Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques
Pures et Appliquées

THESE
Présentée le 21/11/2004
par

M^{r} OSMANI Haddou

Pour l'obtention du grade de

Magister en Mathématiques
Spécialité: EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Problème Mixte avec Conditions Intégrales pour une Classe d'Equations de type Hyperboliques et Paraboliques d'Ordre Impair

Devant le jury composé de:

Président	M^{r} R Bebbouchi	Professeur	USTHB
Rapporteur	M^{r} M Medjden	Maitre de Conférence	USTHB
Examinateur	M^{r} M Abid	Maitre de Conférence	USTHB
Examinateur	M^{r} M Kessab	Chargé de Cours	USTHB
Examinateur	M^{r} A Kessi	Professeur	USTHB

Table des matières

Partie 1: Introduction.. **01**

Partie 2: Notations et rappels... **04**

Partie 3: Problème mixte avec conditions locales pour une classe d'équations de type parabolique d'ordre cinq (5.).. **09**

3.1 Formulation du problème.. 10

3.2 Espaces fonctionnels associés.. 12

3.3 Inégalité de l'énergie.. 14

3.4 Existence et unicité de la solution.. 18

Partie 4: Problème mixte avec condition intégrale pour une classe d'équations de type parabolique d'ordre cinq (5.).. 19

4.1 Formulation du problème.. 20

4.2 Inégalité de l'énergie.. 21

4.3 Existence d'une solution... 27

4.4 Conclusion.. 40

Partie 5: Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations de type hyperbolique d'ordre impair... **41**

5.1 Formulation du problème.. 42

5.2 Inégalité de l'énergie.. 44

5.3 Existence d'une solution... 53

5.4 Conclusion... 60

Partie 6: Conclusion

Conclusion.. **61**

Références.. **63**

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à monsieur M. Medjden, chargé de Cours pour avoir accepter de diriger ce travail. C'est grâce à son assistance multiforme, à sa disponibilité et à ses conseils que j'ai pu mener à bien ce travail.

J'adresse l'expression de ma gratitude à monsieur R.Bebbouchi pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Que messieurs M. Abid, A. Kessi et A. Kessab qui ont accepté d'examiner ce travail et de faire partie de ce jury, reçoivent l'expression de mes vifs remerciements.

Et bien sûr , mes vifs remerciementd s'adressent à tous ceux et celles qui sont ici présents dans cette salle.

Partie 1

INTRODUCTION

Partie 1
Introduction

Le but de ce travail est l' application de la méthode de l' inégalité d'énergie (appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle ou méthode des estimations à priori.) pour montrer l'unicité de la solution de certains problèmes aux limites.

L'existence est basée sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur linéaire associé à la formulation abstraite du problème.

Cette méthode qui permet de résoudre des problèmes aux limites se base sur les idées de T. Lera, L. Garding , I.G. Petrowsky. Elle a été particulièrement développée par K. Friedrichs, O. A. Ladyzenkaya et N. I. Yurchuk.[3].

La méthode des estimations à priori permet aussi d'établir la dépendance continue de la solution par rapport aux données du problème.

Elle peut être appliquée pour les problèmes aux limites dont les conditions aux limites sont toutes locales, toutes globales, ou mixtes.

Pour les problèmes aux limites avec conditions globales dites aussi intégrales, la signification physique de ces conditions est soit une moyenne, un flux total, une masse totale, une énergie totale ou des moments,

Les questions liées à ce genre de problème sont tellement complexes et variées, que l'élaboration d'une méthode générale est encore prématurée. Et par conséquent, l'étude de ces problèmes exige à chaque fois une etude particulière.

Ce travail est composé de cinq parties:

Partie 1: Une introduction

Partie 2: Elle renferme des notations et des rappels qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

Partie 3: On étudie un problème mixte avec conditions locales pour une classe d'équations de type parabolique d'ordre cinq (5).

Partie 4: On étudie le même problème aux limites avec un changement des conditions aux limites. On remplace une condition locale par une condition globale.

Partie 5: Elle est réservée à l'étude d'un problème mixte avec des conditions intégrales et une condition locale pour une classe d'équations de type hyperbolique d'ordre impair.

Cette étude complète un cycle de problèmes aux limites de type parabolique et hyperbolique d'ordre pair et impair; voir A. Bouziani [2], [3] et M.Medjden , S Mesloub, R.Mezhoudi [15].

Pour ce qui est de la méthode utilisée dans ce travail et dont l'idée principale est celle utilisée dans les travaux de Petrowsky-Leray-Garding, elle consiste à **:**

- Ecrire le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle.

(1) $$Lu = \mathcal{F},\ \ u \in \mathrm{D}(L)$$

où L est un opérateur de l'espace de Banach B dans l'espace de Hilbert F

- Etablir les estimatioins à priori pour l'opérateur L.
- Démontrer la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F.

Plus précisement, on suivra dans ce travail le schéma suivant.

(i) On établit l'estimation de type

$$\|u\|_B \leq C\|Lu\|_F \tag{2}$$

Ce type d'estimation est obtenu en multipliant l'équation considérée par un opérateur intégro-différentiel Mu. Ce procédé a été utilisé pour la 1ère fois par K.O. Friedrichs et H. Leray dans [ ] , O. A. Ladyzenskaya et P. Lax.

(ii) On montre que l'opérateur L de B dans F admet une fermeture $\overline{L}$. La solution de l'équation opérationnelle:

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \quad u \in \mathrm{D}(\overline{L}) \tag{3}$$

sera appelée solution forte du problème considéré. Par passage à la limite, l'estimation (2) sera prolongée à $\overline{L}$,
c'est à dire:

$$\|u\|_B \leq C\|\overline{L}u\|_F \tag{4}$$

Ainsi, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (3) lorsqu'elle existe, l'égalité de $R(\overline{L})$ et $\overline{R(L)}$ et l'inversibilité de $\overline{L}$. L'inverse $(\overline{L})^{-1}$ est défini sur $R(\overline{L})$.

(iii) On établit la densité de $R(L)$ dans F , ce qui prouve l'existence d'une solution forte du problème (1).

Partie 2

NOTATIONS ET RAPPELS.

Partie 2
Notations et rappels.

1. Notations.

Pour $a > 0, T > 0,$ deux nombres réels finis on posera: Q= $(0,a) \times (0,T),$ dans toute la suite Q est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.
On désignera par $\mathcal{C}^k(\mathrm{Q})$ l'espace des fonctions définies sur Q qui admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k inclus, $k \in \mathbb{N}$ et on notera par $\mathcal{D}(\mathrm{Q})$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Q et par $\mathcal{D}'(\mathrm{Q})$ l'espace des distributions définies sur Q.
$L^2(\mathrm{Q})$ est l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables telles que $\int_{\mathrm{Q}} |f|^2 dxdy < +\infty.$ muni du produit scalaire

$$f,g \in \mathrm{L}^2(\mathrm{Q}), \qquad (f,g)_{L^2(Q)} = \int_{\mathrm{Q}} fg\, dxdy.$$

et de la norme

$$\|f\|^2_{L^2(\mathrm{Q})} = \int_{\mathrm{D}} (f)^2 dxdy.$$

$L^2(\mathrm{Q})$ est un espace de Hilbert.
On définira $\mathrm{W}^{m,p}(\mathrm{Q})$ l'espace de Sobolev défini par :

$$\mathrm{W}^{m,p}(\mathrm{Q}) = \left\{ u \in L^2(\mathrm{Q}) \,/\, \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in L^2(\mathrm{Q}), 0 \le i \le m; \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in L^2(\mathrm{Q}), 0 \le j \le p \right\}$$

et la norme associée

$$\|u\|^2_{\mathrm{W}^{m,p}(\mathrm{Q})} = \|u\|^2_{L^2(Q)} + \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right\|^2_{L^2(\mathrm{Q})} + \sum_{j=1}^{p} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|^2_{L^2(\mathrm{Q})} \qquad \text{pour } u \in \mathrm{W}^{m,p}(\mathrm{Q})$$

Etant donné deux espaces de Banach E et F et L unopérateur non borné de E dans F, on notera:

$\mathrm{D}(L) \subset \mathrm{E}$ le domaine de définition de L, $\mathrm{D}(L)$ est un sous-esapce vectoriel de E.

$$G(L) = \bigcup_{u \in D(L)} \{(u, Lu)\} \subset \mathrm{E} \times \mathrm{F}, \text{ le graphe de } L$$

$$R(L) = \bigcup_{u \in D(L)} \{Lu\} \subset F, \text{ l'image de } L$$

Pour un opérateur linéaire L à domaine dense, $\overline{\mathrm{D}(L)} = \mathrm{E},$ on notera L^* l'opérateur adjoint de L.

2 Rappels

2.1 Opérateurs fermables

Soient E et F deux espaces de Banach et L un opérateur de E dans F de domaine $\mathrm{D}(L)$.

Définition 1

On dit que L est fermé si son graphe $G(L)$ est fermé dans $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Définition 2

L'opérateur L est dit fermable s'il est prolongeable en un opérateur fermé.

Proposition 1

Les deux propositions sont équivalentes:

(i) L est fermé.

(ii) Si $(x_n)_n$ est dans $\mathrm{D}(L)$ tel que:

$$\left.\begin{array}{r} x_n \to x \text{ dans E} \\ \text{et} \quad Lx_n \to y \text{ dans F} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \mathrm{D}(L) \\ \text{et} \quad Lx = y \end{array}\right.$$

Proposition 2

Si l'opérateur L est fermable, il existe un opérateur $\overline{L}$ tel que: $G(\overline{L}) = \overline{G(L)}$. L'opérateur $\overline{L}$ est appelé la fermeture de L ($\overline{L}$ est la plus petite extension fermée de L).

Proposition 3

Si L est fermable, on définit $\overline{L}$ par:

$u \in \mathrm{D}(\overline{L})$ si et seulement si, il existe une suite $(u_n)_n$ dans $\mathrm{D}(L)$ tel que:

$u_n \to u$ dans E, $\lim_{n \to +\infty} Lu_n$ existe. On posera dans ce cas

$$\overline{L}u = \lim_{n \to +\infty} Lu_n.$$

2.2 Theorème de l'application ouverte.

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur lineaire continu et surjectif de E sur F, alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$T\Big(B_{\mathrm{E}}(0,1)\Big) \supset B_{\mathrm{F}}(0,C)$$

$B_E(0,1)$ et $B_F(0,C)$ sont les boules ouvertes de E et F respectivement.

Corollaire.

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur lineaire continu et bijectif de E sur F, alors T^{-1} est continu de F dans E.

Opérateur adjoint L^*

Soit $L : \mathrm{D}(L) \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un opérateur non borné à domaine dense. On définit l'opérateur non borné $L^* : \mathrm{D}(L^*) \subset \mathrm{F}' \to \mathrm{E}'$ (F' et E'désignant le dual topologique de F et E respectivement) où:

$$\mathrm{D}(L^*) = \Big\{ v \in \mathrm{F}', \exists C \geq 0 \text{ tel que } |\langle v, Lu \rangle| \leq C\|u\|, \forall u \in \mathrm{D}(L) \Big\}.$$

Il est clair que $\mathrm{D}(L^*)$ est un sous-espace vectoriel de F'. On définit L^*v pour $v \in \mathrm{D}(L^*)$. comme suit.

Etant donné $v \in D(L^*)$, on considère l'application $g : \mathrm{D}(L) \to \mathbb{R}$ définie par:

$$g(u) = \langle v, Lu \rangle, \;\; u \in \mathrm{D}(L)$$

On a:

$$|g(u)| \leq C\|u\|, \; \forall u \in \mathrm{D}(L).$$

Grâce au théorème de Hahn Banach (forme analytique) ou prolongement par continuité, on prolonge g en une application linéaire continue

$$f: \mathrm{E} \to \mathbb{R} \,/\, |f(u)| \leq C\|u\| \;\; \forall u \in \mathrm{E}$$

Par suite $f \in \mathrm{E}'$.

On remarque que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur E et par suite D(L) est dense. On pose $L^*(v) = f \in \mathrm{E}'$. Il est clair que L^* est linéaire, l'opérateur L^* :$\mathrm{D}(L^*) \subset \mathrm{F}' \to \mathrm{E}'$ est appelé l'adjoint de L.

On a la relation fondamentale:

$$\langle v, Lu \rangle_{\mathrm{F}' \times \mathrm{F}} = \left\langle L^* v, u \right\rangle_{\mathrm{E}' \times \mathrm{E}} \;\; \forall u \in \mathrm{D}(L), \forall v \in \mathrm{D}(L^*)$$

Proposition 4

Soit L :$\mathrm{D}(L) \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un opérateur non borné à domaine dense. Alors L^* est fermé, ie. $G(L^*)$ est fermé dans $\mathrm{F}' \times \mathrm{E}'$.

2.4 Opérateurs de régularisation ρ_ε(Cf . Rappels et notations)

$\omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\omega \geq 0$, $\omega = 0$ au voisinage de $t = 0$ et de $t = T$ et à l'extérieur de $(0, T)$, $\int_{\mathbb{R}} \omega(t) = 1$. On définit ρ_ε par:

$$(\rho_\varepsilon u)(x,t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \omega\left(\frac{s-t}{\varepsilon} \right) u(x,t) ds, \quad u \in L^2(Q)$$

L'opérateur de régularisation ρ_ε a les propriétés suivantes:

P$_1$: pour $u \in L^2$(Q) on a:$\rho_\varepsilon u \in \mathcal{C}^\infty$(Q) et est nul dans un voisinage de $t = T$

et $\rho_\varepsilon u \in \mathrm{D}_S(L) = \left\{ u \in \mathrm{D}(L), u = 0 \text{ pour } t \leq s \right\}$

P$_2$: pour $u \in L^2$(Q), alors on a :

$$\|\rho_\varepsilon u - u\|_{L^2(\mathrm{Q})} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \text{ et } \|\rho_\varepsilon u\|_{L^2(\mathrm{Q})} \leq \|u\|_{L^2(\mathrm{Q})}.$$

P$_3$:pour $u \in \mathrm{D}_S(L)$ on a $\frac{\partial^k}{\partial t^k} \rho_\varepsilon u = \rho_\varepsilon \frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ pour $k = 1, 2$.

P$_4$: pour $u \in L^2$(Q), on alors alors $\left\| \frac{\partial}{\partial t}(a(t)\rho_\varepsilon u - a(t)\rho_\varepsilon a(t)u) \right\|_{L^2(\mathrm{Q})} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$

Lemme de Grounwall

Si h_1, h_2 et h_3 sont 3 fonctions non négatives sur $[0, T]$, h_1 et h_2 sont intégrables et h_3 non décroissante, alors de l'inégalité:

$$\int_0^\tau h_1(t)dt + h_2(\tau) \leq h_3(\tau) + C \int_0^\tau h_2(t)dt$$

découle l'inégalité:

$$\int_0^{\tau} h_1(t)dt + h_2(\tau) \leq e^{C\tau} h_3(\tau)$$

Théorème(de représentation de Riez-Fréchet)

Soit H un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est $(.,.)$

Pour tout $\varphi \in \mathrm{H}'$, il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\langle \varphi, v \rangle_{\mathrm{H}' \times \mathrm{H}} = (f, v), \;\; \forall v \in H.$$

De plus, $\|f\|_{\mathrm{H}} = \|\varphi\|_{\mathrm{H}'}$.

2.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \;\; 2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Lemme 1

$$a \in \mathbb{R}, \;\; b \in \mathbb{R} \;\; \text{fixés}, \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \;\; \text{tel que} \begin{cases} \varepsilon a^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} b^2 \;\; \text{pour} \;\; \varepsilon \geq \varepsilon_0 \\ \varepsilon a^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} b^2 \;\; \text{pour} \;\; \varepsilon \leq \varepsilon_0 \end{cases}$$

Preuve :

$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon a^2$ est une fonction croissante sur$[0, +\infty[$ pour $\varepsilon \in [0, +\infty[$

$\psi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} b^2$ est une fonction décroissante de $+\infty$ à 0 pour $\varepsilon \in]0, +\infty[$

les deux graphes des fonctions φ et ψ se coupent en un point d'abscisse ε_0 : ie.$\varphi(\varepsilon_0) = \psi(\varepsilon_0)$

pour $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ Le graphe de φ est au dessus du graphe de ψ c'est-à-dire $\varphi(\varepsilon) \geq \psi(\varepsilon)$

pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ le graphe de φ est en dessous du graphe de ψ c'est- à-dire $\varphi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon)$ cqfd.

Partie 3

PROBLEME POUR UNE CLASSE D’EQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE D’ORDRE CINQ (05) AVEC CONDITIONS LOCALES.

Partie 3
PROBLEME POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE D'ORDRE CINQ (05) AVEC CONDITIONS LOCALES.

