

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene



Faculté des Sciences Mathématiques

MÉMOIRE présenté pour l'obtention

du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES (E.D.P)

Par : YOUNSI Abdelhafid

Sujet

**Équations de Navier-Stokes
et Turbulence de Fluide**

Soutenu publiquement le 20 Septembre 2004, devant le jury composé de :

K. LEMRABET	Professeur	U.S.T.H.B	Président
D. TENIOU	Professeur	U.S.T.H.B	Directeur de Thèse
A. HEMINNA	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Examineur
H. BESSAIH	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Examineur



Louis Marie Henrie **NAVIER** 1785-1836



George **STOKES** 1819-1903

Equations de Navier-Stokes et turbulence de fluide



Léonard **EULER** 1707-1783



Joseph-Louis **LAGRANGE** 1736-1813

Remerciements

Je tiens à exprimer mon entière gratitude à Monsieur D. TENIOU pour le sujet qu'il m'a proposé et pour tous les conseils et l'aide qu'il n'a pas cessé de me donner durant l'élaboration de cette thèse.

Je remercie Monsieur K. LEMRABET pour l'honneur qu'il me fait en présidant le Jury auquel ce travail est soumis.

Je remercie également Monsieur A. HEMINNA et H. BESSAIH pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Table des matières

Introduction	4
1 Une approche élérienne-lagrangienne pour les fluides incompressibles	6
1.1 Introduction :	6
1.2 Rappel :	10
1.2.1 Calcul indiciel, calcul tensoriel :	10
1.2.2 Description des milieux continus :	11
1.2.3 Description mathématique :	12
1.2.4 Description de Lagrange (Joseph–Louis 1736-1813) :	15
1.2.5 Description d’Euler (Léonard Euler 1707-1783) :	15
1.2.6 La dérivée particulaire :	17
1.2.7 Equation de continuité :	18
1.2.8 Milieu continu incompressible :	18
1.2.9 Equation d’Euler :	20
1.3 Description eulérienne-lagrangienne :	21
1.4 La reformulation en vecteurs actifs :	25
1.5 Existence locale :	27
1.6 Le problème de blow up :	38
1.7 Le calibre d’Euler Lagrange :	44
2 Vitesse de combustion dans une diffusion d’un réactif-passif	47
2.1 Introduction :	47
2.2 Écoulement de cisaillement:	49
2.3 Vitesse de combustion en bloc :	50
2.4 Une borne supérieure sur la vitesse de combustion en bloc :	57
2.5 Une borne inférieure sur la vitesse de combustion en bloc :	59
2.6 Vitesse de combustion en bloc dans des écoulements de cisaillement	61
3 Bornes variationnelles dans une convection turbulente	70
3.1 Introduction :	70
3.2 Rappels :	74
3.3 Transport vertical de la chaleur	76
3.4 La méthode de fond :	81

3.5	Formulation de la majoration :	81
3.6	Les équations pour le nombre de Prandtl infini sans rotation :	84
3.6.1	Une majoration logarithmique :	85
3.7	Les équations pour le nombre de Prandtl infini avec rotation :	88
3.7.1	Flux de la chaleur dans un système tournant	90
3.8	Majoration du flux de la chaleur	93
3.9	Les intégrales singulières et le terme B_1	96
3.10	Estimation pour le terme de rotation :	98

Liste des Figures

1.1	La description lagrangienne et la description eulerienne du mouvement	8
2.1	Le profil de vitesse	49
2.2	Exemple d'écoulement de cisaillement	50
2.3	Profil de vitesse de l'écoulement $u_1 = 0$ et $u_2 = U \cos \frac{2\pi x}{L}$	50
2.4	Front d'onde	52
2.5	Exemple d'écoulement filaire	53
2.6	Surface de courant	54
2.7	La structure de l'écoulement de cisaillement	62
3.1	Le flux de la convection thermique	71
3.2	Le transport de chaleur par conduction	71
3.3	Le transport de chaleur par convection	72
3.4	Une cellule de Rayleigh-Benard	78
3.5	Représentaion du profil de fond τ	94
3.6	Graphes des fonctions $N - 1 = f(\mathbf{E})$	103
3.7	Graphes des fonctions $N - 1 = f(\mathbf{R})$	103

Introduction :

L'objectif de ce travail est de présenter quelques progrès récents sur l'analyse mathématiques (en un sens très pratique) des équations d'Euler et de Navier-Stokes pour des fluides incompressibles. Ces deux équations Euler et Navier-Stokes sont simples à écrire; elles sont non linéaires, ce qui est une source de difficultés considérables. Ce sont des équations d'évolution: il y a la variable temporelle. L'histoire de ce problème commence avec Euler, 1755, puis Navier, 1822 et Stokes, 1849. Après avoir écrit ses équations, Euler énonce: du point de vue mécanique, le problème est résolu mais il subsiste une "légère" difficulté analytique. Cette "légère" difficulté analytique, près de deux siècles et demi après, est toujours devant nous.

Le mot turbulence fait songer à agitation, désordre, chaos. L'évolution spatiale ou temporelle de nombreux phénomènes est caractérisée par l'absence apparente d'ordre, la coexistence d'échelles très différentes, l'impossibilité d'une reproduction et d'une prévision détaillées. Un tel comportement est qualifié de turbulent.

Les écoulements fluides en offrent les illustrations les plus courantes, rafale de vent ou tourbillon d'un torrent et ce sont des hydrauliciens, en particulier J. Boussinesq et O.Reynolds, qui ont identifié vers la fin du XIXe siècle deux régimes d'écoulement, l'un régulier ou **laminaire** l'autre irrégulier ou **turbulent**, avec des propriétés très différentes, notamment pour la diffusion des grandeurs attachées au fluide. La méthode statistique fut naturellement utilisée pour ces problèmes aux applications nombreuses et importantes, par des chercheurs comme L.Prandtl, G.I.Taylor, T.von Karman, A.N.Kolmogorov et R. Kraichnan.

Les expériences de turbulence (A. Majda 1986 [1], J.T. Beale, T. Kato, A. Majda 1984 [2], H. K. Moffatt 1969 [3]) donnent les mesures qui correspondent aux moyennes de certaines quantités associées aux variables apparaissant dans l'équation de Navier-Stokes.

La connaissance mathématique actuelle au sujet des équations de Navier-Stokes est inachevée. Certaines des quantités mesurées dans les expériences sont accessibles à la théorie mathématique. Elles sont généralement de bas ordre, moyennes en moyennes comme la moyenne de temps d'intégrales des carrés des gradients. La turbulence est concernée par

les propriétés statistiques ou collectives des fluides. Un écoulement turbulent combine en effet des structures tourbillonnaires dans des échelles qui couvrent une bande large, et qui sont toutes en forte interaction par suite de la non linéarité des équations de Navier-Stokes. Néanmoins, l'empêchement principal à progresser dans l'analyse rigoureuse de la turbulence est le manque actuel de compréhension de blow-up possible dans les différentes solutions des systèmes d'Euler et de Navier-Stokes. Dans le premier chapitre, nous présentons une approche eulérienne-lagrangienne des fluides incompressibles et un résultat d'existence locale pour les équations tridimensionnelles d'Euler pour les fluides incompressibles. La solution est construite en utilisant une formulation des équations comme un système de vecteur actif dans des coordonnées eulériennes. La formulation utilise l'inverse de la carte lagrangienne de trajectoire et de son gradient eulérien. Nous exprimons des conditions suffisantes pour la régularité en termes de ce gradient et nous discutons le problème de blow-up

Dans le deuxième chapitre nous passons du problème de blow-up vers l'étude de la vitesse de combustion à travers les propriétés des quantités moyennes. On peut obtenir des bornes supérieures rigoureuses pour certaines moyennes en bloc de solutions des équations de Navier-Stokes mais il est plus difficile d'obtenir des bornes inférieures. Nous commençons par une borne inférieure pour la vitesse de combustion dans un modèle de la combustion turbulente. Dans le troisième chapitre nous discuterons les bornes supérieures pour le transfert thermique dans l'approximation de Boussinesq et nous discuterons le cas canonique de la convection de Rayleigh-Benard.

Chapitre 1

Une approche élérienne-lagrangienne pour les fluides incompressibles

1.1 Introduction :

Les équations tridimensionnelles d'Euler sont des équations d'évolution pour les trois composantes de la vitesse $u(x, t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \quad (1.1)$$

ou

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0$$

couplées à une quatrième équation, $\nabla \cdot u = 0$, exprimant l'incompressibilité. Dans cette formulation eulérienne la fonction $u = u(x, t)$ est la vitesse du fluide au point $x \in \mathbb{R}^3$ à l'instant t . La vitesse et la pression s'annulent à l'infini ou sont périodiques. La pression est déterminée en utilisant l'incompressibilité. Le système est conservatif et l'énergie cinétique totale, $\int |u|^2 dx$ est une constante du mouvement. Les équations d'Euler peuvent être étudiées en termes de tourbillon (A.Majda [1]). Le tourbillon est un vecteur $\omega = \nabla \times u$ correspondant à la partie antisymétrique de la matrice gradient ∇u identique $\omega = \frac{\nabla u - (\nabla u)^*}{2}$. Un critère bien connu (J.T.Beale, T.Kato, A.Majda 1984 [2]) garantit qu'aucun blow-up ne peut se produire : si

$$\int_0^T \sup_x |\omega(x, t)| dt < \infty$$

et que si les données initiales sont régulières, alors la solution est régulière dans l'intervalle de temps $[0, T]$. L'équation gouvernant le tourbillon (Helmholtz)

$$D_t \omega = (\nabla u) \omega$$

peut être interprétée en tant qu'un annulateur du commutateur de D_t et \mathbf{H} c'est à dire

$$[D_t, \mathbf{H}] = D_t \mathbf{H} - \mathbf{H} D_t = 0 \quad (1.2)$$

où

$$D_t = D_t(u, \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$$

est la dérivée particulaire,

$$\mathbf{H} = \omega(x, t) \cdot \nabla$$

et

$$[D_t, \mathbf{H}] = 0 \Leftrightarrow D_t \omega = (\nabla u) \omega.$$

Les caractéristiques de l'opérateur différentiel de premier ordre \mathbf{H} sont les lignes de tourbillon; les lignes tangentes au champ de tourbillon ω , les caractéristiques de la dérivée particulaire D_t sont les trajectoires de Lagrange des particules. Les variables lagrangiennes sont les trajectoires qui envoient $a \mapsto X(a, t)$. L'objet central dans la description lagrangienne des fluides est la transformation $a \mapsto X(a, t)$; $x = X(a, t)$ représente la position à l'instant t de la particule du fluide qui était en a à l'instant $t = 0$. Au temps $t = 0$ la transformation est l'identité, $X(a, 0) = a$. La connexion entre la description lagrangienne et la description eulerienne est donnée par les relations

$$u(x, t) = \frac{\partial X(a, t)}{\partial t}, \quad x = X(a, t).$$

Dans ce chapitre nous discutons une description des équations d'Euler comme un système de trois équations de vecteurs actifs.

Définition 1.1 *Un vecteur actif A est une solution d'une équation d'advection*

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \cdot \nabla A = 0, \quad (1.3)$$

u étant déterminée par une équation d'état indépendante du temps et nous disons que (1.3) est une équation active. A est "actif" en opposition avec "passif". Un vecteur passif résout l'équation linéaire (1.3) avec u décrit indépendamment de A .

La description concerne des quantités lagrangiennes calculées dans des variables eulériennes et combine ainsi la signification physique de la description lagrangienne avec les avantages analytiques de la description eulérienne. La description a des similitudes avec la représentation de variables de Clebsch. Les variables de Clebsch sont une paire de grandeurs scalaires, θ, φ qui sont constantes sur des trajectoires de particules

$$D_t \theta = D_t \varphi = 0$$

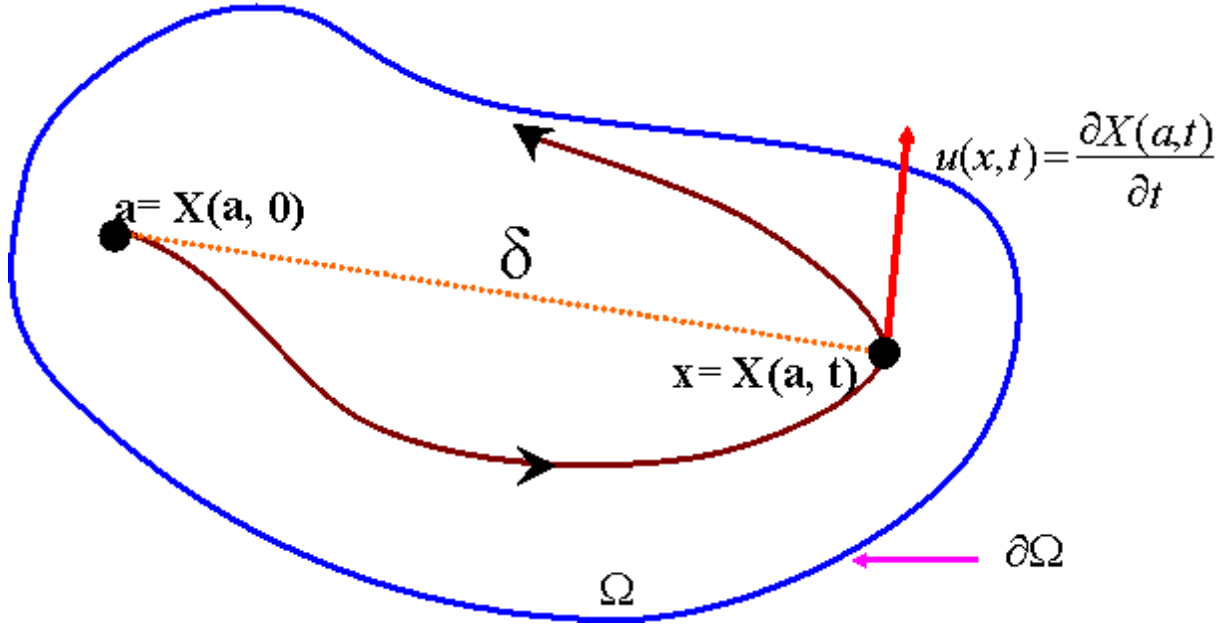


Figure 1.1: **La description lagrangienne et la description eulerienne du mouvement**

et peuvent être utilisées pour reconstruire la vitesse par l'intermédiaire de

$$u^i(x, t) = \theta(x, t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial n(x, t)}{\partial x_i}.$$

Cette représentation intéressante est quelque peu restrictive : il existe des solutions qui ne peuvent pas être représentées de cette manière. C'est parce que les variables de Clebsch imposent des contraintes spéciales sur l'hélicité. L'hélicité est le produit scalaire de la vitesse et du tourbillon $h = (u \cdot \omega)$. Bien que h lui-même ne soit pas conservé sur des trajectoires de particules, les intégrales

$$\int_T h(x, t) dx = c$$

sont des constantes du mouvement, pour n'importe quel tube T de tourbillon. Un tube T de tourbillon est une région d'évolution de temps dans l'espace dont la frontière est à chaque point parallèle au tourbillon, $(\omega \cdot \nu) = 0$ où ν est la normale à ∂T au point $x \in \partial T$. Les constantes c reflètent le degré de complexité topologique de l'écoulement (H.K.Moffatt,[3]) et en général ne sont pas triviales mais elles s'annulent identiquement pour l'écoulement qui admet une représentation de variables de Clebsch. En effet, pour de tels écoulements l'hélicité est la divergence d'un champ qui est parallèle au tourbillon

$h = -\nabla \cdot (n\omega)$ cela vient des relations suivantes

$$\begin{aligned}h &= (\theta(x, t) \nabla \varphi) \cdot \omega - \nabla n \cdot \omega, \\ \nabla \cdot \omega &= \nabla \cdot \nabla \times u = 0\end{aligned}$$

et en utilisant la formule suivante

$$\nabla \cdot (n\omega) = \nabla n \cdot \omega + n \cdot \nabla \omega$$

nous obtenons le résultat.

1.2 Rappel :

1.2.1 Calcul indiciel, calcul tensoriel :

Il y a d'abord deux conventions d'écriture faites pour alléger les notations :

i) La sommation automatique sur chaque indice répété après avoir bien défini la dimension de l'espace considéré :

Exemples :

a) $A_{ijkh}\sigma_{kh}$ signifie en fait $\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n A_{ijkh}\sigma_{kh}$

b) $\delta_{ii} = 2$ dans \mathbb{R}^2 , $\delta_{ii} = n$ dans \mathbb{R}^n si δ_{ij} est le symbole de Kronecker (= 0 pour $i \neq j$ et 1 si $i = j$)

ii) L'écriture d'une dérivée partielle :

$$\text{ex : } \phi_{,ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \text{ et } \phi_{,ll} = \Delta \phi$$

Tenseur d'orientation ou tenseur alterné fondamental dans \mathbb{R}^3 :

Introduction par le produit vectoriel :

En définissant successivement les matrices t_{ij} et le tenseur ε_{ijk} par :

$$t_{ij}(\vec{V})x_j = (\vec{X} \wedge \vec{V})_i \text{ et } t_{ij}(\vec{V}) = \varepsilon_{ijk}v_k, \forall x \text{ et } v \in \mathbb{R}^3$$

et en procédant par identification, on trouve,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j, k \text{ est une permutation paire de } 1, 2, 3. \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, 3. \\ 0 & \text{si le même indice est répété.} \end{cases}$$

et cette définition reste la même dans tout changement de base orthonormé direct;

$\vec{\varepsilon}^3$ est un pseudo tenseur appelé par abus de langage *tenseur d'orientation* ou *tenseur alterné fondamental*; l'exposant 3 signifie ici qu'il s'agit d'un tenseur d'ordre 3.

Relations importantes :

De la définition précédente, on tire successivement les identités suivantes (\vec{e}_i désignant les vecteurs unitaires de la base orthonormale choisie dans \mathbb{R}^3)

$$1) \vec{X} \wedge \vec{V} = \varepsilon_{ijk}x_jv_k \vec{e}_i$$

$$2) (\vec{W}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \vec{X} \cdot (\vec{Y} \wedge \vec{Z}) = \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k$$

$$3) \varepsilon_{lmn} \det A = \varepsilon_{ijk} a_{il} a_{jm} a_{kn}$$

$$4) \text{rot} \vec{V} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \vec{e}_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \vec{e}_i$$

$$5) \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}$$

$$6) \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

$$7) \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2 \delta_{kn}$$

$$8) \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$$

$$9) \det A = \frac{1}{6} \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{ipq} a_{il} a_{jm} a_{kn}$$

$$10) \text{ Si } \det A \neq 0 \text{ alors } (A^{-1})_{ij} = \frac{1}{2 \det A} \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{ipq} a_{lp} a_{mq}$$

Ces identités permettent d'écrire de manière condensée certains des symboles mathématiques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\phi = \phi_{,i} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \vec{e}_i;$$

$$\text{div } \vec{V} = v_{i,i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

et

$$\Delta \phi = \phi_{,ii} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}$$

si l'on a $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}$, soit $\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j}$, $\vec{\omega}$ étant donné, on a

$$\omega_i = \delta_{il} \omega_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} \omega_l;$$

il reste à identifier pour trouver que:

$$u_{k,j} = \varepsilon_{jkl} \omega_l$$

1.2.2 Description des milieux continus :

La mécanique des milieux continus est un modèle mathématique utilisé pour représenter de manière simple et maniable une réalité extrêmement complexe

Soient ξ^3 un espace euclidien de dimension 3 et Ω un domaine volumique de ξ^3

On dit que Ω est rempli d'un milieu matériel continu si à tout instant t et en chaque point M de Ω on peut définir des champs de grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel. Ces grandeurs peuvent être mathématiquement représentées par

- des champs scalaires sur Ω (masse volumique, température...)
- des champs vectoriels sur Ω (vitesse, accélération...)
- des champs tensoriels sur Ω (tenseur des déformations, tenseur des contraintes ...).

On suppose de plus que ces champs sont différentiables presque partout sur Ω .

Point matériel

L'espace ξ^3 est constitué de points géométriques. Le milieu matériel est constitué de points matériels appelés aussi particules.

Si le milieu matériel est en mouvement, les points matériels se déplacent et leur positions coïncident à chaque instant avec des points géométriques différents. On appelle position de la particule P à l'instant t le point géométrique M qui coïncide avec la particule P à l'instant t . Elle est donc un vecteur \overrightarrow{OM} de ξ^3 .

A chaque particule sont attachées des grandeurs physiques (pressions, température, vitesse, tenseur des contraintes, tenseur des déformations ...) qui définissent des champs différentiables.

Domaines :

En mécanique des milieux continus, on raisonne sur deux sortes de domaines, les domaines matériels et les domaines géométriques.

Définition 1.2 *Un domaine matériel est défini par l'ensemble des particules qui le constituent. Si une particule appartient au domaine matériel à l'instant t , elle lui appartient à tout instant. Le domaine matériel se déplace et se déforme avec le mouvement du milieu. On dit qu'on suit le domaine dans son mouvement. Le flux de matière à travers sa frontière est donc nulle.*

Définition 1.3 *Les domaines géométriques sont des ensembles de points géométriques. Le domaine géométrique est traversé par un milieu continu en mouvement. Les domaines géométriques sont généralement fixes dans ξ^3 (espace affine) mais ce n'est pas obligatoire. S'ils sont en mouvement, ce mouvement n'a rien à voir avec celui du milieu matériel. Le flux de matière à travers la frontière est donc généralement non nul.*

1.2.3 Description mathématique :

Soit S_t la configuration à l'instant t d'un système S en mouvement, c'est à dire, l'ensemble des positions $M_t \in \xi^3$ à l'instant t des particules M composant le milieu continu S . (ξ^3 est un espace euclidien affine).

Soit π un repère fixe de \mathbb{R}^3 défini par une origine 0 et une base orthonormée (\vec{e}_i) .

$$\underline{X} = (X_1, X_2, X_3), \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \text{ et } \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad (1.4)$$

seront les coordonnées dans π des positions M_T , M_t et M_τ d'une même particule M de S aux instants respectifs quelconques T, t, τ pris dans un ordre chronologie arbitraire. Le

mouvement du système S sera défini dans un intervalle de temps (t_0, t_1) si nous connaissons la relation :

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{X}, T, t), \quad (1.5)$$

donnant à l'instant t la position M_t , de la particule M qui à l'instant T occupe la position M_T . $\forall t$ et $T \in (t_0, t_1)$ Les $F_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$, $i = 1, 2, 3$, désignent 3 fonctions à valeurs réelles avec 5 variables réelles, elles ne peuvent être choisies arbitrairement, elles doivent en effet satisfaire :

1/.Une propriété de réflexivité :

M_t étant la position à l'instant t de la particule M qui est en M_t au même instant t donc :

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{x}, t, t)$$

2/.Une propriété de symétrie :

Si M_t est la position à l'instant t de la particule M qui à l'instant T est en M_T , alors réciproquement M_T est la position à l'instant T de la particule M qui à l'instant t est en M_t d'où :

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{X}, T, t) \iff \underline{X} = \underline{F}(\underline{x}, t, T). \quad (1.6)$$

3/.Une propriété de transitivité :

Si M_τ est la position de M à l'instant τ et M_T sa position à l'instant T alors sa position à l'instant t est donnée indifféremment par $\underline{F}(\underline{\varepsilon}, \tau, t)$ où $\underline{F}(\underline{X}, T, t)$ ce qui s'écrit :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{F}(\underline{X}, T, \tau) \implies \underline{F}(\underline{X}, T, t) = \underline{F}(\underline{\varepsilon}, \tau, t) \quad (1.7)$$

ou encore

$$\underline{F}(\underline{X}, T, t) = \underline{F}(\cdot, \tau, t) \cdot \underline{F}(\underline{X}, T, \tau) \quad (1.8)$$

Trajectoires. Lignes d'émission. Lignes de courant .

Définition 1.4 On appelle trajectoire de la particule P l'ensemble des positions géométriques occupées par la particule P au cours du temps. C'est donc une courbe de ξ^3

Définition 1.5 La ligne d'émission du point donné X à l'instant donné T est le lieu des positions à l'instant T des particules qui, à un instant t , sont passées ou passeront en X , cette ligne d'émission est donnée paramétriquement par les fonctions $x_i(t)$;

$$x_i = F(X_1, X_2, X_3, t, T) \quad (1.9)$$

où X_1, X_2, X_3, T ont des valeurs fixes.

Définition 1.6 La vitesse à l'instant t de la particule située en X à l'instant T est le vecteur u dont les composantes dans π sont données par :

$$u_i = \frac{\partial F_i}{\partial t}(\underline{X}, T, t) \quad (1.10)$$

On vérifie que l'expression est indépendante du choix du point de référence M_T choisi pour définir la trajectoire; en effet, pour un autre choix M_τ , on a, puisque (1.7) est vérifiée pour tout t :

$$\frac{\partial F_i}{\partial t}(\underline{X}, T, t) = \frac{\partial F_i}{\partial t}(\xi, \tau, t) = \frac{\partial F_i}{\partial t}(\underline{x}, t, t)$$

On peut donc écrire directement les composantes du vecteur vitesse u , en fonction de \underline{x} et de t :

$$u_i(\underline{x}, t) = \frac{\partial F_i}{\partial t}(\underline{x}, t, t) \quad (1.11)$$

à condition de n'avoir fait porter la dérivation que sur la 5^{ème} variable η_5 de la fonction de 5 variables $F(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$. De même, l'accélération de la particule M à l'instant t est donnée par ses composantes :

$$\Gamma_i(\underline{x}, t) = \frac{\partial^2 F_i}{\partial \eta_5^2}(\underline{x}, t, t) \quad (1.12)$$

Définition 1.7 Les lignes de courants sont définies à un instant t fixé. Ce sont à cet instant, Les lignes du champ des vitesses, c'est-à-dire les lignes qui en chacun de leurs points ont une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point, ces lignes sont les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx_1}{u_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{u_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{u_3(x_1, x_2, x_3, t)} \quad (1.13)$$

dans lequel t est fixé et joue le rôle d'un paramètre .

Remarque 1.1 Il ne faut pas confondre trajectoires et lignes de courant. Les premières sont les lieux des particules quand le temps varie, la définition de la vitesse montre qu'elles sont solutions du système différentiel.

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.14)$$

qui malgré sa ressemblance avec (1.13) en est fondamentalement différente car ici t est une variable.

1.2.4 Description de Lagrange (Joseph–Louis 1736-1813) :

Description par trajectoire :

On peut simplifier la description cinématique précédente en utilisant pour repère des différentes particules de S , leurs positions dans une configuration particulière, par exemple S_{t_0} (c'est à dire la configuration à l'instant $t = t_0$). On a alors :

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{a}, t_0, t) = \underline{\Phi}(\underline{a}, t) \quad (1.15)$$

Les a_i sont les coordonnées dans π de la particule M à l'instant $t = t_0$; $\underline{\Phi}$ ne dépend plus que des 4 variables a_1, a_2, a_3, t qui constituent un ensemble de *variables de Lagrange*.

Posons :

$$F(\underline{a}, t_0, t) = \underline{\Phi}(\underline{a}, t) \text{ et } F(\underline{x}, t, t_0) = \underline{\Psi}(\underline{x}, t)$$

on a alors

$$\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{a}, t) , \underline{a} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t)$$

La vitesse et l'accélération s'obtiennent par simple dérivation :

$$u_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(\underline{a}, t) ; \Gamma_i = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}(\underline{a}, t) \quad (1.16)$$

La description lagrangienne est déterminée par les seules fonctions $\underline{\Phi}_i(\underline{a}, t)$ qui constituent les *inconnues de Lagrange*. La seule condition imposée à la fonction vectorielle $\underline{\Phi}(\underline{a}, t)$ est d'admettre une fonction réciproque $\underline{\Psi}(\underline{x}, t)$. On peut remonter aux fonctions F_i à partir d'une description lagrangienne, en effet :

$$\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{a}, t); \underline{X} = \underline{\Phi}(\underline{a}, T) \text{ soit } \underline{a} = \underline{\Psi}(\underline{X}, t)$$

d'ou

$$\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{\Psi}(\underline{X}, T), t) = \underline{F}(\underline{X}, T, t).$$

1.2.5 Description d'Euler (Léonard Euler 1707-1783) :

Description par champ de vitesse :

Les variables d'Euler sont x_1, x_2, x_3, t , les trois premières composantes représentant les coordonnées de la position M_t de la particule M à l'instant t . Les inconnues d'Euler sont les composantes $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ de la vitesse de la particule M à l'instant t . Pour

justifier cette définition, il faut montrer que la connaissance des u_i permet de remonter aux fonctions F_i en effet :

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{x}, T, t)$$

n'est autre que la solution supposée unique du système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(\underline{x}, t) \text{ avec la condition } x(T) = X \quad (1.17)$$

L'accélération s'écrit conformément à (1.16)

$$\Gamma_i(\underline{x}, t) = \frac{d}{dt} u_i[(\underline{\Phi}(\underline{a}, t), t)] = \frac{d}{dt} u_i(\underline{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_i(\underline{x}, t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\underline{x}, t) \frac{\partial x_j}{dt}$$

Soit

$$\Gamma_i(\underline{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_i(\underline{x}, t) + u_{i,j}(\underline{x}, t) u_j(\underline{x}, t). \quad (1.18)$$

Equivalence des deux descriptions :

Supposons qu'on connaisse la description de Lagrange du mouvement d'un milieu matériel continu, avec comme configuration de référence le domaine géométrique S_{t_0} à l'instant t_0 où les coordonnées dans π de sa position de référence M_{t_0} sont $\underline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. La position actuelle des particules est donnée par :

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{x}_0, t_0, t)$$

La vitesse d'une particule (identifiée par sa position de référence M_{t_0}) est la dérivée par rapport au temps de sa position actuelle :

$$u_L(M_0, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{F}(\underline{x}_0, t_0, t)}{\partial t}$$

(dérivée à M_0 constant) $u_L(M_0, t)$ est la description de Lagrange du champ des vitesses. Pour obtenir la description d'Euler de vitesses, il faut donner le champ des vitesses en fonction des positions actuelles. La transformation $\underline{x} = \underline{F}(\underline{x}_0, t_0, t)$ étant inversible, on peut écrire

$$\underline{x}_0 = \underline{F}^{-1}(\underline{x}, t, t_0)$$

où $\underline{F}^{-1}(\underline{x}, t, t_0) = \underline{F}(\underline{x}, t, t_0)$. En remplaçant \underline{x}_0 par sa valeur, on en déduit la description du champ des vitesses en fonction de la position actuelle M et de t

$$\frac{\partial \underline{F}(\underline{F}^{-1}(\underline{x}, t, t_0), t_0, t)}{\partial t} = u_E(M, t) = u_E(\underline{x}, t)$$

qui est la description d'Euler du mouvement.

Inversement, supposons qu'on connaisse la description d'Euler du mouvement d'un milieu matériel continu sur le domaine géométrique S . On connaît donc le champ des vitesses : $u = u_E(M, t)$. Les positions M sont solutions de l'équation différentielle suivante (système de trois équations différentielles scalaires) :

$$\frac{dM(t)}{dt} = u_E(M, t)$$

avec les conditions initiales $M(t_0) = M_0$. La solution de ce système différentiel avec ses conditions initiales donne les positions M des particules en fonction de M_0 et de t , ce qui est la description de Lagrange.

Intérêt de chacune des deux descriptions :

Les deux descriptions présentent chacune leur utilité suivant les types du milieu continu qu'on envisage. Pour les solides déformables (un barreau d'acier par exemple), on préfère souvent la description de Lagrange, car la configuration de référence est facilement identifiable (on choisit par exemple, la position du barreau quand il n'est soumis à aucun effort). On peut identifier facilement les particules en les marquant. De plus, les vitesses pendant la transformation due à l'application d'actions extérieures sont souvent de peu d'intérêt pratique. On s'intéresse plutôt à la position finale après un certain temps lorsque l'application des efforts est achevée.

