N° d'ordre : 04/2012-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Agèbre et Théorie des Nombres.

Par : YADJEL Makhlouf

THÈME

SUR LA SECONDE CONJECTURE DE HARDY-LITTLEWOOD.

Soutenu publiquement le 30/09/2012, devant le jury composé de :

M.	A. AIDER	Professeur,	à l'U.S.T.H.B	Président
M.	M. O. HERNANE	Professeur,	à l'U.S.T.H.B	Directeur de mémoire
M.	M. S . HACHAICHI	Maître de Conférences/A,	à l'U.S.T.H.B	Examinateur
M.	M. ZITOUNI	Professeur,	à l'U.S.T.H.B	Examinateur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur Méziane AIDER, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.
Que Monsieur le Professeur Mohamed ZITOUNI, qui accepté de faire partie du jury de ma soutenance en tant qu'examinateur, trouve ici mes remerciements les plus sincères.
Je remercie vivement Monsieur Mohamed Salah HACHAICHI, d'avoir accepté d'examiner ce travail, en consacrant son temps à lire ce mémoire.
Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes remerciements à mon Directeur de mémoire, le Professeur Mohand Ouamar HERNANE, mon directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé.
Je lui suis également reconnaissant pour ses conseils, son aide scientifique, sa disponibilité et ses encouragements.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, à ma femme et ma fille Hafsa, ainsi qu'au reste de la famille, en particulier mon frère Abdelhafid sans oublier mes amis, en particulier mon cher ami Ouyahia Tarek et tous ce qui ont contribué, de près ou de loin à ma formation.

Notations

Dans ce mémoire, les notations suivantes sont utilisées.

. p : désigne un nombre premier.

. k désigne un entier positif et p_k le k-ième nombre premier tel que $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$

. log : désigne le logaritme Népérien.

. $\log_k$:désigne le k-ième itéré du logarithme népérien. On a $\log_k = \underbrace{\log \circ \log \cdots \circ \log}_{k \text{ fois}}$.

. $\theta(x)$: désigne la fonction de Chebyshev définie par :

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

. $\psi(x)$: désigne la fonction de Chebyshev définie par :

$$\psi(x) = \sum_{p^\nu \leq x} \log p.$$

. $\pi(x)$: désigne le nombre de nombres premiers plus petits que x, on a :

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

. Li : désigne le logarithme intégral. On a :

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t} \right) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + Li(2) \quad \text{où } Li(2) = 1.045\ldots,$$

. $\Lambda(n)$: désigne la fonction de Mangoldt .

. $\zeta(s)$: désigne la fonction zêta de Riemann.

Pour deux fonctions réelles f et g,

- $f(x) \sim g(x)$: signifie f est asymptotiquement équivalente à g, on a :

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- $f(x) = o(g(x))$: signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, 'il existe un nombre réel x_0, tel que,

$$\forall x \geq x_0,\ |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

Autrement dit, on a :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0,$$

- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$: signifie qu'il existe deux constantes x_0 et $C > 0$, tel que

$$\forall x \geq x_0,\ \ |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Table des matières

Introduction

0.1 Introduction

Soit $\pi(x)$ la fonction qui compte le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, et $\psi(x)$, $\vartheta(x)$ les fonctions de Chebyshev. On désigne par p_k le k-ième nombre premier.
Dans ce mémoire, nous étudions la propriété de sous-additivité de la fonction $\pi(x)$, c'est-à-dire :

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y) \quad \text{pour} \quad x \ \ et \ \ y \quad \text{entiers} \quad \geq 2. \tag{0.1.1}$$

Nous reprenons et nous détaillons les résultats de deux auteurs à savoir : S. L. Segal (cf. [31]) et P. Dusart (cf. [13] et [11])

Ce présent mémoire est constitué de trois chapitres.
Dans le premier, nous avons rappelé d'abord quelques notions de la théorie des nombres premiers : les définitions des fonctions de Chebyshev $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$, la définition de la fonction $\pi(x)$, la définition de la fonction $\zeta(s)$ ainsi que les formules de sommation d'Abel et d'Euler et quelques outils mathématiques indispensables pour notre travail, tels que : Le logarithme intégral $\mathrm{Li}(x)$, l' intégrale de Stieltjes et l'hypothèse de Riemann .
Nous avons rappelé aussi quelques résultats fondamentaux concernant les estimations et encadrements des fonctions $\psi(x)$, $\vartheta(x)$, $\pi(x)$ et p_k.

Nous avons consacré le deuxième chapitre de ce mémoire à l'étude du comportement asymptotique de la fonction $\pi(x)$ sous diverses hypothèses.
En utilisant le théorème des nombres premiers ou l'une de ses formes équivalentes, nous avons étudié quelques questions relatives à l'estimation de $\pi(x)$ telles que : le postulat de Bertrand, la différence $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ et la conjecture de Mandl.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'inégalité,

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y) \quad \text{pour } x \ et \ y \quad \text{entiers } \geq 2.$$

Dans son article (cf.[31]), S. L. Segal affirme qu'elle est vérifiée pour x, y tels que $x + y \leq 101081$.
Nous reprenons et exposons les résultats de celui-ci.

0.1. Introduction

P. Dusart a, dans (cf. [13] et [11]), en reprenant la formulation équivalente de la conjecture de Hardy-Littlewood, donnée par S. L. Segal, montré que cette conjecture est vérifiée pour tout x et tout y tels que $2 \leq x \leq y \leq \frac{7}{5} \log x \log_2 x$.
Nous avons repris et détaillé les démonstrations de certains de ses résultats.

Notons que pour vérifier la véracité de certaines inégalités, le recours à l'outil informatique nous a été indispensable. Nous avons utilisé le logiciel Maple.
Enfin nous terminons cette étude par une conclusion, une annexe où sont données les procédures que nous avons utilisées pour les calculs numériques et une bibliographie.

Chapitre 1

Rappels de quelques définitions et résultats fondamentaux.

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous rappelons essentiellement quelques définitions et résultats fondamentaux qui seront utiles à notre étude. D'abord, nous définissons les fonctions de Chebyshev $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$, ensuite la fonction $\pi(x)$ qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x. Nous présentons également les résultats de Rosser et Schoenfeld qui ont donné dans (cf. [26], [27] et [29]) des estimations des fonctions $\psi(x)$, $\vartheta(x)$, $\pi(x)$ et du $k-$ième nombre premier p_k, puis améliorées par G. Robin (cf. [24]), J. P. Massias (cf. [20]) et Pereira [10]. Cependant, ces estimations de la fonction ψ, sont obtenues sous l'hypothèse de Riemann. P. Dusart a, dans [13], repris et amélioré ces résultats sans supposer l'hypothèse de Riemann. Par suite, il a donné des estimations explicites de $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$, en particulier, il a montré que,

$$|\psi(x) - x| < 10^{-6}x, \quad \text{pour } x \geq \exp(50)$$

et

$$|\vartheta(x) - x| \leq 3,965\frac{x}{\log^2 x}, \quad \text{pour } x > 1.$$

Ainsi, il en également déduit de nouvelles estimations pour $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$.

Dans cette partie, nous rappelons d'abord quelques notions de la théorie des nombres premiers : les définitions des fonctions de Chebyshev $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$, la définition de la fonction $\pi(x)$, la définition de la fonction $\zeta(s)$ ainsi que les formules de sommation d'Abel et d'Euler et quelques outils mathématiques indispensables pour notre travail, tels que : Le logarithme intégral $\mathrm{Li}(x)$, l' intégrale de Stieltjes et l'hypothèse de Riemann .
Nous avons rappelé aussi quelques résultats fondamentaux concernant les estimations et encadrements des fonctions $\psi(x)$, $\vartheta(x)$, $\pi(x)$ et p_k.

Des définitions supplémentaires concernant quelques outils mathématiques utilisés dans ce mémoire ont été également présentées.

1.2 Définitions et généralités :

1.2.1 Diverses définitions :

Définition 1.2.1. On appelle fonction arithmétique, une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.2 La fonction de Von Mangoldt notée Λ, est la fonction arithmétique définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\alpha, \text{ pour } p \text{ premier et } \alpha \geq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Les fonctions ϑ et ψ de Chybeshev :

Définition 1.2.3 La fonction ϑ de Chebyshev est définie pour $x > 0$ par :

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \quad \text{p, premier} \tag{1.2.2}$$

Définition 1.2.4 La fonction ψ de Chebyshev est définie pour $x > 0$ par :

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n). \tag{1.2.3}$$

Relations :
La fonction $\psi(x)$, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\psi(x) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{p \leq x^{\frac{1}{\alpha}}} \log p. \tag{1.2.4}$$

De plus, les fonctions ϑ et ψ de Chebyshev, sont liées par la relation,

Proposition 1.2.1. Pour $x > 0$, on a :

$$\psi(x) = \sum_{\alpha \leq \frac{\log x}{\log 2}} \vartheta(x^{\frac{1}{\alpha}}). \tag{1.2.5}$$

Preuve :(cf. [34])

La fonction π de comptage des nombres premiers :

Définition 1.2.5. Soit x un nombre réel strictement positif.
On désigne par $\pi(x)$ la fonction qui compte le nombre de nombres premiers n'excédant pas x, on a :

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \quad \text{où } p \quad \text{est un nombre premier.} \tag{1.2.6}$$

Exemple : Si on désigne par $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots, p_n$ le n-ième nombre premier, on a alors, $\pi(p_n) = n$.

1.2.2 Formules sommatoires-méthodes de sommation :

Formules de sommation d'Abel et d'Euler :

La formule de sommation d'Abel est un procédé simple et efficace pour le calcul des sommes arithmétiques. Rappelons ici deux procédés de sommation que nous seront utiles.

Théorème 1.2.1 (Identité d'Abel)
Soient x, y deux nombres réels tels que $0 < y < x$ et $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. On pose :

$$A(t) = \sum_{n \leq t} \alpha_n, \quad t > 0 \qquad (A(t) = 0, \quad \text{si} \quad 0 < t < 1).$$

Alors pour toute fonction f de classe C^1 sur $[y, x]$, on a :

$$\sum_{y \leq n \leq x} \alpha_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt. \tag{1.2.7}$$

Preuve :(cf. [34]).
En prenant $\alpha(n) = 1$ dans le théorème 1.6.1 on obtient,

Théorème 1.2.2 (Identité d'Euler)
Soient x, y deux nombres réels tels que $0 < y < x$, et f une fonction de classe C^1 sur $[y, x]$ alors,

$$\sum_{y \leq n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t - [t])f'(t)dt + (y - [y])f(y) - (x - [x])f(x).$$

Preuve : (cf. [34]).

Exemple : calcul des sommes $\sum_{p\leq x} f(p)$.
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[2,+\infty[$.

On a :

$$\sum_{p\leq x} f(p) = \pi(x)f(x) - \int_2^x f'(t)\pi(t)dt.$$

Intégrales de Stieltjes

Définition 1.2.6 (cf.[36])
Soient $a < b$ deux nombres réels et $\{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$. Soient f une fonction continue et g à variations bornées sur l'intervalle $[a,b]$.
L'intégrale de Stieltjes de la fonction f par rapport à g, de a à b est,

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left(g(x_{k+1}) - g(x_k)\right)$$

où $\Delta = \max_{1\leq k\leq n} |x_k - x_{k-1}|$ et $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Proposition 1.2.2 (cf.[21])
Soit E un ensemble de nombres réels tel que, pour tout t réel, $E\cap]-\infty,t]$ est vide ou fini. Soit g une fonction réelle ou complexe définie sur E et soit

$$G(t) = \sum_{u\in E,\, u\leq t} g(u).$$

Si F est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$, on a

$$\sum_{u\in E,\, a<u\leq b} F(u)g(u) = \int_a^b F(t)dG(t) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(t)F'(t).$$

Preuve : (cf. [34]).

1.2.3 Le logarithme intégral Li.

Définition 1.2.8
La fonction logarithme intégral est définie pour $x > 0$, par :

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t}\right).$$

1.2.4 Hypothèse de Riemann

L'hypothèse de Riemann est une conjecture formulée en 1859, par le Mathématicien Bernhard Riemann. Il a conjecturé que tous les zéros non triviaux de la fonction zêta de riemann $\zeta(s)$ sont situés sur la droite $Re(s) = \frac{1}{2}$.

autrement dit on a,

$$\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0 \quad \text{où } t \quad \text{est un nombre réel}$$

Cette conjecture possède des conséquences importantes en théorie analytique des nombres. Plusieurs résultats dûs à Schoenfeld (cf. [29]) sont démontrés sous cette hypothèse.

1.2.5 Le théorème des nombres premiers :

Le théorème des nombres premiers, s'énonce comme suit :

Théorème 1.2.3
Pour x assez grand on a,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Preuve :(cf. [34]).

Relation entre les fonctions $\vartheta(x)$ et $\pi(x)$.

Les deux fonctions $\vartheta(x)$ et $\pi(x)$ sont des fonctions en escalier ; $\pi(x)$ ayant un saut égal à 1, alors que $\vartheta(x)$ un saut de $\log p$ sur chaque intevalle contenant un nombre premier p. Les sommes impliquant des fonctions en escalier de ce type peuvent être exprimées sous formes d'intégrales grâce à la formule de sommation d'Abel par exemple. On a :

Théorème 1.2.4 Pour $x \geq 2$ on a,

$$\vartheta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt. \tag{1.2.8}$$

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt \tag{1.2.9}$$

Preuve : (cf.[34])

Formes équivalentes du théorème des nombres premiers :

Théorème 1.2.5 Les relations suivantes sont equivalentes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\,\log x}{x} = 1. \tag{1.2.10}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1. \tag{1.2.11}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \tag{1.2.12}$$

Preuve : (cf.[34])

1.3 Estimations de $\psi(x)$, $\vartheta(x)$, $\pi(x)$ et p_k

Dans ce qui suit nous rappelons quelques résultats sur les estimations des fonctions $\psi(x)$, $\vartheta(x)$, $\pi(x)$ ainsi que queqlues encadrements de $\vartheta(p_k)$ et de p_k.