3.1 Formulation du problème.

On se propose de résoudre le problème suivant:

$(1,1)\quad Lu = u_t - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a(x,t)\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}u \right] = f(x,t),\ (x,t)\in Q= \big(0,1\big)\times\big(0,T\big)$

$(1,2)\quad u(x,0) = \varphi(x),\ \ \forall x \in (0,1)$

$(1,3)\quad u(0,t) = u(1,t) = 0,\ \ \forall t \in (0,T)$

$(1,4)\quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ \ \forall t \in (0,T)$

$(1,5)\quad u_{xx}(1,t) = 0,\ \forall t \in (0,T)$

$(H)\qquad 0 < C_{00} \le a(x,t),\ \ 0\langle C_{10} \le a_x(x,t) \qquad a(1,t) = 0\ \ \forall (x,t) \in Q.$

On supposera que la fonction φ est compatible avecles conditions $(1,3)-(1,5)$.
On commencera alors par transformer le problème:$(1,1)-(1,5)$ en un problème homogéne-Soit alors : $v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x) \qquad \forall (x,t) \in Q$

$(1,6)\qquad Lv = v_t - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a(x,t)\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}v \right] = f_1(x,t)$

$(1,7)\qquad v(x,0) = 0 \qquad \forall x \in (0,1)$

$(1,8)\qquad v(0,t) = v(1,t) = 0 \qquad \forall t \in (0,T)$

$(1,9)\qquad v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 \qquad \forall t \in (0,T)$

$(1,10)\quad v_{xx}(1,t) = 0 \qquad \forall t \in (0,T)$

Parallélement au problème $(1,6)-(1,10)$, on considérera son problème dual.On note L^* le dual formel de L que l'on définit par rapport au produit scalaire dans $L^2\big(Q\big)$. Soit alors: v une fonction vérifiant $(1,6)-(1,10)$. et w une fonction définie sur Q suffisament régulière par rapport aux deux variables t et x. La relation fondamentale donne:

$$(Lv,w)_{L^2(Q)} = \big(v,L^*w\big)_{L^2(Q)}$$

$$(Lv,w)_{L^2(Q)} = \int_Q \left[v_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)v_{xxx}) \right] w\,dxdt.$$

On calcule séparément:

$$I = \int_Q v_t w\, dxdt$$

$$= \int_0^1 vw\rfloor_{t=0}^{t=T} dx - \int_Q vw_t dxdt = \int_0^1 v(x,T)w(x,T)dx - \int_Q vw_t dxdt$$

$$= -\int_0^1 vw_t dxdt \qquad \text{pour } w(x,T) = 0$$

$$J = -\int_Q \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)v_{xxx}) \right] w dxdt$$

$$= -\int_0^T \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)v_{xxx})w\rfloor_{x=0}^{x=1} dt + \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)v_{xxx}) \right] w_x dxdt$$

$$= \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)v_{xxx}) \right] w_x dxdt \quad \text{pour } w(0,t) = w(1,t) = 0$$

$$J = \int_s^T (a(x,t)v_{xxx})w_x\rfloor_{x=0}^{x=1} dt - \int_Q (a(x,t)v_{xxx})w_{xx} dxdt$$

$$= -\int_Q (a(x,t)v_{xxx})w_{xx} dxdt \quad \text{pour} \quad w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0$$

$$J = -\int_0^T v_{xx}[a(x,t)w_{xx}]\rfloor_{x=0}^{x=1} dt + \int_Q v_{xx}[a_x(x,t)w_{xx} + a(x,t)w_{xxx}]dxdt$$

$$= \int_Q v_{xx}[a_x(x,t)w_{xx} + a(x,t)w_{xxx}]dxdt, \quad \text{pour } v_{xx}(1,t) = 0 \text{ et } w_{xx}(0,t) = 0.$$

En utilisant uniquement les conditions aux limites pour la fonction v. On a alors:

$$J = \int_0^T v_x[a_x(x,t)w_{xx} + a(x,t)w_{xxx}]_{x=0}^{x=1} dt$$
$$- \int_Q v_x[a_{xx}(x,t)w_{xx} + 2a_x(x,t)w_{xxx} + a(x,t)w_{xxxx}]dxdt$$

$$= - \int_Q v_x[a_{xx}(x,t)w_{xx} + 2a_x(x,t)w_{xxx} + a(x,t)w_{xxxx}]dxdt$$

$$= -\int_0^T v[a_{xx}(x,t)w_{xx} + 2a_x(x,t)w_{xxx} + a(x,t)w_{xxxx}]_{x=0}^{x=1} dt$$
$$+\int_Q v[a_{xxx}(x,t)w_{xx}+3a_{xx}(x,t)w_{xxx}+3a_x(x,t)w_{xxxx}+a(x,t)w_{xxxxx}]dxdt$$

$$= \int_Q v[a_{xxx}(x,t)w_{xx} + 3a_{xx}(x,t)w_{xxx} + 3a_x(x,t)w_{xxxx} + a(x,t)w_{xxxxx}]dxdt$$

Comme:

$$(Lv,w)_{L^2(Q)} = I + J$$

$$= \int_Q (-w_t + a_{xxx}(x,t)w_{xx} + 3a_{xx}(x,t)w_{xxx} + 3a_x(x,t)w_{xxxx} + a(x,t)w_{xxxxx}v)dxdt$$

$= \left(v, L^* w\right)_{L^2(Q)}$ pour: $w(x,T) = 0$

$w(0,t) = w(1,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T)$

$w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T)$

$w_{xx}(0,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T)$

On remarquera que:

$$a_{xxx}(x,t)w_{xx} + 3a_{xx}(x,t)w_{xxx} + 3a_x(x,t)w_{xxxx} + a(x,t)w_{xxxxx}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}[a(x,t)w_{xxx}] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[a_x(x,t)w_{xx}] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[a(x,t)w_{xxx} + a_x(x,t)w_{xx}]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)w_{xx})\right] = \frac{\partial^3}{\partial x^3}[a(x,t)w_{xx}]$$

Par suite:

$$(Lv,w)_{L^2(Q)} = \int_Q v\left[-w_t + \frac{\partial^3}{\partial x^3}[a(x,t)w_{xx}]\right]dxdt = \left(v, L^* w\right)_{L^2(Q)}$$

Le problème dual au problème $(1,6)-(1,10)$ est alors:

$(1,11)\quad L^* w = -w_t + \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}[a(x,t)w_{xx}] = g$

$(1,12)\quad w(x,T) = 0$

$(1,13)\quad w(0,t) = w(1,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T)$

$(1,14)\quad w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T)$

$(1,15)\quad w_{xx}(0,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T).$

3.2 Espaces fonctionnels associés.

Le domaine de définition de l'opérateur L, est un sous espace de l'espace de Sobolev:

$$W^{5,1}(Q) = \left\{v \in L^2(Q) / \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(Q), \frac{\partial^i}{\partial x^i}v \in L^2(Q), i = \overline{1,5}\right\}$$

défini par:

$D(L) = \left\{v \in W^{5,1}(Q),\ \text{vérifiant : } (1,7)-(1,10)\right\}$ noté par $\overset{0}{W}{}^{5,1}(Q)$

De même le domaine de définition de l'opérateur L^* est un sous espace de $W^{5,1}(Q)$ défini par $D(L^*) = \left\{v \in W^{5,1}(Q), \text{vérifiant : } (1,12)-(1,15)\right\}$, il est noté par :$W_0^{5,1}(Q)$

Soit E la fermeturede $C_0^{5,1}(Q)$ l'ensemble des u tel que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, i = \overline{1,5}$, soient continues et à support compact dans Q par rapport à la norme**:**

$(1,16)\qquad \|v\|_E^2 = \int_Q (v)^2 dxdt + \int_Q (T-t)(v_{xx})^2 dxdt.$

Soit E_0 le sous-espace de E dont les éléments vérifient: $v(0,t) = v(1,t) = 0$,$v_x(0,t) = v_x(1,t)$. et $v_{xx}(1,t) = 0, \forall t \in (0,T)$.

Et soit F le dual topologique de E_0 : ie: $F = \left(E_0\right)'$ par rapport à la forme bilinéaire: $\langle u,v\rangle_{\left(E_0\right)' \times \left(E_0\right)}$, qui est un prolongement par continuité de la forme bilinéaire $(u,v)_{L^2(Q)\times E_0}$.

Définition1.

La solution du problème $(1,6)-(1,10)$ sera considérée comme la solution de l'équation opérationnelle:

$(1,17) \qquad Lv = f_1 \qquad v \in D(L)$.

La solution du problème $(1,11)-(1,15)$ sera considérée comme la solution de l'équation opérationnelle:

$(1,18) \qquad L^* w = g \qquad w \in D\left(L^*\right)$.

Pour résoudre l'équation $(1,17)$ pour tout $f_1 \in F$ on utilise la méthode classique qui consiste à construire un prolongement $\widetilde{L}$ de l'opérateur L tel que:
$R\left(\widetilde{L}\right) = F$ ie $\widetilde{L}$ est surjectif et par suite inversible.

Pour cela on considére l'application:

$(1,19) \qquad w \to \Phi(v,w) = \left(v, L^* w\right) \qquad \forall w \in D\left(L^*\right) \qquad$ définie sur $W_0^{5,1}(Q)$

une fonction $v \in \overset{\circ}{W}{}^{5,1}(Q)$ sera considérée comme un élément de ce prolongement ie $v \in D\left(\widetilde{L}\right)$ si l'application $(1,19)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $W_0^{5,1}(Q)$ qui est dense dans E_0 muni de la norme sur E. Alors la fonctionnelle $\Phi(v,w)$ admet un prolongement par continuité noté encore $\Phi(v,w)$ sur tout E_0

Le théorème de Riez-Fréchet sur la représentation des fonctionnelles linéaires sur les espaces de Hilbert donne:-il existe un et un seul élément noté: $\widetilde{L}v \in F$ tel que

$$\Phi(v,w) = \left\langle \widetilde{L}v, w\right\rangle_{F\times E_0} \qquad \forall v \in D\left(\widetilde{L}\right) \text{ et } \forall w \in E_0$$

La norme de $\widetilde{L}v$ dans F est définie par:

$$\left\|\widetilde{L}v\right\|_F = \sup_{w\in W_0^{5,1}} \frac{|\Phi(v,w)|}{\|w\|_E}$$

De manière identique, de la forme bilinéaire**:**

$$\Psi(u,v) = (Lv,w) \qquad \forall v \in D(L),$$

on construit un prolongement $\widetilde{L^*}$ *de* L^*. Une fonction $w \in W_0^{5,1}(Q)$ sera considérée comme un élément de $D\left(\widetilde{L^*}\right)$ si l'application: $v \to \Psi(v,w) = (Lv,w)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\overset{\circ}{W}{}^{5,1}(Q)$ qui est dense dans E_0. Alors l'application $\Psi(v,w)$ admet un prolongement par continuité à tout E_0. Par suite il existe un et un seul élément $\widetilde{L^*}w \in F$ tel que:

$$\Psi(v,w) = \left\langle v, \widetilde{L^*} w \right\rangle_{E_0\times F}, \qquad \forall w \in D\left(\widetilde{L^*}\right) \text{ et } \forall v \in E_0.$$

Il est évident que $\widetilde{L}$ et $\widetilde{L^*}$ ainsi construits sont des prolongements de L et L^* respectivement .

Définition2.0

La solution de l'équation opérationnelle: $\widetilde{L}v = f_1,\ v \in D\left(\widetilde{L}\right)$ est appelée solution généralisée du problème $(1,6)-(1,10)$ et la solution de l'équation opérationnelle $\widetilde{L^*}w = g,\ w \in D\left(\widetilde{L^*}\right)$ est appelée solution généralisée du problème $(1,11)-(1,15)$.

3.3 Inégalités de l'énergie.

La résolution des problèmes $(1,6)-(1,10)$ et $(1,11)-(1,15)$ dans la formulation faible est basée sur les inégalités de l'énergie pour les opérateurs $\widetilde{L}$ et $\widetilde{L^*}$.

Théorème.

Si les conditions (H) sont satisfaites, on a les estimations suivantes:

$(3,1)$ $\quad \exists C>0$ tel que: $\|v\|_E \leq C\left\|\widetilde{L}v\right\|_F \qquad \forall v \in D\left(\widetilde{L}\right)$

$(3,2)$ $\quad \exists C^*>0$ tel que: $\|w\|_E \leq C^*\left\|\widetilde{L^*}w\right\|_F \qquad \forall w \in D\left(\widetilde{L^*}\right)$.

avec C et C^* des constantes independantes de v et w.

Preuve:

On commence par établir $(3,1)$ pour les fonctions $v \in D(L)$ c'est à dire pour les fonctions suffisament réguliéres. Dans ce cas on a la forme bilinéaire

$$\Phi(u,v) = (Lv,w)_{L^2(Q)} \qquad \forall v \in D(L).$$

On prend alors : $w(x,t) = (T-t)v = Mv$.

$$(Lv,(T-t)v) = \int_Q \left[v_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)v_{xxx}) \right](T-t)v\,dxdt = I + J$$

avec:

$$I = \int_Q v_t(T-t)v\,dxdt = \frac{1}{2}\int_Q (T-t)\frac{\partial}{\partial t}(v)^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (T-t)(v)^2 \Big]_{t=0}^{t=T} dx + \frac{1}{2}\int_Q (v)^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_Q (v)^2 dxdt \qquad \text{car: } v(x,0) = 0$$

et:

$$J = -\int_Q \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)v_{xxx}) \right](T-t)v\,dxdt$$

$$= -\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)v_{xxx}) \right](T-t)v \Big]_{x=0}^{x=1} dt + \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)v_{xxx}) \right](T-t)v_x dxdt$$

$$= \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)v_{xxx}) \right](T-t)v_x dxdt.$$

Par suite:

$$J = \int_s^T (a(x,t)v_{xxx})(T-t)v_x \Big]_{x=0}^{x=1} dt - \int_Q a(x,t)v_{xxx}(T-t)v_{xx} dxdt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_Q a(x,t)(T-t)\frac{\partial}{\partial x}(v_{xx})^2 dxdt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^T a(x,t)(T-t)(v_{xx})^2 \Big]_{x=0}^{x=1} dt + \frac{1}{2} \int_Q a_x(x,t)(T-t)(v_{xx})^2 dxdt$$

donc**:**

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T a(0,t)(T-t)(v_{xx}(0,t))^2 dt + \frac{1}{2} \int_Q a_x(x,t)(T-t)(v_{xx})^2 dxdt$$

On a alors**:**

$$(Lv,(T-t)v) = \frac{1}{2} \int_Q (v)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T a(0,t)(T-t)(v_{xx}(0,t))^2 dt + \frac{1}{2} \int_Q a_x(x,t)(T-t)(v_{xx})^2 dxdt$$

Comme**:**

$$\frac{1}{2} \int_0^T a(0,t)(T-t)(v_{xx}(0,t))^2 dt \geq 0, \qquad a_x(x,t) \geq C_{10} > 0,$$

on a d'une part**:**

$$\frac{1}{2} \int_Q (v)^2 dxdt + \frac{C_{10}}{2} \int_Q (T-t)(v_{xx})^2 dxdt \leq (Lv,(T-t)v)_{L^2(Q)}$$

et d'autre part**:**

$$(Lv,(T-t)v)_{L^2(Q)} = \int_Q f_1 (T-t)v dxdt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_Q (T-t)^2 f_1^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_Q (v)^2 dxdt \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Pour $\varepsilon = 2$**:**

$$(Lv,(T-t)v)_{L^2(Q)} \leq \int_Q (T-t)^2 f_1^2 dxdt + \frac{1}{4} \int_Q (v)^2 dxdt$$

il s'ensuit alors:

$$\frac{1}{4}\int_Q (v)^2 dxdt + \frac{C_{10}}{2}\int_Q (T-t)(v_{xx})^2 dxdt \leq T^2 \int_Q \left(f_1\right)^2 dxdt.$$

ie: $$\int_Q (v)^2 dxdt + \int_Q (T-t)(v_{xx})^2 dxd \leq \frac{T^2}{\min\left(\frac{1}{4},\frac{C_{10}}{2}\right)}\int_Q (Lv)^2 dxdt$$

c'est à dire: $\|v\|_E^2 \leq C\|Lv\|_F^2.$

Pour l'opérateur L^* , l'opérateur multiplicateur est: $M^*w = (T+t)w.$

$$\left(L^*w,(T+t)w\right)_{L^2(Q)} = \int_Q \left[-w_t + \frac{\partial^3}{\partial x^3}(a(x,t)w_{xx})\right](T+t)wdxdt$$

$$= I^* + J^*$$

avec:

$$I^* = \int_Q (-w_t)(T+t)wdxdt = -\frac{1}{2}\int_Q (T+t)\frac{\partial}{\partial t}(w)^2 dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^1 (T+t)(w)^2\rfloor_{t=0}^{t=T} dx + \frac{1}{2}\int_Q (w)^2 dxdt$$

$$= \frac{T}{2}\int_0^1 (w(x,0))^2 dx + \frac{1}{2}\int_Q (w)^2 dxdt \qquad \text{car } w(x,T) = 0.$$

$$J^* = \int_Q \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}(a(x,t)w_{xx})\right](T+t)wdxdt$$

$$= \int_0^T \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)w_{xx})\right](T+t)w\rfloor_{x=0}^{x=1} dt - \int_Q \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)w_{xx})\right](T+t)w_x dxdt$$

$$= -\int_Q \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)w_{xx})\right](T+t)w_x dxdt, \qquad \text{car: } w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T).$$

$$= -\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)w_{xx})\right](T+t)w_x\rfloor_{x=0}^{x=1} dt + \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)w_{xx})\right](T+t)w_{xx} dxdt$$

$$= \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)w_{xx})\right](T+t)w_{xx} dxdt, \qquad \text{car } w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T).$$

$$J^* = \int_0^T [(a(x,t)w_{xx})](T+t)w_{xx}\rfloor_{x=0}^{x=1} dt - \int_Q [(a(x,t)w_{xx})](T+t)w_{xxx} dxdt$$

$$= -\int_Q [(a(x,t)w_{xx})](T+t)w_{xxx} dxdt = -\frac{1}{2}\int_Q (a(x,t))(T+t)\frac{\partial}{\partial x}(w_{xx})^2 dxdt$$

car $a(1,t) = 0$ et $w_{xx}(0,t) = 0 \qquad \forall t \in (0,T)$.

Par suite**:**

$$J^* = -\frac{1}{2}\int_0^T a(x,t)(T+t)(w_{xx})^2 \Big|_{x=0}^{x=1} dt + \frac{1}{2}\int_Q a_x(x,t)(T+t)(w_{xx})^2 dxdt.$$
$$= \frac{1}{2}\int_Q a_x(x,t)(T+t)(w_{xx})^2 dxdt,$$

car $a(1,t) = 0$ et $w_{xx}(0,t) = 0$, $\forall t \in (0,T)$.

Donc**:**

$$\left(L^* w, (T+t)w\right)_{L^2(Q)} = \frac{T}{2}\int_0^1 (w(x,0))^2 dx + \frac{1}{2}\int_Q (w)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q a_x(x,t)(T+t)(w_{xx})^2 dxdt.$$

Comme**:**

$$\frac{T}{2}\int_0^1 (w(x,0))^2 dx \geq 0,$$

$$a_x(x,t)(T+t)(w_{xx})^2 \geq a_x(x,t)(T-t)(w_{xx})^2 \geq C_{10}(T-t)(w_{xx})^2 > 0,$$

il en résulte d'une part:

$$\frac{1}{2}\int_Q (w)^2 dx + \frac{C_{10}}{2}\int_Q (T-t)(w_{xx})^2 dxdt \leq \left(L^* w, (T+t)w\right)_{L^2(Q)}$$

d'autre part:

$$\left(L^* w, (T+t)w\right)_{L^2(Q)} = \int_Q g(T+t)w dxdt$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_Q g^2(T+t)^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_Q (w)^2 dxdt \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Pour $\varepsilon = 2$,on a alors:

$$\frac{1}{4}\int_Q (w)^2 dxdt + \frac{C_{10}}{2}\int_Q (T-t)(w_{xx})^2 dxdt$$
$$\leq \int_Q g^2(T+t)^2 dxdt$$
$$\leq \int_Q g^2(T+T)^2 dxdt = 4T^2\int_Q g^2 dxdt = 4T^2\int_Q \left(L^* w\right)^2 dxdt.$$

Par suite:

$$\int_Q (w)^2 dxdt + \int_Q (T-t)(w_{xx})^2 dxdt \leq \frac{4T^2}{\min\left(1, \frac{C_{10}}{2}\right)}\int_Q \left(L^* w\right)^2 dxdt$$

ie: $\exists C^* = \dfrac{4T^2}{\min\left(1, \frac{C_{10}}{2}\right)} > 0$ et indépendante de w telle que:

$$\|w\|_E^2 \leq C^* \|L^* w\|_F^2 \qquad \forall w \in D\left(L^*\right).$$

Pour établir les inégalités de l'énergie relatives à $\widetilde{L}$ et $\widetilde{L^*}$, il suffit d'utiliser les opérateurs de régularisation de Friedrichs classiques. On a alors

$$\|v\|_E^2 \le C\left\|\tilde{L}v\right\|_F^2 \qquad \forall v \in D\left(\tilde{L}\right)$$

$$\|w\|_E^2 \le C^*\left\|\widetilde{L^*}w\right\|_F^2 \qquad \forall w \in D\left(\widetilde{L^*}\right)$$

3.4 Existence et unicité de la solution

Théorème 4

Pour tout $f_1 \in \mathrm{F}$ $\left(\text{resp : } g \in \mathrm{F}\right)$ il existe une et une solution au problème $(1,6)-(1,10)$ (respectivement $(1,11)-(1,15)$).

