noté $N(x)$. Le nombre $d(x) = |N(x)|$ est appellé le degré du sommet x.
Le degré maximum (respectivement *minimum*) d'un graphe $G = (V, E)$ est noté $\triangle(G)$ (respéctivement $\delta(G)$).

Une chaîne P_k est une séquence finie alternée de sommets x_i , $1 \leq i \leq k$ et d'arêtes, telle que $\forall i$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$.
La chaîne est *simple* si elle ne passe pas deux fois par une même arête.
La distance $d(x, y)$ entre x et y est la longueur de la plus courte chaîne entre x et y.

Un cycle C est une chaîne simple ayant ses deux extrémités confondues. C est *hamiltonien* s'il passe une seule fois par chacun des sommets de G.

La Corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs d'un cycle.

Un Graphe G est *connexe* si pour toute paire x, y de sommets distincts de G, il existe au moins une chaîne les reliant. Dans tout ce qui suit, nous intéresserons qu'aux graphes simples, connexes et sans sommets isolés.

Soit $A \subset V$, le graphe G_A dont les sommets sont les points de A et les arêtes sont ceux de G ayant les deux extrémités dans A est appelé *le sous graphe* de G engendré par A.

On appelle *graphe partiel* d'un graphe G le graphe $G^{'}$ tel que $G^{'} = (V, E^{'})$ avec $E^{'} \subset E$.

1.1.1 Invariants d'un graphe

Le diamètre d'un graphe G est le nombre $Diam(G) = max\ d(x, y)$ tel que $x \in V$, $y \in V$ et $x \neq y$.

L'excentricité d'un sommet x est le nombre $e(x) = \max d(x, y)$ avec $y \in V$ et $x \neq y$.

Le rayon d'un graphe G est le nombre $\rho(G) = \min\{\ e(x)\,;\, x \in V\}$.

Un Couplage dans un graphe G est un sous ensemble M d'arêtes de G deux à deux non adjacentes. La taille maximum de M est notée par $\beta(G)$.
Un sommet x est *saturé* par un couplage M s'il existe une arête de M d'éxtrémité x.

Un couplage est dit *parfait* s'il sature tous les sommets du graphe, c'est à dire $\beta(G) = \frac{n}{2}$.

Un Stable est un sous ensemble S de sommets de G, deux à deux non adjacents.

1.1.2 Quelques graphes particuliers

Un arbre T est un graphe connexe et sans cycle.
On appelle sommet *pendant*, tout sommet de T de degré un. Le sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet *support*.
Un support est dit *simple* s'il est adjacent à un seul sommet pendant. il est dit *fort* s'il est adjacent à au moins deux sommets pendants.

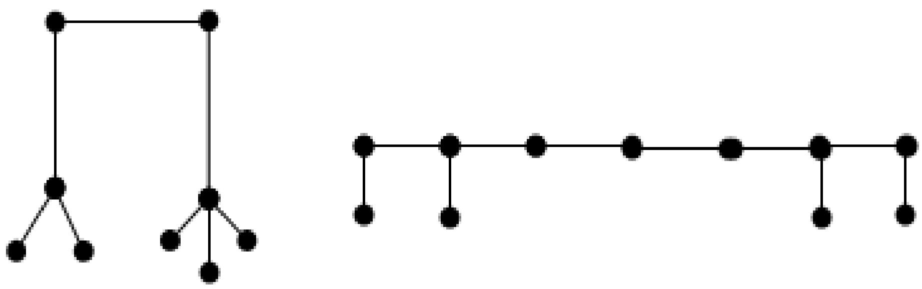

Fig. 1.1 – Arbre

Un graphe G est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes X_1 et X_2 de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents. Un graphe biparti est noté par $G = (X_1 \cup X_2, E)$.
On dit que $G = (X_1 \cup X_2, E)$ est équilibré si $|X_1| = |X_2|$.

Un graphe simple $G = (V, E)$ est dit *complet* si toute paire de sommets est reliée par une arête. Un graphe complet a n sommets est noté par K_n (voir Fig 1.2).

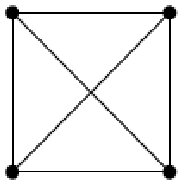

Fig. 1.2 – K_4

Un graphe biparti $G = (X_1 \cup X_2, E)$ est complet si tout sommet de X_1 est de degré $|X_2|$ et tout sommet de X_2 est de degré $|X_1|$ on le note $K_{r,s}$ avec $r = |X_1|$ et $s = |X_2|$ (voir Fig 1.3)).

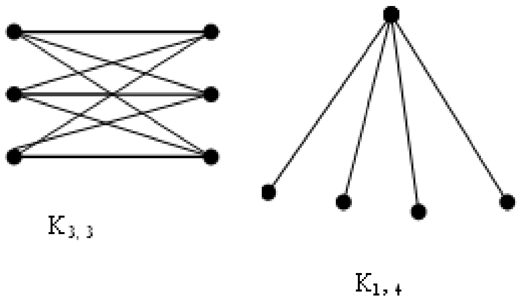

Fig. 1.3 –

Une clique est un sous graphe complet maximal d'un graphe.

Une Couronne d'un graphe G est une copie de G obtenue à partir de G en reliant chaque sommet de G à un nouveau sommet par une arête pendante . Une couronne est notée par $G^* = G \circ K_1$ (voir fig 1.4).

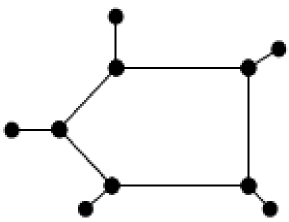

Fig. 1.4 –

Une Chenille est un arbre T, tel qu'en supprimant tous ses sommets pendants , on obtient une chaîne simple (voir Fig1.5).

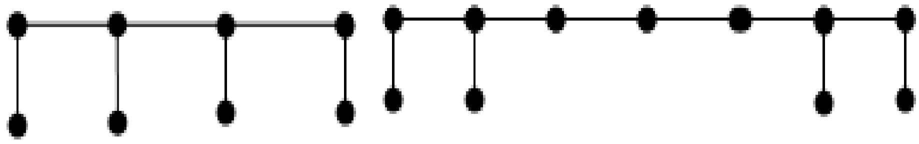

Fig. 1.5 – Une chenille

Un Graphe triangulé est un graphe G dont tout cycle de longueur supérieur à trois admet une corde.

Le produit cartésien de G et G' noté par $G \times G'$ est le graphe sur l'ensemble des sommets $V(G) \times V(G')$ où :
$(x, x')(y, y') \in E(G \times G')$ si $x = y$ et $x'y' \in E'(G)$ ou bien $x' = y'$ et $xy \in E(G)$.

La Grille est le graphe $G = P_n \times P_m$ où $n \geq 2$ et $m \geq 2$ (voir Fig 1.6).

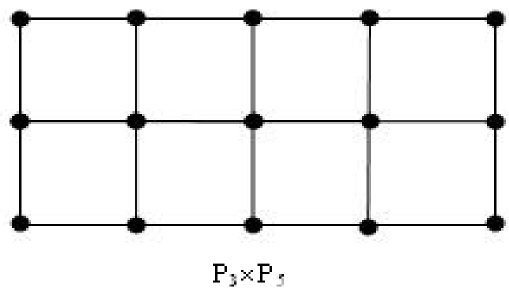

Fig. 1.6 – Grille $P_n \times P_m$

Le Cylindre est le graphe $G = P_n \times C_m$ où $n \geq 1$, $m \geq 1$ (voir Fig 1.7).

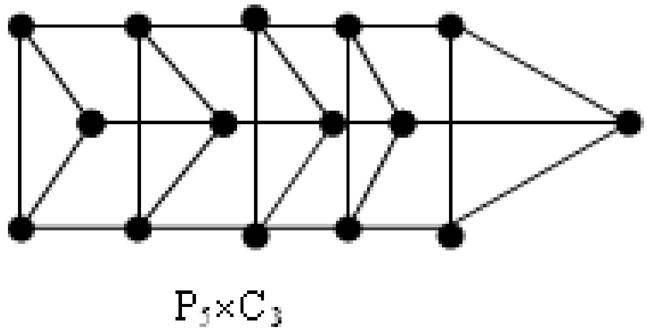

FIG. 1.7 – Cylindre $P_n \times C_m$

Le Tore *est le graphe* $G = C_n \times C_m$ *tel que* $n \geq 1$, $m \geq 1$ *(voir Fig* 1.8*).*

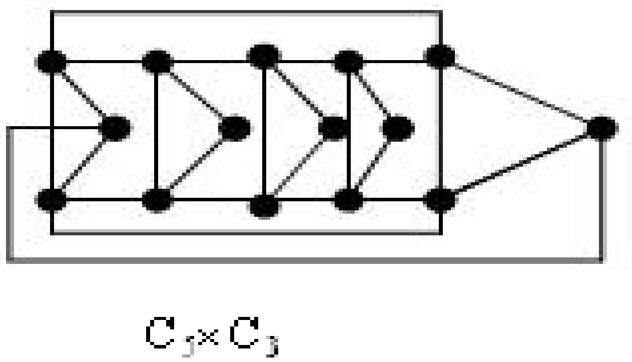

FIG. 1.8 – Tore $C_n \times C_m$

1.2 La domination dans les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés et S un sous ensemble de V, S est un dominant si tout sommet de $(V - S)$ est adjacent à au moins un sommet de S (Tout sommet d'un ensemble dominnat domine lui même). Le nombre de domination noté par $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G, le cardinal maximum d'un dominant minimal de G appelé le nombre de domination supérieure, noté par $\Gamma(G)$.

Le concept de domination est né au $16^{ème}$ siècle avec les jeux d'échec où le principe consiste à placer un nombre minimum de reines sur l'échiquier, de telle manière que chaque case de la table soit ou bien occupée par une reine ou bien atteinte par un seul déplacement d'une reine.

La domination devient un domaine théorique dés 1958. En 1977, elle connut une véritable expansion grâce aux travaux de Cockayne et Hedetniemi.

IL existe 80 types de domination, on peut citer par exemple la domination double , couplée, stable, totale ... Plusieurs études ont été faites sur la domination et qui consister à déterminer les propriétés de différent types de dominants ainsi que des bornes supérieures ou inférieures concernant ce nombre dedomination.

On note que le domination trouve un champ d'application très large surtout en informatique, on peut citer par exemple les réseaux de communication, les problèmes de localisations, les microprocessus ...

Dans tout ce qui suit, on représente par :

- $\bullet$ Les éléments d'un dominant S d'un graphe G et par
- $\circ$ Les éléments de $(V - S)$.

1.2.1 Quelques types de domination

Un sous ensemble S d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommets isolés, est un dominant total[22] de G si tout sommet de V est adjacent à un sommet de S (c'est-à-dire $V = N(S)$), on note par $\gamma_t(G)$ le cardinal minimum d'un dominant total (voir Fig 1.9)

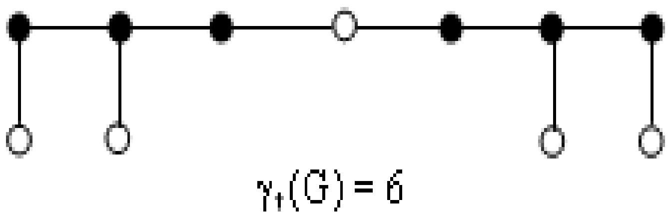

FIG. 1.9 –

Soit $G = (V, E)$ un graphe et S un sous ensemble de V on dit que S est *un dominant double* de G si tout sommets $(V - S)$ est adjacent à au moins deux sommets de S et tout sommet de S doit avoir au moins un voisin dans S. Le nombre de domination double d'un graphe G est le cardinal minimum d'un dominant double noté $\gamma_{\times 2}(G)$ (Voir Fig 1.10).

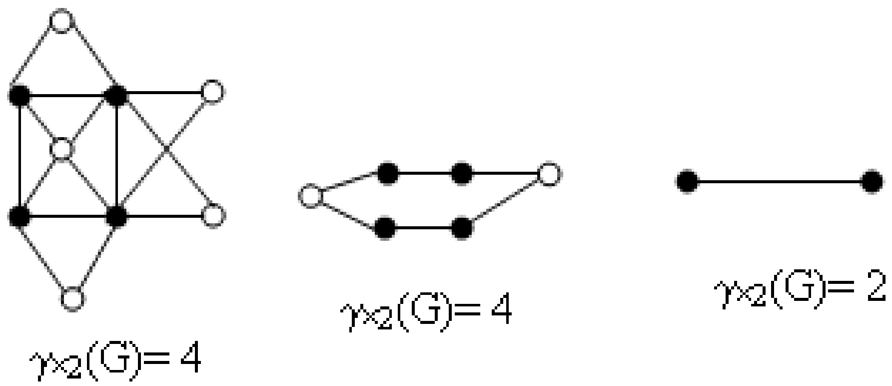

FIG. 1.10 –

Soient $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés et S un sous ensemble de V. S est dit un *dominant double exact*[19] si tout sommet de G est dominé exactement deux fois par S (voir Fig 1.11).

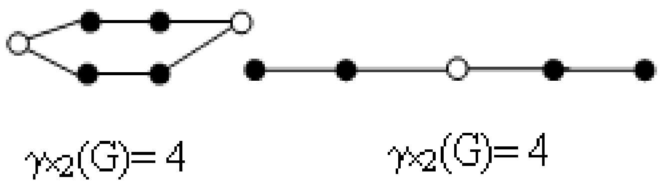

FIG. 1.11 – EDDE

Soit S un sous ensemble de V, S est un dominant couplé [17, 18, 20] si S est un dominant et $G(S)$ induit un couplage parfait. On note par $\gamma_{pr}(G)$ la taille minimum d'un dominant couplé (voir Fig 1.12).

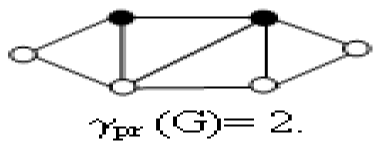

FIG. 1.12 –

Chapitre 2

Domination et subdivision dans les graphes

Ce chapitre est un survey sur le nombre de domination et le nombre de subdivision de la domination de la litérature.

Soit S un ensemble dominant d'un graphe G. On appelle nombre de subdivision de G, noté par $sd_\gamma(G)$ le nombre minimum d'arêtes à subdiviser pour faire augmenter le nombre de domination, de sorte que chaque arête peut être subdivisée au plus une seule fois.

Des bornes ont été établis par T. W.Haynes, S.T et S .M.Hedetniemi [33, 34, 35, 36] sur le nombre de domination et de la domination totale. Nous enoncerons quelques résultats sur le nombre de subdivision de la domination et la domination totale [31, 37, 38, 39].

2.1 Quelques bornes sur le nombre de domination

T. W.Haynes et al[8, 28, 55] ont déterminé des bornes supérieurs de $\gamma(G)$ en fonction de $\Delta(G)$ et de l'ordre de G.

Théorème 2.1. *[8] Pour tout graphe G, on a $\gamma(G) \leq n - \Delta$.*

Théorème 2.2. *[10] Si G est un graphe sans sommets isolés alors $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Théorème 2.3. *[55, 28] Soit G un graphe sans sommets isolés d'ordre n pair, alors $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si toutes les composantes connexes de G sont des cycles C_4 ou bien la couronne H^* d'un graphe H.*

2.1.1 Bornes sur le nombre de la domination totale

Concernant la domination totale, on a

Théorème 2.4. *[23] Pour tout graphe connexe G sans sommets isolés d'ordre $n \geq 3$, on a $\gamma_t(G) \leq \frac{2n}{3}$.*

La borne du Théoréme 2.4 est atteinte dans certains cas :

On appelle une k -couronne d'un graphe G le graphe d'ordre $k|V|$ obtenu à partir de G en rajoutant une chaîne de longueur k à tout sommet de G.

Théorème 2.5. *[14] Soit G un graphe connexe d'ordre n, $n \geq 3$, alors $\gamma_t(G) = \frac{2n}{3}$ si seulement si G est un cycle C_3 ou C_6 ou la 2-couronne d'un graphe connexe.*

Pour la classe des arbres, on a les résultats suivants :

Théorème 2.6. *[22] Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec s supports, alors*

(a) $\gamma_t(G) \leq \frac{n+s}{2}$.

(b) $\gamma_{pr}G) \leq \frac{n+2s-1}{2}$.