Pour les fluides, on préfère souvent la description d'Euler. En effet, on s'intéresse peu à la position individuelle des particules, par contre, cette description nous donne directement les indications d'un instrument de mesure placé sur un certain point d'observation de l'écoulement (Paul Germain, Mécanique [4]).

1.2.6 La dérivée particulaire :

Soit un mouvement de milieu continu. A chaque particule P on associe une grandeur physique A , qui peut être scalaire, vectorielle ou tensorielle. On appelle dérivée particulaire de A la dérivée par rapport au temps de la grandeur A quand on suit la particule P dans son mouvement avec une vitesse u . On la note

$$D_t A = \frac{\partial A}{\partial t} + u \cdot \nabla A$$

le terme $\frac{\partial A}{\partial t}$ est appelé dérivée propre de A et le terme $u \cdot \nabla A$ est appelé dérivée convective de A , et pour toutes applications $f, g : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^3 ou de \mathbb{R}^2 avec un bord $\partial\Omega$ régulier (ou régulier par morceaux) alors on a

$$\begin{aligned} (i) \quad D_t(f + g) &= D_t f + D_t g \\ (ii) \quad D_t(f \cdot g) &= f D_t g + g D_t f \\ (iii) \quad D_t(h \circ g) &= D_t h(g) D_t g \end{aligned}$$

Remarque 1.2 Si le mouvement est décrit par des variables de Lagrange

$$D_t A = \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Accélération :

On appelle accélération Γ de la particule P la dérivée particulaire de sa vitesse u .

$$D_t u = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u$$

1.2.7 Equation de continuité :

Définition 1.8 Soit la fonction $\rho(x, t)$, $x \in \Omega$, une fonction positive de classe C^1 et soit u un champ de vecteur avec un écoulement $\underline{\Phi}(t, \underline{x}) = \underline{\Phi}_t(\underline{x})$ et $\underline{\Phi}(0, \underline{x}) = \underline{x}$. On dit que ρ et u satisfont le principe de conservation de la masse si

$$\frac{d}{dt} \int_{\underline{\Phi}_t(W)} \rho(t, \underline{x}) dx = 0$$

pour tout $W \subset \Omega$ qui a un bord régulier ∂W

Théorème 1.1 Le principe de conservation de la masse est satisfait par ρ et u si et seulement si l'une des conditions suivante est vérifiée

- i) $D_t \rho + \rho \operatorname{div} u = 0$,
- ii) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0$,
- iii) $\frac{d}{dt} \int_W \rho dx = - \int_S \rho u \cdot n$

pour tout volume $W \subset \Omega$ et avec $S = \partial W$ la surface limitant le volume W . Les équations i) et ii) sont l'**équation de continuité**.

Preuve. La définition 1.8 et la condition i) sont équivalentes et découlent de l'équation de transport avec $f = \rho$; les conditions i) et ii) sont équivalentes et on peut les déduire de la définition de la dérivée particulaire et de l'identité $\operatorname{div}(\rho u) = \nabla \rho \cdot u + \rho \operatorname{div} u$. Dans la partie gauche de iii) on peut différentier sous le signe d'intégrale quand le volume W est fixé et ρ est de classe C^1 . Nous transformons l'intégrale de surface dans la partie droite de iii) en une intégrale de volume par application de la formule d'Ostrogradsky (théorème de la divergence) ce qui implique l'équivalence entre iii) et ii) ■

1.2.8 Milieu continu incompressible :

Théorème 1.2 (Le théorème de transport) Soit $u(x, t)$ un champ de vecteur de classe C^2 sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ parallèle à $\partial\Omega$, avec un écoulement $\underline{\Phi}(t, \underline{x})$, et soit $f(t, \underline{x})$ une fonction

de classe C^1 sur Ω . On suppose que $\underline{\Phi}(t, \underline{x})$ est inversible comme fonction de \underline{x} dans un intervalle de temps I . Alors pour tout $t \in I$

$$\frac{d}{dt} \int_{\underline{\Phi}_t(W)} f(t, \underline{x}) dx = \int_{\underline{\Phi}_t(W)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \nabla f + f \nabla \cdot u \right) dx,$$

où $W \subset \Omega$ et a un bord régulier.

Lemme 1.1 soit $J(t, \underline{x})$ le déterminant du jacobien de $\underline{\Phi}(t, \underline{x})$, i.e

$$\det(\nabla_{\underline{x}} \underline{\Phi}) = J(t, \underline{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

pour tout $t \in I$, alors $J(t, \underline{x}) > 0$ et

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t, \underline{x}) = J(t, \underline{x}) (\operatorname{div} u)(t, \underline{x}).$$

Preuve. (Thomas J. R. Hughes and Jerrold E. Marseden, A short course in Fluid Mechanics [5]) ■

Preuve. (du théorème de transport). Par la formule de changement de variables on peut écrire

$$\int_{\underline{\Phi}_t(W)} f(t, \underline{y}) dy = \int_W f(t, \underline{\Phi}(t, \underline{x})) J(t, \underline{x}) dx.$$

La partie à droite de l'intégrale est de classe C^1 et W est indépendant de temps t , on peut dériver alors sous le signe intégral, utiliser la dérivée d'une fonction composée et le lemme, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_W f(t, \underline{\Phi}(t, \underline{x})) J(t, \underline{x}) dx = \int_W \left(\frac{\partial}{\partial t} f + u \cdot \nabla f + f \operatorname{div} u \right) J dx,$$

Un changement de variable nous donne le résultat. ■

Définition 1.9 Un écoulement $\underline{\Phi}_t$ est dit incompressible si

$$\frac{d}{dt} \int_{\underline{\Phi}_t(W)} dx = 0$$

(i.e, si $\underline{\Phi}_t$ préserve les volumes).

Théorème 1.3 *Un écoulement $\underline{\Phi}_t$ est dit incompressible si et seulement si*

$$\nabla \cdot u = \text{div } u = 0,$$

ou

$$\det(\nabla_x \underline{\Phi}) = 1.$$

avec

$$u = \frac{\partial \underline{\Phi}(t, \underline{x})}{\partial t}$$

et

$$\underline{\Phi}(0, \underline{x}) = \underline{x}$$

Preuve. On prend $f \equiv 1$ dans le théorème de transport et puisque $\underline{\Phi}(0, \underline{x})$ est l'identité on doit avoir $\det(\nabla_x \underline{\Phi}) = J(t, \underline{x}) = 1$ dans le lemme précédent ■

1.2.9 Equation d'Euler :

L'équation d'Euler d'un fluide incompressible est l'une des équations fondamentales de la mécanique des fluides. L'équation est

$$D_t u + \nabla p = 0$$

avec $\nabla \cdot u = 0$. la fonction $u(x, t)$ est la vitesse d'un fluide parfait au point x à l'instant t . Les fluides dont les processus de thermoconduction et de viscosité sont sans importance; sont appelés fluides parfaits. On suppose la densité du fluide égale à 1. La vitesse est un vecteur de trois composantes et x appartient à un espace euclidien à trois dimension. La condition $\nabla \cdot u = 0$ exprime l'incompressibilité du fluide. La dérivée particulaire associée à la vitesse u est

$$D_t = D_t(u, \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla.$$

L'accélération d'une particule passant par x à l'instant t est $D_t u$. L'équation d'Euler est une expression de la deuxième loi de Newton, $F = m \cdot \Gamma$, sous la forme $-\nabla p = D_t u$. C'est l'équation cherchée du mouvement du fluide, déduite par L. Euler en 1755.

Les seules forces présentes dans l'équation d'Euler d'un fluide parfait incompressible sont les forces internes dont leur travail est de maintenir le fluide incompressible. Ces forces ne sont pas locales: prenant la divergence de l'équation d'Euler nous obtenons

$$-\Delta p = \nabla \cdot (u \cdot \nabla u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (u_i u_j) \quad (1.19)$$

dans l'espace entier, et avec des conditions de décroissance à l'infini

$$p = R_i R_j (u_i u_j)$$

où $R_i = \partial_i (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ sont les transformations de Riesz, une solution de 1.19 est déterminée à des constantes additives près et est donnée par

$$p = K(\cdot) * \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (u_i u_j)$$

où $K(x) = \frac{1}{4\pi} |x|^{-1}$ et la notation $|\dots|$ se rapporte au module. Si le fluide se trouve dans le champ de la pesanteur, il est soumis encore à la force mg , g étant l'accélération de la pesanteur. Cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation d'Euler de sorte qu'elle devient (L. Landau et E. Lifchitz [6])

$$D_t u = -\nabla p + g.$$

1.3 Description eulérienne-lagrangienne :

La formulation Lagrangienne des équations d'Euler décrit l'écoulement en termes d'un difféomorphisme qui préserve le volume, l'application $a \mapsto x = X(a, t)$, son inverse est l'application $x \mapsto a = A(x, t)$. La courbe $t \rightarrow X(a, t)$ est la trajectoire lagrangienne de la variable a et obéit la loi du Newton

$$\Gamma = \frac{\partial^2 X(a, t)}{\partial t^2} = F_X(a, t). \quad (1.20)$$

La condition d'incompressibilité pour l'application est

$$\det(\nabla_a X) = 1. \quad (1.21)$$

La condition initiale donne les coordonnées des variables au temps initial :

$$X(a, 0) = a.$$

Réécrivons l'équation d'Euler en coordonnées lagrangienne pour obtenir la formule de la vitesse de l'équation d'Euler en fonction des variables de Lagrange. Les forces F_X dans (1.20) sont

$$F_X(a, t) = -(\nabla_x p)(X(a, t))$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 X(a, t)}{\partial t^2} = -(\nabla_x p)(X(a, t))$$

∇_x indique le gradient par rapport aux coordonnées eulérienne au point X ; pour que les gradients soient exprimés avec le même système de coordonnées que A il faut faire intervenir la matrice

$$\nabla_a = (\nabla_a X)^* \nabla_x$$

réécrivons les forces dans (1.20)

$$F_X(a, t) = -(\nabla_x p)(X(a, t)) = -[(\nabla_a X(a, t))^*]^{-1}(\nabla_a \tilde{p})(a, t) \quad (1.22)$$

avec $\tilde{p}(a, t) = p(X(a, t))$ et où p est la pression eulérienne et l'équation d'Euler en coordonnée lagrangienne est

$$\frac{\partial^2 X(a, t)}{\partial t^2} = -[(\nabla_a X(a, t))^*]^{-1}(\nabla_a \tilde{p})(a, t)$$

la notation M^* signifié la transposée de la matrice M , $(M^*)^{-1}$ son inverse.

Construisons la vitesse d'équation d'Euler, multipliant (1.22) par $(\nabla_a X)^*$ nous obtenons

$$\frac{\partial^2 X(a, t)}{\partial t^2} (\nabla_a X(a, t)) = -(\nabla_a \tilde{p})(a, t) \quad (1.23)$$

ou, en composantes

$$\frac{\partial^2 X^j(a, t)}{\partial t^2} \frac{\partial X^j(a, t)}{\partial a_i} = -\frac{\partial \tilde{p}(a, t)}{\partial a_i}, \quad (1.24)$$

relation qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial X^j(a, t)}{\partial t} \frac{\partial X^j(a, t)}{\partial a_i} \right] = -\frac{\partial \tilde{q}(a, t)}{\partial a_i} \quad (1.25)$$

où

$$\tilde{q}(a, t) = \tilde{p}(a, t) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial X(a, t)}{\partial t} \right|^2 \quad (1.26)$$

En intégrant (1.25) par rapport à t à a fixée, nous obtenons :

$$\frac{\partial X^j(a, t)}{\partial t} \frac{\partial X^j(a, t)}{\partial a_i} = u_{(0)}^i(a) - \frac{\partial \tilde{n}(a, t)}{\partial a_i} \quad (1.27)$$

où

$$\tilde{n}(a, t) = \int_0^t \tilde{q}(a, s) ds \quad (1.28)$$

et

$$u_{(0)}(a) = \frac{\partial X(a, 0)}{\partial t} \quad (1.29)$$

est la vitesse initiale, nous avons ainsi

$$(\nabla_a X)^* \partial_t X = u_{(0)}(a) - \nabla_a \tilde{n} \quad (1.30)$$

Considérons

$$a = A(x, t) = X^{-1}(x, t) \quad (1.31)$$

qui est l'inverse de l'application lagrangienne, et notons qu'elle forme un vecteur actif

$$D_t A = \frac{\partial A}{\partial t} + u \cdot \nabla A = 0. \quad (1.32)$$

Multipliant (1.30) par $[(\nabla_a X(a, t))^*]^{-1}$ et écrivant $a = A(x, t)$ nous obtenons la formule de la vitesse de l'équation d'Euler en fonction des variables de Lagrange qui est une généralisation de la formule de Weber

$$u^i(x, t) = \left(u_{(0)}^j(A(x, t)) \right) \frac{\partial A^j}{\partial x_i}(x, t) - \frac{\partial n}{\partial x_i}(x, t) \quad (1.33)$$

où

$$n(x, t) = \tilde{n}(A(x, t)). \quad (1.34)$$

L'équation (1.33) prouve que la vitesse eulérienne peut être écrite sous une forme qui généralise la représentation des variables de Clebsch :

$$u = (\nabla A)^* B - \nabla n \quad (1.35)$$

où $B = u_{(0)}(A(x, t))$ est également un vecteur actif

$$D_t B = 0. \quad (1.36)$$

Réciproquement, et plus généralement,

si on se donne une paire de vecteurs $A = (A^1(x, t), \dots, A^M(x, t))$ et $B = (B^1(x, t), \dots, B^M(x, t))$ de dimension arbitraire M tel que les équations des vecteurs actifs (1.32) et (1.36) soient satisfaites et si u est donné par

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^M B^k(x, t) \nabla_x A^k(x, t) - \nabla_x n \quad (1.37)$$

avec une certaine fonction n , alors il suit que u résout les équations d'Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla \pi = 0$$

où

$$\pi = D_t n + \frac{1}{2} |u|^2.$$

En effet, la seule chose dont on a besoin est la relation cinématique de commutation

$$D_t \nabla_x f = \nabla_x D_t f - (\nabla_x u)^* \nabla_x f \quad (1.38)$$

vraie pour toute fonction scalaire f . La relation cinématique de commutation (1.38) est une conséquence de la dérivée composée, ainsi elle n'exige rien d'autre qu'un peu de régularité. En dérivant (1.37) et en utilisant les équations des vecteurs actifs (1.32) et (1.36) nous obtenons

$$\begin{aligned}
D_t(u) &= -\sum_{k=1}^M ((\nabla_x u)^* \nabla_x A^k) B^k - \nabla_x (D_t n) + (\nabla_x u)^* \nabla n \\
&= -\nabla_x (D_t n) - (\nabla_x u)^* \left[\sum_{k=1}^M (\nabla_x A^k) B^k - \nabla_x n \right] \\
&= -\nabla_x (D_t n) - (\nabla_x u)^* u \\
&= -\nabla_x (\pi).
\end{aligned}$$

Définition 1.10 *La quantité :*

$$C_\gamma = \int_\gamma u \cdot dx$$

prise le long d'une courbe fermée γ (que l'on suit dans son mouvement) est la circulation du vecteur vitesse u sur cette courbe.

Le théorème de Kelvin, ou loi de conservation de circulation, dit que

$$\frac{d}{dt} C_{\gamma(t)} = 0$$

pour toute courbe fermée. Ceci découle de la formule (1.27) parce que

$$u^j (X(a, t)) \frac{\partial X^j(a, t)}{\partial a_i} = u_{(0)}^i(a) - \frac{\partial \tilde{n}(a, t)}{\partial a_i}$$

La chose importante ici est que le côté droit est la somme d'une fonction des variables indépendantes du temps et d'un gradient, nous obtenons de (1.33))

$$u \, dx - u_{(0)} \, dA = -dn$$

et donc

$$\int_{\gamma \circ A} u \, dx = \int_\gamma u_{(0)} \, da$$

pour toute courbe fermée, ce qui implique la conservation de la circulation

$$\int_\gamma \frac{\partial X(\gamma, t)}{\partial t} \cdot d\gamma = \int_\gamma \frac{\partial X(\gamma, 0)}{\partial t} \cdot d\gamma.$$

1.4 La reformulation en vecteurs actifs :

Les calculs précédents peuvent être récapitulés comme suit : Une fonction $u(x, t)$ résout les équations incompressibles d'Euler si et seulement si elle peut être représentée sous la forme $u = u_A$ avec

$$u_A^i(x, t) = \phi^m(A(x, t)) \frac{\partial A^m}{\partial x_i}(x, t) - \frac{\partial n_A}{\partial x_i}(x, t) \quad (1.39)$$

et

$$\nabla \cdot u_A = 0 \quad (1.40)$$

où $A(x, t)$ résout l'équation de vecteur actif

$$D_t A = (\partial_t + u_A \cdot \nabla) A = 0, \quad (1.41)$$

avec la condition initiale

$$A(x, 0) = x.$$

La fonction ϕ représente la vitesse initiale

$$\phi = u_0 \circ A$$

est un vecteur actif et la fonction $n_A(x, t)$ est déterminée à des constantes additives près par la condition d'incompressibilité, $\nabla \cdot u_A = 0$:

$$\Delta n_A(x, t) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \phi^m(A(x, t)) \frac{\partial A^m}{\partial x_i}(x, t) \right\}.$$

Les conditions de frontière pour n_A sont

$$\frac{\partial n_A(x, t)}{\partial \nu} = \phi^j(A(x, t)) \frac{\partial A^j(x, t)}{\partial \nu}$$

où ν est la normale à la frontière fixe. Alternativement on peut imposer des conditions périodiques qui sont

$$A(x + Le_j, t) = A(x, t) + Le_j; n_A(x + Le_j, t) = n_A(x, t) \quad (1.42)$$

avec e_j la base standard dans \mathbb{R}^3 . Dans ce cas-ci

$$\delta_A(x, t) = A(x, t) - x, \quad (1.43)$$

$n_A(x, t)$, et $u_A(x, t)$ sont des fonctions périodiques dans chaque direction spatiale. On peut considérer également le cas de la décroissance à l'infini, et exiger que $\delta_A(x, t)$, $u_A(x, t)$ et $n_A(x, t)$ s'annulent rapidement à l'infini. Si $A(x, t)$ est connue, quatre fonctions inconnues sont utilisées dans la décomposition de u_A , trois composantes ϕ^m et n_A . Et puisque la vitesse est à divergence-nulle alors il y a un rapport entre les quatre fonctions inconnues

Définition 1.11 *Le vecteur $\delta(x, t) = A(x, t) - x$ est le vecteur de déplacement eulérien-lagrangien ou simplement déplacement, $\delta(x, t)$ joint la position actuelle eulérienne x à la position lagrangienne originale $a = A(x, t)$. Une paire de points $a = A(x, t)$, $b = A(y, t)$ située à l'instant $t = 0$ à une distance $\ell_0(x, t) = |a - b|$ seront séparés par $\ell_t(x, t) = |x - y|$ à l'instant t .*

Définition 1.12 *La fonction scalaire $n_A(x, t)$ est considérée comme un potentiel eulérien-lagrangien, elle joue un rôle mathématique comme la pression joue un rôle physique.*

Les équations (1.39 , 1.40) peuvent être écrites sous la forme

$$u_A = \mathbf{P} \{ \phi^m(A(., t)) \nabla A^m(., t) \} = \mathbf{P} \{ (\nabla A)^* \phi(A) \} \quad (1.44)$$

où

$$\mathbf{P} = \mathbf{1} - \nabla \Delta^{-1} \nabla. \quad (1.45)$$

est le projecteur de Leray-Hodge (avec des conditions aux limites appropriés) sur les fonctions à divergence nulle.

La pression eulérienne est déterminée, à des constantes additives près par

$$p(x, t) = \frac{\partial n_A}{\partial t}(x, t) + u_A(x, t) \cdot \nabla n_A(x, t) + \frac{1}{2} |u_A(x, t)|^2.$$

Ce procédé transforme A en un système de vecteur actif

$$\begin{cases} D_t A &= 0, \\ D_t \phi &= 0, \\ u &= \mathbf{P} \{ (\nabla A)^* \phi(A) \}. \end{cases}$$

Le Jacobien obéit à :

$$\det(\nabla A(x, t)) = 1.$$

Le tourbillon

$$\omega_A(x, t) = \nabla \times u_A$$

satisfait l'équation de Helmholtz

$$D_t^A \omega_A = \omega_A \cdot \nabla u_A \quad (1.46)$$

et il est donné par la formule de Cauchy

$$\omega_A(x, t) = [\nabla A(x, t)]^{-1} \zeta(A(x, t)) \quad (1.47)$$

où $\zeta = \nabla \times \phi$ est le tourbillon initial.

L'avantage d'une formulation de vecteur actif est que A a conservé la distribution, tel que pour toute fonction Φ dérivable

$$\int \Phi(A(x, t)) dx = \text{const};$$

car nous avons

$$D_t \Phi(A) = \Phi'(A) D_t A = 0$$

et

$$D_t \int \Phi(A) dx = \int D_t \Phi(A) dx$$

en particulier $\|A(\cdot, t)\|_{L^\infty_{loc}(dx)}$ est une constante du temps .

1.5 Existence locale :

La preuve de l'existence locale des solutions aux équations d'Euler dans la formulation de vecteur actif est relativement simple et le résultat peut être énoncé simplement. Les résultats locaux bien connus d'existence dans les variables lagrangienne (D.Ebin,J.Marsden,1970,[10]) et eulérienne (T. Kato, 1972, [11]) exigent plus de dérivées et emploient aussi des espaces plus restrictifs de fonctions.

Théorème 1.4 *Soit ϕ une fonction de classe $C^{1,\mu}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ périodique et à divergence nulle. Il existe un intervalle de temps $[0, T]$ et une unique fonction vectorielle périodique en espace $\delta(x, t) \in C([0, T]; C^{1,\mu})$ tel que*

$$A(x, t) = x + \delta(x, t)$$

résout la formulation de vecteur actif des équations d'Euler,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + u \cdot \nabla A &= 0 \\ u &= \mathbf{P} \{(\nabla A(x, t))^* \phi(A(x, t))\} \end{aligned}$$

avec des conditions initiales $A(x, 0) = x$.

Le même résultat reste vrai si on remplace les conditions de périodicité par des conditions aux limites qui s'annulent à l'infini. Par différentiation de l'équation d'un vecteur actif (1.41) on obtient l'équation satisfaite par les gradients

$$D_t^A \left(\frac{\partial A^m}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_A^j}{\partial x_i} \frac{\partial A^m}{\partial x_j} = 0. \quad (1.48)$$

Il est utile de noter que les éléments de la matrice de l'opérateur de Leray-Hodge, s'écrivent

$$\mathbf{P}_{jl} = \delta_{jl} - \partial_j \Delta^{-1} \partial_l \quad (1.49)$$

Lemme 1.2

$$\frac{\partial u_A^j}{\partial x_i} = \mathbf{P}_{jl} \left(Det \left[\zeta(A); \frac{\partial A}{\partial x_i}; \frac{\partial A}{\partial x_l} \right] \right). \quad (1.50)$$

Preuve. Nous différentions (1.44) et nous utilisons la propriété fondamentale

$$\mathbf{P}_{jl} \frac{\partial f}{\partial x_l} = 0$$

nous avons

$$u_A(x, t) = \mathbf{P} \{ (\nabla A(x, t))^* \phi(A(x, t)) \}$$

nous utilisons (1.45) pour obtenir

$$u_A^j = \mathbf{P}_{jl} \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \phi^j(A)$$

nous différentions u_A^j

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} u_A^j &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{P}_{jl} \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \phi^j(A) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{P}_{jl} \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \phi^j(A) \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta_{ij} \left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \phi^j(A) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\partial_i \Delta^{-1} \partial_j \left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \phi^j(A) \right) \right) \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \phi^j(A) \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j(A) + \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi^j(A) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j(A) + \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} \frac{\partial A^l}{\partial x_i} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta_{ij} \left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \phi^j(A) \right) \right) &= \delta_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j(A) + \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} \frac{\partial A^l}{\partial x_i} \right] \\ &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j(A) \right) + \epsilon_{lik} e_k \left(e_k \epsilon_{lik} \frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial A^l}{\partial x_i} \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \\ &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j(A) \right) + \epsilon_{lik} e_k (\nabla \times \phi) \frac{\partial A^l}{\partial x_i} \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \\ &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j(A) \right) + \delta_{ij} \left(\zeta^j \epsilon_{lik} \frac{\partial A^l}{\partial x_i} \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \\ &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j(A) \right) + \delta_{ij} Det \left[\zeta(A); \left(\frac{\partial A^l}{\partial x_i} \right); \left(\frac{\partial A}{\partial x_l} \right) \right] \end{aligned}$$

revenons à (1.62)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} u_A^j &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j (A) \right) - \partial_i \Delta^{-1} \partial_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j (A) \right) \\ &+ \delta_{ij} \text{Det} \left[\zeta (A) ; \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \right) ; \left(\frac{\partial A}{\partial x_l} \right) \right] - \partial_i \Delta^{-1} \partial_j \text{Det} \left[\zeta (A) ; \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \right) ; \left(\frac{\partial A}{\partial x_l} \right) \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_A^j = P_{jl} \text{Det} \left[\zeta (A) ; \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \right) ; \left(\frac{\partial A}{\partial x_l} \right) \right] + P_{jl} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j (A) \right)$$

il suffit d'utiliser $\left(P_{jl} \frac{\partial f}{\partial x_l} = 0 \right)$ avec $f = \left(\left(\frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) \phi^j (A) \right)$ pour avoir (1.50), ζ est toujours le rotationnel de ϕ i.e $\zeta = \nabla \times \phi$ ■

Le lemme 1.2 montre que le gradient du vecteur vitesse peut être exprimé sans utilisation des dérivées du second ordre de A et il est la clé de l'existence locale. Précisons ces idées. Nous considérerons le cas périodique d'abord. Nous écrivons $C_{\#}^{j,\mu}$, $j = 0, 1$ pour noter les espaces de Hölder des fonctions à valeurs réelles qui sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et sont périodiques avec la périodes L dans chaque direction.

$$C_{\#}^{0,\mu} (\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in C (\mathbb{R}^3), \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^3} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\mu}} < \infty, \text{ périodique de période } L, 0 < \mu < 1 \right\}.$$

Nous notons par $\|f\|_{0,\mu}$ la norme de $C_{\#}^{0,\mu}$:

$$\|f\|_{0,\mu} = \sup_x |f(x)| + \sup_{x \neq y} \left\{ |f(x) - f(y)| \left(\frac{L}{|x - y|} \right)^{\mu} \right\} \quad (1.51)$$

et

$$C_{\#}^{j,\mu} (\mathbb{R}^3) = \{ f \in C^j (\mathbb{R}^3), D^k f \in C_{\#}^{0,\mu} (\mathbb{R}^3) \quad \forall k, |k| < j \}$$

et par $\|f\|_{1,\mu}$ la norme de $C_{\#}^{1,\mu}$:

$$\|f\|_{1,\mu} = \|f\|_{0,\mu} + L \|\nabla f\|_{0,\mu} \quad (1.52)$$

où la notation $|\dots|$ se rapporte au module .

Nous décomposons la solution du problème en deux parties, l'application $\delta \rightarrow u$ et l'application $u \rightarrow \delta$. Nous dénotons la première partie W .

$$W [\delta, \phi] (x, t) = \mathbf{P} \{ (\mathbf{I} + \nabla \delta (x, t))^* \phi (x + \delta (x, t)) \} \quad (1.53)$$

cette application est linéaire en ϕ mais non en δ .

Proposition 1.1 *L'application $W [\delta, \phi]$ envoie $(C_{\#}^{1,\mu})^3 \times (C_{\#}^{1,\mu})^3$ dans $(C_{\#}^{1,\mu})^3$ et est continue.*

Il existe des constantes C dépendantes de μ seul tel que

$$\|W[\delta, \phi]\|_{0,\mu} \leq C \|\phi\|_{0,\mu} \left\{ 1 + \|\nabla\delta\|_{0,\mu} \right\}^2$$

et

$$\|\nabla W[\delta, \phi]\|_{0,\mu} \leq C \|\nabla \times \phi\|_{0,\mu} \left\{ 1 + \|\nabla\delta\|_{0,\mu} \right\}^3.$$

Pour tout $\delta \in (C_{\#}^{1,\mu})^3$, $\phi \in (C_{\#}^{1,\mu})^3$.

Remarque 1.3 Pour la preuve nous notons que W se compose d'un certain nombre d'applications.

- *La première opération* : c'est la composition $\phi(x) \rightarrow \phi(x + \delta(x))$.

Pour un $\delta \in (C_{\#}^{1,\mu})^3$ fixé. L'application

$$x \rightarrow x + \delta(x)$$

est lipchitzienne. La composition avec un changement des variables lipchitziens envoie $C_{\#}^{0,\mu}$ continuellement dans lui même. La continuité de

$$[\delta, \phi] \rightarrow \phi(x + \delta(x))$$

dans $C_{\#}^{1,\mu}$ découle naturellement.

- *La deuxième opération* : est une somme de produits de fonctions (une matrice appliquée à un vecteur). C'est une opération continue parce que les espaces de Hölder $C_{\#}^{j,\mu}$, $j = 0, 1$ que nous avons choisi sont des algèbres de Banach.
- *La troisième opération* : et la dernière opération est l'opérateur linéaire \mathbf{P} , qui est borné dans les espaces de Hölder. Nous devons considérer également des dérivées de W . Nous employons la formule (1.50) et notons que l'expression pour le gradient est faite d'opérations comme ci-dessus et appliquons le même genre de raisonnement.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} & \|W[\delta, \phi]\|_{0,\mu} \\ &= \|\mathbf{P}\{(1 + \nabla\delta(x, t))^* \phi(\delta(x, t) + x)\}\|_{0,\mu} \\ &= \|\{(1 + \nabla\delta(x, t))^* \phi(\delta(x, t) + x)\} - \nabla\Delta^{-1}\nabla\{((1 + \nabla\delta(x, t)))^* \phi(\delta(x, t) + x)\}\|_{0,\mu} \end{aligned}$$

$C_{\#}^{j,\mu}$, $j = 0, 1$ étant une algèbre de Banach nous avons

$$\|\{(1 + \nabla\delta(x, t))^* \phi(\delta(x, t) + x)\}\|_{0,\mu} \leq \|(1 + \nabla\delta(x, t))^*\|_{0,\mu} \|\phi(\delta(x, t) + x)\|_{0,\mu}$$

d'où $\exists C \geq 0$ tel que

$$\|W[\delta, \phi]\|_{0,\mu} \leq C \|\{(\nabla(x + \delta(x, t)))^*\} - \nabla \Delta^{-1} \nabla (1 + \nabla \delta(x, t))^*\|_{0,\mu} \|\phi(\delta(x, t) + x)\|_{0,\mu}$$

de la définition de ϕ nous avons

$$\begin{aligned} \|W[\delta, \phi]\|_{0,\mu} &\leq C \|1 + \nabla \delta(x, t)\|_{0,\mu} \|\phi\|_{0,\mu} \|\delta(x, t) + x\|_{0,\mu} \\ &\leq C \|\phi\|_{0,\mu} \|(1 + \nabla \delta(x, t))^*\|_{0,\mu} \|(1 + \nabla \delta(x, t))\|_{0,\mu} \\ &\leq C \|\phi\|_{0,\mu} \|(1 + \nabla \delta(x, t))\|_{0,\mu}^2 \end{aligned}$$

et une dernière majoration implique

$$\|W[\delta, \phi]\|_{0,\mu} \leq C \|\phi\|_{0,\mu} \left\{ 1 + \|\nabla \delta\|_{0,\mu} \right\}^2.$$

Pour la deuxième inégalité, nous avons

$$\|\nabla W[\delta, \phi]\|_{0,\mu} = \|\nabla \mathbf{P} \{(1 + \nabla \delta(x, t))^* \phi(\delta(x, t) + x)\}\|_{0,\mu}$$

utilisant (1.50) nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\nabla W[\delta, \phi]\|_{0,\mu} &= \left\| \mathbf{P} \left(\text{Det} \left[\zeta((\delta(x, t) + x)); \frac{\partial(\delta(x, t) + x)}{\partial x_i}; \frac{\partial(\delta(x, t) + x)}{\partial x_l} \right] \right) \right\|_{0,\mu} \\ &\leq C \|\zeta(\delta(x, t) + x)\|_{0,\mu} \left\| \frac{\partial(\delta(x, t) + x)}{\partial x_i} \right\|_{0,\mu} \left\| \frac{\partial(\delta(x, t) + x)}{\partial x_l} \right\|_{0,\mu} \\ &\leq C \|\nabla \times \phi\|_{0,\mu} \left\| \frac{\partial(\delta(x, t) + x)}{\partial x_i} \right\|_{0,\mu} \left\{ 1 + \|\nabla \delta(x, t)\|_{0,\mu}^2 \right\} \end{aligned}$$

et finalement

$$\|\nabla W[\delta, \phi]\|_{0,\mu} \leq C \|\nabla \times \phi\|_{0,\mu} \left\{ 1 + \|\nabla \delta\|_{0,\mu} \right\}^3$$

■

Le temps ne joue aucun rôle dans cette proposition car l'application

$$(\delta, \phi) \rightarrow W[\delta, \phi]$$

est indépendante du temps .