Preuve:

L'inégalité $(3,1)$ assure l'unicité de la solution (immédiate) et la fermeture de $R\left(\tilde{L}\right)$ dans F

En effet, soit $\left(f_k\right)_k$ une suite de Cauchy dans F avec $f_k \in R\left(\tilde{L}\right)$, $f_k \in R\left(\tilde{L}\right) \Rightarrow \exists v_k \in D\left(\tilde{L}\right)$ tel que $\tilde{L}v_k = f_k$.

$\|v_k - v_l\| \le C\left\|\tilde{L}\left(v_k - v_l\right)\right\| = \|f_k - f_l\| \to 0$, quand $k, l \to +\infty \Rightarrow \left(v_k\right)_k$ est de Cauchy dans E, comme E est complet, il en résulte que $\exists v \in$ E tel que $v_k \to v$ quand $k \to +\infty$ dans E

De plus l'application: $w \to \Phi\left(v_k, w\right)$ est continue dans $E_0, \forall k \in \mathbb{N}$ Ce qui implique que $w \to \Phi(v, w)$ est continue dans E_0, qui définit l'élément f par: $\tilde{L}v = f$, $\left(f_k \to f, \text{ qd. } k \to +\infty\right)$ Donc $R\left(\tilde{L}\right)$ est fermé dans F.

Pour montrer la densité de $R\left(\tilde{L}\right)$ dans F, il suffit de montrer que l'orthogonal de $R\left(\tilde{L}\right)$ dans F est réduit à l'élément nul dans F.

Soit $w \in$ F tel que: $\left\langle \tilde{L}v, w\right\rangle = 0 \qquad \forall v \in D\left(\tilde{L}\right)$

Pour: $v \in D(L)$ et $w \in$ F on a : $(Lv, w) = \left(v, L^* w\right) = 0$, l'inégalité $(3,2)$ entraine que $w = 0$ dans F, $\forall v \in D(L)$

On applique le même raisonnement pour le problème dual $(1,11)-(1,15)$.

Partie 4
PROBLÈME MIXTE AVEC CONDITION INTÉGRALE POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE D'ORDRE CINQ (05)

Partie 4
PROBLÈME MIXTE AVEC CONDITION INTÉGRALE POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE D'ORDRE CINQ (05)

4.1 Formulation du problème

On se propose de résoudre le problème suivant:

(1.1) $$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = f(x,t)$$

avec $(x,t) \in$ Q $=(0,1)\times(0,T)$ et T fini, $u = u(x,t)$

(1.2) $$\ell u = u(x,0) = \varphi(x), \qquad \forall x \in (0,1)$$

(1.3) $$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad \forall t \in (0,T)$$

(1.4) $$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \qquad \forall t \in (0,T)$$

(1.5) $$\int_0^1\int_0^\xi u(\eta,t)d\eta d\xi = \mathcal{I}_1^2 u(x,t) = 0$$

La fonction $a(x,t)$ admet des dérivées généralisées bornées:

(1.6) $$0 \le C_{i,j} \le a_{\underbrace{x\ldots x}_{i}\underbrace{t\ldots t}_{j}}(x,t) \le \overline{C_{i,j}} \quad \text{et} \quad a(1,t) = 0$$

où i désigne le nombre de dérivations de a par rapport à x.
j désigne le nombre de dérivations de a par rapport à t

Le problème (1.1) et (1.5) peut être ramené à une équation fonctionnelle

(1.7) $$Lu = \mathcal{F}$$

où L est l'opérateur $L = (\mathcal{L},\ell)$ et $\mathcal{F} = (f,\varphi)$.

L est défini sur son domaine:

$$\mathrm{D}(L) = \left\{u \in W^{5,1}(Q) / \ u_{tx},\ u_{txx} \in L^2(\mathrm{Q}) \text{ et vérifient (1.3), (1.4) et (1.5)}\right\}$$

Le complété de D(L) muni de la norme:

(1.8) $$\|u\|_{\mathrm{B}}^2 = \sup_{s\in[0,T]}\left(\int_0^1 (u(x,s))^2 dx\right) + \int_{\mathrm{Q}}(u_x(x,t))^2 dxdt + \int_{\mathrm{Q}}(u_{xx}(x,t))^2 dxdt$$

est un espace de Banach noté B.

Soit F l'espace de Hilbert défini par:

$$\mathrm{F} = \left\{\mathcal{F} = (f,\varphi) \in L^2(\mathrm{Q}) \times L^2(0,1) / \ \|\mathcal{F}\|_{\mathrm{F}} \langle +\infty\right\}$$

F est muni de produit scalaire:

$$\left(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\right)_{F\times F} = \left((f_1,\varphi_1),(f_2,\varphi_2)\right)_{F\times F} = \left(f_1,f_2\right)_{L^2(Q)} + \left(\varphi_1,\varphi_2\right)_{L^2(0,1)}.$$

et de la norme

$$\|\mathcal{F}\|^2_{F} = (\mathcal{F},\mathcal{F})_{F\times F} = ((f,\varphi),(f,\varphi))_{F\times F} = \|f\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,1)}. \tag{1.9}$$

L'opérateur L est défini sur l'espace de Banach B et à valeurs dans l'espace de Hilbert F.

4.2 Inégalité de l'énergie.

Pour $0 < s < T$, posons $Q_s = (0,1)\times(0,s)$. et calculons à l'aide d'intégrations par parties et des conditions (1.2)–(1.6), le produit scalaire $(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q_s)}$ où $Mu = u$.

$$(\mathcal{L}u,Mu)_{L^2(Q_s)} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right), u\right)_{L^2(Q_s)}$$

$$= \left(u_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)u_{xxx}), u\right)_{L^2(Q_s)}$$

$$I = (u_t,u)_{L^2(Q_s)} = \int_{Q_s} u_t.u\, dxdt = \frac{1}{2}\int_{Q_s}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (u(x,t))^2\Big|_{t=0}^{t=s} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[(u(x,s))^2 - (u(x,0))^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (u(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1(\varphi(x))^2 dx.$$

$$J = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)u_{xxx}), u\right)_{L^2(Q_s)} = -\int_{Q_s}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)u_{xxx}).u\, dxdt$$

$$= -\int_0^s \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u_{xxx}).u\Big|_{x=0}^{x=1} dt + \int_{Q_s}\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u_{xxx}).u_x dxdt$$

$$= -\int_0^s a(x,t)u_{xxx}.u_x|_{x=0}^{x=1} dt - \int_{Q_s} a(x,t)u_{xxx}.u_{xx} dxdt = -\int_{Q_s} a(x,t)u_{xxx}.u_{xx}dxdt$$

Par suite:

$$J = -\int_{Q_s} a(x,t)u_{xxx}.u_{xx}dxdt = -\frac{1}{2}\int_{Q_s} a(x,t)\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx})^2 dxdt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^s a(x,t)(u_{xx})^2\Big|_{x=0}^{x=1} dt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} a_x(x,t)(u_{xx})^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^s a(0,t)(u_{xx}(0,t))^2 dt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} a_x(x,t)(u_{xx})^2 dxdt$$

$$(f,Mu) = \int_{Q_s} f(x,t)u(x,t)dxdt \le \frac{1}{2}\int_{Q_s}(f(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s}(u(x,t))^2 dxdt$$

En regroupant les résultats ci-dessus, on a:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1(\varphi(x))^2 dx. + \frac{1}{2}\int_0^s a(0,t)(u_{xx}(0,t))^2 dt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} a_x(x,t)(u_{xx})^2 dxdt$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{Q_s}(f(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s}(u(x,t))^2 dxdt$$

Comme $\int_0^s a(0,t)(u_{xx}(0,t))^2 dt \ge 0$ et $C_{10} \le a_x(x,t) \le \overline{C_{10}}$, l'inégalité ci-dessus s'écrit alors:

$$(2.1)\quad \frac{1}{2}\int_0^1 (u(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1(\varphi(x))^2 dx + \frac{1}{2}\int_{Q_s} a_x(x,t)(u_{xx})^2 dxdt$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{Q_s}(f(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s}(u(x,t))^2 dxdt$$

Lemme 2

Pour tout $u \in$ B, on a : $\int_{Q_s}(u_x(x,t))^2 dxdt \le \frac{1}{2}\int_{Q_s}(u_{xx}(x,t))^2 dxdt$

Preuve

$$[u_x(x,t)]^2 = [u_x(x,t) - u_x(0,t)]^2 = \left(u_x(\xi,t)\Big|_{\xi=0}^{\xi=x}\right)^2 = \left(\int_0^x u_{xx}(\xi,t)d\xi\right)^2$$

$$\le \left(\int_0^x 1^2 d\xi\right)\left(\int_0^x (u_{xx}(\xi,t))^2 d\xi\right)$$

$$\le x\int_0^x (u_{xx}(\xi,t))^2 d\xi \le x\int_0^1 (u_{xx}(\xi,t))^2 d\xi.$$

$$\int_0^1 (u_x(x,t))^2 dx \le \int_0^1\left[x\int_0^1 (u_{xx}(\xi,t))^2 d\xi\right]dx = \left(\int_0^1 (u_{xx}(\xi,t))^2 d\xi\right)\left(\int_0^1 x dx\right)$$

par suite : $\int_0^1 (u_x(x,t))^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (u_{xx}(\xi,t))^2 d\xi = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_{xx}(x,t))^2 dx$

c.à.d: $\int_{Q_s} (u_x(x,t))^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\int_{Q_s} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt$

En utilisant le lemme 2 ci-dessus on peut minorer le terme $\int_{Q_s} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt$ de (2.1).

$$\frac{1}{2}\int_{Q_s} a_x(x,t).(u_{xx}(x,t))^2 dxdt \geq \frac{1}{2}C_{10}\int_{Q_s} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt$$

$$\geq \frac{1}{4}C_{10}\int_{Q_s} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{4}C_{10}\int_{Q_s} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt$$

(2.2) $\frac{1}{2}\int_{Q_s} a_x(x,t).(u_{xx}(x,t))^2 dxdt$

$$\geq \frac{1}{4}C_{10}\int_{Q_s} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{2}C_{10}\left[\int_{Q_s} (u_x(x,t))^2 dxdt\right]$$

En remplaçant (2.2) dans (2.1) on a:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi(x))^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2}C_{10}\int_{Q_s} (u_x(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{4}C_{10}\int_{Q_s} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{Q_s} (f(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} (u(x,t))^2 dxdt$$

c'est–à-dire:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u(x,s))^2 dx + \frac{1}{2}C_{10}\int_{Q_s} (u_x(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{4}C_{10}\int_{Q_s} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{Q_s} (f(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi(x))^2 dx + \frac{1}{2}\int_{Q_s} (u(x,t))^2 dxdt.$$

donc il existe une constante $C > 0$ indépendante de u telle que :

(2.3) $\int_0^1 (u(x,s))^2 dx + \int_{Q_s} (u_x(x,t))^2 dxdt + \int_{Q_s} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt$

$$\leq C\left[\int_{Q_s}(f(x,t))^2dxdt+\int_0^1(\varphi(x))^2dx\right]+C\int_{Q_s}(u(x,t))^2dxdt.$$

avec $C=\dfrac{\frac{1}{2}}{\min\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}C_{10}\right)}$.

En posant:

$$h_1(t)=\int_0^1(u_x(x,t))^2dx+\int_0^1(u_{xx}(x,t))^2dx$$

$$h_2(s)=\int_0^1(u(x,s))^2dx$$

$$h_3(s)=\int_{Q_s}(f(x,t))^2dxdt+\int_0^1(\varphi(x))^2dx$$

l’inégalité (2.3) s’écrit :

$$\int_0^s h_1(t)dt+h_2(s)\leq Ch_3(s)+C\int_0^s h_2(t)dt.$$

Par le lemme de Grounwall on a:

$$\int_0^s h_1(t)dt+h_2(s)\leq C.(\exp(Cs)).(Ch_3(s))\ =C^2(h_3(s))\exp(Cs).$$

c’est-à-dire

$$\int_0^1(u(x,s))^2dx+\int_{Q_s}(u_x(x,t))^2dxdt+\int_{Q_s}(u_{xx}(x,t))^2dxdt$$

$$\leq C^2e^{CT}\left[\int_{Q_s}(f(x,t))^2dxdt+\int_0^1(\varphi(x))^2dx\right].$$

$\forall s\in(0,T)$

Donc, il existe $K>0$, $K=C^2e^{CT}$, tel que

$$\sup_{s\in[0,T]}\left(\int_0^1(u(x,s))^2dx\right)+\int_Q(u_x(x,t))^2dxdt+\int_Q(u_{xx}(x,t))^2dxdt$$

$$\leq K\left[\int_Q(f(x,t))^2dxdt+\int_0^1(\varphi(x))^2dx\right].$$

c'est-à-dire

(2.4) $$\|u\|_B^2 \le K\|Lu\|_F^2 \quad \text{pour tout } u \in D(L).$$

Lemme 3

L'opérateur L admet une fermeture $\overline{L}$.

Preuve

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que:

(2.5) $$u_n \longrightarrow 0 \ \text{ dans B}$$

(2.6) $$Lu_n \longrightarrow \mathcal{F} = (f, \varphi) \ \text{ dans F}$$

il s'agit de montrer que $f = 0$ et $\varphi = 0$.

La convergence de u_n vers 0 dans B entraîne que

(2.7) $$u_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q)$$

D'aprés la continuité de la dérivation de $\mathcal{D}'(Q)$ dans $\mathcal{D}'(Q)$, (2.7) entraîne

(2.8) $$\mathcal{L}u_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q)$$

D'autre part la convergence de $\mathcal{L}u_n$ vers f dans $L^2(Q)$ implique :

(2.9) $$\mathcal{L}u_n \longrightarrow f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q)$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q)$, on conclut de (2,8) et (2,9) que $f = 0$.

Par ailleurs il vient de (2.6) que :

(2.10) $$\ell u_n \longrightarrow \varphi \text{ dans } L^2(0,1)$$

Comme l'injection canonique de $L^2(0,1)$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$ est continue, on déduit de (2.10) que:

(2.11) $$\ell u_n \longrightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D}'(0,1)$$

D'autre part, comme

$$\|\ell u_n\|_{L^2(0,1)} \le \|u_n\|_B, \quad \forall n$$

on en déduit, compte tenu de (2.5) que

(2.12) $$\ell u_n \longrightarrow \varphi \text{ dans } L^2(0,1)$$

par suite

(2.13) $$\ell u_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0,1)$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(0,1)$ on conclut de (2.11) et (2.13) que:

$$\varphi = 0.$$

ce qui montre que l'opérateur L est fermable.

Soit $\overline{L}$ la fermeture de L et $D\left(\overline{L}\right)$ le domaine de définition de $\overline{L}$.

Définition

La solution de l'équation $\overline{L}\, u = \mathcal{F}$ est dite solution forte du problème (1.1) — (1.5).

Comme les points du graphe de l'opérateur $\overline{L}$ sont limites des suites de points du graphe de l'opérateur L, on peut prolonger l'inégalité (2.4) à l'opérateur $\overline{L}$,

(2.5) $$\|u\|_{B}^{2} \leq K\left\|\overline{L}\, u\right\|_{F}^{2} \quad \text{pour tout } u \in \mathrm{D}(\overline{L}).$$

L'inégalité (2.5 entraîne les résultats suivants:

Corollaire 1

La solution forte du problème (1.1) — (1.5), si elle existe, est unique et dépend continûment du second membre de l'équation (1.1) et de la condition initiale.

Corollaire 2

L'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est égal à la fermeture $\overline{R(L)}$ de $R(L)$

Preuve

De la définition de $R(\overline{L})$, il s'ensuit que $R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$, il reste à montrer linclusion inverse.

Soit $z \in \overline{R(L)}$, il existe alors une suite de Cauchy $(z_n)_n$ dans F constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$ telle que:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Il existe alors une suite correspondante $(u_n)_n$ appartenant à $D(L)$ telle que:

$$Lu_n = z_n.$$

De l'inégalité (2.4), on a:

$$\|u_n - u_m\|_B \leq \sqrt{K}\,\|Lu_n - Lu_m\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n,\ m \text{ tendent vers } +.\infty$$

On en déduit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans B, par conséquent, il existe une fonction $u \in$ B telle que:

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans B quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

En vertu de la définition de $\overline{L}$, la fonction u vérifie:

$$u \in D(\overline{L}) \quad \text{et } \overline{L}\, u = z.$$

Ainsi, $z \in R(\overline{L})$, ce qui achève la démonstration du corollaire 2.

4.3 Existence d'une solution

$\overline{L}$ est injectif (corollaire 1), il reste à prouver que $\overline{L}$ est surjectif: $R(\overline{L}) = \mathrm{F}$, c'est-à-dire $\overline{R(L)} = \mathrm{F}$.(Corollaire 2).

Pour celà, il suffit de montrer que l'orthogonal de $R(L)$ dans F est réduit à l'élément nul dans F.

Théorème

Si les conditions (1.6) sont satisfaites alors pour chaque $f \in L^2(\mathrm{Q})$ et $\varphi \in L^2(0,1)$, le problème (1.1)—(1.5) admet une solution forte unique: $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F}$ vérifiant (2.5).

Pour la preuve de ce théorème, on montre la proposition suivante.

Proposition

Si les conditons (1.6) sont vérifiées et si pour $\omega \in L^2(\mathrm{Q})$, on a:

$$(\mathcal{L}u, \omega)_{L^2(\mathrm{Q})} = 0 \tag{3.1}$$

pour toute fonction $u \in \mathrm{D}_0(L) = \{u \in \mathrm{D}(L) / \ell u = 0\}$, alors ω s'annule presque partout dans Q.

Preuve de la proposition

Comme la relation (3.1) est donnée pour tout $u \in D_0(L)$, on peut exprimer u sous une forme particulière.

On définit la fonction h par la relation:

$$h(x,t) = \int_t^T \omega(x,\tau)d\tau$$

et soit u_t solution de l'équation

$$-a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t = h(x,t) \tag{3.2}$$

où σ est un nombre fixe appartenat à $(0,1)$ et

$$\mathcal{I}_x^2 u_t = \int_0^x \int_0^\xi u_t(\eta,t)d\eta d\xi$$

et soit la fonction u donnée par:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,s] \\ \int_s^t u_t(x,\tau)d\tau & \text{si } t \in [s,T] \end{cases} \tag{3.3}$$

La relation (3.3) entraîne que $u \in \mathrm{D}_0(L)$.

De la relation (3.2), on déduit que:

(3.4) $$\omega = \frac{\partial}{\partial t}\left(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right).$$

Comme $h(x,T) = 0$ par définition de la fonction $h,$ il en résulte que:

(3.5) $$\mathcal{I}_x^2 u_t(x,T) = 0, \quad \mathcal{I}_x u_t(x,T) = 0, \quad u_t(x,T) = 0.$$

Lemme 4

La fonction ω définie par (3.4) est dans $L^2(\mathrm{Q})$.

