

N° d'ordre :40/2008-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI  
BOUMEDIENE  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMORE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Génie Mathématiques

Par : YAHY Zahra

THEME

**SUR LA CONCAVITÉ DES MOYENNES  
GRADUÉES DANS LE TREILLIS DES  
PARTITIONS D'UN ENSEMBLE**

**CHAABANE Djamel**, Maître de Conférences, USTHB

Président

**BOUROUBI Sadek**, Maître de Conférences, USTHB

Directeur du mémoire

**BOUCHEMAKH Isma**, Professeur, USTHB

Examinatrice

**BELBACHIR Hacène**, Maître de Conférences, USTHB

Examineur

**BENCHERIF Farid**, Maître de Conférences, USTHB

Examineur

---

## Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Généralités</b>	<b>3</b>
1.1	Un aperçu sur la théorie des graphes . . . . .	3
1.2	Définitions et terminologie . . . . .	4
1.3	Théorie des posets . . . . .	7
1.3.1	La représentation graphique d'un poset fini . . . . .	8
1.3.2	Fonctions dans un poset . . . . .	10
1.4	Sur les treillis . . . . .	12
1.4.1	Définitions et notations . . . . .	12
1.5	Typologie de treillis . . . . .	17
1.5.1	Treillis gradué . . . . .	18
1.5.2	Treillis complété et treillis relativement complété . . . . .	18
1.5.3	Treillis atomique . . . . .	19
1.5.4	Treillis modulaire . . . . .	20
1.5.5	Treillis géométrique . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Sur le treillis des partitions d'un ensemble</b>	<b>23</b>
2.1	Définitions et résultats . . . . .	23
2.2	Pourquoi le poset des partitions d'un ensemble est t-il un treillis? . . . . .	25
2.2.1	Quel est l'infimum de deux partitions? . . . . .	25

2.2.2	Quel est le supremum de deux relations d'équivalence? . . . . .	27
2.2.3	Comment obtenir explicitement le supremum de deux partitions? . . . . .	30
2.3	Quelle est la nature du treillis des partitions d'un ensemble? . . . . .	32
2.3.1	Le treillis des partitions est complété et relativement complété . . . . .	33
2.3.2	Le procédé d'obtention d'une partition orthogonale à une autre . . . . .	33
2.3.3	Le treillis des partitions est t-il atomique? . . . . .	34
2.3.4	Le treillis des partitions est t-il modulaire? . . . . .	35
2.3.5	Le treillis des partitions est t-il géométrique? . . . . .	36
2.4	Nombres de Stirling de seconde espèce . . . . .	36
2.4.1	Quelques propriétés des nombres de Stirling . . . . .	37
2.5	Nombres de Bell . . . . .	37
2.6	Sur l'unimodalité, la convexité et la concavité . . . . .	38
2.6.1	Quelques définitions . . . . .	38
2.7	Quelques principaux résultats . . . . .	40
2.7.1	Application de la propriété de la négativité des racines d'un polynôme à coefficients positifs . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Autour de la conjecture de Konrad Engel</b> . . . . .	<b>44</b>
3.1	Introduction . . . . .	44
3.2	Qu'est ce que la moyenne graduée dans le treillis des partitions d'un ensemble? . . . . .	45
3.3	Quelques définitions et notations . . . . .	45
3.4	Principaux résultats . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Asymptotiquement la conjecture de Konrad Engel est vraie</b> . . . . .	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	Principaux résultats . . . . .	49
4.3	Approximation du nombre de Bell . . . . .	52
4.4	La preuve asymptotique de la conjecture de K. Engel . . . . .	53
4.5	A propos de la séquence $\left(\frac{B_n}{n!}\right)_n$ . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Sur la Conjecture forte de Sadek Bouroubi</b> . . . . .	<b>62</b>
5.1	Introduction . . . . .	62
5.2	Principaux résultats . . . . .	62

5.3 Les racines de l'équation  $d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = 0$  pour quelques valeurs de  $n$  . . . . 65

---

## Liste des tableaux

---

2.1	Le tableau représentant l'infimum de deux partitions $\pi_1$ et $\pi_2$ . . . . .	26
2.2	Quelques valeurs des nombres de Stirling . . . . .	37
5.1	Les solutions de l'équation $d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = 0$ pour $n = 150$ . . . . .	65
5.2	Les solutions de l'équation $d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = 0$ pour $n = 200$ . . . . .	66
5.3	Les solutions de l'équation $d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = 0$ pour $n = 300$ . . . . .	66
5.4	Les solutions de l'équation $d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = 0$ pour $n = 350$ . . . . .	67

---

## Table des figures

---

1.1	Un graphe représentant la relation de divisibilité sur $V$ . . . . .	4
1.2	Le graphe biparti $K_{3,3}$ . . . . .	5
1.3	Le graphe complet $K_5$ . . . . .	6
1.4	Représentation de l'union de deux graphes. . . . .	6
1.5	Un graphe et sa fermeture transitive. . . . .	7
1.6	La représentation graphique des diviseurs de 60 ordonnés par divisibilité. . . . .	8
1.7	Un poset avec trois éléments maximaux et un élément minimal. . . . .	9
1.8	Poset et son dual. . . . .	10
1.9	Exemple d'une fonction de rang. . . . .	11
1.10	Un poset qui n'est pas un treillis. . . . .	13
1.11	Virus de treillis. . . . .	13
1.12	Un poset de $E$ . . . . .	14
1.13	Sup-demi-treillis. . . . .	15
1.14	Inf-demi-treillis. . . . .	15
1.15	Treillis . . . . .	16
1.16	Sous treillis de treillis des diviseurs de 60 muni de la divisibilité. . . . .	17
1.17	Un treillis non gradué. . . . .	18
1.18	Treillis non complémenté. . . . .	18
1.19	Treillis complémenté et non relativement complémenté. . . . .	19
1.20	Treillis non atomique. . . . .	19

1.21	Treillis atomique. . . . .	20
1.22	Treillis non modulaire. . . . .	21
2.1	Un graphe représentant la partition $\pi$ . . . . .	24
2.2	Le supremum de deux relations d'équivalences correspondant à deux partitions. . . . .	28
2.3	Le graphe biparti associé à deux partitions $(G(\pi_1 \cup \pi_2, \xi))$ . . . . .	31
2.4	Un tableau représentant le supremum des partitions $\pi_1$ et $\pi_2$ . . . . .	31
2.5	Le treillis des partitions $P_4$ . . . . .	32
2.6	Le treillis des partitions $P_3$ . . . . .	33
2.7	La figure illustrant la non modularité de $P_n$ . . . . .	35
3.1	La figure illustrant la non distributivité de $P_n$ . . . . .	47

---

## Introduction générale

---

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui, sur des ensembles finis, traite des problèmes de dénombrements (ou comptages), d'énumérations (ou listages) et d'estimations (encadrements et asymptotisme).

Cette vision, certes assez réductrice, est cependant très riche. Les principales applications du sujet se présentent évidemment en calcul des probabilités et en statistique. Néanmoins, il ne faut pas dissimuler que bien des problèmes traditionnels de l'analyse, de l'algèbre et de la géométrie sont d'essence combinatoire, et évidemment, plus encore, ceux récemment posés par l'informatique.

Les méthodes des combinatoriens, qui étaient originellement adaptées à la seule résolution de problèmes particuliers, tendent actuellement à utiliser des méthodes générales de résolution : fonctions génératrices, bijections, probabilisation, génération automatique d'identités, théorie des groupes, fonctions de la variable complexe, arithmétique, etc.

Enfin, depuis quelques années, la recherche de l'explicite dans beaucoup de domaines des mathématiques a achevé de donner force de loi à des calculs combinatoires réputés difficiles, maintenant maîtrisés.

Le sujet dont fait objet notre mémoire, rentre dans le cadre d'une théorie appelée théorie de Sperner, dite encore théorie des ordres partiels dont l'origine remonte à 1928



quand Sperner a énoncé que le nombre maximum de sous-ensembles d'un ensemble à  $n$  éléments, tel que aucun sous-ensemble ne contient l'autre est le nombre de sous-ensembles de taille  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

Notre but est d'étudier la concavité d'une suite particulière dans le treillis des partitions d'un ensemble que K. Engel a conjecturé vraie.

Il nous a paru important avant d'entrer dans le vif du sujet, de tenter d'expliquer les raisons qui nous ont amené à rédiger ce mémoire, ces raisons sont au nombre de trois :

La première est de réunir dans un seul document les travaux en rapport avec le treillis des partitions d'un ensemble, la deuxième raison est motivée par certains travaux, citons entre autres, les travaux de S. Bouroubi menés en collaboration avec K. Engel et R. Canfield [5], [21], [8] et la troisième, est de tenter de répondre aux deux questions ouvertes, telles que la conjecture de K. Engel et la conjecture de S. Bouroubi, et à contribuer ou améliorer les résultats existants.

Afin de bien présenter ce travail, nous avons élaboré le plan suivant :

Après un premier chapitre introductif comportant des généralités sur la théorie des graphes et les posets, vient le deuxième chapitre dans lequel nous présentons les notions et les principaux résultats concernant le treillis des partitions d'un ensemble.

Au chapitre trois, se trouve ce qui a trait à l'étude de la conjecture de K. Engel, suivie de la démonstration asymptotique détaillée de cette dernière dans le quatrième chapitre.

Nous consacrons le cinquième chapitre à la conjecture de S. Bouroubi dite conjecture forte utilisant des polynômes.

Nous terminons ce manuscrit par une conclusion générale et quelques perspectives en listant les plus importants ouvrages ou articles mathématiques, grâce, auxquels, le lecteur pourra, s'il le veut, pousser plus loin cette étude.

# CHAPITRE 1

---

## Généralités

---

### Introduction

Ce chapitre précise le langage employé et introduit les notions de base auxquelles le manuscrit aura par la suite constamment recours. Bien que n'ayant pas l'intention d'étudier les graphes, nous ferons parfois usage d'un peu de leur langage, c'est la raison de la première partie de ce chapitre, le lecteur désireux de plus de détail pourra se référer à [18]. Dans une deuxième partie, nous abordons d'une manière détaillée la théorie des posets en mettant l'accent sur la notion de treillis qui est l'élément essentiel dans notre étude.

### 1.1 Un aperçu sur la théorie des graphes

Les graphes sont des structures combinatoires, utilisées comme modèles pour représenter des relations entre objets (graphe orienté) ou des relations symétriques entre eux (graphe non orienté), rencontrées dans des applications faisant intervenir des mathématiques discrètes et nécessitant une solution informatique, telles que les circuits électriques, réseaux d'ordinateurs, ordonnancement d'un ensemble de tâches sont les principaux domaines d'application où la structure de graphe intervient. Un graphe non orienté peut être utilisé pour modéliser des relations de conflits entre individus ou objets. Un graphe orienté

représente typiquement un réseau de communication, ou encore des relations de domination non réciproque entre personnes, etc.

## 1.2 Définitions et terminologie

Un **graphe orienté**  $G$  est un ensemble des sommets pouvant être connectés par des arcs.

On note  $G = (V, U)$  où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $U$  l'ensemble des arcs.

Les sommets d'un graphe peuvent par exemple représenter des objets et les arcs des relations entre objets.

S'il existe un arc partant de  $u$  vers  $v$ ,  $u$  et  $v$  sont dit adjacents.

**Exemple 1.2.1.** Soit  $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

$(u, v) \in U \iff u \text{ divise } v$ .

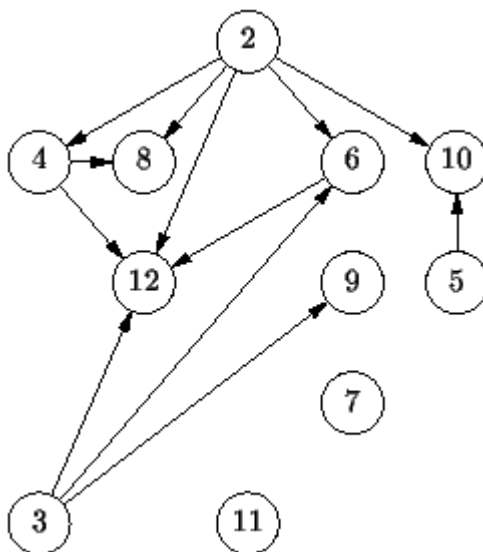


FIG. 1.1 – Un graphe représentant la relation de divisibilité sur  $V$ .

**Définition 1.2.1.** Un **chemin**  $uv$ , est une suite  $u = x_1, x_2, \dots, x_n = v$  de sommets tels que :  $(x_i, x_{i+1}) \in U$ , pour tout  $i$ .

Dans un graphe non orienté la notion de chemin est remplacée par **chaîne** et la notion d'arc est remplacée par **arrête**.

**Définition 1.2.2.** Un graphe est **biparti** si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles  $X$  et  $Y$ , de sorte que toutes les arêtes du graphe relient deux sommets, l'un dans  $X$  et l'autre dans  $Y$ .

Si  $G$  est biparti, il est habituellement noté par  $G = (X \cup Y, U)$ , où  $U$  est l'ensemble des arêtes.

**Exemple 1.2.2.**  $K_{3,3}$  est un exemple d'un graphe biparti.

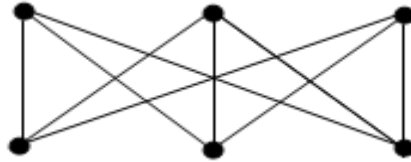


FIG. 1.2 – Le graphe biparti  $K_{3,3}$ .

**Définition 1.2.3.** Un **graphe connexe** est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par une chaîne.

Un graphe qui n'est pas connexe est dit **non connexe**, et se décompose en composantes connexes.

**Exemple 1.2.3.** La figure (Fig.1-1) représente un graphe non connexe, qui se décompose en trois composantes connexes.

**Exemple 1.2.4.** Le graphe biparti  $K_{3,3}$  est un graphe connexe.

**Définition 1.2.4.** Le graphe  $G' = (V', U')$ , où  $V' \subset V$  et  $U' = \{uv/u \in V', v \in V'\}$  est appelée **sous graphe induit** de  $G = (V, U)$ .

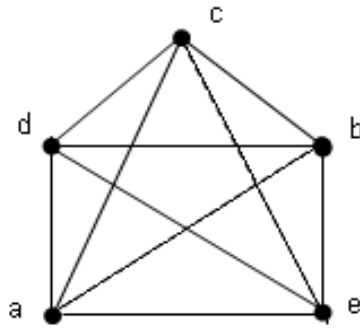
**Définition 1.2.5.** Dans un graphe, une **composante connexe** est un sous-graphe induit maximal connexe (maximal aux sens de l'inclusion).

**Définition 1.2.6.** Dans un **graphe complet**, toutes les paires de sommets sont adjacentes. Un graphe complet à  $n$  sommets est noté  $K_n$ .

**Définition 1.2.7.** Une **clique** est un sous-graphe complet d'un graphe  $G$ .

**Exemple 1.2.5.**  $K_5$  est une clique.

Le graphe complet sur cinq sommets, noté  $K_5$ , se présente comme suit :

FIG. 1.3 – Le graphe complet  $K_5$ .

**Définition 1.2.8.** Soient  $G(X, \Gamma_1)$  et  $G(X, \Gamma_2)$  deux graphes. On appelle **l'union de deux graphes**  $G(X, \Gamma_1)$  et  $G(X, \Gamma_2)$ , le graphe  $G(X, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ .

Un exemple est donné ci-dessous.

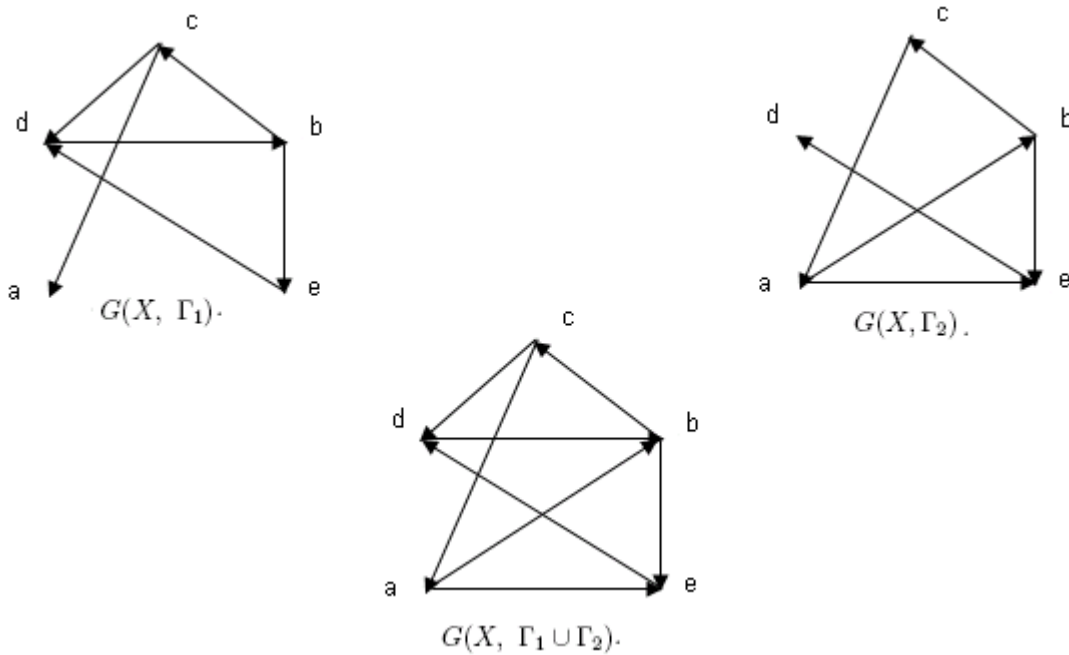


FIG. 1.4 – Représentation de l'union de deux graphes.

**Définition 1.2.9.** La **fermeture transitive** d'un graphe  $G = (X, A)$  est la relation binaire transitive minimale contenant la relation  $A$  sur  $X$ . Il s'agit d'un graphe  $\bar{G} = (X, \bar{A})$  tel que  $(x, y) \in \bar{A}$  si et seulement s'il existe un chemin dans  $G$  d'origine  $x$  et d'extrémité  $y$ .

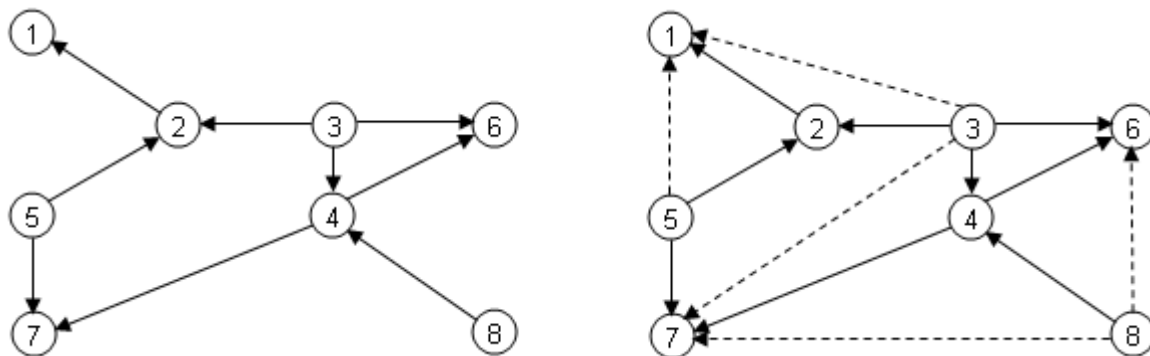


FIG. 1.5 – Un graphe et sa fermeture transitive.