Théorème 2.7. *[16] Si T est un arbre d'ordre au moins trois ayant s supports alors $\gamma_t(T) \leq \gamma_{pr}(T) \leq \gamma_t(T) + s - 1$.*

Théorème 2.8. *[16] Si $G \notin \{C_3, C_5, C_6, C_{10}\}$ est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_t(G) \leq \frac{4n}{7}$.*

2.1.2 Bornes sur le nombre de subdivision de la domination

L'invariant $sd_\gamma(G)$ admet une borne en foncton de la somme des degrés de sommets adjacents : [1, 34, 35].

Théorème 2.9. *[34, 35] Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et pour toute paire de sommets adjacents (u, v) avec $deg(u) \geq 2$ et $deg(v) \geq 2$, on a $sd_\gamma(G) \leq deg(u) + deg(v) - 1$.*

Le corollaire suivant découle du Théorème 2.9 et du fait que la grille contient un sommet de degré deux qui est adjacent à un sommet de degré trois.

Corollaire 2.1. *[34] Pour toute grille $G_{r,s}$ avec $r \leq s$, on a $1 \leq sd_\gamma(T) \leq 4$.*

Corollaire 2.2. *[35] Pour tout graphe k-régulier G tel que $k \geq 2$, on a*
$1 \leq sd_\gamma(T) \leq 2k - 1$.

Théorème 2.10. *[1] Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, on a $1 \leq sd\gamma(T) \leq 3$.*

Dans l'article[34], T.Haynes et al, on répondu à la conjecture de S. Arumugam qui stipule que : tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, $1 \leq sd_\gamma(G) \leq 3$.
ils ont montrés par le contre exemple $G = K_t \times K_t (t \in N,\, t \geq 4)$ que $sd_\gamma(K_t \times K_t) = 4$.
Dans ce même article les auteurs ont établies desbornes pour des classes particulières de graphes :

Corollaire 2.3. *[35] Pour le cube Q_n on a $1 \leq sd_\gamma(Q_n) \leq 5$.*

Proposition 2.1. *[35] Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$ et $\gamma(G) = 1$, alors $sd_\gamma(G) = 1$.*

Théorème 2.11. *[35] Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$,*
alors $sd_\gamma(G) \leq \gamma(G) + 1$.

Théorème 2.12. *[35] Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ avec $\gamma(G) = \beta(G)$ alors $1 \leq sd\gamma(G) \leq 3$.*

Un sommet est dit simplicial si l'ensemble de ses voisins induit une clique.

Corollaire 2.4. *[34] Si un graphe G contient un sommet simplicial u tel que $deg(u) \geq 2$, alors $sd_{\gamma}(G) \leq deg(u) + 1$.*

Théorème 2.13. *[34] Si G est un graphe qui possède une clique contenant deux sommets simpliciaux alors $1 \leq sd_{\gamma}(G) \leq 3$.*

Théorème 2.14. *[34, 35] Si G est un graphe ayant au moins trois sommets simpliciaux deux a deux adjacents alors $sd_{\gamma}(G) = 1$.*

Un sommet u est dit *triangulaire* si tout sommet v adjacent à u est contenu dans un triangle, autrement dit, si le sous graphe induit $G[N(u)]$ ne contienne pas de sommets isolés. On dira qu'un graphe est *triangulaire* s'il contient au moins un sommet triangulaire et il est *complètement triangulaire* si tout sommet de G est *triangulaire*.

Théorème 2.15. *[35] Si un graphe G contient un sommet triangulaire u alors, $sd_{\gamma}(G) \leq deg(u) + 1$.*

Théorème 2.16. *[35] Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ alors, $sd_{\gamma}(G) \leq \gamma(G) + 1$.*

Corollaire 2.5. *[35] Pour tout graphe complètement triangulaire, on a $sd_{\gamma}(G) \leq \gamma(G) + 1$.*

Un graphe G est dit *planaire* s'il est possible de le représenter sur un plan de sorte que les sommets soient des points distincts, les arêtes des courbes simples, et que deux arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités.
Un graphe G est dit un graphe *planaire maximal* si pour toute paire de sommets (u, v) non adjacents on a $G + uv$ est non planaire.

Corollaire 2.6. *[35]*
pour tout graphe planaire maximal G, on a $sd_\gamma(G) \leq \gamma(G) + 1 \leq 6$.

Théorème 2.17. *Soient u et v deux sommets adjacents non-simpliciaux d'un graphe G et r la taille maximum d'une clique dans $G[N(u) \cap N(v)]$ alors,*
$sd_\gamma(T) \leq deg(u) + deg(v) - 2r - 1$.

2.1.3 Bornes sur le nombre de subdivision de la domination totale

Le nombre desubdivision de la domination totale est le nombre minimum d'arêtes qu'on doit subdiviser (chaque arête peut être subdivisée au plus une seul fois) pour faire augmenter le nombre de domination totale. Il est noté $sd_{\gamma_t}(G)$.
Des résultats similaires à ceux de $sd_\gamma(G)$ existent, ils ont été établies par T.Haynes et al [37]

Théorème 2.18. *[37] Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, on a $1 \leq sd_{\gamma_t}(T) \leq 3$.*

Théorème 2.19. *[37] Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$, et $\gamma_t(G) = 2$ alors*
$1 \leq sd_{\gamma_t}(G) \leq 3$.

Théorème 2.20. *[37] Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$, et $\gamma(G) = 3$ alors*
$1 \leq sd_{\gamma_t}(G) \leq 3$.

Une meilleure borne existe pour $sd_{\gamma_t}(G)$ par rapport à $sd_\gamma(G)$.

Théorème 2.21. *[38] Pour tout graphe G connexe ayant deux sommets adjacents u et v de degré au moins deux ,alors $sd_{\gamma_t}(G) \leq deg(u) + deg(v) - |N(u) \cap N(v)| - 1$.*

D'autre bornes ont été établis dans [38], en particulier :

Corollaire 2.7. *[38] Pour tout graphe G, $k-$régulier tel que $k \geq 2$, on a ,*
$1 \leq sd_{\gamma_t}(G) \leq 2k - 1$.

Corollaire 2.8. *[38] Pour toute grille $G_{r,s}$ avec $r \leq s$, on a $1 \leq sd_{\gamma_t}(G_{r,s}) \leq 4$.*

Proposition 2.2. *[38] Pour toute chaîne P_n et tout cycle C_n on a :*

$$sd_{\gamma_t}(T) = \begin{cases} 1 & si\, n \equiv 0[4] \text{ } ou \text{ } n \equiv 1[4]; \\ 3 & si\, n \equiv 2[4]; \\ 2 & si\, n \equiv 3[4]. \end{cases}$$

Proposition 2.3. *[39] Soit $H^* = G \circ K_1$ la couronne d'un graphe G sans sommets isolés d'ordre n, alors $sd_{\gamma_t}(H^*) = 1$.*

Proposition 2.4. *[39] Tout graphe G ayant un sommet de degré deux qui appartient à un triangle, vérifie $1 \leq sd_{\gamma_t}(G) \leq 3$.*

un k-arbre est un graphe obtenu par la copie d'un graphe complet d'ordre $k+1$, on joignant chaque sommet a tout les sommets du sous graphe complet d'ore k.

Corollaire 2.9. *[39] Pour tout k-arbre T, $k \geq 2$, on a $sd_{\gamma_t}(G) \leq deg(u)$.*

Proposition 2.5. *[37] Soit G un graphe biparti complet $K_{r,s}$, $r \geq 5$, ayant un couplage parfait, alors $sd_{\gamma_t}(G) \leq 4$.*

Les résultats suivants ont été donné par L.Hopkins dans [31].

Théorème 2.22. *[31] Si G contient un sommet triangulaire u, alors $sd_{\gamma_t}(G) \leq deg(u)$.*

Corollaire 2.10. *[31] Pour tout graphe complètement triangulaire on a $sd_{\gamma_t}(G) \leq \delta(u)$.*

Théorème 2.23. *[31] Soit u un sommet simplicial de degré au moins deux d'un graphe G et soit v un voisin de u, alors $sd_{\gamma_t}(G) \leq mindeg(u) + deg(v) - deg(u) + 3$.*

Proposition 2.6. *[31] Pour tout graphe G ayant des supports adjacents, on a $sd_{\gamma_t}(G) = 1$.*

Chapitre 3

Domination double et nombre de subdivision

Dans le présent chapitre nous ennonçons l'essentiel des résultats sur la domination double existant dans la littérature. Ensuite, nous prouvons quelques nouveaux resultats sur le nombre de subdivision de la domination double.

3.1 Bornes sur la domination double

Dans ce paragraphe, on cite quelques bornes inférieures et supérieures sur le nombre $\gamma_{\times 2}(G)$, établies par A.Akhodkar dans [3].

3.1.1 Bornes inférieures

$\gamma_{\times 2}(G)$ peut être borné par $\gamma(G)$, m, n et $\Delta(G)$.

Théorème 3.1. *[40] Soit G un graphe sans sommets isolés ayant n sommets et m arêtes alors :*

- $\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma(G) + 1$,
- *Si G admet deux $\gamma(G)-ensemble$ disjoint alors $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2\gamma(G)$,*
- $2 \leq \gamma_{\times 2}(G) \leq n$,
- $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{4n-m}{3}$,

- $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{2n}{\Delta+1}$.

3.1.2 Bornes supérieures

Concernant la borne supérieure, Harary et Hayne ont déterminés dans [17] les résultats suivants :

Théorème 3.2. *[17] Pour tout graphe G sans sommets isolés, on a $\gamma_{\times 2}(G) \leq n+1-\delta$.*

Corollaire 3.1. *[17] Si $G \neq C_5$ est un graphe d'ordre n avec $\delta \geq 2$ alors*
$\gamma_{\times 2}(G) \leq \lfloor \frac{11n}{14} \rfloor$.

Les résultats qui suivent mettent l'accent sur les relations entre certains paramètres de domination et la domination double pour la classe des arbres.

Théorème 3.3. *[6] Soit T un arbre alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2i(T)$ si seulement si T possède deux $i(T)$ - ensemble disjoints ($i(T)$ est un ensemble dominant stable (indépendant)).*

Théorème 3.4. *[6] Soit T un arbre, alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$ si seulement si T possède deux $\gamma(G)$-ensemble disjoints.*

Théorème 3.5. *[6] Soit T une chenille alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$ si seulement si T est la chaîne P_2 ou bien T est tel que chaque sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendant et la distance entre deux sommets supports consécutifs est congru à 1 ou à* 2 *modulo* 3.

D'autres bornes et des valeurs exactes ont été introduites par A. Khodkar[47] qui sont fonction du diamètre ou de la maille d'un graphe.

Théorème 3.6. *[47] Si G est un graphe tel que diam$(G) = 1$, alors on a $\gamma_{\times 2}(G) = 2$.*

Théorème 3.7. *[47] Soit G un graphe. Si diam$(G) = 2$, alors on a $\gamma_{\times 2}(G) \leq \Delta + \delta$.*

On appelle maille d'un graphe G, la longueur du plus petit cycle dans G. La maille d'un graphe G est noté par $g(G)$.

Théorème 3.8. *[47] Pour tout graphe connexe G d'ordre n tel que $\delta \geq 2$, on a $\gamma_{\times 2}(G) \leq n + \frac{1-diam(G)}{3}$.*

Théorème 3.9. *Pour tout graphe G d'ordre n tel que $\delta \geq 5$ on a,*

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n - \frac{g(G)}{3}}{2} \rceil & si\, n = 5 \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n - \frac{g(G)}{3}}{2} \rceil - 1 & si\, n \geq 6 \end{cases}$$

Théorème 3.10. *Pour tout graphe G d'ordre n, si $g(G) \geq 5$ alors $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2$.*

Dans le cas particulier où g(G) =7, on a une valeur exacte de $\gamma_{\times 2}(G)$.

Théorème 3.11. *Soit G un graphe connexe tel que $\delta \geq 2$, alors $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2\Delta + 1$. cette borne est atteinte si $g(G) = 7$.*

Théorème 3.12. *Pour tout graphe G, si $g(G) \geq 5$ alors, $\gamma_{\times 2}(G) \geq \Delta + \lceil \frac{2(g)-7}{3} \rceil$.*

3.2 Domination double exacte

On rappelle qu'un dominant double exact d'un graphe G, noté brievement EDDE, est un sous ensemble S de sommet de G tel que tout sommet de G est dominé exactement deux fois par S.
Si T est un arbre d'ordre au moins deux admettant un EDDE, alors tout sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendant. De plus, deux sommets supports quelconques ne sont pas adjacents.

Proposition 3.1. *[18] Si un graphe G possède des ensembles dominants doubles exacts, alors ils sont tous de même cardinalité.*

3.2.1 Caractérisation des graphes admettant un EDDE

Les résultats suivants mettent en évidence les graphes admettant un EDDE. Il s'agira principalement des chaines, des cycles, autres caractérisés par A.Khodkar dans [50], ainsi que des grilles, des cylindres et des tores,...

Proposition 3.2. *[16] Un cycle C_n admet un dominant double exact, si et seulement si $n \equiv 0[3]$ et la taille de cette ensemble est égale à $\frac{2n}{3}$.*

Proposition 3.3. *[16] Une chaîne P_n admet un dominant double exact, si seulement si $n \equiv 2[3]$ et la taille de cet ensemble est égale à $\frac{2(n+1)}{3}$.*

Théorème 3.13. *[19] Soit G un graphe 3-régulier connexe, alors G possède un dominant double exact si seulement si G admet un couplage parfait M tel que le graphe partiel G_M est un graphe biparti équilibré.*

Théorème 3.14. *[50] $P_n \times P_m$ admet un dominant double exact si seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *si $n = 1$ et $m \equiv 2[3]$ ou $n = 2$ et $m \equiv 1[3]$*
- *si $n = 3$ et $m = 5$ ou $n = m = 5$*

Théorème 3.15. *[50] $C_n \times P_m$ admet un EDDE si seulement si :*

- *si $m = 1$ et $n \equiv 0[3]$*
- *si $m = 2$ et $n \equiv 0[2]$*

Théorème 3.16. *[50] $C_n \times C_m$ tel que $m, n \geq 3$ admet un EDDE si seulement si : 5 divise n et m. Dans ce cas, on a la taille de tout ensemble dominant est égale à $\frac{2mn}{5}$.*

3.3 Bornes supérieures sur le nombre de subdivision de la domination double

Dans ce paragraphe on exposera les résultats connus sur le nombre de subdivision présentés par A.Khodkar[3] suivi de tous les résultats que l'on a obtenu concernant ce nombre .

on donne une caractérisation établie par A.Khodkar dans [3] concernant les graphes ayant un $\gamma_{\times 2}(G) = 2$.

Théorème 3.17. *[5] Soit G un graphe d'ordre n ,alors* $\gamma_{\times 2}(G) = 2$ *si et seulement s'il existe u et* $v \in V(G)$ *tel que* $deg(u) = deg(v) = n - 1$.

On va à présent donner deux bornes supérieures du nombre de subdivision pour une grande classes de graphes, les graphes simples connexes . Notons que cette borne est similaire a celle sur le nombre de subdivision de la domination totale.

Théorème 3.18. *[3] Pour tout graphe simple connexe G, ayant deux sommets u et v adjacents de degré au moins deux, on a* $sd_{\gamma_{\times 2}} \leq deg(u) + deg(v) - |N(u) \cap N(v)| - 2$.

Théorème 3.19. *[3] Pour tout graphe simple connexe G d'ordre* $n \geq 2$ *on a*
$\gamma_{\times 2}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dans ce qui suit on rappelle les conditions de minimalité d'un ensemble dominant double établies par M. Chellali dans [17].

Théorème 3.20. *[17] Soient G un graphe sans sommets isolés et S un ensemble dominant double de G, alors S est minimal si seulement si chaque sommet* $v \in S$ *satisfait à l'une des conditions suivantes :*

1- v est un sommet pendant dans le sous graphe induit par les sommets deS,

2- v est adjacent à un sommet pendant dans S,

3- il existe un sommet u dans $V - S$ *tel que* $N(u) \cap S = \{v, w\}$.

3.4 Résultats nouveaux sur le nombre de subdivision de la domination double

Dans ce paragraphe, nous prouvons de nouveaux résultats qui concernent des bornes sur le nombre de subdivision de la domination double pour des classes d'arbres, pour les graphes bipartis et bipartis complets, pour des particuliers de graphes triangulés et pour les graphes ayant au moins un sommet pendant. Nous établissons des valeurs exactes pour certaines classes de graphe.

Notation : Dans tout ce qui suit notons par S un dominant double de cardinalité minimum de G et par S^* un dominant double du graphe subdivisé G^*.
Posons $N_S(u) = \{x \in G/x \in N(u)$ et $x \in S\}$ et
$N_{V-S}(u) = \{x \in G/x \in N(u)$ et $x \in V - S\}$.