La deuxième partie de la procédure dépend du temps. Dénotons par Θ l'application qui associe à deux trajectoires continues $t \rightarrow \delta(\cdot, t)$ et $t \rightarrow \phi(\cdot, t)$ une nouvelle trajectoire θ ; la trajectoire $t \rightarrow \theta = \Theta[\delta, \phi]$ obtenue en résolvant l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla \theta + u = 0 \tag{1.54}$$

où

$$u = W [\delta (\cdot, t), \phi (\cdot, t)],$$

La périodicité est imposée sur θ et la donnée initiale nulle

$$\theta (x, 0) = 0$$

est exigée. L'équation d'Euler ne nécessite pas un ϕ dépendant du temps, mais la dépendance du temps pour ϕ est très utile: on peut traiter ainsi plus d'équations, en particulier l'équation de Navier Stokes. Considérons l'espace

$$\mathcal{P}_T = C([0, T], (C_{\#}^{1,\mu})^3)$$

des trajets continus définies sur un intervalle temps $[0, T]$ à valeur dans $(C_{\#}^{1,\mu})^3$, doté de la norme usuelle

$$\|\theta\|_{1,\mathcal{P}} = \sup_t \|\theta(\cdot, t)\|_{1,\mu}.$$

Nous considérerons également la norme plus faible

$$\|\theta\|_{0,\mathcal{P}} = \sup_t \|\theta(\cdot, t)\|_{0,\mu}.$$

Θ est non-linéaire en les deux arguments.

Proposition 1.2 *L'application $\Theta [\delta, \phi]$ satisfait à*

$$\Theta : \mathcal{P}_T \times \mathcal{P}_T \rightarrow \mathcal{P}_T$$

et elle est continue quand la topologie de l'espace de départ $\mathcal{P}_T \times \mathcal{P}_T$ est le produit usuel de la topologie $C_{\#}^{1,\mu}$ et la topologie de l'espace d'arrivée \mathcal{P}_T est la topologie (plus faible) $C_{\#}^{0,\mu}$. De plus, il existe une constante C dépend de μ seulement tel que

$$\|\nabla\theta(\cdot, t)\|_{0,\mu} \leq \left(\int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|_{0,\mu} ds \right) \left\{ \exp \left\{ C \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|_{0,\mu} ds \right\} \right\}$$

prises pour tout $t \leq T$ avec $u = W [\delta, \phi]$ et $\theta = \Theta [\delta, \phi]$.

La proposition 1.2 dit que l'application Θ est bornée mais pas qu'elle est continue dans la topologie forte $C_{\#}^{1,\mu}$. La preuve suit naturellement de l'idée d'employer la méthode classique des caractéristiques et des arguments d'ODE de type Gronwall à l'équation (1.54).

Lemme 1.3 (de Gronwall). Dans un intervalle fermé $[0, c]$ de \mathbb{R} , soient φ, ψ, ω trois fonctions ≥ 0 , continues par morceaux, et vérifiant l'inégalité

$$\omega(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \omega(s) \psi(s) ds$$

sauf aux points de discontinuité. Alors, sauf aux points de discontinuité, on a

$$\omega(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(\int_c^t \psi(\xi) d\xi\right) ds.$$

Preuve. (Calcul infinitésimal. Jean Dieudonné.Herman, Paris 1968 [12]) ■

Preuve. (de la proposition 1.2) Nous considérons le système des caractéristiques définies par

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = u(X, s) & , X(a, 0) = a \\ \frac{dZ(X, s)}{ds} = u(X, s) & , Z(X, 0) = 0 \\ \frac{dt}{ds} = 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\frac{d}{ds} (\nabla_a X)(a, s) = \nabla u(X(a, s), s) (\nabla_a X)(a, s)$$

nous intégrons les deux membres de l'équation sur l'intervalle $[0, t]$ avec $t \leq T$ nous obtenons

$$(\nabla_a X)(a, t) = (\nabla_a X)(a, 0) + \int_0^t \nabla u(X(a, s), s) (\nabla_a X)(a, s) ds$$

d'où

$$|(\nabla_a X)(a, t)| \leq 1 + \left| \int_0^t \nabla u(X(a, s), s) (\nabla_a X)(a, s) ds \right|$$

il suffit de faire les estimations avec la norme $\|\cdot\|_{0,\mu}$

$$\|(\nabla_a X)(a, t)\|_{0,\mu} \leq 1 + \int_0^t C \|\nabla u(X(a, s), s)\|_{0,\mu} \|(\nabla_a X)(a, s)\|_{0,\mu} ds. \quad (1.55)$$

Une applications du lemme de Gronwall à l'équation (1.55) avec $X = Z = \theta$ nous donne $\|\nabla\theta(\cdot, t)\|_{0,\mu} \leq \left(\int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|_{0,\mu} ds\right) \left\{ \exp\left\{C \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|_{0,\mu} ds\right\}\right\}$. ■

Des idées semblables sont nécessaires dans la démonstration (plus difficile) de la proposition 1.4. Le plus essentiel est

Proposition 1.3 Soit $\phi \in (C_{\#}^{1,\mu})^3$ fixe. Il existe une constante C dépendant de μ seul tel que

$$\|W[\delta_1, \phi] - W[\delta_2, \phi]\|_{0,\mu} \leq C \|\delta_1 - \delta_2\|_{0,\mu} \|\phi\|_{1,\mu}$$

vraie pour tout $\delta_j \in C_{\#}^{1,\mu}$ avec $\|\delta_j\|_{1,\mu} \leq 1$. $j = 1, 2$

On peut utiliser la condition $\delta_j \in (C_{\#}^{1,\mu})$ avec $\|\delta_j\|_{1,\mu} \leq M$ mais C dépendra ensuite de M .

Preuve. Notation

$$u = W[\delta_1, \phi] - W[\delta_2, \phi],$$

$$\delta = \delta_1 - \delta_2,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} (\phi(x + \delta_1(x)) + \phi(x + \delta_2(x))),$$

$$v(x) = \phi(x + \delta_1(x)) - \phi(x + \delta_2(x)),$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2)$$

nous écrivons

$$u = u_1 + u_2$$

avec

$$u_1 = \{\mathbf{P}(\nabla\delta)^* \psi\}$$

et

$$u_2 = \{\mathbf{P}(\mathbf{I} + \nabla\gamma)^* v\}$$

maintenant la majoration

$$\|u_2\|_{0,\mu} \leq C \|\delta\|_{0,\mu} \|\phi\|_{1,\mu}$$

est obtenue comme celle de la proposition 1.1. (ici il suffit que ϕ soit lipchitzienne). Le terme u_1 est le plus compliqué parce qu'il contient $\nabla\delta$. Mais ici nous pouvons intégrer par partie et écrivons

$$u_1 = -\{\mathbf{P}(\nabla\psi)^* \delta\}$$

en raison de l'incompressibilité. La matrice $\nabla\psi$ est bornée dans $C^{0,\mu}$ et la majoration suit encore facilement, comme celles de la proposition 1.1. Ce qui termine la démonstration de la proposition 1.3. On fait attention au fait que la présence de l'opération (transposée) $*$ est essentiel pour l'intégration par parties ■

Soit ϕ fixé et un nombre $\varepsilon > 0$ et soit

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{P}_T$$

défini par

$$\mathcal{I} = \left\{ \delta(x, t); \delta(x, 0) = 0, \|\nabla \delta(\cdot, t)\|_{0, \mu} \leq \varepsilon, \forall t \leq T \right\}.$$

En tenant compte des constantes trouvées dans les inégalités dans les deux propositions précédentes on peut choisir, pour ϕ fixé, T assez petit pour que

$$\delta \longmapsto \Theta[\delta, \phi] = \mathcal{S}[\delta]$$

verifier

$$\mathcal{S}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}.$$

Il est clair qu'il suffit que

$$T \|\nabla \times \phi\|_{0, \mu} \leq c\varepsilon$$

avec un c qui dépend de μ seulement. Pour ϕ , ε et T fixés comme ci-dessus, l'application \mathcal{S} est lipchitzienne dans la topologie plus faible $C_{\#}^{0, \mu}$:

Proposition 1.4 *Il existe une constante C , qui dépend de μ seul, tel que pour tout $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{I}$, la continuité lipchitzienne*

$$\|\mathcal{S}[\delta_1] - \mathcal{S}[\delta_2]\|_{0, \mathcal{P}} \leq C \|\delta_1 - \delta_2\|_{0, \mathcal{P}}$$

est satisfaite .

Preuve. Il est essentiel que les $\delta_j \in \mathcal{I}$, de sorte qu'elles soient suffisamment régulières et que leurs gradients soient petits, mais néanmoins ceci n'est pas évident. Une inégalité de type

$$\|\mathcal{S}[\delta_1] - \mathcal{S}[\delta_2]\|_{0, \mathcal{P}} \leq C \|\delta_1 - \delta_2\|_{1, \mathcal{P}}$$

est plus facile à établir, mais avec la perte d'une dérivée. La situation est compliquée en outre par le fait que la loi constituant W dépend des gradients. Nous notons $\theta_j = S[\delta_j]$, $u_j = W(\delta_j, \phi)$, $u = u_1 - u_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ et écrivons

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{u_1 + u_2}{2} \cdot \nabla \theta + u \cdot \nabla \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + u = 0$$

Nous considérons les caractéristiques $X(a, t)$ définies par

$$\frac{dX}{dt} = \frac{u_1 + u_2}{2}(X, t), \quad X(a, 0) = a$$

et notons qu'en raison de la proposition 1.1 et de l'hypothèse $\delta_j \in \mathcal{I}$, les caractéristiques sont bien définies pour $0 \leq t \leq T$, les applications $A(x, t) = X^{-1}(x, t)$ sont définis aussi. Par ailleurs, de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_a X)(a, t) = (\nabla u(X(a, t), t)) (\nabla_a X)(a, t)$$

il vient immédiatement que

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial a}(a, t) \right\|_{L^\infty(da)} \leq \exp C \int_0^t \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^\infty(dx)} dt$$

ce qui donne

$$\sup_{t,a} \left| \frac{\partial X}{\partial a} \right| \leq C$$

d'où

$$\sup_{t,x} \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| \leq C$$

avec une constante C dépendant de μ seulement. Considérons maintenant la fonction

$$F(x, t) = u \cdot \nabla \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + u.$$

En résolvant par la méthode de caractéristiques nous obtenons

$$\theta(x, t) = - \int_0^t F(X(A(x, t), s), s) ds.$$

En utilisant la proposition 1.3 en même temps que les inégalités dans les propositions 1.1 et 1.2 nous voyons que $F(x, t)$ est continue (uniformément en temps) dans $C_{\#}^{0,\mu}$:

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \|F(x, t)\|_{0,\mu} &= \left\| u \cdot \nabla \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + u \right\|_{0,\mu} \\ &\leq \|\nabla \theta + 1\|_{0,\mu} \|u\|_{0,\mu} \end{aligned}$$

en utilisant la proposition 1.3 pour majorer $\|u\|_{0,\mu}$, nous obtenons

$$\|F(x, t)\|_{0,\mu} \leq \|\nabla \theta + 1\|_{0,\mu} C \|\delta\|_{0,\mu} \|\phi\|_{1,\mu}$$

et en utilisant la proposition 1.1 pour majorer $\|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{0,\mu}$ dans la proposition 1.2 nous obtenons

$$\|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{0,\mu} \leq \left(TC \|\nabla \times \phi\|_{0,\mu} \left\{ 1 + \|\nabla \delta\|_{0,\mu} \right\}^3 \right) \left\{ \exp \left\{ C \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|_{0,\mu} ds \right\} \right\}$$

mais

$$T \|\nabla \times \phi\|_{0,\mu} \leq c\varepsilon = C$$

et pour chaque $\delta(x, t) \in \mathcal{I} \subset \mathcal{P}_T$ nous avons

$$\|\nabla \delta(\cdot, t)\|_{0,\mu} \leq \varepsilon.$$

remplaçant dans la proposition 1.2 nous obtenons

$$\|\nabla\theta(\cdot, t)\|_{0,\mu} \leq C,$$

revenons à l'inégalité, (ϕ est indépendante du temps) ce qui donne

$$\begin{aligned} \sup_t \|F(\cdot, t)\|_{0,\mu} &\leq C \|\phi\|_{1,\mu} \sup_t \|\delta\|_{0,\mu} \\ &\leq C \|\phi\|_{1,\mu} \|\delta\|_{0,\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Finalement nous appliquons ces estimations à l'égalité suivante

$$\theta(x, t) = - \int_0^t F(X(A(x, t), s), s) ds,$$

les compositions avec X et A ne posent aucun problème et nous obtenons le résultat désiré

$$\|\theta\|_{0,\mathcal{P}} \leq C \|\delta\|_{0,\mathcal{P}}.$$

Ceci termine la preuve de la proposition 1.4 . ■

La preuve du théorème 1.1 suit maintenant en utilisant des approximations successives. Partant de $\delta_1 \in \mathcal{I}$ nous définissons inductivement

$$\delta_{n+1} = \mathcal{S}\delta_n \in \mathcal{I}.$$

La proposition 1.4 implique que la suite δ_n converge dans la topologie $C_{\#}^{0,\mu}$ vers une limite δ . Puisque \mathcal{I} est convexe fermé il contient cette limite faible, $\delta \in \mathcal{I}$. Puisque \mathcal{S} a la propriété faible de Lipschitz de la proposition 1.4 il suit de cela que $\mathcal{S}(\delta) = \delta$. Ceci signifie que $A = x + \delta(x, t)$ résout la formulation de vecteur actif des équations d'Euler et que $u = W[\delta, \phi]$ résout la formulation usuelle d'Euler.

Nous considérons maintenant le cas de la décroissance à l'infini. Ce cas est instructif car il illustre la différence entre ϕ , u , W d'une part et x , δ , Θ d'autre part; les espaces de fonctions doivent être modifiés pour les adapter à cette différence. Le problème de la décroissance à l'infini est double, un problème physique est que l'énergie cinétique totale doit être finie, et un problème mathématique est que \mathbf{P} doit être défini. Mais indépendamment de ceci, la condition de la décroissance à l'infini ne complique pas la démonstration.

Théorème 1.5 Soit ϕ de $C_{\#}^{1,\mu}$ une vitesse qui est de carré intégrable

$$\int |\phi(x)|^2 dx < \infty$$

et dont le tourbillon à une certaine puissance $1 < q < \infty$ est intégrable

$$\int |\nabla \times \phi(x, t)|^q dx < \infty.$$

Alors pour ε suffisamment petit il existe un intervalle de temps $[0, T]$ et une fonction $\delta(x, t) \in C_{\#}^{1, \mu}$ tel que

$$\sup_t \|\nabla \delta(\cdot, t)\|_{0, \mu} \leq \varepsilon$$

et tel que $x + \delta(x, t)$ résout la formulation de vecteur actif de l'équation d'Euler. La vitesse correspondant à cette solution appartient à $C_{\#}^{1, \mu}$, Elle est de carré intégrable et le tourbillon à la puissance q est intégrable

La preuve suit les mêmes lignes que celle du cas périodique. Puisque ϕ entre linéairement dans l'expression pour W et puisque nous contrôlons $\nabla \delta$ uniformément, les problèmes de la décroissance à l'infini ne créent aucune difficulté supplémentaire. En d'autres termes, il n'est pas nécessaire que l'espace de fonctions pour les vitesses soit une algèbre de Banach, il suffit qu'il soit un module sur l'algèbre de Banach des variables δ , qui n'ont pas besoin de s'annuler à l'infini .

1.6 Le problème de blow up :

Toute solution de l'équation d'Euler peut être construite, en utilisant une suite des transformations proches de l'application identité. Soit $[0, T]$ un intervalle de temps donné nous considérons la subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \dots \leq T$$

Sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ $i = 0, \dots$ Nous résolvons le système

$$\begin{cases} D_t^A A & = 0 \\ u_A & = P((\nabla A)^* u_0(A)) \\ A(x, 0) & = x. \end{cases}$$

On commence par

$$\phi = u_0 = u(\cdot, t_0)$$

et on résout pour un intervalle du temps $t_0 \leq t \leq t_1$ l'équation de vecteur actif

$$D_t^A A = \frac{\partial A}{\partial t} + u_A \cdot \nabla A = 0$$

$$u_A = P((\nabla A)^* u_0(A))$$

$$A(x, 0) = x.$$

Repartant de l'instant $t = t_1$

$$\phi = u_1 = u_A(\cdot, t_1)$$

et on résout le système ci-dessus encore, pour un nouvel intervalle de temps $t_1 \leq t \leq t_2$ et ainsi de suite. Le résultat d'existence locale garantit que

$$(t_{n+1} - t_n) \|\nabla u_n\|_{0,\mu} \geq c > 0$$

et durant ce temps la solution $A(x, t)$ reste près de l'identité dans le sens que $\delta = A - x$ vérifie

$$\|\nabla \delta(\cdot, t)\|_{0,\mu} = \|\nabla A(\cdot, t) - \mathbf{1}\|_{0,\mu} \leq \varepsilon$$

avec $\varepsilon \ll 1$. La formule

$$\frac{\partial u_A^j}{\partial x_i} = p_{jl} \left(\text{Det} \left[\zeta(A); \frac{\partial A}{\partial x_i}; \frac{\partial A}{\partial x_l} \right] \right)$$

implique alors que

$$\|\nabla u_n\|_{0,\mu} \leq K^n \|\nabla u_0\|_{0,\mu}$$

Avec K fixé, $K > 1$.

Remarque 1.4 $K > 1$ car nous savons que

$$\mathbf{P}_{jl} = \delta_{jl} - \partial_j \Delta^{-1} \partial_l$$

et ($\zeta = \nabla \times \phi$)

$$\frac{\partial w^j}{\partial x_i} = \mathbf{P}_{jl} \left(\text{Det} \left[\zeta(A); \frac{\partial A}{\partial x_i}; \frac{\partial A}{\partial x_l} \right] \right)$$

qui est équivalente à

$$\frac{\partial w^j}{\partial x_i} = \delta_{jl} \left(\zeta^j \epsilon_{lik} \frac{\partial A^l}{\partial x_i} \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right) - \partial_j \Delta^{-1} \partial_l \left(\zeta^j \epsilon_{lik} \frac{\partial A^l}{\partial x_i} \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right)$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial w^j}{\partial x_i} \right\|_{0,\mu} &\leq \left\| \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right\|_{0,\mu}^2 \left\| (\delta_{jl} (\zeta^j) - \partial_j \Delta^{-1} \partial_l (\zeta^j)) \right\|_{0,\mu} \\ &\leq \left\| \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right\|_{0,\mu}^2 \left\| \delta_{jl} \left(e_k \epsilon_{lik} \frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} \right) - \partial_j \Delta^{-1} \partial_l \left(e_k \epsilon_{lik} \frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} \right) \right\|_{0,\mu} \\ &\leq \left\| \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right\|_{0,\mu}^2 \left(\left\| \left(\frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} \right) \right\|_{0,\mu} + \left\| \partial_j \Delta^{-1} \partial_l \left(\frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} \right) \right\|_{0,\mu} \right) \\ &\leq 2 \left\| \frac{\partial A^l}{\partial x_j} \right\|_{0,\mu}^2 \left\| \left(\frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} \right) \right\|_{0,\mu} \end{aligned}$$

Mais $A = x + \delta$ et $\nabla A = 1 + \nabla \delta(\cdot, t)$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{0,\mu} &\leq 2(\|1 + \nabla \delta(\cdot, t)\|_{0,\mu})^2 \|\nabla \phi\|_{0,\mu} \\ &\leq 2(1 + \|\nabla \delta(\cdot, t)\|_{0,\mu})^2 \|\nabla \phi\|_{0,\mu} \end{aligned}$$

Mais δ vérifie

$$\|\nabla \delta(\cdot, t)\|_{0,\mu} \leq \varepsilon$$

et donc

$$\|\nabla u\|_{0,\mu} \leq K \|\nabla \phi\|_{0,\mu}$$

avec K fixé, $K > 1$

Si les inégalités ci-dessus étaient optimales alors, naturellement, les pas de temps devraient diminuer exponentiellement et le procédé va diverger dans un temps fini, parce que

$$K^n \|\nabla u_0\|_{0,\mu} (t_{n+1} - t_n) \geq c > 0.$$

Il est possible que pour certaines données initiales les majorations peuvent être mauvaises et la solution peut exister pendant longtemps. Mais avec les connaissances actuelles, si on désire avoir des solutions qui durent longtemps pour des données tridimensionnelles arbitraires, alors on a besoin que la solution soit régulière, soit à la fin de l'étape soit durant l'étape. Si on applique un procédé de régularisation on change évidemment le problème et on introduit une dissipation artificielle. Il y a beaucoup de manières de régulariser les équations d'Euler. L'équation de dissipation de l'énergie qui est correcte physiquement est l'équation de Navier Stokes. Malheureusement en dimension trois, on ne sait pas si les équations de Navier-Stokes définissent une unique solution qui converge vers la solution des équations d'Euler. La situation bidimensionnelle est caractérisée par l'absence de l'effet de tourbillon. Dans le cas des équations tridimensionnelles d'Euler, appliquons l'opérateur rotationnel au deux membres de l'équation (1.1), on obtient l'équation du tourbillon (Helmholtz)

$$D_t \omega = \omega \cdot \nabla u \tag{1.56}$$

nous rappelons que

$$((u \cdot \nabla) \omega, \omega) = 0,$$

pour ω dans l'espace de Sobolev H^1 , qui vient par intégration par parties et la condition $\nabla \cdot u = 0$, où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans

$$L^2_{(\Omega)} = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^2_{(\Omega)}} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\};$$

En multipliant l'équation (1.56) par ω et en intégrant, nous obtenons

$$\frac{1}{2}D_t \|\omega\|_{L^2}^2 = (\omega \cdot \nabla u, \omega), \quad (1.57)$$

En utilisant la loi de Biot-Savart, u est écrite en termes de ω :

$$u(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y) \times \omega(y, t)}{|x-y|^3} dy.$$

\times désigne le produit vectoriel et on rappelle que la notation $|\dots|$ se rapporte au module. Substituons u dans le côté droit de (1.57), nous obtenons

$$(\omega \cdot \nabla u, \omega) = \frac{3}{4\pi} \int \int \frac{y}{|y|} \cdot \omega(x, t) \left\{ \frac{y}{|y|^4} \times \omega(x+y, t) \cdot \omega(x, t) \right\} dy dx$$

l'équation du module de tourbillon est donnée par

$$D_t |\omega| = \alpha |\omega| \quad (1.58)$$

puisque

$$|(\omega \cdot \nabla_x u, \omega)(x, t)| = |\omega|^2 \left\{ \frac{3}{4\pi} V.P. \int (\hat{y} \cdot \xi(x, t)) \det(\hat{y}, \xi(x+y, t), \xi(x, t)) |\omega(x+y, t)| \frac{dy}{|y|^3} \right\}$$

le facteur α est lié au module de tourbillon par la valeur principale d'une intégrale singulière:

$$\alpha(x, t) = \frac{3}{4\pi} V.P. \int D(\hat{y}, \xi(x+y), \xi(x, t), t) |\omega(x+y, t)| \frac{dy}{|y|^3}. \quad (1.59)$$

$\hat{y} = \frac{y}{|y|}$ est le vecteur unitaire dans la direction de y , $\xi(x, t) = \frac{\omega(x, t)}{|\omega(x, t)|}$ est le vecteur unité tangent à la ligne de tourbillon passant par x au temps t et D est un certain facteur géométrique (voir définition ci-dessous), tel que

$$D(\hat{y}, \xi(x+y, t), \xi(x, t)) = (\hat{y} \cdot \xi(x, t)) \det(\hat{y}, \xi(x+y, t), \xi(x, t))$$

qu'on verra plus loin.

Définition 1.13 *Un facteur géométrique est une fonction régulière de trois vecteurs unité. Elle a une moyenne nulle sur la sphère unité, $\int D dS(\hat{y}) = 0$ et s'annule quand $\xi(x, t) = \pm \xi(x+y, t)$.*

Quelques remarques : Puisque α a le même ordre de module que $|\omega|$, le raisonnement dimensionnel suggère que le blow up est du même type que celui rencontré dans l'équation différentielle ordinaire de type $\frac{dm}{dt} = m^2$,

$$\sup_x |\omega(x, t)| \sim \frac{1}{T-t}.$$

en effet, la transformation de Fourier de ∇u et ω satisfait l'équation

$$(\widehat{\nabla u})(\eta) = S(\eta) \widehat{\omega}(\eta),$$

où S est une matrice qui est bornée indépendamment de η , en conséquence

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq C \|\omega\|_{L^2}$$

Appliquons cela à l'équation (1.56) et posons $m = \|\omega\|_{L^2}^2$, nous obtenons le résultat désiré

$$D_t m = m^2,$$

nous obtenons un résultat analogue si on identifie ∇u et ω dans l'équation suivante

$$D_t \omega = (\nabla u) \omega.$$

Mais si la direction des tourbillons ξ est régulière alors une diminution géométrique de la non-linéarité α se présente. Plus précisément, si $\xi(x, t) \times \xi(x - y, t)$ s'annule d'une manière quantitativement contrôlée lorsque $y \rightarrow 0$, (par exemple $|\xi(x - y, t) \times \xi(x, t)| \leq k |y|^\beta$), alors α peut être majorée par des intégrales moins singulières (par exemple en termes de vitesse au lieu de tourbillon). Cette observation suggère une corrélation entre la croissance de tourbillon et la géométrie des tubes de tourbillon.

C'est une généralisation de la situation en deux dimensions où $\nabla \xi = 0$ et la solution est régulière. Dans le cas des équations bidimensionnelles d'Euler les tourbillons sont parallèles, $\xi = (0, 0, 1)$, et les courbes intégrales associées à ξ - les lignes des tourbillons - sont parallèles et $\alpha = 0$, une singularité ne peut pas se développer à un temps fini. Dans la situation générale 3d, les lignes des tourbillons sont courbées. Du point de vue de BKM ceci suit du fait que ω est transporté par advection par le fluide, et donc $\sup_x |\omega(x, t)|$ est indépendant de t (J.T. Beale, T. Kato, A. Majda 1984, [2]). Si

$$\int_0^T \sup_x |\alpha(x, t)| dt < \infty$$

alors aucun blow up ne peut se produire. Cette idée de depletion géométrique de la non-linéarité a été étudiée théoriquement et numériquement pour les équations d'Euler (P. Constantin 1994, [13], P. Constantin, A. Majda, E. Tabak 1994, [14], P. Constantin, C. Fefferman, A. Majda, 1996, [15]).

La question du blow up peut s'exprimer en termes de A .

En effet la préservation du volume implique que: $\det(\nabla A) = 1$, la matrice ∇A est inversible et son inverse est donné par

$$((\nabla A(x, t))^{-1})_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{imn} \text{Det} \left[e_j; \frac{\partial A}{\partial x_m}; \frac{\partial A}{\partial x_n} \right], \quad (1.60)$$

où $e_j = (\delta_{jk})$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 . Considérons l'opérateur de dérivation d'Euler Lagrange

$$L_j^A = \frac{1}{2} \left(\epsilon_{imn} \epsilon_{jkl} \frac{\partial A_k}{\partial x_m} \frac{\partial A_l}{\partial x_n} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.61)$$

De la relation de commutation (1.38) et de l'équation de A (1.41) nous obtenons la relation de commutation

$$[D_t^A, L_j^A] = 0 \quad (1.62)$$

vraie pour tout $j = 1, 2, 3$. Cette relation de commutation indique simplement que dans les coordonnées lagrangiennes, la dérivée par rapport au temps commute avec la dérivée par rapport aux autres variables. Notons que, des formules $\omega_A = (\nabla A)^{-1} \zeta(A)$ et (1.60) nous obtenons

$$\omega_A^p = \frac{1}{2} \epsilon_{pil} \text{Det} \left[\zeta(A); \frac{\partial A}{\partial x_i}; \frac{\partial A}{\partial x_l} \right]. \quad (1.63)$$

Il est clair que D_t^A commute avec $\mathbf{H}_A = \omega_A \cdot \nabla$ parce qu'il est représenté en termes de L_j^A :

$$\mathbf{H}_A = \zeta_j(A) L_j^A. \quad (1.64)$$

Nous observons que, en raison de la définition des opérateurs L_j^A ,

$$L_j^A = ((\nabla A(x, t))^{-1})_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1.65)$$

Il vient que

$$((\nabla A(x, t))^{-1})_{ij} = L_j^A[x_i]; \quad (1.66)$$

d'autre part

$$D_t^A(x_i) = u_A^i \quad (1.67)$$

et ainsi de la relation de commutation (1.62) nous obtenons

$$D_t^A((\nabla A(x, t))^{-1})_{ij} = L_j^A(u_A^i). \quad (1.68)$$

Cette équation est dérivée directement de (1.48), et implique l'équation de tourbillon en raison de (1.47):

$$D_t^A \omega_A = \zeta_j(A) L_j^A(u_A) = \mathbf{H}_A(u_A). \quad (1.69)$$

En raison du résultat de (J.T. Beale, T. Kato, A. Majda 1984, [2]) et (1.47), il est clair que le caractère fini de

$$\int_0^T \|(\nabla A(\cdot, t))^{-1}\|_{L^\infty(dx)} dt$$

implique la régularité, un résultat plus faible et économique que le critère de Beale-Kato-Majda. En utilisant (1.60), nous déduisons que le caractère fini de

$$\int_0^T \|\nabla A(\cdot, t)\|_{L^\infty(dx)}^2 dt$$

implique la régularité.