### 1.3 Théorie des posets

En mathématiques et particulièrement en théorie des ordres, un ensemble partiellement ordonné (Poset) formalise la notion intuitive d'arrangement des éléments d'un ensemble. Un poset fini peut être visualisé par le biais d'un graphe dénommé diagramme de Hasse. Un exemple d'un ensemble partiellement ordonné qui nous est familier, est l'ensemble de personnes classées par descendance généalogique.

Soit  $R$  une relation binaire sur un ensemble non vide  $E$ ,  $R$  est dite :

- Reflexive si :  $\forall x \in E : xRx$ .
- Symétrique si :  $\forall (x, y) \in E^2 : xRy \Rightarrow yRx$ .
- Antisymétrique si :  $\forall (x, y) \in E^2 : xRy \text{ et } yRx \Rightarrow x = y$ .
- Transitive si :  $\forall (x, y, z) \in E^2 : xRy \text{ et } yRz \Rightarrow xRz$ .

**Définition 1.3.1.** Une relation  $R$  réflexive, symétrique et transitive est appelée **relation d'équivalence**.

**Définition 1.3.2.** Une relation  $R$  réflexive, antisymétrique et transitive est appelée **relation d'ordre**.

Si  $\forall (x, y) \in E^2 : xRy \text{ ou } yRx$ , l'ordre est dit total. Il est partiel dans le cas contraire.

**Définition 1.3.3.** Un **poset** est un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel noté  $\leq$ . Pour abrégé on écrit  $(P, \leq)$  ou  $P$ .

Pour deux éléments comparables  $x$  et  $y$  du poset  $P$ , on écrit d'une manière usuelle  $x \leq y$  ou d'une façon équivalente  $y \geq x$ .

**Définition 1.3.4.** On dit que  $x$  **succède** à  $y$  (ou **couvre**  $y$ ), (noté  $x \succ y$ ) ssi  $x$  est un majorant de  $y$ , et tel qu'il n'y ait aucun élément intermédiaire entre eux. En dualité  $y$  **précède**  $x$ .

### 1.3.1 La représentation graphique d'un poset fini

La notion de couverture permet d'associer à tout poset  $P$  une représentation dans le plan, appelée **diagramme de Hasse**, du nom du mathématicien allemand **Helmut Hasse**.

Pour le tracer :

- on associe à tout élément de  $P$  un point du plan ;
- on place l'élément  $y$  couvrant  $x$  au dessus de  $x$  et on relie les deux points par un segment de droite ascendant ;

**Exemple 1.3.1.** Soit l'ensemble de tous les diviseurs de 60, partiellement ordonné par la relation de divisibilité.

Le diagramme de Hasse qui lui est associé est le suivant :

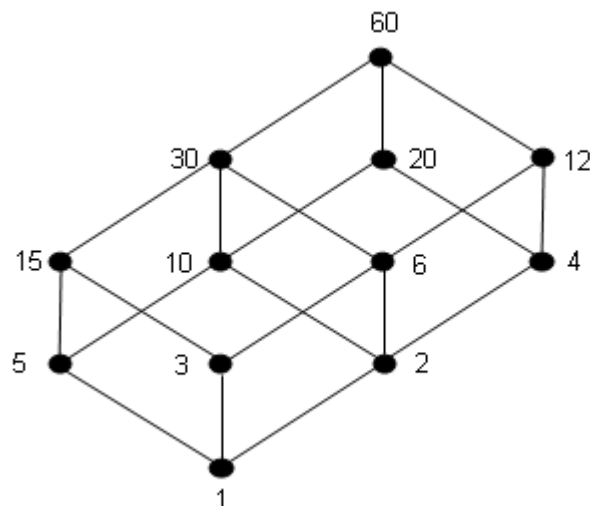


FIG. 1.6 – La représentation graphique des diviseurs de 60 ordonnés par divisibilité.

**Exemple 1.3.2.** L'ensemble des parties d'un ensemble à  $n$  éléments muni de l'inclusion est bien un poset. Ce poset est dénommé le poset Booléen et est noté  $B_n$ .

**Définition 1.3.5.** Dans un ensemble ordonné par une relation  $R$ , un élément  $y$  est un **majorant** (resp : **minorant**) de  $x$  si et seulement si  $yRx$ .

L'ensemble des majorants (resp : minorants) d'un élément  $x$  donné est noté **Maj(x)** (resp : **Min(x)**).

**Exemple 1.3.3.** Dans l'ensemble des diviseurs de 60, ordonné par divisibilité, on a :

$$\text{Maj}(6) = \{6, 12, 30, 60\} \quad \text{et} \quad \text{Min}(6) = \{1, 2, 3, 6\}.$$

**Définition 1.3.6.** Un élément  $x$  de  $P$  est **minimal** (resp : **maximal**) si :

$$(\forall y \in P : y \leq x \text{ (resp : } y \geq x)) \Rightarrow y = x.$$

La figure ci-dessous représente un ensemble de 11 éléments avec trois éléments maximaux et un élément minimal.

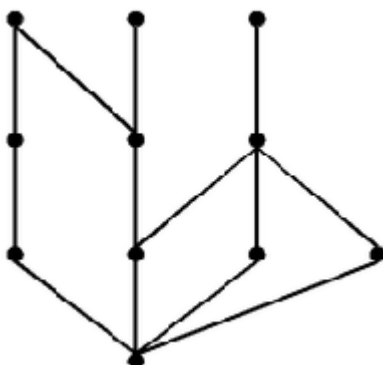


FIG. 1.7 – Un poset avec trois éléments maximaux et un élément minimal.

Le seul élément minimal pour le poset Booléen est l'ensemble vide et le seul élément maximal est l'ensemble lui même.

**Définition 1.3.7.** Un sous ensemble  $C$  d'éléments de  $P$  deux à deux comparables est appelé **chaîne**, on note :  $C = (c_0 < c_1 \dots < c_n)$ .

Une chaîne est dite **saturée** si elle est de la forme :  $C = (c_0 \leq c_1 \dots \leq c_n)$  ; elle est dite **maximale** si de plus  $c_0$  et  $c_n$  sont respectivement des éléments minimal et maximal de  $P$ .

**Exemple 1.3.4.** Dans l'ensemble des diviseurs de 60, la partie  $X = \{1, 3, 6, 12, 60\}$  est une chaîne maximale.

**Définition 1.3.8.** On appelle **antichaîne** tout sous-ensemble de  $P$ , d'éléments deux à deux incomparables.



**Exemple 1.3.5.** Dans l'ensemble des diviseurs de 60 la partie  $X = \{2, 3, 5\}$  est une antichaîne.

**Définition 1.3.9.** On appelle **poset dual** de  $P$  (noté  $P^*$ ), l'ensemble  $P$  muni de la relation duale suivante :

$$x \leq_{P^*} y \iff y \leq_P x.$$

Dans la figure suivante se présente un poset  $P$  et son dual  $P^*$ .

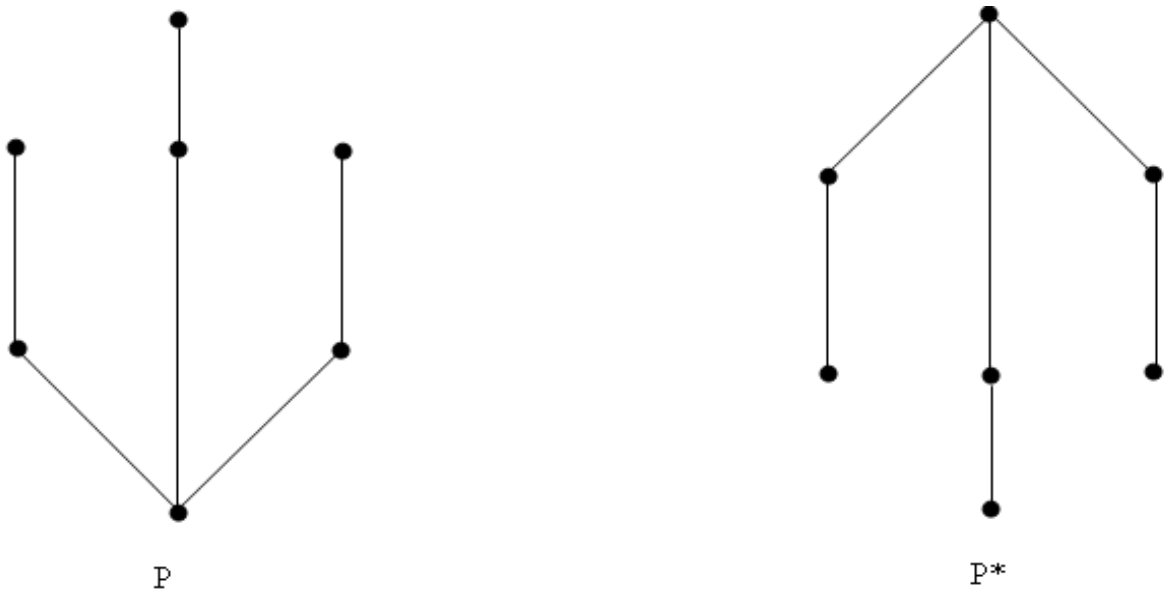


FIG. 1.8 – Poset et son dual.

### 1.3.2 Fonctions dans un poset

**Définition 1.3.10.** Une **fonction de rang** d'un poset  $P$  est une fonction définie de  $P$  dans  $\mathbb{N}$ , notée  $r_p$ , telle que  $r_p(x) = 0$  pour tout élément minimal  $x$  de  $P$  et si  $x \leq y$  alors  $r_p(y) = r_p(x) + 1$ .

**Définition 1.3.11.** On appelle **poset gradué** tout poset muni d'une fonction de rang. On appelle **rang de  $P$** , le nombre  $r(P) = \max_{x \in P} r(x)$ .

**Définition 1.3.12.** On appelle **ième niveau** d'un poset  $P$  gradué, l'ensemble :

$$N_i(P) = \{x \in P : r(x) = i\}, \quad i = 0, \dots, r(P).$$

Son cardinal est noté  $W_i(P)$ , appelé le *i*ème nombre de Whitney.

**Remarque 1.3.1.** Si  $P$  est un poset gradué et si  $r(x) = r(P)$ , pour tout élément maximal de  $P$ , alors le poset dual  $P^*$  est aussi gradué et l'on a :

$$r_{P^*}(x) = r(P) - r_P(x).$$

**Exemple 1.3.6.** Soit  $E = \{a, b, c\}$  et soit  $P$  l'ensemble des parties de  $E$  muni de l'inclusion.

La fonction de rang est définie dans ce cas comme suit :

$$r(x) = \text{card}(x), \quad x \text{ partie de } E.$$

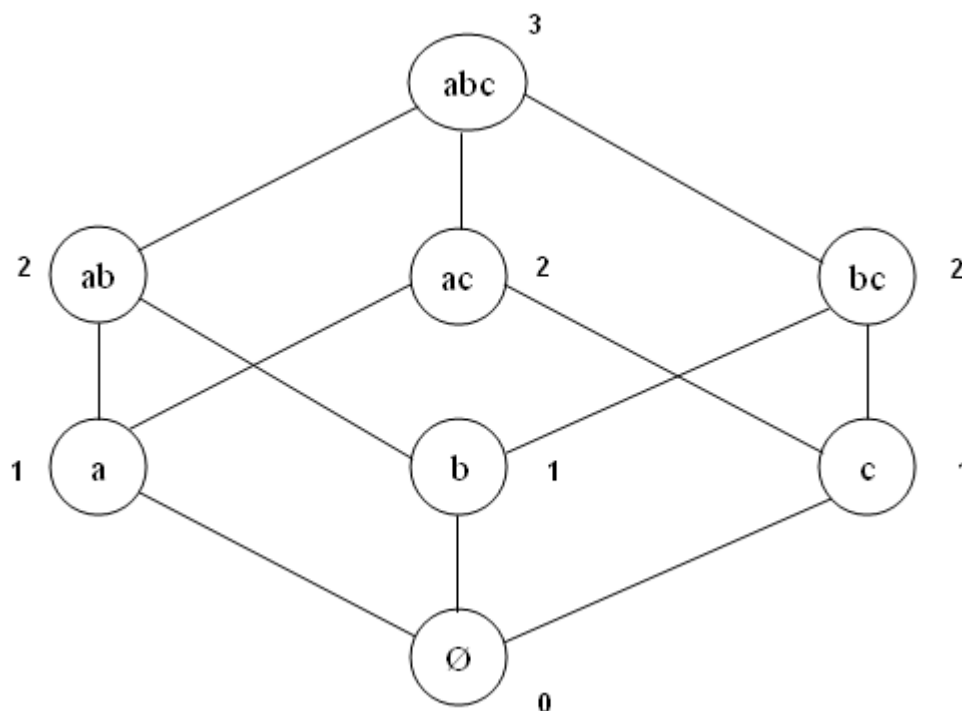


FIG. 1.9 – Exemple d'une fonction de rang.

Dans cet exemple le rang est 3 et la fonction de rang du poset dual est telle que :

$$r_{P^*}(x) = 3 - \text{card}(x), \quad x \text{ partie de } E.$$

**Remarque 1.3.2.** Il se peut qu'un poset n'admette pas de fonction de rang, comme dans le cas de présence d'un cycle de longueur impaire dans le diagramme de Hasse.

**Définition 1.3.13.** Une fonction de représentation  $X$  d'un poset  $P$  est une fonction définie de  $P$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que :

$$X(y) - X(x) \geq 1, \quad \text{si } y > x, \quad \forall (x, y) \in P^2.$$

**Remarque 1.3.3.** La fonction de rang est une fonction de représentation.

**Définition 1.3.14.** La moyenne d'une représentation  $X$  d'un poset  $P$  est la quantité suivante :

$$\mu_X = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} X(p).$$

**Définition 1.3.15.** La variance d'une représentation  $X$  d'un poset  $P$  est la quantité suivante :

$$\sigma_X^2(P) = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) - \mu_X)^2.$$

**Définition 1.3.16.** On appelle variance d'un poset  $P$  le nombre :

$$\sigma^2(P, \leq) = \inf \{ \sigma_X^2(P), X \text{ représentation de } P \}.$$

**Définition 1.3.17.** Une représentation  $X$  d'un Poset  $P$  est dite **optimale** si :

$$\sigma^2(P, \leq) = \sigma_X^2(P).$$

## 1.4 Sur les treillis

Les treillis forment une classe d'ensembles ordonnés, particulièrement intéressante. On rencontre en effet des treillis dans de multiples situations, aussi bien en mathématiques "pures" que dans des modèles ou techniques utilisées en sciences humaines.

Cette partie a pour objet de donner les notions de base sur le treillis qui nous intéressent par la suite.

### 1.4.1 Définitions et notations

**Définition 1.4.1.** On appelle longueur d'un ensemble ordonné le supremum (s'il existe) des longueurs de ses chaînes.

**Définition 1.4.2.** **Sup-demi-treillis** est un ordre tel que chaque couple  $\{x, y\}$  d'éléments admet un plus petit majorant commun. Celui-ci s'appelle **supremum** de  $x$  et de  $y$ , noté  $x \vee y$ .

**Définition 1.4.3.** **Inf-demi-treillis** est un ordre tel que chaque couple  $\{x, y\}$  d'éléments admet un plus grand minorant commun. Celui-ci s'appelle **infimum** de  $x$  et de  $y$ , noté  $x \wedge y$ .

**Définition 1.4.4.** Un **treillis** est un ensemble ordonné  $P$  tel que chaque couple  $\{x, y\}$  possède un **supremum** (borne supérieure) et un **infimum** (borne inférieure). En d'autres termes un **treillis** est un poset pour lequel le supremum et l'infimum existent pour chaque couple  $\{x, y\} \subset P$ .

**Exemple 1.4.1.** La figure suivante n'est pas un treillis.

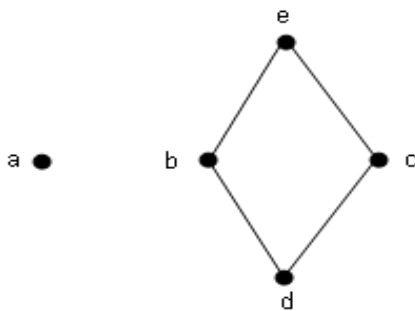


FIG. 1.10 – Un poset qui n'est pas un treillis.

La configuration suivante est interdite dans un treillis :



FIG. 1.11 – Virus de treillis.

Il est clair que  $c \wedge d$  et  $a \vee b$  n'existent pas.

Soit  $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ . Considérons la figure suivante :

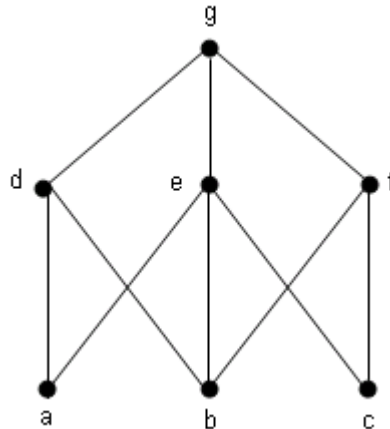


FIG. 1.12 – Un poset de  $E$ .

Supposons que cette figure soit l'organigramme d'une hiérarchie :  $a$  peut recevoir des ordres de  $d$  et de  $e$ ,  $b$  peut recevoir des ordres de  $e$  et de  $f$ ,  $d$  de  $g$  seulement, etc.

S'il y'a un conflit entre  $a$  et  $c$  par exemple, on va chercher qu'elle est l'autorité la plus proche de ceux-ci qui puisse trancher le conflit, c'est parmi les majorants communs à  $a$  et  $c$  qu'il faut la chercher, or :

$$\text{Maj}(a) \cap \text{Maj}(c) = \{a, d, e, g\} \cap \{c, e, f, g\} = \{e, g\}.$$

Comme  $e$  est inférieur à  $g$ , le plus petit majorant communs à  $a$  et  $c$  est  $e$ .  $e$  est habilité à trancher le conflit.

Que se passe-t'il en cas de conflit entre  $a$  et  $b$ ?

On a cette fois-ci :

$$\text{Maj}(a) \cap \text{Maj}(b) = \{d, e, f, g\} \cap \{e, f, g\} = \{d, e\}.$$

Il n'y a pas de plus petit majorant commun, puisque l'ensemble des majorants admet deux éléments minimaux  $d$  et  $e$ , cela est traduit par l'existence de deux virus de treillis qui apparaissent clairement sur la figure.