Remarque 3.1. *: Tout ensemble dominant double S contient les sommets pendants et leurs supports. En effet, $\forall x \in (V - S)$, x doit avoir au moins deux voisins dans S par conséquent $d_G(x) \geq 2$ donc (V- S) ne contient pas de sommets de degré un.*
$\forall x \in S$, x doit avoir au moins un voisin dans S, et les seuls voisins des sommets pendants sont leurs supports.

On donne dans le théorème suivant, la valeur de $\gamma_{\times 2}(G)$ vérifiée par les chaînes et les cycles.

Théorème 3.21. *[46]*
- *Pour toute chaîne P_n, $n \geq 2$, on a $\gamma_{\times 2}(P_n) = \lceil \frac{2n+2}{3} \rceil$.*
- *pour tout cycle C_n, $n \geq 3$, on a, $\gamma_{\times 2}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.*

Observation 3.1. *Nous avons exprimé le résultat du Thèoréme3.21 sous la forme suivante : Pour toute chaîne P_n, on a :*

$$\gamma_{\times 2}(P_n) = \begin{cases} 2[\frac{n}{3}] + 1 & si\, n \equiv 0[3] \\ 2([\frac{n}{3}] + 1) & sinon \end{cases}$$

et pour tout cycle C_n, $n \geq 3$, on a,

$$\gamma_{\times 2}(C_n) = \begin{cases} 2[\frac{n}{3}] & si\, n \equiv 0[3] \\ 2[\frac{n}{3}] + 1 & si\, n \equiv 1[3] \\ 2([\frac{n}{3}] + 1) & si\, n \equiv 2[3] \end{cases}$$

Nous avons obtenu les propositions suivantes concernants les valeurs exactes de $sd_{\gamma_{\times 2}}$ pour les chaînes et les cycles en ce basant sur l'observation précédente.

Proposition 3.4. *Pour toute chaîne P_n on a :*

$$sd_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = \begin{cases} 2 & si\, n \equiv 1[3] \\ 1 & sinon \end{cases}$$

Preuve. Soit P_n une chaîne. En subdivisant une arête quelconque de P_n on obtient une chaîne P_{n+1}, alors si :

- $n \equiv 0[3]$ donc $n+1 \equiv 1[3]$ et $[\frac{n+1}{3}] = [\frac{n}{3}]$, comme $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2[\frac{n}{3}]+1$ et $\gamma_{\times 2}(P_{n+1}) = 2[\frac{n+1}{3}] + 2 = \gamma_{\times 2}(P_n) + 1$, donc $sd_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 1$.
- $n \equiv 1[3]$ donc $n + 1 \equiv 2[3]$ et $[\frac{n+1}{3}] = [\frac{n}{3}]$, comme $\gamma_{\times 2}(P_{n+1}) = \gamma_{\times 2}(P_n)$ d'où $sd_{\gamma_{\times 2}}(P_n) > 1$.

  On subdivise une autre arête on obtient une chaîne P_{n+2} et $n + 2 \equiv 0[3]$ alors $[\frac{n+2}{3}] = [\frac{n}{3}]$ d'où $\gamma_{\times 2}(P_{n+2}) = 2([\frac{n}{3}] + 1) + 1 = 2[\frac{n}{3}] + 3 = \gamma_{\times 2}(P_n) + 1$. Par conséquent $sd_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 2$.
- $n \equiv 2[3]$ donc $n + 1 \equiv 0[3]$ et comme $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2([\frac{n}{3}] + 1)$ alors $\gamma_{\times 2}(P_{n+1}) = \gamma_{\times 2}(P_n) + 1$. Par conséquent $sd_{\gamma_{\times 2}(P_n)} = 1$.

Proposition 3.5. *Pour tout cycle C_n, on a*

$$sd_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = \begin{cases} 2 & si\, n \equiv 2[3] \\ 1 & sinon \end{cases}$$

Preuve. Soit C_n un cycle. En subdivisant une arête quelconque d'un cycle C_n on obtient un cycle C_{n+1}. Alors :

- Si $n \equiv 0[3]$ alors $[\frac{n+1}{3}] = [\frac{n}{3}]$, et comme $\gamma_{\times 2}(C_n) = 2[\frac{n}{3}]$ et $\gamma_{\times 2}(C_{n+1}) = 2[\frac{n+1}{3}]+1 = \gamma_{\times 2}(C_n) + 1$. Donc $sd_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = 1$.
- Si $n \equiv 1[3]$ on a $\gamma_{\times 2}(C_n) = 2[\frac{n}{3}] + 1$ et $\gamma_{\times 2}(C_{n+1}) = 2[\frac{n+1}{3}] + 2 = 2[\frac{n}{3}] + 2 = \gamma_{\times 2}(C_n) + 1$. Donc $sd_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = 1$.
- Si $n \equiv 2[3]$ alors $[\frac{n+1}{3}] = [\frac{n}{3}] + 1$ donc $\gamma_{\times 2}(C_{n+1}) = 2[\frac{n+1}{3}] = 2([\frac{n}{3}] + 1) = \gamma_{\times 2}(C_n)$. D'où $sd_{\gamma_{\times 2}}(C_n) > 1$.

  On subdivise une autre arête on obtient un cycle C_{n+2} avec $n + 2 \equiv 1[3]$, on a $\gamma_{\times 2}(C_{n+2}) = 2[\frac{n+2}{3}] + 1 = 2([\frac{n}{3}] + 1) + 1 = \gamma_{\times 2}(C_n) + 1$. D'ou $sd_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = 2$.

3.4.1 Bornes sur le nombre de subdivision de la domination double pour les arbres

Proposition 3.6. *Pour tout arbre T d'ordre n, possédant au moins un support fort, on a $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.*

Preuve. Soit T un arbre ayant un support fort de degré au moins deux, montrons que $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$. Soit S un $\gamma_{\times 2}(T)$ - ensemble et soit u un support fort tel que uv et uw deux arêtes pendantes incidentes à u. Subdivisons l'arête uv et soit x le sommet subdivision. Notons par T^* l'arbre subdivisé et S^* un ensemble dominant double du graphe subdivisé. Montrons que $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$.
D'après la Remarque 3.1 (page24), on a $\{u, v, w, x\} \in S^*$ et tous les autres sommets restent inchangés. Donc $S^* = S \cup x$ est un dominant double de T^* de cardinalité minimal par conséquent , $\gamma_{\times 2}(T^*) = \gamma_{\times 2}(T) + 1$.

On va maintenant énnoncer un résultat général sur les arbres avec une borne inférieure et supérieur qui sont atteintes, pour les les chaînes.

Théorème 3.22. *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$ sans support fort, on a*
$1 \leq sd_{\gamma_{\times 2}}(T) \leq 2$.

Preuve. Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$, sans support fort, T n'étant pas une chaîne, montrons que : $1 \leq sd_{\gamma_{\times 2}}(T) \leq 2$, On a deux cas :

1) T possède au moins deux supports simples adjacents u et w. Soient v et k leurs sommets pendants respectifs, on a $\{u, v, w, k\} \in S$.

   Subdivisons les arêtes uv et uw, soient x et y leurs sommets subdivisions respectifs, on a donc $\{v, x, w, k\} \in S^*$(d'aprés la Remarque 3.1).

i) si $y \notin S^*$ alors u est nécessairement dans S^* car $N(y) = \{u, w\}$ et les autres sommets de T^* restnt inchangés. D'où $S^* = S \cup \{x\}$ est dominant double de T^* de cardinalité minimum. Dans ce cas $\mathrm{sd}_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

   *si*y$\in S^*$ donc u sera dominé par x et y. Alors on a :

iiα) Soit tout sommet $t \in N(u)$, $t \neq w$, $t \in V - S$ et t est dominé par au moins deux sommets différent de u.

   Alors si $u \notin S^*$, t reste dominé dans S^* d'où $S^* = S \cup \{x, y\}\{u\}$ est un dominant double de cardinalité minimum par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$.

β) Soit il existe au moins un sommet $t \in N_{V-S}(u)$ tel que t est dominé par exactement u et un autre sommet de T alors nécessairement l'un des deux sommets u ou t est dans S^*. D'où $S^* = S \cup \{x, y, t\}/\{u\}$ ou $S^* = S \cup \{x, y\}$ est un dominant double pour T^* non minimum d'après (i) . Notons dans ce cas qu'une seul subdivision de l'arête uv suffit pour augmenter le nombre de domination double car $S* = S \cup \{x\}$ est un dominant double de cardinalité minimum pour T^*. Par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$.

λ) Soit $\forall t \in N(u)$, $t \in S$ dont tous ces voisin dans S. Donc $u \notin S^*$ et u sera dominé par x et y et tous les autres sommets restent inchangés. D'où $S^* = S \cup \{x, y\}\backslash\{u\}$ est un dominant double de cardinalité minimum par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$.

μ) Soit il existe au moins un sommet $t \in N(u)\backslash\{v, w\}$, $t \in S$ ayant tous ces voisins dans $V-S$ ou bien u est le seul voisin de t dans S (c'est-à-dire $N_S(t) = \{u\}$). Donc u doit nécessairement être dans S^* d'où $S^* = S \cup \{x, y\}$ est un dominant double pour T^* non minimum d'après (i). Notons dans ce cas qu'une seule subdivision suffit pour augmenter le nombre de domination double car $S* = S \cup \{x\}$ est un dominant double de cardinalité minimum pour T^*. Par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$.

2) T ne possède pas de supports simples adjacents. Tout élement $w \in N(u)$ n'est ni un sommet pendant (car T sans support fort) ni un support simple (car T sans support adjacent). Soit uv une arête pendante de T et $w \in N(u)$.

Subdivisons l'arête uv. Soit x son sommet subdivision. On a deux cas :

Si $\forall w \in N(u)\backslash\{v\}$, $w \in S$ alors u doit nécessairement être dans S^* (car sinon u n'aura qu'un seul voisin x dans S^*) et tous les autres sommets restent inchangés. Par conséquent $S^* = S \cup \{x\}$ est un dominant double de cardinalité minimum pour T^*. D'où $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$ et donc $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

Si ce n'est pas le cas, c'ést à dire il existe au moins un sommet $w \in N(u)\backslash\{v\}$tel que $w \in S$. Subdivisons l'arêtes uw, soit y son sommets subdivision. On a $\{v, x, w\} \in S^*$ (d'après la Remarque 3.1).

- Si $y \notin S^*$ alors $\{u, w\} \in S^*$ (sinon y ne sera pas dominé dans T^* car $N(y) = \{u, w\}$) et les autres sommets restent inchangés. D'où $S^* = S \cup \{x\}$ est dominant double de cardinalité minimum pour T^* par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$.
- Si $y \in S^*$ alors :

α) Soit $\forall a \in N(u)\backslash\{v, w\}$, $a \in V - S$, a est dominé par au moins deux sommets de T différent de u alors $u \in S^*$ (u sera dominé par x et y) et tous les autres sommets restent inchangés. D'où $S^* = S \cup \{x, y\}/\{u\}$ est un dominant double pour T^* de cardinalité minimum pour T^*. Par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$.

β) Soit il existe au moins un sommet $a \in N_{V-S}(u)$ tel que a est dominé exactement par u et un autre sommet t de T alors l'un des deux sommets a ou u doit être dans S^* et on aurait donc $S^* = S \cup \{x, y, a\}\backslash\{u\}$ ou $S^* = S \cup \{x, y\}$ n'est pas minimal (d'après le cas précédant). On constate dans ce cas qu'une seule subdivision suffit car $S^* = S \cup \{x\}$ est un dominant double de cardinalité minimum pour T^*. Par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$.

λ) Soit il existe au moins un sommet $k \in N_S(u)\backslash\{v\}$, tel que $N_S(k) = \{u\}$ donc soit u, soit un voisin de k doit être dans S^* (car sinon k n'aura pas son voisin dans S^*) et les autres sommets restent inchangés. D'où $S^* = S \cup \{x, y\}$ un dominat double pour T^* qui n'est pas minimal d'après ce qui précède (dans ce cas une seule subdivision suffit pour augmenter le nombre de domination double). Alors $S^* = S \cup \{x\}$ est un dominant double de cardinalité minimal pour T^* et par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$. D'où $sd_{\gamma_{\times 2}} = 1$.

μ) Soit $k \in N_S(u) \backslash \{v\}$ et possède au moins un autre voisin dans S différent de u alors $u \notin S^*$. D'où $S^* = S \cup \{x, y\} \backslash \{u\}$ est un dominant double de cardinalité minimum. Par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$.

Remarque 3.2. *Le Théorème 3.22 montre que tout arbre T peut être classer par la domination double, soit dans la classe*1*, soit dans la classe*2 *suivant la valeur de* $sd_{\gamma_{\times 2}}(G)$*. Cependant, la caractérisation de ces classes n'est pas facile, alors on va proposer une construction de ces arbres qui utilise les étapes suivantes : On ne considérera que les arbres sans sommets supports forts, puisque les autres sont dans la classe1, d'après la Proposition* 3.1 .

T peut être obtenu à partir d'une arête et une succession d'opérations qui consistenT à rattacher K_1, P_2 ou P_3 aux sommets de T. Notons par $A(T)$ l'ensemble des sommets pendants ,$B(T)$ l'ensemble des supports de T. Posons $C(T) = A(T) \cup B(T)$ et $D(T)$ un $\gamma_{\times 2}(T)$- ensemble.

Soit une arête (ab), on rattache au moins un sommet au sommet a, on obtient l'étoile $K_{1,m}$; $m \geq 2$, de centre a.
Pour $i \geq 1$, soit T^i l'arbre obtenu à partir de l'étoile $K_{1,m}$ en rattachant K_1, P_2 ou P_3 de sorte que l'arbre obtenu soit sans support fort (on ne peut pas rattacher K_1 plus d'une fois à un sommet d'un arbre T sinon on obtient un support fort).

Observation 3.2. *rattacher $P_2 = xy$ au sommet $z \in (V - D(T^i))$ où $z \in C(T^i)$ ou bien $z \in N(a)$ par l'arête zx, conduit à :*

$$D(T^{i+1}) = \begin{cases} D(T^i) \cup \{x, y\}, & si\ z \in (V - D(T^i))\ ou\ z \in C(T^i)\ et\ N[a] \subset D(T^i) \\ D(T^i) \cup \{x, y\}, & si\ z \in N[a] \subset D(T^i) \end{cases}$$

Observation 3.3. *rattacher $P_2 = xy$ et $P_2 = zt$ à deux sommets successifs k et l de $D(T^i)$ par les arêtes kx et lz, conduit à :*

$$D(T^{i+1}) = \begin{cases} D(T^i) \cup \{x, y, z, t\} \backslash \{k\} \\ D(T^i) \cup \{x, y, z, t\} \backslash \{l\} \end{cases}$$

Observation 3.4. *rattacher $P_3 = xyz$ à un sommet $t \in A(T^i)$ par l'arête tz, conduit à :*

$$D(T^{i+1}) = D(T^i) \cup \{x, y\}.$$

Observation 3.5. *rattacher un sommet x au sommet a d'un arbre T^i par l'arête ax, conduit à :*

$$D(T^{i+1}) = \begin{cases} D(T^i) \cup \{a, x\} & si\ \ a \in D(T^i) \\ D(T^i) \cup \{x\} \backslash \{k\}\ (\ k \in N(a)) & si\ \{a,k\} \subset D(T^i) \\ D(T^i)) \cup \{x\} & si\ N[a] \subset D(T^i) \end{cases}$$

Observation 3.6. *: rattacher un sommet x a un sommet $t \in (V - D)(T^i)$ par l'arête tx, conduit à :*

$$D(T^{i+1}) = \begin{cases} D(T^i)) \cup \{t, x\} & si\ \ a \in D(T^i) \\ D(T^i) \cup \{t, x\} \backslash \{k\} aveck \in N(a) & si\ \ \{a, k\} \subset D(T^i) \end{cases}$$

Observation 3.7. *: rattacher un sommet x au sommet $t \in A(T^i)$ par l'arête tx, conduit à :*

$$D(T^{i+1}) = \begin{cases} D(T^i) \cup \{x\} & s\text{'il n'existe pas de support adjacent à } z \\ D(T^i) \cup \{x\} \backslash \{z\} & sinon \end{cases}$$

où z le support de t

On a les classes suivantes :

C_1 : on rattache un sommet à tous les sommets de $A(T^1)$. Notons T^2 l'arbre obtenue et $D(T^2) = C(T^2)$. Donc $|D(T^2)| = |C(T^2)| = 2m$ et $a \in D(T^i)$.