1.7 Le calibreur d'Euler Lagrange :

On introduit maintenant la matrice

$$C_{ij}^A(x, t; z) = (\nabla A(x + z, t))_{im} ((\nabla A(x, t))^{-1})_{mj}. \quad (1.70)$$

C'est un objet fondamental d'étude et mérite un nom. Nous l'appelons le calibreur d'Euler Lagrange, il a une interprétation physique simple basée sur la formule

$$C_{ij}^A(x, t; z) = L_j^{A(x,t)}(A_i(x + z, t)). \quad (1.71)$$

La relation ci-dessus prouve que le calibreur est l'opérateur d'Euler-Lagrange appliqué à une translation eulérienne de A et il mesure la réponse de la translation eulérienne à une translation lagrangienne infinitésimale. Notons que

$$C_{ij}^A(x, t; 0) = \delta_{ij}. \quad (1.72)$$

Le calibreur est un "quotient" de gradients à différents endroits si par exemple dans une certaine région de l'espace

$$A(x, t) = M(t) A_0(x, t) \quad (1.73)$$

alors pour z assez petit, le calibreur vérifie

$$C^A(x, t; z) = C^{A_0}(x, t; z). \quad (1.74)$$

Ainsi même si A croit rapidement mais $A_0(x, t)$ est tempérée par rapport au temps alors C^A est tempérée. En d'autres termes, localement dans l'espace, les variations temporelles arbitraires n'affectent pas le calibreur. Nous calculons maintenant le côté droit du (1.68) en utilisant (1.50). Nous ferons le calcul dans l'espace entier \mathbb{R}^3 , mais c'est juste parce que nous voulons utiliser la représentation explicite du projecteur de Leray Hodge

$$P_{ik}(f_k)(x) = \frac{2}{3} \delta_{ik} f_k(x) + \frac{1}{4\pi} V.P. \int \sigma_{ik}(\hat{z}) f_k(x + z) dz \frac{dz}{|z|^3} \quad (1.75)$$

où

$$\sigma_{ik}(\hat{z}) = 3\hat{z}_i \hat{z}_k - \delta_{ik}. \quad (1.76)$$

Nous obtenons

$$L_j^A (u_A^i) = P_{il} \left(\det \left[\zeta (A), C_{\cdot,j}^A, \frac{\partial A}{\partial x_l} \right] \right) \quad (1.77)$$

où $C_{\cdot,j}^A$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne du calibre Euler Lagrange; les arguments du calibre sont x, t, z , où z est la variable d'intégration à l'intérieur du projecteur. Dans le cas entier spécifique de l'espace nous avons

$$L_j^A (u_A^i) = \det \left[\zeta (A), e_j, \frac{\partial A}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{4\pi} V.P. \int \sigma_{il} (\widehat{z}) \left(\det \left[\zeta (A), C_{\cdot,j}^A, \frac{\partial A}{\partial x_l} \right] \right) \frac{dz}{|z|^3} \quad (1.78)$$

Maintenant, nous appliquons (1.78) à (1.69) et notons que les termes locaux s'annulent

$$\zeta^j (A) L_j^A (u_A^i) = \frac{1}{4\pi} V.P. \int D \left(\zeta, C^A \zeta, \frac{\partial A}{\partial x_l} \right) \sigma_{il} (\widehat{z}) \frac{dz}{|z|^3} \quad (1.79)$$

où

$$D \left(\zeta, C^A \zeta, \frac{\partial A}{\partial x_l} \right) = \det \left[\zeta (A(x+z, t)), C^A (x, t; z) \zeta (A(x, t)), \frac{\partial A(x+z, t)}{\partial x_l} \right]. \quad (1.80)$$

Nous utiliserons

$$\frac{\partial A_m (x+z, t)}{\partial x_l} = C_{mp}^A (x, t; z) \frac{\partial A_p (x, t)}{\partial x_l} \quad (1.81)$$

pour obtenir

$$\zeta^j (A) L_j^A (u_A^i) = \left\{ \frac{1}{4\pi} V.P. \int D \left(\zeta, C^A \zeta, C_{\cdot,p}^A \right) \sigma_{il} (\widehat{z}) \frac{dz}{|z|^3} \right\} \frac{\partial A_p (x, t)}{\partial x_l} \quad (1.82)$$

où

$$D \left(\zeta, C^A \zeta, C_{\cdot,p}^A \right) = \det \left[\zeta (A(x+z, t)), C^A (x, t; z) \zeta (A(x, t)), C_{\cdot,p}^A (x, t; z) \right]. \quad (1.83)$$

L'équation de tourbillon (1.69) est donc exprimée en termes de calibre d'Euler Lagrange (P. Constantin [19]) :

$$D_t^A \omega_A^i = \left\{ \frac{1}{4\pi} V.P. \int D \left[\zeta, C^A \zeta, C_{\cdot,p}^A \right] \sigma_{il} (\widehat{z}) \frac{dz}{|z|^3} \right\} \frac{\partial A_p (x, t)}{\partial x_l} \quad (1.84)$$

Notons que si C^A est régulière, alors le côté droit est logarithmiquement sur linéaire borné en termes de ∇A . Ce n'est malheureusement pas suffisant pour la régularité en dimension trois parce que l'inverse du gradient de A dépend quadratiquement de ∇A . En dimension 2 la dépendance est linéaire et la régularité suivra. Si nous prenons le produit scalaire de (1.84) avec $\omega_A = (\nabla A)^{-1} \zeta (A)$ nous observons que la contribution du terme δ_{il} de σ_{il} est nulle :

$$\frac{1}{2} D_t^A |\omega_A (x, t)|^2 = \omega_A^i (x, t) \gamma_{il;p} (x, t) \frac{\partial A_p (x, t)}{\partial x_l} \quad (1.85)$$

où

$$\gamma_{il;p}(x, t) = \frac{3}{4\pi} V.P. \int \widehat{z}_i \widehat{z}_l D(\zeta, C^A \zeta, C_{.,p}^A) \frac{dz}{|z|^3}. \quad (1.86)$$

Si le calibre est régulier alors les $\gamma_{il;p}$ sont bornés logarithmiquement par le gradient de A . Notons que

$$\omega_A^i \frac{\partial A_p(x, t)}{\partial x_i} = \zeta_p(A(x, t))$$

est borné. Il est donc normal de supposer que sous des hypothèses additionnelles régulières la régularité de C^A empêche le blow up dans un temps fini pour les équations d'Euler. Nous finissons cette section en décrivant une équation d'évolution pour le calibre d'Euler Lagrange. Nous commençons par utiliser la commutation (1.62)

$$D_t^{A(x)}(C_{ij}^A(x, t; z)) = L_j^{A(x)}\left(D_t^{A(x)}(A^i(x + z, t))\right). \quad (1.87)$$

Maintenant, en se servant de l'équation (1.41) nous écrivons

$$D_t^{A(x)}(C_{ij}^A(x, t; z)) = -L_j^{A(x)}\left((\delta_z u_A)(x, t) \cdot \nabla_x A^i(x + z, t)\right) \quad (1.88)$$

où

$$(\delta_z u_A)(x, t) = u_A(x + z, t) - u_A(x, t). \quad (1.89)$$

Puisque L_j^A sont des opérateurs différentiels du premier ordre nous pouvons appliquer la dérivée composée. Nous notons également que $\nabla_x A^i(x + z, t) = \nabla_z A^i(x + z, t)$ et que $L_j^{A(x)}$ commute avec ∇_z . Nous déduisons

$$\begin{aligned} & D_t^{A(x)}(C_{ij}^A(x, t; z)) + (\delta_z u_A)(x, t) \cdot \nabla_z(C_{ij}^A(x, t; z)) \\ &= -\left\{L_j^{A(x)}(\delta_z u_A)\right\} \cdot \nabla_x A^i(x + z, t). \end{aligned} \quad (1.90)$$

En utilisant (1.81) nous obtenons la forme de la matrice de l'équation d'évolution du calibre d'Euler Lagrange

$$\begin{aligned} & \left(D_t^{A(x)} + (\delta_z u_A)(x, t) \cdot \nabla_z\right) C^A(x, t; z) \\ &= -\left(C^A(x, t; z)\right) \left((\nabla A)(x, t)\right) \left((\nabla \delta_z u_A)(x, t)\right) \left((\nabla A)(x, t)\right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.91)$$

Chapitre 2

Vitesse de combustion dans une diffusion d'un réactif-passif

2.1 Introduction :

Certains mélanges de réactifs interagissent dans une région de combustion qui a une structure spatiale plutôt compliquée, mais cette difficulté peut être surmontée. Cette région de réaction se déplace vers les réactifs non brûlés. Quand les réactifs sont portés par un fluide ambiant alors la vitesse de combustion peut être augmentée. La raison physique de l'accélération de la vitesse de combustion observée est que l'advection du fluide tend à augmenter l'air disponible pour la réaction.

Beaucoup d'applications importantes de la technologie de la combustion fonctionnent en présence de l'advection turbulente, et donc l'influence de l'advection sur la combustion a été étudiée intensivement par des physiciens, des ingénieurs et des mathématiciens. Dans la littérature de physique on peut trouver un certain nombre de modèles et d'approches qui rapportent différentes relations de prédictions entre l'intensité de turbulence et la vitesse de combustion (P.Clavin and F.A.Williams [25], A. Kerstein [36], A.Kerstein and W.Ashurst [35], V. Yakhot [50]). Ces résultats sont obtenus en utilisant les modèles heuristiques et le raisonnement physique. Pour une bibliographie récente nous nous référons à (P. Pelcé 1998 [41], P. Ronney 1995 [43]).

La question principale que nous nous posons est: quelles sont les caractéristiques du flux de fluide ambiant qui sont responsables de l'augmentation de la vitesse de combustion? La question doit d'abord être précisée, parce que la région de réaction peut être compliquée et en général, peut se déplacer avec une vitesse mal définie.

Dans ce chapitre nous définirons d'une manière non ambiguë la quantité V représentant la vitesse de combustion en bloc. Nous étudierons sa relation avec le champ de

vitesses d'advection dans un modèle simple. Nous fournirons des évaluations explicites de V en termes d'amplitude de la vitesse d'advection et de la géométrie des lignes de courant. Nous sommes intéressés par le régime où l'advection est forte mais nos évaluations sont valides pour toutes les valeurs des paramètres physiques, et n'impliquent aucun passage à la limite. Elles sont également valables pour certaines vitesses d'advection sans symétrie. Dans les situations où nous savons que des ondes de transport existent, les évaluations que nous déduisons fournissent automatiquement des bornes pour leurs vitesses. Le résultat principal de ce chapitre est l'identification d'une classe d'écoulements qui sont particulièrement efficaces dans l'accélération de la vitesse de combustion en en bloc. Nous appelons ces écoulements " *écoulements filaires* " parce que leur caractéristique principale est la présence de tubes des lignes de courant reliant des régions éloignées de matériel brûlé et de matériel non brûlé. Pour de tels écoulements nous obtenons une borne linéaire optimale de perfectionnement

$$V \geq KU$$

où U représente l'amplitude de la vitesse d'advection et K un facteur de proportionnalité qui dépend de la géométrie des lignes de courants mais pas de la vitesse de l'écoulement. D'autres écoulements et en particulier les écoulements cellulaires qui ont des lignes de courants fermées, peuvent produire une augmentation de la vitesse de combustion en bloc, mais plus faible.

2.2 Écoulement de cisaillement:

Un type particulier d'écoulement qui est utile pour notre étude où l'existence des fronts de déplacement est connue, est celui des écoulements de cisaillement ou des flux parallèles.

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse.

On dit qu'il existe un profil de vitesse. Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble, la courbe lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse.

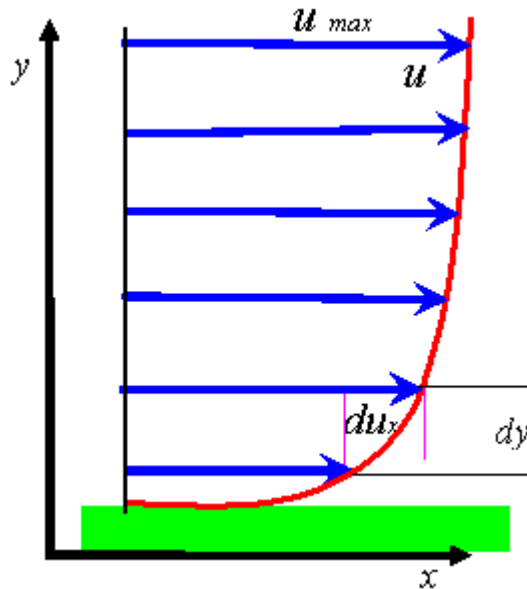


Figure 2.1: Le profil de vitesse

Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance y de cette couche au plan d'équation $y = 0$: $u(x, y) = (u_1(x, y), 0)$ et $u_1(x, y) = u_1(y)$.

Considérons 2 couches contiguës distantes de dy . La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit du_x , à leur surface S et inversement proportionnelle à dy

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{du_x}{dy}$$

Le facteur de proportionnalité η est le coefficient de viscosité dynamique du fluide et

$$\tau = \eta \frac{du_x}{dy}$$

est la contrainte tangentielle ou de cisaillement (force par unité de surface) .

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= U \cos \frac{2\pi x}{L} \end{aligned}$$

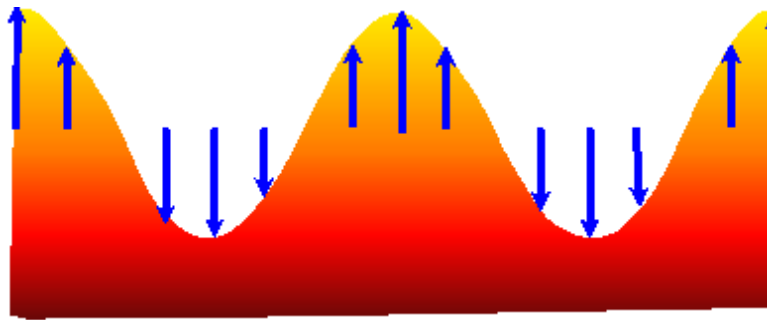


Figure 2.2: Exemple d'écoulement de cisaillement

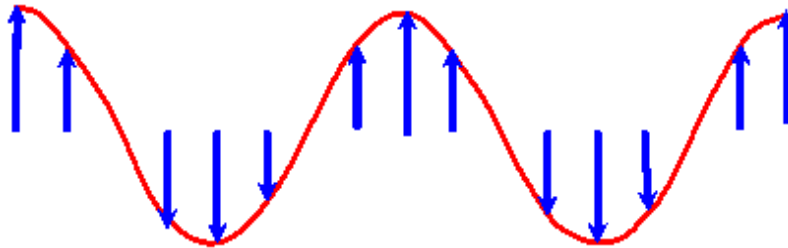


Figure 2.3: Profil de vitesse de l'écoulement $u_1 = 0$ et $u_2 = U \cos \frac{2\pi x}{L}$

2.3 Vitesse de combustion en bloc :

Nous adopterons une approche analytique. Nous considérons un modèle simple, l'équation scalaire de diffusion d'un réactif-passif

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(x, y, t) \cdot \nabla T = \kappa \Delta T + \frac{v_0^2}{4\kappa} f(T). \quad (2.1)$$

Dans cette équation $0 \leq T \leq 1$ représente la température normalisée, u la vitesse d'advection, κ la diffusivité thermique, f la réaction, v_0 la vitesse de front laminaire et le terme ΔT décrit la diffusion. La vitesse d'advection est à divergence nulle et est donnée. Aucun feedback de T sur u n'est donnée dans ce modèle simple: T est passive. La normalisation est telle que la vitesse de réaction est $\frac{v_0^2}{4\kappa}$. Ceci est choisi de sorte qu'en l'absence d'advection ($u = 0$) et avec (2.2) (donnée ci-dessous), il existera des fronts d'onde de déplacement laminaire de réaction-diffusion qui se déplaceront avec une vitesse égale au moins à v_0 A.N. Kolmogorov 1937 [37].

Définition 2.1 *Deux mouvements vibratoires de même fréquence pour lesquels les amplitudes maximales sont atteintes au même moment sont dites en phase. Les fronts d'ondes sont des surfaces formées par l'ensemble des points de l'espace où les ondes vibrent en phase. Ils s'éloignent de la source à la vitesse de propagation c . Une ligne qui coupe à angle droit tous les fronts d'onde est un rayon. Un rayon indique la direction de la propagation de l'onde.*

Définition 2.2 *Les fronts d'onde de déplacement dans la direction \vec{e} sont des solutions de (2.1) avec un profil constant et se meuvent avec une vitesse constante c donnée et prennent la forme $\phi(\vec{e} \cdot X - ct, X, t)$.*

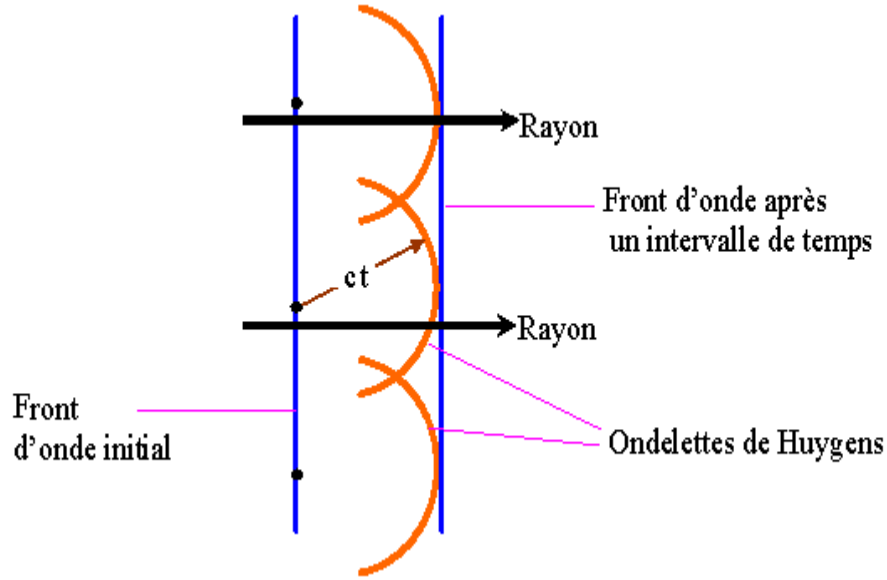


Figure 2.4: **Front d'onde**

En un laps de temps t , le front d'onde s'est déplacé sur une distance ct .

L'équation (2.1), s'obtient en admettant que la concentration η varie très peu, l'évolution de concentration est

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u(x, y, t) \cdot \nabla \eta = \frac{\kappa}{Le} \Delta \eta - \frac{v_0^2}{4\kappa} f(T) \eta$$

P.Clavin and F.A.Williams 1979 [25], et avec une approche du nombre de Lewis de l'unité (le nombre de Lewis est le rapport de diffusion de matériel et de température tel que $Le = \frac{\rho c_p D}{\lambda}$ où ρ correspond à la densité du mélange, c_p représente la chaleur spécifique à pression constante, D est le coefficient de diffusion et λ la conductivité de la chaleur (voir par exemple H. Berestycki, B. Larrouturou and J.-M. Roquejoffre 1992 [22]) l'équation (2.1) est également utilisée pour modéliser des problèmes dans la biologie [29], dans la chimie, et dans d'autres applications (P. Pelcé 1988 [41] mais il y'a toujours le problème des instabilités physiques qui se présentent dans la combustion turbulente ([45], [46]). Le type de non linéarité $f(T)$ que nous considérons dans ce chapitre est KPP concave :

$$f \in C^2, f(0) = f(1) = 0, f'(0) = 1, f''(x) < 0. \quad (2.2)$$

Le prototype de la non linéarité du type KPP est $f(T) = T(1 - T)$, il est appelé type KPP d'après les travaux de Kolmogorov, Petrovskii et Piskunov 1937 [37]. Ce type de réaction est utilisé souvent dans des problèmes sur la dynamique de population et il est convenable dans la combustion modele. D'autres types importants de non linéarité $f(T)$

sont le type d'Arrhenius (Svante 1859-1927)

$$f(T) = (1 - T) e^{-\frac{A}{T}}$$

et le type d'allumage

$$f(T) = 0 \text{ pour } T \notin (\theta, 1), f(T) > 0 \text{ pour } T \in (\theta, 1), \theta \in (0, 1).$$

qui est caractérisé par la présence de la température d'inflammation critique, telle que la fonction $f(T)$ est identiquement nulle au-dessous de la température d'inflammation. Ce type de réaction est largement appliqué pour modéliser des processus de combustion. L'étude mathématique de l'équation (2.1) est divisée en deux parties: l'existence des ondes de transport et de la vitesse asymptotique, et l'homogénéisation du régime $\kappa \rightarrow 0$. Des ondes de transports dans une dimension avec $u = 0$ ont été étudiées dans les travaux classiques [37] et [30]; leur analyse asymptotique globale dans [34] et [47] pour la non-linéarité d'allumage, dans (D.G. Aronson and H.F. Weinberger 1978 [20]) dans des grandes dimensions.

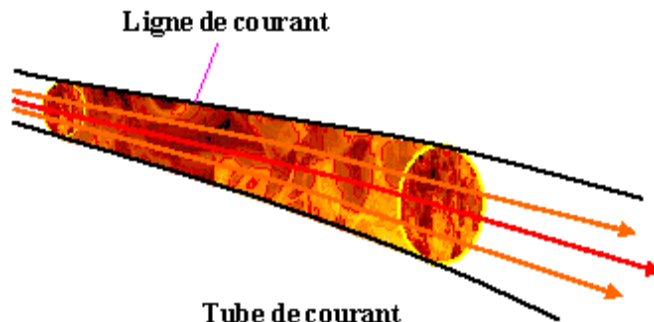


Figure 2.5: **Exemple d'écoulement filaire**

L'existence des ondes de transport avec $u \neq 0$ a été montrée pour des écoulements de cisaillement pour KPP aussi bien que pour une classe plus générale des non-linéarités [21], [23], [24]. Leur stabilité a été établie dans [22],[44], [39]. Finalement, les ondes de transport pour les écoulements périodiques $u(x, y)$ et la non-linéarité d'allumage aussi bien que leur stabilité ont été étudiées dans [48], [49]. A notre connaissance, il n'y a eu aucune évaluation explicite sur la vitesse de la propagation des ondes de transport ou sur la vitesse asymptotique de la propagation avec $u \neq 0$, excepté le résultat de [40] sur la petite perturbation de u .

L'homogénéisation de régime $\kappa \rightarrow 0$ quand la largeur de front tend vers zéro, a été étudiée pour le type non linéaire de KPP et pour une vitesse d'advection périodique

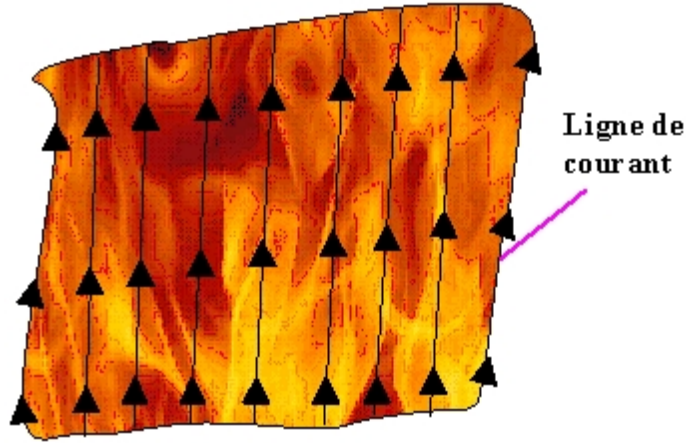


Figure 2.6: **Surface de courant**

(M.Freidlin and J. Gartner 1979[31]), [32], [33]. Le résultat des procédures d'homogénéisation est une équation efficace et valable dans le régime $\kappa \rightarrow 0$. L'équation efficace est typiquement une équation non triviale de Hamilton-Jacobi (P. Embid, A. Majda and P. Souganidis,[26]), [27], [38]. Un tel modèle est la G -équation

$$G_t + u \cdot \nabla G = v_0 |G|,$$

où le front est défini par une surface de niveau du scalaire G . Le G -équation décrit la propagation de front selon le principe de Huygens; c'est-à-dire, (i) le front est transporté par le flux de fluide, et (ii) il se propage suivant la normale à lui-même avec la vitesse v_0 . Le paramètre v_0 est la vitesse laminaire du front de combustion. La loi $V = U + v_0$ est facilement dérivée de la G -équation. L'homogénéisation est très utile quand un champ moyen répond à l'essentiel de la question posée. Quand ce n'est pas le cas une information importante est perdue à la limite

Pour la simplicité de l'exposé nous considérerons l'équation de réaction diffusion advection (2.1) dans une bande bidimensionnelle

$$\Omega = \{x, y : x \in (-\infty, \infty), y \in [0, H]\},$$

mais les méthodes que nous présentons sont pratiques dans n'importe quelle dimension et pour des classes des domaines plus générales. Les conditions aux limites sont de Neumann

$$T_y(x, 0) = T_y(x, H) = 0, \tag{2.3}$$

ou périodique en y :

$$T(x, y, t) = T(x, y + H, t). \tag{2.4}$$

L'écoulement $u = (u_1, u_2)$ est incompressible:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2.5)$$

et il a la composante normale nulle à la frontière

$$u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.6)$$

Dans le cas des conditions aux limites de Neumann, nous supposons que l'écoulement total traversant la bande est nul:

$$\int_0^H u_1(x, y) dy = 0 \quad (2.7)$$

pour éliminer la dérive provoquée par l'écoulement moyen. Nous supposons $0 \leq T \leq 1$, $T = 1$ étant l'état (brûlé) stable du système, alors que $T = 0$ est un état instable (non brûlé). L'équation vérifie le principe du maximum (M. Protter and H. Weinberger, 1984[42]). Ainsi, si les données initiales sont dans l'intervalle $[0, 1]$ alors la solution reste dans le même intervalle tout le temps. Nous supposons également que la solution est localisée, c'est à dire

$$T(x, y, t) = 1 - O(e^{-\lambda x}) \text{ pour } x < 0, \quad T(x, y, t) = O(e^{-\lambda x}) \text{ pour } x > 0, \quad (2.8)$$

$$|\nabla T| = O(e^{-\lambda|x|}) \text{ pour tout } \lambda > 0. \quad (2.9)$$

Si de telles conditions sont satisfaites initialement alors elles sont valables tout le temps .

Nous sommes intéressés par une situation générale, quand les ondes de transport solutions ne sont pas utiles ou si elles n'existent pas. Nous présentons une quantité qui mesure la vitesse de combustion en bloc typique:

$$V(t) = \int_{\Omega} T_t(x, y, t) \frac{dx dy}{H}.$$

Nous appelons $V(t)$ la vitesse de combustion en bloc (instantanée). Physiquement, $V(t)$ peut être comprise comme la quantité totale de matériel brûlé ou la quantité totale de chaleur. En utilisant l'équation (2.1), l'incompressibilité de u , les conditions aux limites sur u et T , nous obtenons

$$V(t) = \frac{v_0^2}{4\kappa} \int_{\Omega} f(T) \frac{dx dy}{H}$$

et sa moyenne en temps est

$$\langle V \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t V(s) ds, \quad \langle V \rangle_{\infty} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle V \rangle_t.$$

Puisque T est non-dimensionnel, V a des unités de longueur par temps, c'est à dire unité de la vitesse, Notons que quand $T(x, y, t)$ est un front d'onde de transport qui admet la solution $T(x - ct, y, t)$, alors V est la vitesse de front, $V(t) = c$. Mais V est défini pour des données initiales générales et des équations plus générales et qui ne supposent aucune hypothèse sur la nature de la région de combustion. Le mot " bloc " se rapporte au fait que nous prenons une moyenne de l'espace (ou espace-temps), nous nous intéressons seulement aux effets à grande échelle.

Notre premier résultat prouve que quelque soit la vitesse d'advection, elle ne peut pas ralentir la vitesse de combustion en bloc au-dessous d'une borne inférieure universelle, de même ordre de grandeur que la vitesse de front laminaire. Notons que

$$\alpha = - \inf_{0 \leq T \leq 1} f'(T) > 0, \quad \beta = - \sup_{0 \leq T \leq 1} f''(T) > 0.$$

($\alpha = 1$, $\beta = 2$ pour KKP) .

Théorème 2.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout vitesse d'advection $u(x, y, t)$ satisfaisant (2.5), (2.6) et (2.7), et pour toute solution de l'équation de réaction diffusion passive (2.1) avec les conditions aux limites (2.3) et (2.8) ou (2.4), (2.8), la vitesse de combustion en bloc $V(t)$ satisfait à la minoration*

$$V(t) \geq C v_0 \sqrt{\frac{\beta}{4\alpha}} \left(1 - e^{-\alpha v_0^2 t / 2\kappa}\right). \quad (2.10)$$

La signification physique de (2.10) est qu'aucune advection ne peut ralentir la combustion car $V(t) \geq C v_0$. Une des applications de ce théorème est dans un régime d'homogénéisation, où la réaction est très faible. En ce qui concerne la borne supérieure on peut montrer pour une classe plus générale des vitesses $u(x, y, t)$ que si les données initiales $T_0(x, y)$ satisfont (2.8) avec $\lambda = v_0 / 2\kappa$, alors

$$\langle V \rangle_t \leq \frac{L_0}{t} + \|u_1\|_\infty + v_0, \quad (2.11)$$

avec la longueur constante L_0 dépendant des données initiales T_0 seulement. Ici $\|u_1\|_\infty$ est la norme L^∞ de $|u_1|$ sur le domaine entier. Par conséquent, la vitesse de combustion en bloc ne peut pas dépasser une borne linéaire en norme L^∞ de l'amplitude de la vitesse advection. Pour une grande classe d'écoulements nous prouvons des minoration sur la vitesse de combustion en bloc qui sont linéaires avec l'amplitude d'advection. Par exemple, un corollaire du théorème 2.4 concernant l'écoulement de cisaillement de moyenne nulle de la forme

$$u(x, y) = (u(y), 0), \quad \int_0^H u(y) dy = 0$$

peut être énoncé simplement comme suit

Théorème 2.2 *Il existe une constante $C > 0$ qui dépend seulement de la non linéarité f mais pas du moment $u(y)$ et T_0 telle que, pour toute solution $T(x, y, t)$ de l'équation de réaction diffusion passive (2.1) avec des conditions aux limites (2.3), (2.8) ou (2.4), (2.8) et pour tout $\tau \geq \tau_0 = \max \left[\frac{\kappa}{v_0^2}, \frac{H}{v_0} \right]$ la vitesse de combustion en bloc vérifie*

$$\langle V \rangle_\tau \geq C \left(1 + \frac{\kappa^2}{4v_0^2 h_u^2} \right)^{-1} \frac{\|u\|_1^2}{\|u\|_\infty} \quad (2.12)$$

où $\|u\|_1 = \int_0^H |u(x, y)| \frac{dy}{H}$ et $h_u = \frac{\|u\|_1}{\|u'\|_\infty}$.

Preuve. Voir plus loin ■

Rappelons-nous que la normalisation de la vitesse de réaction en (2.1) est choisie de sorte que la vitesse front d'onde de transport laminaire soit v_0 pour n'importe quel κ .

Dans toute la suite nous supposons que la réaction $f(T)$ satisfait (2.2), les conditions initiales satisfont (2.8) et (2.9) et la vitesse d'advection satisfait

$$\|u_1\|_\infty < \infty, \quad \|\nabla u\|_\infty < \infty.$$

Nous notons par C les constantes qui dépendent de la réaction $f(T)$ seulement.

2.4 Une borne supérieure sur la vitesse de combustion en bloc :

Nous considérons dans cette section les idées générales de [24]. Nous prouvons dans cette section que les conditions aux limites (2.8) sont conservées par évolution et établissons la borne supérieure simple (2.11).