1.3.1 Estimations de $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$:

L. Schoenfeld (cf.[29]) a montré que,

Proposition 1.3.1. Pour $x > 1,04 \cdot 10^7$. On a :

$$|\psi(x) - x| < 0,0077629 \cdot \frac{x}{\log x}, \tag{1.3.13}$$

$$|\vartheta(x) - x| < 0,0077629 \cdot \frac{x}{\log x}. \tag{1.3.14}$$

Preuve : (cf. [29])

Dans (cf. [13]), P. Dusart a démontré les résultats suivants, améliorant ainsi ceux de L. Schoenfeld (cf. [29]) :

Proposition 1.3.2.

$$|\psi(x) - x| \leq 0,006409 \cdot \frac{x}{\log x} \quad \text{pour} \quad x \geq \exp(22), \tag{1.3.15}$$

$$|\vartheta(x) - x| \leq 0,006788 \cdot \frac{x}{\log x} \quad \text{pour} \quad x \geq 10544111, \tag{1.3.16}$$

$$|\vartheta(x) - x| \leq 3,965 \cdot \frac{x}{\log^2 x} \quad \text{pour} \quad x > 1, \tag{1.3.17}$$

$$|\vartheta(x) - x| \leq 515 \cdot \frac{x}{\log^3 x} \quad \text{pour} \quad x > 1, \tag{1.3.18}$$

$$|\vartheta(x) - x| \leq 1717433 \cdot \frac{x}{\log^4 x} \quad \text{pour} \quad x > 1. \tag{1.3.19}$$

Preuve : (cf. [13]).

1.3.2 Estimations de $\pi(x)$

Concernant les estimations de $\pi(x)$, J. B. Rosser et L. Schoenfeld ont montré en 1962, (cf.[26]) que :

Proposition 1.3.3. Pour $x \geq 59$, on a :

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{2\log x}\right) \tag{1.3.20}$$

et que pour $x > 1$,

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{3}{2\log x}\right) \tag{1.3.21}$$

Preuve :(cf. [26])

Des encadrements plus précis pour $\pi(x)$ ont été trouvés par P. Dusart (cf.[13]), nous les exposerons en détail au chapitre 2

1.3.3 Estimations de $\vartheta(p_k)$ et p_k.

Les estimations suivantes de p_k et $\vartheta(p_k)$, sont dûes à J. P. Massias et G. Robin (cf.[20]) :
Théorème 1.3.1. Sous l'hypothèse de Riemann on a :

$$\begin{aligned} p_k &\geq k\left(\log k + \log_2 k - 1\right) && \text{pour} \quad k \geq 2, && (1.3.22)\\ p_k &\leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 1,8}{\log k}\right) && \text{pour} \quad k \geq 27076, && (1.3.23)\end{aligned}$$

Et sans supposer l'hypothèse de Riemann vraie, ils ont établi les résultats suivants :

Théorème 1.3.2. on a :

$$\begin{aligned} \vartheta(p_k) &\geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,1}{\log k}\right) && \text{pour} \quad k \geq 495634, && (1.3.24)\\ \vartheta(p_k) &\leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k}\right) && \text{pour} \quad k \geq 198, && (1.3.25)\\ p_k &\geq k\left(\log k + \log_2 k - 1,002872\right) && \text{pour} \quad k \geq 2, && (1.3.26)\\ p_k &\leq k\left(\log k + \log_2 k - 0,9427\right) && \text{pour} \quad k \geq 15985, && (1.3.27)\\ p_k &\geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + 1,8\frac{\log_2 k}{\log k}\right) && \text{pour} \quad k \geq 13. && (1.3.28)\end{aligned}$$

Preuve :(cf. [20])

1.3.4 Estimations plus précises de $\vartheta(p_k)$ et p_k

Estimations de p_k et $\vartheta(p_k)$

P. Dusart a montré les résultats suivants plus précis pour p_k et $\vartheta(p_k)$:

Théorème 1.3.3.

$$
\begin{aligned}
p_k &\geq k(\log k + \log_2 k - 1) && \text{pour} \quad k \geq 2, && (1.3.29)\\
p_k &\geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,25}{\log k}\right) && \text{pour } k \geq 2, && (1.3.30)\\
p_k &\leq (\log k + \log_2 k - 0,9484) && \text{pour } \ k \geq 39017, && (1.3.31)\\
p_k &\leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 1,8}{\log k}\right) && \text{pour } k \geq 27076, && (1.3.32)\\
\vartheta(p_k) &\geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,0553}{\log k}\right) && \text{pour } k \geq e^{22}, && (1.3.33)\\
\vartheta(p_k) &\leq k\left(\log k + \log_2 k - 1\frac{\log_2 k - 2}{\log k}\right) && \text{pour } k \geq 198, && (1.3.34)
\end{aligned}
$$

Preuve :(cf. [11])
La preuve est technique, nous ne la détaillons pas ici, cela n'est pas l'objet de notre étude, cependant, nous avons besoin de ces encadrements pour la suite du travail.

1.3.5 Quelques résultats sur $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$

Dans ce qui suit nous récapitulons quelques résultats sur les encadrements des fonctions $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$.

Proposition 1.3.4. On a,

$$
\begin{aligned}
\vartheta(x) &\leq \psi(x) && \text{pour} \quad x > 0, && (1.3.35)\\
\psi(x) - \vartheta(x) &< \sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{x} && \text{pour} \quad 10^8 \leq x \leq 10^{16}, && (1.3.36)\\
\psi(x) - \vartheta(x) &< 1,43\sqrt{x} && \text{pour} \quad x > 0, && (1.3.37)\\
\vartheta(x) &< x && \text{pour} \quad 0 < x \leq 10^{11}, && (1.3.38)\\
\vartheta(x) &< 1,000081x && \text{pour} \quad x > 0, && (1.3.39)\\
|\vartheta(x) - x| &< 0,0077629\frac{x}{\log x} && \text{pour} \quad x > 1,04.10^7. && (1.3.40)
\end{aligned}
$$

Preuve :(cf. [13])

1.3.6 Les résultats de P. Dusart sur $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$

Le théorème des nombres premiers équivaut au résultat suivant :

Théorème 1.3.4
Soit b un nombre réel positif. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$|\psi(x) - x| \leq \varepsilon x \quad \text{pour} \quad x \geq \exp(b) \tag{1.3.41}$$

Preuve :(cf. [13])

Comme conséquence de ce théorème, P. Dusart a prouvé que l'on a (cf. [13]),

Corollaire 1.3.1 Pour $x \geq \exp(50)$, on a :

$$|\psi(x) - x| \leq 0,905\ 10^{-7}x \tag{1.3.42}$$

Preuve :(cf. [13])

Théorème 1.3.5

$$\begin{aligned} |\psi(x) - x| &\leq 0,006409 \cdot \frac{x}{\log x} \qquad \text{pour} \quad x \geq \exp(22), & (1.3.43) \\ |\vartheta(x) - x| &\leq 0,006788 \cdot \frac{x}{\log x} \qquad \text{pour} \quad x \geq 10\,544\,111. & (1.3.44) \end{aligned}$$

Preuve :(cf. [13]).

Le théorème 1.3.5 donne des estimations des fonctions $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$ à l'ordre 1 pour la puissance du logarithme. Mais la connaissance des estimations de ces fonctions aux ordres suivants est souvent nécessaire. Le théorème suivant constitue une importante amélioration des résultats de J. B. Rosser et L. Schoenfeld.

Théorème 1.3.6 Posons $\eta_2 = 3,965$, $\eta_3 = 515$, $\eta_4 = 1717433$.
Pour $x > 1$ et k entier ≥ 2, on a

$$|\vartheta(x) - x| \leq \eta_k \cdot \frac{x}{\log^k x}. \tag{1.3.45}$$

(On peut aussi choisir $\eta_2 = 0,2$ pour $x \geq 3594641$.)
Preuve :(cf. [13]).

Notons, que les résultats exposés dans ce premier chapitre, ont été choisis pour leurs applications directes ou indirectes dans ce qui va suivre.

Chapitre 2

Estimations de la fonction $\pi(x)$

2.1 Introduction

Nous avons consacré ce chapitre à l'étude du comportement asymptotique de la fonction $\pi(x)$ sous diverses hypothèses.
En utilisant le théorème des nombres premiers ou l'une de ses formes équivalentes, nous avons étudié quelques questions relatives à l'estimation de $\pi(x)$ telles que : le postulat de Bertrand, la différence $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ et la conjecture de Mandl, dont nous détaillerons la démonstration donnée par P. Dusart ([13]).

2.2 Le théorème des nombres premiers.

Rappelons ici, vu son importance, le théorème des nombres premiers et quelques conséquences de celui-ci.
Pour un nombre réel strictement positif x, la fonction $\pi(x)$ compte le nombre de nombres premiers n'excédant pas x.
On a :

$$\pi(x) = Card \{p\, premier;\ p \leq x\}.$$

Théorème 2.2.1 (Théorème des nombres premiers) :
On a :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

Preuve :(cf. [34]).

Comportement asymptotique de $\pi(x)$: On a,

Théorème 2.2.2
Pour x assez grand on a,

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\right).$$

La fonction logarithme intégral, joue un rôle important en théorie des nombres ; reprenons la définition exposée au chapitre 1 de ce mémoire.
La fonction logarithme intégral est définie pour $x > 0$, par :
$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^{x} \frac{dt}{\log t} \right) \quad \text{et} \quad li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$
Ces deux fonctions ont même dérivée, donc $li(x) = \mathrm{Li}(x) - C$. Pour $x = 2$, on a $li(2) = 0$, d'où $C = \mathrm{Li}(2)$. On a donc, $li(x) = \mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(2)$.
de plus on a :

Théorème 2.2.3 On a,
$$\mathrm{Li}(x) \sim li(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \pi(x) \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$
Preuve :(cf.[15]).

le développement asymptotique de $\pi(x)$ est donné par la formule donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2.4 Pour tout entier $r \geq 1$, on a,
$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \cdots + \frac{(r-1)!x}{\log^r x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^{r+1} x}\right), \quad x \to +\infty.$$
Preuve :(cf. [15]).

2.3 Quelques résultats sur la fonction $\pi(x)$:

Dans ce paragraphe nous présentons quelques résultats sur $\pi(x)$, plus précis que les estimations données par Chebyshev et J. B. Rosser et L. Schoenfeld [26] :

Proposition 2.3.1.
$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) \quad \text{pour } x > 599, \tag{2.3.1}$$
$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1,0992}{\log x}\right) \quad \text{pour } x \geq 1,332.10^{10}, \tag{2.3.2}$$
$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1,2762}{\log x}\right) \quad \text{pour } x > 1, \tag{2.3.3}$$
$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{1,8}{\log^2 x}\right) \quad \text{pour } x \geq 32299, \tag{2.3.4}$$
$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2,51}{\log^2 x}\right) \quad \text{pour } x \geq 355991, \tag{2.3.5}$$
Preuve : La preuve de ces résultats se trouve dans (cf.[13]).

2.4 Intervalle contenant un nombre premier.

2.4.1 Postulat de Bertrand

Chebyshev a montré en 1852, que :

$$0,92\frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1,11\frac{x}{\log x} \quad \text{pour} \quad x \geq 30 \tag{2.4.6}$$

En utilisant cet encadrement, il a montré un résultat liée à la fonction $\pi(x)$, appelée postulat de Bertrand :
Postulat de Bertrand :
Pour $x > 1$, chaque intervalle $]x, 2x[$ contient au moins un nombre premier p.

Nous citons deux améliorations de ce résultat.
L. Schoenfeld a amélioré ce réultat en montrant que :

Théorème 2.4.1.
Pour tout $x \geq 2010759$, il existe un nombre premier p tel que

$$x < p \leq x\left(1 + \frac{1}{16597}\right).$$

Preuve :(cf.[29])

Dans (cf.[13]) P. Dusart, a amélioré sensiblement ce dernier résultat, il a prouvé que :

Théorème 2.4.2.
Pour tout $x \geq 3275$, il existe un nombre premier p tel que

$$x < p \leq x\left(1 + \frac{1}{2\log^2 x}\right).$$

preuve.(cf.[13]).

2.4.2 Etude de la différence $\pi(x) - \mathbf{Li}(x)$

L. Schoenfeld, (cf.[29]), a montré que, **sous l'hypothèse de Riemann** on a :

Théorème 2.4.3. Pour $x \geq 2657$, on a,

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log x.$$

Preuve :(cf.[29]). Elle repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.4.1. On a :

$$|\vartheta(x) - x| \leq \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log^2 x$$

Dans (cf.[13]), P. Dusart a prouvé **sans l'hypothèse de Riemann** que :

Théorème 2.4.4. Pour $x \geq 59$, on a :

$$|\pi(x) - Li(x)| < 2K \frac{x}{\log^{\frac{3}{4}} x} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\log x}{R}}\right).$$

avec $R = 9,645908801$ et $K = \frac{\sqrt{\frac{8}{17\pi}}}{R^{\frac{1}{4}}} \approx 0,2196$.

Preuve : La preuve se trouve dans (cf.[13])
Elle repose essentiellement sur le résultat suivant qui est dû à L. Schoenfeld (cf.[29]) :

Théorème 2.4.5. Il existe une constante positive R tel que pour $x \geq 100$, on ait :

$$|\vartheta(x) - x| < x\sqrt{\frac{8}{17\pi}} \left(\frac{\log x}{R}\right)^{1/4} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\log x}{R}}\right)$$

Preuve :(cf.[29]).

2.5 L'inégalité $p_{ab} < ap_b + bp_a$

Le résultat qui suit, est important pour la suite de notre étude.

Théorème 2.5.1. Pour tous entiers $a, b \geq 91$, on a,

$$p_{ab} \leq ap_b + bp_a. \tag{2.5.7}$$

Preuve :
La preuve se trouve dans ([13]), nous la détaillons ici.

Proposition 2.5.1.
Pour $a \geq 2$ et $b \geq 2$, ou pour $b = 1$ et $a \geq 5$, on a :

$$p_{ab} > ap_b.$$

Pour la preuve de cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.5.1.(cf.[26])

$$p_k \leq k\left(\log k + \log_2 k - \beta\right) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad k \geq 20, \tag{2.5.8}$$

$$p_k \geq k\left(\log k + \log_2 k - \alpha\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 \quad \text{pour} \quad k \geq 2, \tag{2.5.9}$$

Preuve :(cf. [26] et [13]).