Pour $i \geq 2$, (T^{i+1}) est obtenu à partir de (T^i) en rattachant une ou plusieurs chaînes P_2 à des sommets de $(V - (D)(T^i))$ ou a des sommets de $B(T^i)$ ou bien une ou plusieurs chaîne P_3 à un ou à plusieurs sommets de $A(T^i)$. On a $D(T^{i+1}) = D(T^i) \cup C(T^{i+1})$ ($|D(T^{i+1})|$ est pair car $D(T^2)$ est pair et en rattachons P_2 ou P_3 on rajoute deux sommets a chaque fois).

C_2 : on rattache une chaîne P_2 à tous les sommets de $A(T^1)$. Notons T^2 l'arbre obtenue. Supposons sans perte de généralité que le voisin de a dans $D(T^2)$ est le sommet b. On a $D(T^2) = C(T^2) \cup \{a, b\}$. Donc $|D(T^2)| = 2m + 2$.

Si on considère toute les chaîne passant par a et contenant le sommet b on obtient une chaîne $P_4 = (a, b, k, l)$ où $\{k, l\} \subset C(T^2)$.

Pour $i \geq 2$, (T^{i+1}) est obtenue à partir de (T^i) en rattachant P_2 à des sommets de $(V - (D)(T^i))$ ou bien une ou plusieurs chaîne P_3 à un ou à plusieurs sommets de $A(T^i)$. On a d'après les Observation (3.1) et (3.3), $D(T^{i+1}) = D(T^i) \cup C(T^{i+1})$ ($|D(T^{i+1})|$ est pair car $|D(T^2)|$ est pair et en rattachons P_2 ou P_3 on rajoute deux sommets à chaque fois).

Donc pour tout $i \geq 2$, toute chaîne passant par a et contenant le sommet b contient une chaîne $P_4 = (a, b, k, l)$ ou $k \in N(a)$ et $l \in N(k)$.

C_3 : on rattache une chaîne P_3 à tous les sommets de $A(T^1)$. Notons T^2 l'arbre obtenu. $D(T^2) = D(T^1) \cup C(T^2)$ et $|D(T^1)| = |C(T^1)| = m+1$ (d'après l'observation 3.3). Donc $N[a] \subset D(T^2)$ et si on considère toute chaîne passant par a et d'extrémité deux sommets pendants on constate l'existence d'une $P_3 = (a, k, l)$ ou $\{k, l\} \subset N(a)$.

Pour $i \geq 2$, T^{i+1} est obtenu à partir de T^i en rattachant une chaîne P_2 à des sommets de $(V - (D)(T^i))$ ou bien une ou plusieurs chaîne P_3 à un ou à plusieurs sommets de $A(T^i)$. On a $D(T^{i+1}) = D(T^i) \cup C(T^{i+1})$ (d'après les observations 3.1 et 3.3). Donc pour tout $i \geq 2$ toute chaîne passant par a et d'extrémité deux sommets pendants possède une chaîne $P_3 = (a, k, l)$ ou $\{k, l\} \subset N(a)$ (voir Fig 3.13).

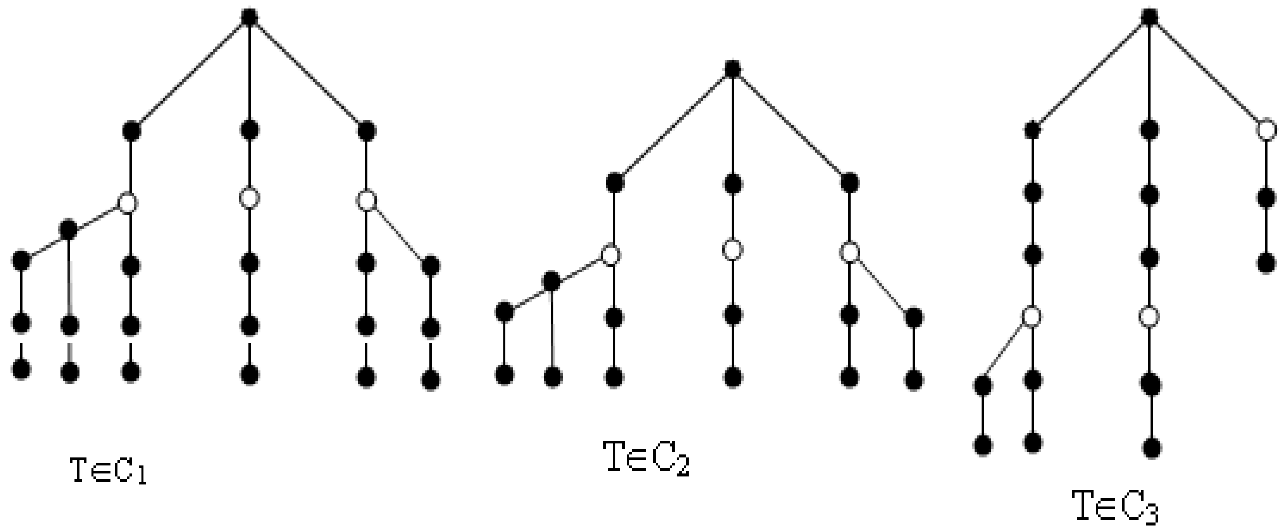

FIG. 3.1 – les classes des arbres

Remarque 3.3. *D'après ce qui précède compte tenu des observations*$(3.j)$, $j = 1, 6$ *; on obtient trois types d'arbres sans support fort :*

Type(1) : T est un arbre qui possède au moins une chaîne P_k, $k \geq 2$ passant par a et d'extrémités deux sommets pendants de T et qui ne possède ni une chaîne P_3 ni une chaîne P_4 dans $D(T)$ (exemple l C_1).

Type(2) : T est un arbre qui possède au moins une chaîne P_4 dans $D(T)$ appartenant à toute les chaînes P_k de l'arbre T qui passent par le sommet a et contenant le sommet b (b est soit un sommet pendant ou non) et d'extrémités deux sommets pendants (exemple C_2).

Type(3) : T est un arbre qui possède au moins une chaîne P_3 dans $D(T)$ passant par le sommet a ou non (exemple C_3).

Proposition 3.7. *Pour tout arbre T de type* (1) *ou type* (3) *on a* $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$ *et pour tout arbre de type*(2) *on a* $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 2$.

Preuve. Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$, sans support fort et T^* son arbre subdiviser.

1) montrons que pour tout arbre T de type (1) on a $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

Soit P_k une chaîne passant par a et d'extrémités deux sommets pendants de T et qui ne possède ni une chaîne P_3 ni une chaîne P_4 dans $D(T)$, (d'après la classe C_1, $\gamma_{\times 2}(G)$ est pair et $D(T)$ ne contient que des chaînes P_2 ou bien des chaînes P_4 qui sont formés que par deux supports simples adjacents et leurs sommets pendants (d'après l'observation (1)), (exemple C_1) Soit xy une arête appartenant à P_k tel que $x \in D(T)$ et $y \in (V - D)(T)$, subdivisons l'arête xy, soit z son sommet subdivision.

i) si $z \notin D(T^*)$ alors y doit nécessairement être dans $D(T^*)$ car sinon z ne sera pas dominé dans T^*, d'autre part tout voisin t de y dans $D(T)$ appartient soit a P_2 soit a une chaîne P_4 qui est formée que par deux supports simples adjacents et leurs sommets pendants (car toute chaîne P_k de T ne contient dans $D(T)$ que des chaînes P_2 ou bien des chaînes P_4 qui sont formé que par deux supports simples adjacents avec leurs sommets qui doivent être dans $D(T^*)$ d'où y ne peut pas être échangé par l'un de ces sommets et tous les autres sommets restent inchangé et on aurait

$D(T^*) = D(T) \cup \{y\}$ (exemple C_1) (d'après l'observation (1)).

ii) De même si $z \in D(T^*)$ alors y sera dominé par x et z et tous les autres sommets reste inchangés d'où $D(T^*) = D(T) \cup \{z\}$.

2) montrons que pour tout arbre T de type (2) on a $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 2$.

Comme toute chaîne P_k passant par a et contenant le sommet b et d'extrémités deux sommets pendants (ou bien qui ont l'une de leurs extrémité le sommet b) possède au moins une chaîne P_4 dans $D(Ti)$(qui n'est pas formé par des support adjacent avec leurs sommets pendants) alors si on subdivise n'importe qu'elle arête de P_k par un sommet x alors x entre dans $D(T^*)$ et peut être échangé par l'un des sommets k appartenant à P_4 par conséquent $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T^*)$ et $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) > 1$

. Or T^* est un arbre de type(1), donc d'après (i) une seule subdivision suffit pour augmenter le nombre de domination double c'est-à-dire $sd_{\gamma_{\times 2}}(T^*) = 1$ donc $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 2$.

3) montrons que pour tout arbre T de type(3) on a $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

Tout arbre de type (3) possède au moins une $P_3 = (x, y, z)$ dans $D(T)$. Subdivisons l'arête xy, soit k son sommet subdivision.

Si $k \notin D(T^*)$ alors k sera dominé par y et z , d'autre part comme $z \in P_3$ donc tout ces voisins sont dans $(V - D)(T)$ alors z n'aurait pas son voisin dans $D(T^*)$ donc soit $k \in D(T^*)$ ou bien l'un des voisins l de z doit être dans $D(T^*)$ et tous les autres sommets restent inchangés (car on ne peut pas avoir un arbre T qui de type(2) et (3) on même temps) et on aurait donc $D(T^*) = D(T) \cup \{k\}$ ou $D(T^*) = D(T) \cup \{l\}$ par conséquent $\gamma_{\times 2}(T^*) > \gamma_{\times 2}(T)$ et $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

Le corollaire 3.2 et le corollaire 3.4 découlent immédiatement de la Proposition 3.4.

Corollaire 3.2. *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$ et qui admet un ensemble dominant double exact, On a $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.*

Preuve. Soit T est un arbre admettant un EDDE noté S, alors
pas définition, $G(S)$ est constituer que par des chaînes P_2. par conséquent T appartient au type(1) .
D'où d'après la proposition(3.4) on a $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

Corollaire 3.3. *Pour toute chenille T sans support fort, telle que le nombre de sommets entre deux sommets supports consécutifs x_i et x_{i+1} est égala à k_i on a :*

$$sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = \begin{cases} 2, & si\ k_i \equiv 1[3] \\ 1, & sinon \end{cases}$$

Preuve. Il est facile de voir que l'on à toute chaîne P_k passant par les supports x_i et x_{i+1} et d'extrémités deux sommets pendants, vérifier $k = k_i + 4$, on retrouve les mêmes résultats que pour les chaînes on a donc :

- Si $\forall i,\ k_i \equiv 1[3]$ alors $k \equiv 2[3]$ donc S est former que par des chaînes P_2 d'où T appartient au type(1) par conséquent $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.
- Si $\forall i,\ k_i \equiv 2[3]$ alors $k \equiv 0[3]$ donc Sest former que par des chaînes P_2 ou P_3 d'où T appartient au type (3) par conséquent $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.
- Si $\forall i,\ k_i \equiv 0[3]$ alors $k \equiv 1[3]$ donc S est former que par des chaînes P_2 et P_4 d'où T appartient au type(2) par conséquent $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 2$.
- si $\exists i$ tel que $k_i \equiv 1[3]$ (ou \ et) $k_i \equiv 2[3]$ alors S est former que par des chaînes P_2 et P_3 donc T appartient au type(1) et type (3) en même temps, par conséquent $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

3.4.2 Bornes sur le nombre de subdivision de la domination double pour des graphes particuliers

Graphes ayant au moins un support fort

Le résultat suivant est une généralisation de la proposition 3.3.

Théorème 3.23. *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$ ayant au moins un support fort, on a $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.*

Preuve. Le même principe que dans les arbres si on subdivise une arête pendante issue d'un support fort alors le sommet subdivision x est nécessairement dans l'ensemble dominant double du graphe subdivisé car et les autres sommets du graphe reste inchangés donc $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$ et par conséquent , $sd_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

3.4.3 Graphes ayant des supports simples

Dans les résultats suivants nous établissons une borne supérieure et inférieure pour les graphes ayant $\delta(G) = 1$.

Proposition 3.8. *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$ ayant au moins un support simple, on a $1 \leq sd_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq 2$.*

Preuve. Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$,sans support fort et ayant au moins un support simple, on a deux cas :

1) G possède au moins deux supports simples adjacents.

Soient u, w deux supports simples adjacents et v, k leurs sommets pendants respectifs. Subdivisons les arêtes uv et uw, soient x, $x^{'}$ leurs sommets subdivisions respectifs. On a d'après la Remarque 3.1, $\{u, x, w, k\} \subset S^*$.

i) si $x^{'} \notin S^*$ alors $u \in S^*$ (car $N(x^{'}) = \{u, w\}$) et les autres sommets du graphes restent inchangés et on aurait donc $S^* = S \cup \{x\}$. Par conséquent $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$.

ii) si $x^* \in S^*$, alors :

- Soit $\forall k \in N(u)$, $k \in (V - S)$ et k est dominé par au moins deux sommets de G différent de u. Donc si $u \notin S^*$ alors k reste dominé dans G^* et tous les autres sommets restent inchangés. D'où $S^* = S \cup \{x, x'\}/\{u\}$ est un dominant double de cardinalité minimal pour G^* et par conséquent $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$.

- Soit il existe au moins un sommet $k \in N(u)$, $k \in (V - S)$ tel k est dominé par exactement u et un autre sommet l dans G. Donc u doit être dans G^* et on aurait donc $S^* = S \cup \{x, x'\}$ non minimal d'après ce qui précède (dans ce cas on peut montrer qu'une seule subdivision suffit pour augmenté le nombre de domination double).

2) G possède des supports simples non adjacents :

Soit G un graphe possédant au moins un sommet pendant u et soit v son support simple et w un voisin de u. Subdivisons l'arête pendante uv et une arête adjacente vw. Soient x et y leurs sommets subdivisions respectifs. Donc $\{x, v\} \subset S^*$ (d'après la remarque 3.1).

1^{er} **cas** : si $w \in S$

- si $y \notin S^*$ alors u doit être dans S^* car $N(y) = \{u, w\}$. Donc $\{u, x, v\} \subset S^*$ et les autres sommets du graphe restent inchangés. D'où $S^* = S \cup \{x\}$ est un dominant double de cardinalité minimum. Par conséquent $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$.
- si $y \in S^*$ alors u sera dominé dans G^*. De la même façon que $(1 - ii)$ on montre que $S^* = S \cup \{x, y\}/\{u\}$ est un dominant double de cardinalité minimal pour G^* et par conséquent $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$.

2^{eme} **cas** si $w \notin S$ alors soit $\{u, y\} \subset S^*$ ou bien $\{y, w\} \subset S^*$ donc $S^* = S \cup \{x, y\}$ ou bien $S^* = S - \{u\} \cup \{x, w, y\}$ est un dominant double non minimal (d'après 1^{er} cas). On montre dans ce cas qu'une seule subdivision suffit pour faire augmenter le nombre de domination double.

Dans les paragraphes 3.4.4 et 3.4.5 nous déterminons le nombre $sd_{\gamma_{\times 2}}(G)$ en fonction de $\gamma_{\times 2}(G)$ pour des classes de graphes qui sont inclus dans les graphes triangulés .

3.4.4 Graphes avec un $\gamma_{\times 2}(G) = 2$

Nous définissons dans la Proposition 3.10 une classe de graphe qui à un nombre de subdivision de la domination double $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$. Cette classe contient les graphes complets K_n.

Proposition 3.9. *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$ tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 2$, on a $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.*

Preuve. Soit G un graphe tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 2$. Posons $S = \{u, v\}$, autrement dit, tout sommet de G est dominé par u et v donc

- Si $n = 2$, $G = P_2$, d'ou d'après la proposition 3.1 , $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$
- Si $n \geq 3$, soit $w \in (V - S)$, alors il suffit de subdiviser une seule arête, l'arête uw (ou vw) et soit x le sommet subdivision, on a alors :

- Soit $x \notin S^*$ et donc w est nécessairement dans S^* (car les seuls voisins de x sont w et u). D'ou $S^* = S \cup w$ est un dominant double de cardinalité minimum de G^*. Donc $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$.

  Soit $w \notin S^*$, donc x est nécessairement dans S^* (car les seules voisins de w sont x et u) et donc $S^* = S \cup \{x\}$ il en résulte que $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$.