Lemme 2.1 *Supposons que la donnée initiale $T_0(x, y)$ satisfait les majorations suivantes :*

$$T_0(x, y) \leq C_0 e^{-\lambda x}, \quad 1 - T_0(x, y) \leq C_0 e^{\lambda x}, \quad |\nabla T_0| \leq \frac{C_0}{H} e^{-\lambda|x|}, \quad C_0 > 0, \lambda > 0. \quad (2.13)$$

Soit $c_1 \geq \|u_1\|_\infty + \kappa\lambda + \frac{v_0^2}{4\kappa\lambda}$, et $c_2 \geq \|u_1\|_\infty + \kappa\lambda + \frac{v_0^2}{2\kappa\lambda} + \frac{4\|\nabla u\|_\infty}{\lambda}$, alors

$$T(x, y, t) \leq C_0 e^{-\lambda(x-c_1 t)}, \quad 1 - T(x, y) \leq C_0 e^{\lambda(x+c_1 t)}, \quad (2.14)$$

$$|\nabla T| \leq \frac{C_0}{H} e^{-\lambda(x-c_2 t)}, \quad |\nabla T| \leq \frac{C_0}{H} e^{\lambda(x+c_2 t)} \quad \text{pour tout } t. \quad (2.15)$$

Preuve. La preuve est une application du principe de maximum. Notons que T satisfait l'égalité

$$T_t + u \cdot \nabla T - \kappa \Delta T = \frac{v_0^2}{4\kappa} T (1 - T),$$

et donc T satisfait l'inégalité

$$T_t + u \cdot \nabla T - \kappa \Delta T - \frac{v_0^2}{4\kappa} T \leq 0.$$

Prenons $\phi(x, t) = e^{-\lambda(x-c_1t)}$, alors

$$\phi_t + u \cdot \nabla \phi - \kappa \Delta \phi - \frac{v_0^2}{4\kappa} \phi = \lambda \left(c_1 - u_1 - \kappa \lambda - \frac{v_0^2}{4\kappa \lambda} \right) \phi \geq 0$$

d'après nos hypothèses sur c_1 . L'application du principe de maximum à la fonction $\omega = C_0 \phi - T$, nous donne $\omega \geq 0$ et nous obtenons la première estimation dans (2.14). Pour obtenir la deuxième estimation notons que $G = 1 - T$ satisfait l'inégalité

$$G_t + u \cdot \nabla G - \kappa \Delta G \leq 0.$$

Nous posons alors $\psi(x, t) = e^{\lambda(x+c_1t)}$ et procédons comme avant, puis appliquons le principe de maximum à la fonction $\omega_1 = C_0 \psi - G$. Pour obtenir la décroissance de $|\nabla T|$, nous posons $P = |\nabla T|^2$, alors P satisfait l'équation

$$P_t + u \cdot \nabla P - \kappa \Delta P + 2(|\nabla T_x|^2 + |\nabla T_y|^2) = \frac{v_0^2}{2\kappa} f'(T) P - 2(T_x u_x \cdot \nabla T + T_y u_y \cdot \nabla T).$$

de plus si $K = \frac{v_0^2}{2\kappa} + 4 \|\nabla u\|_\infty$, alors nous obtenons

$$P_t + u \cdot \nabla P - \kappa \Delta P - KP \leq 0,$$

appliquons le principe de maximum à la fonction $\omega_2 = C_0 \phi - H^2 P$ puis à la fonction $\omega_3 = C_0 \psi - H^2 P$, (2.15) suit. ■

Le lemme 2.1 implique que si les données initiales décroissent assez rapidement alors la vitesse de combustion en bloc ne peut pas être plus grande que $c_1 = v_0 + \|u_1\|_\infty$.

Théorème 2.3 *Supposons que $T_0(x, y) \leq C_0 e^{-\lambda x}$ et $1 - T_0(x, y) \leq C_0 e^{\lambda x}$ avec $\lambda = \frac{v_0}{2\kappa}$, alors*

$$\langle V \rangle_t \leq \frac{4C_0 \kappa}{v_0 t} + v_0 + \|u_1\|_\infty.$$

Preuve. Nous avons

$$\langle V \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t ds \int \frac{dx dy}{H} T_s(s, x, y) = \frac{1}{t} \int \frac{dx dy}{H} [T(x, y, t) - T_0(x, y)].$$

Le lemme 2.1 implique que $T(x, y, t)$ vérifie l'inégalité

$$T(x, y, t) \leq C_0 e^{-\lambda(x-c_1 t)},$$

avec $c_1 = \|u_1\|_\infty + \kappa\lambda + \frac{v_0^2}{4\kappa\lambda}$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} \langle V \rangle_t &\leq \frac{1}{t} \int_0^H \frac{dy}{H} \int_{-\infty}^0 ((1-T_0) - (1-T)) dx + \frac{1}{t} \int_0^H \frac{dy}{H} \int_0^{c_1 t} \frac{dx dy}{H} [T(x, y, t) - T_0(x, y)] \\ &+ \frac{1}{t} \int_0^H \frac{dy}{H} \int_{c_1 t}^{+\infty} T dx \leq \frac{2C_0}{t\lambda} + c_1 \leq \frac{4C_0\kappa}{tv_0} + \|u_1\|_\infty + v_0 \end{aligned}$$

avec notre choix de $\lambda = \frac{v_0}{2\kappa}$. ■

Un corollaire simple du théorème 2.3 est qu'un écoulement de cisaillement dans la direction perpendiculaire au front de propagation n'augmente pas la vitesse de combustion.

2.5 Une borne inférieure sur la vitesse de combustion en bloc :

Dans cette section nous prouvons le théorème 2.1. Intégrons (2.1) sur l'ensemble Ω nous obtenons

$$V(t) = \frac{v_0^2}{4\kappa} \int_{\Omega} f(T) \frac{dx dy}{H}. \quad (2.16)$$

Une intégration par partie pour tout t est justifiée par le lemme 2.1. Un calcul direct qui utilise (2.1), les conditions aux limites (2.3) ou (2.4), (2.8), (2.9), et l'incompressibilité de $u(x, y)$ montre que

$$\frac{dV}{dt} \geq \frac{\beta v_0^2}{4} \int_{\Omega} |\nabla T|^2 \frac{dx dy}{H} - \frac{\alpha v_0^2}{4\kappa} V. \quad (2.17)$$

Les deux relations simples (2.16) et (2.17) sont la base de notre technique pour dériver des bornes inférieures sur la vitesse de combustion en bloc. La température varie de 1 à 0. La réaction $f(T)$ est grande là où T prend des valeurs dans une région comprise strictement entre 0 et 1. Si T change lentement, nous obtenons une bonne borne inférieure pour $V(t)$ de (2.16). D'autre part, si T change rapidement, alors la borne de $|\nabla T|^2$ en (2.17) sera grande et donnera une borne inférieure sur la vitesse de combustion en bloc. Les équations (2.16) et (2.17) sont ainsi complémentaires à cet égard. Le lemme suivant donne une signification précise à la borne inférieure à savoir que le terme réactif en (2.16) et le terme de gradient en (2.17) ne peuvent pas être simultanément petit :

Lemme 2.2 *Soit $f(T)$ une fonction de type concave de KKP (2.2) et supposons que la fonction continûment différentiable $T(x, y)$ satisfait les hypothèses suivantes :*

(i) $0 \leq T(x, y) \leq 1$,

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} T(x, y) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} T(x, y) = 0 \forall y \in [0, 1]$,

Alors il existe une constante $C > 0$ (indépendante de la fonction T) qui dépend de f seulement telle que

$$\int_{\Omega} f(T) dx dy \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dx dy \geq CH^2. \quad (2.18)$$

Preuve. Nous pouvons supposer que $\int_{\Omega} |\nabla T|^2 dx dy < \infty$ et $\int_{\Omega} f(T(x, y)) dx dy < \infty$, autrement (2.18) est trivial.

Il existe $y \in (0, H)$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla T(x, y)|^2 dx \leq \frac{3}{H} \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dx dy$$

et aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(T(x, y)) dx \leq \frac{3}{H} \int_{\Omega} f(T(x, y)) dx dy.$$

En effet soit $\epsilon > 0$ et soit C une constante positive qui est déterminée par la condition

$$\frac{1}{\epsilon} \inf_{\theta \in [\epsilon, 1-\epsilon]} f(\theta) = C$$

a cause des conditions aux limites (ii) sur T et la continuité, il existe x_1, x_2 tel que $T(x, y, t) \in [\epsilon, 1 - \epsilon] \forall x \in [x_1, x_2]$ et

$$|T(x_2, y) - T(x_1, y)| \geq 1 - \epsilon.$$

De la construction de C nous obtenons

$$C\epsilon \leq f(T(x, y))$$

pour tout $x \in [x_1, x_2]$. Intégrons suivant x :

$$C\epsilon |x_1 - x_2| \leq \frac{3}{H} \int_{\Omega} f(T(x, y)) dx dy. \quad (2.19)$$

Pour la majoration du gradient, nous avons

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} dx \right| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|^2 dx}$$

donc

$$\frac{(|T(x_2, y) - T(x_1, y)|)^2}{|x_1 - x_2|} \leq \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|^2 dx$$

et ainsi

$$\frac{(1 - \epsilon)^2}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{3}{H} \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dx dy. \quad (2.20)$$

Multipliant ces deux équations (2.19) et (2.20) nous obtenons

$$\int_{\Omega} f(T) dx dy \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dx dy \geq \frac{C\epsilon(1 - \epsilon)^2 H^2}{9},$$

ce qui prouve le lemme 2.2 ■

Le lemme 2.2, (2.16), et (2.17) impliquent que

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\alpha v_0^2}{4\kappa} V \geq C \frac{\beta v_0^4}{16\kappa V}.$$

Multipliant par V

$$\frac{dV^2}{2dt} + \frac{\alpha v_0^2}{4\kappa} V^2 \geq C \frac{\beta v_0^4}{16\kappa}$$

Par conséquent

$$V^2(t) \geq C \frac{\beta v_0^2}{4\alpha} + e^{\frac{-\alpha v_0^2 t}{(2\kappa)}} \left[V^2(0) - C \frac{\beta v_0^2}{4\alpha} \right],$$

ce qui donne le théorème 2.1.

Nous remarquons qu'une modification simple du lemme 2.2 permet de prouver le théorème 2.1 pour des domaines plus généraux qu'une bande.

2.6 Vitesse de combustion en bloc dans des écoulements de cisaillement

Nous considérons l'équation de diffusion passive réactive dans un écoulement de cisaillement dans le plan:

$$T_t + u(y) T_x = \kappa \Delta T + \frac{v_0^2}{4\kappa} f(T). \quad (2.21)$$

Les conditions initiales et les conditions aux limites sont comme en (2.3) ou (2.4) et (2.8), (2.9). L'écoulement $u(y)$ est continûment différentiable et il a la moyenne nulle (une moyenne différente de zéro peut être prise en considération par un changement simple de variables (translation)) :

$$\int_0^H u(y) dy = 0.$$

Nous établissons maintenant une estimation pour la vitesse de combustion en bloc plus général que l'estimation dans le théorème 2.2.

Théorème 2.4 Nous considérons une partition arbitraire de l'intervalle $[0, H]$ en des sous intervalles $I_j = [c_j - h_j, c_j + h_j]$ sur lequel $u(y)$ ne change pas de signe. Notons par D_-, D_+ les unions des intervalles I_j où $u(y) > 0$ et $u(y) < 0$ respectivement (voir figure 2.4). Alors il existe une constante $C > 0$, indépendante de la partition de $u(y)$, et des données initiales $T_0(x, y)$, tel que la moyenne de la vitesse de combustion en bloc $\langle V \rangle_\tau$ satisfait l'estimation suivante:

$$\langle V \rangle_\tau \geq C \left(c_+ \sum_{I_j \subset D_+} \left(1 + \frac{l^2}{h_j^2}\right)^{-1} \int_{c_j - \frac{h_j}{2}}^{c_j + \frac{h_j}{2}} |u(y)| \frac{dy}{H} + c_- \sum_{I_j \subset D_-} \left(1 + \frac{l^2}{h_j^2}\right)^{-1} \int_{c_j - \frac{h_j}{2}}^{c_j + \frac{h_j}{2}} |u(y)| \frac{dy}{H} \right) \quad (2.22)$$

pour tout $\tau \geq \tau_0 = \max \left[\frac{\kappa}{v_0^2}, \frac{H}{v_0} \right]$. Ici $l = \frac{\kappa}{v_0}$. Les constantes c_\pm sont définies par

$$c_\pm = \left(\sum_{I_j \subset D_\pm} \frac{h_j^3}{h_j^2 + l^2} \right) \left(\sum_{I_j} \frac{h_j^3}{h_j^2 + l^2} \right)^{-1}.$$

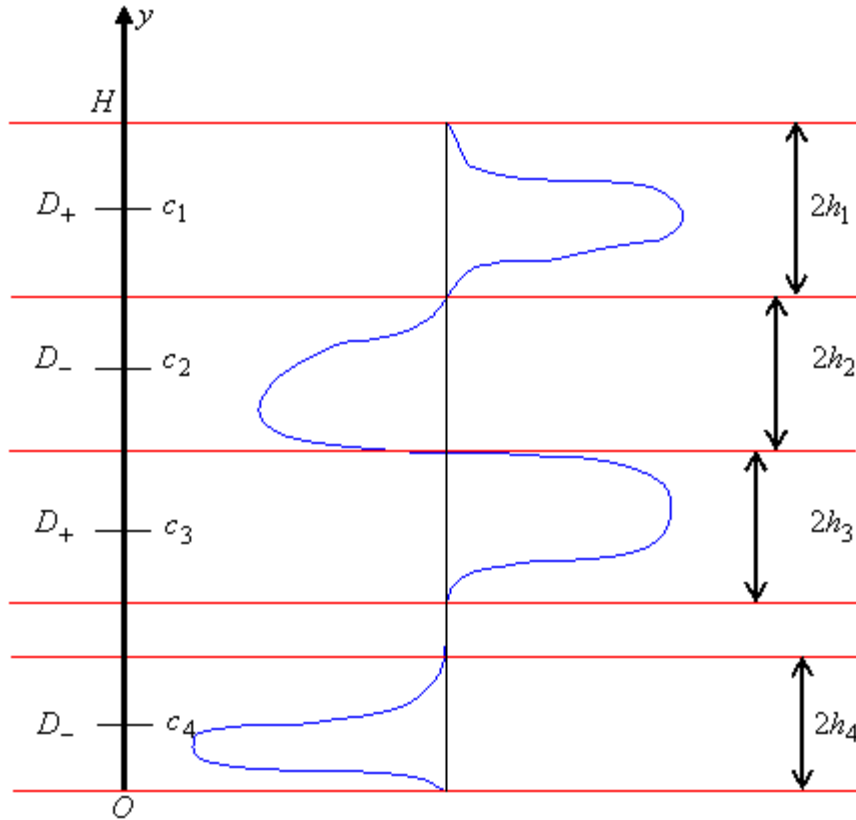


Figure 2.7: La structure de l'écoulement de cisaillement

Remarque 2.1 *Le choix exact des unions des intervalles D_{\pm} est laissé à nous. Pour un écoulement de cisaillement donné, nous devrions choisir D_{\pm} d'une manière qui nous permette de maximiser la borne trouvée dans (2.22). Nous donnons un exemple simple d'application après la preuve.*

Remarque 2.2 *La preuve de cette majoration devient beaucoup plus facile, et se prolonge également à des types plus généraux de réaction, si nous supposons $T_t(x, y, t) \geq 0$. C'est le cas pour les ondes de transport, dont leur existence a été prouvée pour des écoulements de cisaillement et de différents types de réaction dans (H. Berestycki and L. Nirenberg 1992 [24]). La vitesse minimale des ondes de transport nous donne également les bornes inférieures pour la vitesse asymptotique de la propagation pour tout front et toutes données initiales (J.-F. Mallordy and J.-M. Roquejoffre 1995 [39], J. Xin 1993 [49]). L'inconvénient d'une hypothèse a priori $T_t \geq 0$, est que nous ne pouvons pas obtenir une estimation, pour atteindre la borne inférieure à partir d'une donnée initiale, pendant le temps requis, et nous ne pouvons pas prolonger les résultats aux écoulements dépendant du temps.*

Preuve : Le plan de la preuve est comme suit. Nous savons que la vitesse de combustion en bloc $V(t)$ satisfait les relations

$$V(t) + \frac{4\kappa}{\alpha v_0^2} \frac{dV}{dt} \geq \frac{\beta\kappa}{\alpha} \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dx dy. \quad (2.23)$$

et

$$V(t) = \frac{v_0^2}{4\kappa} \int_{\Omega} f(T) \frac{dx dy}{H}. \quad (2.24)$$

Nous pouvons obtenir une borne inférieure en termes de u par la combinaison des limites des côtés droits de ces équations, qui donnent alors une borne pour $\langle V \rangle_{\tau}$. L'idée est alors d'intégrer par rapport à x le long des lignes de courant de l'écoulement et puis de faire la moyenne plusieurs fois par rapport à y et t , d'écrire les termes T_{yy} et T_t sous une forme commode pour l'estimation. Considérons un intervalle de D_+ , $I_j = [c_j - h_j, c_j + h_j]$, de sorte que $u(y) > 0$ pour $y \in (c_j - h_j, c_j + h_j)$. Par l'intégration de (2.21) suivant $x \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} T_t dx - \kappa \int_{\mathbb{R}} T_{yy} dx - \frac{v_0^2}{4\kappa} \int_{\mathbb{R}} f(T) dx = u(y). \quad (2.25)$$

$$\int_{\mathbb{R}} T_t dx - \kappa \int_{\mathbb{R}} T_{yy} dx \geq u(y). \quad (2.26)$$

(il est évident que nous pouvons rendre l'estimation plutôt approximative en négligeant le terme $f(T)$, cependant que dans beaucoup de situations ce terme est insignifiant dans

les régions où $u(y) > 0$, et le front est tout à fait pointu dans ces régions. Par contre, dans les régions où $u(y) < 0$ la région de combustion est plus grande et le terme $f(T)$ ne sera pas négligé.) Maintenant nous estimons les deux termes du côté gauche de (2.26). Commençons par le terme qui contient la dérivée seconde. Pour réduire l'ordre de différentiation, nous utilisons la moyenne suivante en y :

$$\int_0^{h_j/2} d\gamma \int_{h_j/2-\gamma}^{h_j/2+\gamma} d\delta \int_{c_j-\delta}^{c_j+\delta} .dy = \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} G(h_j, y - c_j) .dy, \quad (2.27)$$

où le noyau $G(h, \xi)$ peut être calculé explicitement comme

$$G(h, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} (h - |\xi|)^2 - \left(\frac{h}{2} - |\xi|\right)^2 & \text{si } |\xi| < \frac{h}{2} \\ \frac{1}{2} (h - |\xi|)^2 & \text{si } \frac{h}{2} \leq |\xi| < h \end{cases} \quad (2.28)$$

Remarquons que la fonction $G(h, \xi)$ a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} 0 \leq G(h, \xi) &\leq \frac{h^2}{4} \quad \text{pour tout } \xi \in [-h, h] \\ G(h, \xi) &\geq \frac{h^2}{8} \quad \text{pour tout } \xi \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nous appliquons le procédé de la moyenne (2.27) à l'équation (2.26). Nous obtenons le lemme suivant

Lemme 2.3

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} G(h_j, y - c_j) T_{yy}(x, y) dy \right| \\ &\leq C \left(h_j^2 \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} |\nabla T|^2 dy + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} f(T) dy \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Preuve. Nous allons partager \mathbb{R} en deux sous ensembles. Dans un ensemble, la norme L_y^2 du gradient sera élevée et nous l'utiliserons pour estimer le terme de deuxième dérivée. Dans l'autre ensemble, la variation de la température sera petite, et nous utiliserons le terme réactif pour majorer le terme de deuxième dérivée. Avec plus de précision, soit ρ un nombre tel que $\sqrt{2\rho}h_j = 1/3$ et définissons l'ensemble $\mathcal{D}_{j\rho} \subset \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{D}_{j\rho} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} |\nabla T(x, y)|^2 dy \geq \rho h_j \right\}$$

nous avons

$$\int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy |T_y(x, y)| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho}} \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} |\nabla T(x, y)|^2 dy = 6h_j \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} |\nabla T(x, y)|^2 dy \quad (2.31)$$

pour tout $x \in \mathcal{D}_{j\rho}$. Notons que pour un tel x , d'après (2.27),

$$\begin{aligned} \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} G(h_j, y-c_j) T_{yy}(x, y) dy &= \int_0^{h_j/2} d\gamma \int_{h_j/2-\gamma}^{h_j/2+\gamma} d\delta (T_y(x, c_j+\delta) - T_y(x, c_j-\delta)) \\ &\leq 3h_j^2 \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} |\nabla T(x, y)|^2 dy. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pour tout x à l'extérieur de $\mathcal{D}_{j\rho}$, nous utilisons la représentation

$$\int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} G(h_j, y-c_j) T_{yy}(x, y) dy = \int_{h_j/2 < |y-c_j| \leq h_j} T(x, y) dy - \int_{|y-c_j| \leq h_j/2} T(x, y) dy. \quad (2.33)$$

Nous avons besoin du lemme essentiel suivant: ■

Lemme 2.4 *Supposons que*

$$|T(x, y_1) - T(x, y_2)| \leq \frac{1}{3},$$

alors nous avons

$$|T(x, y_1) - T(x, y_2)| \leq C(f(T(x, y_1)) + f(T(x, y_2)))$$

pour tout $y_1, y_2 \in (c_j - h_j, c_j + h_j)$.

Preuve. Notons que $T_1 = T(x, y_1)$, $T_2 = T(x, y_2)$, alors nous avons en utilisant (2.2)

$$(f(T_1) + f(T_2)) \geq \inf_{T \in (|T_1 - T_2|, 1 - |T_1 - T_2|)} f(T) \geq C|T_1 - T_2|.$$

Ce qui prouve le lemme 2.4 ■

Notons que si $x \notin \mathcal{D}_{j\rho}$ nous avons

$$\int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} |T_y(x, y)| dy \leq \sqrt{2\rho} h_j = \frac{1}{3}$$

et donc $|T(x, y_1) - T(x, y_2)| \leq \frac{1}{3}$ pour tout $y_1, y_2 \in (c_j - h_j, c_j + h_j)$. Une application du lemme 2.4 à (2.33), donne

$$\left| \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} G(h_j, y-c_j) T_{yy}(x, y) dy \right| \leq C \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} f(T) dy.$$

Ce qui achève la preuve du lemme 2.3 ■

Faisant la moyenne de l'équation (2.26) et appliquant le lemme 2.3 nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy u(y) G(h_j, y-c_j) &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy G(h_j, y-c_j) T_t(x, y) \\ + C \left(h_j^2 \kappa \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy |\nabla T(x, y)|^2 + \kappa \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy f(T(x, y)) \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Considérons alors les intervalles où la vitesse $u(y) \leq 0$. Ceux-ci sont analysés pareillement, sauf que maintenant nous ne négligeons pas le terme $f(T)$ dans (2.25). L'estimation analogue à (2.34) est

$$\begin{aligned} & \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy |u(y)| G(h_j, y - c_j) \leq \frac{v_0^2}{4\kappa} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy G(h_j, y - c_j) f(T(x, y)) \\ & - \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy G(h_j, y - c_j) T_t(x, y) \\ & + C \left(h_j^2 \kappa \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy |\nabla T(x, y)|^2 + \kappa \int_{\mathbb{R}} dx \int_{c_j-h_j}^{c_j+h_j} dy f(T(x, y)) \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ainsi nous avons réussi à remplacer le terme de dérivée du second ordre par des expressions qui sont directement liées à la vitesse de combustion en bloc. Maintenant il reste à estimer le terme de dérivée en temps. En additionnant (2.34) et (2.35) dans les intervalles $I_j \subset D_+$ et $I_j \subset D_-$ respectivement, et en utilisant les propriétés (2.29) du noyau G , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \kappa \int_{D_+} dy \int_{\mathbb{R}} dx |\nabla T(x, y, t)|^2 + \frac{v_0^2}{4\kappa} \int_{D_+} dy \int_{\mathbb{R}} dx f(T(x, y, t)) \\ & + \sum_{I_j \subset D_+} \int_{I_j} dy \int_{\mathbb{R}} dx \frac{G(h_j, y - c_j)}{h_j^2 + l^2} T_t(x, y, t) \geq C \sum_{I_j \subset D_+} \left(1 + \frac{l^2}{h_j^2}\right)^{-1} \int_{c_j - \frac{h_j}{2}}^{c_j + \frac{h_j}{2}} |u(y)| dy \end{aligned} \quad (2.36)$$

et

$$\begin{aligned} & \kappa \int_{D_-} dy \int_{\mathbb{R}} dx |\nabla T(x, y, t)|^2 + \frac{v_0^2}{4\kappa} \int_{D_-} dy \int_{\mathbb{R}} dx f(T(x, y, t)) \\ & - \sum_{I_j \subset D_-} \int_{I_j} dy \int_{\mathbb{R}} dx \frac{G(h_j, y - c_j)}{h_j^2 + l^2} T_t(x, y, t) \geq C \sum_{I_j \subset D_-} \left(1 + \frac{l^2}{h_j^2}\right)^{-1} \int_{c_j - \frac{h_j}{2}}^{c_j + \frac{h_j}{2}} |u(y)| dy \end{aligned} \quad (2.37)$$

(rappel $l = \kappa/v_0$). Nous choisissons les poids m_+ et m_- tels que

$$m_{\pm} = \sum_{I_j \subset D_{\pm}} \int_{I_j} dy \frac{G(h_j, y - c_j)}{h_j^2 + l^2} \quad (2.38)$$

Posons aussi $M = \max(m_+, m_-)$. Nous avons d'après les propriétés de G ,

$$\frac{1}{16} c_{\pm} \leq \frac{m_{\pm}}{M} \leq \frac{1}{4} c_{\pm} \quad (2.39)$$

pour les constantes c_{\pm} dans la formulation du théorème. Nous définissons les mesures

$$d\nu_{\pm} = \sum_{I_j \subset D_{\pm}} \frac{m_{\pm} \chi_{I_j}(y) G(h_j, y - c_j)}{HM(h_j^2 + l^2)} dy. \quad (2.40)$$

Ici nous notons, par χ_S la fonction caractéristique d'un ensemble S . En multipliant (2.36) et (2.37) par m_+ et m_- respectivement, et en sommant nous obtenons

$$\begin{aligned} & \kappa \int_{\Omega} |\nabla T|^2 \frac{dx dy}{H} + \frac{v_0^2}{4\kappa} \int_{\Omega} f(T) \frac{dx dy}{H} + \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^H d\nu_+(y) T_t - \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^H d\nu_-(y) T_t \\ & \geq C \left(\frac{m_+}{M} \sum_{I_j \subset D_+} \left(1 + \frac{l^2}{h_j^2}\right)^{-1} \int_{c_j - \frac{h_j}{2}}^{c_j + \frac{h_j}{2}} |u(y)| dy + \frac{m_-}{M} \sum_{I_j \subset D_-} \left(1 + \frac{l^2}{h_j^2}\right)^{-1} \int_{c_j - \frac{h_j}{2}}^{c_j + \frac{h_j}{2}} |u(y)| dy \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Nous avons le lemme suivant

Lemme 2.5 *Pour tout τ_1, τ_2 ,*

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \left(\int_{\mathbb{R}} dx \int_0^H d\nu_+(y) T_t - \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^H d\nu_-(y) T_t \right) \\ & \leq \sum_{i=1}^2 \left(\frac{H\kappa}{v_0} \int_{\Omega} |\nabla T(x, y, \tau_i)|^2 \frac{dx dy}{H} + \left(1 + \frac{Hv_0}{\kappa} \right) \int_{\Omega} f(T(x, y, \tau_i)) \frac{dx dy}{H} \right). \end{aligned}$$

Preuve. D'après la définition (2.40) des mesures ν_{\pm} , leurs poids totaux sont égaux:

$$\int_0^H d\nu_+(y) = \int_0^H d\nu_-(y) < 1. \quad (2.42)$$

On peut construire une mesure conservant l'application bijective $\Phi(y) : D_+ \rightarrow D_-$, tel que $\nu_+(S) = \nu_-(\Phi(S))$. Alors nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \left(\int_{\mathbb{R}} dx \int_0^H d\nu_+(y) T_t - \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^H d\nu_-(y) T_t \right) \\ & = \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^H d\nu_+(y) (T(x, \Phi(y), \tau_1) - T(x, y, \tau_1)) \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^H d\nu_+(y) (T(x, y, \tau_2) - T(x, \Phi(y), \tau_2)). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nous considérons le premier terme du côté gauche de (2.43). Nous avons partitionné \mathbb{R} en deux sous ensembles, $x \in S$ si il existe y tels que

$$|T(x, y, \tau_1) - T(x, \Phi(y), \tau_1)| > \frac{1}{3}.$$

En utilisant le même argument que nous avons appliqué dans la preuve du lemme 2.2, nous pouvons montrer que

$$\int_0^H |\nabla T(x, y)|^2 dy \int_0^H f(T(x, y)) dy \geq C \left[\sup_{y_1, y_2 \in [0, H]} |T(x, y_1) - T(x, y_2)| \right]^3,$$

où C est une certaine constante, dépendante seulement de f . Par conséquent, pour chaque $x \in S$,

$$\left(\int_0^H |\nabla T(x, y)|^2 dy \int_0^H f(T(x, y)) dy \right)^{\frac{1}{2}} \geq C,$$

et par conséquent, en utilisant le fait que tout le poids de ν_+ ne dépasse pas 1 (voir (2.42)), nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^H d\nu_+(y) |T(x, \Phi(y), \tau_1) - T(x, y, \tau_1)| \\ & \leq C \left(\frac{\kappa}{v_0} \int_0^H |\nabla T(x, y)|^2 dy + \frac{v_0}{\kappa} \int_0^H f(T(x, y)) dy \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Pour $x \notin S$, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^H d\nu_+(y) |T(x, y, \tau_1) - T(x, \Phi(y), \tau_1)| \\ & \leq C \int_0^H d\nu_+(y) [f(T(x, y)) + f(T(x, \Phi(y)))] \\ & \leq C \int_0^H f(T(x, y)) \frac{dy}{H} \end{aligned} \quad (2.45)$$

par le lemme 2.4 et (2.40). Les équations (2.44) et (2.40) impliquent ensemble le lemme 2.5 ■

Le théorème 2.4 suit maintenant du lemme 2.5, des relations (2.23) et (2.24), et de l'inégalité (2.41). Dans un intervalle donné de temps $[0, \tau]$, nous appliquons la moyenne suivante aux deux côtés de l'inégalité (2.41)

$$\frac{1}{\tau^3} \int_0^{\frac{\tau}{4}} d\gamma \int_{\frac{\tau}{4}-\gamma}^{\frac{\tau}{4}+\gamma} d\delta \int_{\frac{\tau}{2}-\delta}^{\frac{\tau}{2}+\delta} dt = \frac{1}{\tau^3} \int_0^{\tau} G\left(\frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) dt. \quad (2.46)$$

Par un calcul direct en utilisant (2.23) et (2.24), nous prouvons que la moyenne de côté gauche de (2.41) ne peut pas dépasser

$$\frac{C}{\tau} \int_0^{\tau} V(t) dt \left(1 + \frac{H/v_0 + \kappa/v_0^2}{\tau} + \frac{H\kappa}{v_0^3\tau^2}\right). \quad (2.47)$$

D'autre part, le côté droit de (2.41) est indépendant du temps. En faisant la moyenne (2.46) des résultats dans la multiplication par une constante indépendante de τ . Par conséquent de (2.47) nous voyons que si

$$\tau \geq \tau_0 = \max\left[\frac{\kappa}{v_0^2}, \frac{H}{v_0}\right],$$

alors

$$\langle V \rangle_{\tau} \geq C \left(\frac{m_+}{M} \sum_{I_j \subset D_+} \left(1 + \frac{l^2}{h_j^2}\right)^{-1} \int_{c_j - \frac{h_j}{2}}^{c_j + \frac{h_j}{2}} |u(y)| dy + \frac{m_-}{M} \sum_{I_j \subset D_-} \left(1 + \frac{l^2}{h_j^2}\right)^{-1} \int_{c_j - \frac{h_j}{2}}^{c_j + \frac{h_j}{2}} |u(y)| dy \right).$$

Ce qui prouve le théorème 2.4 (rappelons que m_{\pm} et c_{\pm} sont reliés par (2.39)) ■

Remarque 2.3 Afin de rendre la preuve moins technique, la largeur de la bande H dans la formule de τ_0 peut être remplacée par une valeur \tilde{H} plus petite, en utilisant la méthode suivante. Considérons la fonction $g(y) = \nu_+[0, y] - \nu_-[0, y]$ sur $[0, H]$. Alors \tilde{H} est définie comme une distance maximale entre deux voisinages fondamentaux de g . Il est plus simple de généraliser la preuve du lemme 2.5 pour donner ce résultat, en prenant une mesure spécifique conservant la fonction Φ qui envoie D_+ vers D_- que dans les intervalles entre les voisinages fondamentaux de g . Le temps caractéristique $\frac{\tilde{H}}{v_0}$ a une signification physique intuitive claire: c'est le temps nécessaire à la combustion pour que l'écoulement de cisaillement u ride le front.