Pour trancher le conflit, il faudra remonter jusqu'à  $g$ , si  $d$  et  $e$  ne sont pas capables de se mettre d'accord.

Même circonstance dans le cas de  $b$  et  $c$ .

Une hiérarchie qui aurait cet organigramme est une mauvaise hiérarchie, elle oblige à

remonter jusqu'au "sommet" pour trancher des conflits "à la base".

Modifions l'organigramme, en supprimant l'arc qui va de  $b$  à  $e$ ,  $e$  et  $b$  sont maintenant non comparables dans le nouvel ordre sur  $E$ . La figure suivante illustre ce que l'on vient d'affirmer.

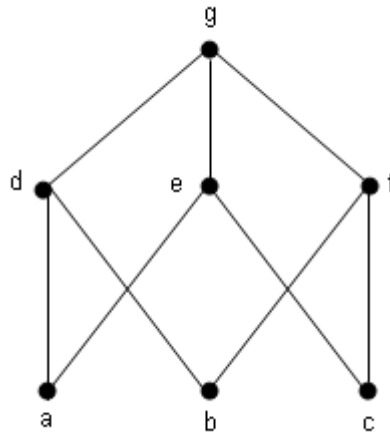


FIG. 1.13 – Sup-demi-treillis.

Ainsi modifié, nous avons un ordre dans lequel, pour chaque couple d'éléments il existe un supremum, c'est un **sup-demi-treillis**.

**Remarque 1.4.1.** *Le dual de sup-demi-treillis représenté par la figure ci-dessus est un inf-demi-treillis.*

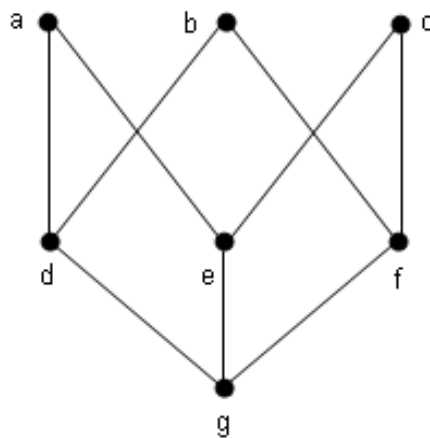


FIG. 1.14 – Inf-demi-treillis.

Maintenant en ajoutant un point  $h$  dans la figure (Fig 1.13), en le reliant avec les points  $a, b$  et  $c$ , on obtient un treillis comme le montre la figure suivante :

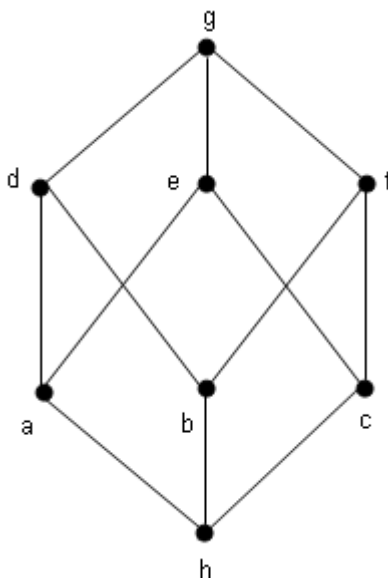


FIG. 1.15 – Treillis

**Définition 1.4.5.** Un treillis est dit **complet** si tout sous ensemble d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.

**Exemple 1.4.2.** Soit  $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . L'ensemble  $E$  muni de l'ordre usuel est un treillis complet.

**Exemple 1.4.3.** L'ensemble des entiers naturels muni de son ordre usuel est un treillis non complet. Lui même n'admet pas de borne supérieure.

**Définition 1.4.6.**  $S$  est un **sous treillis** d'un treillis  $T$  ssi pour tout couple  $\{x, y\}$  dans  $S$ , on a :

$$x \vee y \in S \quad \text{et} \quad x \wedge y \in S.$$

**Exemple 1.4.4.** L'ensemble des nombres paires dans  $\mathbb{N}$  ordonné par la relation de divisibilité est un sous treillis du treillis  $\mathbb{N}$  ordonné par la même relation.

**Exemple 1.4.5.** L'ensemble de tous les diviseurs de 60, partiellement ordonné par la relation de divisibilité est un treillis comme le montre la figure (1.6).

L'ensemble  $\{2, 4, 6, 10, 12, 20, 30, 60\}$  partiellement ordonné par la relation de divisibilité est un sous treillis de l'ensemble de tous les diviseurs de 60 ordonné par la même relation, il est représenté par la figure suivante :

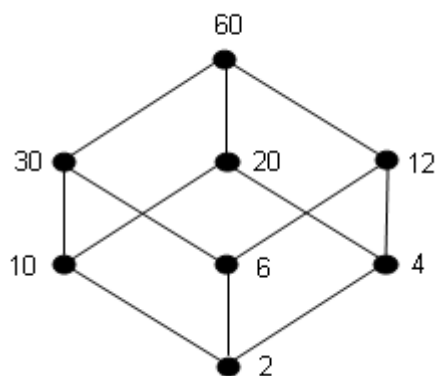


FIG. 1.16 – Sous treillis de treillis des diviseurs de 60 muni de la divisibilité.

Dans un treillis, on notera le majorant universel  $u$ .

On appellera le minorant universel l'élément nul et on le notera  $0$ .

**Définition 1.4.7.** Dans un treillis avec élément nul  $0$ , les éléments successeurs de  $0$  sont nommés **atomes**.

**Définition 1.4.8.** Soit  $T$  un treillis de minorant universel  $0$ , de majorant universel  $u$ .

On appelle **complément** d'un élément  $x$  tout élément  $y$  vérifiant :

$$x \wedge y = 0 \quad \text{et} \quad x \vee y = u.$$

Soient maintenant  $a$  et  $b$  deux éléments d'un treillis  $T$  avec  $a \leq b$  et considérons l'intervalle  $[a, b]$ , le sous treillis de  $T$  admettant  $a$  et  $b$  respectivement comme minorant et majorant universel. Soit  $x \in [a, b]$ , on appelle **complément relatif** de  $x$  par rapport à  $a$  et  $b$ , tout élément  $y$  complément de  $x$  dans le sous treillis  $[a, b]$ , tel que :

$$x \wedge y = a \quad \text{et} \quad x \vee y = b.$$

## 1.5 Typologie de treillis

Cette partie constitue une revue de classes de treillis les plus importants : les treillis gradués, semi-modulaires, modulaires, complétés, relativement complétés et atomiques. Les liaisons entre ces différentes classes sont explicitées au chapitre 2. Ces résultats seront utiles pour l'étude du treillis géométrique des partitions par la suite.



### 1.5.1 Treillis gradué

**Exemple 1.5.1.** *Le treillis représenté par la figure suivante n'est pas gradué.*

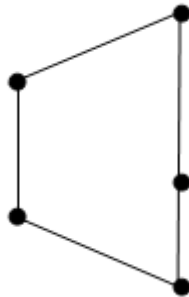


FIG. 1.17 – Un treillis non gradué.

### 1.5.2 Treillis complémenté et treillis relativement complémenté

Un treillis **complémenté** est un treillis pour lequel tout élément admet au moins un complément.

Un treillis **relativement complémenté** est un treillis pour lequel tout élément de tout intervalle admet un complément relatif dans cet intervalle.

**Exemple 1.5.2.** *La figure ci-dessous représente un treillis non complémenté, les éléments de  $S$  n'admettent pas de compléments.*

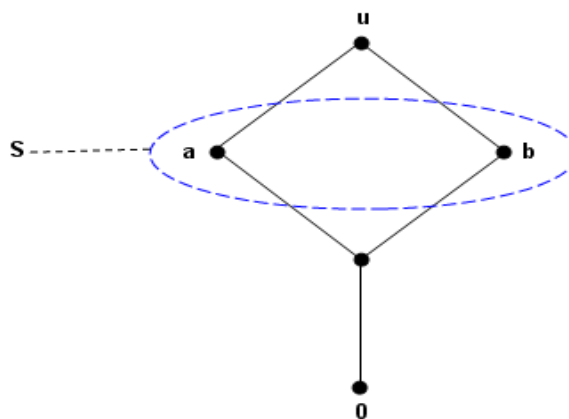


FIG. 1.18 – Treillis non complémenté.

**Exemple 1.5.3.** La figure suivante représente un treillis complémenté non relativement complémenté, l'élément  $a$  n'admet pas de complément relatif dans  $[0, c]$ .

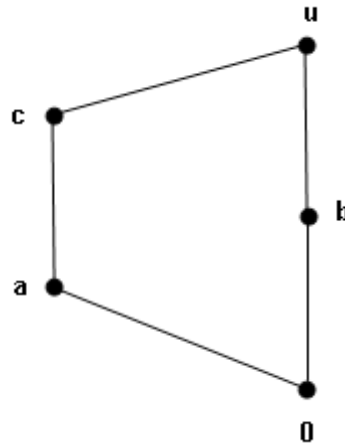


FIG. 1.19 – Treillis complémenté et non relativement complémenté.

### 1.5.3 Treillis atomique

Un treillis de longueur finie est **atomique** si tout élément différent du minorant universel est supremum d'atomes.

**Exemple 1.5.4.** La figure suivante représente un treillis non atomique, l'élément  $g$  et  $l$  ne sont pas supremum d'atomes.

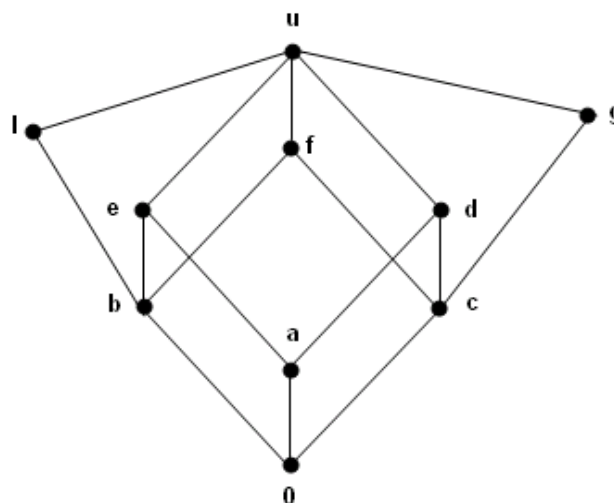


FIG. 1.20 – Treillis non atomique.

**Exemple 1.5.5.** Dans la figure suivante se présente un treillis atomique.

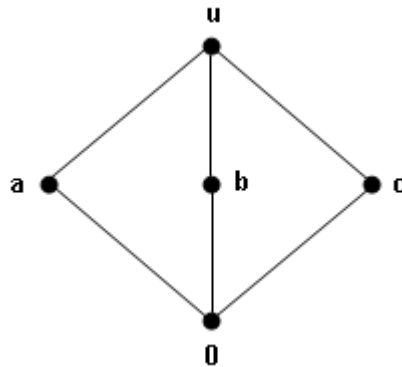


FIG. 1.21 – Treillis atomique.

## 1.5.4 Treillis modulaire

### Treillis semi-modulaire supérieurement

Un treillis est dit **semi-modulaire supérieurement** si deux éléments succèdent à un troisième, ils précèdent leur supremum.

### Treillis semi-modulaire inférieurement

Un treillis est dit **semi-modulaire inférieurement** si deux éléments précèdent à un troisième, ils succèdent leur infimum.

Un treillis semi-modulaire supérieurement et semi-modulaire inférieurement est dit **modulaire**.

**Exemple 1.5.6.**  $\mathcal{P}(E)$  muni de l'inclusion est un treillis modulaire.

**Exemple 1.5.7.** Le treillis présenté dans la figure suivante est semi modulaire supérieurement mais il ne l'est pas inférieurement donc, il n'est pas modulaire. Il est clair que  $e$  et  $f$  précèdent à  $u$  mais ils ne succèdent pas leurs infimum  $0$ .

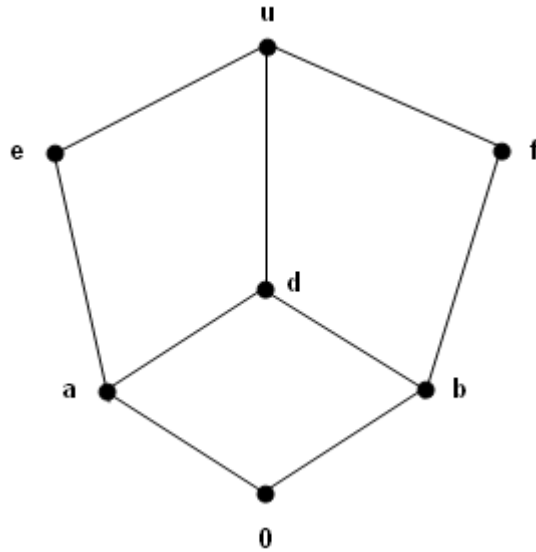


FIG. 1.22 – Treillis non modulaire.

**Théorème 1.5.1.** [13] Un treillis est semi-modulaire inférieurement ssi il est gradué et la fonction de rang vérifie pour tout couple  $\{x, y\}$  :

$$r(x \vee y) - r(x) \geq r(y) - r(x \wedge y) \quad \text{ou}$$

$$r(x \vee y) + r(x) \geq r(y) + r(x \wedge y).$$

Un treillis est semi-modulaire supérieurement ssi il est gradué et la fonction de rang vérifie pour tout couple  $\{x, y\}$  :

$$r(x \vee y) - r(x) \leq r(y) - r(x \wedge y) \quad \text{ou}$$

$$r(x \vee y) + r(x) \leq r(y) + r(x \wedge y).$$

**Théorème 1.5.2.** [13] Un treillis est modulaire ssi il est gradué et sa fonction de rang vérifie :

$$r(x \vee y) + r(x) = r(y) + r(x \wedge y).$$

En d'autres termes un treillis modulaire ssi il est semi-modulaire inférieurement et semi-modulaire supérieurement.

**Définition 1.5.1.** Un treillis **Distributif** est un treillis dont les identités suivantes sont vérifiées, pour tout  $x, y, z$  dans  $P$ ,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \text{ou} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

**Théorème 1.5.3.** [13] Un treillis distributif est modulaire.

### 1.5.5 Treillis géométrique

Un treillis est **géométrique** ssi il est à la fois **semi modulaires supérieurement** et **relativement complété (ou atomique)**.

**Exemple 1.5.8.** *L'ensemble  $\mathcal{P}(E)$ , muni de l'inclusion est un treillis géométrique car il est modulaire et atomique.*

---

### Sur le treillis des partitions d'un ensemble

---

#### Introduction

Dans ce deuxième chapitre, nous exposons les principaux résultats liés au treillis des partitions d'un ensemble. En effet, dans une première partie nous introduisons une notion fondamentale nécessaire pour son étude, la notion de " finesse", suivie d'une deuxième partie comportant la réponse à la question suivante : "Le poset des partitions est t-il un treillis?", une curiosité mathématique qui nous a accompagné lors de notre étude. Nous abordons par la suite quelques caractéristiques du treillis des partitions. Le but de ce mémoire étant l'étude d'une suite qui n'est en fait qu'un rapport de deux nombres de Bell moins un. À cause de leur importance, ces nombres feront l'objet d'une partie du chapitre et nous terminons par quelques notions sur les suites, notamment la concavité, la log-concavité, l'unimodalité, la convexité, etc, qui auront un rôle non négligeable dans notre étude.

#### 2.1 Définitions et résultats

On formalise par le concept de partition celui de classification au sens strict (une place à chaque chose, chaque chose à sa place). Les partitions d'un ensemble fini et les problèmes qui leurs sont liés sont au coeur de la combinatoire, on s'en convaincra en lisant

[13] de la bibliographie. Mais aussi elles sont fondamentales pour les sciences humaines, tant dans la théorie que dans les méthodes nombreuses et de plus en plus répondues dans la classification automatique.

**Définition 2.1.1.** On appelle **partition** de  $E$  tout ensemble  $\pi$  inclu dans  $\mathcal{P}(E)$  qui satisfait les propriétés suivantes :

- $\forall A \in \pi, A \neq \emptyset,$
- $\forall x \in E, \exists A \in \pi \text{ tq } x \in A,$
- $\forall (A, B) \in \pi^2, (A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset).$

Notation : Une partition  $\pi$  qui a comme blocs  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sera notée comme suit :

$$\pi = \{A_1/A_2/\dots/A_n\}.$$

**Proposition 2.1.1.** [13] A toute relation d'équivalence sur  $E$  correspond une partition de  $E$  en classes d'équivalence et réciproquement.

La donnée d'une partition  $\pi$  d'un ensemble est équivalente à la donnée sur celui-ci d'une relation d'équivalence, c'est-à-dire d'une relation  $R_\pi$  binaire, transitive, symétrique et réflexive. L'ensemble dont les éléments sont des classes d'une partition  $\pi$  de  $E$  est appelé ensemble quotient de  $E$  par  $R_\pi$ , noté  $E/R_\pi$ .

**Remarque 2.1.1.** La relation  $R_\pi$  peut être représentée par un graphe  $G$  non orienté (à cause de la symétrie de la relation) dont chaque classe de  $\pi$  est une clique de  $G$ .

**Exemple 2.1.1.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et soit  $\pi$  une partition dont les blocs sont :  $\{1, 4, 6\}, \{2, 5\}, \{3\}$ .

L'ensemble quotient :  $E/R_\pi = \{146/ 25/ 3\}$ .

La relation d'équivalence qui correspond à la partition  $\pi$  est représentée par le graphe  $G_\pi$  :

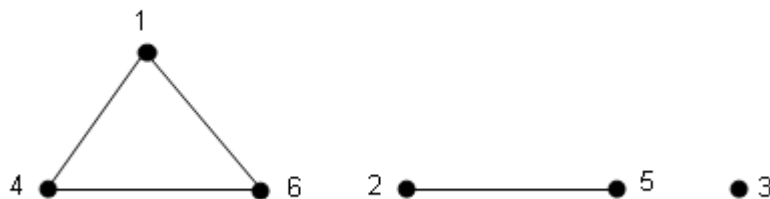


FIG. 2.1 – Un graphe représentant la partition  $\pi$ .

**Définition 2.1.2.** Une partition  $\pi_1$  d'un ensemble  $E$  est dite **plus fine** qu'une autre partition  $\pi_2$  de  $E$  si chaque classe de  $\pi_1$  est incluse dans une classe de  $\pi_2$ , on note :

$$\pi_1 \leq \pi_2.$$

On dit aussi que  $\pi_1$  est un affinage de  $\pi_2$  ou encore  $\pi_2$  est moins fine que  $\pi_1$ .

D'une manière équivalente :  $\pi_1 \leq \pi_2 \iff \pi_2 = \pi_1$  ou  $\pi_1$  est obtenue à partir d'une subdivision d'un ou plusieurs blocs de  $\pi_2$ .

$\pi_1 < \pi_2 \iff \pi_1$  s'obtient à partir d'une subdivision d'un seul bloc de  $\pi_2$ .

Posons  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  et notons  $P_n$  l'ensemble des partitions de  $[n]$ .