Preuve

$$\left(\mathcal{I}_x^2 u_t\right)^2 = \left(\int_0^x \mathcal{I}_\xi u_t d\xi\right)^2 \leq \left(\int_0^x 1^2 d\xi\right)\left(\int_0^x (\mathcal{I}_\xi u_t)^2 d\xi\right)$$
$$= x\int_0^x (\mathcal{I}_\xi u_t)^2 d\xi \leq x\int_0^1 (\mathcal{I}_\xi u_t)^2 d\xi.$$

Donc:

$$\int_0^1 (\mathcal{I}_x^2 u_t)^2 dx \leq \int_0^1 (\mathcal{I}_\xi u_t)^2 d\xi \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\mathcal{I}_\xi u_t)^2 d\xi.$$

En réitérant le même procédé, on montre que:

$$\int_0^1 \left(\mathcal{I}_\xi u_t\right)^2 d\xi \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t)^2 d\xi.$$

Par suite:

(3.6) $$\int_0^1 \left(\mathcal{I}_x^2 u_t\right)^2 dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int_0^1 (u_t)^2 d\xi.$$

De la relation (3.4), il s'ensuit que:

$$\omega = a_t(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t + a(\sigma,t)(\mathcal{I}_x^2 u_{tt})$$

En utilisant (3.6) on déduit:

$$\int_Q a_t^2(\sigma,t)\left(\mathcal{I}_x^2 u_t\right)^2 dxdt \leq \left(\overline{C_{01}}\right)^2 \int_Q \left(\mathcal{I}_x^2 u_t\right)^2 dxdt$$
$$\leq \left(\overline{C_{01}}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int_Q (u_t)^2 dxdt$$

Comme $u_t \in L^2(\mathrm{Q})$, il en résulte que $a_t(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t \in L^2(\mathrm{Q})$

Il reste à prouver que $a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_{tt} \in L^2(\mathrm{Q})$. Pour celà, on utilise les t-opérateurs de régularisation ρ_ε de la forme:

$$(\rho_\varepsilon g)(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \omega\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right)g(x,s)ds$$

introduit par L. Garding où $\omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, nulle au voisinage de $t = 0$ et $t = T$ et à l'extérieur de l'intervalle $(0,T)$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \omega dt = 1$.

On applique successivement les opérateurs ρ_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ à l'équation $-a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t = h,$ on obtient:

(3.7) $$a(\sigma,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\varepsilon \mathcal{I}_x^2 u_t\right) = -a_t(\sigma,t)\varrho_\varepsilon \mathcal{I}_x^2 u_t - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\varepsilon h)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left[a(\sigma,t)\rho_\varepsilon \mathcal{I}_x^2 u_t - \rho_\varepsilon a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right]$$

De l'égalité (3.7), on déduit que:

$$\left\| a(\sigma,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\varepsilon \mathcal{I}_x^2 u_t\right)\right\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2 \leq 3\left\| a_t(\sigma,t)\varrho_\varepsilon \mathcal{I}_x^2 u_t\right\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2 + 3\left\|\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\varepsilon h)\right\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2$$
$$+ 3\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left[a(\sigma,t)\rho_\varepsilon \mathcal{I}_x^2 u_t - \rho_\varepsilon a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right]\right\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2$$

En vertu des propriétés des t –opérateurs de régularisation on a:

$$\left\|\mathcal{I}_x^2 u_{tt}\right\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2 \leq C\left(\|u_t\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2 + \|h_t\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2\right)$$

avec $C = \frac{1}{C_{00}}\max\left(\frac{3}{4}\overline{C_{01}}^2, 3\right)$.

Par suite $\mathcal{I}_x^2 u_{tt} \in L^2(\mathrm{Q})$ et $\omega \in L^2(\mathrm{Q})$.

Remarque:

Si $u_{tt} \in L^2(\mathrm{Q})$, il est immédiat que $\omega \in L^2(\mathrm{Q})$. car

$$\left\| a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_{tt}\right\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2 \leq \overline{C_{00}}^2\left\|\mathcal{I}_x^2 u_{tt}\right\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2 \leq \overline{C_{00}}^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\|u_{tt}\|_{L^2(\mathrm{Q})}^2.$$

Ce qui implique que $\mathcal{I}_x^2 u_{tt} \in L^2(\mathrm{Q})$ et par suite $\omega = a_t(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t + a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_{tt} \in L^2(\mathrm{Q})$

Montrons maintenant la proposition. Pour celà, on calcule:

$$(\mathcal{L}u,\omega)_{L^2(\mathrm{Q}_s^*)} = \left(u_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)u_{xxx}),\ \left(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right)_t\right)_{L^2(\mathrm{Q}_s^*)}$$

avec $\mathrm{Q}_s^* = (0,1)\times(s,T),\ \ 0 < s < T.$

En faisant des intégrations par parties et en tenant compte des conditions initiales et au bord et de (3.5), on a:

$$I = \left(u_t, \left(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right)_t\right)_{L^2(\mathrm{Q}_s^*)} = \int_{\mathrm{Q}_s^*} u_t.\left(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right)_t dxdt$$

$$= \int_{\mathrm{Q}_s^*} \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{I}_x u_t).\left(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right)_t dxdt$$

$$= \int_s^T \mathcal{I}u_t.\left(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right)_t\Big|_{x=0}^{x=1} dt - \int_{Q_s^*} (\mathcal{I}_x u_t).(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x u_t)_t dxdt$$

$$= -\int_{Q_s^*} (\mathcal{I}_x u_t).(a_t(\sigma,t)\mathcal{I}_x u_t + a(\sigma,t)\mathcal{I}_x u_{tt})dxdt$$

$$= -\int_{Q_s^*} a_t(\sigma,t)(\mathcal{I}_x u_t)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_{Q_s^*} a(\sigma,t)\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{I}_x u_t)^2 dxdt$$

$$= -\int_{Q_s^*} a_t(\sigma,t)(\mathcal{I}_x u_t)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_0^1 a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\Big|_{t=s}^{t=T} dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{Q_s^*} a(\sigma,t)\left(\mathcal{I}_x^2 u_t\right)^2 dxdt.$$

Par suite:

$$I = +\frac{1}{2}\int_0^1 a(\sigma,s)(\mathcal{I}_x u_t(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s^*} a_t(\sigma,t)(\mathcal{I}_x u_t)^2 dxdt. \tag{3.8}$$

D'autre part:

$$J = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)u_{xxx}), \left(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right)_t\right)_{L^2(Q_s^*)}$$
$$= -\int_{Q_s^*}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,t)u_{xxx})\right)\left(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right)_t dxdt$$
$$= -\int_s^T \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u_{xxx})\left(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x^2 u_t\right)_t\Big|_{x=0}^{x=1} dt$$
$$+ \int_{Q_s^*} \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u_{xxx})(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x u_t)_t dxdt$$
$$= \int_s^T (a(x,t)u_{xxx})(a(\sigma,t)\mathcal{I}_x u_t)_t\Big|_{x=0}^{x=1} dt$$
$$- \int_{Q_s^*} (a(x,t)u_{xxx})(a(\sigma,t)u_t)_t dxdt$$
$$= -\int_{Q_s^*} (a(x,t)u_{xxx})(a(\sigma,t)u_t)_t dxdt \qquad \text{car } a(1,t) = 0$$

$$J = -\int_s^T (a(x,t)u_{xx})(a(\sigma,t)u_t)_t\Big|_{x=0}^{x=1} dt$$
$$+ \int_{Q_s^*} u_{xx}\left(a_x(x,t)(a(\sigma,t)u_t)_t) + a(x,t)(a(\sigma,t)u_{tx})_t)\right)dxdt$$

$$J=\int_{Q_s^*}(u_{xx})\big[a_x(x,t)(a(\sigma,t)u_t)_t\big]dxdt$$

$$+\int_{Q_s^*}(u_{xx})\big[a(x,t)(a(\sigma,t)u_{tx})_t\big]dxdt$$

car $u_t(0,t)=u_{tt}(0,t)=0.$

$$J=\int_s^T(u_x)\big[a_x(x,t)(a(\sigma,t)u_t)_t\big]\Big|_{x=0}^{x=1}dt$$

$$-\int_{Q_s^*}(u_x)\big(a_{xx}(x,t)(a(\sigma,t)u_t)_t)+a_x(x,t)(a(\sigma,t)u_{tx})_t)\big)dxdt$$

$$+\int_0^1(u_{xx})[a(x,t)(a(\sigma,t)u_{tx})]\Big|_{t=s}^{t=T}dx$$

$$-\int_{Q_s^*}[(u_{xxt})a(x,t)+(u_{xx})a_t(x,t)](a(\sigma,t)u_{tx})dxdt.$$

$$J=-\int_0^1(u_x)a_{xx}(x,t)(a(\sigma,t)u_t)\Big|_{t=s}^{t=T}dx$$

$$+\int_{Q_s^*}[u_{xt}.a_{xx}(x,t)+u_x.a_{xxt}(x,t)]a(\sigma,t)u_tdxdt$$

$$-\int_0^1(u_x)a_x(x,t)(a(\sigma,t)u_{tx})\Big|_{t=s}^{t=T}dx$$

$$+\int_{Q_s^*}[u_{xt}.a_x(x,t)+u_x.a_{xt}(x,t)]a(\sigma,t)u_{tx}dxdt$$

$$+\int_0^1u_{xx}(x,T)a(x,T)(a(\sigma,T)u_{tx}(x,T))dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{Q_s^*}a(x,t)a(\sigma,t)\frac{\partial}{\partial x}(u_{tx})^2dxdt-\int_{Q_s^*}a_t(x,t)a(\sigma,t)u_{xx}u_{tx}dxdt$$

Comme $u_x(x,s)=0$ et $u_t(x,T)=0$, J s'écrit alors:

$$J=\frac{1}{2}\int_{Q_s^*}a_{xx}(x,t)a(\sigma,t)\frac{\partial}{\partial x}(u_t)^2dxdt+\int_{Q_s^*}a_{xxt}(x,t)a(\sigma,t)u_xu_tdxdt$$

$$-\int_0^1a_x(x,T)a(\sigma,T)u_{tx}(x,T)u_x(x,T)dx+\int_{Q_s^*}a_x(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt$$

$$+\ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_s^*} a_x(x,t)a(\sigma,t)\frac{\partial}{\partial t}(u_x)^2dxdt+\int\limits_0^1 a(x,T)a(\sigma,T)u_{xx}(x,T)u_{tx}(x,T)dx$$

$$-\ \frac{1}{2}\int\limits_s^T a(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2\Big|_{x=0}^{x=1}dt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s^*} a_x(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt$$

$$-\int\limits_{Q_s^*} a_t(x,t)a(\sigma,t)u_{xx}u_{tx}dxdt$$

En tenant compte du fait que $u_t(0,t)=u_t(1,t)=0$, J s'écrit:

$$(3.9)\quad J=-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s^*} a_{xxx}(x,t)a(\sigma,t)(u_t)^2dxdt+\int\limits_{Q_s^*} a_{xxt}(x,t)a(\sigma,t)u_xu_tdxdt$$
$$-\int\limits_0^1 a_x(x,T)a(\sigma,T)u_x(x,T)u_{tx}(x,T)dx+\int\limits_{Q_s^*} a_x(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt$$
$$+\ \frac{1}{2}\int\limits_0^1 a_{tx}(x,T)a(\sigma,t)(u_x(x,T))^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s^*}[a_{xtt}(x,t)a(\sigma,t)+a_{xt}(x,t)a_t(\sigma,t)](u_x)^2dxdt$$
$$+\int\limits_0^1 a(x,T)\ a(\sigma,T)\ u_{xx}(x,T)\ u_{tx}(x,T)dx+\frac{1}{2}\int\limits_s^T a(0,t)a(\sigma,t)(u_{tx}(0,t))^2dt$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s^*} a_x(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt-\int\limits_{Q_s^*} a_t(x,t)a(\sigma,t)u_{xx}u_{tx}dxdt$$

Par suite comme $(\mathcal{L}u,\omega)_{L^2(Q_s^*)}=I+J,$

$$(3.10)\quad (\mathcal{L}u,\omega)_{L^2(Q_s^*)}=+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a(\sigma,s)(\mathcal{I}_xu_t(x,s))^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s^*} a_t(\sigma,t)(\mathcal{I}_xu_t)^2dxdt$$
$$-\ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_s^*} a_{xxx}(x,t)a(\sigma,t)(u_t)^2dxdt+\int\limits_{Q_s^*} a_{xxt}(x,t)a(\sigma,t)u_xu_tdxdt$$
$$-\int\limits_0^1 a_x(x,T)a(\sigma,T)u_x(x,T)u_{tx}(x,T)dx+\frac{3}{2}\int\limits_{Q_s^*} a_x(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt$$
$$+\ \frac{1}{2}\int\limits_0^1 a_{tx}(x,T)a(\sigma,T)(u_x(x,T))^2dx+\int\limits_0^1 a(x,T)a(\sigma,T)u_{xx}(x,T)u_{tx}(x,T)dx$$
$$-\ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_s^*}[a_{xtt}(x,t)a(\sigma,t)+a_{xt}(x,t)a_t(\sigma,t)](u_x)^2dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_s^T a(0,t)a(\sigma,t)(u_{tx}(0,t))^2dt-\int_{Q_s^*} a_t(x,t)a(\sigma,t)u_{xx}u_{tx}dxdt=0$$

Comme $\frac{1}{2}\int_s^T a(0,t)a(\sigma,t)(u_{tx}(0,t))^2dt\geq 0,$ de (3.10), on déduit que:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 a(\sigma,s)(\mathcal{I}_xu_t(x,s))^2dx-\int_0^1 a_x(x,T)a(\sigma,T)u_x(x,T)u_{tx}(x,T)dx \tag{3.11}$$

$$+\frac{3}{2}\int_{Q_s^*} a_x(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 a_{tx}(x,T)a(\sigma,T)(u_x(x,T))^2dx$$

$$+\int_0^1 a(x,T)a(\sigma,T)u_{xx}(x,T)u_{tx}(x,T)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{Q_s^*} a_t(\sigma,t)(\mathcal{I}_xu_t)^2dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_s^*} a_{xxx}(x,t)a(\sigma,t)(u_t)^2dxdt+\int_{Q_s^*} a_t(x,t)a(\sigma,t)u_{xx}u_{tx}dxdt$$

$$-\int_{Q_s^*} a_{xxt}(x,t)a(\sigma,t)u_xu_tdxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_s^*}(a_{xtt}(x,t)a(\sigma,t)+a_{xt}(x,t)a_t(\sigma,t))(u_x)^2dxdt$$

On commence par minorer les termes de gauche de l'inégalité (3.11):

$$\frac{1}{2}\int_0^1 a(\sigma,s)(\mathcal{I}_xu_t(x,s))^2dx\geq\frac{C_{00}}{2}\int_0^1(\mathcal{I}_xu_t(x,s))^2dx. \tag{3.12}$$

$$\int_0^1 a_x(x,T)a(\sigma,T)u_x(x,T)u_{tx}(x,T)dx\leq\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 a_x(x,T)a(\sigma,T)(u_x(x,T))^2dx$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 a_x(x,T)a(\sigma,T)(u_{tx}(x,T))^2dx,\qquad\forall\varepsilon>0.$$

Par le lemme1de la partie 2 (cf p.8), $\exists\ \varepsilon_1>0,$ (il existe une infinité de $\varepsilon_1>,\varepsilon_0>0$) tel que:

$$\int_0^1 a_x(x,T)a(\sigma,T)u_x(x,T)u_{tx}(x,T)dx\leq 2\frac{\varepsilon_1}{2}\int_0^1 a_x(x,T)a(\sigma,T)(u_x(x,T))^2dx.$$

Par suite,

$$-\int_0^1 a_x(x,T)a(\sigma,T)u_x(x,T)u_{tx}(x,T)dx\geq-\varepsilon_1\overline{C_{10}}\ \overline{C_{00}}\int_0^1(u_x(x,T))^2dx. \tag{3.13}$$

$$(u_x(x,T))^2-(u_x(x,s))^2=(u_x(x,T))^2=\int_s^T \frac{\partial}{\partial t}(u_x(x,t))^2dt=2\int_s^T u_x(x,t)u_{tx}(x,t)dt$$

$$\leq \varepsilon\int_s^T (u_x(x,t))^2dt+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^T (u_{tx}(x,t))^2dt, \qquad \forall\varepsilon>0.$$

Par le même lemme1, $\exists\, \varepsilon_2>0,$ tel que $(u_x(x,T))^2 \leq \frac{2}{\varepsilon_2}\int_s^T (u_{tx}(x,t))^2dt,$

Donc: $\int_0^1 (u_x(x,T))^2dx \leq \frac{2}{\varepsilon_2}\int_{\mathrm{Q}_s^*}(u_{tx}(x,t))^2dtdx,$

En utilisant l'inégalité ci-dessus,on a:

$$\frac{3}{2}\int_{\mathrm{Q}_s^*} a_x(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt \geq \frac{3}{2}C_{10}C_{00}\int_{\mathrm{Q}_s^*}(u_{tx}(x,t))^2dt \geq \frac{3}{2}C_{10}C_{00}\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\int_0^1 (u_x(x,T))^2dx$$

Donc:

$$\frac{3}{2}\int_{\mathrm{Q}_s^*} a_x(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt \geq \frac{3}{4}C_{10}C_{00}\varepsilon_2\int_0^1 (u_x(x,T))^2dx \tag{3.14}$$

Remarque:

On peut se dispenser de l'inégalité (3.14) et utiliser seulement le fait que:

$$\frac{3}{2}\int_{\mathrm{Q}_s^*} a_x(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt \geq 0.$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 a_{xt}(x,T)a(\sigma,T)(u_x(x,T))^2dx \geq \frac{1}{2}C_{11}C_{00}\int_0^1 (u_x(x,T))^2dx \tag{3.15}$$

$$-\int_0^1 a(x,T)a(\sigma,T)u_{xx}(x,T)u_{tx}(x,T)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 a(x,T)a(\sigma,T)(u_{xx}(x,T))^2dx$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 a(x,T)a(\sigma,T)(u_{tx}(x,T))^2dx, \quad \forall\, \varepsilon>0$$

$\exists\, \varepsilon_3>0$ tel que: $-\int_0^1 a(x,T)a(\sigma,T)u_x(x,T)u_{tx}(x,T)dx \leq 2\frac{\varepsilon_3}{2}\int_0^1 a(x,T)a(\sigma,T)(u_{xx}(x,T))^2dx$

Par suite,

$$\int_0^1 a(x,T)a(\sigma,T)u_{xx}(x,T)u_{tx}(x,T)dx \geq -\varepsilon_3\overline{C_{00}}^2\int_0^1 (u_{xx}(x,T))^2dx \tag{3.16}$$