Exemple 2.1 soit $u(y) = u_0 \sin \frac{2\pi ny}{H}$. Nous pouvons prendre des intervalles I_j comme demi-périodes de u où u ne change pas de signe. Les facteurs c_{\pm} sont égaux dans ce cas-ci. Alors le théorème 2.4 implique que pour tout $\tau \geq \tau_0 = \max\left[\frac{\kappa}{v_0^2}, \frac{H}{v_0}\right]$ nous avons

$$\langle V \rangle_{\tau} \geq C \left(1 + \frac{n^2 l^2}{H^2}\right)^{-1} u_0.$$

D'après la remarque ci-dessus, il est facile de voir que dans cet exemple, H dans la définition de τ_0 peut être remplacé par $\tilde{H} = H/n$. L'application Φ dans cet exemple peut être prise comme l'application qui envoie les demi périodes où u est positif vers les demi périodes voisines où u est négatif.

Le théorème 2.2 est un corollaire direct du théorème 2.4.

Preuve. Notons par $|S|$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble S . On définit les ensembles

$$\mathcal{F}_\pm = \left\{ y \in [0, H] : \pm u(y) \geq \frac{1}{4} \int_0^H |u(y)| \frac{dy}{H} = \frac{1}{4} \|u\|_1 \right\}.$$

Notons que puisque u est de moyenne zéro, $\|u_\pm\|_1 = \frac{1}{2} \|u\|_1$ (ici u_\pm sont les parties positives et négatives de u). Par conséquent

$$\frac{1}{4} \|u\|_1 (H - |\mathcal{F}_\pm|) + \|u\|_\infty |\mathcal{F}_\pm| \geq \frac{1}{2} \|u\|_1 H,$$

et ainsi

$$|\mathcal{F}_\pm| \geq \frac{\|u\|_1 H}{4 \|u\|_\infty}. \quad (2.48)$$

Posons $h_u = \frac{\|u\|_{L^1}}{\|u\|_{L^\infty}}$, alors pour tout $y \in \mathcal{F}_\pm$ et tout $y' \in (y - h_u/8, y + h_u/8)$ nous avons $|u(y')| \geq \frac{1}{8} \|u\|_{L^1}$. On peut construire des unions $D_\pm = \cup_j I_j^\pm$ avec des intervalles non recouverts $I_j^\pm = (y_j^\pm - h_u/8, y_j^\pm + h_u/8)$ avec $y_j^\pm \in \mathcal{F}_\pm$ tels que $|D_\pm| \geq \frac{1}{2} |\mathcal{F}_\pm|$. Alors nous avons:

$$\int_{D_\pm} |u(y)| \frac{dy}{H} \geq \frac{1}{16} \frac{\|u\|_1}{H} |\mathcal{F}_\pm|. \quad (2.49)$$

Combinant (2.48), (2.49), et (2.22) nous obtenons

$$\langle V \rangle \tau \geq C \left(1 + \frac{l^2}{h_u^2} \right)^{-1} \frac{\|u\|_1^2}{\|u\|_\infty}.$$

■

Chapitre 3

Bornes variationnelles dans une convection turbulente

3.1 Introduction :

La convection d'un fluide est un mouvement qui est induit par la flottabilité. Dans la convection thermique, la flottabilité est due aux différences de température. Dans la figure 3.1 le liquide proche de la source de chaleur est chauffé et il se dilate légèrement. Il devient donc plus léger que le fluide plus froid qui se trouve au dessus de lui. Il a donc tendance à monter et à être remplacé par du fluide plus froid et plus lourd. Une fois que le fluide plus chaud atteint la région plus froide du récipient, il commence à se refroidir et à se contracter et il finit par redescendre vers la source de chaleur. Si le récipient avait été chauffé sur sa face supérieure, la convection ne se serait pas produite.

Ces phénomènes de rupture d'équilibre sont tellement présents dans la nature que trouver un fluide en équilibre statique est en fait une véritable gageure. Il faut pourtant attendre le début du XXème siècle pour que la convection soit conceptualisée et étudiée par Henri Bénard 1901 et Lord Rayleigh 1916.

Un système s'est imposé en tant que modèle d'étude: la cellule de Rayleigh-Bénard. Il a servi de référence à de nombreux travaux expérimentaux, théoriques et depuis peu numériques. Une telle cellule consiste en une couche de fluide prise en sandwich entre deux plans horizontaux. La convection du fluide est entretenue par une différence de température constante entre les deux plans -figure 3.3-. Pour une différence de température suffisamment importante, l'écoulement du fluide devient turbulent : on parle alors de **turbulence thermique**. Dans la famille des écoulements turbulents, cette turbulence se distingue par le rôle actif que joue la température. Peu de chaleur est transmise par conduction dans les liquides et les gaz. Par contre, une quantité importante peut souvent

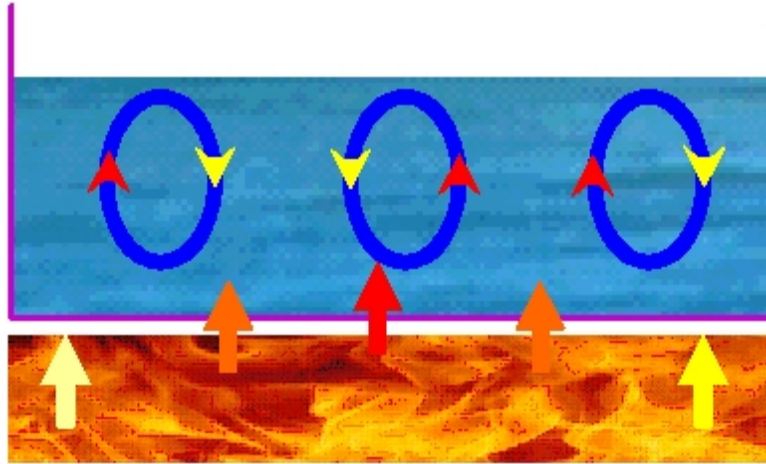


Figure 3.1: **Le flux de la convection thermique**

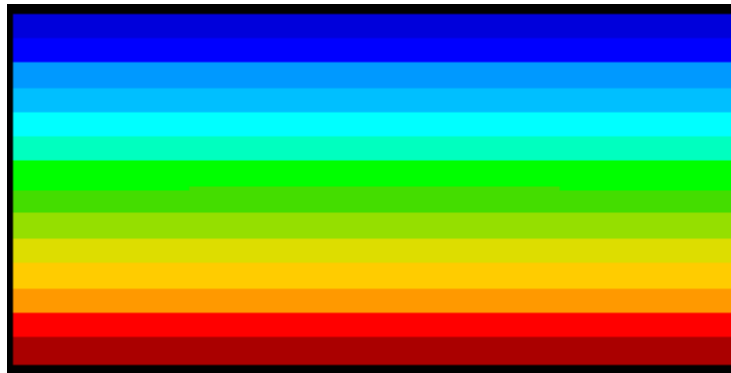


Figure 3.2: **Le transport de chaleur par conduction**

être transportée par le mouvement du fluide Une des questions intéressantes est: quelle est la quantité du transfert thermique total qui est due à la convection?. La mesure de cette quantité est le nombre de Nusselt, N , et beaucoup d'expériences et des études numériques ont été effectuées pour établir le rapport entre N et les divers paramètres qui décrivent le système.

Beaucoup de cette recherche s'est concentrée sur le paramètre forçant (F. Heslot, B. Castaing et A. Libchaber 1987 [63]-[68]).

La rotation joue un rôle non trivial [69]. La description mathématique standard d'un système de convection dans un cadre de référence tournant est basée sur les équations de Boussinesq pour la convection rotationnelle de Rayleigh-Bénard (Chandrasekhar [70]). C'est un système d'équations couplant les équations tridimensionnelles de Navier Stokes à une équation diffusion d'advection de chaleur. Les paramètres dans ce système sont le

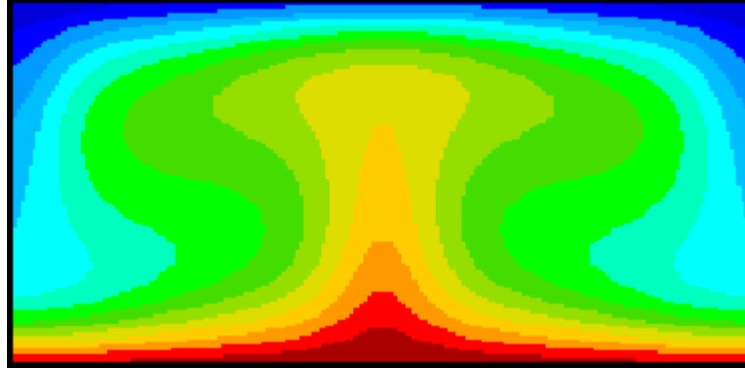


Figure 3.3: **Le transport de chaleur par convection**

nombre R de Rayleigh, et le nombre E d'Ekman qui est inversement proportionnel au taux de rotation. La seule borne supérieure d'une grande précision connue pour N par rapport aux nombres de Rayleigh très élevés est de l'ordre $R^{\frac{1}{2}}$. Cette majoration était d'abord dérivée par Howard en utilisant les méthodes variationnelles (L.N. Howard, 1964 [71]). Plus récemment, une méthode de fond (P. Constantin, C. R. Doering, 1995 [72]) a été utilisée pour obtenir cette majoration (C. R. Doering, P. Constantin, 1996 [73]). Cette majoration est valide même en présence de la rotation [74].

Un troisième paramètre dans le système est le nombre de Prandtl σ . Un système simplifié d'équations peut être dérivé en prenant la limite quand le nombre de Prandtl tend vers l'infini ces équations sont plus faciles à analyser que les équations de Boussinesq; en particulier on peut prouver l'existence et l'unicité globales des solutions régulières (C. Hallstrom, 2000 [74]). Les majorations précises connues pour le système rotationnel d'un nombre de Prandtl infini sont la majoration uniforme

$$N \leq 1 + C_1 R^{\frac{2}{5}}$$

et la majoration dépendant de la rotation

$$N \leq 1 + C_2 E R^2$$

(avec des constantes indépendantes de E et de R). La dernière majoration est plus utile pour la rotation forte. Ces deux majorations supérieures ont été obtenues en utilisant la méthode du champ de fond [74] [84] [85] [86]. En l'absence de la rotation ($E = \infty$) une majoration de la forme

$$N \leq 1 + cR^{\frac{1}{3}} (1 + \log_+ R)^{\frac{2}{3}}$$

a été obtenue [87] où $\log_+ a = \log a$ si $a \geq 1$ et $\log_+ a = 0$ si non. L'exposant $\frac{1}{3}$ est physique et près des exposants expérimentalement observés. Un des buts de ce chapitre

est de fournir une majoration semblable dans le cas tournant, en tenant compte des valeurs infinies de E . Nous verrons que la correction due à la rotation s'annule quand $E \rightarrow \infty$, et nous récupérons la majoration logarithmique ci-dessus même pour la rotation forte (de $E \geq R^{\frac{-1}{6}} (\log_+ R)^{\frac{-5}{6}}$). En tenant compte de l'augmentation observée du nombre de Nusselt à la rotation intermédiaire évaluée [69], la majoration de $R^{\frac{2}{3}}$ peut être obtenue pour une large gamme de E . Quand $E \rightarrow 0$ on peut montrer que $N \leq ER^2$ ce qui explique la diminution du nombre de Nusselt dû à la stratification très forte. Le chapitre est organisé comme suit. Dans la prochaine section nous rappelons les équations, les formules de base du nombre de Nusselt et quelques évaluations uniformes qui sont valables pour tous les nombres d'Ekman. Dans la troisième section nous décrivons la méthode pour majorer le flux de chaleur. La quatrième section est consacrée aux preuves des estimations des limites de non rotation et la cinquième section aux preuves des estimations dues à la rotation.

Nous voulons faire une approche mathématique pour étudier la turbulence et qui peut prévoir des quantités moyennes en volume d'importance expérimentale et pratique. Parmi de telles quantités moyennes en volume, le nombre N , l'augmentation du transfert thermique dû à la convection, est peut-être l'objectif physique le plus simple de l'étude mathématique rigoureuse de la turbulence. Les questions que nous souhaitons poser ici est: quelles sont les majorations optimales sur N en fonction du nombre R de Rayleigh? Quel est l'effet du nombre de Prandtl P ? .

3.2 Rappels :

Liste des symboles :

Matériaux / Fluide :

T température

ρ masse volumique

P pression

α coefficient de dilatation thermique isobare = $1/\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$

c_P capacité calorifique massique à pression constante

c_v capacité calorifique massique à volume constant

k conductivité thermique

κ diffusivité thermique = $k/\rho c_P$

ν viscosité cinématique

Ω rotation

$Q = -k \int_S \nabla T \cdot \vec{n} \, d\sigma$, \vec{n} est dirigé vers l'intérieur de S , Q le taux de chaleur reçue globalement

Paramètres adimensionnels :

$R = \frac{g\alpha h^3}{\nu^2 \kappa} (T_{haut} - T_{bas})$ Nombre de Rayleigh

$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$ Nombre de Prandtl

$E = \frac{\nu}{4\pi\Omega L^2}$ Nombre de Ekman

$T_a = E^{-2}$ Nombre de Taylor

$Ro = \sqrt{\frac{R}{\sigma T_a}} = E \sqrt{\frac{R}{\sigma}}$ Nombre de Rossby

$N = \frac{Q}{k (T_{haut} - T_{bas}) L}$ Nombre de Nusslet

Définition 3.1 *Le nombre de Nusselt (N) mesure l'augmentation du transfert de chaleur dû à la convection du fluide. Ce nombre représente la puissance thermique qu'il faut fournir à la surface inférieure pour maintenir la différence de température $T_{haut} - T_{bas}$ constante*

Définition 3.2 *Le nombre de Rayleigh (R) est le paramètre de contrôle de la convection. Ce nombre peut fournir un critère de passage de la convection naturelle laminaire à la convection turbulente. Il peut être vu comme une forme sans dimension de la différence de température $T_{haut} - T_{bas}$.*

Définition 3.3 *Le nombre de Prandtl (σ) est le rapport de la viscosité cinématique à la diffusivité thermique. Plus la viscosité cinématique est grande et plus l'énergie nécessaire pour véhiculer le fluide est élevée. Plus la diffusivité thermique est grande, plus le fluide*

extrait facilement la chaleur de la paroi. Les Nombres de Prandtl des fluides courants varient sur plusieurs ordres de grandeur. Les métaux liquides tels que le mercure réalisent des σ inférieurs à 0,1 tandis que les σ des huiles peuvent atteindre plusieurs milliers.

La dépendance du Nombre de Nusselt et du nombre de Rayleigh :

Dans le problème de la convection thermique, la dépendance du Nombre de Nusselt N avec le Nombre de Rayleigh R joue un rôle central pour des raisons pratiques et aussi pour des considérations plus fondamentales. La gamme des nombres de Rayleigh rencontrés dans certaines situations industrielles et géophysiques s'étend sur 5 à 10 décades de plus que celles réalisées en laboratoire. L'évaluation des transferts thermiques dans ces situations nécessite une extrapolation importante de la loi de dépendance $N(R)$ telle que mesuré en laboratoire, ce qui n'est possible qu'à partir d'une loi bien établie.

Dans les régimes de convection turbulente, les lois théoriques prennent souvent la forme de loi de puissance $N \sim R^q \cdot \sigma^\delta$ et leur validation expérimentale est délicate car elle suppose de travailler d'une part avec des R suffisamment élevés pour être en régime turbulent, et d'autre part sur une valeur de R suffisamment importante pour déterminer l'exposant q avec précision

3.3 Transport vertical de la chaleur

Les modèles de la convection que nous étudierons sont basés sur l'approximation de Boussinesq qui consiste à négliger toutes les variations de masse volumique excepté celle du terme d'Archimède responsable du mouvement. Les équations du mouvement pour la convection de Bénard sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* + \frac{1}{\rho} \nabla P^* &= \nu \Delta \mathbf{u}^* + \alpha g (T^* - T_0) e_z, \\ \frac{\partial T^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla T^* &= \kappa \Delta T^*, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$T^* \Big|_{z=0} = T_{\text{bas}}, \quad T^* \Big|_{z=h} = T_{\text{haut}} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^* \Big|_{z=0,h} = 0,$$

où g est l'accélération due à la pesanteur, ρ la densité à une certaine température de référence T_0 et h la taille de la couche. Les inconnus sont le champ de vitesse, \mathbf{u}^* (u^*, v^*, w^*), la température T^* et la pression P^* . Le vecteur e_z est le vecteur unité dans la direction z . Les variables avec un \star sont dimensionnelles. Pour définir le transport vertical de la chaleur nous récrivons l'équation de la température comme suit

$$T_t^* + \nabla \cdot J^* = 0,$$

où $J^* = \mathbf{u}^* T^* - \kappa \nabla T^*$ est proportionnel au flux de la chaleur. Nous posons

$$\|f\|^2 = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 |f(x, y, z)|^2 dx dy dz$$

aussi bien pour les fonctions scalaires que vectorielles f . Nous utilisons $\langle \dots \rangle$ pour la moyenne de temps

$$\langle f \rangle = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds.$$

et \bar{f} pour la moyenne horizontale

$$\bar{f} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L f(x, y) dx dy.$$

Quand une fonction dépend des variables additionnelles, nous écrivons seulement les variables restantes après intégration, ainsi nous notons

$$\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 |\nabla \mathbf{u}(x, y, z, t)|^2 dx dy dz.$$

Le transport moyen de chaleur pour toute solution (\mathbf{u}^*, P^*, T^*) des équations du mouvement est simplement la composante verticale du flux de chaleur ramené à une moyenne

dans l'espace et le temps :

$$\left\langle \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 J^*.e_z \, dx \, dy \, dz \right\rangle. \quad (3.2)$$

Nous notons maintenant que les équations (3.1) admettent une solution exacte pour les valeurs des paramètres du problème, qui est

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_c^* &= 0, \\ T_c^* &= T_{bas} + \frac{T_{haut} - T_{bas}}{h} z, \\ P_c^* &= P_0 + \rho \alpha g \left(T_{bas} z + \frac{T_{haut} - T_{bas}}{2h} z^2 \right). \end{aligned}$$

Cette solution s'appelle la solution de conduction. Le transport de la chaleur pour la solution de la conduction est égal à

$$J_c^*.e_z = -\kappa \frac{T_{haut} - T_{bas}}{h}. \quad (3.3)$$

Remarque 3.1 La définition générale de J_c^* est $J_c^* = -\kappa \nabla T$ qui est simplement la partie conductrice de J^* où la densité du flux de chaleur transporté par conduction.

Le rapport du transport total de chaleur (3.2) et de conduction est définie pour être le nombre de Nusselt, N , de l'écoulement

$$N = \frac{\left\langle \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 J^*.e_z \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 J_c^*.e_z \right\rangle} = \frac{h \left\langle \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 J^*.e_z \right\rangle}{\kappa (T_{bas} - T_{haut})}. \quad (3.4)$$

Nous dérivons maintenant des versions non-dimensionnelles des équations de (3.1). En utilisant les nombres h , $\frac{h^2}{\kappa}$ et $T_{haut} - T_{bas}$ on peut adimensionner les équations et obtenir

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \sigma \Delta \mathbf{u} + \sigma R T e_z, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.6)$$

et une équation advection-diffusion de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \Delta T. \quad (3.7)$$

$$T|_{z=0} = 1, \quad T|_{z=1} = 0, \quad \mathbf{u}|_{z=0,1} = 0, \quad (3.8)$$

Tous les paramètres ont été intégrés dans deux paramètres adimensionnés, le nombre de Prandtl σ et le nombre de Rayleigh R .

Les cinq inconnues, vitesse incompressible, $\mathbf{u} = (u, v, w)$, la pression p , et la température T sont des fonctions de la position $X = (x, y, z)$ et du temps t . Pour simplifier les

équations ont été adimensionnées : la variable verticale $z \in [0, 1]$ et les variables horizontales (x, y) appartiennent à un carré $Q \subset \mathbb{R}^2$ de côté L . Les conditions aux limites sont comme suit: toutes les fonctions $((u, v, w), p, T)$ sont périodiques en x et y avec la période L ; u, v , et w s'annulent pour $z = 0; 1$, et la température vérifie $T = 0$ à $z = 1$ et $T = 1$ à $z = 0$.

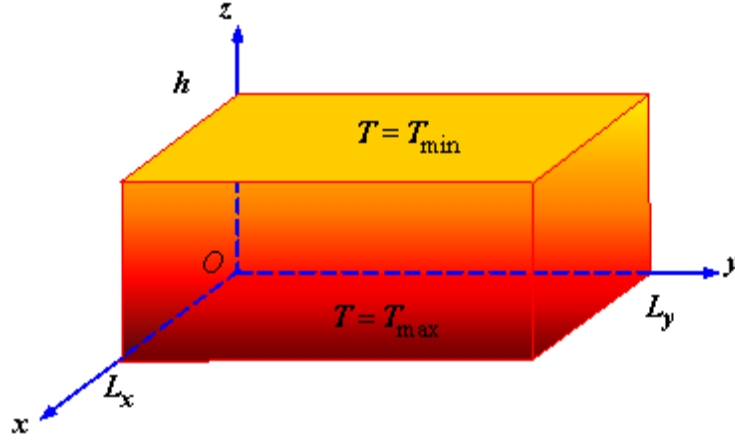


Figure 3.4: Une cellule de Rayleigh-Benard

Dans ces nouvelles variables, la solution de conduction a l'unité du transport de la chaleur et le nombre de Nusselt est simplement

$$\begin{aligned} N &= \left\langle \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 J e_z dx dy dz \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 (wT - T_z) dx dy dz \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 wT dx dy dz \right\rangle + 1, \end{aligned}$$

où $-\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 T_z dx dy dz = 1$ en raison des conditions aux limites de T . Nous avons utilisé $J = \mathbf{u}T - \nabla T$ et $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

Le transfert total de la chaleur est quantifié par le nombre de Nusselt N qui est donné en termes de moyenne de temps du flux vertical de la chaleur :

$$N = 1 + \left\langle \int_0^1 b(z) dz \right\rangle \quad (3.9)$$

avec

$$b(z, t) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L w(x, y, z, t) T(x, y, z, t) dx dy = \overline{wT}(z, t), \quad (3.10)$$

et ainsi, nous avons

$$N = 1 + \langle \overline{wT} \rangle.$$

Lemme 3.1

$$N = - \langle \overline{T}_z \rangle |_{z=0} \quad (3.11)$$

Preuve. Le flux de la température T se trouve entre ses valeurs extrêmes. De plus, pour toute fonction $f(t)$ bornée dans le temps, nous avons $\langle f' \rangle = 0$. Alors, la moyenne en temps et la moyenne spatiale horizontale de

$$T_t + \nabla \cdot (\mathbf{u}T - \nabla T) = 0$$

donne

$$\langle \overline{\nabla \cdot (\mathbf{u}T - \nabla T)} \rangle = - \langle \overline{T_t} \rangle$$

ou encore

$$\langle \overline{\nabla \cdot (\mathbf{u}T - \nabla T)} \rangle = 0.$$

La périodicité dans les directions horizontales implique que

$$\langle (\overline{wT} - \overline{T}_z)_z \rangle = 0.$$

Une intégration par rapport à z

$$\left\langle \int_0^z (\overline{wT})_z - \int_0^z \overline{T}_{zz} \right\rangle = 0$$

et $w(0) = 0$ donne

$$\langle \overline{wT} - \overline{T}_z \rangle = \Gamma,$$

où Γ est une constante donnée par

$$\Gamma = - \langle \overline{T}_z \rangle |_{z=0}.$$

Une intégration encore par rapport à z en utilisant les conditions aux limites sur T donne

$$1 + \left\langle \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 wT dx dy dz \right\rangle = \Gamma.$$

Comparant cette dernière expression à celle dans (3.9) nous obtenons

$$N = \Gamma = - \langle \overline{T}_z \rangle |_{z=0}.$$

■

Une autre expression pour le transport de la chaleur peut être calculée comme suit.

$$\langle \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \rangle = R(N - 1) \quad (3.12)$$

Multiplions l'équation (3.5) par \mathbf{u} et intégrons nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 = -\sigma \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \sigma R \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 w T dx dy dz.$$

Ainsi, une moyenne en temps de cette expression donne en utilisant (3.9)

$$\langle \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \rangle = R \left\langle \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 w T dx dy dz \right\rangle = R(N-1).$$

Remarque 3.2 Nous avons utilisé la formule de Green suivante

$$\forall \mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d; \text{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$\int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} dx = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} dx - \int_{\partial \Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} d\sigma.$$

Pour $R > 0$, cette dernière équation implique que $N \geq 1$. L'égalité est vraie seulement quand le champ du vitesse est constant, dans ce cas les conditions aux limites exigent de cette constante d'être nulle. Ce qui montre que pour n'importe quelle solution des équations (3.8) et (3.5), nous avons $N \geq 1$ avec l'égalité seulement pour la solution de conduction. L'expression dans (3.12) montre comment la vitesse moyenne de dissipation d'énergie dans l'écoulement $\langle \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \rangle$, est liée au transfert de chaleur N . Une autre relation peut être établie entre le transfert de chaleur et les gradients spatiaux du champ de température. Cette relation s'exprime par la proposition suivante.

Proposition 3.1

$$N = \langle \|\nabla T\|^2 \rangle. \quad (3.13)$$

Preuve. Multiplions l'équation de la température (3.7) par T et intégrons nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T\|^2 &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 T \Delta T \\ &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 \nabla \cdot (T \nabla T) dx dy dz - \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 |\nabla T|^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L (T \nabla T)(x, y, 1) \cdot \mathbf{e}_z dx dy - \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L (T \nabla T)(x, y, 0) \cdot \mathbf{e}_z dx dy - \|\nabla T\|^2, \end{aligned}$$

où le théorème de la divergence a été utilisé. Puisque la température est égale à 1 et 0 aux plaques du dessous et de dessus, respectivement, nous obtenons;

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T\|^2 = -\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L T_z(x, y, 0) dx dy - \|\nabla T\|^2.$$

Une moyenne en temps maintenant donne

$$\langle \|\nabla T\|^2 \rangle = -\langle \overline{T_z} \rangle |_{z=0} = N,$$

la dernière égalité est obtenue grâce à (3.11). ■

3.4 La méthode de fond :

La méthode de fond est une technique mathématique pour dériver les majorations rigoureuses sur la vitesse de dissipation d'énergie dans le problème de Navier-Stokes et les problèmes semblables. L'idée principale est de décomposer le champ de vitesse en un champ de fond (principal) et le reste en un champ de fluctuation qui est une idée de (Hopf, 1941[54]). Le fond doit porter les conditions aux limites de l'écoulement. La formulation de la majoration supérieure décrite au-dessus est développée par (Doering et Constantin, [53]) et la majoration supérieure optimale est estimée en utilisant des fonctions de test linéaires par morceaux pour le fond et des inégalités de Cauchy-Schwarz. Nous formulons un principe variationnel de majoration supérieure pour le transfert de la chaleur suivant le travail de (Doering et Constantin, 1998 [58]). Comme dans le problème d'écoulement de cisaillement, l'idée est de décomposer les variables dynamiques, la température et la vitesse en fond et des parties fluctuation. On peut montrer qu'il est utile de séparer les contributions conductives et convectives de champ de température (Kerswell, 2001 [59]).

$$T(x, y, z, t) = \tau(z) + \theta(x, y, z, t)$$

où $\tau(z)$ est le profil linéaire de température purement conductible à l'état de repos. Nous avons besoin seulement que le profil de fond porte les conditions aux limites $\tau(0) = 1$, $\tau(1) = 0$; qui implique que θ s'annule en $z = 0$ et en 1 .

3.5 Formulation de la majoration :

Le résultat classique de Howard, conditionné par des hypothèses au sujet des moyennes statistiques, est que N est majoré pour des nombres de Rayleigh très élevés par un multiple de $R^{\frac{1}{2}}$. Le même genre de majoration peut être dérivé sans aucune condition (C. R. Doering, P. Constantin, 1996 [53]). Le système n'est pas isotrope : la direction de la pesanteur est choisie dans la direction des z , ∇T doit être dirigé des régions de température moindre aux régions de température élevée c'est à dire que $J_c^* = -\kappa \nabla T$ et ∇T doivent être dirigées en sens inverses. Considérons une fonction $\tau(z)$ qui satisfait $\tau(0) = 1$, $\tau(1) = 0$, et exprimons la température sous la forme suivante

$$T(x, y, z, t) = \tau(z) + \theta(x, y, z, t). \quad (3.14)$$

Le rôle de τ est celui d'un fond ([55] [56] [57]) qui porte les conditions aux limites non homogènes; ainsi θ vérifie les mêmes conditions aux limites homogènes que la vitesse

Théorème 3.1 *Soit*

$$n = \left\langle \|\nabla (T - \bar{T})\|^2 \right\rangle$$

Alors le nombre de Nusslet pour la convection tridimensionnelle de Rayleigh-Benard satisfait

$$N \leq 2^{\frac{4}{3}} (Rn)^{\frac{1}{3}} + 1.$$

Preuve. Notons que, parce que τ ne dépend pas de x, y on a

$$T(x, y, z) - \bar{T}(z, t) = \theta(x, y, z, t) - \bar{\theta}(z, t) \quad (3.15)$$

et θ satisfait l'équation

$$(\partial_t + u \cdot \nabla - \Delta) \theta = \tau'' - w\tau' \quad (3.16)$$

où nous avons posé $\tau' = \frac{d\tau}{dz}$. La moyenne horizontale de la vitesse verticale s'annule identiquement en raison de l'incompressibilité

$$\bar{w}(z, t) = 0$$

ce qui donne

$$\overline{wT} = \overline{w(T - \bar{T})}$$

Par conséquent la quantité

$$b(z, t) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L w(x, y, z, t) T(x, y, z, t) dx dy = \overline{wT}(z, t)$$

peut être écrite comme

$$b(z, t) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L w(x, y, z, t) (\theta(x, y, z, t) - \bar{\theta}(z, t)) dx dy = \overline{w(T - \bar{T})}(z, t) \quad (3.17)$$

Multipliant l'équation (3.16) par θ et intégrant nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = -\|\nabla\theta\|^2 + \int \theta\tau'' - \int \theta w\tau'. \quad (3.18)$$

De la décomposition (3.14) nous avons également

$$\|\nabla T\|^2 = \|\nabla\theta\|^2 + 2 \int \theta_z \tau' + \int_0^1 (\tau')^2 dz. \quad (3.19)$$

Prenant la combinaison linéaire de $2 \times (3.18)$ et (3.19),

$$\|\nabla T\|^2 + \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = -\|\nabla\theta\|^2 - 2 \int \tau' \theta w + \int_0^1 (\tau')^2 dz. \quad (3.20)$$

Nous prenons la moyenne de (3.20)

$$N + \langle \|\nabla\theta\|^2 \rangle = 2 \left\langle - \int_0^1 \tau'(z) b(z) dz \right\rangle + \int_0^1 \left(\tau'(z) \right)^2 dz, \quad (3.21)$$

nous obtenons la relation fondamentale (pour ce qui suit) pour le transfert de chaleur. Nous choisissons un profil fond τ suffisamment régulier et concentré dans une couche limite de largeur δ ,

$$\tau(z) = P\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

avec $P(0) = 1$ et $P(s) = 0$ pour $s \geq 1$. En utilisant seulement les faits élémentaires (théorème fondamental du calcul intégral, des conditions aux limites et l'inégalité de Cauchy-Schwartz) appliqués à (3.17) nous avons pour tout z

$$|b(z, t)| \leq z \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\| \cdot \|\nabla (T - \bar{T})(\cdot, t)\| \quad (3.22)$$

en effet, puisque w s'annule pour $z = 0$ ainsi que $(T - \bar{T})$ alors

$$\begin{aligned} b(z, t) &= \frac{\overline{w(T - \bar{T})}}{\int_0^z \frac{\partial w}{\partial z}(\cdot, s, t) ds \int_0^z \frac{\partial(T - \bar{T})(\cdot, \sigma, t)}{\partial z} d\sigma} \\ &= \frac{\overline{w(T - \bar{T})}}{\int_0^z \frac{\partial w}{\partial z}(\cdot, s, t) ds \int_0^z \frac{\partial(T - \bar{T})(\cdot, \sigma, t)}{\partial z} d\sigma} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |b(z, t)| &\leq \frac{\int_0^z \frac{\partial w}{\partial z}(\cdot, s, t) ds \int_0^z \frac{\partial(T - \bar{T})(\cdot, \sigma, t)}{\partial z} d\sigma}{\left(\int_0^z ds\right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial w}{\partial z} \right\| \left(\int_0^z d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial(T - \bar{T})}{\partial z} \right\|} \\ &\leq \frac{z^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial w}{\partial z} \right\| z^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial(T - \bar{T})}{\partial z} \right\|}{z \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla (T - \bar{T})\|} \\ &\leq \frac{z \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla (T - \bar{T})\|}{z \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla (T - \bar{T})\|}. \end{aligned}$$

Nous posons

$$n = \left\langle \|\nabla (T - \bar{T})\|^2 \right\rangle \quad (3.23)$$

Notons que, de la définition de n et (3.13) il suit que

$$n \leq N.$$

à partir de (3.22), (3.21) et (3.12)

$$\begin{aligned} \langle |b(z, t)| \rangle &\leq \langle z \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\| \|\nabla (T - \bar{T})(\cdot, t)\| \rangle \\ &\leq z \sqrt{\langle \|\nabla (T - \bar{T})\|^2 \rangle} \sqrt{\langle \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \rangle} \\ &\leq \sqrt{R(N-1)} \sqrt{n} \end{aligned}$$

et après avoir posé

$$C = \int_0^1 \left(\frac{dP(s)}{ds} \right)^2 ds \quad (3.24)$$

et

$$D = \int_0^1 s \left| \frac{dP(s)}{ds} \right| ds. \quad (3.25)$$

nous obtenons

$$N \leq \frac{C}{\delta} + 2D\delta\sqrt{R(N-1)}\sqrt{n}$$

Pour une optimisation de $\delta < 1$, nous prenons

$$\delta^{-1} = \sqrt{\frac{2D}{C}} \{R(N-1)n\}^{\frac{1}{4}} + 1$$

En faisant tendre P vers la fonction $1 - s$, nous obtenons

$$N \leq 2(Rn)^{\frac{1}{4}} (N-1)^{\frac{1}{4}} + 1. \quad (3.26)$$

Ce qui termine la preuve du théorème ■

Si on n'a aucune information supplémentaire alors, en utilisant $n \leq N$ dans l'inégalité ci-dessus nous obtenons la majoration de racine carré $N \leq 4\sqrt{R} + 1$

qui est la preuve du théorème suivant

Théorème 3.2 *Il existe une constante C , indépendante de nombre de Rayleigh R telle que*

$$N \leq 1 + C\sqrt{R}$$

cette inégalité est vraie pour toute solution des équations de Boussinesq.