Preuve de la proposition :
Grâce à la majoration (2.5.9) on a,

$$p_{ab} \geq ab\left(\log ab + \log_2 ab - \alpha\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 \quad \text{pour} \quad ab \geq 2,$$

et par (2.5.8), on obtient :

$$ap_b \leq ab\left(\log b + \log_2 b - \beta\right) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{2} \text{ pour } \quad b \geq 20.$$

Posons $\Delta = p_{ab} - ap_b$.

Minoration de Δ :
Pour $a \geq 2$ et $b \geq 20$, les calculs montrent que,

$$\begin{aligned}
\Delta &= p_{ab} - ap_b \\
&\geq ab\left(\log ab + \log_2 ab - \alpha\right) - ab\left(\log b + \log_2 b - \beta\right) \\
&\geq ab\left(\log a + \beta - \alpha + \log\left(1 + \frac{\log a}{\log b}\right)\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Pour $b \leq 19$, en utilisant la vraie valeur de p_b, on obtient,

$$\begin{aligned}
\Delta &= p_{ab} - ap_b \\
&\geq a\left(b\left(\log ab + \log_2 ab - \alpha\right) - p_b\right)
\end{aligned}$$

Nous voulons $\Delta > 0$, pour cela on doit trouver, pour chaque valeur de b, la plus petite valeur de a telle que l'on ait,

$$b\left(\log ab + \log_2 ab - \alpha\right) - p_b > 0. \tag{2.5.10}$$

Nous devons donc résoudre l'inéquation à deux inconnues (2.5.10) :

Grâce à un programme écrit en Maple par P. Dusart, ([13]), nous avons déterminé la plus grande valeur de a pour laquelle l'inegalité (2.5.10) est vérifiée ; on a trouvé $a = 10$.
Nous vérifions ensuite que pour les valeurs $2 \leq a \leq 10$ et $1 \leq b \leq 19$, l'inégalité $p_{ab} > ap_b$ est vraie sauf pour $b = 1$ et $a = 2, 3, 4$.

Conclusion :
L'inégalité $p_{ab} > ap_b$ est donc vérifiée pour :
$a \geq 2$ et $b \geq 2$ ou pour $b = 1$ et $a \geq 5$.

Proposition 2.5.2
Pour tous entiers $a, b \geq 1$, on a :

$$p_{ab+2} > ap_{b+1}. \tag{2.5.11}$$

Preuve de la proposition :
Grâce au lemme 2.5.1, on obtient pour $b \geq 19$ et $a \geq 2$,

$$\begin{aligned}
p_{ab+2} - ap_{b+1} &\geq (ab+2)\left(\log(ab+2) + \log_2(ab+2) - 1\right) \\
&\quad -a(b+1)\left(\log(b+1) + \log_2(b+1) - \frac{1}{2}\right) \\
&\geq ab(\log(ab+2) - \log(b+1) + \log_2(ab+2) - \log_2(b+1) - 1 + \frac{1}{2} \\
&\quad +\frac{2}{ab}\left(\log(ab+2) + \log_2(ab+2) - 1\right) \\
&\quad -\frac{1}{b}\left(\log(b+1) + \log_2(b+1) - \frac{1}{2}\right) \\
&\geq ab(\log 2 + \log(1 + \frac{\log 2}{\log(b+1)}) - 1 + \frac{1}{2} \\
&\quad -\frac{1}{b}\left(\log(b+1) + \log_2(b+1) - \frac{1}{2}\right) > 0
\end{aligned}$$

Donc l'inégalité (2.5.11) est bien vèrifiée pour $b \geq 19$.
Examinons le cas $b \leq 18$.
À l'aide du même rasisonnement que précédemment on obtient :

$$\begin{aligned}
p_{ab+2} - ap_{b+1} &\geq (ab+2)\left(\log(ab+2) + \log_2(ab+2) - 1\right) - ap_{b+1} \\
&\geq a\left(b\left(\log(ab+2) + \log_2(ab+2) - 1\right) - p_{b+1}\right) \\
&\quad +2\left(\log(ab+2) + \log_2(ab+2) - 1\right) \\
&\geq a\left(b\left(\log(ab+2) + \log_2(ab+2) - 1\right) - p_{b+1}\right)
\end{aligned}$$

Pour chaque valeur fixée de b, $1 \leq b \leq 18$, nous calculons la valeur correspondante de a, les calculs donnent 17, comme plus grande valeur de a pour laquelle on a,
$a\left(b\left(\log(ab+2) + \log_2(ab+2) - 1\right) - p_{b+1}\right) > 0$, c'eat-à-dire : $p_{ab+2} - ap_{b+1} > 0$.
Nous complétons ensuite la preuve, en la vérifiant à l'ordinateur pour $b \in \{1, 2, \ldots, 18\}$ et $a \in \{1, 2, \ldots, 16\}$

Proposition 2.5.3
Pour tous entiers $a, b \geq 1$, on a :

$$\frac{ap_{b+1} + bp_{a+1}}{2} < p_{ab+2}.$$

Preuve :(cf.[13])
Grâce à la proposition 2.5.2, et en exploitant la symétrie, on peut écrire,
$p_{ab+2} > ap_{b+1}$ et $p_{ab+2} > bp_{a+1}$.
D'où l'on déduit,

$$2p_{ab+2} > ap_{b+1} + bp_{a+1}.$$

Preuve du théorème 2.5.1 :
Enonçons d'abord le résultat préliminaire suivant :

Lemme 2.5.2.

$$p_k \leq k\left(\log k + \log_2 k - \beta\right) \quad \text{avec} \beta = 0,9385 \text{ pour } k \geq 7022, \tag{2.5.12}$$

$$p_k \geq k\left(\log k + \log_2 k - \alpha\right) \quad \text{avec } \alpha = 1,0072629 \text{ pour } k \geq 2, \tag{2.5.13}$$

Preuve :(cf. [24]).

Grâce à la majoration (2.5.12) on a,

$$p_{ab} \leq ab\left(\log ab + \log_2 ab - \beta\right),$$

et par (2.5.13), on obtient :

$$ap_b + bp_a \geq a\left[b(\log b + \log_2 b - \alpha)\right] + b\left[a(\log a + \log_2 a - \alpha)\right].$$

Posons :

$$A = ab\left(\log ab + \log_2 ab - \beta\right),$$

et

$$B = a\left[b(\log b + \log_2 b - \alpha)\right] + b\left[a(\log a + \log_2 a - \alpha)\right].$$

Alors l'inégalité $p_{ab} < ap_b + bp_a$ est équivalente à montrer que l'on a $A \leq B$, autrement dit, nous devons montrer l'inégalité :

$$\log_2 ab - \beta \leq \log_2 a + \log_2 b - 2\alpha. \tag{2.5.14}$$

On pose, $F(a,b) := A - B$.
On a quatre cas à discuter :

Premier cas : $a = b$

Dans ce cas, l'inégalité (2.5.14) s'écrtit,

$$\log_2(a^2) - \beta \leq 2\ \log_2 a - 2\alpha. \tag{2.5.15}$$

L'inégalité (2.5.15) est équivalente à :

$$\log_2(a) \geq \log 2 + 2\alpha - \beta. \tag{2.5.16}$$

d'où l'on déduit que $a \geq \exp(\exp(\log 2 + 2\alpha - \beta)$.
Avec les valeurs de α et β données dans le lemme 2.6.2, on obtient, $a \geq 352, \cdots$.
Par conséquent l'inégalité (2.5.16) est vérifiée pour $a \geq 352, \cdots$.
Ainsi, pour $a = b = 353$, on a $F(a,b) \leq 0$ et l'inégalité (2.5.14) est vérifiée.
Les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)$ et $\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)$ sont négatives pour $a \geq 3$ et $b \geq 3$; de plus si a ou b croît alors $F(a,b)$ décroît. Par conséquent, pour $a \geq 353$ et $b \geq 353$,
$F(a,b) \leq F(353, 353) \leq 0$. Donc l'inégalité (2.5.14) est vérifiée pour $a \geq 353$ et $b \geq 353$. Les hypothèses du lemme 2.5.2, sont vérifiées puisque on a $ab \geq (353)^2 \geq 7022$.

Deuxième cas : $a < 353$ et b quelconque.

En prenant $k = ab$ et $k = b$ respectivement dans les inégalités (2.5.12) et (2.5.13) du lemme 2.5.2, on obtient :

$$p_{ab} \leq ab \left(\log ab + \log_2(ab) - \beta\right), \tag{2.5.17}$$

et,

$$p_b \geq b \left(\log b + \log_2 b - \alpha\right), \tag{2.5.18}$$

Les relations (2.5.17) et (2.5.18) impliquent,

$$\begin{aligned} p_{ab} - (a\,p_b + b\,p_a) &= ab\left(\log(ab) + \log_2(ab) - \beta\right) - ab\left(\log(b) + \log_2(b) - \alpha\right) - b\,p_a \\ &= ab\left[\log a + \log b + \log\left(\log a + \log b\right) - \log b + (-\beta + \alpha)\right] - bp_a \\ &= ab\left[\log a + \log\left(1 + \frac{\log a}{\log b}\right) + (-\beta + \alpha)\right] - bp_a \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

Comme l'inégalité (2.5.7) est équivalente à $p_{ab} - a\,p_b - b\,p_a < 0$, il suffit donc de montrer que le second membre de(2.5.19) est négaltif.
Or, on a

$$a\left[\log a + \log\left(1 + \frac{\log a}{\log b}\right) + (\beta - \alpha)\right] \leq p_a$$

si et seulement si,

$$\frac{\log a}{\log b} \leq \exp\left(\frac{p_a}{a} + (\beta - \alpha) - \log a\right) - 1,$$

d'où l'on tire,

$$b \geq \exp\left(\frac{\log a}{\exp\left(\frac{p_a}{a} + (\beta - \alpha) - \log a\right) - 1}\right) =: C(a).$$

Mais, pour que l'inégalité (2.5.7) soit vraie, il faut que $k = ab \geq 7022$.
Par conséquent, la relation (2.5.7) est vérifiée pour

$$b \geq \left\lceil \sup\left(C(a), \frac{7022}{a}\right)\right\rceil =: D(a).$$

Il reste à caluler $D(a)$ pour les entiers a tels que $2 \leq a \leq 253$

Troisième cas :

Remarquons que l'on a $aD(a) \ll 10^6$, dans ce cas on vérifie l'inégalité grâce à un puissant ordinateur. Nous n'avons pas pu le faire. P. Dusart, affirme dans (cf.[13]) que (2.5.7) est vérifiée pour :
Pour $a \in \{4, .., 62\}$ et $b \geq 2715$,
Pour $a \in \{2, 3\} \cup \{63, .., 90\}$ avec $b \geq a$,
Pour $a > 91$ et $b > 91$.

Quatrième cas :

Pour $a = 1$, l'inégalité (2.5.7) est triviale.
Pour $b < a$, d'après le cas précédent, en permutant a et b et en tenant compte de la symétrie de la formule à vérifier, on arrive à déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'inégalité (2.5.7) est vraie.

Conclusion :

L'inégalité $p_{ab} < ap_b + bp_a$ est vérifiée pour $a > 91$ et $b > 91$.

2.6 Conjecture de Mandl

La conjecture de *Robert Mandl* a été énoncée en 1975 dans ([27]) par J. B. Rosser et L. Shoenfeld.
Dans ce qui suit, nous l'énonçons et détaillons la démonstration de ce résultat, donnée par P. Dusart dans sa thèse de Doctorat (cf.[13]) .

Théorème 2.6.1.
Pour $n \geq 9$, on a,

$$\frac{p_1 + p_2 + ... + p_n}{n} < \frac{1}{2}p_n. \tag{2.6.20}$$

Pour démontrer cette conjecture, nous aurons besoin du lemme préliminaire suivant :

Lemme 2.6.1. Pour $x \geq 11$, on a,

$$Li(x) \geq \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right).$$

Preuve du lemme :

Pour $x \geq 1$, on a,

$$Li'(x) = \frac{1}{\log x},$$

Posons :

$$f(x) = \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right),$$

alors,

$$f'(x) = \frac{1}{\log x} - \frac{2}{\log^3 x}.$$

d'où,

$$Li'(x) - f'(x) = \frac{2}{\log^3 x} > 0 \quad \text{pour } x \geq 11.$$

Comme $Li(11) > f(11)$, on en déduit que,

$$Li(x) > f(x) = \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right).$$

Lemme 2.6.2. On a pour $x \geq 2$:

$$\int_a^x \frac{u}{\log u} du = Li(x^2) - Li(a^2). \tag{2.6.21}$$

$$\int_a^x \frac{u}{\log^2 u} du = \left[2Li(u^2) - \frac{u^2}{\log u}\right]_a^x. \tag{2.6.22}$$

Preuve :

Preuve de (2.6.21) :
On a,

$$Li(x^2) - Li(a^2) = \int_{a^2}^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$

Grâce au changement de variable $u = \sqrt{t}$, on obtient,

$$\begin{aligned} Li(x^2) - Li(a^2) &= \int_{a^2}^{x^2} \frac{dt}{\log t} \\ &= \int_a^x \frac{u}{\log u} du. \end{aligned}$$

Preuve de (2.6.22) :
On a,

$$\int_a^x \frac{u}{\log^2 u} du = \int_a^x \frac{u^2}{u \log^2 u} .du \tag{2.6.23}$$

Une intégration par parties permet d'établir l'égalité (2.6.22).
En effet, on pose $f(u) = u^2$ alors $f'(u) = 2u\, du$
et
$g'(u) = \frac{1}{u \log^2 u}$, alors, $g(u) = -\frac{1}{\log u}$.
Donc,

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{u^2}{u \log^2 u} du &= [f(u)g(u)]_a^x - \int_a^x f'(u).g(u)\, du \\ &= \left[-\frac{u^2}{\log u} \right]_a^x + 2 \int_a^x \frac{u}{\log u} du \end{aligned} \tag{2.6.24}$$

Or d'après la relation (2.6.21) on a,

$$\int_a^x \frac{u\, du}{\log u} = \left[\mathrm{Li}(u^2) \right]_a^x \tag{2.6.25}$$

Les relations (2.6.23), (2.6.24) et (2.6.25) impliquent (2.6.22), ce qui complète la preuve du lemme 2.6.2.