D'autre part on majore les termes du membre droit de l'inégalité (3.11):

$$-\int_{Q_s^*} a_{xxt}(x,t)a(\sigma,t)u_xu_tdxdt \leq \frac{1}{2}\int_{Q_s^*} a_{xxt}(x,t)a(\sigma,t)(u_x)^2dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s^*} a_{xxt}(x,t)a(\sigma,t)(u_t)^2dxdt.$$

$$\int_{Q_s^*} a_t(x,t)a(\sigma,t)u_{xx}u_{tx}dxdt \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{Q_s^*} a_t(x,t)a(\sigma,t)(u_{xx})^2dxdt$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{Q_s^*} a_t(x,t)a(\sigma,t)(u_{tx})^2dxdt, \qquad \forall\ \varepsilon > 0.$$

Le même lemme1 donne $\exists\ \varepsilon_4 > 0$ tel que:

$$\int_{Q_s^*} a_t(x,t)a(\sigma,t)u_{xx}u_{tx}dxdt \leq \frac{\varepsilon_4}{2}\int_{Q_s^*} a_{xxt}(x,t)a(\sigma,t)(u_{xx})^2dxdt$$

Donc:

$$\int_{Q_s^*} a_t(x,t)a(\sigma,t)u_{xx}u_{tx}dxdt \leq \varepsilon_4\overline{C_{01}}\ \overline{C_{00}}\int_{Q_s^*} (u_{xx})^2dxdt \tag{3.17}$$

En substituant les inégalités (3.12) et (3.17) dans l'inégalité (3.11), on a:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}C_{00}\int_0^1(\mathcal{I}_xu_t(x,s))^2dx - \varepsilon_1\overline{C_{10}}\ \overline{C_{00}}\int_0^1(u_x(x,T))^2dx + \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right)C_{10}\ C_{00}\int_0^1(u_x(x,T))^2dx \\
&\qquad + \frac{1}{2}C_{11}\ C_{00}\int_0^1(u_x(x,T))^2dx - \varepsilon_3\overline{C_{00}}^2\int_0^1(u_{xx}(x,T))^2dx \\
&\leq \frac{1}{2}\overline{C_{01}}\int_{Q_s^*}(\mathcal{I}_xu_t(x,t))^2dxdt + \frac{1}{2}\left[\overline{C_{21}}\overline{C_{00}} + \overline{C_{12}}\ \overline{C_{00}} + \overline{C_{11}}\ \overline{C_{01}}\right]\int_{Q_s^*}(u_x)^2dxdt \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left[\overline{C_{30}}\overline{C_{00}} + \overline{C_{21}}\ \overline{C_{00}}\right](u_t)^2dxdt + \varepsilon_4\overline{C_{01}}\overline{C_{00}}\int_{Q_s^*}(u_{xx})^2dxdt.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Il reste à neutraliser les termes négatifs dans (3.18). Pour celà, on a:

$$(u_x(x,T))^2 - (u_x(x,s))^2 = (u_x(x,T))^2 = \int_s^T \frac{\partial}{\partial t}(u_x(x,t))^2dt = 2\int_s^T u_x(x,t)u_{tx}(x,t)dt$$

$$(u_x(x,T))^2 \leq \varepsilon\int_s^T(u_x(x,t))^2dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^T(u_{xt}(x,t))^2dt, \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

Par le lemme 1, on tire:

$$\exists\ \varepsilon_5 > 0 \ \text{ tel que } (u_x(x,T))^2 \le 2\varepsilon_5 \int_s^T (u_x(x,t))^2 dt.$$

Donc:

$$\int_0^1 (u_x(x,T))^2 dx \le 2\varepsilon_5 \int_{Q_s^*} (u_x(x,t))^2 dxdt. \tag{3.19}$$

Comme $u_{xxt} \in L^2(Q)$, il en résulte: $\exists\ \varepsilon_6 > 0$ tel que:

$$\int_0^1 (u_{xx}(x,T))^2 dx \le 2\varepsilon_6 \int_{Q_s^*} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt. \tag{3.20}$$

En multipliant l'inégalité (3.19) par $(\varepsilon_1 \overline{C_{10}}\ \overline{C_{00}})$ et l'inégalité (3.20) par $(\varepsilon_3\ \overline{C_{00}}^2 + 1)$ et en ajoutant membre à membre les inégalités obtenues, on a:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1 \overline{C_{10}}\ \overline{C_{00}}) \int_0^1 (u_x(x,T))^2 dx + (\varepsilon_3\ \overline{C_{00}}^2 + 1) \int_0^1 (u_{xx}(x,T))^2 dx \\ \le 2\varepsilon_5 (\varepsilon_1 \overline{C_{10}}\ \overline{C_{00}}) \int_{Q_s^*} (u_x(x,t))^2 dxdt + 2\varepsilon_6 (\varepsilon_3\ \overline{C_{00}}^2 + 1) \int_{Q_s^*} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt.\end{aligned} \tag{3.21}$$

En ajoutant membre à membre l'inégalité (3.21) à l'inégalité (3.18), on obtient:

$$\begin{aligned}&\frac{C_{00}}{2} \int_0^1 (\mathcal{J}_x u_t(x,s))^2 dx + \left[\frac{3\varepsilon_2}{4} C_{10} C_{00} + \frac{C_{11}\ C_{00}}{2} \right] \int_0^1 (u_x(x,T))^2 dx + \int_0^1 (u_{xx}(x,T))^2 dx \\ &\le \frac{\overline{C_{01}}}{2} \int_{Q_s^*} (\mathcal{J}_x u_t(x,t))^2 dxdt + \frac{1}{2} \left[\overline{C_{30}}\ \overline{C_{00}} + \overline{C_{21}}\ \overline{C_{01}} \right] \int_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt \\ &+ \left[\frac{1}{2} \left(\overline{C_{21}}\,\overline{C_{00}} + \overline{C_{12}}\,\overline{C_{00}} + \overline{C_{11}}\,\overline{C_{01}} \right) + 2\varepsilon_5 \varepsilon_1 \overline{C_{01}}\ \overline{C_{00}} \right] \int_{Q_s^*} (u_x(x,t))^2 dxdt \\ &+ \left[\varepsilon_4 \overline{C_{01}}\ \overline{C_{00}} + 2\varepsilon_6 (\varepsilon_3\ \overline{C_{00}}^2 + 1) \right] \int_{Q_s^*} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt\end{aligned} \tag{3.22}$$

En d'autres termes, l'inégalité (3.22) peut s'écrire :

$\exists \alpha_i > 0, i = 1,2,3, \exists \beta_i > 0, i = 1,2,3,4$ telles que **:**

$$\alpha_1 \int_0^1 (\mathcal{J}_x u_t(x,s))^2 dx + \alpha_2 \int_0^1 (u_x(x,T))^2 dx + \alpha_3 \int_0^1 (u_{xx}(x,T))^2 dx \tag{3.23}$$

$$\leq \beta_1 \int_{Q_s^*} (\mathcal{I}_x u_t(x,t))^2 dxdt + \beta_2 \int_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt$$
$$+ \beta_3 \int_{Q_s^*} (u_x(x,t))^2 dxdt + \beta_4 \int_{Q_s^*} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt$$

ce qui donne

$$(3.24) \quad \int_0^1 (\mathcal{I}_x u_t(x,s))^2 dx + \int_0^1 (u_x(x,T))^2 dx + \int_0^1 (u_{xx}(x,T))^2 dx$$

$$\leq K\left[\int_{Q_s^*} (\mathcal{I}_x u_t(x,t))^2 dxdt + \int_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt + \int_{Q_s^*} (u_x(x,t))^2 dxdt + \int_{Q_s^*} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt \right].$$

où: $\quad K = \dfrac{\min\limits_{i=1,2,3} \alpha_i}{\max\limits_{i=1,2,3,4} \beta_i} > 0$

Pour pouvoir continuer, il manque à l'inégalité (3.24) un terme $\int_0^1 (u_t(x,s))^2 dx$.

Lemme 5

Pour tout $u_t \in L^2(Q_s^*)$, il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$\int_0^1 (u_t(x,s))^2 dx \leq \int_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt$$

Preuve.

La preuve du lemme repose sur le corollaire du théorème de l'application ouverte.(Cf Partie 2)**.**

Soit alors 2 normes sur $L^2\left(Q_s^*\right)$

$$\|u_t\|_1^2 = \int_0^1 (u_t(x,s))^2 dx + \int_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt$$
$$\|u_t\|_2^2 = \int_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt$$

Il est évident que $\left(L^2\left(Q_s^*\right), \|.\|_1\right)$ et $\left(L^2\left(Q_s^*\right), \|.\|_2\right)$ sont des espaces de Banach**.**

Soit alors l'opérateur identité**:**

$$I: \left(L^2\left(Q_s^*\right), \|.\|_1\right) \to \left(L^2\left(Q_s^*\right), \|.\|_2\right).$$

I est linéaire continu bijectif car: $\|u_t\|_2^2 \leq \|u_t\|_1^2 \quad \forall u_t \in L^2\left(Q_s^*\right)$

Par suite il existe $C > 0$ tel que: $\|u_t\|_1^2 \leq C\|u_t\|_2^2$,

ie: $\int\limits_0^1 (u_t(x,s))^2 dx + \int\limits_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt \leq C \int\limits_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt$

et donc: $\int\limits_0^1 (u_t(x,s))^2 dx \leq C \int\limits_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt$

Par suite, $\exists \varepsilon_7 \rangle 0 \quad (2\varepsilon_7 = C)$ tel que:

$$\int\limits_0^1 (u_t(x,s))^2 dx \leq 2\varepsilon_7 \int\limits_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt \tag{3.25}$$

En ajoutant membre à membre (3.24) et (3.25), on a **:**

$$\int\limits_0^1 (\mathcal{I}_x u_t(x,s))^2 dx + \int\limits_0^1 (u_t(x,s))^2 dx + \int\limits_0^1 (u_x(x,T))^2 dx + \int\limits_0^1 (u_{xx}(x,T))^2 dx \tag{3.26}$$

$$\leq K_1^* \left[\int\limits_{Q_s^*} (\mathcal{I}_x u_t(x,t))^2 dxdt + \int\limits_{Q_s^*} (u_t(x,t))^2 dxdt + \int\limits_{Q_s^*} (u_x(x,t))^2 dxdt + \int\limits_{Q_s^*} (u_{xx}(x,t))^2 dxdt \right]$$

avec $K_1^* = K\left(1 + \frac{2\varepsilon_7}{K}\right) > 0$.

Pour pouvoir continuer, on pose **:**

$$\Theta(x,t) = \int\limits_t^T u_t(x,\tau) d\tau = u(x,T) - u(x,t)$$

$$\Theta(x,s) = \int\limits_s^T u_t(x,\tau) d\tau = u(x,T) - u(x,s) = u(x,T)$$

donc: $u(x,t) = u(x,T) - \Theta(x,t) = \Theta(x,s) - \Theta(x,t)$

Par suite:

$$u_x(x,t) = \Theta_x(x,s) - \Theta_x(x,t)$$

$$u_{xx}(x,t) = \Theta_{xx}(x,s) - \Theta_{xx}(x,t)$$

$$\int\limits_{Q_s^*} (u_x(x,t))^2 dxdt = \int\limits_{Q_s^*} (\Theta_x(x,s) - \Theta_x(x,t))^2 dxdt \tag{3.27}$$

$$\leq 2\int_{Q_s^*}(\Theta_x(x,s))^2dxdt+2\int_{Q_s^*}(\Theta_x(x,t))^2dxdt$$

$$\leq 2(T-s)\int_0^1(\Theta_x(x,s))^2dx+2\int_{Q_s^*}(\Theta_x(x,t))^2dxdt.$$

Idem

(3.28) $$\int_{Q_s^*}(u_{xx}(x,t))^2dxdt \leq 2(T-s)\int_0^1(\Theta_{xx}(x,s))^2dxdt+2\int_{Q_s^*}(\Theta_{xx}(x,t))^2dxdt$$

En utilisant les inégalités (3.27) et (3.28), l'inégalité (3.26) s'écrit:

(3.29) $$\int_0^1(\mathcal{I}_x u_t(x,s))^2dx+\int_0^1(u_t(x,s))^2dx+\left[1-2K_1(T-s)\right]\int_0^1(\Theta_x(x,s))^2dx$$
$$+\left[1-2K_1(T-s)\right]\int_0^1(\Theta_{xx}(x,s))^2dx$$
$$\leq K_1\left[\int_{Q_s^*}(\mathcal{I}_x u_t(x,t))^2dxdt+\int_{Q_s^*}(u_t(x,t))^2dxdt\right.$$
$$\left.+2\int_{Q_s^*}(\Theta_x(x,t))^2dxdt+2\int_{Q_s^*}(\Theta_{xx}(x,t))^2dxdt.\right]$$

s étant indépendant de l'origine, on choisit s tel que $1-2K_1(T-s)=\frac{1}{2}$, (3.29) s'écrit alors:

(3.30) $$\int_0^1(\mathcal{I}_x u_t(x,s))^2dx+\int_0^1(u_t(x,s))^2dx+\int_0^1(\Theta_x(x,s))^2dx+\int_0^1(\Theta_{xx}(x,s))^2dx$$
$$\leq 4K_1\left[\int_{Q_s^*}(\mathcal{I}_x u_t(x,t))^2dxdt+\int_{Q_s^*}(u_t(x,t))^2dxdt\right.$$
$$\left.+\int_{Q_s^*}(\Theta_x(x,t))^2dxdt+\int_{Q_s^*}(\Theta_{xx}(x,t))^2dxdt.\right]$$

En posant:

$$y(s)=\int_{Q_s^*}(\mathcal{I}_x u_t(x,t))^2dxdt+\int_{Q_s^*}(u_t(x,t))^2dxdt+\int_{Q_s^*}(\Theta_x(x,t))^2dxdt+\int_{Q_s^*}(\Theta_{xx}(x,t))^2dxdt$$

l'inégalité (3.30) s'écrit:

$$-\frac{dy(s)}{ds}\leq +4K_1y(s)$$

Par suite:

$$-\frac{d}{ds}\left(y(s)e^{4K_1 s}\right) \leq 0$$

et:

$$\int_s^T -\frac{d}{ds}\left(y(s)e^{4K_1 s}\right)ds = -y(T)e^{4K_1 T} + y(s)e^{4K_1 s} = y(s)e^{4K_1 s} \leq 0$$

d'où $y(s) = 0$ et par suite $\omega = 0$ sur $Q_s^* = (0,1)\times(s,T)$.

s étant independant de l'origine, en répétant le même raisonnement, c'est à dire en procédant pas à pas, on déduit que:

$$\omega = 0 \text{ sur } Q = (0,1)\times(0,T).$$

ce qui termine la preuve de la proposition.

Montrons maintenant le théorème.

Soit $W = \left(\omega, \omega_0\right) \in R(L)^{\perp}$, alors W vérifie:

$$(\mathcal{L}u, \omega)_{L^2(Q)} + \left(\ell u, \omega_0\right)_{L^2(0,1)} = 0.$$

Si en particulier, $u \in D_0(L)$, de l'égalité ci-dessus, on obtient:

$$(\mathcal{L}u, \omega)_{L^2(Q)} = 0, \ \forall\, u \in D_0(L),$$

En vertu de la proposition précédente, on déduit que $\omega = 0$ d'où à partir de la relation $(\mathcal{L}u, \omega)_{L^2(Q)} + \left(\ell u, \omega_0\right)_{L^2(0,1)} = 0$, on déduit que $\left(\ell u, \omega_0\right)_{L^2(0,1)} = 0$**.**

Comme $\overline{R(\ell)} = L^2(0,1)$, il s'ensuit que $\omega_0 = 0$.

En résumé, l'orthogonal de $R(L)$ dans F est réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire **:**

$$R\left(\overline{L}\right) = \overline{R(L)} = F \quad \text{i.e.} \quad \overline{L} \text{ est surjectif.}$$

4.4 Conclusion.

Conclusion

Pour tout $(f,\varphi) \in L^2(Q)\times L^2(0,1)$, il existe un et un seul élément u solution du problème posé (1,1)—(1.5)

Partie 5

PROBLÈME MIXTE AVEC CONDITIONS INTÉGRALES POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES D'ORDRE IMPAIR

Partie 5
PROBLÈME MIXTE AVEC CONDITIONS INTÉGRALES POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES D'ORDRE IMPAIR

5.1 Formulation du problème

On se propose de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant:

(1.1) $$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-1)^m p(t)\frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} = f(x,t).$$

(1.2) $$\ell_1 u = u(x,0) = \varphi(x)$$

(1.3) $$\ell_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

(1.4) $$\int_0^a x^k u(x,t)dx = 0 \qquad k = \overline{(0, 2m-1)} \qquad \forall t \in [0,T]$$

(1.5) $$u_t(a,t) = 0 \qquad (x,t) \in Q_T = (0,a)\times(0,T) \qquad a\rangle 0,\ T\rangle 0 \ \text{ finis}$$

(H) $$0 < C_0 \le p(t) \le \overline{C_0} \qquad C_1 \le P'(t) \le \overline{C_1}\ldots \qquad C_2 \le p''(t) \le \overline{C}_2, C_2 > 0.$$

On suppose que les fonctions φ et ψ sont compatibles avec $(1,4)$.

En suivant le schéma de DEZIN le problème (1.1)-(1.5) peut être ramené à une équation fonctionnelle

(1.6) $$Lu = \mathcal{F}.$$

où L est l'opérateur triplet $\left(\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2\right)$ opérateur non borné défini sur $D(L)$ et à valeur dans un espace de Hilbert F l'élément donné $\mathcal{F}$ est défini par $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$

$$\text{où } D(L) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^2\left((0,T), L^2(0,a)\right) / \, u_t, u_{tt}, u_{tx} \in L^2\left(0,T; L^2(0,a)\right); \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \in L^2\left(0,T; L^2(0,a)\right) \text{ et vérifiant } (1.4) \ et\ (1.5) \end{array} \right\}$$

$D(L)$ est muni de la norme

(1.7) $$\|u\|^2_{\mathrm{B}} = \sup_{s\in[o,T]} \|u(x,s)\|^2_{L^2(0,a)} + \sup_{s\in[o,T]} \|u_t(x,s)\|^2_{L^2(0,a)} + \sup_{s\in[o,T]} \|u_x(x,s)\|^2_{L^2(0,a)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2\left(0,T;\, \mathrm{B}^m_2(0,a)\right)}$$

et sur $\mathrm{C}_0(0,a)$ espace des fonctions continues à support compact, on définit un produit scalaire

$$(u,v) \in \left(\mathrm{C}_0(0,a)\right)^2 \qquad\qquad ((u,v)) = \int_0^a \mathcal{I}^m_x u \mathcal{J}^m_x v dx$$

$$\text{où} \qquad \mathcal{I}^m_x u(x,t) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} u(\xi,t)d\xi \qquad\qquad m \in \mathbb{N}^*$$

$\mathrm{C}_0(0,a)$ muni de la norme déduite de ce produit scalaire n'est pas complet.