**Propriété 2.1.1.** La relation plus fine ainsi définie sur l'ensemble  $P_n$  est clairement une relation d'ordre partiel.

**Propriété 2.1.2.**  $P_n$  muni de la relation plus fine possède un minorant universel (un minimum) qui est la partition la plus fine de toutes les partitions de  $P_n$ , celle dans laquelle chaque classe ne contient qu'un seul élément, elle possède également un majorant universel (un maximum) qui est la partition la moins fine de toutes les partitions de  $P_n$  est celle pour laquelle tous les éléments de  $E$  sont réunies en une seule classe (l'ensemble  $E$  lui-même).

## 2.2 Pourquoi le poset des partitions d'un ensemble est t-il un treillis ?

Dans la littérature, on dit que le poset des partitions d'un ensemble muni de la relation plus fine est un treillis mais aucune preuve détaillée n'a été faite jusqu'à présent à notre connaissance, chose qui nous a incité à la développer.

### 2.2.1 Quel est l'infimum de deux partitions ?

Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  deux partitions. On note  $\tilde{\pi}$  la partition dont les classes sont obtenues en prenant l'intersection non vide de chaque classe de  $\pi_1$  par toutes les classes de  $\pi_2$ .

**Exemple 2.2.1.** Soient dans  $P_6$  les partitions suivantes :

$$\pi_1 = \{146/25/3\} \text{ et } \pi_2 = \{134/256\}.$$

On obtient  $\pi_1 \wedge \pi_2$  par la disposition des classes de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  en tableau croisé :



	$\pi_2$	143	256
$\pi_1$			
	146	14	6
	25		25
	3	3	

TAB. 2.1 – Le tableau représentant l'infimum de deux partitions  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .

$$\pi_1 \wedge \pi_2 = \{14/25/3/6\}.$$

**Proposition 2.2.1.** [13] *La partition  $\tilde{\pi}$  est la partition la moins fine qui soit plus fine que  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . En d'autres termes  $\tilde{\pi} = \pi_1 \wedge \pi_2$ .*

**Preuve :**

Soient  $\pi_1 = \{A_1/A_2/\dots/A_k\}$  et  $\pi_2 = \{B_1/B_2/\dots/B_m\}$  deux partitions de  $P_n$ .

Posons :  $\xi = \{(i, j) \in [k] \times [m] / A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ .

Soit maintenant  $\tilde{\pi} = \{A_i \cap B_j, (i, j) \in \xi\}$ .

On a :

$$E = \left( \bigcup_{i=1, \dots, k} A_i \right) \cap \left( \bigcup_{j=1, \dots, m} B_j \right) = \bigcup_{(i, j) \in \xi} (A_i \cap B_j). \quad (2.1)$$

Pour  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux classes de  $\tilde{\pi}$ , il existe  $(i_0, j_0), (i'_0, j'_0) \in [k] \times [m]$

tels que :

$$A_{i_0} \cap B_{j_0} = \mu_1 \quad \text{et} \quad A_{i'_0} \cap B_{j'_0} = \mu_2,$$

avec

$$\mu_1 \cap \mu_2 = \emptyset. \quad (2.2)$$

De (2.1) et (2.2),  $\tilde{\pi}$  est une partition.

Montrons que  $\tilde{\pi}$  est plus fine que  $\pi_1$  et  $\pi_2$  à la fois.

Soit  $\mu$  une classe de  $\tilde{\pi}$ .

Par définition, il existe  $(i_0, j_0) \in [k] \times [m]$  tel que :

$$\mu = A_{i_0} \cap B_{j_0}.$$

Du coup :

$$\mu \subset A_{i_0} \quad \text{et} \quad \mu \subset B_{j_0}.$$

$\tilde{\pi}$  est donc plus fine que  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .

Montrons maintenant que  $\tilde{\pi}$  est la partition la moins fine de celles qui sont plus fine que  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .

Soit  $\Gamma$  une partition de  $P_n$  plus fine que  $\pi_1$  et  $\pi_2$  et soit  $\gamma \in \Gamma$ .

On a par définition de la relation plus fine :

$$\exists A_i \in \pi_1 / \gamma \subset A_i \text{ et } \exists B_j \in \pi_2 \text{ tel que } \gamma \subset B_j.$$

C'est à dire  $\gamma \subset A_i \cap B_j$ .

$\Gamma$  est donc plus fine que  $\tilde{\pi}$ . □

Soit  $\pi$  une partition et soit  $R_\pi$  la relation d'équivalence associée, i.e. :

$$xR_\pi x' \iff x \text{ et } x' \text{ sont dans la même classe dans } \pi.$$

**Propriété 2.2.1.** Soient  $R_{\pi_1}$  et  $R_{\pi_2}$  les relations d'équivalences correspondantes aux partitions  $\pi_1$  et  $\pi_2$  respectivement. Alors :

$$R_{\pi_1} \subset R_{\pi_2} \iff \pi_1 \text{ est plus fine que } \pi_2.$$

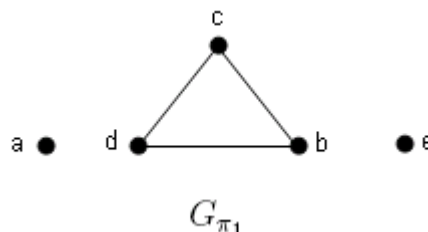
## 2.2.2 Quel est le supremum de deux relations d'équivalence ?

Il est à souligner que c'est la recherche du supremum de deux partitions qui a mené à la recherche du supremum des deux relations d'équivalence.

Le supremum de deux relations d'équivalence  $R_{\pi_1}$  et  $R_{\pi_2}$  est donnée par le graphe  $\overline{G_{\pi_1} \cup G_{\pi_2}}$ .

**Exemple 2.2.2.** Soit sur l'ensemble  $E = \{a, b, c, d, e\}$ , les partitions suivantes :

$$\pi_1 = \{a/bcd/e\}, \pi_2 = \{ac/bde\}.$$



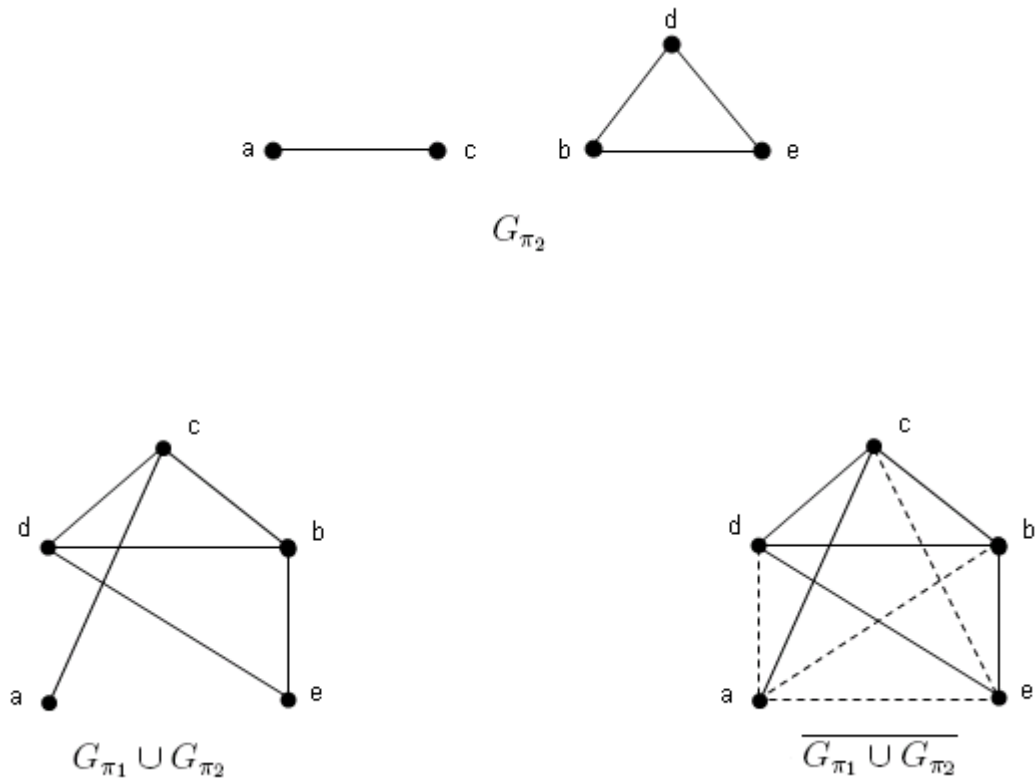


FIG. 2.2 – Le supremum de deux relations d’équivalences correspondant à deux partitions.

**Propriété 2.2.2.** *Étant donnée deux relations d’équivalences  $R_{\pi_1}$  et  $R_{\pi_2}$  sur  $E$ , on définit la relation  $R_{\pi}$  par :*

$xR_{\pi}x'$  ssi  $x = x'$  ou il existe  $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = x'$  tel que :

$$(x_{k-1}R_{\pi_1}x_k \text{ ou } x_{k-1}R_{\pi_2}x_k) \text{ pour tout } k = 1, \dots, m.$$

**Proposition 2.2.2.** [13]  $R_{\pi}$  est la relation d’équivalence minimale contenant  $R_{\pi_1}$  et  $R_{\pi_2}$ , en d’autres termes,  $R_{\pi} = R_{\pi_1} \vee R_{\pi_2}$ .

**Preuve :**

La relation  $R_{\pi}$  est réflexive par construction.

S’il existe  $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = x'$  tel que :

$$(x_{k-1}R_{\pi_1}x_k \text{ ou } x_{k-1}R_{\pi_2}x_k) \text{ pour tout } k = 1, \dots, m,$$

alors : il existe  $x'_0 = x_m = x', x'_1, \dots, x'_m = x_0 = x$  tel que :

$$(x'_{k-1}R_{\pi_1}x'_k \text{ ou } x'_{k-1}R_{\pi_2}x'_k) \text{ pour tout } k = 1, \dots, m.$$

$R_\pi$  est donc symétrique.

S'il existe  $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = x'$  tel que :

$$(x_{k-1}R_{\pi_1}x_k \text{ ou } x_{k-1}R_{\pi_2}x_k) \text{ pour tout } k = 1, \dots, m.$$

et il existe  $x_m = x', x_{m+1}, \dots, x_{m'} = x''$  tel que :

$$(x_{k-1}R_{\pi_1}x_k \text{ ou } x_{k-1}R_{\pi_2}x_k) \text{ pour tout } k = m + 1, \dots, m'.$$

On a donc : Il existe  $x_0 = x, x_1, \dots, x_{m'} = x''$  tel que :

$$(x_{k-1}R_{\pi_1}x_k \text{ ou } x_{k-1}R_{\pi_2}x_k) \text{ pour tout } k = 1, \dots, m'.$$

Cela signifie que  $R_\pi$  est transitive.

$R_\pi$  est réflexive, symétrique et transitive donc une relation d'équivalence.

Soit  $\pi$  la partition qui lui correspond.

On a par construction :

$$R_{\pi_1} \subset R_\pi \text{ et } R_{\pi_2} \subset R_\pi .$$

Montrons que c'est la relation d'équivalence minimale.

Supposons  $R_F$  une relation d'équivalence correspondant à une partition  $F$  dans  $P_n$  tel que :

$$R_{\pi_1} \subset R_F \text{ et } R_{\pi_2} \subset R_F.$$

$xR_\pi x'$  ssi il existe  $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = x'$  tel que :

$$(x_{k-1}R_{\pi_1}x_k \text{ ou } x_{k-1}R_{\pi_2}x_k) \text{ pour tout } k = 1, \dots, m.$$

Puisque :  $R_{\pi_1} \subset R_F$  et  $R_{\pi_2} \subset R_F$ .

Donc :  $(x_{k-1}R_F x_k)$  Pour tout  $k = 1, \dots, m$ .

Cela signifie que  $R_\pi \subset R_F$ .

$R_\pi$  est la relation d'équivalence minimale contenant  $R_{\pi_1}$  et  $R_{\pi_2}$ , autrement dit :

$$R_\pi = R_{\pi_1} \vee R_{\pi_2}.$$

□

**Remarque 2.2.1.**  $R_{\pi_1} \vee R_{\pi_2}$  est dite la fermeture transitive de  $R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2}$  avec,  $x(R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2})x' \iff xR_{\pi_1}x' \text{ ou } xR_{\pi_2}x'$ .

Nous nous perdons pas de vue qu'on cherche en fait le supremum de deux partitions, c'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 2.2.3.** [13]  $\pi$  est la partition la plus fine qui soit moins fine que  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .  
En d'autres termes  $\pi = \pi_1 \vee \pi_2$ .

**Preuve :**

De la proposition 2.2.2 et la propriété 2.2.1, le résultat s'ensuit immédiatement.

Dans l'exemple 2.2.2 le supremum des deux partitions  $\pi_1$  et  $\pi_2$  est la partition correspondante au graphe  $\overline{G_{\pi_1} \cup G_{\pi_2}}$ , c-a-d,

$$\pi_1 \vee \pi_2 = \{a, b, c, d, e\}.$$

### 2.2.3 Comment obtenir explicitement le supremum de deux partitions ?

A deux partitions  $\pi_1 = \{A_1/A_2/\dots/A_k\}$  et  $\pi_2 = \{B_1/B_2/\dots/B_m\}$  de  $P_n$  est associé un graphe (non orienté) noté  $G(\pi_1 \cup \pi_2, \xi)$ , dont les sommets sont les classes de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  tel que :

$$A_i B_j \in \xi \iff A_i \cap B_j \neq \emptyset.$$

$G(\pi_1 \cup \pi_2, \xi)$  est un graphe biparti.

On dit que la classe  $A_i$  et  $B_j$  sont jointes, ou que  $A_i$  rencontre  $B_j$  lorsque  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ .

Posons  $\pi_1 \cup \pi_2 = \{A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_m\}$ .

Soit  $R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2}$  la relation définie sur  $\pi_1 \cup \pi_2$  comme suit :

$C(R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2})D \iff$  s'il existe une chaîne joignant  $C$  et  $D$  dans  $G(\pi_1 \cup \pi_2, \xi)$ .

Il est clair que  $R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2}$  est une relation d'équivalence sur  $\pi_1 \cup \pi_2$ , ayant comme classes les composantes connexes de  $G(\pi_1 \cup \pi_2, \xi)$ .

Les éléments de chaque composante connexe représente une classe du supremum des deux partitions  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .

**Exemple 2.2.3.** Soient dans  $P_{12}$  les partitions suivantes :

$$\pi_1 = \{2\ 3\ 4 / 1\ 5\ 6 / 12 / 8\ 7 / 9\ 10\ 11\} \text{ et } \pi_2 = \{3 / 9\ 12 / 1\ 2\ 4 / 8 / 5\ 6\ 7 / 10\ 11\}.$$

Le graphe biparti associé aux partitions  $\pi_1$  et  $\pi_2$  se présente comme suit :

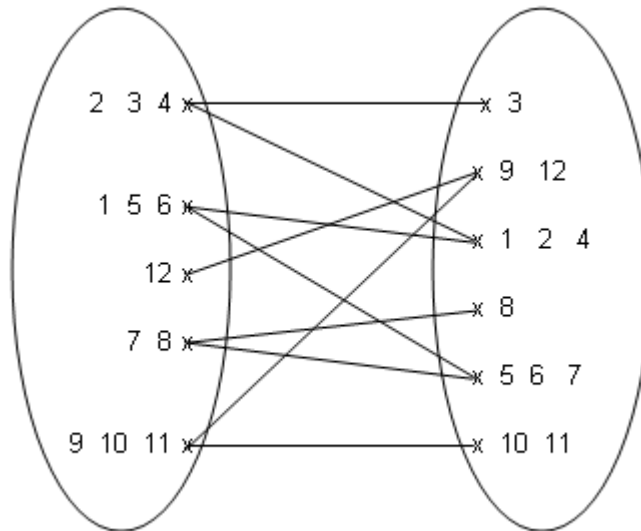


FIG. 2.3 – Le graphe biparti associé à deux partitions  $(G(\pi_1 \cup \pi_2, \xi))$ .

Une représentation tabulée nous permettra de mieux observer le supremum.

Dans notre exemple le tableau se présente comme suit :

$\pi_2 \backslash \pi_1$	3	9 12	1 2 4	8	5 6 7	10 11
2 3 4	(3)		(2 4)			
1 5 6			(1)		(5 6)	
12		(12)				
7 8				(8)	(7)	
9 10 11		(9)				(10 11)

FIG. 2.4 – Un tableau représentant le supremum des partitions  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .

$$\pi_1 \vee \pi_2 = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 / 9\ 10\ 11\ 12\}.$$

**Théorème 2.2.1.** [13] Le poset des partitions d'un ensemble est un treillis.

**Preuve :**

Conséquence directe des propositions 2.2.1 et 2.2.3.

Pour  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ , le treillis des partitions  $P_4$  se présente comme suit :

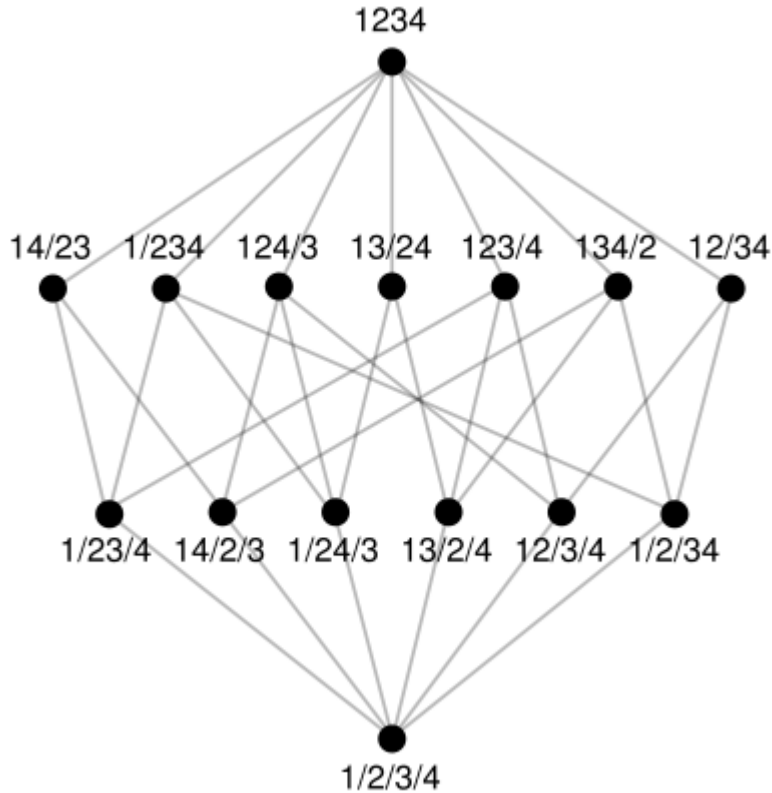


FIG. 2.5 – Le treillis des partitions  $P_4$ .