3.4.5 Graphes avec un $\gamma_{\times 2}(G) = 3$

Nous définissons dans la Proposition 3.11 une classe de graphe qui à un nombre de subdivision de la domination double $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$ ou $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$.

Remarque 3.4. *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$ tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 3$ et S un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble, alors on a :*

1) *$G(S)$ est soit une chaîne P_3, soit un triangle C_3.*

2) *Si $G(S)$ est un cycle C_3 tel que $\forall x \in (V - S)$, $N(x) = S$ alors $G(V - S)$ est non stable car sinon $\gamma_{\times 2}(G) = 2$, d'aprés le Théorème* 3.18.

Proposition 3.10. *Pour tout graphe G tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 3$, on a $1 \leq sd_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq 2$.*

Preuve. Soit $S = \{u, v, w\}$ un dominant double de G.

***)** Si $n = 4$ il est clair que G est le cycle C_4 (sans corde) alors $sd_{\gamma_{\times 2}} = 1$.

***)** pour $n \geq 5$. Subdivisons les arêtes uv et vw, soient k et l leurs sommets subdivisions respectifs. On a les cas suivants :

1^{er} **cas)** Si $k \notin S^*$ et $l \notin S^*$ (car les seuls deux voisins de k et l doivant être dans S^*). D'autre part, dans G^*, (u, v) et (v, w) ne sont plus adjacents, autrement dit, le sommet v est isolé dans $G(S^*)$. Donc il faut un autre voisin x dans $G(S^*)$. D'ou $\{u, v, w, x\} subset S^*$ et par conséquent $\gamma_{\times 2}(G^*) > 3$

2^{eme} **cas** Si $k \notin S^*$ et $l \in S^*$ (ou $k \in S^*$ et $l \notin S^*$).

Alors $\{u, v\} subset S^*$ car $k \notin S^*$ et donc $\{u, v, l\} subset S^*$. D'autre part, comme u et v ne sont plus adjacents (de même u et l), donc il faut nécessairement un voisin x de u dans S^*, on aurait donc $\{u, v, l, x\} subset S^*$. D'où $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$.

3^{eme} **cas** si $k \in S^*$ et $l \in S^*$. Comme k et l ne sont pas adjacents donc chacun doit avoir un voisin dans S^*. Ce voisin peut être commun (v par exemple), donc soit on a $\{k, l, u, w\} subset S^*$, ou $\{k, l, v, w\} subset S^*$, ou $\{k, l, u, v\} subset S^*$, ou $\{k, l, v\} subset S^*$.

Si $\{k, l, v\} subset S^*$, il existerait nécessairement au moins un sommet dans S^*, car sinon il existe un sommet $x \in (V - S)$ dominé par un unique sommet et donc $\{k, l, v, x\} \subset S^*$. Par conséquent $\gamma_{\times 2}(G^*) > 3$.

soit G un graphe d'ordree $n \geq 5$ obtenu à partir d'un stable D_k d'ordre k, $k \geq 2$ où l'on relie chacun de ses sommets à tous les sommets d'une chaîne P_3. Notons $G = P_3 * D_k$ .Il est facile de voir que $\gamma_{\times 2}(G) = 3$ .Cette classe de graphes atteint la borne supérieur de la Proposition 3.10, comme nous le montrons dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.4. *Si $G = (P_3 * D_k)$, $k \geq 2$, alors $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$.*

Preuve.

i) *En effet, soit $x \in (V - S)$, subdivisons l'arête ux, soit k son sommet subdivision.*

i-1) *Si $k \notin S^*$ alors $\{u, x, v\} \subset S^*$ (car u et x sont non adjacent dans G^* et v est le seul voisin commun de u et x).*

De plus $w \notin S^*$(car w sera dominé par v et x dans G^*) et tous les autres sommets $y \in (V - S)$, $y \neq x$ restent dominé par u et v dans G^*. Il en résulte que $S^* = (S\{x\}/\{w\}$ est un dominant double de même cardinalité que S par conséquent $\gamma_{\times 2}(G^*) = \gamma_{\times 2}(G)$.

De même si on subdivise une arête quelconque (uv ou vw par exemple) alors dans ce cas le sommet subdivision rentre dans S^* et sera échangé par l'un des sommets de S et $\forall y \in (V - S)$, y sera dominé par au moins deux sommets, par conséquent le nombre de domination double n'augmente pas d'où $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) > 1$.

D'autre part, si l'on subdivise une deuxième arête incidente à x, par exemple xw, soit l son sommet subdivision et S^{**} un dominant double pour le graphe G^{**} subdivisé deux fois.

i-1 *si k,$l \notin S^{**}$ alors $\{x, u, v, w\} \subset S^{**}$ (car $N(k) = \{u, x\}$) et les autres sommets* *du graphe restent inchangés d'où* $S^{**} = \{u, x, v, w\}$ *est un dominant double de cardinalité minimum, par conséquent* $\gamma_{\times 2}(G^{**}) = \gamma_{\times 2}(G) + 1$ *et donc* $sd_{\gamma_{\times}}(G) = 2$.

i-2) *si* $k \in S^{**}$ *alors l'un des deux sommets* u *ou* x *appartient nécessairement à* S^{**}. *Supposons que l'on a :* $u \in S^{**}$ *et* $x \notin S^{**}$ *(par exemple) alors soit* $\{v, w\} \subset S^{**}$, *soit* $\{v, z\} \subset S^{*}$, $\forall z \in (V - S)$, $z \neq x$ *(car sinon* w *ne sera dominé que par* v *) et tout les autres sommet* $y \in (V - S)$ *appartient à* $N(u) \cap N(v)$,*donc restent inchangés, d'où* $S^{**} = \{u, k, v, w\}$ *ou* $S^{**} = \{u, v, k, z\}$ *mais* S^{**}*n'est pas un dominant double de cardinalité minimum d'après (i-1), par conséquent* $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$.

Corollaire 3.5. i) *S'il existe au moins un sommet* $x \in (V - S)$ *qui est adjacent à éxactement deux sommets de* S , *alors* $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.

ii) *Pour* $n \geq 6$ *si* $G(V - S)$ *est non stable, alors* $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$

Preuve.

i) *Soit* x *un sommet dominé par exactement deux sommets de* S, *sans perte de généralité supposons que* $N(x) = \{u, v\}$ *montrons que* $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.
Subdivisons l'arête uv, *soit* k *son sommet subdivision donc :*

- *si* $k \notin S^{*}$ *donc* $\{u, x, v\} \subset S^{*}$, *de plus si* $w \notin S^{*}$ *alors* w *ne sera dominé que par* v *dans* G^{*}, *D'autre part s'il existe au moins un sommet* $z \in V - S$ *qui été dominé que par* w *et un autre sommet alors* z *ne sera pas dominé dans* G^{*}, *donc l'un des deux sommets* w *ou* z *doit être nécessairement dans* S^{*} *et les autres sommets restent inchangés d'où* $S^{*} = \{u, x, v, w\}$ *ou* $S^{*} = \{u, x, v, z\}$ *est un dominant double de cardinalité minimum,donc* $\gamma_{\times 2}(G^{*}) > \gamma_{\times 2}$ *(G).*

- *Si* $k \in S^{*}$, *alors l'un au moins des deux sommets* u *et* x *appartient a* S^{*}, *par exemple supposons* $u \in S^{*}$ *et* $x \notin S^{*}$ *et comme* $N(x) = \{u, v\}$, *alors* $v \in S^{*}$. *D'autre part comme* $w \notin N(u) \cup N(k)$ *alors soit* $w \in S^{*}$, *soit il existe* $y \in N(w) \cap N(v)$ *ou bien* $y \in N(w) \cap N(u)$ *tel que* $y \in S^{*}$ *d'où* $S^{*} = \{u, k, v, w\}$ *ou* $S^{*} = \{u, k, v, y\}$ *est un dominant double de cardinalité minimum, par conséquent* $\gamma_{\times 2}(G^{*}) > \gamma_{\times 2}(G)$.

ii) *Soient* x, y *deux sommets adjacents de* $(V - S)$, *subdivisons l'arête* xy, *soit* k *son sommet subdivision donc*

- *si* $k \notin S*$ *alors* $\{x, y\} \subset S^*$ *et comme* x *et* y *ne sont plus adjacent dans* G^* *alors leurs voisin commun doit être dans* S^**, sans perte de généralité supposons que* $u \in S^*$*. Donc si* $v \in S^*$ *alors* v *sera dominé par* u *et* x *dans* G^**, de plus, il existe au moins un sommet isolé* z *dans* $G(V - S)$ *car sinon* $\gamma_{\times 2}(G) = 3$ *, donc l'un des deux sommet* w *ou* z *doit être dans* S^* *est les autres sommets restent inchangés, d'où* $S^* = \{u, x, y, w\}$ *ou* $S* = \{u, x, y, z\}$ *est un dominant double de cardinalité minimum, par conséquent* $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$*.*

- *si* $k \in S^*$ *alors soit* $\{x, k\} \subset S^*$*, soit* $\{y, k\} \subset S^*$*. Sans perte de généralité supposons que* $\{x, k\} \subset S^*$ *et* $y \notin S^*$*, donc l'un des voisin de* y *qui été dans* S *doit être dans* S^**(car sinon* y *ne sera dominé que par* k*), supposons par exemple que* uS^**. si* $v \notin S^*$ *alors* v *sera dominé par* x *et* u *dans* G^**, de plus d'après ( ) il existe au moins un sommet isolé* z *dans* $G(V - S)$*, alors* z *ne sera dominé que par* u *donc l'un des deux sommet* w *ou* z *doit être dans* S^**, d'où* $S^* = \{u, x, k, w\}$ *ou* $S^* = \{u, x, k, z\}$ *est un dominant double de cardinalité minimum, par conséquent* $\gamma_{\times 2} > (G^*)\gamma_{\times 2}(G)$*.*

3.4.6 Graphes bipartis complets

Il est facile de vérifier que pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$ *, on a*

$$\gamma_{\times 2}(G) = \begin{cases} 3, & si\, r = 2 \text{ et } 2 \leq s \leq 3; \\ 4, & si\, r \geq 3 ets \geq 3. \end{cases}$$

. iI s'ensuit le résultat suivant :

Proposition 3.11. *Soit* G *un graphe biparti complet* $K_{r,s}$ *avec* $r \geq 2$ *et* $s \geq 2$*, alors on a* $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$*.*

Preuve. *Soit* (A, B) *une bipartition de* G *avec* $|A| = r$ *et* $|B| = s$*. Posons* $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ *et* $B = \{b_1, b_2, ..., b_s\}$ *et* $S = \{a_1, b_1, a_r, b_s\}$ *un* $\gamma_{\times 2}(G)$*-ensemble . Montrons que* $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$*.*

Subdivisons l'arête a_2b_1 *et soit* x *son sommet subdivision, alors* x *appartient nécessairement à* S^* *car sinon* a_2 *ne serait plus dominé que par* b_s *et tout les autres sommets restent inchangés. Par conséquent* $S^* = S \cup \{x\}$ *est un dominant double de cardinalité minimum pour* G^**. D'où* $\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$ *.*

3.4.7 Graphes avec un $\gamma_{\times 2}(G) = n$

Notons par $PD(G)$ *l'ensemble des sommets pendants de* G *et par* $SP(G)$ *l'ensemble de ses supports. Il est facile de voir que :*

- *Si* $\gamma_{\times 2}(G) = n$*, alors pour tout* $x \in G$*, on a* $x \in PD(G)$ *ou* $x \in SP(G)$ *(d'après la condition de minimalité d'un dominant double).*
- *Si de plus* G *est sans support fort et* $G \neq P_3$ *, alors* G *est la couronne d' un certain graphe* H*.*

Concernant les graphes G *où le nombre de domination double égal à l'ordre de* G*. Nous avons établi le résultat suivant :*

Proposition 3.12. *Pour tout graphe* G *d'ordre* $n \geq 4$ *sans support fort tel que* $\gamma_{\times 2}(G) = n$ *, on a* $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$.

Preuve.

i) *Si* $G = P_4$*, le résultat est vrai d'après la proposition 3.1.*

ii) *Montrons que la proposition est vraie pour* $n \geq 5$ *.*

Comme G *est une couronne alors tout* $\gamma_{\times 2}(G)$*- ensemble est égal à* $V(G)$*. Il est clair que les arêtes de* G *sont, soit des arêtes pendantes soit des arêtes dont les extrémités sont des supports simples.*

montrons que si on subdivise n'importe quelle arête de G *alors* $\gamma_{\times 2}(G^*) = \gamma_{\times 2}(G)$*.*

soit uv *une arête pendante avec* u *son support et* w *un autre support de* G *adjacent a* u*.*

Subdivisons l'arête uv*, soit* x *son sommet subdivision, alors* $x \in S^*$ *et* $u \notin S^*$ *car il* *sera dominé par au moins x et w et les autres sommets du graphes restent inchangés, de même si on subdivise une arête non pendante, uw, par exemple, par un sommet x,alors $x \notin S^*$ (si uv car $N(x) = \{u, w\} \subset S^*$ et les autressommrets restent inchangés, d'où et dans les deux cas on a $\gamma_{\times 2}(G^*) = \gamma_{\times 2}(G)$, d'où $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) > 1$.*

Montrons alors que $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$.

En effet, soient a et c deux sommets supports adjacents, et soient b et d leurs sommets pendants respectifs. Subdivisons ab et ac, soient x et y leurs sommets subdivisions respectifs, on a alors nécessairement $\{b, x, c, d\} \subset S^*$, de plus :

- *Si $a \notin S^*$, alors y doit nécessairement être dans S^* (car les seuls voisins de y sont a et c et tous les autres sommets restent inchangés). On a alors $S^* = S \cup \{x, y\} \backslash \{a\}$ est un dominant double de cardinalité minimum de G^*.*
- *Si $a \in S^*$, alors $y \notin S^*$ (y étant dominé par les deux sommets a et c) et on aura $S^* = S \cup \{x\}$. Il en résulte que dans les deux cas : $\gamma_{\times 2}G^* = \gamma_{\times 2}(G) + 1$.*

3.4.8 Graphes ayant un EDDE

Proposition 3.13. *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$, admettant un dominant double exact, on a $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.*

Preuve. *Soit S un dominant double exacte de G, alors chaque sommet de G est dominé par exactement deux sommets de S, de plus S est un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble.*
Soient a et b deux sommets adjacents de S , subdivisons l'arête ab , soit x son sommet subdivision. Il s'ensuit que x est nécessairement dans S^*(car sinon a et b n'auraient pas leurs voisins dans S)et les autres sommets du graphe restent inchangés, on a donc $S^* = S \cup \{x\}$ un dominant double de cardinalité minimum de G^* par conséquent ,$\gamma_{\times 2}(G^*) > \gamma_{\times 2}(G)$ et $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.

En conclusion, on résume les résultats obtenus dans ce chapitre, par le fait que pour tous les graphes G étudiés , on a établi que : $1 \leq sd_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq 2$. Ce pendant on a pas réussi à le vérifier pour des graphes quelconques, ni même donner des contre exemples. Par conséquent, il est évident dans ce cas de poser la conjecture suivante :

Conjecture 3.1. *Pour tous graphe G d'ordre $n \geq 2$, on a $1 \leq sd_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq 2$.*

Pour clore ce chapitre, on attire l'attention sur le fait qu'après avoir achevé cette partie de notre travail on a découvert un article [3] qui était à ce moment soumis à publication et dans lequel ses auteurs ont donner une caractérisation pour les arbres ayant $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$ et établi quelques bornes sur ce nombre.

Chapitre 4

Domination couplée et subdivision

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la domination couplée. Le concept de domination couplé a été introduit récemment par Haynes et Slater [36]. Il n'existe pas beaucoups travaux sur ce sujet [36, 43, 26]. En première étape, nous passons en revue les résultats existant dans la littérature sur le nombre de domination couplée puis nous établissons quelques nouveaux résultats sur cet invariant et sur le nombre de subdivision de la domination couplée.

4.1 Domination couplée

On rappelle qu'un sous ensemble S de sommets de G est un dominant couplé si S est un dominant et si le sous- graphe induit par S contient un couplage parfait. Le nombre de domination couplé noté par $\gamma_{pr}(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant couplé.
De même, Un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble est un dominant couplé de cardinalité minimum.