Le complété de $C_0(0,a)$ muni du produit scalaire $((.))$ est l'espace $B_2^m(0,a)$.et :

$$\|u\|^2_{B_2^m(0,a)} = \|\mathcal{I}_x^m u\|^2_{L^2(0,a)} = \int_0^a (\mathcal{I}_x^m u(x,t))^2 dx,$$

par suite

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L\left(0,T;B_2^m(0,a)\right)} = \sup_{s\in[0,T]} \int_0^a (\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2 dx = \sup_{s\in[0,T]} \|\mathcal{I}_x^m u_t(x,s)\|^2_{L^2(0,a)}$$

le complété de $D(L)$ par rapport à la norme (1.7) notée:$\|.\|_B$ donne un espace de Banach noté B.

Par suite les applications:

$$\ell_1 : B \longrightarrow L^2(0,a) \qquad\qquad \ell_2 : B \longrightarrow B_2^m(0,a)$$
$$u \longrightarrow u(x,0) \qquad\qquad u \longrightarrow u_t(x,0)$$

sont définies et continues sur B.

F est l'espace défini par **:**

$$F = \left\{ \mathcal{F} = (f,\varphi,\psi) \in L^2\left(0,T;L^2(0,a)\right) \times H^1(0,a) \times \left[L^2(0,a) \times B_2^m(0,a)\right] \right.$$
$$\left. \text{tel que: } \quad \|\mathcal{F}\|^2_F = \|(f,\varphi,\psi)\|^2_F \quad \text{soit finie} \right\}$$

F est un espace de Hilbert

$H^1(0,a)$ est l'espace de Sobolev d'ordre 1 des fonctions définies sur $(0,a)$ et $\|\mathcal{F}\|^2_F$ est définie par :

$$(1.8) \quad \|\mathcal{F}\|^2_F = \|(f,\varphi,\psi)\|^2_F = \int_0^T \|f\|^2_{L^2(0,a)} dt + \|\varphi\|^2_{H^1(0,a)} + \|\psi\|^2_{L^2(0,a)} + \|\psi\|^2_{B_2^m(0,a)}$$

c'est-à-dire le produit scalaire de deux éléments $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de F est donné par :

$$\left(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\right)_{F\times F} = \left[\left(f_1,\varphi_1,\psi_1\right),\left(f_2,\varphi_2,\psi_2\right)\right]$$
$$= \left(f_1,f_2\right)_{L^2(Q)} + \left(\varphi_1,\varphi_2\right)_{L^2(0,a)} + \left(\varphi'_1,\varphi'_2\right)_{L^2(0,a)}$$
$$+ \left(\psi_1,\psi_2\right)_{L^2(0,a)} + \left(\mathcal{I}_x^m\psi_1,\mathcal{I}_x^m\psi_2\right)_{L^2(0,a)}$$

il est utile de rappeler quelques propriétés de l'opérateur $\mathcal{I}_x^m$ notamment le lien entre $\mathcal{I}_x^m u(x,t)$ et les conditions intégrales.

$$\mathcal{I}_x^m u(x,t) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m!} u(\xi,t) d\xi \qquad\qquad (m \in \mathbb{N})$$

En utilisant les résultats de dérivation par rapport au paramètre on a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathcal{I}_x^{m+1} u(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m!} u(\xi,t) d\xi\right] = \int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m} \frac{\partial}{\partial t} u(\xi,t) d\xi = \mathcal{I}_x^{m+1} u_t(x,t)$$

et **:**

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\mathcal{I}_x^{m+1}u(x,t)\right] = \mathcal{I}_x^{m+1}u_{tt}(x,t)$$

$$\mathcal{I}_x^1 u(x,t) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^0}{0!}u(\xi,t)d\xi = \int_0^x u(\xi,t)d\xi$$

En utilisant la définition de la dérivation et les propriétés de l'intégrale définie on a **:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{I}_x^{m+1}u(x,t)\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m!}u(\xi,t)d\xi\right]\\ &= \frac{(x-x)^m}{m!}u(x,t) + \int_0^x m\frac{(x-\xi)^{m-1}}{m!}u(\xi,t)d\xi\\ &= 0 + \int_0^x m\frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}u(\xi,t)d\xi\end{aligned}$$

donc on obtient:

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{I}_x^{m+1}u(x,t)\right) = \mathcal{I}_x^m u(x,t)$$

de plus

$$\mathcal{I}_0^{m+1}u(x,t) = \int_0^0 u\frac{(0-\xi)^m}{m!}u(\xi,t)d\xi = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a^{m+1}u(x,t) = \int_0^a \frac{(a-\xi)^m}{m!}u(\xi,t)d\xi &= \frac{1}{m!}\int_0^a \sum_{k=0}^m C_m^k a^k(-\xi)^{m-k}u(\xi,t)d\xi\\ &= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^m C_m^k a^k(-1)^{m-k}\int_0^a \xi^{m-k}u(\xi,t)d\xi\end{aligned}$$

avec $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$

Par suite

$$\int_0^a x^k u(x,t)dx = 0 \qquad \forall k = \overline{0, 2m-1}$$

si $\mathcal{I}_a^1 u(x,t) = \mathcal{I}_a^2 u(x,t) = \ldots = \mathcal{I}_a^{2m}u(x,t) = 0 \qquad \forall x \in (0,a)$ et $\forall t \in (0,T)$

5.2 Inégalité de l'énergie

On considère l'opérateur intégro différentiel M défini par:

$$Mu = (-1)^m p'(t)\mathcal{J}_x^{2m}u_t + (-1)^m\frac{1}{2}p(t)\mathcal{J}_x^{2m}u_{tt}$$

et on calcule$(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(\mathrm{Q}_s)}$ où Q_s est le sous rectangle $(0,a)\times(0,s) \quad 0 < s < \langle T$

$$(u_{tt}, Mu)_{L^2(Q_s)} = (-1)^m \int_{\mathrm{Q}_s} u_{tt}\left[p'(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_t + \frac{1}{2}p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right]dxdt$$

$$= (-1)^m \int_{Q_s} \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{J}_x u_{tt})\left[p'(t)\mathcal{J}_x^{2m} u_t + \frac{1}{2}p(t)\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt}\right]dxdt$$

$$= (-1)^m \int_0^s \mathcal{I}_x u_{tt}\left[p'(t)\mathcal{I}_x^{2m} u_t + \frac{1}{2}p(t)\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt}\right]\Big|_{x=0}^{x=a} dt$$

$$-(-1)^m \int_{Q_s} \mathcal{I}_x u_{tt}\left[p'(t)\mathcal{I}_x^{2m-1} u_t + \frac{1}{2}p(t)\mathcal{I}_x^{2m-1} u_{tt}\right]dxdt$$

$$= -(-1)^m \int_{Q_s} \mathcal{I}_x u_{tt}\left[p'(t)\mathcal{J}_x^{2m-1} u_t + \frac{1}{2}p(t)\mathcal{I}_x^{2m-1} u_{tt}\right]dxdt$$

$$= -(-1)^m \int_0^s \mathcal{I}_x^2 u_{tt}\left[p'(t)\mathcal{J}_x^{2m-1} u_t + \frac{1}{2}p(t)\mathcal{I}_x^{2m-1} u_{tt}\right]\Big|_{x=0}^{x=a} dt$$

$$+(-1)^m \int_{Q_s} \mathcal{I}_x^2 u_{tt}\left[p'(t)\mathcal{J}_x^{2m-2} u_t + \frac{1}{2}p(t)\mathcal{I}_x^{2m-2} u_{tt}\right]dxdt$$

En réitérant ces intégrations par parties jusqu'à l'ordre m on a :

$$(u_{tt}, Mu)_{L^2(Q)} = (-1)^m(-1)^m \int_{Q_s} \mathcal{I}_x^m u_{tt}\left[p'(t)\mathcal{J}_x^m u_t + \frac{1}{2}p(t)\mathcal{I}_x^m u_{tt}\right]dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{Q_s} p'(t)\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{J}_x^m u_t)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} p(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt})^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a p'(t)(\mathcal{I}_x^m u_t)^2\Big|_{t=0}^{t=s} dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s} p''(t)(\mathcal{I}_x^m u_t)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} p(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt})^2 dxdt$$

c'est à dire :

$$(u_{tt}, Mu)_{L^2(Q)} = \frac{1}{2}\int_0^a p'(s)(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^a p'(0)(\mathcal{I}_x^m \psi(x))^2 dx$$

$$- \frac{1}{2}\int_{Q_s} p''(t)(\mathcal{I}_x^m u_t)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} p(t)(\mathcal{I} u_{tt})^2 dxdt$$

De la même manière, on calcule

$$(-1)^m\left(p(t)\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}}u, (-1)^m p'(t)\mathcal{I}_x^{2m} u_t + (-1)^m \frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt}\right)_{L^2(Q_s)}$$

$$= (-1)^{2m}\int_{Q_s} p(t)\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}}u\left[p'(t)\mathcal{I}_x^{2m} u_t + \frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt}\right]dxdt$$

$$= \int_0^s p(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u\left[p'(t)\mathcal{I}_x^{2m} u_t + \frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt}\right]\Big|_{x=0}^{x=a} dt$$

$$- \int_{Q_s} p(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u\left[p'(t)\mathcal{I}_x^{2m-1} u_t + \frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m-1} u_{tt}\right]dxdt$$

$$= -\int_{Q_s} p(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u\left[p'(t)\mathcal{J}_x^{2m-1} u_t + \frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m-1} u_{tt}\right]dxdt$$

$$= -\int_0^s p(t)\frac{\partial^{2m-1}}{\partial x^{2m-1}}u\left[p'(t)\mathcal{J}_x^{2m-1}u_t + \frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m-1}u_{tt}\right]\Big|_{x=0}^{x=a}dx$$

$$+ \int_{Q_s} p(t)\frac{\partial^{2m-1}}{\partial x^{2m-1}}u\left[p'(t)\mathcal{I}_x^{2m-2}u_t + \frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m-2}u_{tt}\right]dxdt$$

$$= \int_{Q_s} p(t)\frac{\partial^{2m-1}}{\partial x^{2m-1}}u\left[p'(t)\mathcal{J}_x^{2m-2}u_t + \frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m-2}u_{tt}\right]dxdt$$

En poursuivant ces intégrations par parties on a :

$$(-1)^m\left(p(t)\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}}u, Mu\right)_{L^2(Q_s)} = \int_{Q_s} p(t)u_x\left[p'(t)u_t + \frac{1}{2}p(t)u_{tt}\right]dxdt$$

$$= \int_{Q_s} p(t)p'(t)u_xu_tdxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s}(p(t))^2u_xu_{tt}dxdt$$

$$= \int_{Q_s} p(t)p'(t)u_xu_tdxdt + \frac{1}{2}\int_0^a (p(t))^2u_xu_t\Big|_{t=0}^{t=s}dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial}{\partial t}\left[(p(t))^2u_x\right]u_tdxdt$$

$$= \int_{Q_s} p(t)p'(t)u_xu_tdxdt + \frac{1}{2}\int_0^a (p(s))^2u_x(x,s)u_t(x,s)dx - \frac{1}{2}\int_0^a (p(0))^2u_x(x,0)u_t(x,0)dx$$

$$- \int_{Q_s} p(t)p'(t)u_xu_tdxdt - \frac{1}{2}\int_{Q_s}(p(t))^2\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u_t)^2dxdt$$

par suite

$$(-1)^m\left(p(t)\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}}u, Mu\right)_{L^2(Q_s)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (p(s))^2u_x(x,s)u_t(x,s)dx - \frac{1}{2}\int_0^a (p(0))^2u_x(x,0)u_t(x,0)dx$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^s (p(t))^2\frac{1}{2}(u_t)^2\Big|_{x=0}^{x=a}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (p(s))^2u_x(x,s)u_t(x,s)dx - \frac{1}{2}\int_0^a (p(0))^2\varphi'(x)\psi(x)dx$$

$$- \frac{1}{4}\int_0^s (p(t))^2(u_t(a,t))^2dt + \frac{1}{4}\int_0^s (p(t))^2(u_t(0,t))^2dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (p(s))^2u_x(x,s)u_t(x,s)dx - \frac{1}{2}\int_0^a (p(0))^2\varphi'(x)\psi(x)dx + \frac{1}{4}\int_0^s (p(t))^2u_t(0,t)dt$$

car $u_t(a,t) = 0$.

En regroupant les résultats on aura d'une part :

$$(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q_s)} = \frac{1}{2}\int_0^a p'(s)(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx - \frac{1}{2}\int_0^a p'(0)(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{Q_s} p''(t)(\mathcal{I}_x^m u_t)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} p(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt})^2 dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^a (p(s))^2 u_x(x,s)u_t(x,s)dx - \frac{1}{2}\int_0^a (p(0))^2\varphi'(x)\psi(x)dx$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^s (p(t))^2(u_t(0,t))^2 dt$$

d’autre part :

$$(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(\mathrm{Q}_s)} = (f, Mu)_{L^2(\mathrm{Q}_s)}$$
$$= \left(f, (-1)^m p'(t)\mathcal{I}_x^{2m} u_t\right)_{L^2(\mathrm{Q}_s)} + \left(f, (-1)^m \frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt}\right)_{L^2(\mathrm{Q}_s)}$$
$$\le \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathrm{Q}_s)} + \frac{1}{2}\left\|p'(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_t\right\|^2_{L^2(\mathrm{Q}_s)}$$
$$+\frac{\alpha}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathrm{Q}_s)} + \frac{1}{2\alpha}\left\|\frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right\|^2_{L^2(\mathrm{Q}_s)} \quad \forall\alpha > 0$$

Comme

$$\frac{1}{2}\int_0^a (p(s))^2 u_x(x,s)u_t(x,s)dx \ge -\frac{1}{4}\int_0^a (p(s))^2(u_x(x,s))^2 dx - \frac{1}{4}\int_0^a (p(s))^2(u_t(x,s))^2 dx$$

on a alors :

$$\frac{1}{2}\int_0^a p'(s)(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^a p'(0)(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathrm{Q}_s} p''(t)(\mathcal{I}_x^m u_t)^2 dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathrm{Q}_s} p(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2 dxdt - \frac{1}{4}\int_0^a (p(s))^2(u_x(x,s))^2 dx - \frac{1}{4}\int_0^a (p(s))^2(u_x(x,s))^2 dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^a (p(0))^2\varphi'(x)\psi(x)dx + \frac{1}{4}\int_0^s (p(t))^2(u_t(0,t))^2 dt$$
$$\le (\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(\mathrm{Q}_s)} \le \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathrm{Q}_s)} + \frac{1}{2}\left\|p'(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_t\right\|^2_{L^2(\mathrm{Q}_s)}$$
$$+\frac{\alpha}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathrm{Q}_s)} + \frac{1}{2\alpha}\left\|\frac{p(t)}{2}\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right\|^2_{L^2(\mathrm{Q}_s)} \quad \forall\alpha > 0$$

Pour pouvoir appliquer le lemme de Grounwall on élémine les termes contenant $\mathcal{I}_x^m u_{tt}$ et on fait apparaitre un terme en $\mathcal{I}_x^m u_t$ dans le second membre.

Lemme 6

Pour $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,a)$, on a :

$$\int_0^a (\mathcal{I}_x^m u_t)^2 dx \le \frac{a^2}{2}\int_0^a \left(\mathcal{I}_x^{m-1}u_t\right)^2 dx$$

Preuve :

$$(\mathcal{I}_x^m u_t)^2 = \left(\int_0^x \mathcal{I}_x^{m-1} u_t dx\right)^2 \leq \left(\int_0^x (1)^2 dx\right)\left(\int_0^x \left(\mathcal{I}_x^{m-1} u_t\right)^2 dx\right) \qquad \forall x \in (0,a)$$

$$\leq x \int_0^x \left(\mathcal{I}_x^{m-1} u_t\right)^2 dx \leq x \int_0^a \left(\mathcal{I}_x^{m-1} u_t\right)^2 dx$$

donc $\displaystyle\int_0^a (\mathcal{I}_x^m u_t)^2 dx \leq \int_0^a x dx \int_0^a \left(\mathcal{I}_x^{m-1} u_t\right)^2 dx = \frac{a^2}{2} \int_0^a \left(\mathcal{I}_x^{m-1} u_t\right)^2 dx$

Conséquences immédiates du lemme 6

1. $\displaystyle\int_{Q_s} (\mathcal{I}_x^m u_t)^2 dxdt \leq \frac{a^2}{2} \int_{Q_s} \left(\mathcal{I}_x^{m-1} u_t\right)^2 dxdt$
2. $\displaystyle\int_{Q_s} (\mathcal{I}_x^m u_t)^2 dxdt \leq \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \int_{Q_s} (u_t)^2 dxdt$

Remarque

Du lemme précédent on en déduit aussi : $\displaystyle\int_{Q_s} (\mathcal{I}_x^m u_{tt})^2 dxdt \leq \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \int_{Q_s} (u_{tt})^2 dxdt$

Comme $0 < C_0 \leq p(t) \leq \overline{C_0} \qquad \forall t \in (0,T)$

- $\displaystyle\frac{1}{2} \int_{Q_s} p(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt})^2 dxdt \geq \frac{C_0}{2} \int_{Q_s} (\mathcal{I}_x^m u_{tt})^2 dxdt = \frac{C_0}{2} \|\mathcal{I}_x^m u_{tt}\|^2_{L^2(Q_s)}$
- $\displaystyle\frac{1}{2\alpha} \left\| \frac{p(t)}{2} \mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \right\|^2_{L^2(Q_s)} \leq \frac{\overline{C_0}^2}{8\alpha} \left\| \mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \right\|^2_{L^2(Q_s)} \leq \frac{\overline{C_0}^2}{8\alpha} \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \|\mathcal{I}_x^m u_{tt}\|^2_{L^2(Q_s)}$

comme annoncé ci dessus $\alpha > 0$ étant arbitraire, on choisit alors α tel que:

$$\frac{C_0}{2} = \frac{\overline{C_0}^2}{8\alpha}\left(\frac{a^2}{2}\right)^m \Rightarrow \alpha = \frac{\overline{C_0}^2}{4C_0}\left(\frac{a^2}{2}\right)^m$$

pour ce α on a alors :

$$\frac{1}{2}\int_0^a p'(s)(\mathcal{J}_x^m u_t(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^a p'(0)(\mathcal{I}_x^m \psi(x))^2 dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s} p''(t)(\mathcal{I}_x^m u_t)^2 dxdt$$

$$+\frac{C_0}{2}\int_{Q_s} (\mathcal{I}_x^m u_{tt})^2 dxdt - \frac{1}{4}\int_0^a (p(s))^2 (u_x(x,s))^2 dx - \frac{1}{4}\int_0^a p^2(s)(u_t(x,s))^2 dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a (p(0))^2 \varphi'(x)\psi(x) dx + \frac{1}{4}\int_0^s (p(t))^2 (u_t(0,t))^2 dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(Q_s)} + \frac{1}{2}\overline{C_1}^2\left(\frac{a^2}{2}\right)^m \|\mathcal{I}_x^m u_t\|^2_{L^2(Q_s)}$$

$$+\frac{\alpha}{2}\|f\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{C_0}{2}\|\mathcal{I}_x^m u_{tt}\|^2_{L^2(Q_s)}$$

en tenant compte que $\frac{1}{4}\int_0^s (p(t))^2(u_t(0,t))^2dt \geq 0$ on a alors :

$$\frac{1}{2}\int_0^a p'(s)(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx-\frac{1}{4}\int_0^a p^2(s)(u_x(x,s))^2dx-\frac{1}{4}\int_0^a p^2(s)(u_t(x,s))^2dx$$

$$\leq \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\|f\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\int_0^a p'(0)(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx+\frac{1}{2}\int_0^a (p(0))^2\varphi'(x)\psi(x)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{Q_s} p''(t)(\mathcal{I}_x^m u_t)^2dxdt+\frac{1}{2}C_1^2\left(\frac{a^2}{2}\right)^m\|\mathcal{I}_x^m u_t\|^2_{L^2(Q_s)}$$

$$0<C_1\leq p'(t)\leq \overline{C_1}\,,p''(t)\leq \overline{C_2}\quad \forall t\in(0,T)$$