Démonstration de la Conjecture de Mandl :

On pose :

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \quad \text{est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$f(t) = t$
On a alors,

$$\sum_{n \le t} a(n) = \sum_{p \le t} 1 = \pi(t), \tag{2.6.26}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{2 \le t \le p_n} a(t) f(t) = \sum_{2 \le t \le p_n} a(t) t. \tag{2.6.27}$$

Comme $\pi(t)$ est une fonction en escalier de saut égal à 1, la somme dans la relation (2.6.27) peut être alors explicitée grâce à l'intégrale de *Riemann-Stieltjes*, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{2 \leq t \leq p_n} a(t)f(t) = \int_2^{p_n} td(\pi(t)) \tag{2.6.28}$$

Ensuite une intégration par parties donne,

$$\int_2^{p_n} td\pi(t) = p_n\pi(p_n) - \int_2^{p_n} \pi(t)dt. \tag{2.6.29}$$

(2.6.28) et (2.6.29) impliquent qu'il suffit de montrer que,

$$\int_2^{p_n} \pi(t)dt > \frac{n}{2}p_n. \tag{2.6.30}$$

Grâce à la minoration de $\pi(t)$ suivante :

$$\pi(t) \geq \frac{t}{\log t}\left(1 + \frac{1}{\log t}\right) \quad \text{pour } t \geq 599.$$

et en utilisant le lemme 2.6.2, on obtient,

$$\begin{aligned} \int_2^{p_n} \pi(t)dt &\geq \int_2^{599} \pi(t)dt + \int_{599}^{p_n} \frac{t}{\log t}\left(1 + \frac{1}{\log t}\right) dt \\ &= \int_2^{599} \pi(t)dt + 3Li(p_n^2) - \frac{p_n^2}{\log p_n} - 3Li(599^2) + \frac{599^2}{\log 599} \end{aligned}$$

Posons,

$$C = \int_2^{599} \pi(t)dt - 3Li(599^2) + \frac{599^2}{\log 599},$$

alors le lemme 2.6.1, implique,

$$\int_2^{p_n} \pi(t)dt \geq C + \frac{p_n^2}{2\log p_n}\left(1 + \frac{3}{2\log p_n}\right) \tag{2.6.31}$$

En utilisant la minoration :

$$\frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1.3}{\log x}\right) \geq \pi(x) \quad \text{valable pour} \quad x > 1,$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
\frac{p_n^2}{2\log p_n}\left(1+\frac{3}{2\log p_n}\right) &= \frac{p_n^2}{2\log p_n}\left(1+\frac{2(1.3+0.2)}{2\log p_n}\right) \\
&= \frac{p_n^2}{2\log p_n}\left(1+\frac{1.3}{\log p_n}\right)+\frac{p_n^2\cdot 0.2}{2\log^2 p_n} \\
&> \frac{p_n}{2}\pi(p_n)+\frac{p_n}{2}\frac{599\cdot 0.2}{\log^2 599} \quad \text{pour } n \geq 109 \quad (2.6.32)
\end{aligned}$$

avec $p_{109}=599$,
et en utilisant l'identité (2.6.21), il vient,

$$\begin{aligned}
\int_2^{599}\pi(t)dt &= \sum_{i=1}^{108}\int_{p_i}^{p_{i+1}}\pi(t)dt=\sum_{i=1}^{108}\pi(t)\int_{p_i}^{p_{i+1}}dt \\
&= \sum_{i=1}^{108}\pi(p_i)\left(p_{i+1}-p_i\right)=35995 \qquad (2.6.33)
\end{aligned}$$

Les calculs numériques donnent pour C, la valeur approximative $C\approx -47,1\cdots$. Ainsi, grâce aux relations (2.6.31),(2.6.32) et (2.6.33), on conclut que pour $n\geq 109$, on a,

$$\int_2^{p_n}\pi(t)dt \geq C+\frac{p_n^2}{2\log p_n}\left(1+\frac{3}{2\log p_n}\right)>\frac{p_n}{2}\pi(p_n).$$

Pour $9\leq n\leq 109$, on vérifie à l'ordinateur que la conjecture de **Mandl** est aussi vérifiée pour ces valeurs .

Chapitre 3

Conjecture de Hardy-Littlewood

3.1 Introduction

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier la propriété de sous-additivité de la fonction $\pi(x)$, c'est-à-dire : $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$ pour x et y entiers supérieurs ou égaux à 2. Cette inégalité est connue sous le nom de la seconde conjecture d'Hardy-Littlewood. Nous étudions les travaux de S. L. Segal et P. Dusart sur cette conjecture. Pour cela, nous reprenons et détaillons essentiellement les démonstrations des résultats obtenus par P. Dusart (cf.[13]).
Nous commençons notre étude d'abord, par la présentation des résultats obtenus anciens.
Notons que les travaux de S. L. Segal (cf. [31]), constituent une référence importante, puisque c'est lui qui a donné une autre formulation équivalente à cette conjecture.
Nous détaillerons les résultats de celui-ci donnés dans (cf. [31]).
P. Dusart (cf. [11] et [13]) a repris l'idée de S. L. Segal pour démontrer un résultat intéressant sur cette conjecture.
Nous consacrons le paragraphe 3.3, aux résultats de S. L. Segal (cf. [31]) ; nous présentons son théorème (cf. [31]) qui donne une formulation équivalente à la seconde conjecture d'Hardy-Littlewood .
Nous continuons ensuite notre étude par démontrer les résultats de P. Dusart en utilisant d'abord quelques encadrements de $\pi(x)$ et la forme équivalente de la conjecture. Ensuite, nous la terminons en utilisant quelques inégalités sur les nombres premiers p_k.

3.2 La seconde conjecture de Hardy-Littlewood

Dans ce paragraphe, nous présentons la seconde conjecture de Hardy-Littlewood et nous rappelons quelques résultats antérieurs à ceux obtenus par P. Dusart.

La Seconde Conjecture de Hardy-Littlewood :
La question qui s'est posée depuis 1923 est la suivante :
A-t-on,

$$\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y) \quad \text{pour} \quad x, y \geq 2 \quad ? \tag{3.2.1}$$

Interprétation de la Seconde Conjecture de Hardy-Littlewood :

La propriété exprimée par cette conjecture est la sous-additivité de la fonction $\pi(x)$.
En effet, elle affirme qu'il n'existe pas d'intervalle de la forme $]x, x+y]$ ou $]y, y+x]$ de longueur respectivement y ou x qui soit plus dense en nombres premiers, autrement dit qui contient plus de nombres premiers que l'intervalle $]0, y]$ ou $]0, x]$ respectivement.
Aperçu sur les résultats sur la seconde conjecture de Hardy-Littlewood :

La véracité de la seconde conjecture de Hardy-Littlewood n'a pas encore été définitivement établie, mais des résultats partiels intéressants (cf. [13]) ont été prouvés depuis sa publication en 1923.

En 1901, Landau (cf. [19]) a montré que, $\pi(2x) < 2\pi(x)$ pour x assez grand. Ensuite, B. Rosser et L. Schoenfeld ont amélioré ce résultat en montrant que $\pi(2x) \leq 2\pi(x)$ pour tout $x \geq 3$ réel.

En 1958, A. Schinzel et W. Sierpinski (cf. [30]), ont montré que cette conjecture est vraie pour x ou $y \leq 132$ et A. Schinzel l'étend jusqu'à x ou $y \leq 146$.

En 1962, S. L. Segal (cf. [31]) a démontré que l'inégalité (3.2.1) est vraie pour x, y vérifiant $x+y \leq 101081$.

En 1971, C. Karanikolov (cf. [18]) a montré que pour $\varepsilon \geq \sqrt{e}-1$ et $x \geq 347$, on a,

$$\pi\left((1+\varepsilon)x\right) < (1+\varepsilon)\pi(x)$$

En 1975, Valeriu. St. Udrescu (cf. [35]) a amélioré ce résultat en montrant que pour $\forall \varepsilon \geq 0,\ \forall x,\ y \geq 17$ avec $x+y \geq 1+\exp\left(4(1+\frac{1}{\varepsilon})\right)$, on a

$$\pi(x+y) \leq (1+\epsilon)\left(\pi(x)+\pi(y)\right).$$

Dans ce chapitre nous exposerons les résulats obtenus en 1998 par P. Dusart (cf.[13]).

3.3 Formes équivalentes de la seconde conjecture de Hardy- Littlewood.

S. L. SEGAL a, dans (cf. [31]), donné une forme équivalente à l'inégalité (3.2.1) en l'exprimant à l'aide du k-ième nombre premier p_k. P. Dusart (cf. [13]) a en reprenant et exploitant cette idée, démontré un résultat équivalent à celui de S. L. Segal (cf.[31]).

3.3.1 Formulation de S. L. Segal :

Désignons par p_k le k-ième nombre premier.

Thèoréme 3.3.1 : L'inégalité,

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y). \tag{3.3.2}$$

est vraie pour tous entiers $x, y \geq 2$, si et seulement si, l'inégalité,

$$p_{n-q} + p_{q+1} - 1 \leq p_n \tag{3.3.3}$$

est vraie pour tous entiers n, q tels que $n \geq 3$ et $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$.

Preuve :(cf. [31]). Elle repose essentiellement sur les lemmes suivants :

Lemme 3.3.1 : L'inégalité,

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y),$$

n'est pas vérifiée pour certains entiers $x, y \geq 2$, si et seulement si, il existe des entiers $M \geq 2, K \geq 2$, tels que

(i) $$\pi(M+K) = \pi(M) + \pi(K),$$

(ii) $$M+K+1 \quad \text{est premier,}$$

(iii) $$M+1 \quad \text{n'est pas premier.}$$

Preuve :(cf. [31]).

Lemme 3.3.2 : L'inégalité,

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y),$$

n'est pas vraie pour certains entiers $x, y \geq 2$, si et seulement si, il existe deux entiers $M_0 \geq 2$ et $K_0 \geq 2$, tels que M_0, K_0 vérifiant (i), (ii), (iii) du lemme 3.3.1, et aussi,

(iv) $$K_0 + 1 \quad \text{est premier.}$$

Preuve :(cf. [31]).

Lemme 3.3.3 :

Soient $M_0 \geq 2$ et $K_0 \geq 2$, deux entiers vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv), alors

$$K_0 \geq M_0 + 2.$$

Preuve : (cf. [31]).

Lemme 3.3.4 : L'inégalité,

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y),$$

n'est pas vérifiée pour certains entiers $x, y \geq 2$, si et seulement si, il existe un nombre premier, p_n, et un entier q, $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$, tels que,

$$p_{n-q} + p_{q+1} - 3 \geq p_n \geq p_{n-q} + p_q + 1. \tag{3.3.4}$$

Preuve : (cf. [31]).

3.3.2 Formulation de P. Dusart

P. Dusart a, dans (cf.[11] et [13]), donné deux formulations équivalentes pour la seconde conjecture de Hardy-Littlewood.

Proposition 3.3.1 Soient k et l deux entiers ≥ 1, alors,
Les deux assertions suivantes sont équivalentes

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1}. \tag{3.3.5}$$

Pour tout $x \in [p_{k-1}, p_k[$ et tout $y \in [p_{l-1}, p_l[$,

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y). \tag{3.3.6}$$

Preuve :
D'abord, la condition (3.3.6) est nécessaire.
En effet, on a d'une part,
$p_{k-1} \leq x < p_k$ et $p_{l-1} \leq y < p_l$ implique $x + y < p_k + p_l$, donc,

$$\pi(x + y) < \pi(p_k + p_l) \leq \pi(p_k + p_l - 1). \tag{3.3.7}$$

D'autre part on a,

$$p_{k-1} \leq x \quad \text{implique} \quad \pi(p_{k-1}) \leq \pi(x), \tag{3.3.8}$$

$$p_{l-1} \leq y \quad \text{implique} \quad \pi(p_{l-1}) \leq \pi(y). \tag{3.3.9}$$

De (3.3.8) et (3.3.9) on obtient,

$$\pi(p_{k-1}) + \pi(p_{l-1}) \leq \pi(x) + \pi(y).$$

Comme $\pi(p_{k-1}) + \pi(p_{l-1}) = k + l - 2 = \pi(p_{k+l-2})$
on en déduit alors que,

$$\pi(p_{k+l-2}) \leq \pi(x) + \pi(y). \tag{3.3.10}$$

or l'hypothèse,

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1},$$

implique

$$p_k + p_l - 1 \leq p_{k+l-1} - 1$$

et

$$\pi(p_k + p_l - 1) \leq \pi(p_{k+l-1} - 1) = \pi(p_{k+l-2}).$$

Par suite, de (3.3.7) et(3.3.10), on conclut que

$$\pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y).$$

La condition (3.3.6) est suffisante.
En effet, si on choisit $x = p_k - \frac{1}{2}$ et $y = p_l - \frac{1}{2}$, alors on a,

$$\pi(x) + \pi(y) = k + l - 2 \text{ et } \pi(x + y) = \pi(p_k + p_l - 1);$$

or l'hypothèse

$$\pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y),$$

implique que

$$\pi(p_k + p_l - 1) \leq k + l - 2,$$

c'est-à-dire

$$p_k + p_l - 1 \leq p_{k+l-1} - 1,$$

ou encore

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1}.$$

Proposition 3.3.2
Soient k et l deux entiers positifs.
Alors, pour tout entier $x \in [p_{k-1}, p_k[$ et tout entier $y \in [p_{l-1}, p_l[$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$p_k + p_l - 1 \leq p_{k+l-1}. \tag{3.3.11}$$

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y). \tag{3.3.12}$$

Preuve :
La condition (3.3.11) est nécessaire.
En effet, Les inégalités $p_{k-1} \leq x < p_k$ et $p_{l-1} \leq y < p_l$ impliquent $x + y \leq p_k + p_l - 2$, c'est-à-dire,

$$\pi(x+y) \leq \pi(p_k + p_l - 2). \tag{3.3.13}$$

D'autre part la proposition 3.3.1 implique,

$$\pi(p_{k+l-2}) \leq \pi(x) + \pi(y). \tag{3.3.14}$$

Mais l'inégalité

$$p_k + p_l - 1 \leq p_{k+l-1}$$

entraine

$$p_k + p_l - 2 \leq p_{k+l-1} - 1,$$

et par suite on a,

$$\pi(p_k + p_l - 2) \leq \pi(p_{k+l-1} - 1) = \pi(p_{k+l-2}).$$

Des inégalités (3.3.13) et (3.3.14), on déduit que,

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y).$$

La condition (3.3.12) est suffisante.
En effet, si on choisit $x = p_k - 1$ et $y = p_l - 1$, alors on obtient, $\pi(x) + \pi(y) = k + l - 2$ et $\pi(x+y) = \pi(p_k + p_l - 2)$.
Comme $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$, il s'ensuit que $\pi(p_k + p_l - 2) \leq k + l - 2$ ou $p_k + p_l - 2 \leq p_{k+l-1} - 1$, ou encore que, $p_k + p_l - 1 \leq p_{k+l-1}$.