La majoration n'est pas optimale. La recherche des majorations optimales est plus utile pour d'autres systèmes, où la loi de puissance obtenue rigoureusement coïncide avec celle observée dans les expériences. Quand c'est le cas, alors les résultats rigoureux sont adéquats avec les expériences avec une remarquable exactitude [58]. L'exposant $\frac{1}{3}$ (ou moins de $\frac{1}{2}$) n'ont pas été prouvés rigoureusement pour le système général. Le théorème ci-dessus apporte l'exposant $1/3$ dans le système général de Boussinesq conditionnellement, pour une lente variation de n .

3.6 Les équations pour le nombre de Prandtl infini sans rotation :

Dans certaines convections la viscosité du fluide peut être assez grande et la vitesse assez petite de sorte que les forces visqueuses soient les forces à inertie complètement dominante.

Ce sera certainement le cas pour la convection des fluides avec de grands nombres de Prandtl.

Les équations pour le nombre de Prandtl infini pour la convection de Rayleigh-Benard dans l'approximation de Boussinesq sont un système de cinq équations pour les vitesses (u, v, w) , la pression p et la température T dans un espace de trois dimensions (S.-K. Chan, 1971[61]). La température est advective et diffuse selon l'équation

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) T = \Delta T$$

où $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Le modèle de la convection des fluides de nombre de Prandtl très élevé peut être dérivé formellement des équations standard de Boussinesq, qui nous donne

$$\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = \Delta \mathbf{u} + RT e_z.$$

En prenant la limite à l'infini de nombre de Prandtl, nous obtenons les équations pour le nombre de Prandtl infini [61]

$$\nabla p = \Delta \mathbf{u} + RT e_z.$$

La vitesse et la pression sont déterminées à partir de la température (voir (3.30)) en résolvant des équations d'état non local; indépendantes de temps

$$\begin{aligned} -\Delta u + p_x &= 0, \\ -\Delta v + p_y &= 0 \\ -\Delta w + p_z &= RT. \end{aligned} \tag{3.27}$$

La vitesse est à divergence nulle

$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

Puisque (3.27) est indépendant du temps nous disons que T obéit à une équation scalaire active. Nous allons considérer un domaine rectangulaire avec une hauteur verticale h et une longueur horizontale de rapport L . Les variables indépendantes horizontales (x, y) appartiennent au carré $Q \subset \mathbb{R}^2$ de côté de longueur L . La variable verticale z appartient à l'intervalle $[0, 1]$. Les conditions aux limites sont comme suit: toutes les fonctions $((u, v, w), p, T)$ sont périodiques dans x et y avec la période L ; u, v et w s'annulent pour $z = 0, 1$ et la température vérifie $T = 0$ à $z = 1$, $T = 1$ à $z = 0$.

3.6.1 Une majoration logarithmique :

Théorème 3.3 *Il existe une constante C_2 tel que le nombre de Nusselt pour l'équation de nombre de Prandtl infini est tel que*

$$N \leq 1 + C_2 R^{\frac{2}{7}} \{1 + \log_+ R\}^{\frac{4}{7}} n^{\frac{1}{7}}.$$

Preuve. Une remarque importante, vraie même pour le cas général (3.8) est que, en raison des conditions aux limites et de l'incompressibilité, non seulement la composante verticale de la vitesse w mais également sa dérivée normale $\frac{\partial w}{\partial z}$ s'annulent pour $z = 1, 0$. Donc nous pouvons écrire

$$b(z, t) = \overline{\int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} (\cdot, s, t) ds \int_0^z \frac{\partial (T(\cdot, \sigma, t) - \bar{T}(\sigma, t))}{\partial z} d\sigma}. \quad (3.28)$$

En conséquence

$$|b(z, t)| \leq z^{\frac{5}{2}} \left\| \frac{\partial^2 w(\cdot, t)}{\partial^2 z} \right\|_{L^\infty} \|\nabla (T - \bar{T})(\cdot, t)\| \quad (3.29)$$

où $\|f\|_{L^\infty}$ est la norme-sup. On peut exprimer $\frac{\partial^2 w(\cdot, t)}{\partial z^2}$, en termes de $T - \bar{T}$. Prenant la divergence de (3.27) nous obtenons l'équation de la pression :

$$\Delta p = RT_z.$$

Eliminant la pression de (3.27), différentiant (3.27) nous obtenons

$$-\Delta^2 w + \Delta p_z = R\Delta T$$

où

$$\Delta p_z = RT_{zz}$$

et substituant pour obtenir

$$\Delta^2 w = -R\Delta_h (T - \bar{T}) \quad (3.30)$$

où $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le Laplacien dans les directions horizontales x et y . En utilisant les conditions aux limites nous pouvons réécrire ceci comme

$$w = -R (\Delta_{DN}^2)^{-1} \Delta_h (T - \bar{T}) \quad (3.31)$$

où $(\Delta_{DN}^2)^{-1}$ est l'inverse du bilaplacien avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet et de Neumann. Prenant la deuxième dérivée de w par rapport à z alors

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -RB (T - \bar{T}) \quad (3.32)$$

où l'opérateur linéaire B est donné par

$$B = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Delta_{DN}^2)^{-1} \Delta_h \quad (3.33)$$

L'équation de la température obéit au principe de maximum, donc

$$0 \leq T \leq 1$$

est obtenue dans l'espace et le temps. Par conséquent nous obtenons

$$0 \leq |T - \bar{T}| \leq 1.$$

L'opérateur B n'est pas borné dans L^∞ mais obéit à une estimation logarithmique d'extrapolation qui signifie que les dérivés d'ordre supérieur entrent logarithmiquement dans la majoration; l'estimation

$$\left\langle \|B(T - \bar{T})\|_{L^\infty}^2 \right\rangle \leq C_1^2 \{1 + \log_+ R\}^4 \quad (3.34)$$

suit des majorations de (P. Constantin, C. R. Doering, (1999) [62]). La constante C_1 peut être calculée explicitement. Par conséquent, en utilisant le même genre de fond que dans (3.21) nous obtenons

$$N \leq \int_0^1 (\tau'(z))^2 dz + 2 \int_0^1 z^{\frac{5}{2}} |\tau'(z)| \left\langle \left\| \frac{\partial^2 w(\cdot, t)}{\partial^2 z} \right\|_{L^\infty} \|\nabla(T - \bar{T})\| \right\rangle dz \quad (3.35)$$

et par conséquent

$$N \leq \frac{C}{\delta} + 2D\delta^{\frac{5}{2}} C_1 R \{1 + \log_+ R\}^2 \sqrt{n} \quad (3.36)$$

le C étant défini dans (3.24), C_1 vient de (3.34) et

$$D = \int_0^1 s^{\frac{5}{2}} P(s) ds. \quad (3.37)$$

Une optimisation dans $\delta < 1$ nous donne

$$\delta^{-1} = \left[\frac{5D}{C} C_1 R \{1 + \log_+ R\}^2 \sqrt{n} \right]^{\frac{2}{7}} + 1$$

et faisant tendre P vers la fonction $1 - s$ nous déduisons le théorème ■

Si aucune information supplémentaire n'est donnée alors, en utilisant $n \leq N$ dans le théorème ci-dessus nous récupérons la borne

$$N \leq 1 + C_2^{\frac{7}{6}} R^{\frac{1}{3}} \{1 + \log_+ R\}^{\frac{2}{3}}$$

Le théorème donne l'exposant $2/7$ aussi longtemps que n ne varie pas trop avec R .

Discussion :

Il n'y a aucune preuve que le nombre de Nusselt ne peut jamais se comporter comme \sqrt{R} pour un très grand R , dans le sens qu'il n'y a aucune expérience qui tend à montrer ce résultat .

Dans cette section nous avons prouvé que si le rapport

$$\frac{n}{N} = \frac{\left\langle \|\nabla(T - \bar{T})\|^2 \right\rangle}{\left\langle \|\nabla T\|^2 \right\rangle}$$

est petit alors la dépendance de nombre de Nusselt avec le nombre de Rayleigh est réduite.

3.7 Les équations pour le nombre de Prandtl infini avec rotation :

Nous supposons que le domaine D tourne à un taux angulaire uniforme autour de l'axe des z , et nous nous plaçons dans une armature tournant avec le domaine. Nous considérons le cas de nombre de Prandtl infini. Les conditions aux limites et l'équation (3.7) de la température sont les mêmes que dans le cas irrotationnel. En présence de la rotation la vitesse est déterminée par la température de l'équation d'état de (Poincaré-Stokes) :

$$\begin{aligned} -\Delta u - E^{-1}v + p_x &= 0 \\ -\Delta v + E^{-1}u + p_y &= 0 \\ -\Delta w + p_z &= RT, \end{aligned} \quad (3.38)$$

avec la condition d'incompressibilité. Le cas irrotationnel correspond formellement à $E = \infty$. Nous notons par ζ la composante verticale du tourbillon

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z = v_x - u_y. \quad (3.39)$$

Prenant la divergence de (3.38) nous obtenons l'équation de la pression:

$$\Delta p - E^{-1}\zeta = RT_z. \quad (3.40)$$

En éliminant la pression

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta p - E^{-1}\zeta)}{\partial z} &= \Delta p_z - E^{-1}\zeta_z \\ &= RT_{zz} \end{aligned}$$

de 3.38) nous prenons la valeur de $p_z = \Delta w + RT$

$$\Delta(\Delta w + RT) - E^{-1}\zeta_z = RT_{zz}$$

nous obtenons

$$\Delta^2 w - E^{-1}\zeta_z = -R\Delta_h T \quad (3.41)$$

où $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et

$$-\Delta\zeta - E^{-1}w_z = 0. \quad (3.42)$$

avec

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -E\Delta\zeta.$$

Nous utilisons l'incompressibilité pour déduire les conditions aux limites

$$\begin{aligned} w(x, y, 0, t) &= w(x, y, 1, t) = 0 \\ w_z(x, y, 0, t) &= w_z(x, y, 1, t) = 0 \\ \zeta(x, y, 0, t) &= \zeta(x, y, 1, t) = 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

De (3.41) et de (3.42) il est facile d'obtenir (P. Constantin, C. Hallstrom, V. Putkaradze 2002 [51]) des majorations pour la vitesse et la pression qui sont uniformes pour tous les taux de rotation E^{-1} où $E^{-1} = \sqrt{T_a}$ est l'inverse du nombre d'Ekman,

$$\|\Delta w\|^2 + 2\|\nabla\zeta\|^2 \leq R^2, \tag{3.44}$$

$$\|P_z\|^2 \leq 4R^2 \tag{3.45}$$

$$\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|\nabla w\|^2 \leq R^2. \tag{3.46}$$

En effet, pour obtenir (3.46) il suffit de multiplier l'équation de vitesse (3.38) par \mathbf{u} et intégrer nous obtenons

$$\|\nabla \mathbf{u}\|^2 = \frac{R}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 w(x, y, z, t) T(x, y, z, t) dx dy dz$$

la composante verticale de la vitesse w s'annule pour $z = 0$, donc nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 &= \frac{R}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 \left(\int_0^z \frac{\partial w(x, y, \beta, t)}{\partial \beta} d\beta \right) T(x, y, z, t) dx dy dz \\ &\leq R \|T(x, y, z, t)\|_{L^\infty} \left\| \frac{\partial w(x, y, \beta, t)}{\partial \beta} \right\| \sqrt{\left(\int_0^z 1 d\beta \right)}, \end{aligned}$$

pour $1 \geq T \geq 0$ et $1 \geq z \geq 0$ nous obtenons

$$\|\nabla \mathbf{u}\|^2 \leq R \|\nabla \mathbf{u}\|$$

il vient que

$$\|\nabla \mathbf{u}\|^2 \leq R^2$$

d'où en déduit (3.46). Multipliant (3.41) par w , (3.42) par ζ , additionnant et intégrant nous déduisons (3.44). Ces inégalités sont vraies dans le cas sans rotation. Notons que la majoration uniforme (3.44) a une conséquence très importante pour les systèmes fortement tournants (de petit nombre d'Ekman). L'accélération verticale w_z est éliminée. En effet de (3.42), il suit que

$$(\Delta_D)^{-1} w_z = -E\zeta$$

et ainsi w_z tend vers zéro dans H^{-1} quand $E \rightarrow 0$ à un R fixe. Afin de tirer profit de cette observation nous devons contrôler la croissance des gradients des composants

horizontaux de la vitesse aux limites. qui est réalisé [51] de la manière suivante, d'abord nous différencions u dans l'équation (3.38) par rapport à z

$$-\Delta u_z = E^{-1}v_z - p_{zx}, \quad (3.47)$$

nous multiplions par u et nous intégrons horizontalement:

$$\overline{-u\Delta u_z} = E^{-1}\overline{v_z u} + \overline{p_z u_x}. \quad (3.48)$$

Deuxièmement, nous remarquons que:

$$\overline{-u\Delta u_z} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \overline{|\nabla u|_2^2} \right) - \frac{d}{dz} \overline{u u_{zz}}. \quad (3.49)$$

Par intégration de (3.48) et (3.49) verticalement sur $[0, z]$ en utilisant la condition aux limites de Dirichlet sur u , nous obtenons

$$\frac{1}{2} \overline{|\nabla u(., 0)|_2^2} = \frac{1}{2} \overline{|\nabla u(., z)|_2^2} - \overline{u u_{zz}} - E^{-1} \int_0^z \overline{v_z u} - \int_0^z \overline{p_z u_x},$$

et intégrant encore par rapport à z de 0 à 1 nous déduisons

$$\frac{1}{2} \overline{|\nabla u(., 0)|_2^2} \leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \|u_z\|^2 + E^{-1} \|v_z\| \|u\| + \|p_z\| \|u_x\|. \quad (3.50)$$

Maintenant de (3.50) en utilisant les majorations (3.45), (3.46) et l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\overline{|\nabla u(., 0)|_2^2} \leq C (1 + E^{-1}) R^2. \quad (3.51)$$

Des inégalités semblables s'obtiennent pour v et l'autre frontière $z = 1$.

3.7.1 Flux de la chaleur dans un système tournant

Théorème 3.4 *Le nombre de Nusselt dans la convection de nombre de Prandtl infini avec rotation est tel que*

$$N - 1 \leq \min \left\{ c_1 R^{\frac{2}{5}}; (c_2 E^2 + c_3 E) R^2 \right\}.$$

Nous rappelons que (3.21)

$$N \leq \left\langle -2 \int_0^1 \tau'(z) b(z) dz - \|\nabla \theta\|^2 \right\rangle + \int_0^1 (\tau'(z))^2 dz \quad (3.52)$$

Ecrivons

$$\int_0^1 \tau'(z) b(z) dz = -(w_z, \Theta)$$

où Θ est égale à

$$\Theta(x, y, z, t) = \int_0^z \tau'(s) \theta(x, y, s, t) ds. \quad (3.53)$$

Maintenant nous remplaçons w_z en utilisant (3.42) pour exhiber le petit paramètre E

$$\int_0^1 \tau'(z) b(z) dz = E(\Delta\zeta \cdot \Theta) \quad (3.54)$$

Nous intégrons par parties et nous considérons le terme de limite:

$$\int_0^1 \tau'(z) b(z) dz = I + II \quad (3.55)$$

où

$$I = -E(\nabla\zeta, \nabla\Theta) \quad (3.56)$$

et

$$II = E\overline{\zeta_z(\cdot, 1, t) \Theta(\cdot, 1, t)}. \quad (3.57)$$

il est clair que

$$\|\nabla\Theta\| \leq g \|\nabla\theta\| \quad (3.58)$$

où

$$g = \left[\int_0^1 (1-z) (\tau'(z))^2 dz \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.59)$$

Le premier terme de (3.55) est borné en raison de (3.44)

$$|I| = E|(\nabla\zeta, \nabla\Theta)| \leq \frac{Eg}{\sqrt{2}} R \|\nabla\theta\|. \quad (3.60)$$

Le deuxième terme peut être écrit après une intégration horizontale par parties comme suit

$$II = E\overline{(u_z(\cdot, 1, t) \Theta_y(\cdot, 1, t) - v_z(\cdot, 1, t) \Theta_x(\cdot, 1, t))}. \quad (3.61)$$

Puisque Θ est une intégrale de θ il est facile de voir que

$$\|\nabla_h \Theta(\cdot, 1, t)\|_h \leq G \|\nabla\theta\|$$

avec

$$G = \sup_z \left| \tau'(z) \right| \quad (3.62)$$

et

$$\|\nabla_h \Theta(\cdot, 1, t)\|_h^2 = \overline{|\nabla_h \Theta(\cdot, 1, t)|^2}$$

est la norme horizontale de L^2 normalisée. En utilisant les conditions aux limites (3.51) sur u_z et v_z nous déduisons l'estimation souhaitée sur le deuxième terme

$$|II| \leq CG\sqrt{E^2 + ER} \|\nabla\theta\|. \quad (3.63)$$

Par addition de (3.60) et (3.63) nous obtenons

$$\left| \int_0^1 \tau'(z) b(z) dz \right| \leq C \left\{ Eg + G\sqrt{E^2 + E} \right\} R \|\nabla\theta\|. \quad (3.64)$$

Nous déduisons

$$\left| \int_0^1 \tau'(z) b(z) dz \right| \leq C_1 \{g^2 E^2 + G^2 (E^2 + E)\} R^2 + \frac{1}{2} \|\nabla\theta\|^2 \quad (3.65)$$

D'autre part, il n'est pas difficile de voir que

$$\left| \int_0^1 \tau'(z) b(z) dz \right| \leq C_2 R \int_0^1 z^{\frac{3}{2}} |\tau'(z)| dz \quad (3.66)$$

en effet en utilisant (3.44) et $0 \leq T \leq 1$ le principe du maximum dans

$$b(z, t) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^z \int_0^{z_1} w_{zz}(x, y, z_2, t) \theta(x, y, z) dx dy dz_2 dz_1$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans

$$|b(z, t)| \leq \frac{C}{2} \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L z^2 \|w_{zz}\| dx dy$$

nous donne

$$\left| \int_0^1 \tau'(z) b(z) dz \right| \leq C_2 R \int_0^1 z^{\frac{3}{2}} |\tau'(z)| dz$$

Cette observation a permis l'amélioration des résultats de [51]. Pour n'importe quel τ nous avons le choix d'appliquer la majoration (3.65) ou (3.66) dans le calcul de nombre de Nusselt (3.52). Posons

$$\Gamma_\tau(E, R) = \min \{2C_1 [g^2 E^2 + G^2 (E^2 + E)] R^2; 2C_2 MR\} \quad (3.67)$$

où

$$M = \int_0^1 z^{\frac{3}{2}} |\tau'(z)| dz. \quad (3.68)$$

En conséquence nous obtenons

$$N \leq \int_0^1 (\tau'(z))^2 dz + \Gamma_\tau(E, R). \quad (3.69)$$

Si on choisit τ_1 pour être une approximation régulière de $\tau = (1-z)\delta^{-1}$ pour $0 \leq z \leq \delta$ et $\tau = 0$ pour $\delta \leq z \leq 1$ alors $g = O(\delta^{-\frac{1}{2}})$, $G = O(\delta^{-1})$ et $M = O(\delta^{\frac{3}{2}})$. L'optimisation pour τ ([51],[52]) termine la preuve.

3.8 Majoration du flux de la chaleur

De la définition de nombre de Nusslet (3.13), donnée en termes de la température, nous pouvons établir une expression équivalente en termes de profil de fond et fluctuations en utilisant (3.14) pour remplacer T par sa décomposition en τ et θ dans la quantité $|\nabla T|^2$ qui nous donne l'expression suivante

$$N = \langle |\nabla\theta|^2 \rangle + \int_0^1 (\tau')^2 dz + 2 \left\langle \int_0^L \int_0^L \int_0^1 \theta_z \tau' dz dy dx \right\rangle.$$

Le dernier terme peut être remplacé en multipliant l'équation d'évolution de θ (3.14) par θ et en intégrant. En prenant une moyenne de temps, nous obtenons

$$\left\langle \int_0^L \int_0^L \int_0^1 \tau' \theta_z dz dy dx \right\rangle = \langle \|\nabla\theta\|^2 \rangle - \left\langle \int_0^L \int_0^L \int_0^1 w \tau' dz dy dx \right\rangle$$

où nous avons utilisé les conditions aux limites et la condition d'incompressibilité. Additionnant ces dernières égalités, nous obtenons la forme suivante pour le nombre de Nusselt

$$N + \langle \|\nabla\theta\|^2 \rangle = 2 \left\langle - \int_0^1 \tau' (z) b (z) dz \right\rangle + \int_0^1 (\tau' (z))^2 dz.$$

Maintenant nous utilisons

$$b(z, t) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^z \int_0^{z_1} w_{zz}(x, y, z_2, t) \theta(x, z) dx dy dz_2 dz_1. \quad (3.70)$$

Il suit que

$$|b(z, t)| \leq \frac{1}{2} z^2 (1 + \|\tau\|_{L^\infty}) \|w_{zz}\|_{L^\infty(dz; L^1(dx))}.$$

En nous restreignant aux profils bornés, $\|\tau\|_{L^\infty} \leq 1$, nous obtenons

$$|b(z, t)| \leq z^2 \|w_{zz}(\cdot, t)\|_{L^\infty}.$$

En conséquence nous obtenons l'inégalité suivante

$$N \leq \int_0^1 (\tau' (z))^2 dz + 2 \int_0^1 z^2 |\tau' (z)| \langle \|w_{zz}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rangle dz \quad (3.71)$$

Jusqu'à ce point, le profil de fond τ n'a pas été spécifié. Nous choisissons une approximation régulière d'un profil qui se concentre dans une couche limite de largeur δ , par exemple

$$\tau_2(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{\delta} & \text{pour } 0 \leq z \leq \delta \\ 0 & \text{pour } z > \delta \end{cases}.$$

Nous supposons que la fonction $\tau(z)$ satisfait les inégalités suivante

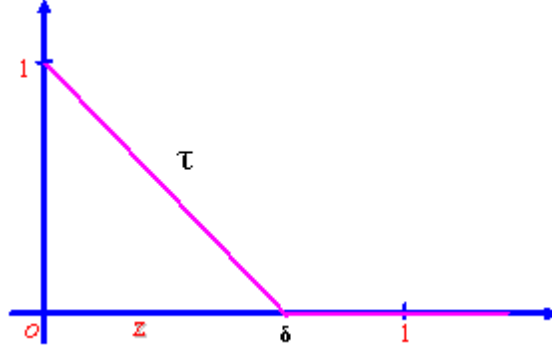


Figure 3.5: Représentation du profil de fond τ

$$\begin{aligned} |\tau'(z)| &\leq C\frac{1}{\delta} \\ |\tau''(z)| &\leq C\frac{1}{\delta^2} \end{aligned}$$

$|\tau(z)| \leq 1$ et $\tau'(z) = 0$ pour $z > \delta$. Nous ajustons δ pour estimer les majorations sur N , supposons que

$$\delta \geq C\frac{1}{R^p}.$$

Nous notons simplement le nombre Rayleigh et le nombre d'Ekman par des constantes indépendantes C . La puissance p n'est pas spécifiée.

Théorème 3.5 *Il existe une constante C tel que le nombre de Nusslet pour l'équation de nombre de Prandtl infini avec rotation tel que*

$$N \leq 1 + CR^{\frac{1}{3}} \{1 + \log_+ R\}^{\frac{2}{3}}$$

quand

$$E \geq R^{-\frac{1}{6}} \{1 + \log_+ R\}^{-\frac{5}{6}}.$$

Quand $E \leq R^{-\frac{1}{6}} \{1 + \log_+ R\}^{-\frac{5}{6}}$ alors le nombre de Nusslet satisfait à

$$N \leq CE^{-\frac{4}{5}} R^{\frac{1}{5}}$$

Preuve. Nous déduisons du (3.71) l'inégalité

$$N \leq \frac{C}{\delta} + C\delta^2 \langle \|w_{zz}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rangle \quad (3.72)$$

Nous utilisons maintenant les deux équations (3.41) et (3.42) pour dériver une simple expression pour w_{zz} , la quantité pertinente des calculs de flux de la chaleur. Notant que

ζ s'annule sur les bords horizontaux, en utilisant (3.42) pour éliminer ζ dans l'équation (3.41), nous obtenons

$$\Delta^2 w + E^{-2} (\partial_z \Delta_D^{-1} \partial_z) w = -R \Delta_h T.$$

En appliquant l'inverse de bilaplacien, nous déduisons

$$w = -R (\Delta_{DN}^2)^{-1} \Delta_h T - E^{-2} (\Delta_{DN}^2)^{-1} (\partial_z \Delta_D^{-1} \partial_z) w.$$

Ici $(\Delta_{DN}^2)^{-1}$ est l'inverse de bilaplacien avec des conditions aux limites homogène de Dirichlet et Neumann. Comme la température du profil de fond τ ne dépend que de z , alors $\Delta_h T = \Delta_h \theta$. La seconde dérivée de w par rapport à z donne

$$w_{zz} = -RB_1 \theta - E^{-2} B_2 w$$

où

$$B_1 = \partial_{zz} (\Delta_{DN}^2)^{-1} \Delta_h$$

et

$$B_2 = \partial_{zz} (\Delta_{DN}^2)^{-1} (\partial_z \Delta_D^{-1} \partial_z). \quad (3.73)$$

Nous estimons la quantité d'intérêt $\|w_{zz}(\cdot, t)\|_{L^\infty}$ en utilisant la décomposition ci-dessus. Évidemment

$$\langle \|w_{zz}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rangle \leq R \langle \|B_1 \theta(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rangle + E^{-2} \langle \|B_2 w(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rangle \quad (3.74)$$

Dans la section suivante, nous prouvons les deux estimations principales

$$\langle \|B_1 \theta(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rangle \leq C \{1 + \log_+ R\}^2 \quad (3.75)$$

et

$$\langle \|B_2 w(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rangle \leq C \sqrt{R(N-1)} \quad (3.76)$$

En utilisant ces deux inégalités, et la combinaison de (3.74) et (3.72), nous pouvons optimiser par rapport à δ et obtenir le résultat suivant. Il existe une constante C tel que

$$N \leq 1 + CR^{\frac{1}{3}} \{1 + \log_+ R\}^{\frac{2}{3}}$$

quand

$$E \geq R^{-\frac{1}{6}} \{1 + \log_+ R\}^{-\frac{5}{6}}.$$

Quand $E \leq R^{-\frac{1}{6}} \{1 + \log_+ R\}^{-\frac{5}{6}}$ alors le nombre de Nusslet satisfait à

$$N \leq CE^{-\frac{4}{5}} R^{\frac{1}{5}}.$$

En effet, utilisant les majorations (3.75), (3.76) et (3.74) dans (3.72) et une optimisation par rapport à δ , nous donne

$$N \leq 1 + C \left\{ R (1 + \log_+ R)^2 \right\}^{\frac{1}{3}} + CE^{-\frac{2}{3}} R^{\frac{1}{6}} (N-1)^{\frac{1}{6}} \quad (3.77)$$

ce qui implique le théorème ■

3.9 Les intégrales singulières et le terme B_1

Dans cette section, nous décrivons les estimations et les résultats pour le cas non rotationnel. Considérons l'opérateur

$$B_1 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Delta_{DN}^2)^{-1} \Delta_h$$

où $w = (\Delta_{DN}^2)^{-1} f$ est la solution de

$$\Delta^2 w = f$$

avec des conditions aux limites horizontalement périodiques et verticalement de Dirichlet et de Neumann $w = w' = 0$. Les estimations L^∞ logarithmiques pour B_1 ont été obtenues dans (P. Constantin, C. Doering, 1999 [87]). Elles sont rappelées dans le théorème suivant

Théorème 3.6 *Pour tout $\alpha \in (0, 1)$ il existe une constante positive C_α , tel que pour toute fonction continue de Hölder θ qui est horizontalement périodique et s'annule aux limites verticales satisfait l'inégalité suivante:*

$$\|B_1 \theta\|_{L^\infty} \leq C_\alpha \|\theta\|_{L^\infty} \{1 + \log(1 + \|\theta\|_{C^{0,\alpha}})\}^2. \quad (3.78)$$

Preuve. La norme spatiale $C^{0,\alpha}$ est définie par

$$\|\theta\|_{C^{0,\alpha}} = \sup_{X=(x,y;z) \in Q \times [0,1]} |\theta(X, t)| + \sup_{X \neq Y} \frac{|\theta(X, t) - \theta(Y, t)|}{|X - Y|^\alpha}.$$

La preuve de ce théorème est basée sur une borne sur des sommes exponentiel-oscillantes du type:

$$K(x, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{\frac{2\pi}{L} ik \cdot x} m_k^p e^{-\epsilon m_k}$$

où $\epsilon = \epsilon(z) \geq 0$, $m_k = \frac{2\pi}{L} |k|$ et $\epsilon(z) = 0 \implies z = z_0$. La somme est singulière à $z = z_0$ et la borne

$$|K(x, z)| \leq C_p [|x|^2 + \epsilon^2(z)]^{\frac{-p+2}{2}}$$

est obtenue en utilisant la formule sommatoire de Poisson. Nous décomposons $B_1 \theta$ en la somme

$$B_1 \theta = (I - B_3 + B_4 + B_5) B_3 \theta$$

où

$$B_3 \theta = (\Delta_D)^{-1} \Delta_h \theta.$$

B_3 est un opérateur intégral avec un noyau K donné par

$$B_3(\theta)(x, y, z) = L^{-2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 K(x - \xi, y - \eta, z, \zeta) (\theta(\xi, \eta, \zeta) - \theta(x, y, z)) d\xi d\eta d\zeta.$$