## 2.3 Quelle est la nature du treillis des partitions d'un ensemble ?

Le treillis des partitions d'un ensemble fini est une structure algébrique et combinatoire présente dans de nombreux domaines. Définie initialement par Birkhoff (1935), il a été étudié de façon approfondie par Dubreil-Jacotin (1939), puis par Oré (1942). On en trouve une description insistant sur ses propriétés de nature géométriques dans Barbut (1968), Barbut Manjardet (1970). Ce treillis fait d'ailleurs partie de la classe des treillis géométriques, dont on connaît l'importance dans le développement de la combinatoire, on s'en convaincra en lisant [12] (Crapo et Rota (1971)), Aigner (1978) [3].

### 2.3.1 Le treillis des partitions est complétement et relativement complétement

A chaque partition  $\pi$  de  $E$  on peut faire correspondre au moins une partition  $\tilde{\pi}$  qui soit complémentaire (ou orthogonale) à  $\pi$ , autrement dit  $\pi \wedge \tilde{\pi}$  est la partition la plus fine de toutes les partitions de  $E$  et  $\pi \vee \tilde{\pi}$  est la partition la moins fine de toutes les partitions de  $E$ .

Dans la figure suivante les partitions  $\{3/12\}, \{2/13\}, \{1/23\}$  sont orthogonales deux à deux.

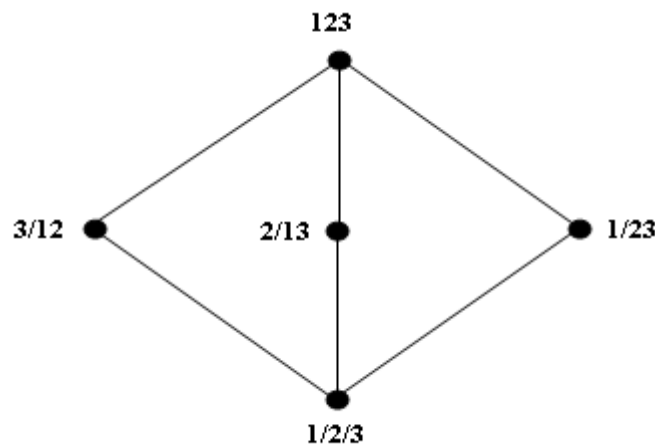


FIG. 2.6 – Le treillis des partitions  $P_3$ .

### 2.3.2 Le procédé d'obtention d'une partition orthogonale à une autre

Soient  $\pi$  une partition donnée et soit  $\tilde{\pi}$  une partition orthogonale qui lui correspond :

- On choisit un élément de chaque bloc de  $\pi$ , le système représentant les blocs de  $\pi$  ainsi constitué sera le premier bloc de  $\tilde{\pi}$ .
- On choisit un élément parmi les éléments restants dans chaque bloc de  $\pi$ , on a ainsi un second bloc. etc.

**Exemple 2.3.1.** Soit dans  $P_6$  la partition  $\pi = \{146/25/3\}$ .

Une partition orthogonale à  $\pi$  est la suivante :

- Premier bloc : 123 (reste 46/ 5).
- Deuxième bloc : 45 (reste 6).



- Troisième bloc : 6.

$$\tilde{\pi} = 123/45/6.$$

Il existe d'autres partitions orthogonales à  $\pi$ , soient par exemple :

$$\{345/26/1\}, \{236/15/4\}, \{12/35/4/6\}.$$

Le treillis des partitions est relativement complété, en d'autres termes, toute partition  $\pi$  moins fine qu'une partition  $\pi_1$  est plus fine qu'une partition  $\pi_2$  ( $\pi$  est situé entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$ ) admet dans l'intervalle  $[\pi_1, \pi_2]$  des compléments relatifs à celui-ci, des partitions  $\tilde{\pi}$  telles que :

$$\pi \wedge \tilde{\pi} = \pi_1 \quad \text{et} \quad \pi \vee \tilde{\pi} = \pi_2.$$

### 2.3.3 Le treillis des partitions est t-il atomique ?

Une partition  $\pi$  dont un bloc est une partie  $X$  de  $E$  et le reste des blocs sont des singletons sera noté  $\pi_X$ .

**Exemple 2.3.2.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Une partition  $\pi$  dont les blocs sont :  $\{1, 4, 6\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{5\}$  sera noté  $\pi_{\{1,4,6\}}$

Pour abrégé en écrit :  $\pi_{1\ 4\ 6}$ .

Les atomes dans le treillis des partitions sont de la forme  $\pi_{xy}$ , elles sont au nombre de  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

**Propriété 2.3.1.** Soit  $\pi$  une partition dont les blocs sont :  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , alors  $\pi$  se décompose d'une manière unique :

$$\pi = \pi_{A_1} \vee \pi_{A_2} \vee \pi_{A_3} \dots \vee \pi_{A_k}.$$

**Théorème 2.3.1.** [13] Le treillis des partitions d'un ensemble est un treillis atomique.

**Preuve :**

Si  $X = \{1, 2, \dots, h\}$  est une partie quelconque de  $E$ , on a :

$$\pi_X = \pi_{12} \vee \pi_{13} \vee \dots \vee \pi_{1h}. \quad (2.3)$$

La propriété 2.3.1 et (2.3) prouvent que  $\pi$  est supremum d'atomes.

### 2.3.4 Le treillis des partitions est t-il modulaire ?

**Théorème 2.3.2.** [13] *Le treillis des partitions d'un ensemble n'est pas modulaire pour  $\text{card}(E) \geq 4$ .*

**Proposition 2.3.1.** [13] *Le treillis des partitions n'est pas semi-modulaire inférieurement.*

Nous illustrons la preuve par la figure suivante :

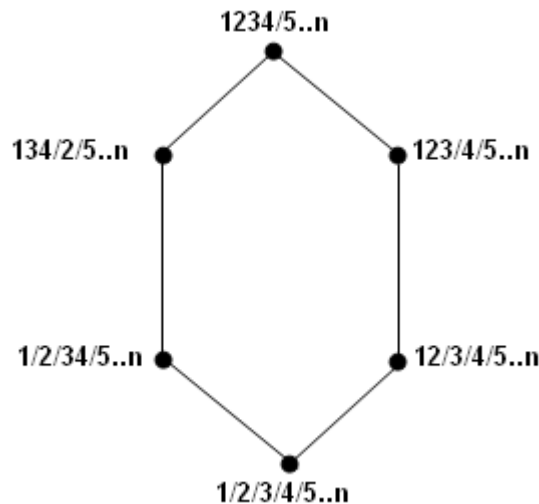


FIG. 2.7 – La figure illustrant la non modularité de  $P_n$ .

Posons

$$\pi_1 = \{123/4/5..n\}, \quad \pi_2 = \{134/2/5..n\}.$$

On a :

$$\pi_1 \vee \pi_2 = \{1234/5..n\}, \quad \pi_1 \wedge \pi_2 = \{1/2/3/4/5..n\}.$$

Les partitions  $\pi_1$  et  $\pi_2$  précèdent leurs supremum, mais elles ne succèdent pas à leurs infimum.

**Remarque 2.3.1.** *En utilisant le théorème 1.5.2, on peut montrer aisément aussi que le treillis n'est pas modulaire pour  $\text{card}(E) \geq 4$ .*

En effet, posons :

$$\pi_1 = \{123/4/5..n\}, \quad \pi_2 = \{134/2/5..n\}, \quad \pi_3 = \{12/3/4/5..n\}.$$

On a :

$$r(\pi_1 \vee \pi_2) + r(\pi_1) = (n - 2) + (n - 3) = 2n - 5.$$

et

$$r(\pi_2) + r(\pi_1 \wedge \pi_2) = (n - 3) + (n - 5) = 2n - 8.$$

Du coup, le résultat s'ensuit.

**Proposition 2.3.2.** [13] *Le treillis des partitions est semi-modulaire supérieurement.*

**Preuve :**

Posons :

$$\pi \wedge \pi' = \{A_1/A_2/\dots/A_k\}.$$

Puisque  $\pi$  et  $\pi'$  succèdent à  $\pi \wedge \pi'$ ,  $\pi$  et  $\pi'$  sont de la forme :

$$\pi = \pi_{A_i \cup A_j}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, k.$$

$$\pi' = \pi'_{A_{i'} \cup A_{j'}}, \quad i' = 1, \dots, k, \quad j' = 1, \dots, k.$$

Il est clair que  $\pi \vee \pi'$  est précédée par  $\pi$  et par  $\pi'$ .

### 2.3.5 Le treillis des partitions est t-il géométrique ?

**Théorème 2.3.3.** [13] *Le treillis des partitions est un treillis géométrique.*

**Preuve :**

Le treillis des partitions étant semi-modulaire supérieurement, relativement complémenté donc atomique, il est donc géométrique.

## 2.4 Nombres de Stirling de seconde espèce

Les nombres de Stirling de seconde espèce, notés  $S(n, k)$ , comptent le nombre de relations d'équivalence ayant  $k$  classes d'équivalence définies sur un ensemble à  $n$  éléments, c'est-à-dire le nombre de partitions en  $k$  sous-ensembles d'un ensemble de  $n$  objets.

Ces nombres satisfont la relation de récurrence donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 2.4.1.** [19]

$$S(n + 1, k) = S(n, k - 1) + kS(n, k), \quad 1 \leq k \leq n.$$

$$S(n, 1) = S(n, n) = 1, \quad S(n, k) = 0 \quad k > n.$$

Quelques valeurs des nombres de Stirling sont présentées ci-dessous :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0	0

TAB. 2.2 – Quelques valeurs des nombres de Stirling

### 2.4.1 Quelques propriétés des nombres de Stirling

Nous exposons dans cette partie seulement les propriétés utiles pour notre étude.

**Théorème 2.4.2.** [19] Soient  $x$  un nombre réel et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors :

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) x \dots (x - k + 1).$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce sont donnés par la formule explicite suivante :

**Proposition 2.4.1.** [19] On a :

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n, \quad 0 \leq k \leq n.$$

**Remarque 2.4.1.** Les nombres de Stirling sont en rapport avec la distribution de Poisson.

En effet, si  $X$  est une variable aléatoire suivant une distribution de Poisson de moyenne  $\lambda$ , alors son  $n$ -ième moment est :

$$E(X^n) = \sum_{k=1}^n S(n, k) \lambda^k.$$

## 2.5 Nombres de Bell

Les nombres de Bell, qui portent le nom de **Eric Temple Bell**, se rencontrent souvent en combinatoire. Ces nombres forment une suite d'entiers :

$$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203, \dots$$

Les nombres de Bell représentent le nombre total des partitions de  $[n]$ .

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k).$$

Les nombres de Bell satisfont aussi à la formule de Dobinski suivante :

**Proposition 2.5.1.** [19] On a :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!}.$$

**Remarque 2.5.1.**  $B_n$  n'est que le moment d'ordre  $n$  d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 1$ .

## 2.6 Sur l'unimodalité, la convexité et la concavité

Souvent les suites qu'on rencontre en combinatoire sont unimodales. Il est parfois facile mais souvent très difficile de prouver qu'une suite donnée est unimodale. Les fonctions génératrices peuvent aider à résoudre ce type de problème.

### 2.6.1 Quelques définitions

**Définition 2.6.1.** Soit  $(U_n)_n$  une suite à termes positifs :

$(U_n)_n$  est convexe si :

$$2U_n \leq U_{n-1} + U_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$(U_n)_n$  est log-convexe si :

$$U_n^2 \leq U_{n-1}U_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$(U_n)_n$  est concave si :

$$2U_n \geq U_{n-1} + U_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$(U_n)_n$  est log-concave si :

$$U_n^2 \geq U_{n-1}U_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$(U_n)_n$  est strictement log-concave si :

$$U_n^2 > U_{n-1}U_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

**Définition 2.6.2.** Une suite réelle positive est dite unimodale, si elle est croissante jusqu'à un certain indice et puis décroissante.

Les indices réalisant le maximum de la suite sont appelés modes.

**Définition 2.6.3.** Un polynôme est dit :

-Unimodal si la suite de ses coefficients est unimodale.

-Concave si la suite de ses coefficients est concave.

-log-concave si la suite de ses coefficients est log-concave.

**Proposition 2.6.1.** Toute suite à termes positifs log-concave est convexe.

**Preuve :**

Soit  $(U_n)_n$  une suite log-concave donc :

$$U_n^2 \leq U_{n-1}U_{n+1} \quad (2.4)$$

On a d'une part,

$$U_{n-1}^2 + U_{n+1}^2 \geq 2U_{n-1}U_{n+1}. \quad (2.5)$$

D'autre part,

$$(U_{n-1} + U_{n+1})^2 = U_{n-1}^2 + U_{n+1}^2 + 2U_{n-1}U_{n+1}.$$

De (2.4) et (2.5), il vient

$$(U_{n-1} + U_{n+1})^2 \geq 4U_n^2.$$

D'où

$$2U_n \leq U_{n-1} + U_{n+1}.$$

□

La série ci-dessous est convergente pour tout  $x$ , le résultat s'obtient immédiatement par le Théorème de d'Alembert.

$$B(x) = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^x}{j!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 2.6.1.** D'après la formule de Dobinski,  $B(n) = B_n$ .

**Définition 2.6.4.** Soient  $1 < p < \infty$  et  $1 < q < \infty$  deux entiers naturels. On dit que  $p$  et  $q$  sont des exposants conjugués si :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Théorème 2.6.1.** [8] Soient  $p \in ]1, \infty[$  et  $q$  l'exposant conjugué de  $p$ , alors on a :

$$B(x_1 + x_2) \leq B^{\frac{1}{p}}(px_1)B^{\frac{1}{q}}(qx_2).$$

**Preuve :**

Soit la variable discrète suivante :

$$P(Z = i) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{i!}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$E(Z^x) = \sum_{i=0}^{\infty} i^x P(Z = i) = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^x}{i!} = B(x). \quad (2.6)$$

On a aussi d'après l'inégalité de Hölder :

$$E(Z^{x_1+x_2}) \leq E^{\frac{1}{p}}(Z^{px_1})E^{\frac{1}{q}}(Z^{qx_2}).$$

Finalement

$$B(x_1 + x_2) \leq B^{\frac{1}{p}}(px_1)B^{\frac{1}{q}}(qx_2).$$

□

**Proposition 2.6.2.** [8] La suite des nombres de Bell est log-convexe. En d'autres termes La suite  $\left(\frac{B_{n+1}}{B_n}\right)_n$  est une suite croissante.

**Preuve :**

Posant  $p = q = 2$  dans le théorème 2.6.1, le résultat est établi pour  $x_1 = \frac{n+1}{2}$  et  $x_2 = \frac{n-1}{2}$ .

□

**Corollaire 2.6.1.** La suite  $(B_n)_n$  est convexe, c-à-d,

$$2B_n \leq B_{n-1} + B_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

**Preuve :**

Conséquence directe des propositions 2.6.1 et 2.6.2.

□

Ici nous signalons qu'une autre preuve est donnée dans [8].

## 2.7 Quelques principaux résultats

**Proposition 2.7.1.** [38] Toute suite à termes positifs, strictement log-concave est unimodale.

**Preuve :**

Soit  $(C_n)_n$  une suite non unimodale, il existe donc trois termes consécutifs :

$C_{r-1}, C_r, C_{r+1}$  tels que :

$$C_{r-1} > C_r < C_{r+1}.$$

Il s'ensuit alors :

$$C_{r-1}C_{r+1} > C_r^2.$$

De là, la suite  $(C_n)_n$  n'est pas strictement log-concave.  $\square$

Dans [4], J. Alvarez, M. Amadis, G. Boros, D. Karp, V. Moll and L. Rosales ont énoncé le théorème suivant :

**Théorème 2.7.1.** [38] Soit  $P(x) = \sum_{k=0}^m C_k x^k$  un polynôme unimodal de mode  $n$  à coefficients positifs. Alors si  $P(x)$  est concave,  $P(x)$  est log-concave.

Nous présentons ci-dessous leur preuve

**Preuve :**

Soit  $(C_j)_j$  la suite des coefficients du polynôme  $P(x)$ .

Ce polynôme  $P(x)$  étant unimodal,  $\exists n \geq 1$  tel que,  $j < n \implies C_j \geq C_{j-1}$ .

De la concavité du polynôme  $P(x)$ , il vient :

$$C_{j+1} - 2C_j + C_{j-1} \leq 0 \iff C_j - C_{j-1} \geq C_{j+1} - C_j \iff C_j(C_j - C_{j-1}) \geq C_{j-1}(C_{j+1} - C_j).$$

Il s'ensuit,

$$C_j^2 - C_j C_{j-1} \geq C_{j-1} C_{j+1} - C_{j-1} C_j.$$

Du coup

$$C_j^2 \geq C_{j+1} C_{j-1}.$$

Le cas de  $j > n$  se fait d'une manière analogue.  $\square$

Nous allons montrer en fait qu'un polynôme à coefficients positifs concave est log-concave sans pour autant qu'il soit unimodal.

**Théorème 2.7.2.** Soit  $P(x)$  un polynôme à coefficients positifs concave. Le polynôme  $P(x)$  est log-concave.

**Preuve :**

Soient  $(C_j)_j$  les coefficients du polynôme  $P(x)$ . La suite  $(C_j)_j$  étant concave, alors

$$2C_j \geq C_{j+1} + C_{j-1}. \tag{2.7}$$



On a :

$$C_{j+1}^2 + C_{j-1}^2 \geq 2C_{j+1}C_{j-1}. \quad (2.8)$$

De (2.7) il vient,

$$4C_j^2 \geq (C_{j+1} + C_{j-1})^2.$$

On en déduit de (2.8)

$$C_j^2 \geq C_{j+1}C_{j-1}.$$

□

Soit la fonction définie par :

$$f(x, y) = C_0y^n + C_1xy^{n-1} + C_2x^2y^{n-2} + \dots + C_nx^n.$$

**Lemme 2.7.1.** [38] *Supposons que les racines de  $f(x, y)$  sont toutes réelles en  $\frac{x}{y}$  et considérons  $g(x, y)$  sa dérivée après certaines nombre de fois par rapport à  $x$  et à  $y$  respectivement, alors si  $g(x, y)$  est non identiquement nulle, alors ses racines sont toutes réelles.*

**Théorème 2.7.3.** [38] *Soit  $P(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n$  un polynôme à coefficients positifs ayant toutes ses racines réelles négatives, alors la suite  $(C_j)_j$  est strictement log-concave.*

**Preuve :**

On a :

$$f(x, y) = C_0y^n + C_1xy^{n-1} + C_2x^2y^{n-2} + \dots + C_nx^n.$$

Les racines de l'équation  $P(x) = 0$  sont toutes négatives donc :

$$P(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n = C_n \prod_{j=1}^n (x + x_j),$$

avec  $x_j$  sont des nombres réels positifs, les  $C_j$  sont tous non nuls.