Étude de la forme équivalente dûe P. Dusart.

Dans ce paragraphe nous étudions la forme équivalente de P. Dusart pour la seconde conjecture de Hardy-Littlewood, c'est-à dire l'inégalité (3.3.5) donnée dans la proposition 3.3.1. Elle s'écrit :

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1}. \tag{3.3.15}$$

celle-ci implique l'inégalité de la proposition 3.3.2 :

$$p_k + p_l - 1 \leq p_{k+l-1}.$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.3.3 :
Pour $k, l \geq 3$ tels que $\frac{1}{109} \leq \frac{l}{k} \leq 109$, l'inégalité

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1}.$$

est vraie.

Pour la démonstration de cette proposition, nous utiliserons les deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.5
Pour $k, l \geq 39017$ tels que $\frac{1}{109} \leq \frac{l}{k} \leq 109$, on a

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1}.$$

Preuve
Nous montrerons que la différence $p_{k+l-1} - p_k - p_l$ est positive pour $k, l \geq 39017$, tels que $\frac{1}{109} \leq \frac{l}{k} \leq 109$.
Calculons et étudions donc le signe cette différence. La preuve se fait ainsi en trois étapes :

Calcul et éstimation de la différence $p_{k+l-1} - p_k - p_l$:

D'une part, en utilisant les inégalités (1.3.22) et (1.3.24) on obtient, pour $k \geq 39017$, l'encadrement de p_k suivant :

$$k(\log k + \log_2 k - \alpha) \leq p_k \leq k(\log k + \log_2 k - \beta). \tag{3.3.16}$$

où $\alpha = 1$ pour $k \geq 2$ et $\beta = 0.9484$ pour $k \geq 39017$,
D'autre part, la symétrie que présente l'inégalité (3.3.15), nous permet de choisir $l < k$ sans en restreindre la généralité.
Prenons donc $\gamma = \frac{l}{k}$.

On obtient alors,

$$\begin{aligned}
p_{k+l-1} - p_k - p_l &= p_{k+\gamma k-1} - p_k - p_{\gamma k} \\
&\geq ((\gamma+1)k-1)\left(\log((\gamma+1)k-1) + \log_2((\gamma+1)k-1) - \alpha\right) \\
&- k(\log k + \log_2 k - \beta) - \gamma k(\log(\gamma k) + \log_2(\gamma k) - \beta) \\
&= k\left((\gamma+1)\log(\gamma+1) - \alpha(\gamma+1) + \beta(\gamma+1) - \gamma\log\gamma\right) \\
&+ k(\gamma+1)\log\left(1 - \frac{1}{(\gamma+1)k}\right) + \gamma k\log\left(\frac{\log(k+\gamma k-1)}{\log k}\right) \\
&+ k\log\left(\frac{\log(k+\gamma k-1)}{\log\gamma k}\right) \\
&- \left(\log((\gamma+1)k-1) + \log_2((\gamma+1)k-1) - \alpha\right)
\end{aligned}$$

Posons,

$$f(k,\gamma) = k\left((\gamma+1)(\log(\gamma+1) - \alpha + \beta) - \gamma\log\gamma\right) + \varphi(k),$$

avec,

$$\begin{aligned}
\varphi(k) &= (\gamma+1)k\log(1 - \frac{1}{(\gamma+1)k}) + \gamma k\log\left(\frac{\log(k+\gamma k-1)}{\log k}\right) \\
&+ k\log\left(\frac{\log(k+\gamma k-1)}{\log\gamma k}\right) - \left(\log((\gamma+1)k-1) + \log_2((\gamma+1)k-1) - \alpha\right).
\end{aligned}$$

Pour que la différence

$$p_{k+\gamma k-1} - p_k - p_{\gamma k},$$

soit positive pour $k \geq k_0$ qu'on déterminera, il suffit qu'on ait,

$$\lim_{k\to+\infty} f(k,\gamma) \geq 0$$

ou encore,

$$k\left((\gamma+1)(\log(\gamma+1) - \alpha + \beta) - \gamma\log\gamma\right) > 0$$

puisque on a : $\lim_{k\to+\infty}\varphi(k) = 0$.
Sous ces conditions si on choisit γ tel que $\frac{1}{109} \leq \gamma \leq 1$, $k \geq 39017$ et $\gamma k = l \geq 39017$, l'encadrement (3.3.16) de p_k reste vrai. Donc la fonction $f(k,\gamma)$ est bien définie. L'étude de ses variations nous permet de vérifier que f est croissante en ses deux variables γ et k et par suite qu'elle est positive pour un certain k_0.

$f(k,\gamma)$ est une fonction croissante de γ :

En effet on a :

$$\begin{aligned}\frac{df(k,\gamma)}{d\gamma} &= k\left[\log\left(\frac{1}{\gamma}+1-\frac{1}{k\gamma}\right)-\alpha+\beta+\log\left(1+\frac{\log(\gamma+1-\frac{1}{k})-\log\gamma)}{\log(k\gamma)}\right)\right] \\ &+ k\left[\frac{1}{\log(k+k\gamma-1)}-\frac{1}{\log(k\gamma)}\right]\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que,

$$\begin{aligned}\frac{df(k,\gamma)}{d\gamma} &\geq k\left[\log\left(\frac{1}{\gamma}+1-\frac{1}{k\gamma}\right)-\alpha+\beta-\frac{1}{\log(k\gamma)}\right] \quad \text{pour } \gamma\leq 1, k\geq 2 \quad (A) \\ &\geq k\left[\log(2-\frac{109}{k})-\alpha+\beta-\frac{1}{\log(\frac{k}{109})}\right] \quad \text{pour } \frac{1}{109}\leq\gamma\leq 1 \quad (B) \\ &\geq 0 \quad \text{pour} \quad k\geq 660\end{aligned}$$

L'inégalité (A) est vérifiée pour $\gamma\leq 1$ et $k\geq 2$, puisque,

$$\log\left(1+\frac{\log(\gamma+1-\frac{1}{k})-\log\gamma}{\log(k\gamma)}\right)+\frac{1}{\log(k+k\gamma-1)}\geq 0,$$

car,

$$\log\left(1+\frac{\log(\gamma+1-\frac{1}{k})-\log\gamma}{\log(k\gamma)}\right)\geq 0$$

et,

$$\frac{\log(k+k\gamma-1)}{\log(k\gamma)}\geq 1,$$

Cela est évident car les conditions sont vérifiées et la fonction $t\mapsto\log t$, est croissante.

L'inégalité (B) est vérifiée pour $\gamma\leq 1$, car la fonction $t\mapsto\log t$, est croissante.

L'inégalité (C) est vérifiée pour $\frac{1}{109}\leq\gamma\leq 1$ et $k\geq 2$, car l'étude de la fonction $\Psi(k)$ définie par,

$$k\mapsto\log(2-\frac{109}{k})-\alpha+\beta-\frac{1}{\log(\frac{k}{109})},$$

montre que $\Psi(k)$, est continue et strictement croissante sur $]\frac{109}{2},109[\cup]109,+\infty[$.

De plus, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique dans cet intervalle, donc il existe un nombre réel $k_0\in]\frac{109}{2},109[\cup]109,+\infty[$ tel que $\Psi(k_0)=0$.

Comme $\Psi(660) \geq 0$, on déduit que

$$\Psi(k) \geq 0 \quad \text{pour} \quad k \geq 660.$$

$f(k,\gamma)$ **est une fonction croissante de** k **:**
En effet on a,

$$\begin{aligned}
\frac{df(k,\gamma)}{dk} &= \log(1+\gamma-\frac{1}{k}) + \log\left(1+\frac{\log(1+\gamma-\frac{1}{k})}{\log k}\right) + (\beta-\alpha)(\gamma+1) \\
&+ \gamma\left[\log(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{k\gamma}) + \log\left(1+\frac{\log(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{k\gamma})}{\log(k\gamma)}\right)\right] \\
&+ \frac{\gamma+1}{\log(k+k\gamma-1)} - \frac{1}{\log k} - \frac{\gamma}{\log(k\gamma)} \\
&= \log(1+\gamma-\frac{1}{k}) + (\beta-\alpha)(\gamma+1) + \gamma\log(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{k\gamma}) \\
&+ \log\left(1+\frac{\log(1+\gamma-\frac{1}{k})}{\log k}\right) - \frac{\log(1+\gamma-\frac{1}{k})}{\log k\log(k+k\gamma-1)} \\
&+ \gamma\left(\log\left(1+\frac{\log(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{k\gamma})}{\log(k\gamma)}\right) - \frac{\log(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{k\gamma})}{\log(k\gamma)\log(k+k\gamma-1)}\right)
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que,pour $\frac{1}{109} \leq \gamma \leq 1, \;\; k > \frac{1}{\gamma}$

$$\frac{df(k,\gamma)}{dk} \geq \log(1+\gamma-\frac{1}{k}) + (\beta-\alpha)(\gamma+1) + \gamma\log(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{k\gamma}) \geq 0 \qquad (E)$$

De même la fonction $h(k)$, définie par :

$$k \mapsto \log(1+\gamma-\frac{1}{k}) + (\beta-\alpha)(\gamma+1) + \gamma\log(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{k\gamma})$$

est croissante par rapport à k, et elle est positive pour $k \geq 39017$ et $\frac{1}{109} \leq \gamma \leq 1$; car elle est aussi croissante par rapport à γ et sa valeur en $\gamma = \frac{1}{109}$ est positive pour $k \geq 39017$.
Donc, dans ces conditions, $h(k) \geq 0$.

Suite de la preuve du lemme 3.3.5. **:**

Maintenant, nous utilisons les propriétés déjà démontrées pour compléter la preuve du lemme 3.3.5.

Pour $k \geq 39017$ et $\frac{1}{109} \leq \gamma \leq 1$, on a,

$$f(k,\gamma) \geq f(k,\frac{1}{109}) \geq f(39017,\frac{1}{109}) > 0.$$

Lemme 3.3.6

Pour $2 < l \leq 39017$ et $l \leq k \leq 109l$, on a

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1}.$$

Preuve :

De même, nous utilisons dans cette preuve d'une part,
les inégalités (1.3.22) et (1.3.23) qui entraînent, pour $k \geq 39017$, l'encadrement (3.3.16) des p_k suivant :

$$k(\log k + \log_2 k - \alpha) \leq p_k \leq k(\log k + \log_2 k - \beta).$$

où $\alpha = 1$ pour $k \geq 2$ et $\beta = 0,9484$, pour $k \geq 39017$,
et d'autre part, on a l'inégalité (cf.[24]),

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 0.935) \quad \text{pour} \quad k \geq 7014. \tag{3.3.17}$$

Posons :

$$p(k; c) = k(\log k + \log_2 k - c).$$

Remarquons qu'on a deux cas :

Premier cas : Pour l fixé, $l \in [415, 39017]$ et pour $k \in [39017, 109l]$, on a grâce à l'encadrement (3.3.16) :

$$p_{k+l-1} - p_k - p_l \geq p(k + l - 1; 1) - p(k; 0.9484) - p_l = h_1(k) = h_1(k, l).$$

Deuxième cas : Pour l fixé, $l \in [415, 39017]$; et pour $k \in [\max(7014, l), 39017]$,
et d'après l'inégalité (3.3.17), on a obtient,

$$p_{k+l-1} - p_k - p_l \geq p(k + l - 1; 1) - p(k; 0.935) - p_l = h_2(k) = h_2(k, l).$$

Donc, il suffit de montrer respectivement dans chaque cas que la différence
$p_{k+l-1} - p_k - p_l$ est positive c'est-à-dire, de montrer que : $h_1(k) = h_1(k, l) \geq 0$ et $h_2(k) = h_2(k, l) \geq 0$.

Pour cela, nous étudierons les fonctions $h_1(k)$ et $h_2(k)$, pour montrer que :

1. h_1 est concave pour l fixé et pour $k \in [39017, 109l]$,

2. h_2 est concave pour l fixé et pour $k \in [\max(7014, l), 39017]$,

3. Pour $l \in [415, 39017]$, $h_1(39017, l)$, et $h_1(109l, l)$ sont positives.

4. Pour $l \in [415, 39017]$, $h_2(415, l)$, et $h_2(39017, l)$ sont positives.

h_1 et h_2 sont concaves :
Pour $n = 1, 2$, posons :

$$h_n(k) = h_n(k; l) = p(k + l - 1; 1) - p(k; \alpha_n) - p_l;$$

alors,

$$h_n(k) = (k + l - 1) [\log(k + l - 1) + \log_2(k + l - 1) - 1] - k(\log k + \log_2 k - \alpha_n) - p_l.$$

avec $\alpha_1 = 0,9484$ et $\alpha_2 = 0,935$.

Montrons que h_1 et h_2 sont concaves.
Calculons d'abord les dérivées secondes $h_n''(k)$ pour $n = 1, 2$.