B_4 et B_5 sont les opérateurs intégraux de couche singulière avec les noyaux qui sont singuliers au bord. L'opérateur B_4 s'écrit comme suit

$$B_4(\theta)(x, y, z) = L^{-2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 J(x - \xi, y - \eta, z, \zeta) (\theta(\xi, \eta, \zeta) - \theta(\xi, \eta, 1)) d\xi d\eta d\zeta$$

et

$$B_5(\theta)(x, y, z) = L^{-2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 S(x - \xi, y - \eta, z, \zeta) (\theta(\xi, \eta, \zeta) - \theta(\xi, \eta, 0)) d\xi d\eta d\zeta$$

Pour toute fonction θ qui satisfait les conditions aux limites homogènes

(tel que $\theta(\xi, \eta, 0) = \theta(\xi, \eta, 1) = 0$). On a montré dans [87] qu'il existe des constantes C tel que

$$\begin{aligned} |K(x - \xi, y - \eta, z, \zeta)| &\leq C (|x - \xi|^2 + |y - \eta|^2 + |z - \zeta|^2)^{-\frac{3}{2}} \\ |J(x - \xi, y - \eta, z, \zeta)| &\leq C (|x - \xi|^2 + |y - \eta|^2 + |1 - \zeta|^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ |S(x - \xi, y - \eta, z, \zeta)| &\leq C (|x - \xi|^2 + |y - \eta|^2 + |\zeta|^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Les noyaux K , J et S peuvent être écrits en tant que sommes oscillantes d'exponentielles. La formule sommatoire de Poisson et le noyau de Poisson sont utilisés pour dériver des inégalités de ce type. Une fois ces inégalités établies, on dérive pour tout B_j , $j = 3, 4, 5$ les estimations

$$\|B_j \theta\|_{L^\infty} \leq C_\alpha \|\theta\|_{L^\infty} [1 + \log(1 + \|\theta\|_{C^{0,\alpha}})]$$

pour que l'inégalité en (3.78) suit par la composition. Ces estimations sont bien connues pour les opérateurs intégraux singuliers du type classique de Calderon-Zygmund. Les opérateurs B_j ne sont pas invariants par translation. Nous faisons maintenant le contact avec l'évolution dynamique de θ donné par (3.16) en établissant deux inégalités. La première,

$$\|\nabla \theta\|_{L^4}^2 \leq C \|\theta\|_{L^\infty} \|\Delta \theta\|_{L^2},$$

est obtenue par l'intégration par parties et elle est vérifiée pour toute fonction assez régulière et satisfaisant les conditions aux limites homogènes. La deuxième inégalité,

$$\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L |w(x, y, z, t)|^2 \leq z \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2,$$

suit des conditions aux limites, du théorème fondamental du calcul intégral et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Multipliant (3.16) par $-\Delta\theta$ et intégrant on obtient, après avoir utilisé ces deux dernières inégalités,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla\theta\|^2 + \|\Delta\theta\|^2 \leq C \|\nabla\mathbf{u}\|^2 \left\{ 1 + \int_0^1 \left[(\tau''(z))^2 + z (\tau'(z))^2 \right] dz \right\}.$$

Maintenant en utilisant la majoration sur $\|\nabla\mathbf{u}\|$, dans (3.46), et prenant une moyenne en temps, nous remarquons qu'il existe une constante positive C tel que

$$\langle \|\Delta\theta\|^2 \rangle \leq CR^2 \left\{ 1 + \int_0^1 \left[(\tau''(z))^2 + z (\tau'(z))^2 \right] dz \right\}.$$

Par injection de Sobolev, il suit que des moyennes des carrés des normes spatiale $C^{0,\alpha}$ de θ sont bornés par la partie à droite:

$$\langle \|\theta\|_{C^{0,\alpha}}^2 \rangle \leq CR^2 \left\{ 1 + \int_0^1 \left[(\tau''(z))^2 + z (\tau'(z))^2 \right] dz \right\}. \quad (3.79)$$

Prenant une moyenne de temps dans l'estimation (3.78) et en utilisant la concavité du logarithme et de la majoration (3.79) nous déduisons la majoration

$$\begin{aligned} & \langle \|B_1\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rangle \\ & \leq C \left\{ 1 + \log \left[1 + CR^2 \left\{ 1 + \int_0^1 \left[(\tau''(z))^2 + z (\tau'(z))^2 \right] dz \right\} \right] \right\}^2 \end{aligned}$$

En utilisant les conditions générales sur τ d'une façon que les intégrales des gradients de τ ne sont pas plus grands que les puissances de R , nous obtenons (3.75). ■

3.10 Estimation pour le terme de rotation :

Le but de cette section est d'établir l'inégalité (3.76), l'estimation qui apparaît dans le terme de rotation, est obtenue en utilisant la majoration sur $\|\nabla\mathbf{u}\|$ (3.12), le lemme ci-dessous, et en prenant les moyennes en temps.

Lemme 3.2 *Pour l'opérateur B_2 défini par (3.73), il existe une constante C tel que*

$$\|B_2w\|_{L^\infty}^2 \leq C \|w_z\|^2.$$

Preuve. Pour prouver le lemme nous utilisons les injections de Sobolev pour obtenir les majorations dans H^2 ; en d'autres termes nous utilisons l'inégalité suivante

$$\|B_2w\|_{L^\infty} \leq C \|(1 - \Delta) B_2w\|.$$

Si on montre que

$$\|B_2 w\| \leq \frac{1}{2} \|w_z\| \quad (3.80)$$

et que

$$\|\Delta B_2 w\| \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \|w_z\| \quad (3.81)$$

le lemme découle. Nous dérivons premièrement l'inégalité (3.80). Nous rappelons que B_2 est défini comme $\left[\partial_{zz} (\Delta_{DN}^2)^{-1} \partial_z (\Delta_D)^{-1} \partial_z \right]$, il est clair que l'inégalité suit d'une majoration correspondante de la norme de l'opérateur $\left[\partial_{zz} (\Delta_{DN}^2)^{-1} \partial_z \Delta_D^{-1} \right]$ dans L^2 . Nous montrons que $\partial_{zz} (\Delta_{DN}^2)^{-1}$ et $\partial_z \Delta_D^{-1}$ sont tous les deux bornés dans L^2 . Pour $\partial_{zz} (\Delta_{DN}^2)^{-1}$, soit ϕ la solution de l'équation de bilaplacien $\Delta_{DN}^2 \phi = f$. Multipliant cette équation par ϕ et intégrant sur le domaine entier nous obtenons

$$(\Delta^2 \phi, \phi) = (f, \phi) \quad (3.82)$$

où

$$(f, g) = \frac{1}{L^2} \int_0^1 \int_0^L \int_0^L f(x, y, z) g(x, y, z) dx dy dz.$$

Exprimant le bilaplacien comme

$$\Delta^2 = \partial_{zzzz} + 2\partial_{zz} \Delta_h + \Delta_h^2,$$

il suit après intégration par partie

$$(\Delta^2 \phi, \phi) = \|\phi_{zz}\|^2 + 2\|\phi_{xz}\|^2 + 2\|\phi_{yz}\|^2 + \|\Delta_h \phi\|^2. \quad (3.83)$$

Les termes de limite obtenues par l'intégration par parties tous s'annulent en raison des conditions aux limites. Les équations (3.82), (3.83) impliquent que

$$\|\phi_{zz}\|^2 \leq \|f\| \|\phi\|. \quad (3.84)$$

Nous notons maintenant, du théorème fondamental du calcul intégral appliqué deux fois et des conditions aux limites que

$$\|\phi\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_{zz}\|$$

et de (3.84) nous obtenons

$$\|\phi_{zz}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|.$$

Ainsi ϕ est par définition la solution de l'équation de bilaplacien. Nous pouvons récrire cette inégalité sous la forme suivante

$$\left\| \partial_{zz} (\Delta_{DN}^2)^{-1} f \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|. \quad (3.85)$$

De la même manière nous majorons l'opérateur $\partial_z \Delta_D^{-1}$. Soit ψ la solution de l'équation de poisson $\Delta \psi = f$ avec les conditions aux limites de Dirichlet. Multipliant par ψ et intégrant par partie sur tout le domaine il résulte que

$$\|\partial_z \Delta_D^{-1} f\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|. \quad (3.86)$$

Maintenant les majorations L^2 données par les équations (3.85) et (3.86) peuvent être utilisé pour obtenir l'estimation (3.80) sur l'opérateur B_2 . Pour (3.77) nous montrons que

$$\left\| \Delta \partial_{zz} (\Delta_{DN}^2)^{-1} \partial_z \Delta_D^{-1} \partial_z w \right\| \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \|\partial_z w\|. \quad (3.87)$$

Notons que $\partial_z \Delta_D^{-1}$ peut être écrit sous la forme

$$\Delta \Delta (\Delta_{DN}^2)^{-1} \partial_z \Delta_D^{-1}$$

et en exprimant $\Delta = \partial_{zz} + \Delta_h$, nous obtenons la forme suivante pour l'opérateur dans (3.87) :

$$\Delta \partial_{zz} (\Delta_{DN}^2)^{-1} \partial_z \Delta_D^{-1} = \left[I - \partial_{zz} \Delta_h (\Delta_{DN}^2)^{-1} - \Delta_h^2 (\Delta_{DN}^2)^{-1} \right] \partial_z \Delta_D^{-1}. \quad (3.88)$$

Nous avons déjà prouvé que $\partial_z \Delta_D^{-1}$ est borné en L^2 , ainsi nous nous intéressons seulement aux deux autres opérateurs. Soit φ la solution de l'équation de bilaplacien $\Delta^2 \varphi = f$ avec les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet. Multipliant par $\Delta_h^2 \varphi$ et intégrant sur le domaine, nous obtenons

$$(\Delta^2 \varphi, \Delta_h^2 \varphi) = (f, \Delta_h^2 \varphi). \quad (3.89)$$

Notant que nous pouvons séparer les dérivées verticales et horizontales dans le bilaplacien, nous avons

$$(\Delta^2 \varphi, \Delta_h^2 \varphi) = (\partial_{zzzz} \varphi, \Delta_h^2 \varphi) + 2 (\Delta_h \partial_{zz} \varphi, \Delta_h^2 \varphi) + \|\Delta_h^2 \varphi\|^2. \quad (3.90)$$

Intégrant par parties, le premier terme donne

$$(\partial_{zzzz} \varphi, \Delta_h^2 \varphi) = \|\partial_{zz} \Delta_h \varphi\|^2.$$

Les termes aux limites s'annulent en raison des conditions aux limites. De même, le deuxième terme de (3.90) devient, après intégration par parties,

$$(\Delta_h \partial_{zz} \varphi, \Delta_h^2 \varphi) = \|\Delta_h \partial_{xz} \varphi\|^2 + \|\Delta_h \partial_{yz} \varphi\|^2.$$

Encore, en raison des conditions aux limites, les termes aux limites s'annulent. Les équations (3.90) et (3.89) ainsi que l'inégalité de Schwartz, donnent

$$\|\partial_{zz} \Delta_h \varphi\|^2 + 2 \|\Delta_h \partial_{xz} \varphi\|^2 + 2 \|\Delta_h \partial_{yz} \varphi\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta_h^2 \varphi\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|^2.$$

Cette inégalité implique les deux cas

$$\left\| \partial_{zz} \Delta_h (\Delta_{DN}^2)^{-1} w \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|^2$$

et également que

$$\left\| \Delta_h^2 (\Delta_{DN}^2)^{-1} w \right\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Maintenant en utilisant (3.88) nous obtenons l'estimation indiquée en (3.87) et la preuve du lemme est terminée ■

Discussion : De l'inégalité (3.77) et les majorations précédemment obtenues

$$\begin{aligned} N &\leq 1 + CR^{\frac{2}{5}} \\ N &\leq 1 + CER^2 \end{aligned}$$

Nous pouvons dire que pour des rotations croissantes de très faibles à très fortes,

$(E \geq R^{-\frac{1}{6}} \{1 + \log_+ R\}^{-\frac{5}{6}})$, la majoration $R^{\frac{1}{3}} \{1 + \log_+ R\}^{\frac{2}{3}}$ est pratique. Pour une rotation très forte, $R^{-\frac{1}{4}} \leq E \leq R^{-\frac{1}{6}} \{1 + \log_+ R\}^{-\frac{5}{6}}$, la majoration $N \leq 1 + CE^{-\frac{4}{5}} R^{\frac{1}{5}}$ est optimale. Pour une rotation plus forte encore, $R^{-2} \leq E \leq R^{-\frac{1}{4}}$, on obtient la majoration $N \leq 1 + CR^{\frac{2}{5}}$. Si au lieu de varier la rotation avec des nombres de Rayleigh fixés, on varie le nombre de Rayleigh et on fixe le nombre d'Ekman, alors la majoration de logarithmique de N a une exposant un tiers $\frac{1}{3}$ apparaît, quelque soit sa vitesse, si le nombre de Rayleigh est assez grand.

La rotation a un effet non trivial sur le transfert thermique dans la convection de nombre de Prandtl infini. L'équation déterminant la vitesse verticale de la température est

$$(\Delta^2 + E^{-2} \partial_z \Delta_D^{-1} \partial_z) w = -R \Delta_h T$$

l'opérateur $\partial_z \Delta_D^{-1} \partial_z$ est une perturbation d'ordre inférieur de Δ^2 , qui a l'effet d'un terme additionnel dans la majoration supérieure pour le transfert thermique, comme vu dans (3.77), et les deux opérateurs sont non négatifs dans L^2 . En l'absence de la rotation ($E = \infty$) on a une majoration supérieure rigoureuse sur le transfert thermique qui est du type $N \leq R^{\frac{1}{3}} (\log R)^{\frac{2}{3}}$. Cependant, la majoration uniforme indépendante de la rotation actuellement connue a un exposant plus élevé, $N \leq R^{\frac{2}{5}}$. Si la rotation est augmentée suffisamment ($ER^{\frac{8}{5}} \ll 1$) pour R fixe, alors son effet est nettement laminaire, l'écoulement et le transfert thermique est dû alors exclusivement à la diffusion moléculaire, le nombre de Nusselt majorer et alors $N \rightarrow 1$. D'autre part, pour E fixe on peut récupérer la majoration logarithmique $\frac{1}{3}$ pour un grand R (C. Hallstrom [52]), mais la limite diverge pour $E \rightarrow 0$.

À mesure que la rotation est augmentée la borne décroît lentement mais prises aussi que $E \geq R^{-\frac{1}{6}} (\log_+ R)^{-\frac{5}{6}}$. Pour une région $R^{-\frac{1}{4}} \leq E \leq R^{-\frac{1}{6}} (\log_+ R)^{-\frac{5}{6}}$ une majoration

du type $N \leq E^{-\frac{4}{5}} R^{\frac{1}{5}}$ est la meilleure majoration connue; pour une rotation plus forte $R^{-2} \leq E \leq R^{-\frac{1}{4}}$ la majoration uniforme $N \leq R^{\frac{2}{5}}$ s'applique. D'autre part, supposons que la rotation est arbitraire mais fixée et le nombre de Rayleigh est croissant; pour le nombre de Rayleigh suffisamment grand la majoration logarithmique $R^{\frac{1}{3}} (\log_+ R)^{\frac{2}{3}}$ s'applique.

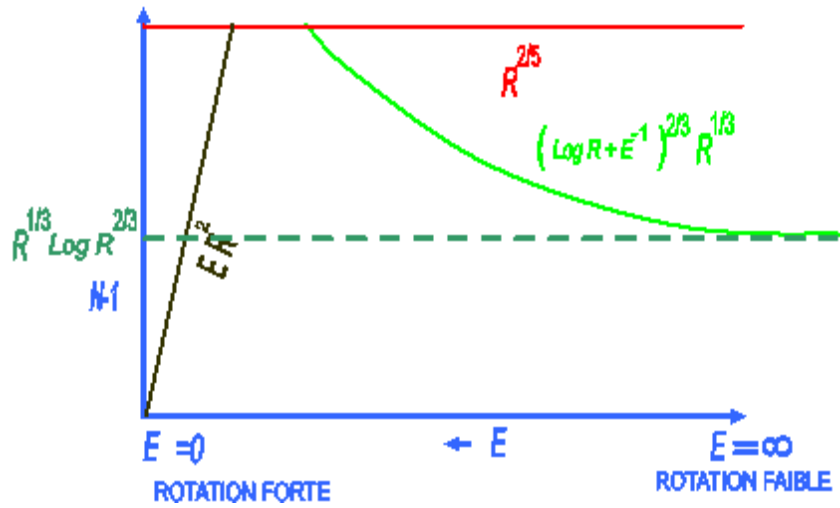


Figure 3.6: Graphes des fonctions $N - 1 = f(E)$

Une présentation des majorations supérieures de transfert de la chaleur, N , dans la convection de Rayleigh-Benard pour un nombre de Prandtl infini. Les majorations supérieures sur $N - 1$ sont tracées en fonction du nombre d'Ekman E

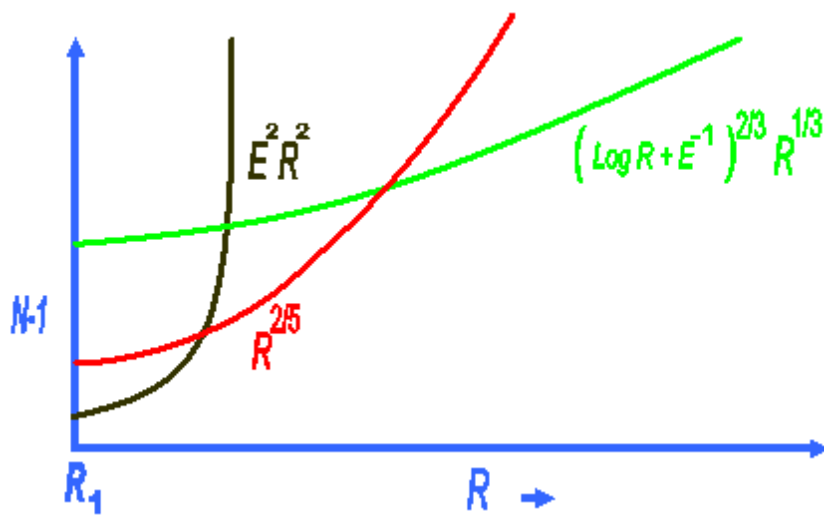


Figure 3.7: Graphes des fonctions $N - 1 = f(R)$

Une présentation de quelques résultats de plusieurs majorations supérieurs pour le problème de nombre de Prandtl infini, dans la convection de Rayleigh-Benard. Les majorations supérieures sur $N - 1$ sont tracées en fonction du nombre de Rayleigh R .

REFERENCES

- [1] A. Majda, Vorticity and the mathematical theory of incompressible flow *Comm. Pure Appl. Math.* S39 (1986), 187-220.
- [2] J.T. Beale, T. Kato, A. Majda, Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations, *Commun. math. Phys.* 94 (1984),61-66.
- [3] H. K. Moffatt, The degree of knottedness of tangled vortex lines, *J. Fluid Mechanics* 35 (1969), 117-129.
- [4] Paul Germain, *Mécanique*, tome1. Edition Marketing 1986, Ellipses
- [5] Thomas J. R. Hughes and Jerrold E. Marseden, "A short course in Fluid Mechanics "Mathematics Lecture Series 6
- [6] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*.Edition Mir, Moscou 1971
- [7] *Phys. Sci.*, J.T. Beale et al Edtrs 395 (1993), Kluwer (Dodrecht), 39-57.
- [8] J. H. Maddocks, R. L. Pego, An unconstrained Hamiltonian formulation for incompressible fluid Flow, *Commun. Math. Phys.* 170 (1995), 207- 217.
- [9] J. Serrin, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, (S. Flugge C. Truesdell Edtrs.) *Handbuch der Physik*, 8 (1959), 125 -263.
- [10] D. Ebin, J. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, *Ann. of Math.* 92 (1970), 102-163.
- [11] T Kato, Non-stationary flows of viscous and ideal fluids in R^3 , *J. Funct. Anal* 9 (1972), 296-309.
- [12] *Calcul infinitésimal*. Jean Dieudonné. Herman, Paris 1968
- [13] P. Constantin, Geometric and analytic studies in turbulences, in *Trends and Perspectives in Appl. Math.*, L. Sirovich ed., *Appl. Math. Sciences* 100, Springer-Verlag, (1994).
- [14] P. Constantin, A. Majda, E. Tabak, Formation of strong fronts in the 2D quasi-geostrophic thermal active scalar, *Nonlinearity*, 7 (1994), 1495- 1533.
- [15] P. Constantin, C. Fefferman, A. Majda, Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations, *Commun. in PDE* 21 (1996), 559-571.
- [16] K. Ohkitani, M. Yamada, Inviscid and inviscid-limit behavior of a surface quasi-geostrophic flow, *Phys. Fluids* 9 (1997), 876 -882.
- [17] D. Cordoba, On the geometry of solutions of the quasi-geostrophic active scalar and Euler equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 94 (1997), 12769-12770.

- [18] P. Constantin, Q. Nie, N. Schoerghofer, Phys. Letters A 241 (27 April 1998), 168-172.
- [19] P. Constantin, An eulérian-Lagrangian approach to incompressible fluids, <http://www.aimath.org/preprints/99/constantin.dvi>
- [20] D.G. Aronson and H.F. Weinberger, Multidimensional diffusion arising in population genetics, Adv. in Math., 30, 1978, 33-76..
- [21] H. Berestycki, B. Larrouturou and P. L. Lions, Multi-dimensional travelling wave solutions of a flame propagation model, Arch. Rational Mech. Anal., 111, 1990, 33-49.
- [22] H. Berestycki, B. Larrouturou and J.-M. Roquejoffre, Stability of traveling fronts in a model for flame propagation I: linear stability, Arch. Rational Mech. Anal., 117, 1992, 97-117.
- [23] H. Berestycki and L. Nirenberg, Some qualitative properties of solutions of semilinear equations in cylindrical domains, Analysis etc., P. Rabinowitz et. al., Eds., Academic Press, 1990, 115-164.
- [24] H. Berestycki and L. Nirenberg, Traveling fronts in cylinders, Annales de l'IHP, Analyse non lineaire, 9, 1992, 497-572.
- [25] P. Clavin and F.A. Williams, Theory of pre-mixed flame propagation in large-scale turbulence, Jour. Fluid. Mech., 90, 1979, 589-604.
- [26] P. Embid, A. Majda and P. Souganidis, Comparison of turbulent flame speeds from complete averaging and the G-equation, Phys. Fluids, 7, 1995, 2052-2060.
- [27] P. Embid, A. Majda and P. Souganidis, Effective geometric front dynamics for premixed turbulent combustion with separated velocity scales, Combustion Sci. and Tech., 103, 1994, 85.
- [28] A. Fannjiang and G. Papanicolaou, Convection enhanced diffusion for periodic flows, SIAM J. Appl. Math., 54, 1994, 333-408.
- [29] P.C. Fife, Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems, Lect. Notes Biomath, 28, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [30] R. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, Ann. Eugenics, 7, 1937, 355-369.
- [31] M. Freidlin and J. Gärtner, On the propagation of concentration waves in periodic and random media, Soviet Math. Dokl., 20, 1979, 1282-1286.
- [32] M. Freidlin, Geometric optics approach to reaction-Diffusion equations, SIAM J. Appl. Math., 46, 1986, 222-232.

- [33] M. Freidlin, Limit theorems for large deviations and reaction-Diffusion equations, *Ann. Probability*, 13, 1985, 639-675.
- [34] Ya. Kanel, Stabilization of solutions of the Cauchy problem for equations encountered in combustion theory, *Mat. Sbornik*, 59, 1962, 245-288.
- [35] A.Kerstein and W.Ashurst, *Phys. Rev. Lett.* 68, 192, 934.
- [36] A. Kerstein, Simple derivation of Yakhot's turbulent premixed flame speed formula, *Combust. Sci. and Tech.*, 60, 1988, 163-165.
- [37] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovskii and N.S. Piskunov, Etude de l'équation de la chaleur de matière et son application a un problème biologique, *Bull. Moskov. Gos. Univ. Mat. Mekh.* 1 (1937), 1-25. (see [28] pp. 105-130 for an English transl.)
- [38] A. Majda and P. Souganidis, Large scale front dynamics for turbulent reaction-diffusion equations with separated velocity scales, *Nonlinearity*, 7, 1994, 1-30.
- [39] J.-F. Mallordy and J.-M. Roquejoffre, A parabolic equation of the KPP type in higher dimensions, *SIAM J. Math. Anal.*, 26, 1995, 1-20.
- [40] G. Papanicolau and X. Xin, Reaction diffusion fronts in periodically layered media, *Jour. Stat. Phys.*, 63, 1991, 915-932.
- [41] P. Pelcé, *Dynamics of curved fronts*, Ed., Academic Press, 1988
- [42] M. Protter and H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1984.
- [43] P. Ronney, Some open issues in premixed turbulent combustion, in *Modeling in Combustion Science*, J.Buckmaster and T.Takeno, eds., Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [44] J.-M. Roquejoffre, Stability of traveling fronts in a model for flame propagation II: nonlinear stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 117, 1992, 119-153.
- [45] G. Sivashinsky, Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames I, *Acta Astronautica*, 1977, 4, 1177-1206.
- [46] G. Sivashinsky, Instabilities, pattern formation and turbulence in flames, *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 15, 1983, 179-199.
- [47] X. Xin, Existence and uniqueness of traveling wave solutions in a reaction-diffusion equation with combustion non-linearity, *Indian Univ. Math. Jour.*, 40, 1991, 985-1008.
- [48] J. Xin, Existence of planar flame fronts in convective-diffusive periodic media, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 121, 1992, 205-233.

- [49] J. Xin, Existence and nonexistence of traveling waves and reaction-diffusion front propagation in periodic media, *Jour. Stat. Phys.*, 73, 1993, 893-926.
- [50] V. Yakhot, Propagation velocity of premixed turbulent flames, *Combust. Sci. and Tech.*, 60,191-214.
- [51] P. Constantin, C. Hallstrom, V. Putkaradze, Heat transport in rotating convection, *Phys. D*, 2001.
- [52] C. Hallstrom, Ph.D. Thesis, University of Chicago, 2002.
- [53] C. R. Doering, P. Constantin, (1996), Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows III. Convection, *Phys. Rev E*, 53 5957-5981.
- [54] Hopf, E. (1941). Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik. *Math. Ann.*, 117:764-775.
- [55] C. R. Doering, P. Constantin, (1992), Energy dissipation in shear driven turbulence, *Phys.Rev.Lett.* 69, 1648-1651.
- [56] P. Constantin, C. R. Doering, (1996), Heat transfer in convective turbulence, *Nonlinearity* 9, 1049-1060.
- [57] P. Constantin, C. R. Doering, (1995), Variational bounds in dissipative systems, *Physica D* 82, 221-228.
- [58] C. Doering, P. Constantin, (1998), Bounds for heat transport in a porous layer, *J. Fluid Mechanics* 376, 263-296.
- [59] Kerswell, R. R. (2001). New results in the variational approach to turbulent Boussinesq convection. *Phys. Fluids*, 13(1):192-209.
- [60] P. Constantin, C. Hallstrom, V. Putkaradze, (1999), Heat transport in rotating convection, *Physica D* 125,275-284.
- [61] S.-K. Chan, (1971), Infinite Prandtl Number Turbulent Convection, *Stud. Appl. Math* 50, 13-49.
- [62] P. Constantin, C. R. Doering, (1999), Infinite Prandtl number convection, *J. Stat. Phys.*, 94, 159-172.
- [63] F. Heslot, B. Castaing, and A. Libchaber. Transitions to turbulence in helium gas. *Physical Review A* 36: 5870-5873, 1987.
- [64] X. Chavanne, F. Chilla, B. Castaing, B. Hebral, B. Chabaud and J. Chaussy. Observation of the Ultimate Regime in Rayleigh-Benard Convection. *Physical Review Letters* 79, 1997.

- [65] S. Cioni, S. Ciliberto, and J. Sommeria. Strongly turbulent Rayleigh-Benard convection in mercury: comparison with results at moderate Prandtl number. *Journal of Fluid Mechanics* 335:111-140, 1997. 15
- [66] J. Werne. Structure of hard-turbulent convection in two dimensions: Numerical evidence. *Physical Review E* 48:1020-1035, 1993.
- [67] K. Julinen, S. Legg, J. McWilliams, and J. Werne. Hard turbulence in rotating Rayleigh-Benard convection. *Physical Review E* 53:5557-5560,1996.
- [68] J. J. Niemela, L. Skrbek, K.R. Sreenivasan, and R.J. Donnelly. Turbulent convection at very high Rayleigh numbers. Submitted to *Nature*, 1999.
- [69] Yuanming Liu and Robert E. Ecke. Heat transport scaling in turbulent Rayleigh-Benard convection: Effects of Rotation and Prandtl number. *Physical Review Letters* 79(12): 2257-2260, 1997.
- [70] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, 1961.
- [71] L.N. Howard. Heat transport in turbulent convection. *Journal of Fluid Mechanics* 17: 405-432, 1964.
- [72] P. Constantin, C. R. Doering, Variational bounds in dissipative systems, *Physica D* 82:221-228, 1995.
- [73] C. R. Doering, P. Constantin. Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows III. Convection. *Physical Review E*,53:5957-5981,1996.
- [74] C. Hallstrom. *Heat Transfer in Rotating Infinite Prandtl Number Convection*. Ph.D. thesis, University of Chicago, 2000.
- [75] L.N. Howard. Convection at high Rayleigh number. *Applied Mechanics, Proc. 11th Cong. Applied Mech.* (Ed. H. Grtler), pp. 1109-1115, 1964.
- [76] S.-K. Chan. *Infinite Prandtl Number Turbulent Convection*. *Studies in Applied Mathematics* 50:13-49, 1971.
- [77] B. Castaing, G. Gunaratne, F. Heslot, L. Kadano, A. Libchaber, S. Thomae, X.-Z. Wu, S. Zaleski and G. Zanetti. Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Benard convection. *Journal of Fluid Mechanics* 204:1-30, 1989. 16
- [78] B.I. Shraiman and E.D. Siggia. Heat transport in high-Rayleigh-number convection. *Physical Review A* 42:3650-3653, 1990.
- [79] Z.-S. She. On the scaling laws of thermal turbulent convection. *Physics of Fluids A* 1:(6) 911-913, 1989.

- [80] V. Yakhot. 4/5 Kolmogorov law for statistically stationary turbulence: application to high-rayleigh number Benard convection. *Physical Review Letters* 69:(5) 769-771, 1992.
- [81] R.H. Kraichnan. Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number. *Physics of Fluids* 5:1374-1389, 1962.
- [82] E.D. Siggia. High Rayleigh number convection. *Annual Review of Fluid Mechanics* 26:137-168, 1994.
- [83] P. Constantin, C. R. Doering, Heat transfer in convective turbulence. *Nonlinearity* 9:1049-1060, 1996.
- [84] P. Constantin. Variational Bounds in Turbulent Convection. *Nonlinear partial differential equations* (Evanston, IL, 1998), 77-88, *Contemp. Math.*, 238. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [85] P. Constantin, C. Hallstrom, and V. Putkaradze. Heat transport in rotating convection, *Physica D.* 125: 275-284, 1999.
- [86] C. Doering, P. Constantin, On upper bounds for infinite Prandtl number convection with or without rotation, preprint 2000.
- [87] P. Constantin, C. Doering. Infinite Prandtl number convection. *Journal of Statistical Physics* 94:(1-2) 159-172, 1999.