Appliquons maintenant l'opérateur  $D_y^m D_x^{n-m-2}$  sur  $f(x, y)$ .

$$\begin{aligned} D_y^m D_x^{n-m-2} f(x, y) &= \frac{1}{2}(n-m-2)!(m+2)!C_{n-m-2}x^2 + (n-m-1)!(m+1)!C_{n-m-1}xy \\ &\quad + \frac{1}{2}(n-m)!m!C_{n-m}y^2. \end{aligned}$$

Soit  $g(x, y) = \frac{2}{(n-m-1)!(m+1)!} D_y^m D_x^{n-m-2} f(x, y)$ , on a :

$$g(x, y) = \frac{(m+2)}{(n-m-1)} C_{n-m-2} x^2 + 2C_{n-m-1} xy + \frac{(n-m)}{m+1} C_{n-m} y^2.$$

Posons maintenant :

$$C_j = \binom{n}{j} P_j.$$

Il s'ensuit,

$$g(x, y) = \binom{n}{m+1} (P_{n-m-2}x^2 + 2P_{n-m-1}xy + P_{n-m}y^2).$$

$g(x, y)$  est un polynôme de degré 2, du lemme précédent,  $g(x, y)$  possède deux racines négatives réelles, son discriminant doit être positif :

$$P_{n-m-1}^2 \geq P_{n-m-2}P_{n-m},$$

La séquence de  $P_j$  est log-concave. En revenant maintenant à  $C_j$ .

$$C_{n-m-1}^2 \geq \frac{(m+2)(n-m)}{(m+1)(n-m)} C_{n-m-2}C_{n-m} > C_{n-m-2}C_{n-m}.$$

La log-concavité de la suite est établie. □

### 2.7.1 Application de la propriété de la négativité des racines d'un polynôme à coefficients positifs

**Lemme 2.7.2.** [3] Soit le polynôme suivant :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n S(n, k)x^k.$$

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n(x)$  admet  $n$  racines réelles distinctes et non positives.

**Proposition 2.7.2.** [38] La progression  $(S(n, k))_k$  est strictement log-concave donc unimodale.

**Preuve :**

La log-concavité stricte est déduite immédiatement du théorème 2.7.3 et l'unimodalité de la proposition 2.7.1. □

**Corollaire 2.7.1.** Le polynôme  $S_n(x)$  est unimodal.

---

## Autour de la conjecture de Konrad Engel

---

### 3.1 Introduction

L'optimalité de la fonction de rang d'un poset est l'une des préoccupations de la théorie des posets. Dans ce contexte, plusieurs travaux ont été menés. En effet, une condition nécessaire et suffisante a été donnée par Alekseev [3], les travaux exposés dans [5] montrent que la distributivité et la normalité sont des conditions suffisantes. Particulièrement, en ce qui concerne le poset des partitions, les travaux réalisés ont conduit à une condition suffisante, traduite par la concavité de la suite des moyennes graduées que Konrad Engel a conjecturé vraie. Dans ce chapitre, une récapitulation de ces travaux est faite brièvement. Pour un point de vue détaillé, le lecteur pourra se référer à [5].

**Lemme 3.1.1.** [5] *Soit  $X$  une fonction de représentation d'un poset  $P$  et  $c$  un nombre réel.*

a)  $X' = X + c$  est une fonction de représentation,

b)  $\mu_{X'} = \mu_X + c$ ,

c)  $X$  optimale  $\iff X'$  optimale.

## 3.2 Qu'est ce que la moyenne graduée dans le treillis des partitions d'un ensemble ?

Le treillis des partitions de  $[n]$  admet la fonction de rang définie par :

$$r(\pi) = n - b(\pi), \quad \forall \pi \in P_n, \quad \text{où } b(\pi) \text{ le nombre de bloc de } \pi.$$

La moyenne de  $r$  est donnée par :

$$\mu_n = n - \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n kS(n, k).$$

Posons :

$$\tau_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n kS(n, k). \quad (3.1)$$

$\tau_n$  représente la moyenne du nombre de blocs de  $P_n$ , dite **moyenne graduée de  $P_n$** .

Soit la fonction définie par :

$$r^*(\pi) = b(\pi) - 1, \quad \forall \pi \in P_n,$$

$b(\pi)$  est le nombre de blocs de la partition  $\pi$ . Cette fonction représente la fonction de rang du poset dual de treillis des partitions d'un ensemble.

Soit maintenant la fonction définie comme suit :

$$X^*(\pi) = r^*(\pi) + 1 = b(\pi), \quad \forall \pi \in P_n.$$

La fonction  $X^*$  est une fonction de représentation de  $P_n^*$ , en vertu du lemme 3.1.1.

La moyenne de  $X^*$  est donné par :

$$\mu_{X^*} = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n kS(n, k).$$

**Remarque 3.2.1.**  $\tau_n$  est également la moyenne de la fonction de représentation  $X^*$  du poset dual  $P_n^*$ .

## 3.3 Quelques définitions et notations

**Définition 3.3.1.** Une famille  $F$  de  $P$  est appelée **Filtre** (resp : **Idéal**) si

$$x \in F \text{ et } y \geq x \text{ (resp : } y \leq x) \Rightarrow y \in F.$$

Un **Filtre** (resp : **Idéal**)  $F$  est dit **génééré par une famille**  $S$  de  $P$  si :

$$F = \{x \in P : x \geq y \text{ (resp : } x \leq y), \text{ pour au moins un } y \in S\}.$$

On appelle **Filtre** (resp : **Idéal**) **principal**, un **Filtre** (resp : **Idéal**) généré par un seul élément.

### 3.4 Principaux résultats

**Théorème 3.4.1.** [3] La fonction de rang  $r$  d'un poset gradué est une représentation optimale si et seulement si :

$$\mu_F \geq \mu, \forall F \text{ filtre de } P_n \text{ ou } \mu_I \leq \mu, \forall I \text{ Idéal de } P_n,$$

où  $\mu_F = \mu_r(F)$ ,  $\mu_I = \mu_r(I)$  et  $\mu = \mu_r$ .

**Définition 3.4.1.** Soit  $P$  un poset gradué et  $A$  une partie de  $P$  Posons :

$$R^+(A) = \{x \in P : x \succ a \text{ pour au moins un } a \in A\}.$$

$R^+(A)$  est appelé ombre supérieur de  $A$ . On dira que  $P$  est un poset normal si :

$$\frac{|A|}{W_i} \leq \frac{|R^+(A)|}{W_{i+1}}, \text{ pour tout } A \subset N_i, \text{ pour tout } i = 0, \dots, r(P) - 1.$$

**Théorème 3.4.2.** [27] La fonction de rang  $r$  d'un poset normal est optimale.

**Théorème 3.4.3.** [27] La fonction de rang d'un treillis distributif est une représentation optimale.

**Proposition 3.4.1.** Le treillis des partitions n'est pas distributif.

**Preuve :**

Soient :  $\xi = 12/34\dots n$ ,  $\pi = 23/14\dots n$  et  $\sigma = 24/13\dots n$  trois partitions de  $P_n$ .

On a :  $(\xi \wedge \sigma) \vee (\pi \wedge \sigma) = 2/4/1 \ 3 \ 5 \dots n$ . La partition  $\sigma$  étant plus fine que  $(\xi \vee \pi)$ , alors  $(\xi \vee \pi) \wedge \sigma = \sigma$ .

La figure ci-dessous illustre ce que l'on vient d'affirmer.

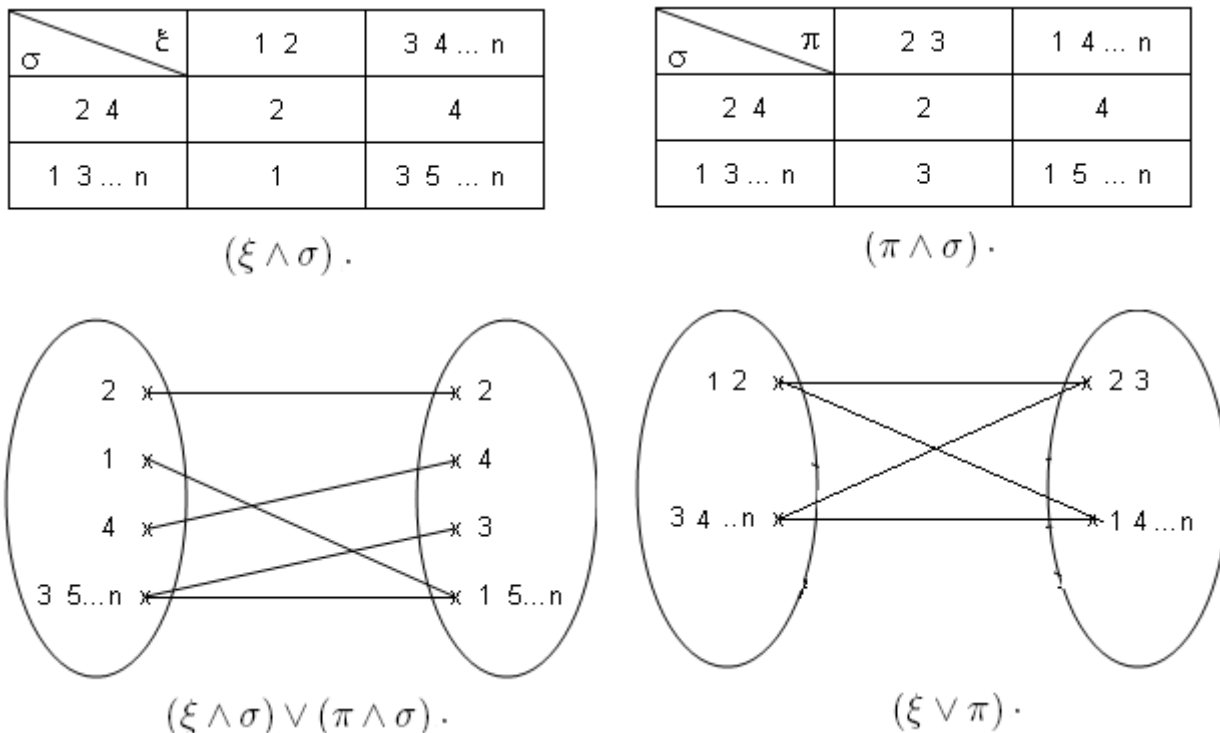


FIG. 3.1 – La figure illustrant la non distributivité de  $P_n$ .

**Remarque 3.4.1.** On peut déduire du théorème 1.5.3 que le treillis des partitions n'est pas distributif puisqu'il n'est pas semi-modulaire inférieurement (voir chapitre 2 page 35).

E. Spencer a montré en 1974 que le treillis des partitions n'est pas normal pour  $n \geq 20$  [37]. Aussi le treillis des partitions n'étant pas distributif, les conditions suffisantes basées sur la normalité et la distributivité ne permettent pas de conclure.

Une stratégie de recherche suivie dans [5], était d'exploiter la condition nécessaire et suffisante d'Alekseev en restreignant l'étude uniquement sur des filtres principaux, car dans ce cas si la condition nécessaire et suffisante n'est pas vérifiée, la fonction de rang ne serait pas optimale.

**Théorème 3.4.4.** [5] Soit  $P$  un poset gradué tel que  $r(P) = r(x)$ , pour tout élément maximal  $x$  de  $P$ . Si on note par  $r^*$ , la fonction de rang du poset dual  $P^*$  de  $P$ , alors :

$$r \text{ optimale dans } P \iff r^* \text{ optimale dans } P^*.$$

**Proposition 3.4.2.** Soient  $X^* = r^* + 1$ , on a :

$$r \text{ est optimale dans } P_n \iff X^* \text{ est optimale dans } P_n^*.$$

**Preuve :**

On a :

$$r(\pi) = n - b(\pi), \quad \forall \pi \in P_n.$$

D'après le théorème 3.4.4,  $r^*$  est optimale dans  $P_n^*$ .

Puisque :

$$X^*(\pi) = r^*(\pi) + 1, \quad \forall \pi \in P_n.$$

D'après (c) du lemme 3.1.1,  $X^*(\pi)$  est optimale dans  $P_n^*$ . □

**Théorème 3.4.5.** [5]

$$\mu_{X^*}(F) \geq \mu_{X^*}, \quad \forall F \text{ filtre principal dans } P_n^* \iff \tau_{a+b} \leq \tau_a + \tau_b \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

**Théorème 3.4.6.** [5]

$$\tau_{a+1} \leq \frac{\tau_{a+2} + \tau_a}{2}, \quad \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow \tau_{a+b} \leq \tau_a + \tau_b, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

Une condition suffisante de la véracité de la condition d'Alekseev sur les filtres principaux, d'après les théorèmes 3.4.5 et 3.4.6 est :

$$\tau_{a+1} \leq \frac{\tau_{a+2} + \tau_a}{2}, \quad \forall a \in \mathbb{N}.$$

A partir de là, la **Conjecture de K. Engel** est née.

**Conjecture :**  $2\tau_n \geq \tau_{n-1} + \tau_{n+1}$ .

---

## Asymptotiquement la conjecture de Konrad Engel est vraie

---

### 4.1 Introduction

La preuve asymptotique de la conjecture de Konrad Engel est due à Rodney Canfield [21]. La plupart de ses travaux en général tournent essentiellement autour des démonstrations asymptotiques, il est connu être un utilisateur fou de maple. Il est aussi à souligner que sa preuve était présentée d'une manière trop condensée, aucune indication de l'utilisation de la machine n'a été signalée. Dans ce présent chapitre, comme son titre l'indique, nous décrivons d'une manière détaillée cette preuve. Pour cela, nous commençons par donner les principaux résultats ayant trait à la démonstration.

Rappelons la conjecture de **Konrad Engel** [28].

Conjecture : La suite des moyennes graduées est une suite concave, c-a-d,

$$2\tau_n \geq \tau_{n-1} + \tau_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

### 4.2 Principaux résultats

*Théorème 4.2.1.* [5] on a :

$$\tau_n = \frac{B_{n+1}}{B_n} - 1.$$



**Théorème 4.2.2.** [32] On a :

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k, \quad B_0 = 1.$$

**Preuve :**

Soit  $x \in [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

En partitionnant  $[n]$ ,  $x$  peut se trouver dans une classe à  $k$  éléments avec  $k$  prenant ses valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$ , il existe  $\binom{n-1}{k-1}$  classes. Les " $n-k$ " éléments restants seront partitionner de  $B_{n-k}$  manières.

Ainsi

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

En posant  $l = n - k$ ,

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} = \sum_{l=0}^n \binom{n-1}{n-1-l} B_l$$

Sachant que :

$$\binom{n-1}{n-1-k} = \binom{n-1}{k}.$$

on obtient,

$$B_n = \sum_{l=0}^n \binom{n-1}{l} B_l.$$

**Proposition 4.2.1.** [32] Posons :

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

alors  $B(x) = \exp(e^x - 1)$ .

**Preuve :**

On a :

$$B(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Du théorème 4.2.2 on a :

$$\begin{aligned} B(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} B_k \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-k-1)!} \end{aligned}$$

La série entière  $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-k-1)!}$  étant convergente uniformément dans  $\mathbb{R}$ , il vient :

$$\frac{d}{dx}(B(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-k-1)!}.$$

En posant  $r = n - k - 1$ , on a :

$$\frac{d}{dx}(B(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+k}}{r!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}.$$

Comme  $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = e^x$ , on obtient :

$$\frac{d}{dx}(B(x)) = B(x)e^x.$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(B(x))}{B(x)} = e^x.$$

Il vient :  $\text{Log}B(x) = e^x + Cte$

Donc  $B(x) = \exp(e^x + Cte)$ .

Pour  $x = 0$ ,  $B(0) = 1 = \exp(1 + Cte)$ .

Donc  $Cte = -1$ . □

**Proposition 4.2.2.** *Le résultat de la proposition 4.2.1 peut être étendu dans  $\mathbb{C}$  (le corps des nombres complexes) c-à-d,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \exp(e^z - 1), \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Proposition 4.2.3.** [19] *On a :*

$$\exp\{x(e^u - 1)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} S_m(x).$$

**Preuve :**

On a :

$$\exp\{x(e^u - 1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x(e^u - 1))^k}{k!} \tag{4.2}$$

$$(e^u - 1)^k = \sum_{j=0}^{\infty} (e^u)^j \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \tag{4.3}$$

$$(e^u)^j = e^{uj} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(uj)^m}{m!} \tag{4.4}$$

De (4.2), (4.3) et (4.4) on obtient :

$$\exp \{x(e^u - 1)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^m. \quad (4.5)$$

Puisque,

$$S(m, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^m.$$

On a d'après (4.5)

$$\exp \{x(e^u - 1)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} S(m, k) x^k.$$

Il s'ensuit,

$$\exp \{x(e^u - 1)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} S_m(x).$$

### 4.3 Approximation du nombre de Bell

**Théorème 4.3.1.** [33] On a :

$$B_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} r^{n+\frac{1}{2}} e^{r-n-1}, \quad (\text{quand } n \rightarrow \infty), \quad \text{avec } re^r = n.$$

La démonstration de ce théorème est due à L. Moser- M Wyman [33] ensuite repris Par Lovász [32], et redémontrée par S. Bouroubi d'une manière détaillée avec une légère correction [5].

**Théorème 4.3.2 (Formule de Cauchy).** Soit  $f$  une fonction holomorphe au voisinage de  $z_0$ , alors  $f$  est développable en série entière au voisinage de  $z_0$  et l'on a :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

avec,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}},$$

et  $c(z_0, r)$  est un lacet de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ .

## 4.4 La preuve asymptotique de la conjecture de K. Engel

La référence originale de l'approximation des nombres de Bell est celle de Moser-Wyman [33]. Comme précisé dans [21], la preuve asymptotique de la conjecture de Konrad Engel se base sur cette dernière en développant un estimateur de  $B_{n+h}$  avec le même paramètre  $r$ , solution de l'équation  $re^r = n$ , en effectuant un développement à l'ordre 3, pour  $n$  assez grand et  $h$  prenant ses valeurs dans  $\{-1, 0, 1, 2\}$ .

**Théorème 4.4.1.** [21] Il existe  $n_0$  telle que l'inégalité (4.1) est vraie pour tout  $n \geq n_0$ .

**Preuve :**

Dans tout ce qui suit on considère  $B_0 = 1$ ,  $r$  la solution de l'équation  $re^r = n$ ,  $h = o(\log n)$  et  $B = S_2(r)e^r$ .

Soit  $f(z) = \exp(e^z - 1)$ ,  $f$  est une fonction holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , particulièrement au point 0, donc développable en série entière.

D'après la proposition 4.2.2 on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

De la formule de Cauchy :

$$\frac{B_n}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad \forall n \geq 0.$$

Il s'ensuit alors :

$$\frac{B_{n+h}}{(n+h)!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+h+1}} dz.$$

Posons  $z = re^{i\theta}$ ,  $dz = ire^{i\theta}$ .

Du coup il vient,

$$\begin{aligned} \frac{B_{n+h}}{(n+h)!} &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} ire^{i\theta} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+h+1}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(e^{re^{i\theta}} - 1)}{(re^{i\theta})^{n+h}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(e^{re^{i\theta}} - (n+h)i\theta - 1)}{r^{n+h}} d\theta. \end{aligned}$$

On a aussi :  $\exp(re^{i\theta}) = e^r \exp(re^{i\theta} - r) = e^r \exp(r(e^{i\theta} - 1))$ .