Calcul de $h_n''(k)$ pour $n = 1, 2$.

On a,

$$\begin{aligned} h_n''(k) &= \frac{1}{k+l-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+l-1)\log(k+l-1)} \\ &- \frac{1}{k\log k} - \frac{1}{(k+l-1)\log^2(k+l-1)} + \frac{1}{k\log^2 k} \\ &= \frac{1}{k(k+l-1)} \left[-l + 1 + \frac{-(l-1)\log(k+l-1) - k\log(1+\frac{l-1}{k})}{\log k \log(k+l-1)} \right] \\ &+ \frac{1}{k(k+l-1)} \left[\frac{2k\log(1+\frac{l-1}{k})}{\log k \log^2(k+l-1)} + \frac{l-1}{\log^2 k} + \frac{k\log^2(1+\frac{l-1}{k})}{(\log k \log(k+l-1))^2} \right] \\ &\le \frac{1}{2k^2} \left[-l_1 + 1 + \frac{-(l_1-1)\log(k+l_1-1) - k\log(1+\frac{l_1-1}{k})}{\log k \log(k+l_2-1)} \right] \\ &+ \frac{1}{2k^2} \left[\frac{2k\log(1+\frac{l_2-1}{k})}{\log k \log^2(k+l_1-1)} + \frac{l_2-1}{\log^2 k} + \frac{k\log^2(1+\frac{l_2-1}{k})}{(\log k \log(k+l_1-1))^2} \right] = F_n(k,l) \\ &\text{pour } \ l \in [l_1, l_2] = [414, 39017]. \end{aligned}$$

h_1 est concave
En effet, pour $l \in [l_1, l_2] = [414, 39017]$, l fixé, on a :

h_1 est concave si et seulement si $h_1''(k) \le 0$ pour $k \ge 39017$.
Il suffit alors pour $l \in [l_1, l_2] = [414, 39017]$ que :

$$F_1(k, l) \le 0 \quad \text{pour} \ \ k \ge 39017.$$

Ce qui est vérifié, en conclusion, $h_1''(k) \leq 0$ pour $k \geq 39017$ avec $l \in [l_1, l_2] = [414, 39017]$, d'où l'on déduit que $h_1(k)$ est concave pour $k \geq 39017$.

h_2 est concave :

En effet, pour $l \in [l_1, l_2] = [414, k]$, fixé et pour $k \geq 7014$.
h_2 est concave si et seulement si $h_2''(k) \leq 0$, pour $k \geq 7014$.
Il suffit alors pour $l \in [l_1, l_2] = [414, 39017]$ et $k \geq 7014$ qu'on ait :

$$\lim_{k \to +\infty} F_2(k, l) = 0.$$

C'est-à-dire, il existe un certain rang $K_1 \geq 7014$ tel que,

$$\text{pour } \ k \geq K_1, h_2''(k) \leq \lim_{k \to +\infty} F_2(k, l) = 0.$$

Cela reste valable en prenant $K_1 = 7014$, et par suite, pour $k \geq 7014$, on a $h_2''(k) \leq 0$ avec $l \in [l_1, l_2] = [414, k]$.
Donc, $h_2(k)$ est concave pour $k \geq 7014$.
Il nous reste à vérifier les propriétés 3 et 4. C'est-à-dire pour $l \in [415, 39017]$;

$$h_1(39017, l) \quad h_1(109l, l) \quad \text{et} \quad h_2(415, l) \quad h_2(39017, l)$$

sont positifs.
Cela se fait grâce à un programme écrit en Maple.

Suite de la preuve du lemme 3.3.6 **:**

Puisque h_1, h_2 sont concaves, donc pour $l \in [415, 39017]$ et $k \in [39017, 109l]$, on a,

$$h_1(k, l) \geq 0,$$

et pour $k \in [\max(l, 7014), 39017]$, on a,

$$h_2(k, l) \geq 0,$$

par suite pour $l \in [415, 39017]$ et $k \in [39017, 109l]$,

$$p_{k+l-1} - p_k - p_l \geq h_1(k, l) \geq 0.$$

de même, pour $l \in [415, 39017]$ et $k \in [\max(l, 7014), 39017]$, on a,

$$p_{k+l-1} - p_k - p_l \ \geq \ h_2(k, l) \geq 0.$$

Pour $l \in [3, 415]$ et $k \in [l, 109l]$, on vérifie directement à l'ordinateur que l'inégalité (3.3.15) est vérifiée.

3.4 Résultats de P. Dusart sur la seconde conjecture de Hardy-Littlewood :

Position du problème dans les travaux de P. Dusart (cf. [13] et [11] :

Les résulats de P. Dusart (cf. [13] et [11] sont des améliorations de ceux de S. L. Segal.
En effet, il se propose dans [11] d'étudier une inégalité légèrement plus forte que celle proposée dans [18] et [35] et d'apporter une réponse à la question suivante :
Pour quelles valeurs de x et ε, l'inégalité suivante est-elle vérifiée

$$\pi\left((1+\varepsilon)x\right) \leq \pi(x) + \pi(\varepsilon x).$$

P. Dusart a montré que 99% des couples (x, y) d'entiers vérifient bien l'inégalité

$$\pi\left(x+y\right) \leq \pi(x) + \pi(y).$$

et affirme qu'il en est de même pour presque tout couple (x, y).

Théorème 3.4.1. (cf. [11]).
Pour tout x et tout y tels que $2 \leq x \leq y \leq \frac{7}{5} x \log x \log_2 x$, on a,

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y).$$

Preuve :

La preuve de ce théorème, nous procédons en deux étapes :
La première étape : $109 \leq \frac{y}{x} \leq \frac{7}{5} \log x \log_2 x$.
Elle sera exposé dans la proposition 3.4.1 où on utilisera des encadrements de $\pi(x)$, à savoir les deux encadrements (2.3.4) et (2.3.5) de la proposition 2.3.1.

La deuxième étape : $1 \leq \frac{y}{x} \leq 109$
fera l'objet de la proposition 3.4.2, où nous utilisereons la formulation équivalente de la seconde conjecture dûe à P. Dusart.

3.4.1 Démonstration du théorème 3.4.1 :

La première étape : $109 \leq \frac{y}{x} \leq \frac{7}{5} \log x \log_2 x$.

Nous avons,

Proposition 3.4.1 **:**
Pour $x \geq x_0 = 0,4 \cdot 10^{11}$ et y tel que $109 \leq \frac{y}{x} \leq \frac{7}{5} \log x \log_2 x$, on a

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y).$$

Preuve de la proposition 3.4.1
D'après le théorème des nombres premiers on a :

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right);$$

Posons :

$$\pi(x;\alpha) = \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{\alpha}{\log^2 x}\right), \text{ où } \alpha \quad \text{est une constante réelle.}$$

En utilisant l'hypothèse $109 \leq \frac{y}{x} \leq \frac{7}{5}\log x \log_2 x$, on pose :

$$y = xg(x) \text{ où } g(x) = \mathcal{O}\left(\log x \log_2 x\right) \quad \text{avec } g(x) \geq 1.$$

Remarquons qu'on ne restreindra pas la généralité de cette proposition si on choisit $y \geq x$.
Grâce aux estimations (2.3.4) et (2.3.5) de la proposition 2.3.1, on peut encadrer $\pi(x)$ (cf. [13]) et en prenant $d = 1.8$ et $c = 2.51$, on obtient pour $x \geq 355991$,

$$\pi(x;d) = \pi(x;1,8) \leq \pi(x) \leq \pi(x;c) = \pi(x;2,51). \tag{3.4.18}$$

d'autre part on a,

$$\pi(x;d) + \pi(y;d) - \pi(x+y;c) \geq 0 \Rightarrow \pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y); \tag{3.4.19}$$

Posons :

$$\Delta = \Delta_{c,d}(x,g(x)) = \pi(x;d) + \pi(y;d) - \pi(x+y;c)$$

alors,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Delta_{c,d}(x,g(x)) = \pi(x;d) + \pi(y;d) - \pi(x+y;c) \\
&= \pi(x;d) + \pi(xg(x);d) - \pi(x+xg(x);c) \\
&= \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{dx}{\log^3 x} + \frac{xg(x)}{\log(xg(x))} + \frac{xg(x)}{\log^2(xg(x))} + \frac{dxg(x)}{\log^3(xg(x))} \\
&- \left[\frac{x+xg(x)}{\log(x+xg(x))} + \frac{x+xg(x)}{\log^2(x+xg(x))} + \frac{c(x+xg(x))}{\log^3(x+xg(x))}\right].
\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Comme on a l'inégalité $\frac{1}{1+u} \leq 1 - u + u^2$, valable pour $u \to +\infty$, alors,

$$\begin{aligned}
\frac{x+xg(x)}{\log(x+xg(x))} &= \frac{x}{\log x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\log(1+g(x))}{\log x}} + \frac{xg(x)}{\log(xg(x))\left(1 + \frac{\log(1+\frac{1}{g(x)})}{\log(xg(x))}\right)} \\
&\leq \frac{x}{\log x}\left(1 - \frac{\log(1+g(x))}{\log x} + \frac{\log^2(1+g(x))}{\log^2 x}\right) \\
&+ \frac{xg(x)}{\log(xg(x))}\left(1 - \frac{\log(1+\frac{1}{g(x)})}{\log(xg(x))} + \frac{\log^2(1+\frac{1}{g(x)})}{\log^2(xg(x))}\right).
\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

D'autre part, puisque $\frac{1}{(1+u)^2} \le 1 - 2u + 3u^2$, il s'ensuit,

$$\begin{aligned}
\frac{x + xg(x)}{\log^2(x + xg(x))} &= \frac{x}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\log(1+g(x))}{\log x}\right)^2} + \frac{xg(x)}{\log^2(xg(x))\left(1 + \frac{\log(1+\frac{1}{g(x)})}{\log(xg(x))}\right)^2} \\
&\le \frac{x}{\log^2 x}\left(1 - 2\frac{\log(1+g(x))}{\log x} + 3\frac{\log^2(1+g(x))}{\log^2 x}\right) \\
&+ \frac{xg(x)}{\log^2(xg(x))}\left(1 - 2\frac{\log(1+\frac{1}{g(x)})}{\log(xg(x))} + 3\frac{\log^2(1+\frac{1}{g(x)})}{\log^2(xg(x))}\right). \quad (3.4.22)
\end{aligned}$$

La relation (3.4.20) ainsi que les inégalités (3.4.21) et (3.4.22) impliquent,

$$\begin{aligned}
\Delta \ \ge\ & \frac{dx}{\log^3 x} + \frac{dxg(x)}{\log^3(xg(x))} - \frac{c(x + xg(x))}{\log^3(x + xg(x))} + \frac{x}{\log^2 x} \cdot \log(1 + g(x)) \\
-\ & \frac{x}{\log^3 x} \cdot \log^2(1 + g(x)) + \frac{xg(x)}{\log^2(xg(x))} \cdot \log(1 + \frac{1}{g(x)}) \\
-\ & \frac{xg(x)}{\log^3(xg(x))} \cdot \log^2(1 + \frac{1}{g(x)}) + \frac{2x}{\log^3 x} \cdot \log(1 + g(x)) \\
-\ & \frac{3x}{\log^4 x} \cdot \log^2(1 + g(x)) + \frac{2xg(x)}{\log^3(xg(x))} \cdot \log(1 + \frac{1}{g(x)}) \\
-\ & \frac{3xg(x)}{\log^4(xg(x))} \cdot \log^2(1 + \frac{1}{g(x)}) = D(x, xg(x)) = D.
\end{aligned}$$

Mais on a :

$$D = x\left(\frac{dg(x)}{\log^3(xg(x))} - \frac{c(1 + g(x))}{\log^3(x + xg(x))} + \frac{\log(1 + g(x))}{\log^2 x}\right) \quad \text{pour } x \to +\infty.$$

En effet, on a,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\log^2(xg(x))} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\log^3(xg(x))} \cdot \log^2(1 + \frac{1}{g(x)}) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2g(x)}{\log^3(xg(x))} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right) = 0,$$

et,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3g(x)}{\log^4(xg(x))} \cdot \log^2\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right) = 0,$$

Estimation de D :
Comme $g(x) = \mathcal{O}(\log x \log_2 x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors,

$$D \sim (d - c) \cdot \frac{g(x)}{\log x} + \log(g(x)) \quad \text{pour, } x \to +\infty,$$

Notons que puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$, alors on peut écrire $g(x)=o(x)$, sans influer sur la démonstration.

Montrons que $\Delta=\Delta_{c,d}(x,g(x))>0$, où c,d sont définies dans (3.4.18) et considérons $g(x)=\mathcal{O}(\log x\log_2 x)$ avec $x\to+\infty$, de telle sorte que l' on ait :

$$(d-c)\frac{g(x)}{\log x}+\log(g(x))\geq 0, \tag{3.4.23}$$

c'est-à-dire, telle que,

$$1\leq g(x)\leq\frac{1}{c-d}\log x\log(g(x)) \quad \text{où} \quad g(x)=\mathcal{O}(\log x\log_2 x), \tag{3.4.24}$$

comme on a,

$$g(x)\leq\frac{7}{5}\log x\log_2 x,$$

alors,

$$\log(g(x))\leq\log\frac{7}{5}+\log_2 x+\log_3 x, \tag{3.4.25}$$

mais, (3.4.25) implique l'inégalité,

$$\log(g(x))\leq\log_2 x \quad \text{quand } x\to+\infty,$$

Les relations (3.4.25) et (3.4.24) entraînent alors,

$$1\leq g(x)\leq\frac{1}{c-d}\log x\log_2 x.$$

supposons $109\leq g(x)\leq\frac{1}{c-d}\log x\log_2 x$, et choisisissons $g(x)=\frac{1}{c-d}\log x\log_2 x$.