L'inégalité ci-dessus s'écrit alors :

$$(2.1)\qquad \frac{C_1}{2}\int_0^a(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx-\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int_0^a(u_x(x,s))^2dx-\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int_0^a(u_t(x,s))^2dx$$

$$\leq\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\|f\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{\overline{C_1}}{2}\int_0^a(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx$$

$$+\left(\frac{\overline{C_2}}{2}+\frac{C_1^2}{2}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right)^m\|\mathcal{I}_x^m u_t\|^2_{L^2(Q_s)}$$

$$+\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int_0^a\left(\varphi'(x)\right)^2dx+\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int_0^a(\psi(x))^2dx$$

Pour éléminer les termes négatifs $-\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int_0^a(u_x(x,s))^2dx-\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int_0^a(u_t(x,s))^2dx$ on utilise le lemme 1(cf rappels et notations p.8)

$$(u_t(x,s))^2-(u_t(x,0))^2=\int_0^s\frac{\partial}{\partial t}(u_t(x,t))^2dt$$

$$=2\int_0^s u_t(x,t)u_{tt}(x,t)dt$$

$$\leq \varepsilon\int_0^s(u_t(x,t))^2dt+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(u_{tt}(x,t))^2dt\qquad \forall\varepsilon>0.$$

comme u_t et $u_{tt}\in L^2(Q_s)$ donc à $L^2(0,s)$ il en résulte que :

$$\exists\varepsilon_1>0\quad/\quad \frac{1}{\varepsilon_1}\int_0^s(u_{tt}(x,t))^2dt\leq\varepsilon_1\int_0^s(u_t(x,t))^2dt$$

Par suite :

$$(u_t(x,s))^2-(u_t(x,0))^2 \le \varepsilon_1\int_0^s (u_t(x,t))^2dt+\frac{1}{\varepsilon_1}\int_0^s (u_{tt}(x,t))^2dt \le 2\varepsilon_1\int_0^s (u_t(x,t))^2dt$$

donc :

$$(2.2)\qquad \int_0^a (u_t(x,s))^2dx-\int_0^a (\psi(x))^2dx \le 2\varepsilon_1\int_{Q_s} (u_t(x,t))^2dtdx$$

et :

$$(u_x(x,s))^2-(u_x(x,0))^2=\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}(u_x(x,t))^2dt=2\int_0^s (u_x(x,t))u_{xt}(x,t)dt$$

$\exists\varepsilon_2>0$ tel que:

$$(2.3)\qquad \int_0^a (u_x(x,s))^2dx-\int_0^a \left(\varphi'(x)\right)^2dx \le 2\varepsilon_2\int_{Q_s} (u_x(x,t))^2dxdt$$

des inégalites (2.2) et (2.3) on tire :

$$\begin{aligned}(2.4)\qquad &\int_0^a (u_t(x,s))^2dx+\int_0^a (u_x(x,s))^2dx\\ &\le \int_0^a (\psi(x))^2dx+\int_0^a \left(\varphi'(x)\right)^2dx\\ &\quad+2\varepsilon_1\int_{Q_s} (u_t(x,t))^2dtdx+2\varepsilon_2\int_{Q_s} (u_x(x,t))^2dxdt\end{aligned}$$

En multipliant l'inégalité (2.4) par la constante $\frac{\overline{C_0}^2}{2}$ et en l'ajoutant membre à membre à l'inégalité (2.1) on aura :

$$\begin{aligned}(2.5)\qquad &\frac{C_1}{2}\int_0^a (\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx+\left(\frac{\overline{C_0}^2}{2}-\frac{\overline{C_0}^2}{4}\right)\int_0^a (u_x(x,s))^2dx+\left(\frac{\overline{C_0}^2}{2}-\frac{\overline{C_0}^2}{4}\right)\int_0^a (u_t(x,s))^2dx\\ &\le \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\|f\|^2_{L^2(Q)}+\frac{\overline{C_1}}{2}\int_0^a (\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx+\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int_0^a \left(\varphi'(x)\right)^2dx\\ &\quad+\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int_0^a (\psi(x))^2dx+\left(\frac{\overline{C_2}}{2}+\frac{C_1^2}{2}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right)^m\|\mathcal{I}_x^m u_t\|^2_{L^2(Q_s)}\\ &\quad+\frac{\overline{C_0}^2}{2}\int_0^a \left(\varphi'(x)\right)^2dx+\frac{\overline{C_0}^2}{2}\int_0^a (\psi(x))^2dx\end{aligned}$$

$$+2\varepsilon_1\frac{\overline{C_0}^2}{2}\int\limits_{Q_s}(u_t(x,t))^2dxdt+2\varepsilon_2\frac{\overline{C_0}^2}{2}\int\limits_{Q_s}(u_x(x,t))^2dxdt$$

$$=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\|f\|^2_{L^2\left(Q_s\right)}+\frac{\overline{C}_1}{2}\int\limits_0^a(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx+3\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int\limits_0^a\left(\varphi'(x)\right)^2dx$$

$$+3\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int\limits_0^a(\psi(x))^2dx+\left(\frac{\overline{C_2}}{2}+\frac{C_1^2}{2}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right)^m\|\mathcal{I}_x^m u_t\|^2_{L^2\left(Q_s\right)}$$

$$+\varepsilon_1\overline{C}_0^2\int\limits_{Q_s}(u_t(x,t))^2dxdt+\varepsilon_2\overline{C_0}^2\int\limits_{Q_s}(u_x(x,t))^2dxdt$$

En remarquant que:

$$(u(x,s))^2-(u(x,0))^2=\int\limits_0^s\frac{\partial}{\partial t}(u(x,t))^2dt=2\int\limits_0^s(u(x,t))u_t(x,t)dt$$

$$\leq\int\limits_0^s(u(x,t))^2dt+\int\limits_0^s(u_t(x,t))^2dt$$

on a donc:

$$(2.6)\qquad\int\limits_0^a(u(x,s))^2dx\leq\int\limits_0^a(\varphi(x))^2dx+\int\limits_{Q_s}(u(x,t))^2dxdt+\int\limits_{Q_s}(u_t(x,t))^2dtdx$$

En ajoutant membre à membre l'inégalité $(2,6)$ à (2.5) on a :

$$\frac{C_1}{2}\int\limits_0^a(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx+\int\limits_0^a(u(x,s))^2dx+\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int\limits_0^a(u_x(x,s))^2dx+\frac{\overline{C_0}^2}{4}\int\limits_0^a(u_t(x,s))^2dx$$

$$\leq\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\|f\|^2_{L^2(Q)}+\frac{\overline{C}_1}{2}\int\limits_0^a(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx+\int\limits_0^a(\varphi(x))^2dx$$

$$+\frac{3}{4}\overline{C_0}^2\int\limits_0^a\left(\varphi'(x)\right)^2dx+\frac{3}{4}\overline{C_0}^2\int\limits_0^a(\psi(x))^2dx+\int\limits_{Q_s}(u(x,t))^2dxdt$$

$$+\left(\frac{\overline{C_2}}{2}+\frac{C_1^2}{2}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right)^m\|\mathcal{I}_x^m u_t\|^2_{L^2(Q_s)}+\left(\varepsilon_1\overline{C_0}^2+1\right)\int\limits_{Q_s}(u_t(x,t))^2dtdx$$

$$+\varepsilon_2\overline{C_0}^2\int\limits_{Q_s}(u_x(x,t))^2dtdx$$

En d'autres termes :

$$(2.7)\qquad\int\limits_0^a(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx+\int\limits_0^a(u(x,s))^2dx+\int\limits_0^a(u_x(x,s))^2dx+\int\limits_0^a(u_t(x,s))^2dx$$

$$\leq K\left[\|\mathcal{I}_x^m u_t\|^2_{L^2\left(Q_s\right)}+\int\limits_{Q_s}(u(x,t))^2dxdt+\int\limits_{Q_s}(u_t(x,t))^2dtdx+\int\limits_{Q_s}(u_x(x,t))^2dtdx\right]$$

où :

$$K=\frac{\max\left[\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right),\frac{\overline{C_1}}{2},\frac{3}{4}\overline{C_0}^2,\frac{1}{2}\overline{C_2}+\frac{1}{2}\overline{C_1}\left(\frac{a^2}{2}\right)^m,\varepsilon_1\overline{C_0}^2+1,\varepsilon_1\overline{C_0}^2,\varepsilon_2\overline{C_0}^2\right]}{\min\left[\frac{C_1}{2},1,\overline{C_0}^2\frac{1}{4}\right]}>0$$

d'où en posant :

$$h_2(s)=\int_0^a(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx+\int_0^a(u(x,s))^2dx+\int_0^a(u_x(x,s))^2dx+\int_0^a(u_t(x,s))^2dx$$

$$h_3(s)=K\left[\|f\|^2_{L^2(Q)}+\int_0^a(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx+\int_0^a(\psi(x))^2dx+\int_0^a(\varphi(x))^2dx+\int_0^a\left(\varphi'(x)\right)^2dx\right]$$

l'inégalité (2.7) s'ecrit alors :

$$h_2(s)\le h_3(s)+K\int_0^s h_2(t)dt$$

Une simple application du lemme de Grounwall donne:

$$h_2(s)\le\exp(Ks)h_3(s)$$

$$(2.8)\qquad \int_0^a(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx+\int_0^a(u(x,s))^2dx+\int_0^a(u_x(x,s))^2dx+\int_0^a(u_t(x,s))^2dx$$

$$\le\exp(Ks)K\left[\|f\|^2_{L^2(Q)}+\int_0^a(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx+\int_0^a(\psi(x))^2dx+\int_0^a(\varphi(x))^2dx+\int_0^a\left(\varphi'(x)\right)^2dx\right]$$

$$\le\exp(KT)K\left[\|f\|^2_{L^2(Q)}+\int_0^a(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx+\int_0^a(\psi(x))^2dx+\int_0^a(\varphi(x))^2dx+\int_0^a\left(\varphi'(x)\right)^2dx\right]$$

Comme pour tout $s\in[0,T]$ chacun des termes de gauche de l'inégalité (2.8) est inférieur ou égal au terme de droite de (2.8)

$$\sup_{s\in[0,T]}\int_0^a(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx$$

$$\le K\exp(KT)\left[\|f\|^2_{L^2(Q)}+\int_0^a(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx+\int_0^a(\psi(x))^2dx+\int_0^a(\varphi(x))^2dx+\int_0^a\left(\varphi'(x)\right)^2dx\right]$$

de manière identique pour les autres termes, on aura alors **:**

$$\sup_{s\in[0,T]}\int_0^a(\mathcal{I}_x^m u_t(x,s))^2dx+\sup_{s\in[0,T]}\int_0^a(u(x,s))^2dx+\sup_{s\in[0,T]}\int_0^a(u_x(x,s))^2dx+\sup_{s\in[0,T]}\int_0^a(u_t(x,s))^2$$

$$\le 4K\exp(KT)\left[\|f\|^2_{L^2(Q)}+\int_0^a(\mathcal{I}_x^m\psi(x))^2dx+\int_0^a(\psi(x))^2dx+\int_0^a(\varphi(x))^2dx+\int_0^a\left(\varphi'(x)\right)^2dx\right]$$

c'est -à-dire

$\exists C=4K\exp(KT)>0$ indépendante de u tel que $\forall u\in \mathrm{D}(L)$ on a **:**

$$(2.9)\qquad \|u\|^2_{\mathrm{B}}\le C\|Lu\|^2_{\mathrm{F}}.$$

Proposition

L'opérateur L admet une fermeture notée $\overline{L}$.

Preuve:

En utilisant le fait que $L^2(\mathrm{Q})$ s'injecte continument dans $\mathrm{D}'(\mathrm{Q})$ et l'opération de dérivation D^{α} ,$\alpha \in \mathbb{N}^n$ de tout ordre est continue de $\mathrm{D}'(\mathrm{Q})$ dans $\mathrm{D}'(\mathrm{Q})$ plus le fait que $\mathrm{D}'(\mathrm{Q})$ est séparé on déduit aisement que L est fermable (cf preuve identique dans le lemme 3 (p. 25)). c.q.f.d.

Soit $\overline{L}$ sa fermeture, comme les points de $R(\overline{L})$. (espace image par $\overline{L}$). sont obtenus comme limite de points de $R(L)$, en passant à la limite, l'inégalité de l'énergie (2.9) se prolonge à $\overline{L}$ et l'on a :

(2.10) $\quad \exists\, C > 0$ tel que $\forall u \in \mathrm{D}(\overline{L})$ $\qquad \|u\|_{\mathrm{B}}^2 \leq C\|\overline{L}.u\|_{\mathrm{F}}^2$

Définition

La solution de l'équation $\overline{L}.u = \mathcal{F}$ est une solution du problème $(1.1)-(1.5)$

De l'inégalité de l'energie (2.10) on déduit deux corollaires

Corollaire 1

Si le problème posé admet une solution, cette solution est unique

Preuve (évidente)

Corollaire 2:

$R(\overline{L})$ est fermé et $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$.

Preuve:

Par définition de $R(\overline{L})$ on a : $\qquad R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$.

Il suffit alors de montrer l'inclusion inverse.

Soit $z \in \overline{R(L)}$, par définition il existe une suite $(z_n)_n$ dans $R(L)$ tel que $z_n \longrightarrow z$ dans F quand $n \to +\infty$.

Comme $z_n \in R(L)$ $\exists\, u_n \in \mathrm{D}(L)$ tel que $z_n = Lu_n$

$0 \leq \|u_n - u_m\|_{\mathrm{B}}^2 \leq C\|L(u_n - u_m)\|_{\mathrm{F}}^2 = C\|Lu_n - Lu_m\|_{\mathrm{F}}^2 = C\|z_n - z_m\|_{\mathrm{F}}^2 \longrightarrow 0$ quand $n, m \to +\infty$.

car $(z_n)_n$ est convergente, donc elle est de Cauchy, par suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace de Banach B, d'où l'existence d'une fonction $u \in \mathrm{B}$ tel que $u_n \longrightarrow u$ dans B quand $n \longrightarrow +\infty$

Par définition de $\overline{L}$ on a alors $z = \overline{L}u$ et $z \in R(\overline{L})$ donc $\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$

En conclusion :$\overline{R(L)} = R(\overline{L})$ et $R(\overline{L})$ est fermé c.q.f.d.

5.3 Existence d'une solution

On a montré que $\overline{L}$ est injectif de $\mathrm{D}(\overline{L})$ dans F (corollaire 1), il reste à prouver que $\overline{L}$ est surjectif .

Pour cela il suffit de montrer que $R(\overline{L}) = \mathrm{F}$ c'est à dire: :$\overline{R(L)} = \mathrm{F}$ (corollaire 2).

Théorème

Si les conditions (H) sont satisaites, alors pour chaque $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ donné le problème $(1.1)-(1.5)$ admet une solution forte unique: $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}\mathcal{F}}$ vérifiant (2.10).

Preuve:
Pour la preuve du théorème on a besoin du résultat suivant:

Proposition:

Pour $\omega \in L^2(\mathrm{Q})$ et si $\forall u \in \mathrm{D}_0(L)$

$$(3.1) \qquad (\mathcal{L}u,\omega)_{L^2(\mathrm{Q})} = 0$$

alors $\omega = 0$ presque partout dans Q.

Preuve:

Comme $(\mathcal{L}u,\omega)_{L^2(\mathrm{Q})} = 0 \quad \forall u \in \mathrm{D}_0(L)$ on peut exprimer (3.1) sous une forme spéciale.

Soit alors

$$\mathcal{I}_x^{2m} u_t = \begin{cases} \int_s^t \mathcal{I}_x^{2m} u_{\tau\tau} d\tau & \text{si } t \in [s,T] \\ 0 & \text{si } t \in [0,s] \end{cases}$$

et soit $\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt}$ solution de l'équation:

$$-(-1)^{m+1} p(t) \mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} + (-1)^{m+1} \frac{1}{2} \int_t^T p(t) \left[\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \right] dt = h(x,t) \text{ où } h(x,t) = \int_t^T \omega(x,\tau) d\tau$$

Par dérivation par rapport à t, on tire que:

$$(3.2) \qquad \omega(x,t) = (-1)^{m+1} \left(p(t) \mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \right)_t + (-1)^{m+1} \frac{1}{2} p(t) \left[\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \right]$$

Lemme 7:

La fonction $\omega(x,t)$ définie par (3.2) est dans $L^2(\mathrm{Q}_s)$.

Preuve

De la remarque des conséquences immédiates du lemme 6 (cf page 47), il résulte que : $\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \in L^2(\mathrm{Q}_s)$. Il reste à montrer que : $\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \right] \in L^2(\mathrm{Q}_s)$. Pour cela On utilise les t –opérateurs de régularisation (cf Rappels).On applique successivement les opérateurs $\varrho\varepsilon$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ à l'équation:

$$-(-1)^{m+1} p(t) \mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} + (-1)^{m+1} \frac{1}{2} \int_t^T p(t) \left[\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \right] dt = h(x,t)$$

et l'on a:

$$(-1)^m p(t) \frac{\partial}{\partial t} \varrho\varepsilon \mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} = -(-1)^m p'(t) \varrho\varepsilon \mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} + (-1)^m \frac{\partial}{\partial t} \left[p(t) \varrho\varepsilon \mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} - \varrho\varepsilon p(t) \mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \right]$$
$$+ (-1)^m \frac{\partial}{\partial t} \left[\varrho\varepsilon \frac{1}{2} \int_t^T p(t) \left[\mathcal{I}_x^{2m} u_{tt} \right] dt \right] + \frac{\partial}{\partial t} [\varrho\varepsilon h]$$

Il s'ensuit que **:**

$$\left\| p(t)\frac{\partial}{\partial t}\varrho\varepsilon\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right\|_{L^2(Q_s)}^2$$

$$\leq 4\left\|p'(t)\varrho\varepsilon\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right\|_{L^2(Q_s)}^2+4\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left[p(t)\varrho\varepsilon\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}-\varrho\varepsilon p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right]\right\|_{L^2(Q_s)}^2$$

$$+4\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left[\varrho\varepsilon\frac{1}{2}\int_t^T p(t)\left[\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right]dt\right]\right\|_{L^2(Q_s)}^2+4\left\|\frac{\partial}{\partial t}[\varrho\varepsilon h]\right\|_{L^2(Q_s)}^2$$

En utilisant les propriétés des opérateurs $\varrho\varepsilon$ et les conditions (1.6) sur p et p' on a:

$$C_0^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right\|_{L^2(Q_s)}^2\leq 4\overline{C}_1^2\left\|\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right\|_{L^2(Q_s)}^2+\overline{C}_0^2\left\|\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right\|_{L^2(Q_s)}^2$$

$$+4\left\|\frac{\partial}{\partial t}[h]\right\|_{L^2(Q_s)}^2$$

Des conséquences immédiates du lemme 6 (p.47), on déduit que:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right\|_{L^2(Q_s)}^2<+\infty \qquad \text{ie : } \mathcal{I}_x^{2m}u_{ttt}\in L^2(Q_s)$$

et par suite: $\omega\in L^2(Q_s)$.