De la proposition 4.2.3, on obtient :

$$e^r \exp\{r(e^{i\theta} - 1)\} = e^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} S_m(r).$$

Il vient,

$$\frac{r^{n+h} B_{n+h}}{(n+h)!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(e^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} S_m(r) - 1 - i\theta(n+h)\right) d\theta.$$

La fonction  $\theta \mapsto \exp\left(e^{re^{i\theta}} - (n+h)i\theta - 1\right)$  étant  $2\pi$ -périodique, alors

$$\begin{aligned} \frac{r^{n+h} B_{n+h}}{(n+h)!} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(e^r + i\theta e^r S_1(r) + e^r S_2(r) \frac{(i\theta)^2}{2} - (n+h)i\theta - 1 + e^r \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} S_m(r)\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(e^r + ni\theta - \frac{\theta^2}{2} B - (n+h)i\theta - 1 + e^r \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} S_m(r)\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(e^r - \frac{\theta^2}{2} B - ih\theta - 1 + e^r \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} S_m(r)\right) d\theta = I. \end{aligned}$$

Notons cette dernière intégrale  $I$  et effectuons le changement de variable suivant :

$$\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{B}}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi\sqrt{B}} \int_{-\pi\sqrt{B}}^{+\pi\sqrt{B}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} - ih\frac{\alpha}{\sqrt{B}} - 1 + e^r + e^r \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m}{B^{\frac{m}{2}}} \frac{S_m(r)}{m!}\right) d\alpha \\ &= \frac{\exp(e^r - 1)}{2\pi\sqrt{B}} \int_{-\pi\sqrt{B}}^{+\pi\sqrt{B}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} - ih\frac{\alpha}{\sqrt{B}} + e^r \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m}{B^{\frac{m}{2}}} \frac{S_m(r)}{m!}\right) d\alpha. \end{aligned}$$

Du coup,

$$\frac{r^{n+h} B_{n+h}}{(n+h)!} = \frac{\exp(e^r - 1)}{2\pi\sqrt{B}} \int_{-\pi\sqrt{B}}^{+\pi\sqrt{B}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} - ih\frac{\alpha}{\sqrt{B}} + e^r \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m}{B^{\frac{m}{2}}} \frac{S_m(r)}{m!}\right) d\alpha.$$

Calculons maintenant  $I$ .

Définissons  $C_m$  comme suit,

$$\exp\left(e^r \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m S_m(r)}{B^{\frac{m}{2}} m!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m (i\alpha)^m}{m! B^{\frac{m}{2}}} \quad (4.6)$$

De là,

$$I = \frac{\exp(e^r - 1)}{2\pi\sqrt{B}} \int_{-\pi\sqrt{B}}^{+\pi\sqrt{B}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} - ih\frac{\alpha}{\sqrt{B}}\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m (i\alpha)^m}{m! B^{\frac{m}{2}}}\right) d\alpha.$$

Posons :

$$I = Cte \int_{-\pi\sqrt{B}}^{+\pi\sqrt{B}} \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} - ih\frac{\alpha}{\sqrt{B}}\right) \left(\frac{C_m (i\alpha)^m}{m! B^{\frac{m}{2}}}\right) d\alpha,$$

avec  $Cte = \frac{\exp(e^r - 1)}{2\pi\sqrt{B}}$ .

La série  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m (i\alpha)^m}{m! B^{\frac{m}{2}}}$  étant convergente uniformément sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$I = Cte \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\pi\sqrt{B}}^{+\pi\sqrt{B}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} - ih\frac{\alpha}{\sqrt{B}}\right) \left(\frac{C_m (i\alpha)^m}{m! B^{\frac{m}{2}}}\right) d\alpha.$$

Posons,

$$J_m = \int_{-\pi\sqrt{B}}^{+\pi\sqrt{B}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} - ih\frac{\alpha}{\sqrt{B}}\right) \left(\frac{C_m (i\alpha)^m}{m! B^{\frac{m}{2}}}\right) d\alpha.$$

Alors,

$$I = Cte \sum_{m=0}^{\infty} J_m.$$

On a,

$$\exp\left(e^r \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m S_m(r)}{B^{\frac{m}{2}} m!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^r \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m S_m(r)}{B^{\frac{m}{2}} m!}\right)^k}{k!} \quad (4.7)$$

Utilisant (4.6) et (4.7), les valeurs de  $C_m$  se présentent comme suit :

$$C_0 = 1, \quad C_1 = C_2 = 0,$$

$$C_3 = e^r S_3(r),$$

$$C_4 = e^r S_4(r),$$

$$C_5 = e^r S_5(r),$$

$$\frac{C_6}{6!} = \frac{1}{6!} e^r S_6(r) + \frac{1}{2} e^{2r} \left( \frac{1}{3!^2} S_3(r)^2 \right),$$

$$\frac{C_7}{7!} = \frac{1}{7!} e^r S_7(r) + \frac{1}{3!4!} e^{2r} S_3(r) S_4(r),$$

$$\frac{C_8}{8!} = \frac{e^r}{8!} S_8(r) + \frac{1}{2} e^{2r} \left( \frac{1}{4!^2} S_4(r)^2 + \frac{2}{3!5!} S_5(r) S_3(r) \right),$$

$$\frac{C_9}{9!} = \frac{1}{9!} e^r S_9(r) + \frac{1}{2} e^{2r} \left( \frac{2}{5!4!} S_5(r) S_4(r) + \frac{2}{3!6!} S_3(r) S_6(r) \right) + \frac{1}{6} e^{3r} \frac{1}{3!^3} S_3(r)^3,$$

$$\frac{C_{10}}{10!} = e^r \frac{1}{10!} S_{10}(r) + \frac{1}{2} e^{2r} \left( \frac{1}{6!4!} (2S_6(r)S_4(r) + \frac{1}{7!3!} (2S_7(r)S_3(r) + \frac{1}{5!^2} (S_5(r)^2)) \right) + \frac{1}{6} e^{3r} \frac{3}{3!^24!} S_3(r)^2 S_4(r),$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}}{11!} &= \frac{1}{11!} e^r S_{11}(r) + \frac{1}{2} e^{2r} \left( \frac{2}{3!8!} S_3(r) S_8(r) + \frac{2}{4!7!} S_4(r) S_7(r) + \frac{2}{5!6!} S_5(r) S_6(r) \right) + \\ &\quad \frac{1}{6} e^{3r} \left( \frac{3}{3!^25!} S_3(r)^2 S_5(r) + \frac{1}{3!4!^2} 3S_4(r)^2 S_3(r) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{12}}{12!} &= \frac{1}{12!} e^r S_{12}(r) + \frac{1}{2} e^{2r} \left( \frac{2}{3!9!} S_3(r) S_9(r) + \frac{2}{4!8!} S_4(r) S_8(r) \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} e^{2r} \left( \frac{2}{5!7!} S_5(r) S_7(r) + \frac{1}{6!^2} S_6(r)^2 \right) + \frac{1}{6} e^{3r} \left( \frac{1}{4!^3} (S_4(r)^3) + \frac{3}{3!^26!} S_3(r)^2 S_6(r) + \frac{6}{3!4!5!} S_3(r) S_4(r) S_5(r) \right) + \\ &\quad \frac{1}{4!3!^4} e^{4r} S_3(r)^4. \end{aligned}$$

La formule générale de calcul de  $C_m$  est donnée comme suit :

$$\frac{C_m}{m!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} \frac{e^{kr}}{k!} \left( \sum_{j_1+j_2+\dots+j_k=m} \frac{S_{j_1}(r) S_{j_2}(r) \dots S_{j_k}(r)}{j_1! j_2! \dots j_k!} \right), \quad j_i \geq 3 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k.$$

Sachant que  $B = r(r+1)e^r$  et  $re^r = n$ .

Quand  $n$  tend vers l'infini, les  $J_i$  sont estimés à l'aide de maple.

$$\text{Posons : } \exp\left(-\frac{h^2}{2B}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-h^2}{2B}\right)^k.$$

Le résultat suivant est obtenu,

$$J_0 = \sqrt{2\pi} \left( 1 - \frac{h^2}{2r(r+1)} e^{-r} + \frac{h^4}{8r^2(r+1)^2} e^{-2r} \right) + O(e^{-3r}),$$

$$J_1 = 0, J_2 = 0,$$

$$J_3 = \sqrt{2\pi} \left( -\frac{(r^2 + 3r + 1)h}{2r(r+1)^2} e^{-r} + \frac{(5 + 15r + 5r^2)h^3}{12r^2(r+1)^3} e^{-2r} \right) + O(e^{-3r}),$$

$$J_4 + J_6 = \sqrt{2\pi} \left( -\frac{(2r^4 + 9r^3 + 16r^2 + 6r + 2)}{24r(r+1)^3} e^{-r} + \frac{(20 + 90r + 190r^2 + 105r^3)h^2}{48r^2(r+1)^4} e^{-2r} \right) + O(e^{-3r}),$$

$$J_5 + J_7 + J_9 + J_{11} = \sqrt{2\pi} \left( \frac{(6 + 32r + 56r^2 + 135r^3 + 101r^4 + 37r^5 + 6r^6)h}{48r^2(r+1)^5} e^{-2r} \right) + O(e^{-3r}),$$

$$J_8 + J_{10} + J_{12} = \sqrt{2\pi} \left( \frac{(4 + 24r + 100r^2 - 636r^3 - 588r^4 - 384r^5 - 143r^6 - 12r^7 + 4r^8)}{1152r^2(r+1)^6} e^{-2r} \right) + O(e^{-3r}),$$

Pour  $i \geq 14$ ,  $J_i = O(e^{kr})$  tel que  $k \geq 3$ .

$$\sum_{m=13}^{\infty} J_m = O(e^{-3r}),$$

Il en découle,

$$I = Cte\sqrt{2\pi} \left( 1 + \frac{P_0 + hP_1 + h^2P_2}{e^r} + \frac{Q_0 + hQ_1 + h^2Q_2 + h^3Q_3 + h^4Q_4}{e^{2r}} + O(e^{-3r}) \right).$$

Finalement

$$B_{n+h} = \frac{(n+h)! \exp(e^r - 1)}{r^{n+h} \sqrt{2\pi} \sqrt{B}} \left( 1 + \frac{P_0 + hP_1 + h^2P_2}{e^r} + \frac{Q_0 + hQ_1 + h^2Q_2 + h^3Q_3 + h^4Q_4}{e^{2r}} + O(e^{-3r}) \right) \quad (4.8)$$

Les  $P_i$  et les  $Q_i$  sont des fonctions rationnelles en  $r$ .

$$P_0 = -\frac{2r^4 + 9r^3 + 16r^2 + 6r + 2}{24r(r+1)^3},$$

$$P_1 = -\frac{r^2 + 3r + 1}{2r(r+1)^2},$$

$$P_2 = -\frac{1}{2r(r+1)},$$

$$Q_0 = \frac{4 + 24r + 100r^2 - 636r^3 - 588r^4 - 384r^5 - 143r^6 - 12r^7 + 4r^8}{1152r^2(r+1)^6},$$



$$Q_1 = \frac{6 + 32r + 56r^2 + 135r^3 + 101r^4 + 37r^5 + 6r^6}{48r^2(r+1)^5},$$

$$Q_2 = \frac{20 + 90r + 190r^2 + 105r^3}{48r^2(r+1)^4},$$

$$Q_3 = \frac{5 + 15r + 5r^2}{12r^2(r+1)^3},$$

$$Q_4 = \frac{1}{8r^2(r+1)^2}.$$

Sachant que  $\tau_n = \frac{B_{n+1}}{B_n} - 1$ .

Il s'ensuit :

$$\tau_n - \frac{1}{2}(\tau_{n-1} - \tau_{n+1}) = \frac{B_{n+1}}{B_n} - \frac{1}{2} \left( \frac{B_{n+2}}{B_{n+1}} + \frac{B_n}{B_{n-1}} \right) \quad (4.9)$$

On calcule alors de la formule (4.8) les termes  $B_{n-1}$ ,  $B_n$ ,  $B_{n+1}$ ,  $B_{n+2}$ .

Moyennant les valeurs estimés de  $B_{n+h}$  pour  $h \in \{-1, 0, 1, 2\}$  et la relation (4.9) utilisant maple, nous avons le résultat suivant :

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} - \frac{1}{2} \left( \frac{B_{n+2}}{B_{n+1}} + \frac{B_n}{B_{n-1}} \right) = \frac{-3Q_3 - 6Q_4 + P_2^2 + 3P_1P_2 - 2\frac{P_2}{r}}{e^r} + O(e^{-2r}), \quad (4.10)$$

avec :

$$P_1 = -\frac{r^2 + 3r + 1}{2r(r+1)^2} = -\frac{1}{2r} - \frac{1}{2(r+1)^2} = -\frac{1}{2r} + O(r^{-2}),$$

$$P_2 = \frac{-1}{2r(r+1)} = -\frac{1}{2r^2} - \frac{1}{2r^2(r+1)} = -\frac{1}{2r^2} + O(r^{-3}),$$

$$Q_3 = \frac{5 + 15r + 5r^2}{12r^2(r+1)^3} = \frac{5}{12r^3} + O(r^{-4}),$$

$$Q_4 = \frac{1}{8r^2(r+1)^2} = O(r^{-4}),$$

$$P_0 = -\frac{2r^4 + 9r^3 + 16r^2 + 6r + 2}{24r(r+1)^3} = O(1),$$

$$Q_0 = O(r^{-2}),$$

$$Q_1 = O(1).$$

Remplaçons  $P_i$  et  $Q_i$  par leurs expressions dans (4.10), le résultat suivant s'obtient immédiatement.

$$\tau_n - \frac{1}{2}(\tau_{n-1} - \tau_{n+1}) = \frac{-3Q_3 - 6Q_4 + P_2^2 + 3P_1P_2 - 2\frac{P_2}{r}}{e^r} + O(e^{-2r}) = \frac{\frac{1}{2} + O(r^{-1})}{r^3 e^r}.$$

Pour  $n$  assez grand on a :

$$\tau_n - \frac{1}{2}(\tau_{n-1} - \tau_{n+1}) \geq 0.$$

D'où la concavité asymptotique de la suite  $\tau_n$ . □

## 4.5 A propos de la séquence $\left(\frac{B_n}{n!}\right)_n$

Rappelons que la convexité de la suite des nombres de Bell  $(B_n)_n$  découle de la log-convexité de cette dernière.

La suite  $\left(\frac{B_n}{n!}\right)_n$  est-elle concave ?

La réponse à cette question est donné dans [21] par R. Canfield. Il utilise les fonctions génératrices, nous abordons dans cette partie la log concavité asymptotique de cette dernière en se basant sur la valeur estimée de  $B_{n+h}$ .

**Corollaire 4.5.1.** [21] La séquence  $\left(\frac{B_n}{n!}\right)_n$  est asymptotiquement log-Concave.

**Preuve :**

Lors de l'étude asymptotique de la suite des moyennes graduées dans un treillis des partitions d'un ensemble nous avons estimé  $B_{n+h}$ .

$$B_{n+h} = \frac{(n+h)! \exp(e^r - 1)}{r^{n+h} \sqrt{2\pi} \sqrt{B}} \left( 1 + \frac{P_0 + hP_1 + h^2P_2}{e^r} + \frac{Q_0 + hQ_1 + h^2Q_2 + h^3Q_3 + h^4Q_4}{e^{2r}} + O(e^{-3r}) \right).$$

On a :

$$\left(\frac{B_n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{(\exp(e^r - 1))^2 \left(1 + \frac{P_0}{e^r} + \frac{Q_0}{e^{2r}} + O(e^{-3r})\right)^2}{2\pi B r^{2n}},$$

$$\frac{B_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{2} \frac{\exp(e^r - 1) \left(1 + \frac{P_0 - P_1 + P_2}{e^r} + \frac{Q_0 + Q_2}{e^{2r}} + O(e^{-3r})\right)}{\sqrt{2\pi} B r^{n-1}},$$

et

$$\frac{B_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2} \frac{\exp(e^r - 1) \left( 1 + \frac{P_0 + P_1 + P_2}{e^r} + \frac{Q_0 + Q_2}{e^{2r}} + O(e^{-3r}) \right)}{\sqrt{2\pi} B r^{n+1}}.$$

Alors le résultat suivant s'ensuit :

$$\left( \frac{B_n}{n!} \right)^2 - \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\exp(2e^r - 2)}{2\pi r^{2n} B} \left( \frac{-2P_2}{e^r} + O(e^{-2r}) \right).$$

Puisque :

$$B = (r^2 + r)e^r = r^2 \left( 1 + \frac{1}{r} \right) e^r = r^2 \exp(O(r^{-1}) + r) \text{ et } P_2 = \frac{-1}{2r^2} + O(r^{-3}).$$

Il s'ensuit :

$$\frac{\exp(2e^r - 2)}{2\pi r^{2n} B} \left( \frac{-2P_2}{e^r} + O(e^{-2r}) \right) = \frac{\exp(2e^r - 2e^r - 2r + O(r^{-1}))}{2\pi r^{2n+4}}.$$

Finalement

$$\left( \frac{B_n}{n!} \right)^2 - \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\exp(2e^r - 2r - 2 + O(r^{-1}))}{2\pi r^{2n+4}}.$$

Pour  $n$  suffisamment grand la suite  $\left( \frac{B_n}{n!} \right)_n$  est log concave.  $\square$

**Théorème 4.5.1.** [21] Si la séquence  $1, X_1, X_2, \dots$ , est non négative et log-concave, alors il est de même pour la séquence  $1, A_1, A_2, \dots$ , définie par la fonction génératrice telle que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n u^n = \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} X_j u^j \right).$$

**Proposition 4.5.1.** [21] Soit  $X_j = \frac{1}{(j-1)!}$ . La séquence  $(X_j)_j$  est log-concave.

**Preuve :**

On a :

$$(X_j)^2 = \frac{1}{(j-1)!^2}, \quad X_{j-1} X_{j+1} = \frac{1}{(j-2)!(j)!}.$$

Il vient,

$$\frac{(X_j)^2}{X_{j-1} X_{j+1}} = \frac{(j-2)!(j)!}{(j-1)!^2} = \frac{j}{j-1}.$$

Puisque :  $\frac{j}{j-1} > 1$ . On a :

$$(X_j)^2 \geq X_{j-1} X_{j+1}.$$

La log-concavité de la séquence  $(X_j)_j$  est ainsi établie.  $\square$

**Proposition 4.5.2.** [21] La séquence  $\left( \frac{B_n}{n!} \right)_n$  est log-concave pour  $n \geq 1$ .

**Preuve :**

On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} u^n = \exp(e^u - 1) = \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} - 1\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j}{j!}\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{1}{(j-1)!} u^j\right).$$

Posons :

$$X_j = \frac{1}{(j-1)!}.$$

De la proposition 4.5.1 on a la log concavité de la séquence  $(X_j)_j$ .