Montrons que pour g, tel que $109\leq g\leq g(x)=\frac{1}{c-d}\log x\log_2 x$, $\Delta_{c,d}(x,g)\geq 0$. Soit donc g un nombre réel tel que défini précédemment.
On a,

$$\Delta\geq A+B+C$$

avec,

$$A=\frac{dg}{\log^3(xg)}-\frac{cg}{\log^3(x+xg)}+\frac{\log(1+g)}{\log^2 x},$$

$$\begin{aligned} B \;=\; & -\frac{c}{\log^3(x+xg)}+\frac{g\log(1+\frac{1}{g})}{\log^2(xg)}+\frac{d}{\log^3 x} \\ & -\frac{g\log^2(1+\frac{1}{g})}{\log^3(xg)}+\frac{2g\log(1+\frac{1}{g})}{\log^3(xg)}-\frac{3g\log^2(1+\frac{1}{g})}{\log^4(xg)}, \end{aligned}$$

$$C=-\frac{\log^2(1+g)}{\log^3 x}-\frac{3\log^2(1+g)}{\log^4 x}+\frac{2\log(1+g)}{\log^3 x}.$$

Nous allons estimer les termes A, B et C.

Estimation de A :
Comme $c \geq 0$ et $g \geq 1$, on a alors pour $x \geq 2$,
d'une part,

$$\frac{cg}{\log^3(x+xg)} \leq \frac{cg}{\log^3(xg)} \Rightarrow \frac{-cg}{\log^3(x+xg)} \geq \frac{-cg}{\log^3(xg)}, \tag{3.4.26}$$

et d'autre part,

$$\frac{\log(1+g)}{\log^2 x} \geq \frac{\log(1+g)}{\log^2(xg)} \quad \text{car}, \log^2 x \leq \log^2(xg); \tag{3.4.27}$$

De (3.4.26) et (3.4.27), on déduit que,

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{dg}{\log^3(xg)} - \frac{cg}{\log^3(xg)} + \frac{\log(1+g)}{\log^2(xg)} \\ &= \frac{1}{\log^2(xg)}\left(\frac{(d-c)g}{\log(xg)} + \log(1+g)\right). \end{aligned}$$

Comme $d - c = 1,8 - 2,51 < 0$ et que $\log(xg) \geq \log x$ pour $g \geq 109$, alors,

$$A \geq \frac{1}{\log^2(xg)}\left(\frac{(d-c)g}{\log x} + \log(1+g)\right).$$

Considérons la fonction définie par $\varphi(g) = \frac{(d-c)g}{\log x} + \log(1+g)$.

Alors, $\varphi'(g) = \frac{(d-c)g}{\log x} + \frac{1}{1+g}$; de plus, $\varphi'(g) = 0 \quad$ pour $g = \frac{\log x}{c-d} - 1$.

L'étude des variations de φ montre qu'elle est croissante sur $[109, \frac{\log x}{c-d} - 1]$, décroissante sur $[\frac{\log x}{c-d} - 1, g(x)]$, par conséquent, son minimum $\inf \varphi(g)$ sur l'intervalle $[109, g(x)]$ est atteint soit en $g = 109$, soit pour $g = g(x)$, autrement dit, on a,

$$\inf_{g \in J} \varphi(g) = \min(\alpha, \beta) \quad \text{où} \quad J = [109, \frac{\log x}{c-d} - 1] \cup [\frac{\log x}{c-d} - 1, g(x)]$$

avec $\alpha = \frac{(d-c)109}{\log x} + \log 110 \quad$ et $\beta = \log\left(\frac{\log_2 x}{c-d} + \frac{1}{\log x}\right)$.

Calculons ce minimum :
Pour $x \geq x_0 \cong 0,4 \cdot 10^{11}$ où x_0 est tel que $109 = \frac{7}{5}\log x_0 \log_2 x_0$,
alors $\alpha = \log 110 \cong 4,700480366$ et $\beta \to +\infty$.
Si $x = x_0$, alors,

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \alpha &=& \frac{(1,8-2,51)109}{\log x_0} + \log 110 & \cong \ 1,530337018 \\ \beta &=& \log\left(\frac{\log_2 x_0}{2,51-1,8} + \frac{1}{\log x_0}\right) & \cong \ 1,513164202 \end{array} \right.$$

Donc $\inf \varphi(g) = \varphi\left(g(x_0)\right) = \beta$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{\log^2(xg)} \inf \varphi(g) \\ &= \frac{1}{\log^2(xg)} \log\left(\frac{\log_2 x_0}{c-d} + \frac{1}{\log x_0}\right). \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

Estimation de B :

Comme on a l'inégalité,

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} \leq \log\left(1 + \frac{1}{u}\right) \leq \frac{1}{u}, \quad \text{pour } u > 0,$$

alors,

$$g \log\left(1 + \frac{1}{g}\right) \geq 1 - \frac{1}{2g}. \tag{3.4.29}$$

et

$$g \log^2\left(1 + \frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{g} \tag{3.4.30}$$

avec (3.4.29) et (3.4.30), et puisque,

$$-\frac{c}{\log^3(x+xg)} \geq -\frac{c}{\log^3(xg)};$$

on obtient donc,

$$B\log^3(xg) \geq -c + (1 - \frac{1}{2g})\log(xg) + 2(1 - \frac{1}{g}) - \frac{3}{g\log(xg)},$$

de la même manière on obtient :

$$B\log^2(xg) \geq 1 - \frac{1}{2g} - \frac{c}{\log x} - \frac{3}{\log^2 x},$$

Car d'une part on a,

$$\begin{aligned} B\log^2(xg) \geq & -\frac{c}{\log(xg)} + g\log(1+\frac{1}{g}) + \frac{d\log^2(xg)}{\log^3 x} \\ & - \frac{g\log^2(1+\frac{1}{g})}{\log(xg)} + \frac{2g\log(1+\frac{1}{g})}{\log(xg)} - \frac{3g\log^2(1+\frac{1}{g})}{\log^2(xg)}, \end{aligned} \tag{3.4.31}$$

et d'autre part, en utilisant (3.4.29) et (3.4.30), et puisque,

$$\frac{d\log^2(xg)}{\log^3 x} - \frac{g\log^2(1+\frac{1}{g})}{\log(xg)} \geq \frac{d}{\log x} - \frac{1}{\log x} > 0$$

on aboutit à l'estimation de l'inégalité (3.4.31).
D'où, on en déduit que pour $g \geq 109$ et $x > 0$, on a,

$$\begin{aligned} B\log^2(xg) &\geq -\frac{c}{\log x} + 1 - \frac{1}{2g} + \frac{d}{\log x} - \frac{1}{g\log x} + (2-\frac{1}{g})\frac{1}{\log x} - \frac{3}{g\log^2 x} \\ &\geq 1 - \frac{1}{2g} - \frac{c}{\log x} - \frac{3}{\log^2 x} + (2 + d - \frac{2}{g})\frac{1}{\log x} \\ &\geq 1 - \frac{1}{2g} - \frac{c}{\log x} - \frac{3}{\log^2 x}, \quad \text{car}, (2 + d - \frac{1}{g})\frac{1}{\log x} > 0. \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

Estimation de C :

On a,

$$C = \frac{\log(1+g)}{\log^3 x}\left(2 - \frac{3\log(1+g)}{\log x} - \log(1+g)\right) \tag{3.4.33}$$

comme $2 - \frac{3}{\log x}\log(1+g) > 0$, pour $x \geq x_0$ et $g \geq 109$,
alors,

$$C \geq -\frac{\log^2(1+g)}{\log^3 x}. \tag{3.4.34}$$

Des relations (3.4.28), (3.4.32) et (3.4.34) on déduit que $x \geq x_0$,

$$\frac{\Delta}{x} \geq A + B + C,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{x} &\geq \frac{1}{\log^2(xg)}\log\left(\frac{\log_2 x_0}{c-d} + \frac{1}{\log x_0}\right) - \frac{\log^2(1+g)}{\log^3 x} \\ &+ \frac{1}{\log^2(xg)}\left(1 - \frac{1}{2g} - \frac{c}{\log x} - \frac{3}{\log^2 x}\right) = \phi(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4.35}$$

comme le second membre de $\phi(x)$ dans (3.4.35) est une fonction décroissante en g, on choisit $g = \frac{1}{c-d}\log x \log_2 x$ de sorte que $\frac{\Delta}{x} \geq 0$.
En remplaçant $g = \frac{1}{c-d}\log x \log_2 x$ dans (3.4.35), on constate aussi que $\phi(x)$ est une fonction décroissante en x, et que,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\log^2(xg)}\log\left(\frac{\log_2 x_0}{c-d} + \frac{1}{\log x_0}\right) - \frac{\log^2(1+g)}{\log^3 x} + \frac{1}{\log^2(xg)}\left(1 - \frac{1}{2g} - \frac{c}{\log x} - \frac{3}{\log^2 x}\right)\right] = 0;$$

puisque,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{\log^2(1+g)}{\log^3 x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log^2(xg)}\log\left(\frac{\log_2 x_0}{c-d} + \frac{1}{\log x_0}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log^2(xg)}\left(1 - \frac{1}{2g} - \frac{c}{\log x} - \frac{3}{\log^2 x}\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\frac{\Delta}{x} \geq 0$, pour $x \geq x_0$, et puisque $\frac{1}{c-d} \geq \frac{7}{5}$, la proposition 3.6.1, est ainsi démontrée.

3.4.2 Suite de la démonstration du théorème 3.4.1 :

La deuxième étape : $\frac{1}{109} \leq \frac{y}{x} \leq 109$.

Pour compléter la démonstration du théorème 3.4.1; nous avons besoin d'abord de démontrer la :

Proposition 3.4.2 (cf. [11] et [13]) :
Pour x et y réels ≥ 3 vérifiant $\frac{1}{109} \leq \frac{y}{x} \leq 109$, on a :

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y). \tag{3.4.36}$$

Preuve de la proposition 3.4.2 :

Soient deux entiers $l, k \geq 3$. Grâce à la proposition 3.3.3, pour $\frac{1}{109} \leq \frac{l}{k} \leq 1$, on a :

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1}$$

c'est-à-dire, pour $l \leq k \leq 109l$. Par la Proposition 3.3.1, il découle que l'inégalité (3.4.36) est vraie pour $y \in [p_{l-1}, p_l[$ et $x \in [p_{k-1}, p_k[$, avec $k \in [l, 109l]$, ou encore, en exprimant k en fonction de l :
l'inégalité (3.4.36) est vraie pour $y \in [p_{l-1}, p_l[$ et $x \in [p_{l-1}, p_{109l}[$ ce qui est équivalent à,

$$\frac{p_{l-1}}{p_{109l}} < \frac{y}{x} < \frac{p_l}{p_{l-1}}. \tag{3.4.37}$$

Mais en tenant compte des hypothèses de la proposition 3.4.2, nous devons montrer que,

$$\frac{p_{l-1}}{p_{109l}} < \frac{1}{109}. \tag{3.4.38}$$

En utilisant l' inégalité (1.3.22) (cf. [12]) pour $k \geq 2$, $\alpha = 1$ et l' inégalité suivante (cf. [26]) :

$$p_t \leq t\left(\log t + \log_2 t - \beta\right) \quad \text{pour } \ t \geq 6$$

pour $t = l \geq 6$, $\beta = 0$, on obtient :

$$p_{109l} \geq 109l\left(\log(109l) + \log_2(109l) - \alpha\right),$$

et

$$p_{l-1} \leq (l-1)\left(\log(l-1) + \log_2(l-1) - \beta\right).$$

d'où l'en déduit que (3.4.38) est équivalente à :

$$\frac{1}{109}p_{109l} - p_{l-1} \geq \delta > 0$$

où

$$\delta = l\left(\log(109l) + \log_2(109l) - \alpha\right) - (l-1)\left(\log(l-1) + \log_2(l-1) - \beta\right).$$

Mais alors,

$$\delta > 0 \quad \text{équivaut à} \quad l \log \left[\frac{109l \log(109l)}{(l-1)\log(l-1)} \right] + \log\left[(l-1)\log(l-1)\right] > l.$$

Or,

$$\frac{109l \log(109l)}{(l-1)\log(l-1)} > e \quad \text{et} \quad (l-1)\log(l-1) > 1 \quad \text{pour} \quad l \geq 3,$$

d'où,

$$\delta > 0 \quad \text{pour} \quad l \geq 3.$$

Comme,

$$\frac{p_l}{p_{l-1}} < \frac{p_{109l}}{p_{l-1}} \quad \text{et} \quad \frac{p_{l-1}}{p_{109l}} < \frac{1}{109},$$

alors la proposition 3.4.2 est démontrée et par suite le théorème 3.4.1.

Proposition 3.4.3
Soit un nombre réel $X > 0$. Alors, la proportion de couples (x, y) tels que $x \leq X$ et $y \leq X$ pour lesquels l'inégalité $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$, n'est pas vérifiée est au plus égale à

$$\frac{5}{7 \log X \log_2 X}.$$

Preuve :

Soit x_0 un réel fixé. Soit A_1 l'aire du domaine limité par les inéquations $y \geq x, y \leq \frac{7}{5} x \log x \log_2 x$ et $y \leq x_0$, et A_2 l'aire du domaine limité par les inéquations $x \leq x_0, y \geq x$ et $y \leq x_0$, c'est-à-dire,

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in R^2, y \leq x_0 \quad \text{et} \quad 1 \leq x \leq y \leq \frac{7}{5} x \log x \log_2 x. \right\},$$

et

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in R^2, x \leq x_0, y \geq x \geq 1 \quad \text{et} \quad y \leq x_0. \right\}.$$

On considère la fonction g :

$$t \mapsto g(t) = \frac{7}{5} t \log t \log_2 t$$

g est définie et continue sur $]1, +\infty[$, de plus, elle est prolongeable par continuité en $t = 1$, puisque, $\lim_{t \mapsto 1^+} g(t) = 0$.
g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a :

$$g'(t) = \frac{7}{5}(\log t \log_2 t + \log_2 t + 1).$$

comme g' est continue sur $]1, +\infty[$, avec

$$\lim_{t \mapsto 1^+} g'(t) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \mapsto +\infty} g'(t) = +\infty,$$

et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à g', on déduit qu'il existe, $t = t_1$ tel que $g'(t_1) = 0$;
et par suite, on a

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_1,$$
$$g'(t) > 0 \Leftrightarrow t > t_1;$$
$$g'(t) < 0 \Leftrightarrow t < t_1;$$

où $t_1 \simeq 1.677567$.
Comme g est continue et strictement croissante sur $[t_1, +\infty[$, on en déduit qu'elle est bijective sur $[t_1, +\infty[$,et par suite, elle admet une fonction réciproque g^{-1}, définie sur $[t_1, +\infty[$.