Remarque 4.1. *:*

- *tout graphe sans sommet isolé possède un dominant couplé.*
- *tout graphe sans sommet isolé possède un dominant couplé.*

4.1.1 Conditions de minimalité d'un dominant couplé

Dans ce qui suit , on énnonce les conditions de minimalité d'un ensemble dominant couplé établis par T.Haynes et M.Chellali dans [5]. Tout ensemble dominant couplé minimal peut être caractérisé par les conditions sur ses sommets définies dans la Proposition 4.1.

Proposition 4.1. *[5] Soit G un graphe sans sommets isolés et S un dominant couplé de G alors S est minimal si seulement si toute paire de sommets x, y dans S satisfait l'une des conditions suivantes :*

1. $\prec S \setminus \{x, y\} \succ$ *ne contient pas un couplage parfait.*
2. *Soit x est un sommet pendant dans S adjacent a y ou bien y est un sommet pendant dans S adjacent à x.*
3. *Il existe un sommet $u \in (V - S)$ tel que $N(u) \cap S \subset \{x, y\}$.*

4.1.2 Bornes supérieures et inférieures sur le nombre de la domination couplée

Comme annoncé précédemment , il n'existe pas beaucoup de travaux sur le nombre de domination couplée, par conséquent on donnera quelques bornes établis pour une grande classe de graphes , les graphes sans sommets isolés.

Théorème 4.1. *[36] Soit G un graphe sans sommets isolés d'ordre n alors :*

i) $2 \leq \gamma_{pr}(G) \leq n$.

ii) $\gamma_{pr}(G) \geq \frac{n}{\Delta}$.

ii) *Si $n \geq 6$ et $\delta \geq 2$ alors $\gamma_{pr} \leq \frac{2n}{3}$.*

Théorème 4.2. *[36] Pour tout graphe G sans sommets isolés on a $\gamma_{pr}(G) \leq n - \delta + 1$ et cette borne est atteinte.*

M.Chellali et T.Haynes donnent dans [18] une caractérisation des arbres ayant un unique dominant double, on cite le résultat suivant sur les arbres ayant un unique dominant double :

Proposition 4.2. *Pour tout arbre T, si S est un unique $\gamma_{pr}(T)$- ensemble avec un couplage M, alors M est le seul couplage parfait dans S .*

Remarque 4.2. i) *si T est un arbre d'ordre $n \geq 4$ admettant un dominant couplé minimum unique alors aucun support n'est couplé avec son sommet pendant.*

ii) *si v est un sommet support d'un graphe G alors v est dans tout dominant couplé et appartient a un dominant minimum de G.*

iii) *si T est un arbre tel que $\gamma(T) = \gamma_{pr}(T)$ alors aucun sommet support n'est couplé avec son sommet pendant.*

4.1.3 Relation entre les nombres $\gamma(G)$, $\gamma_{\times 2}(G)$ et $\gamma_{pr}(G)$

M.Chellali a établi dans [5] une borne supérieur pour le nombre $\gamma_{pr}(G)$ vérifiée par tout arbre non trivial et montre en construisant une famille d'arbres $\mathfrak{F}$ que cette borne est atteinte. On alors les résultats suivants :

Proposition 4.3. *[17] Pour tout graphe G sans sommets isolées $\gamma_{pr}(G) + 2\delta\rho \leq 2n$.*

Théorème 4.3. *[18] Si T est un arbre tel que $\gamma(T) = \gamma_{pr}(T)$ alors T est un dominant couplé unique.*

Théorème 4.4. *[17] Si G est un graphe sans $K_{1,3}$ et sans sommets isolés alors $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T)$*

Théorème 4.5. *Pour tout arbre non trivial, on a $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T)$*

Théorème 4.6. *[5] Pour tout arbre non trivial, les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{pr}(T)$.

b) *$T = P_2$ ou tout support de T est adjacent à exactement un sommet pendant, pas de paire de support adjacent dans T et T a un unique $\gamma_{\times 2}(T)$ - ensemble constituer de supports et sommets pendants.*

c) $T \in F$.

Corollaire 4.1. *Il n'existe pas un arbre T tel que $\gamma(T) = \gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{pr}(T)$*

Corollaire 4.2. *pour tout graphe G avec $\delta \leq 2$ on a $\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n+\gamma_{pr}(G)}{2}$.*

4.2 Résultats nouveaux sur le nombre de domination et le nombre subdivision

Dans ce qui suit, on propose deux résultats : dans le premier on détermine la valeur du nombre de domination couplée pour les chaînes et les cycles et dans le second celle du nombre de subdivision de la domination couplée pour ces même graphes.

Notons dans tout ce qui suit par S un dominant couplé inférieur d'un graphe G et par S^* un dominant couplé inférieur pour le graphe subdivisé G^*.

Proposition 4.4. *Pour tout cycle C_n d'ordre $n \geq 3$, et toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a :*

$$\gamma_{pr}(P_n) = \gamma_{pr}(C_n) = 2k = \begin{cases} [\frac{n}{2}], & si\, n \equiv 0[4] \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 & si\, n \equiv 1[4] \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & sinon \end{cases}$$

Preuve. *raisonnons par récurrence sur n, on a pour :*

pour $n = 2$, $\gamma_{pr}(P_2) = 2 = [\frac{n}{2}] + 1$

pour $n = 3$, $\gamma_{pr}(P_3) = 2 = [\frac{n}{2}] + 1$

pour $n = 4$, $\gamma_{pr}(P_4) = 2 = [\frac{n}{2}]$

pour $n = 5$,$\gamma_{pr}(P_5) = 4 = [\frac{n}{2}] + 2$

supposons que la proposition est vrai jusqu'a l'ordre n , d'autre part, on a la relation de récurence : $\gamma_{pr}(P_{n+4}) = \gamma_{pr}(P_n) + 2$, $\forall n \geq 2$. montrons qu'elle est vrai pour $n + 4$.

supposons que l'hypothése de récurrence est vrais jusqu'a un ordre n et montrons qu'elle est vrais pour $n + 4$.

comme $n + 4 \equiv n[4]$, alors on a

- *pour $n \equiv 0[4]$, $n + 4 \equiv 0[4]$ donc $\gamma_{pr}(P_{n+4}) = \gamma_{pr}(P_n) + 2 = [\frac{n}{2}] + 2 = [\frac{n+4}{2}]$, cqfd*
- *pour $n \equiv 1[4]$, $n + 4 \equiv 1[4]$ donc $\gamma_{pr}(P_{n+4}) = \gamma_{pr}(P_n) + 2 = ([\frac{n}{2}] + 2) + 2 = [\frac{n+4}{2}] + 2$, cqfd*
- *pour $n \equiv 2[4]$, $n + 4 \equiv 2[4]$ donc $\gamma_{pr}(P_{n+4}) = \gamma_{pr}(P_n) + 2 = ([\frac{n}{2}] + 1) + 2 =$*

$[\frac{n+4}{2}]+1$, *cqfd*

– *pour* $n \equiv 3[4]$, $n+4 \equiv 3[4]$ *donc* $\gamma_{pr}(P_{n+4}) = \gamma_{pr}(P_n)+2 = ([\frac{n}{2}]+1)+2 = [\frac{n+4}{2}]+1$, *cqfd*

.

Proposition 4.5. *Pour tout cycle* C_n *et toute chaîne* P_n *d'ordre n, on a :*

$$sd_{\gamma_{pr}}(P_n) = sd_{\gamma_{pr}}(C_n) = \begin{cases} 1 & si\, n \equiv 0[4] \\ 4 & si\, n \equiv 1[4] \\ 3 & si\, n \equiv 2[4] \\ 2 & si\, n \equiv 3[4]. \end{cases}$$

Preuve. *Soit* P_n *une chaîne, on subdivise une arête quelconque de* P_n *, on obtient une chaîne* P_{n+1}.

- *si* $n \equiv 0[4]$ *donc* $n+1 \equiv 1[4]$ *et* $[\frac{n+1}{2}] = [\frac{n}{2}]$ *, donc d'aprés prop* (4.1) $\gamma_{pr}(P_n) = [\frac{n}{2}]$ *et* $\gamma_{pr}(P_{n+1}) = [\frac{n+1}{2}]+2.d'où\gamma_{pr}(P_{n+1}) = \gamma_{pr}(P_n)+2$, *il s'ensuit que* $sd_{\gamma_{pr}}(P_n) = 1$
- *si* $n \equiv 1[4]$, *alors* $\gamma_{pr}(P_n) = [\frac{n}{2}]+2$, *il facile de voir que si on subdivise une ou deux , ou même trois arêtes le nombre de domination couplé n'augmente pas.En effet, on a* $[\frac{n}{2}]+2 = [\frac{n+1}{2}]+1 = [\frac{n+2}{2}]+1 = [\frac{n+3}{2}], doncd'aprèslaprop4.1, ona :$
  $\gamma_{pr}(P_{n+3}) = \gamma_{pr}(P_{n+2}) = \gamma_{pr}(P_{n+1}) = [\frac{n}{2}]+2 = \gamma_{pr}(_Pn)$, *d'où* $sd_{\gamma_{pr}}(P_n) > 3$.
  On subdivise alors quatre arête de P_n, *on obtient une chaîne* P_{n+4}, *avec* $n+4 \equiv 1[4]$,*donc d'après la prop*4.1 $\gamma_{pr}(P_{n+4}) = [n+4/2]+2 = [n/2]+4 = \gamma_{pr}(_Pn)+2$.
  Par conséquent $sd_{\gamma_{pr}}(_Pn) = 4$.
- *si* $n \equiv 2[4]$,*alors* $[\frac{n}{2}]+1 = [\frac{n+1}{2}]+1 = [\frac{n+2}{2}]$, *donc* $\gamma_{pr}(P_n) = \gamma_{pr}(P_{n+1}) = \gamma_{pr}(P_{n+2})$ *il s'ensuit que* $sd_{\gamma_{pr}}(Pn) > 2$.
  on subdivise alors trois arêtes de P_n, *on obtient une chaîne* P_{n+3}, *avec* $n+3 \equiv 1[4]$ *d'où d'aprés la prop* (4.1) *:* $\gamma_{pr}(P_{n+3}) = [\frac{n+3}{2}]+2 = ([n/2]+1)+2 = \gamma_{pr}(P_n)+2$, *et donc* $sd_{\gamma_{pr}}(P_n) = 3$.
- *si* $n \equiv 3[4]$, *montrons que* $sd_{\gamma_{pr}}(P_n) > 1$.
  En effet, $n+1 \equiv 0[4]$ *d'où d'aprés la prop* (4.1), $\gamma_{pr}(P_{n+1}) = [\frac{n+1}{2}] = [\frac{n}{2}]+1 = \gamma_{pr}(P_n)$.

A présent on subdivise deux arêtes quelconques de P_n ,on obtient une chaîne P_{n+2}, avec $n+2 \equiv 1[4]$ et $\gamma_{pr}(P_{n+2}) = [\frac{n+2}{2}] + 2 = ([\frac{n}{2}] + 1) + 2 = \gamma_{pr}(P_n) + 2$ d'où $sd_{\gamma_{pr}}(P_n) = 2$.

4.2.1 Graphes ayant un $\gamma_{pr}(G) = 2$

Proposition 4.6. *Pour tout graphe G tel que :*
$G = K_n$, avec $n \geq 3$ ou $G = K_{n,m}$, avec $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on a $\gamma_{pr}(G) = 2$.

Preuve. *il est facile de voir que si :*
[1)]$G = K_n$, $n \geq 3$, deux sommets quelconques u et v de G constituent un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble, car pour tout $x \in V$, x est dominé par u ou par v. [2)] si $G = K_{n,m}$, avec $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on pose $G = A \cup B$, alors deux sommets u et v tel que $u \in A$ et $v \in B$ forment un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble, en effet tous les sommets de A sont dominés par v, et tous les sommets de B dominés par u.

Proposition 4.7. *Soit G un graphe tel que $G = K_n$, $n \geq 3$ ou $G = K_{n,m}$, $n \geq 1$ et $m \geq 1$ alors :*

$$sd_{\gamma_{pr}}(G) = \begin{cases} 1 & si \quad G = K_{n,m}, \quad n \geq 2 \quad et \quad m \geq 2 \\ 2 & si \quad G = K_n \quad ou \quad G = K_{1,m}, \quad m \geq 1 \end{cases}$$

Preuve. *Soit S un $\gamma_{pr}(G)$ - ensemble d'un graphe G complet ou d'une étoile , d'après la prop (4.3) $\gamma_{pr}(G) = 2$ .on pose $S = \{u, v\}$ et soit $w \in (V - S)$.*

1) *Si G est un graphe complet, il est clair que si on subdivise une arête quelconque de G par un sommet x, (par exemple l'arête uv), alors tous les sommets de $(V - S)$ restent dominer par u ou par v donc $\gamma_{pr}(G)$ n'augmente pas ,et on a $S^* = \{u, x\}$ ou $S^* = \{v, x\}$ par conséquent $sd_{\gamma_{pr}}(G) > 1$.*
A présent subdivisons les arêtes uv, uw et soient x, y leurs sommets subdivisions respectifs, montrons alors que $sd_{\gamma_{pr}}(G) = 2$.
En effet, au moins deux sommets parmi $\{u, x, v\}$ sont nécessairement dans S^* et comme tous les autres sommets de G^* sont des voisins de u et/ou de v alors ils seront dominés dans G^* par u ou par v, de plus $\gamma_{pr}(G)$ est pair, alors

$S^* = \{u, x, y, w\}$ *ou* $S^* = \{u, x, v, w\}$ *ou* $S^* = \{u, x, v, y\}$ *ou* $S^* = \{u, x, z, w\}$ *(ou* z *est un sommet de* G *différent de* u*,* v *et* w*) est un dominant couplé de* G^* *de cardinalité minimum.*

2) *Si* G *est l' étoile de centre* u*, Il est facile de voir que si on subdivise n'importe quelle arête pendante de l'étoile alors* $\gamma_{pr}(G)$ *n'augmente pas .*

En effet, subdivisons l'arête uv *(par exemple), soit* x *son sommet subdivision, Comme* u *et* x *sont des supports de* G^* *alors* $\{u, x\} \subset S^*$ *et comme tout les sommets pendants de* $G/\{v\}$ *sont des voisins de* u *alors ils seront dominé dans* G^* *par* u*, de même* v *est dominé par* x *d'où* $S^* = \{u, x\}$ *est un dominant couplé de cardinalité minimum , il en résulte que* $sd_{\gamma_{pr}}(K_{1,m}) \geq 2$*. Maintenant , subdivisons deux arêtes de* G *, par exemple* uv *et* uw*, et soient* x *et* y *leur sommets subdivision respectifs, alors* $\{x, y\} \subset S^*$*(*x *et* y *sont des supports dans* G^* *) de plus* u *est nécessairement dans* S^* *si* $deg(u) \geq 3$*.*

Comme $\gamma_{pr}(G)$ *est pair alors l'un des sommets* v *ou* w *sont dans* S^* *, on a donc* $S^* = \{u, x, y, w\} ou S^* = \{v, x, y, w\}$ *ou* $S^* = \{v, x, u, y\}$ *,un dominant couplé de* G^* *de cardinalité minimum. On en déduit que :* $sd_{\gamma_{pr}}(K_{1,m}) = 2$*.*

3) *Si* G *est un graphe biparti complet, posons* $G = A \cup B$ *Soit* S *un* $\gamma_{pr}(G)$ *-ensemble, d'après la prop* (4.3) *on a* $S = \{u, v\}$ *tel que* $u \in A$ *et* $v \in B$*.*

Subdivisons l'arête uv*, soit* x *son sommet subdivision, comme* $N(x) = \{u, v\}$ *alors au moins deux sommets parmi les sommets* $\{u, v, x\}$ *sont dans* S^**, alors :*

i) *Si* $x \in S^*$ *on a* $\{u, x\} \subset S^*$ *ou* $\{v, x\} \subset S^*$ *ou même* $\{u, v, x\} \subset S^*$*, dans ce cas ,* $S^* = \{u, v, x, y\}$ *ou* $\{u, v, x, w\}$ *ou* $\{u, x, y, w\}$ *ou enfin* $\{x, v, w, y\}$ *sont des dominants couplés de cardinalité minimum (ou* w *(resp* y*) est un sommet quelconque de* A *(resp de* B*) différent de* u *(resp de* v*) .*

ii) *Si* $x \notin S^*$ *on a* $\{u, v \subset S^*$*, donc les voisins de* u *(resp de* v *) seront tous dominés dans* G^* *, mais comme* u *et* v *ne sont plus adjacents dans* G^* *alors chacun d'eux doit avoir un voisin dans* S^**, soient* w *et* y *leurs voisins respectifs, on a donc* $\{u, v, w, y\}$ *un dominant couplé de* G^* *de cardinalité minimum. Il en résulte que :* $sd_{\gamma_{pr}}(K_{n,m}) = 1$