Preuve de la proposition:

On calcule alors $(\mathcal{L}u,\omega)_{L^2(Q_s)}$, séparément on obtient:

$$I_1=\left(u_{tt},(-1)^{m+1}\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right)_t\right)_{L^2(Q_s)}=\int_{Q_s}u_{tt}(-1)^{m+1}\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right)_t dxdt.$$

$$(-1)^{m+1}\int_{Q_s}\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{I}_x u_{tt}]\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right)_t dxdt$$

$$=(-1)^{m+1}\int_s^T\mathcal{I}_x u_{tt}\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right)_t\Big|_{x=0}^{x=a}dt-(-1)^{m+1}\int_{Q_s}[\mathcal{I}_x u_{tt}]\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m-1}u_{tt}\right)_t dxd$$

$$=-(-1)^{m+1}\int_{Q_s}[\mathcal{I}_x u_{tt}]\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m-1}u_{tt}\right)_t dxd$$

En continuant ces intégrations par parties jusqu'à l'ordre m on a:

$$I_1=(-1)^m(-1)^{m+1}\int_{Q_s}\mathcal{I}_x^m u_{tt}\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right)_t dxdt$$

$$=-\int_{Q_s}\mathcal{I}_x^m u_{tt}\left(p'(t)\mathcal{I}_x^m u_{tt}+p(t)\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{I}_x^m u_{tt}\right)dxdt$$

$$=-\int_{Q_s}p'(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt})^2dxdt-\frac{1}{2}\int_{Q_s}p(t)\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathcal{I}_x^m u_{tt}\right]^2dxdt$$

Par suite

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^a p(s)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s} p'(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2 dxdt$$

De même:

$$I_2 = \left(u_{tt}, (-1)^{m+1}\frac{1}{2}p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right)_{L^2(Q_s)}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{2}\int_{Q_s} u_{tt}p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}dxdt = \frac{(-1)^{m+1}}{2}\int_{Q_s} p(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{J}_x u_{tt}\right)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}dxdt$$

En poursuivant ces intégrations par parties jusqu'à l'ordre m on obtient:

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int_{Q_s} p(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2 dxdt$$

$$I_3 = \left((-1)^m p(t)\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}}, (-1)^{m+1}\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right)_t\right)_{L^2(Q_s)}$$

$$= (-1)^{2m+1}\int_{Q_s} p(t)\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}}\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right)_t dxdt$$

A la suite d'intégrations par parties jusqu'à l'ordre $2m$, I_3 s'écrit:

$$I_3 = -\int_0^a (p(s))^2 u_x(x,s)u_{tt}(x,s)dx + \int_{Q_s} p'(t)p(t)u_x u_{tt} + \int_{Q_s} (p(t))^2 u_{xt}u_{tt}dxdt$$

$$I_4 = \left((-1)^m p(t)\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}}, (-1)^{m+1}\frac{1}{2}\left(p(t)\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{Q_s} p^2(t)\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}}\mathcal{I}_x^{2m}u_{tt}dxdt.$$

A la suite de $2m$ intégrations par parties I_4 s'écrit:

$$I_4 = -\frac{1}{2}\int_{Q_s} (p(t))^2 u_x u_{tt}dxdt$$

on obtient alors:

$$0 = (\mathcal{L}u, \omega)_{L^2(Q)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a p(s)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s} p'(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2 dxdt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{Q_s} p(t)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2 dxdt - \int_0^a (p(s))^2 u_x(x,s)u_{tt}(x,s)dx$$

$$+\int_{Q_s} p'(t)p(t)u_x u_{tt}dxdt + \int_{Q_s} (p(t))^2 u_{xt}u_{tt}dxdt. -\frac{1}{2}\int_{Q_s} (p(t))^2 u_x u_{tt}dxdt$$

qui s'écrit alors:

$$(3.1)\quad \frac{1}{2}\int_0^a p(s)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,s))^2dx-\int_0^a (p(s))^2u_x(x,s)u_{tt}(x,s)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{Q_s}\left[p(t)+p'(t)\right](\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2dxdt-\int_{Q_s}p'(t)p(t)u_xu_{tt}dxdt$$

$$-\int_{Q_s}(p(t))^2u_{xt}u_{tt}dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_s}(p(t))^2u_xu_{tt}dxdt.$$

On commence par minorer les termes de gauche de (3.1)

$$(3.2)\quad \frac{C_0}{2}\int_0^a(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,s))^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^a p(s)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,s))^2dx$$

$$\int_0^a(p(s))^2u_x(x,s)u_{tt}(x,s)dx\le\frac{\varepsilon}{2}\int_0^a(p(s))^2(u_{tt}(x,s))^2dx+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^a(p(s))^2(u_x(x,s))^2dx\ ,\forall\varepsilon>0$$

En utilisant le lemme1 de la partie 2 (Rappels et notations) on a:

$\exists\varepsilon_1>0$ tel que :

$$\int_0^a(p(s))^2u_x(x,s)u_{tt}(x,s)dx\le 2\frac{\varepsilon_1}{2}\int_0^a(p(s))^2(u_{tt}(x,s))^2d\le\varepsilon_1\ \overline{C}_0^2\int_0^a(u_{xx}(x,s))^2dx$$

Par suite

$$(3.3)\quad -\varepsilon_1\ \overline{C}_0^2\int_0^a(u_{tt}(x,s))^2dx\le-\int_0^a(p(s))^2u_x(x,s)u_{tt}(x,s)dx$$

Puis on majore les termes du membre droit de (3.1)

$$(3.4)\quad \frac{1}{2}\int_{Q_s}\left(p(t)+p'(t)\right)(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2dxdt\le\frac{1}{2}\left(\overline{C}_0+\overline{C}_1\right)\int_{Q_s}(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2dxdt$$

$$-\int_{Q_s}p(t)p'(t)u_xu_{tt}dxdt\le\frac{\varepsilon}{2}\int_{Q_s}p^2(t)(u_{tt})^2dxdt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{Q_s}\left(p'(t)\right)^2(u_x)^2dxdt\quad\forall\varepsilon>0\ldots$$

Par le meme lemme:$\exists\varepsilon_2>0$ tel que:

$$-\int_{Q_s}p(t)p'(t)u_xu_{tt}dxdt\le 2\frac{\varepsilon_2}{2}\int_{Q_s}p^2(t)(u_{tt})^2dxdt$$

Par suite:

$$(3.4)\quad -\int_{Q_s}p(t)p'(t)u_xu_{tt}dxdt\le\varepsilon_2\overline{C}_0^2\int_{Q_s}(u_{tt})^2dxdt$$

En procédant de la même manière

$$(3.5)\qquad -\int_{Q_s} p^2(t)u_{xt}u_{tt}dxdt \leq \varepsilon_3\overline{C}_0^2 \int_{Q_s} (u_{tt})^2dxdt \ \ ,\varepsilon_3 > 0$$

$$(3.6)\qquad \frac{1}{2}\int_{Q_s} p^2(t)u_xu_{tt}dxdt \leq \varepsilon_4\frac{\overline{C}_0^2}{2} \int_{Q_s} (u_{tt})^2dxdt \ \ ,\varepsilon_4 > 0.$$

En regroupant les inégalités $(3.2)-(3.6)$ on a:

$$(3.7)\qquad \frac{C_0}{2}\int_0^a(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,s))^2dx - \varepsilon_1 \overline{C}_0^2 \int_0^a(u_{tt}(x,s))^2dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\overline{C}_0+\overline{C}_1\right)\int_{Q_s}(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2dxdt$$
$$+\left(\varepsilon_2\overline{C}_0^2+\varepsilon_3\overline{C}_0^2+\varepsilon_4\frac{\overline{C}_0^2}{2}\right)\int_{Q_s}(u_{tt})^2dx$$

Pour éléminer le terme négatif dans l'inégalité (3.7) on utilise le lemme suivant **:**

Lemme 8

Pour $u_{tt} \in L^2\left(Q_s\right)$, $\exists\, C > 0$ telle que : $\int_0^a(u_{tt}(x,s))^2dx \leq C\int_{Q_s}(u_{tt})^2dxdt.$

Preuve

La preuve est identique à celle donnée en partie 4 (page).

En multipliant membre à membre par $\left(1+\varepsilon_1 \overline{C}_0^2\right)$ l'inégalité donnée par le lemme ci dessus

$$(3.8)\qquad \left(1+\epsilon_1 \overline{C}_0^2\right)\int_0^a(u_{tt}(x,s))^2dx \leq \left(1+\epsilon_1 \overline{C}_0^2\right)C\int_{Q_s}(u_{tt})^2dxdt.$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (3.7) et (3.8) on obtient **:**

$$\frac{C_0}{2}\int_0^a(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,s))^2dx + \int_0^a(u_{tt}(x,s))^2dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\overline{C}_0+\overline{C}_1\right)\int_{Q_s}(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2dxdt$$
$$+\left[\varepsilon_2\overline{C}_0^2+\varepsilon_3\overline{C}_0^2+\varepsilon_4\frac{\overline{C}_0^2}{2}+\left(1+\varepsilon_1\overline{C}_0^2\right)C\right]\int_{Q_s}(u_{tt})^2dxdt.$$

Par suite il existe une constante $K > 0$, independandante de u **:**

$$K = \frac{\max\left[\frac{1}{2}\left(\overline{C}_0+\overline{C}_1\right),\left[\varepsilon_2\overline{C}_0^2+\varepsilon_3\overline{C}_0^2+\varepsilon_4\frac{\overline{C}_0^2}{2}+\left(1+\varepsilon_1\overline{C}_0^2\right)C\right]\right]}{\min\left[1,\frac{C_0}{2}\right]}$$

telle que:

$$(3.9)\quad \int_0^a(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,s))^2dx+\int_0^a(u_{tt}(x,s))^2dx \le K\left[\int_{Q_s}(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2dxdt+\int_{Q_s}(u_{tt})^2dxdt\right]$$

En posant: $y(s) = \int_{Q_s}(\mathcal{I}_x^m u_{tt}(x,t))^2dxdt+\int_{Q_s}(u_{tt})^2dxdt,$ l'inégalité (3.9) s'écrit

$$-\frac{dy(s)}{ds} \le Ky(s)$$

c'ést à dire **:**

$$(3.10)\qquad -\frac{d}{ds}\left[y(s)e^{Ks}\right] \le 0$$

En intégrant (3.10) sur l'intervale $[s,T]$ et sachant que $y(T) = 0$ on a:

$$\int_s^T -\frac{d}{ds}\left[y(s)e^{Ks}\right]ds = -y(T)e^{KT}+y(s)e^{Ks} = y(s)e^{Ks} \le 0$$

comme $y(s) \ge 0 \quad \forall s \in (0,T)$ il en résulte que: $y(s) = 0$ et par suite:

$\omega = 0$ presque partout sur Q_s

s étant indépendant de l'origine, en procédant de la même manière pas à pas on couvre tout le rectangle $Q_T = (0,a)\times(0,T)$, et l'on a: $\omega = 0$ pp$\left(Q_T\right)$, ce qui termine la preuve de la proposition

On revient maintenant à la démonstration de la surjectivité de l'opérateur $\overline{L}$, c'est à dire : $\overline{R(L)}$ =F

Dans un espace de Hilbert F, $R(L)$ est dense dans F si et seulement si l'orthogonal de $R(L)$ dans F est réduit à l'élément nul dans F

Si alors : $W = \left(\omega,\omega_1,\omega_2\right) \in R(L)^{\perp}$ et $Lu = \left(\mathcal{L}u,\ell_1u,\ell_2u\right) \in R(L)$

$(Lu,W)_{\mathrm{F}} = 0$? $\Rightarrow$, W est l'élément nul dans F

$$(Lu,W)_F = (\mathcal{L}u,\omega)_{L^2(\mathrm{Q})}+\left(\ell_1u,\omega_1\right)_{\mathrm{H}^1(0,a)}+\left(\ell_2u,\omega_2\right)_{L^2(\mathrm{Q})}+\left(\ell_2u,\omega_2\right)_{\mathrm{B}_2^m(0,a)}$$

Si on choisit $u \in \mathrm{D}_0(L)$ ie: $\ell_1u = 0$ et $\ell_2u = 0$ $:(Lu,W)_{\mathrm{F}} = 0 \Rightarrow (\mathcal{L}u,\omega)_{L^2(\mathrm{Q})} = 0$

La proposition ci dessus donne alors : $\omega = 0$ pp$\left(\mathrm{Q}\right)$, par suite $(Lu,W)_{\mathrm{F}}$ s'écrit alors:

$$\left(\ell_1u,\omega_1\right)_{\mathrm{H}^1(0,a)}+\left(\ell_2u,\omega_2\right)_{L^2(\mathrm{Q})}+\left(\ell_2u,\omega_2\right)_{\mathrm{B}_2^m(0,a)} = 0$$

Comme ℓ_1 et ℓ_2 sont indépendantes et que $\overline{R(\ell_1)} = \mathrm{H}_1(0,a)$, $\overline{R(\ell_2)} = \mathrm{L}^2(0,a)$ et $\overline{R(\ell_2)} = \mathrm{B}_2^m(0,a)$, il en résulte $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$.

En résumé $W = (0,0,0)$ c'est à dire l'orthogonal de $R(L)$ dans F est réduit à l'élément nul dans F
Donc $R(\overline{L}) = \overline{R(L)} = \mathrm{F}$ - ie l'opérateur $\overline{L}$ est surjectif de B dans F

5.4 Conclusion :

Conclusion:
Pour tout (f,φ,ψ) donné il existe un et un seul $u \in \mathrm{B}$ qui est solution du problème posé.

Partie 6

CONCLUSION

Partie 6
Conclusion

La méthode des estimations à priori établit l'existence et l'unicité de la solution des problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles.

Elle établit aussi la dépendance continue de la solution du problème aux limites par rapport aux données du problème. Un autre avantage de taille réside dans le fait que la méthode peut être appliquée pour des problèmes aux limites dont les conditions sont toutes locales, toutes globales (formes intégrales) ou mixtes.

Les inconvénients de la méthode résident dans le fait que jusqu'à ce jour, il n'y a pas de résultats établis qui permettent de faire le choix de l'espace de Banach $B,$ de l'espace de Hilbert $F,$ et de l'opérateur multiplicateur $M.$ $,M,$ $B,$ F sont les outils de base de l'inégalité de l'énergie **:**

$$\|u\|_B \leq C\,\|Lu\|_F, \quad C > 0, \;\; u \in D(L) \quad \text{et} \quad L : B \rightarrow F.$$

Le même inconvénient se pose également pour le choix de la fonction intermédiaire ω qui permet d'établir l'existence d'au moins une solution du problème posé. Le choix de $B,$ $F,$ M et ω reste soumis dans une certaine mesure à l'intuition et au tâtonnement.

Des recherches futures sur la méthode des estimations à priori sont à entreprendre pour déterminer ou au moins faciliter le choix de $B,$ $F,$ M et ω .

Bien que les problèmes posés dans les parties 4 et 5 soient entiérement résolus, il reste encore quelques questions ouvertes ayant trait aux points suivants **:**

– Il serait trés utile d'étudier le cas où les conditions aux limites sont non homogénes dans les problèmes traités dans la partie 4 et la partie 5.

– Il serait également utile d'envisager la résolution des problèmes proposés dans les parties 4 et 5 au cas où l'ouvert Q_T serait de la forme $(0,a) \times (0,b) \times (0,T)$ et en adaptant les opérateurs différentiels $\mathcal{L}$ à l'ouvert $Q_T.$

– Il serait intéressant d'utiliser la méthode des estimations à priori pour obtenir des résultats pour le même type de conditions aux limites utilisées dans les parties 4 et 5 pour des équations semi-linéaires, quasi-linéaires et non linéaires.

REFERENCES

[1] **A. BOUZIANI,** Mixed problem with integral condition for a certain parabolic equation .Journal of applied Mathematic And Stochastic Analysis.9 N° 3 (1996) 323-330.

[2] **A. BOUZIANI,** Solution forte d'un problème mixte avec condition intégrale pour une classe d'équations paraboliques .Maghreb Mathematical Review 6 N° 1 (1977) 1 (17).

[3] **A. BOUZIANI,** Thése de Doctorat d'Etat.Université de Constantine.(1998)

[4] **H. BRESIS,** Analyse fonctionnelle ,Théorie et Application.Masson (1983).

[5] **J.R. CANNON,Y.LIN, J.VAN DER HOCK,** A quasi-linear parabolic equation with non local boundary condition, Rend Math Appl (7),9 (1989) 239-264.

[6] **J.R. CANNON,** The solution of heat equation subject to the specification of energy, Quant appl Math 21 (1963) 155-160.

[7] **A.A. DEZIN,** Théorèmes d'éxistence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels ,Usepekhi .Math Naouk 14, N° 3 (87) 22-73.(1959)

[8] **L. GARDING,** Cauchy problem for hyperbolic equations, University of Chicago, Lecture notes (1957).

[9] **N.I. IONKIN,** Solution of boundary value problem in heat conducting theory with non local boundary conditions, Differ Uravn 13 (1977) 294-304.

[10] **N.I. IONKIN,** Stability of a problem in heat conduction theory with non local boundary conditions ,Differ Uravn 15 (7) (1979) 1279-1283.

[11] **N.I. IONKIN, E.I. MORSEER,** A problem for the heat conduction equation theory with two boundary conditions, Differ Uravn 15 (07) (1979) 1284-1295.

[12] **N.I. KAMYAIN,** A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary conditions, Theiret Vychisl Math Fiz 4 (06) (1964) 1006-1024.

[13] **A.V. KARTYNNIK,** Three point boundary value problem with an integral space variables conditions for second order parabolic equation, Differ Uravn ,26 (1990) 1568-1575.

[14] **O.A. LADYZHENSKAYA**, The boundary value problems of Mathematical Physics, Springer Verlag,(1985).

[15] **S. MESLOUB, M. MEDJDEN,** A mixed problem for a parabolic equation for higher order with integral conditions.Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, Vol 50,N°3 (2002) 314-322.

[16] **N.I. YURCHUK,** Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differ Uravn, 22 (12) (1986) 2114-2126.