Calcul des aires des domaines A_1 et A_2 :
Soit $x_0 > 1$ et $g(t) = \frac{7}{5} t \log t \log_2 t$, on a,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_1^{g^{-1}(x_0)} (g(t) - t)dt + \int_{g^{-1}(x_0)}^{x_0} (x_0 - t)dt; \\ &= \int_1^{g^{-1}(x_0)} g(t)dt + \frac{x_0^2}{2} - x_0 g^{-1}(x_0) + \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.4.39}$$

Posons,

$$B = \int_1^{g^{-1}(x_0)} g(t)dt = \frac{7}{5} \int_1^{g^{-1}(x_0)} t \log t \log_2 t dt,$$

et,

$$\log t = z \quad \text{et} \quad y_0 = \log g^{-1}(x_0). \tag{3.4.40}$$

En utilisant une intégration par parties avec le changement de variables (3.4.40), on obtient,

$$\begin{aligned} B = \int_1^{g^{-1}(x_0)} g(t)dt &= \frac{7}{5} \int_0^{y_0} z \exp 2z \log z dz \\ &= \frac{7}{5} \left[\frac{1}{2} z \exp 2z \log z \right]_0^{y_0} - \frac{7}{10} \int_0^{y_0} \exp 2z dz - \frac{7}{10} \int_0^{y_0} \exp 2z \log z dz \\ &= \frac{7}{5} \left[\frac{1}{2} z \exp 2z \log z \right]_0^{y_0} - \frac{7}{10} \left[\frac{1}{2} \exp 2z \right]_0^{y_0} - \frac{7}{10} \int_0^{y_0} \exp 2z \log z dz \\ &= \frac{7}{10} \left[(g^{-1}(x_0))^2 \log g^{-1}(x_0) \log_2 g^{-1}(x_0) \right] \\ &- \frac{7}{20} (g^{-1}(x_0))^2 - \frac{7}{10} \int_0^{y_0} \exp 2z \log z dz \end{aligned}$$

comme g est bijective alors,

$$\frac{7}{10} \left(g^{-1}(x_0)\right)^2 \log g^{-1}(x_0) \log_2 g^{-1}(x_0) = \frac{1}{2} g^{-1}(x_0) g(y_0) \tag{3.4.41}$$
$$= \frac{1}{2} x_0 g^{-1}(x_0) \tag{3.4.42}$$

d'où,

$$B = \frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0) - \frac{7}{20}(g^{-1}(x_0))^2 - \frac{7}{10}\int_0^{y_0} \exp 2z \log z dz \tag{3.4.43}$$

mais on a,

$$\frac{7}{20}(g^{-1}(x_0))^2 = \circ(\frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0)) \tag{3.4.44}$$

et

$$\begin{aligned} 0 < \frac{7}{10}\int_0^{y_0} \exp 2z \log z dz &< \frac{7}{10}\int_0^{y_0} z \exp 2z dz \\ &= \frac{7}{10}\left[\frac{1}{2}z \exp 2z\right]_0^{y_0} dz - \frac{7}{20}\int_0^{y_0} \exp 2z dz \\ &= \frac{7}{10}\left[\frac{1}{2}z \exp 2z dz\right]_0^{y_0} - \frac{7}{20}\left[\frac{1}{2}\exp 2z dz\right]_0^{y_0} \\ &= \frac{7}{20}(g^{-1}(x_0))^2 \log g^{-1}(x_0) - \frac{7}{40}(g^{-1}(x_0))^2 \\ &= \circ(\frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0)) \,. \end{aligned} \tag{3.4.45}$$

donc,

$$B = \frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0) + \circ(\frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0)) \,. \tag{3.4.46}$$

En remplaçant (3.4.46) dans (3.4.39) on obtient,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_1^{g^{-1}(x_0)} (g(t) - t)dt + \int_{g^{-1}(x_0)}^{x_0} (x_0 - t)dt \\ &= \frac{x_0^2}{2} - \frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0) + \circ(\frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour x_0 assez grand, on a,

$$A_1 \sim \frac{x_0^2}{2} - \frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0) = \frac{x_0^2}{2}(1 - \frac{g^{-1}(x_0)}{x_0}).$$

D'autre part on a,

$$A_2 = \int_0^{x_0} t dt = \frac{x_0^2}{2}.$$

Évaluation du rapport $\frac{A_1}{A_2}$:

On a,

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_2} &= \frac{\frac{x_0^2}{2} - \frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0) + \circ(\frac{1}{2}x_0 g^{-1}(x_0))}{\frac{x_0^2}{2}} \\ &\sim \frac{\frac{x_0^2}{2}(1 - \frac{g^{-1}(x_0)}{x_0})}{\frac{x_0^2}{2}} \\ &= 1 - \frac{g^{-1}(x_0)}{x_0} \quad \text{pour, } x_0 \quad \text{assez grand,} \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

comme g est bijective, alors,

$$x_0 = g(g^{-1}(x_0)) = \frac{7}{5} g^{-1}(x_0) \log g^{-1}(x_0) \log_2 g^{-1}(x_0),$$

d'où

$$\frac{A_1}{A_2} \sim 1 - \frac{5}{7 \log g^{-1}(x_0) \log_2 g^{-1}(x_0)}.$$

Grâce à la symétrie l'inégalité (3.4.36) est vraie pour $1 - \frac{5}{7 \log t_0 \log_2 t_0}$ des couples (x, y), tels que $x \leq x_0$ et $y \leq x_0$, où $t_0 = g^{-1}(x_0)$.
Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.4.3.

Annexe

Calculs numériques Dans ce qui suit nous donnons quelques procédures écrites à l'aide de Maple, qui nous ont permis de compléter les démonstrations des théorèmes (2.5.1, 3.3.6)

Résolution de l'inéquation (2.5.10) :

for b from 1 to 19 do
Pb :=ithprime(b) :
$a := 2$:
while evalb(evalf($b * (\log(a * b) + \log(\log(a * b)) - 1)) < Pb$) do
$a := a + 1$;
od ;
Print($b.a$) ;
od ;

Preuve du lemme 3.3.6 :

Grâce à l'ordinateur, on teste un domaine de validité de l'inégalité (3.3.15).On trouve qu'elle est vraie pour $2 < l \leq 39017$ et $l \leq k \leq 109l$. Pour ce faire, on utilise un fichier contenant les nombres premiers jusqu'à $8 \cdot 10^7$. Un programme en Maple exécute cette tâche :
> la liste affichée de deux cents premiers nombres :
> seq(ithprime(i),i=1..200) ;
2,3,5,..,1223
>la liste non affichée de vingt milles premiers nombres premiers :
>p :=seq(ithprime(i),i=1..20000) :
> le mille cent trente deuxième nombre premier :
>P[1132] ;
9133
>résultat du programme pour $l \geq 3$ après exécution :
>i :=0 :
>for l from 3 to 50 do
> for k from l to $109 * l$ do
> if p[l]+p[k]>p[l+k-1] then print ("le test est faux à la position",l,k) ;i :=1 ;break ;fi
>end do ;end do ;

```
>if i :=0 then print("le test est vrai")fi ;
>
>
"le test est vrai"
>résultat du programme pour l ≥ 2 après exécution :
>i :=0 :
>for l from 2 to 50 do
>for k from l to 109 * l do
> if p[l]+p[k]>p[l+k-1] then print ("le test est faux à la position",l,k) ;i :=1 ;break ;fi
>end do ;end do ;
"le test est faux à la position," 2,2
>if i :=0 then print("le test est vrai")fi ;
```

Conclusion

L'étude de la seconde conjecture de Hardy-Littlewood, a fait l'objet de plusieurs articles. Nous nous sommes intéressés aux travaux de S. L. Segal (cf.[31]) et de P. Dusart ([11]).
P. Dusart a, dans sa thèse de Doctorat ([13]) amélioré sensiblement les résultats dûs à S. L. Segal. Il a prouvé que cette conjecture est vraie pour 99% de couples d'entiers (x, y) .
Nous avons donc repris les résultats de ce dernier et détaillé ses démonstrations. Nous avons utilisé essentiellement sa thèse de Doctorat ([13]), comme référence de base.
P. Dusart a démontré un encadrement précis de $\pi(x)$ ainsi qu'une estimation pour les nombres premiers par l'intermédiaire des fonctions de Chebyshev en utilisant les méthodes de Rosser et Schoenfeld. Il a étudié sur quels domaines la fonction $\pi(x)$ possède la propriété de sous-additivité.
Beaucoup sans doute reste à faire dans cette direction de recherche. Dans ([13]) P. Dusart, s'est posé la question suivante : A-t-on $p(n; k; l) \geq n\varphi(k)\,(\log n + \log\log n - 1 + \log\varphi(k)]$?
où $p(n; k; l)$ désigne le n-ième nombre premier dans la progession arithmétique l mod k.
On pourra envisager éventuellement de continuer notre travail de recherche dans cette direction.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions, Dover Pub., New-York, 1965.

[2] J. Barkley Rosser. The n-th prime is greater than n. *Proc. London Math. Soc.(2)*, Vol.45, (1939) pp.21–44.

[3] J. Barkley Rosser. Explicit Bounds for some functions of prime numbers. *Amer. J. Math.*, Vol. 63, (1941) pp.211–232.

[4] R. P. Brent, *Irregularities in the Distribution of Primes and Twin Primes*, Math. Comp. Vol. 29, Number 129 (January 1975)pp. 43–56. UMT, Math. Comp. Vol. 30, Number 134 (April 1976) p.379.

[5] R. P. Brent, *The first occurrence of large gaps between successive primes,*Math. Comp. Vol. 27, 1973,pp. 959–963. MR 48. 8360.

[6] B. Bruno Salvy. Fast computation of some asymptotic functional inverses. *J. Symbolic Computation*, Vol. 17, (1994) pp.227–236.

[7] E. Cesaro, Sur une formule empirique de M. Pervouchine, *Comptes rendus hebdo. des séances de l'académie des sciences*, Vol.CXIX, (1895) pp. 848–849.

[8] M. Cipolla, La determination assintotica dell'n^{imo} numero primo.Matematiche Napoli, Vol. 3, (1902) pp. 132–166.

[9] H. Cohen. High precision computation of Hardy-Littlewood constants, prepublication, http ://www.math.u-bordeaux.fr/∼cohen/.

[10] N. Costa Pereira.*Estimates for the Chebyshev Function* $\psi(x) - \theta(x)$. Math.Comp. Vol.44, Number 169(January 1985) pp. 211–221.

[11] P. Dusart. Sur la conjecture $\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y)$, *Acta. Arithmetica.*, 102.4, (2002), 295-307.

[12] P. Dusart. The k^{th} prime is greater than $k(\log k + \log\log k - 1)$ for $k \geq 2$, *Math. Comp.*, 68, (1999), 411–415.

[13] P. Dusart. Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers, thèse de Doctorat, Université de Limoges, 1998.

[14] E. Ehrhart. *On prime numbers*,Fibonacci Quart. 26 (1988), 271–274.

[15] W. J. Ellison et M. Mendès France. *Les nombres premiers.*, Hermann, Paris (1975).

[16] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers.*Fifth Edition. Oxford At the clarendon Press.1979.

[17] D. Hensley and I. Richard. Primes in intervals, Acta. Arithmetica, 25.4, (1974), 375-391.

[18] C. Karanikolov. *On some properties of function $\pi(x)$*, Univ. Beograd. Publ. Elek- trotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 29–30 (1971), 357–380.

[19] E. Landau, " Handbuch der lehre von der Verteilung der Primzahlen", Chelsea, New York (1953) (Reprint.).

[20] J. P. Massias and G. Robin, *Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers*, J. Théor. Nombrees Bordeaux 8(1996), 213–238.

[21] D. P. Parent Parent, D. P, *Exercices de Théorie des Nombres*, Paris, Gauthier-Villars,(1978).

[22] I. Richards, *On the incompatibility of two conjectures concerning primes*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 419–438.

[23] H. Riesel, *Prime numbers and Computer Methods for Factorization*, Birkhäuser, 1985.

[24] G. Robin. Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le k-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(N)$, nombre de diviseurs premiers de N, *Acta Arithmetica*, 42, (1983), 367–389.

[25] G. Robin. Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques. *publications de l'institut mathématique de Beogrand*, tome 43(57), (1988) pp.17–25.

[26] J. B. Rosser and L. Schoenfeld. Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers, *Illinois. J. Math*, 6, (1962), 64–94.

[27] J. B. Rosser and L. Schoenfeld. *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$*, Math. Comp. 29 (1975), 243–269.

[28] J. B. Rosser and L. Schoenfeld.*Abstracts of brief scientific communications, Internat.* Congr. Mathematicians, Moscow 1966, Section 3, Theory of Numbers,8.

[29] L. Schoenfeld. *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$*, Math. Comp.Vol 30. Number 134. April(1976), 337–360.

[30] A. Schinzel and W. Sierpinski, *Sur certaines hypothèse concernant les nombres premiers*, ibid. 4 (1958), 185–208.

[31] S. L. Segal. On $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 523-527

[32] R. Tijdeman. On the maximal distance between integers composed of small primes. *Compositio Math.*, 28, (1974), 159–162.

[33] T.Thomas Vehka and I. Ian Richards. Explicit Construction of an admissible Set for the Conjecture that sometimes $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$. *Notices Am. Math. Soc.*,26 (1979) p.A-453

[34] Tom M.Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*Springer-Verlag. New york. Heidelberg Berlin.1976

[35] V. S. Valeriu St. Udrescu.Some remarks concerning the conjecture $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$, Rev.Roum.Math. pures et appl., Tome XX, Numéro 10, Bucarest (1975) pp.1201–1209.

[36] D. V. Widder D. V.*Advanced Calculus.* Second edition, Prentice-Hall,(1961).