4.2.2 Classe des arbres

Les propositions qui suivent donnent des bornes inférieurs et supérieurs sur le nombre de subdivision de la domination couplée pour une classe importante de graphes à savoir les arbres .Ces dites bornes sont atteintes pour des graphes particuliers , comme les chaînes

Proposition 4.8. *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$, possèdant au moins un support fort ou des supports simples adjacents, alors on $1 \leq sd_{\gamma_{pr}}(T) \leq 2$.*

Preuve.

a) *soit u un support fort de degré au moins trois. Soient $\{v, w, k\} \subset N(u)$ avec k non pendant et v,w pendants, donc $u \in S$ ainsi que l'un de ces voisins subdivisons uv et uw, soient x et y leurs sommets subdivisions respectifs , alors $\{x, y\} \subset S^*$ (car des supports dans T^*), d'autre part si*

i) *k été couplé avec u dans S, alors $\{v, w\} \subset S^*$ et les autres sommets restent inchangés , d'ou $S^* = S \cup \{x, y, v, w$ un $\gamma_{pr}(G^*)$ - ensemble.*

ii) *si $k \notin S$, alors deux sommets parmi $\{u, v, w\}$ doivent être dans S^* si de plus le $deg(u) > 3$, alors u doit être dans S^* avec l'un des sommets v ou bien w, on aurait donc $S^* = S \backslash \{u\} \cup \{x, y, v, w\}$ ou $S^* = S \cup \{x, y, v\}$ ou $S^* = S \cup \{x, y, w\}$ un $\gamma_{pr}(G^*)$ - ensemble.*

b) *Soient u, w deux supports adjacents d'un arbre T et v, k leurs sommets pendants respectifs. On a $\{u, w\} \subset S$ (d'après la remarque).*

Subdivisons les arêtes uv et wk, soient x et y leurs sommets subdivisions respectifs, on a donc $\{x, y\} \subset S^*$ (d'après la remarque) et comme S^* doit contenir un couplage parfait et x ,y ne sont pas adjacent dans T^* alors deux sommets parmi l'ensemble $\{u, v, w, k\}$ doivent êtres dans S^* et les autres sommets du graphe restent inchangés, on aurait donc $S^* = S \backslash \{x, y\}$ ou bien $S^* = S/\{u, w\} \cup \{x, y, k, v\}$ ou $S/\{u\} \cup \{x, y, k\} oubien S/\{w\} \cup \{x, y, v\}$ est un dominant couplé inférieur de cardinalité minimum pour T^* par conséquent $\gamma_{pr}(T^*) = \gamma_{pr}(T) + 2$.

Notons par $S^iK_{1,m}$, $i \geq 1, m \geq 1$ *l'arbre obtenu par i subdivisions de chaque arête de l'étoile* $K_{1,m}$. *Notons que pour* $S^iK_{1,m}$, $i \geq 1$, *on a si i pair alors* $sd_{\gamma_{pr}}(S^iK_{1,m}) = 2$ *et si i impair* $sd_{\gamma_{pr}}(S^iK_{1,m}) = 4$ *(il suffit de considérer toute chaîne* P_j *de* $S^iK_{1,m}$ *passant par u et ayant pour éxtrimités deux sommets pendants quelconque qui sont toute de même longeur pour chaque i fixe, on aurait* $j \equiv 3[4]$ *où* $j \equiv 3[4]$ *et on utilisera la Proposition4.1.*
Nous détrminons, dans la Proposition4.9, pour $S^1K_{1,m}$, $m \geq 2$ *(qui reprisente l'étoile dont on a subdivisé chaque arête une fois)le nombre de domination couplée ainsi que le nombre de subdivision.*

Proposition 4.9. *Si* T *est l'arbre* $S^1K_{1,m}$, $m \geq 2$. *Alors*
$\gamma_{pr}(S^1K_{1,m}) = sd_{\gamma_{pr}}(S^1K_{1,m}) = 2m$.

Preuve. *Soit u le centre de* T, *notons* $SP(G) = \{x_i/1 \leq i \leq m\}$ *l'ensemble des supports et* $PD(G) = \{y_i/1 \leq i \leq m\}$ *l'ensemble des sommets pendants.*

a) *montrons par réccurence sur m que :* $\gamma_{pr}(S^1K_{1,m}) = 2m$.

Pour $m = 2$, $S^1K_{1,m}$ *est la chaîne* P_5, *donc d'aprés la Proposition* 4.1 *on sait que* $\gamma_{pr}(S^1K_{1,m}) = 4 = 2m$.

Supposons que l'hypothése de réccurence est vrai jusqu'un ordre m et montrons qu'elle est vrai pour $m + 1$.

il est facile de voir que $S^1K_{1,m+1}$ *est obtenu a partir de* $S^1K_{1,m}$ *en ratachons une chaîne* $P_2 = \{x_{i+1}, y_{i+1}\}$ *au sommet u, De plus comme* $SP(G) = \{x_i/ 1 \leq i \leq m\} \subset S$ *et* $G(S)$ *doit contenir un couplage parfait, alors tout ensemble dominant couplée S de cardinalité minimum de* $S^1K_{1,m+1}$ *est constitué d'un dominant couplé de cardinalité minimum de* $S^1K_{1,m}$ *et des sommets* x_{m+1} *et un seulement des deux sommets u et* y_{m+1} *, d'où* $\gamma_{pr}(S^1K_{1,m+1}) = \gamma_{pr}(S^1K_{1,m}) + 2$, *comme* $\gamma_{pr}(S^1K_{1,m}) = 2m$ *, on en déduit que* $\gamma_{pr}(S^1K_{1,m+1}) = 2m + 2 = 2(m + 1)$ *cqfd.*

- *Montrons par récurrence que* $sd_{\gamma_{pr}}(S^1K_{1,m}) = 2m$.

Si $m = 2$, $S^1K_{1,m}$ *est la chaîne* P_5, *on sait d'aprés la proposition* 4.1 *que* $sd_{\gamma_{pr}}(P_5) = 2 \times 2 = 4$.

supposons que l'hypothése est vraie jusqu'un ordre $m > 2$ *et montrons qu'elle vrai* *pour* $m+1$.

Posons T^0 *l'arbre* $S^1K_{1,m}$, *notons par* T^1 *l'arbre* $S^1K_{1,m}$ *dont on a subdivisé une arête,* T^2 *l'arbre* $S^1K_{1,m}$ *dont on a subdivisé deux arêtes,...,*T^{2m} *l'arbre* $S^1K_{1,m}$ *dont on a subdivisé* $2m$ *arêtes.*

Soient k_i *les sommets subdivisions respectifs des arêtes* ux_i *et* l_i *les sommets subdivisions respectifs des arêtes* x_iy_i, $i = 1, ..., m+1$.

D'aprés l'hypothése de récurrence, on a $sd_{\gamma_{pr}}(S^1K_{1,m}) = 2m$, *d'où* $\gamma_{pr}(T^{2m}) = \gamma_{pr}(S^1K_{1,m}) + 2 = 2m + 2$.

Il est clair que si on supprime le support x_{m+1} *de* $S^1K_{1,m+1}$ *on obtient* $S^1K_{1,m}$.

Rattachons $P_2 = x_{m+1}y_{m+1}$ *à l'arbre* T^{2m} *on obtient l'arbre* $S^1K_{1,m+1}$ *dont on a subdivisé* $2m$ *arêtes, notons cette arbre par* T_1^{2m} *et montrons que* $\gamma_{pr}(T^{2m}) = \gamma_{pr}(T_1^{2m} = 2m + 2$. *Sans perte de généralité posons* $S = \{l_ix_i, 1 \leq i \leq m\} \cup \{uk_1\}$ *un dominant couplé de cardinalité minimum de l'arbre* T^{2m}. *Montrons que* T_1^{2m} *admet un dominant couplé de cardinalité minimum* S^1 *qui est de même cardinalité que* S. *Si on prend* $S^1 = S\backslash\{k_1\} \cup \{x_{m+1}\}$ *alors* k_1 *est dominé par* u , *le sommet* y_{m+1} *est dominé par* x_{m+1} *et les autres sommets restent inchangés, donc* $\gamma_{pr}(T^{2m}) = \gamma_{pr}(T_1^{2m} = 2m + 2$. *De même si on subdivise l'arête* ux_{m+1} *par* k_{m+1}, *notons par* T_2^{2m} *l'arbre obtenu, alors* $S^2 = S^1\backslash\{u\} \cup \{k_{m+1}\}$ *est un dominat couplé de cardinalité minimum de* T_2^{2m} *car* u *est dominé par* k_{m+1} *et les autres sommets restent inchangés, donc* $\gamma_{pr}(T_2^{2m}) = \gamma_{pr}(T_1^{2m} = \gamma_{pr}(T^{2m}) = 2m+2$. *D'où* $sd_{\gamma_{pr}}(T_2^{2m}) = sd_{\gamma_{pr}}(S^1K_{1,m+1}) > 2m + 1$. *Enfin nous subdivisons l'arête* $x_{m+1}y_{m+1}$ *par le sommet* l_{m+1} *nous obtenons l'arbre* T_3^{2m} *qui reprisente l'arbre* $S^1K_{1,m+1}$ *dont on a subdivisé* $2(m+1)$ *arêtes. Comme* l_{m+1} *est un support donc il doit être dans le dominant couplé avec l'un de ses voisins* y_{m+1} *où* x_{m+1}, *alors* $S^2 \cup \{l_{m+1}, y_{m+1}\}$ *ou bien* $S^2\backslash\{x_{m+1}\} \cup \{u, l_{m+1}, y_{m+1}\}$ *un dominant couplé de cardinalité minimum de* $S^1K_{1,m+1}$ *d'aprés l'hypothése de recurrence. On a donc* $\gamma_{pr}(T_3^{2m}) = \gamma_{pr}(S^1K_{1,m+1} = \gamma_{pr}(T_1^{2m}) + 2 = 2m + 4 = 2(m+1) + 2$.

D'où $sd_{\gamma_{pr}}(T_3^{2m}) = sd_{\gamma_{pr}}(S^1K_{1,m+1}) = sd_{\gamma_{pr}}(S^1K_{1,m}) + 2 = 2m + 2 = 2(m+1)$.

Lemme 4.1. *Si* T *est un arbre d'orne* $n \geq 2$, *alors* $\gamma_{pr}(T) = n - 1$ *si seulement si* T *est la subdivision de l'étoile* $S^1K_{1,m}$, *avec* $m \geq 1$.

Remarque 4.3. *soit T l'arbre $S^1K_{1,m}$ et soit x un sommet de T tel que x n'est ni pendant ni support, alors, il est facile de voir que toute chaîne P_k passant par x et d'extrimité deux sommet pendant est de longeur quatre, c'est à dire $k = 5$.*

Théorème 4.7. *Pour tout arbre T sans support fort et sans support adjacent tel que $T \neq S^1K_{1,m}$, $m \geq 1$, on a $1 \leq sd_{\gamma_{pr}}(T) \leq 4$.*

Preuve. *Soit u un support de T , comme u n'est pas un support fort et ne possède pas de support adjacent, alors la plus petite chaîne passant par u et d'extrémités deux sommets pendants de T est de longueur au moins quatre.*
d'autre par comme $T \neq S^1K_{1,m}$, alors d'aprés le lemme précedant , il existe au moins une chaîne P_k, passant par u et d'extrémités deux sommets pendants de T est de longueur au moins cinq.
Soit uv une arête pendante et soit wk une arête adjacente à uv tel que $w \in N(u)$ alors comme T ne possède ni des supports forts ni des supports adjacent alors w ni n'est un sommet pendant ni un support donc il existe au moins un sommet $k \in N(w)$ et k non pendant et possède au moins un voisin l non pendant.on a donc $u \in S$ avec l'un de ses voisins , sans perte de géneralité supposons que u été couplé avrc w dans T
Subdivisons les quatre arêtes uv, uw,wk et kl, soient x, y, z et t leurs sommets subdivisions respectifs, On a alors $x \in S^*$ et comme S^* doit contenir un couplage parfait alors x doit avoir un voisin dans S^*, donc l'un des sommets $\{u, v\}$ doit être dans S^*. supposons que $u \in S^*$ et $v \notin S^*$ donc v et y seront dominé dans G^*, d'autre part , on a :

1) *s' il existe au moins un sommet $a \in N(w)$ qui été dominer que par w alors w et l'un de ses voisins doivent être dans S^*(z ,par exemple) de plus comme $T \neq S^1K_{1,m}$ alors il existe au moins un sommet dans $(V - S)$ adjacent soit à w, soit à l'un des voisins de w (car sinon S ne sera pas minimal), on a donc :*

i) *Si l'un au moins des voisins de w été dans $(V - S)$, (par exemple le sommet k), alors on a, soit :*

un$\gamma_{pr}(G^*) -$ ensemble.

- *) Sinon si l n'été pas dans S, alors l été dominé par au moins un sommet m par* *exemple, et comme* $N(t) = \{k, l\}$*. alors* k *et* t *ou bien* t*,* l *doivent être dans* S^**, on aurait donc* $S^* = S \backslash \{m\} \cup \{x, z, t\}$ *un* $\gamma_{pr}(G^*)$ *− ensemble.*

ii) *Si tout les voisins de* w *étaient dans* S *et il existe au moins un un sommet* $b \in (V - S)$ *adjacent à l'un des voisins de* w *alors* w *peut ne pas être dans* S^**, donc* $\{z, k\} \subset S^*$ *et* t *sera dominé dans* G^* *et les autres sommet restent inchangés ,on aurait donc* $S^* = S \backslash \{w\} \cup \{x, z, k\}$ *un* $\gamma_{pr}(G^*)$ *− ensemble.*

2) *Sinon , tout sommet appartenant à* $N(w)$ *est dominer par au moins* w *et un autre sommet, alors* w *peut ne pas être dans* S^* *alors* $\{z, k\} \subset S^*$ *et* t *sera couvert , on aurait donc* $S^* = S \backslash \{w\} \cup \{x, z, k\}$ *un* $\gamma_{pr}(G^*)$ *− ensemble.*

Proposition 4.10. *Si* G *est une couronne d'ordre* $n = 2p$*, d'un graphe* H *sans support fort d'ordre* p*, on a :*

$$\gamma_{pr}(G) = \begin{cases} \frac{n}{2} = p & si\, n \equiv 0[4] \\ \frac{n}{2} + 1 & si\, n \equiv 2[4] \end{cases}$$

Preuve. *Soit* G *la courronne d'un graphe* H*, notons par* $SP(G)$ *l'ensemble des supports de* G *et par* $PD(G)$ *l'ensemble des sommets pendants, alors* $\forall x \in G$*,* $x \in SP(G)$ *ou* $x \in PD(G)$ *, on a donc* $V(H) = SP(G)$*. Donc* $v(H) \subseteq S$*. De plus* n *est pair et* $|SP(G)| = |PD(G)| = |V(H)| = \frac{n}{2}$*.*
Comme G *est connexe et sans support fort alors chaque support de* G *est adjacent à au moins un autre support de* G*.*

i si p *est pair alors* $V(H)$ *posséde un couplage parfait, il suffit de prendre chaque deux paire de supports adjacents deux à deux, parconséquent tout les sommets de V(H) dans S, par conséquent tout les sommets de* $V(H)$ *seront saturés. Donc S= V(H) est un dominant couplé de cardinalité minimum. D'où* $|S| = |V(H)| = \gamma_{pr}(G) = \frac{n}{2}$*.*

ii) si p *est impair alors* $V(H)$ *ne contient pas un couplage parfait. Soit* x *l'un des supports de* G *et* y *son sommet pendant, alors* $|V(H)\backslash x\}| = p - 1$ *est pair, et d'aprés (i)* $V(H)\backslash\{x\}$ *admet un couplage parfait . D'où* $V(H)\backslash x\}$ *est un dominant couplé de* $G\backslash\{x\}$*. D'autre part, comme* x *est un support donc il doit être* *dans tout dominant couplé de G alors il suffit de couplé x avec y, on obtient un dominant couplé de cardinalité minimum pour G. D'où* $|S| = |V(H)| + 1 = \gamma_{pr}(G) = \frac{n}{2} + 1$.