Du théorème 4.5.1 le résultat s'ensuit. □

**Corollaire 4.5.2.** [14] On a :

$$B_{n-1}B_{n+1} \geq B_n^2 \geq \binom{n}{n+1} B_{n-1}B_{n+1}.$$

**Preuve :**

La première inégalité découle directement de la log-convexité de la suite  $(B_n)_n$ . (voir 2.6.2)

De la proposition 4.5.2 on a :

$$\left(\frac{B_n}{n!}\right)^2 \geq \left(\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\right) \left(\frac{B_{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Du coup,

$$B_n^2 \geq \binom{n}{n+1} B_{n-1}B_{n+1}.$$

□

**Corollaire 4.5.3.** [14] On a :

$$A_{n-1}A_{n+1} \leq A_n^2 \leq \binom{n+1}{n} A_{n-1}A_{n+1}, \quad A_n = \frac{B_n}{n!}.$$

---

## Sur la Conjecture forte de Sadek Bouroubi

---

### 5.1 Introduction

Comme nous l'avons précisé dans le chapitre 4, la conjecture de K. Engel est vraie asymptotiquement mais elle reste ouverte à nos jours. Afin de trouver une réponse, S. Bouroubi a donné une nouvelle approche pour la résoudre ou éventuellement contribuer à sa résolution en exploitant un résultat dû à H. Harper [3]. Dans ce chapitre se trouvent les résultats essentiels sur lesquels l'approche s'articule.

### 5.2 Principaux résultats

Rappelons que si

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n S(n, k)x^k.$$

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n(x)$  admet  $n$  racines réelles distinctes et non positives.

**Remarque 5.2.1.** Pour  $x = 1$ ,  $S_n(1) = B_n$ .

Soit  $I_n = \{0\} \cup \{-\alpha_i(n), i = 1, \dots, n-1\}$ ,  $-\alpha_1(n)$ ,  $-\alpha_2(n)$ ,  $\dots$ ,  $-\alpha_{n-1}(n)$  les racines négatives de  $S_n(x)$ .

Pour  $x \notin I_n$ , posons :

$$\tau_n(x) = \frac{S_{n+1}(x)}{S_n(x)} - x. \tag{5.1}$$

Il est clair que  $\tau_n(1) = \tau_n$ .

**Théorème 5.2.1.** [8] Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\tau_n(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x}{x + \alpha_j(n)} = n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x}{x + \alpha_j(n)}.$$

**Corollaire 5.2.1.** [8] Pour tout  $n \geq 2$  on a :

$$1 < \tau_n(x) < n, \text{ pour } x > 0.$$

Soit maintenant :

$$u_n(x) = \tau_n(x) + x. \quad (5.2)$$

**Lemme 5.2.1.** [8] Pour tout  $n \geq 3$  on a :

$$\frac{1}{u_{n-1}(x)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{L_j(n)}{x + \alpha_j(n)} \text{ avec, } L_j(n) \in ]0, 1[.$$

**Théorème 5.2.2.** [8] Pour tout  $n \geq 2$ , nous avons :

$$\tau_{n+1}(x) + \tau_{n-1}(x) - 2\tau_n(x) = x \left( \frac{u_{n-1}(x)}{u_n(x)} \right) d \left( \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right),$$

$$\text{avec } \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = 1 + x \sum_{j=1}^{n-1} \frac{L_j(n)}{(x + \alpha_j(n))^2}.$$

La conjecture forte repose sur ce dernier théorème.

**Théorème 5.2.3.** [8] Si les racines positives de l'équation  $d \left( \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right) = 0$  sont inférieures à 1 alors, la suite  $(\tau_n)_n$  est concave.

**Conjecture 5.2.1.** Les racines positives de l'équation  $d \left( \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right) = 0$  sont inférieures à 1. Cette conjecture est dite **conjecture forte**.

**Remarque 5.2.2.** La conjecture de K. Engel est en fait une conséquence directe de la conjecture forte.

**Proposition 5.2.1.** On a :

$$\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = \frac{S_{n-1}(x)S_{n+1}(x)}{S_n^2(x)}.$$

**Preuve :**

La preuve découle uniquement de (5.1) et (5.2).

**Corollaire 5.2.2.** Si les racines positives de l'équation  $d\left(\frac{S_{n+1}(x)S_{n-1}(x)}{S_n^2(x)}\right) = 0$  sont inférieures à 1 alors, la suite  $(\tau_n)_n$  est concave.

**Preuve :**

Conséquence directe du théorème 5.2.3 et la proposition 5.2.1 .

**Proposition 5.2.2.**

$$\tau_{n+1}(x) + \tau_{n-1}(x) - 2\tau_n(x) = \frac{S_{n+2}(x)S_n(x)S_{n-1}(x) + S_{n+1}(x)S_n^2(x) - 2S_{n-1}(x)S_{n+1}^2(x)}{S_n(x)S_{n+1}(x)S_{n+2}(x)}.$$

**Corollaire 5.2.3.** On a :

$$d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = \frac{S_{n+1}(x)S_{n-1}(x)}{xS_n^2(x)} + \frac{S_{n+1}(x)}{xS_n(x)} - 2\frac{S_{n+1}(x)^2S_{n-1}(x)}{xS_n^3(x)}.$$

**Preuve :**

Utilisant la proposition 5.2.1 et la proposition 5.2.2, le résultat s'obtient immédiatement.

**Corollaire 5.2.4.**

$$d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = 0 \iff S_{n+2}(x)S_n(x)S_{n-1}(x) + S_{n+1}(x)S_n^2(x) - 2S_{n-1}(x)S_{n+1}^2(x) = 0.$$

Utilisant maple et grace aux deux propositions 5.2.1 et 5.2.4, nous avons élaboré deux programmes qui nous ont permis de verifier la conjecture forte pour  $n \leq 100$ , ainsi que pour  $n = 200, 250, 300, 350$ .

Les programmes sont les suivants :

**Programme1 :**

```
> with(combinat , stirling2);
```

```
> m := n;
```

```
> b[0] := 1;
```

```
> for n from 1 by 1 to m do
```

```
  b[n] := sum(stirling2 (n, i)*(x^i), i = 1..n) od :
```

```
> for n from 1 by 1 to m-2 do
```

```
  > fsolve (b[n+2]*b[n]*b[n-1]+b[n]^2*b[n+1]-2*b[n+1]^2*b[n-1], x = 0..infinity)od;
```

**Programme2 :**

```

> with(combinat , stirling2);

> m := n;

> b[0] := 1;

> for n from 1 by 1 to m do b[n] := sum(stirling2 (n, i)*(x^i), i = 1..n) od :

> for n from 1 by 1 to m-1 do q[n] := diff (b[n+1]*b[n-1]/b[n]^2, x)

R[n] := numer(q[n]) od :

> for n from 1 by 1 to m-2 do

> fsolve (R[n], x = 0..infinity) od;

```

### 5.3 Les racines de l'équation $d \left( \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right) = 0$ pour quelques valeurs de n

Les tableaux suivants illustre les racines de l'équation  $d \left( \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right) = 0$  respectivement pour  $n = 150, 200, 250, 300, 350$ .

0.	0.1401298464 10 <sup>-45</sup>	0.6974966867 10 <sup>-36</sup>
0.1157263967 10 <sup>-26</sup>	0.1296980633 10 <sup>-22</sup>	0.7267336736 10 <sup>-19</sup>
0.1336670702 10 <sup>-16</sup>	0.1469609620 10 <sup>-14</sup>	0.4333855918 10 <sup>-13</sup>
0.8482387226 10 <sup>-12</sup>	0.9313538947 10 <sup>-11</sup>	0.7418406865 10 <sup>-10</sup>
0.4449710935 10 <sup>-9</sup>	0.2055269311 10 <sup>-8</sup>	0.8556267009 10 <sup>-8</sup>
0.2573421947 10 <sup>-7</sup>	0.1106028730 10 <sup>-6</sup>	0.1400049027 10 <sup>-6</sup>

TAB. 5.1 – Les solutions de l'équation  $d \left( \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right) = 0$  pour  $n = 150$ .



0.	0.1244603056 $10^{-60}$	0.8232102714 $10^{-48}$
0.1814969970 $10^{-35}$	0.3864649692 $10^{-30}$	0.4114505665 $10^{-25}$
0.3777453447 $10^{-22}$	0.2077819310 $10^{-19}$	0.1671915679 $10^{-17}$
0.8903784915 $10^{-16}$	0.1954043644 $10^{-14}$	0.3050570280 $10^{-13}$
0.3044385692 $10^{-12}$	0.2314004723 $10^{-11}$	0.1375449070 $10^{-10}$
0.6542088935 $10^{-10}$	0.2761267500 $10^{-9}$	0.9194223801 $10^{-9}$
0.3294040350 $10^{-8}$	0.7214766062 $10^{-8}$	

TAB. 5.2 – Les solutions de l'équation  $d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = 0$  pour  $n = 200$ .

0	0.9818186931 $10^{-91}$	0.1146695332 $10^{-71}$
0.4464198919 $10^{-53}$	0.3432466304 $10^{-45}$	0.1319590003 $10^{-37}$
0.3048961909 $10^{-33}$	0.4226463162 $10^{-29}$	0.2591981330 $10^{-26}$
0.1057521179 $10^{-23}$	0.9324824019 $10^{-22}$	0.5829052972 $10^{-20}$
0.1613840945 $10^{-18}$	0.3324578842 $10^{-17}$	0.4329621711 $10^{-16}$
0.4401534883 $10^{-15}$	0.3395735885 $10^{-14}$	0.2138775447 $10^{-13}$
0.1132757389 $10^{-12}$	0.5046520486 $10^{-12}$	0.2041068455 $10^{-11}$
0.6905554437 $10^{-11}$	0.2357498373 $10^{-10}$	0.6055105851 $10^{-10}$
0.2133573969 $10^{-9}$	0.3299794956 $10^{-9}$	

TAB. 5.3 – Les solutions de l'équation  $d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = 0$  pour  $n = 300$ .

0	0.8720301752 $10^{-106}$	0.1353370409 $10^{-83}$	0.7001330598 $10^{-62}$
0.7001330598 $10^{-62}$	0.1022954649 $10^{-52}$	0.7473123832 $10^{-44}$	0.7473123832 $10^{-44}$
0.8667885833 $10^{-39}$	0.603207704 $10^{-34}$	0.1025397487 $10^{-30}$	0.1161028195 $10^{-27}$
0.2062025339 $10^{-25}$	0.260280379410 $10^{-23}$	0.1200001665 $10^{-21}$	0.4111923126 $10^{-20}$
0.7917751627 $10^{-19}$	0.1180274556 $10^{-17}$	0.1242844955 $10^{-16}$	0.1056149178 $10^{-15}$
0.7188606098 $10^{-15}$	0.4095675952 $10^{-14}$	0.2018884242 $10^{-13}$	0.8516996524 $10^{-13}$
60.3313422657 $10^{-12}$	0.1093179891 $10^{-11}$	0.3648162872 $10^{-11}$	0.9406436618 $10^{-11}$
0.3136661834 $10^{-10}$	0.5386996016 $10^{-10}$		

TAB. 5.4 – Les solutions de l'équation  $d\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = 0$  pour  $n = 350$ .

On peut remarquer que si  $n_1 < n_2$ , la plus grande racine de l'équation  $d\left(\frac{u_{n_2}(x)}{u_{n_2-1}(x)}\right) = 0$  est plus petite que la plus grande racine de l'équation  $d\left(\frac{u_{n_1}(x)}{u_{n_1-1}(x)}\right) = 0$ .

---

## Conclusion générale

---

Les treillis forment une classe d'ensembles ordonnés, particulièrement intéressante, on rencontre en effet des treillis dans de multiples situations, aussi bien en mathématiques "pures" que dans des modèles ou techniques utilisées en sciences humaines.

Dans ce présent travail, nous nous sommes intéressé à l'étude de la concavité d'une suite appelée moyenne graduée dans le treillis des partitions d'un ensemble.

Les travaux faits sur ce dernier, plus précisément sur l'optimalité de sa fonction de rang ont permis de donner une condition suffisante traduite par la concavité de la suite en question que Konrad Engel a conjecturé vraie. C'est cette suite là qui a fait l'objet de notre étude.

A l'issue de celle-ci, nous avons donné les notions de bases élémentaires constamment utilisées dans notre mémoire et par la suite, les principaux résultats en lien avec le treillis en question. En effet nous avons développé une preuve assez détaillée de ce qui a fait du poset des partitions un treillis.

R. Canfield a donné la preuve asymptotique de la conjecture d'une manière trop condensée, nous l'avons reprise en détail, un recours à la machine a été d'une nécessité incontournable.

Par une nouvelle approche, qui a fait l'objet d'une publication en mai 2007 [8], S. Bouroubi a donné une condition suffisante qui est relative aux racines d'une certaine équation, lui aussi l'a conjecturé vraie. Nous avons exposé les résultats essentiels sur lesquels l'approche s'appuie et nous avons vérifié sa conjecture pour  $n \leq 150$ , ainsi que pour  $n = 200, 250, 300, 350$ .

Quelques perspectives s'ouvrent à l'issue de ce travail de mémoire.

- Résoudre la conjecture forte de Sadek Bouroubi.
- Résoudre la conjecture de Konrad Engel.
- Amélioration des résultats concernant la conjecture de Sadek Bouroubi, cette conjecture est vraie jusqu' à 350.
- Amélioration des résultats concernant la conjecture de Konrad Engel, cette conjecture est vraie jusqu' à 1500.
- Trouver d'autres approches.

---

## Bibliographie

---

- [1] Alekseev, *L. H Harper, Stirling behavior is asymptotically normal*, Ann. Maths. Stat. 38, 1967, 410-414.
- [2] Alekseev, *C. Pomerance, On the number of  $k$ -valued functions*, Probl. Kibernet. 28, 5-24, 1974.
- [3] A. Aigner, *Combinatorial theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg new York, 1979.
- [4] J. Alvarez, M. Amadis, G. Boros, D. Karp, V. Moll, L. Rosales, *An extension of a criterion for unimodality, Primary 05, Secondary 33, 40* (2001).
- [5] S. Bouroubi, *Etude de treillis des partitions, Thèse de Magister en Mathématiques*, USTHB, Alger, 1991.
- [6] S. Bouroubi, *The Alekseev condition on the principal filters in the partition lattice*, Maghreb Math. Rev. p 37-42, Vol 9, N 1 et 2, December (2000).
- [7] S. Bouroubi, *Optimisation dans les posets, Thèse de Doctorat D'Etat en Mathématiques*, USTHB, Alger, 2004.
- [8] S. Bouroubi, *Bell Numbers and Engel's conjecture*, Rostock. Math. Kolloq. , 62, 61-70 (2007).
- [9] G. Boros, V. Moll, *A criterion for unimodality. Elec. Jour. combin.*, 1-6, 1999.
- [10] F. Brenti, *Unimodality, polya frequency sequences in combinatorics*, Amer. Maths. Soc., 1989.
- [11] F. Brenti, *Log Concave and unimodal sequences in Algebra, Combinatorics and geometry : Contemporary Mathematics, 178 : 71-89*, 1994.

- 
- [12] M. Barbut, *Partitions d'un ensemble fini : leur (cosisimplexe) et leur représentation géométrique, mathématiques et sciences humaines, tome 22, 1968, p.5-22.*
- [13] M. Barbut, B. Manjardet, *Ordre et classification algèbre et combinatoire*, Paris : Librairie Hachette 1970-2 vols 176 + 173 .
- [14] E. A. Bender, E. R. Canfield, *log concavity and related properties of the cycle index polynomials. J. combin. Theory Ser. A 74 (1996), no. 1, 57-70 .*
- [15] Miklós Bóna, *Real zeros and partition without singleton blocks, Department of Mathematics, University of Florida, Gainesville Fl 32611-8105, USA, arXiv :0705.2734v2* May 18, 2007 .
- [16] M. Bóna , *Introduction to Enumerative Combinatorics, Mc Graw Hill, 2007.*
- [17] C. Berge, *Principes de combinatoire*, Paris, Dunod, 1968, 146 p.
- [18] C. Berge, *Graphes et hypergraphes, Dunod, 1973.*
- [19] Louis. Comtet, *Advanced Combinatorics*, Reidel, Dordrecht, 1974.
- [20] Crapo H. H, Rota G. C., *On the fondation of Combinatorial Theory*, Combinatorial Geometries., Cambridge, M.I.T. Press, 1971. MR 290980.
- [21] E. R. Canfield, *Engel's Inequality for Bell Number's*, J. Combin Theory Ser. A 72,184-187 (1995).
- [22] E. R. Canfield, H. Harper, *A large antichains in the partition lattice*, Random structures Algorithms 6, 89-104, 1995. Numer.
- [23] E. R. Canfield, *Mett and Join within the lattice of Set Partitions* , The Electronic Jornal Of Combinatorics, volume 84, March 2001.
- [24] E. R. Canfield, *C.Pomerance, On the problem of uniqueness for the maximum Stirling numbers of the second kind*, Integers 2, 2002.
- [25] V. Duquenne, B. Manjardet, *Relations binaires entre partitions*, Mathématiques et sciences humains, Tome 80, 1982, p. 5-37.
- [26] K. Engel, Gronau, H-d.O.F, *Sperner Theory in partially ordred sets*, BSB B.G, Teubner verlagessellschaft, leipzig, 1985.
- [27] K. Engel, *About k-optimal representations of posets*, J. Inform. Process. Cybern. EIK,. 25 (1989), 3-10.
- [28] K. Engel, *On the average rank of an element in a filter of the partition lattice* , J Combin.Theory Ser, A 64, 67-78, 1994.
-

- [29] K. Engel, *Sperner Theory*, Combridje University Press, Combridje,1997.
- [30] W. K. Hayman, *A generalisation of Stirling formula*, J. Reine Angew. Math. 196, 1956, 67-95.
- [31] E. H. Lieb, *Concavity propreties and generating function for Stirling numbers*, J. Combinatorial theory 5 (1968) 203-206 .
- [32] L. Lovàsz, *Combinatorial problems and exercises*, Problem 9.37, p, Elsevier North-Holland, NY, (1979).
- [33] L. Moser, M. Wyman, *An asymtotic formula for the Bell numbers*, Trans. Royal Soc.Canada III 49 , 1955, 49-54.
- [34] P. Mallivin, *Intégration et probabilités Analyse de Fourier et analyse spectrale* Paris New York Barcelone Millan Mexico Rio de Janioro , 1982.
- [35] R. Stanley, *Log concave and unimodale sequences in Algerbra Combinatorics and geometry*, Ann. New York Acad. Sci. 576, 1989,145-253.
- [36] R. Stanley, *Log concave and unimodale sequences in Algerbra Combinatorics and geometry*, Ann. New York Acad. Sci. 576, 1989, 145-253 .
- [37] E. Spencer, *Ein satz über untermengen einer endlichen Menge*, Math.z 27 ,(1928) 544-548.
- [38] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, New York, 1990.
- [39] H. Wilf, *Generatingfunctionology*, Acadimic Press. 1st edition, 1994.