Proposition 4.11. *si G est la courronne d'un graphe , alors*

$$sd_{\gamma_{pr}}(G) = \begin{cases} 1, & si\, n \equiv 0[4] \\ 2, & si\, n \equiv 2[4] \end{cases}$$

Preuve. *Soit G une couronne d'ordre* $n \geq 3$

i) *si* $n \equiv 0[4]$ *alors* $|S| = |SP(G)|$ *, montons que* $sd_{\gamma_{pr}}(G) = 1$.

Soit u et w deux supports adjacents de S et soient v et k leurs sommets pendants respectifs, subdivisons l'arête uv, soit x son sommet subdivision, comme x est un support dans G^* *alors* $x \in S^*$ *. D'autre part, comme x et w ne sont pas adjacents, alors l'un des sommets u ou v doit être dans* S^*.

- *si* $u \in S^*$ *et* $v \notin S^*$ *, alors v sera dominer dans* G^**, de plus comme u été couplé avec w dans G, alors w ne peut plus être couplé avec u dans* S^**, par conséquent k doit être dans* S^* *et les autres sommets restent inchangés, d'où* $S^* = S \cup \{x, k\}$ *et* $\gamma_{pr}(G^*) = \gamma_{pr}(G) + 2$.

- *si* $u \notin S^*$ *et* $v \in S^*$ *, alors u sera dominer dans* G^* *car* $\{x, w\} \subseteq N(u)$*, et comme tous les autres sommets de G étés couplés deux a deux dans S, alors aucun support de* G^* *ne serait un voisin de w dans* S^**, donc k doit être dans* S^**, par conséquent* $S^* = S\backslash\{u\} \cup \{v, k, x\}$ *et* $\gamma_{pr}(G*) = \gamma_{pr}(G) + 2$.

ii) *si* $n \equiv 2[4]$*, alors on a* $|S| = |SP(G)| + 1$*, c'est-à -dire que tout les supports seront couplé ente eux deux à deux sauf un qui sera couplé avec son sommet pendant, supposons que le supprt u et couplé avec son sommet pendant v, subdivisons l'arête uv, par exemple, soit x son sommet subdivision on a donc* $\{x\} \in S^*$*, de plus l'un des sommets u ou v doit être dans* S^* *et commme* $|V(G)\backslash\{u, w\}|$ *est pair alors tous les autrs supports du graphe* G^* *sont dans* S^**, par conséquent tous les pendants restent dominé deux a deux, il est en de même si on subdivise n'importe quelle arête de G,* *on aurait donc* $\gamma_{pr}(G^*) = \gamma_{pr}(G)$ *par conséquent* $sd_{\gamma_{pr}}(G) > 1$.

Subdivisons alors deux arêtes pendantes uv *et* wk *(par exemple), soient* x, y *leurs sommet subdivision respectifs, on a donc* $\{x, y\} \subset S^*$ *(car ce sont des supports dans* G^**),d'autre part comme* G^* *doit contenir un couplage parfait alors deux sommets parmi* $\{u, v, y, k\}$ *doivent être dans* S^**, d'autre part on a d'aprés prop*(4.9), $|V(G)\backslash\{u, w\}| = \frac{n-2}{2}$ *(impair) donc, tous les autres supports seront couplé entre eux deux a deux sauf un qui va être couplé avec son sommets pendant, donc on a* $\gamma_{pr}(G^*)= |V(G)\backslash\{u, w\}| + 4 = (\frac{n-2}{2} + 1) + 4 = (\frac{n}{2} + 1) + 2 =\gamma_{pr}(G) + 2$.

4.3 Graphes ayant $\delta(G) = 1$

Proposition 4.12. *Si* G *est un graphe, ayant au moins un suppport fort ou des supports simples adjacent alors* $1 \leq sd_{\gamma_{pr}}(G) \leq 2$.

Preuve. *Soit* G *un graphe d'ordre* $n \geq 4$*, possédant au moins un support simple* u*, notons par* S *un dominant couplé inférieur de* G *et notons par* S^* *un dominant couplé inférieur du graphe subdivisé* G^**, on a deux cas :*

1) *si* G *possède au moins un support fort* u *de degré au moins trois, soient* v *et* w *ces sommets pendants, on a donc* $u \in S$.

Subdivisons les arêtes uv *et* uw*, soient* x *et* y *leurs sommets subdivisions respectifs, on a donc* $\{x, y\} \subset S^*$ *et comme* S^* *doit contenir un couplage parfait et* x, y *ne sont pas adjacent dans* G^* *alors deux sommets parmi* $\{v, w, u\}$ *doivent être dans* S^**, on a les cas suivants :*

i) *si* u *été couplé avec un certain sommet pendant*

sans perte de généralité supposons que u *été couplé avec* v*, alors* $u \in S^*$ *(car s'il existe au moins un sommet qui été dominer que par* u *alors il reste dominer dans* G^**) mais* $v \notin S^*$ *et sera échanger par* x *ou* y *, on aura,*$S^* = S \cup \{x, v, y\}/\{k\}$ *ou* $S^* = S \cup \{x, y, w\}/\{k\}$*, et les autres sommets restent inchangés, par conséquent on a* $\gamma_{pr}(G^*) > \gamma_{pr}(G)$.

ii) *sinon si* u *été couplé avec un certain sommet* k *non pendant*

- *s'il existe au moins un sommet qui été dominer que par k alors k doit être dans S^*, et sera couplé avec u ou l'un de ces voisins z, et les autres sommets restent inchangés, on a donc $S^* = S \cup \{x, v, y, w\}$ ou $S^* = S \cup \{x, y, w, z\}$ ou $S^* = S \cup \{x, y, v, z\}$ un dominant couplé non minimal conséquent on d'après le cas précédent on peut montrer qu'une seul subdivision suffit pour augmenter le nombre de domination couplé).*

- *si $\forall z \in N(u)$, $z \neq v$ et $z \neq w$, z est dominer par au moins un autre sommet différent de u, alors u peut ne pas appartenir a S^*, de même le sommet $k \notin S^*$, et on a donc $S^* = S \cup \{x, v, w, y\}/\{u, k\}$ et les autres sommets restent inchangés, donc $\gamma_{pr}(G^*) > \gamma_{pr}(G)$.*

2) *Si G possède au moins deux supports simples adjacents u et w*

on a $\{u, w\} \subset S$.Montrons que $sd_{\gamma_{pr}}(G) \leq 2$.

Soient u et w deux supports adjacents dans un graphe G, et soient v et k leurs sommets, pendants respectifs. Subdivisons les arêtes uv et uw, soient x, y leurs sommets subdivisions respectifs, comme x et w sont des supports dans G^*, alors d'après la remarque ( ), nécessairement $\{x, w\} \subset S^*$ mais comme ils ne sont pas adjacents alors chacun deux doit être avec l'un de ces voisins dans S^*, c'est-à-dire deux sommets adjacents de l'ensemble $\{u, y, w, k\}$ doivent être dans S^* et tous les autres sommets du graphe restent inchangés. On a donc $S^* = S \cup \{x, y\}$ ou $S^* = S \cup \{x, k\}$ par conséquent $\gamma_{pr}(G^*) > \gamma_{pr}(G)$.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la recherche de quelques valeurs des invariants $sd_{\gamma_{\times 2}}(G)$, $sd_{\gamma_{pr}}(G)$. Nous avons prouvé que $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$ pour les graphes possédant au moins un support fort et pour les graphes ayant $\gamma_{\times 2}(G) = 2$ et que $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$ pour la couronne d'un graphe. Aussi, nous avons déteminer quelques valeurs pour le nombre de domination couplé pour les chaînes, cycles, la couronne d'un graphe, la subdivision de l'étoile,... . D'autre part, nous avons montré que $sd_{\gamma_{pr}}(G) = 1$ pour les graphes bipartis complets, $sd_{\gamma_{pr}}(G) = 2$ pour les graphes complets et $sd_{\gamma_{pr}}(G) = 2m$ pour la subdivision de l'étoile $S^1K_{1,m}$.

Parmi les perspectives, nous pouvons citer :

- *Prouver ou désapprouver la conjecture $1 \leq sd_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq 2$ pour tout graphe G.*
- *Caractériser la classe des graphes vérifiant soit $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$, soit $sd_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$.*
- *Etudier les graphes ayant des cycles pairs ou impairs.*
- *Etudier les graphes ayant $\gamma_{\times 2}(G)$ pairs ou impairs.*
- *Etudier les graphes possédant des sommets simpliciaux ou des sommets triangulaires.*
- *Déterminer le nombre de subdivision de la domination double en fonction du diamètre ou de la maille,...*
- *Caractériser les graphes ayant $sd_{\gamma_{pr}}(G) = i$, $i = 1, 4$.*

Bibliographie

[1] *S. Arumugam. In* private communication*, June(2000).*

[2] *R. B. Allan, R. C. Laskar, and S. T. Hedetniemi. A note on total domination.In* Discrete Math.49/ *7-13.(1984).*

[3] *M. Atapour, A. Khodkar, and S.M. Sheikholeslami. Characterization of double domination subdivision numbers of trees.*webset

[4] *P.A. Burchett.Paired and total domination in the queen's graphs,*These Master, East Tennessee, State University.*(2005)*

[5] *M. Blidia, M. Chellali and T. Haynes : Characterizations of trees withs equal paired and double domination, Soumis à* Discrete mathematics.*(2003)*

[6] *M. Blidia, M. Chellali, T. Haynes et M.A. Henning. Independent and double domination In trees. Accepté inUtilitas Mathematica(2003)*

[7] *D. Banerjee and D. Ferrero : On paired domination in planar graphs.* Combina-Texas *2003.*

[8] *D. W. Bange, A. E. Barkauskas, and P. J. Slater.A constructive characterization Of trees with two disjoint minimum dominating sets. in* Congr. Numer.21*(1978) 101.112.*

[9] *D. W. Bange, A. E. Barkauskas, and P. J. Slater. Efficient dominating sets in Graphs, In* R. D. Ringeisen and F.S. Roberts, editors, Applications of Discrete Math. *SIAM, Philadelphia, PA (1988) 189-199.*

[10] *C. Berge, Theory of graphs and its applications.* Methuen, London *(1985, 1962)*

[11] *C. Berge, Graphs and Hypergraphs.* North Holland, Amsterdam *(1973).*

[12] M. Blidia, M. Chellali. Nouvelle borne supérieure pour les paramètres de Domination. in Rencontre des Mathématiciens Algériens *RMA (2000), Alger.*

[13] M. Blidia, M. Chellali et F. Mafray. Extremal graphs for a new upper bound on Domination parameters in graphs. Soumis à Discrete Mathematics*. (2003)*

[14] R.C. Brigham, J. R. Carrington, and R. P. Vitray, Connected Graphs with maximum total domination number. J. Combin.

[15] K.S. Booth et J.H. Johnson, Dominating sets in chordal graphs. SIAM J. Comput11*(1982) 191-199.*Math. Combin. Comput34*(2000) 81-95.*

[16] M. Chellali . Etude de quelques invariants de graphes, thèse de doctorat en mathématiques U.S.T.H.B *(2005).*

[17] M. Chellali et T. Haynes : On paired and double domination in graphs. Utilitas math.*, 67 (2005) 161-171.*

*[18] M. Chellali and T. Haynes : Trees with unique minimum paired dominating sets.*Ars Comb.73 *(2004) 3-12.*

[19] M. Chellali and A. Khelladi et F. Maffry .Exact double domination in graphs. Disscuss.math.Graph Theory,25 *(2005)291-302.*

[20] M. Chellali and T. Haynes : total and paired- domination numbers of trees.

*[21] M. Chellali. A characterization of trees with unique minimum double dominating sets.*les annals Road du laboratoire laid trios n° 3- *(2006).*

[22] M. Chellali, T. Haynes : A note on the total domination numbers of tree.

*[23] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S.T. Hedetniemi, Total domination in graphs.*Networks 10 *(1980)211-219.*

[24] P. Dorbec, S. Gravier . Paired domination in P_5-free graphs, ERTE, Institu de Fourier Subject Classification05C *69.*

[25] M. Dorfling, W. Goddard et M. Henning.Domination in Planar Graphs With Small Diameter II, supported in part by the University of Natal and the national research foundation.

[26] *P. Dorbec : Empilement et Recouvrement,* Thèse Institu Fourier Saint Martin *(2007).*

[27] *Paul Dorbec, Sylvian Gravier et M. Henning : Paired Domination in generalized claw -free graphs.*

[28] *J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. kinch and J. Roberts, On graphs having domination number half their order.*Period .Math.Hungar 16*(1985),287-293.*

[29] *S. Fitzpatrick : Well paired dominated graphs.* 19 th British Combinatorial Conference, Bangor *2003.*

[30] *S. Fitzpatrick and B.L. Hartnell.Paired domination.* Disc. Math. Graph Theory,18 *(1998), 63*

[31] *L.S. Hopkins. Bounds on total domination subdivision numbers,* These Master, East Tennessee State University *(2003).*

[32] *T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater. Fundamentals of domination in graphs.* Marcel Decker, Inc .New York*, (1998).*

[33] *T. W. Haynes,S.T. Hedetniemi et P.J. Slater. Domination in graphs advanced topics.* Marcel Decker, Inc .New York*, (1998).*

[34] *T. W. Haynes, S.T. Hedetniemi et S .M. Hedetniemi. Domination and independence subdivision numbers of graphs (2000)*

[35] *T. W. Haynes, S.T et S .M. Hedetniemi, J.knisely et L.C.Van Der Merwe. Domination subdivision numbers* discussion mathématique graph théory21*(2001) 239-253.*

[36] *T. W. Haynes et P.J. Slater. Paired dominations in graphs.* Networks 32*(1998).*

[37] *T. W. Haynes,S.T.Hedetniemi et L.C. Van derm merwe .total domination subdivision numbers,* J.Comb.Math.comp.44*(2003), 115-128.*

[38] *T. W. Haynes, S.T. Hedetniemi et L.C. Van derm merwe. total domination subdivision in gaphs,* Discuss.Maths.286 *(2004), 195-202.*

[39] *T. W. Haynes, S.T. Hedetniemi et L.C. Van derm merwe .total domination subdivision numbers of trees,* Discrete Math.286 *(2004), 195-202.*

[40] *F. Harary and T. W. Haynes. Double domination in graphs.* Ars Combin. 55 *(2000) 201-213.*

[41] *F. Harary and T. W. Haynes .Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs.* Discrete Math. 155 *(1996) 99.105.*

[42] *F. Harary and T. W. Haynes. The k-tuple domatic number of a graph.* Math. Slovaca 48*(1998), No. 2, 161-166.*

[43] *T.W. Haynes and P. J. Slater. Paired domination and the paired domatic number.* Congressus Numerantium 109 *(1995) 65-72.*

[44] *M. Henning, Graphs with large total domination number.* J. Graph Theory 35(1) *(2000) 21.45.*

[45] *T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, L. C. van Der Merwe. and Total domination Subdivision numbers,*to appear in J. Combin. Math. Combin. Compute

[46] *F. Harary and T.W. Haynes, Double domination in graphs,* Ars Combin. 55 *(2000), 201213.*

[47] *F. Harary and T.W. Haynes, Double domination in graphs,* Ars Combin. 55*(2000), 201213.*

[48] *A. Khodkar, S. Sheikholeslami et H. Zadek. Bounds on douuble dominationnumbers of graphs.*

[49] *S. Klavzer et A. Lipovec .partial cubes as subdivision graphs and generalized Petersen graphs*

[50] *A. Khodkar,S. Sheikholeslami : On perfect double dominating sets in girds, cylinder and tori.*

[51] *H. Karami, A. Khodkar, R. Khoeilary and S.M. Sheikholeslami. trees whose total domination subdivision number is one,* Research supported by the Research Office of Azerbaijan University of Tarbiat.

[52] *L. Kang and M. Sohn .paired domination in inflated graphs.*manuscrit *(2003)*

[53] *C-S Liao and G.J. Chang. k-tuple domination in graphs.* Information Processing Letters 87*(2003) 45-50.*

[54] R. Laskar and K. Peters, Domination and irredundance in graphs. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ*, (1983).*

[55] R. Laskar, J. Pfao, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, On the algorithmic complexity of total domination. SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol. 5, No 3*, september (1984).*

[56] Ore. Theory of graphs. Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I.*(1962).*

[57] C. Payan and N.H. Xuong, Domination-balanced graphs, J. Graph Theory 6*(1982), 23-32.*

[58] H. Qiao, L. Kang, M. Cardei et Ding-zhu . paired domination of trees .Journal of Global Optimization *(2003).*

*[59] D.S. Studer, T.W. Haynes and L.M. Lawson, Induced-paired domination in graphs.*Ars Combinatoria 57 *(2000), 111-128.*