N° d'ordre : 35/2012-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI

BOUMEDIENNE

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

en MATHEMATIQUES

Spécialité : ANALYSE : Systèmes Dynamiques

par

YACHE ABDELKADER AMINE

THÈME :

Existence de solutions périodiques pour des problémes aux limites associées á des E. D. O du second ordre

Soutenu publiquement le 11/04/2012 devant le jury composé de :

Mr : M. ABID	Maitre de Conference/A à l'U.S.T.H.B	Président.
Mr : A. BENMEZAI	Professeur à l' U.S.T.H.B	Directeur de Mémoire.
Mr : S. DJEBALI	Professeur à l'E.N.S Vieux Kouba	Examinateur.
Mr : T. ALIZIANE	Maitre de Conferences/A à U.S.T.H.B	Examinateur.
Mr : T. MOUSSAOUI	Maitre de Conferences/A à l'E.N.S Vieux Kouba	Examinateur

Table des matières

Introduction

L'étude des problèmes aux limites associés aux équations differentielles ordinaires suscite beaucoup d'intérêt notament chez les mathématiciens et les physiciens vue leurs importances dans divers domaines (industrie, biologie, économie...). Malgré les grandes avancées dans le domaine informatique, beaucoup de questions liées à ces problèmes ne trouvent pas de réponses.

On s'interesse particulièrement dans ce mémoire aux problèmes aux limites périodiques (PLP) associés aux E.D.O du deuxième ordre. On étudiera l'éxistence et la multiplicité de solutions périodiques.

Considéré comme un repère, le problème linéaire associé aux PLP est étudier en premier lieu. Des résultats d'existence des valeurs propres sont prouvés dans [25, 34, 41, 55].

L'étude du problème aux valeurs propres sera la clé pour donner des conditions suffisantes pour l'éxistence des solutions périodiques, on donne des résultats récents sur les valeurs propres, aussi le principe du maximum et de l'anti-maximum, pour pouvoir étudier le signe de la fonction de Green, une fois le principe du maximum réalisé, on peut appliquer le théorème du point fixe dans le cône des fonctions positives.

Dans le troisième chapitre, on donne des résultats sur l'éxistence des solutions positives pour les PLP de Sturm-Liouville, sous certaines conditions sur la nonlinéarité positive $f(t, u)$, et on applique le théorème du point fixe d'expansion et de compression du cône de Guo-Kranosel'skii[6, 26], et on verra que l'étude de l'éxistence des solutions pour les équations différentielles à coeffitions périodiques est équivalente à l'étude d'un prolème aux limites périodique sur $[0, T]$.

Dans le chapitre 4, on verra que le signe de la fonction de Green joue un rôle crucial pour avoir le signe de la solution selon le terme non linéaire. On donnera quelques conditions sur les valeurs propres pour avoir la constance du signe de la fonction de Green, on applique le théorème de Kranosel'skii pour avoir des résultats d'éxistence.

Dans le cinquième chapitre, on donnera des résultats récents lorsque le potentiel dans l'équation de Hill est une constante positive, on applique toujours le théorème de Kranosel'skii de type norme, et on utilise deux fonctions qui dépéndent uniformément du terme non linéaire f, on va étudier l'existence des solutions positives uniquement, et on va étendre les résultats trouvés dans le chapitre 4.

On étudiera dans le chapitre 6 le même problème du chapitre 5 sous forme d'une équation différentielle, mais on utilise la position du quotient $f(t,u)/u$ par rapport à la première valeur propre , pour pouvoir donner des résultats d'existence, en utilisant l'index topologique du point fixe et ses propriétés.

Dans le dernier chapitre , on étudiera le problème aux limites de Strum Liouville sous sa forme générale sous certaines conditions, tout en utilisant le même principe, on aboutira à des résultats d'existence et mutiplicité lorsque le terme non linéaire peut changer de signe, et même, peut être singulier ou non.

A noter que les avancés dans ce domaine sont considérables où beaucoup de résultats sont obtenues suivant l'amélioration des conditions pour pouvoir appliquer les differents théorèmes du point fixe.

Chapitre 1

Priliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques résultats de base qui seront utilisées le long de notre étude des équations différentielles (et problemes aux limites) périodiques, la plus part de ces résultats sont valables aussi dans le cas non périodiques. Ces résultats constituent une base pour l'étude des problèmes aux limites, et sont éssentielles à être connues.

1.2 Opérateurs compacts

Soit X et Y deux éspaces de Banach et $\Omega \subset X$ un ouvert.

Définition 1.2.1. *Un sous-ensemble E d'un espace de* BANACH *est dit relativement compact si $\overline{E}$ est compact.*

Définition 1.2.2. *Soit $f : \Omega \to Y$ une application continue. f est dite*
- compacte si $\overline{f(\Omega)}$ est compact dans Y.
- complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.
- de rang fini s'il éxiste un sous-éspace véctoriel E de Y avec $\dim E < +\infty$ et $f(\Omega) \subset E$.

Remarques:

a)- Il est clair que toute application compacte est complètement continue ; la réciproque est vraie si Ω est borné.

b)- Toute application linéaire compacte est continue ; la réciproque est vraie si f est de rang fini.

Proposition 1.2.1. *[8, 2] Si X est un éspace de Banach, Ω est un ouvert borné de X ; et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte, alors $\forall \epsilon > 0$, il éxiste $g : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ de rang fini telle que*

$$\|f - g\|_\infty < \epsilon.$$

Définition 1.2.3. *Une application de la forme $f = I - K$ où I est l'application identité et K une application compacte est dite **perturbation compacte de l'identité** (ou **application de** **Leray-Schauder**).*

Soit (X, d) un espace métrique compact, Y un espace de BANACH et $C(X, Y)$ l'espace de BANACH des fonctions continues de X dans Y muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{t \in X} \|f(t)\|_Y .$$

Définition 1.2.4. *Un sous-ensemble H de $C(X, Y)$ est équicontinu si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \qquad \forall t, t_0 \in X, \qquad \forall f \in X d(t, t_0) \leq \delta \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\|_Y \leq \epsilon$$

THÉORÈME 1.1: ASCOLI-ARZELA*[23]*

H est relativement compact si et seulement si :

1. *H est équicontinu.*
2. *$\forall t \in X$, l'ensemble $H(t) = \{f(t), f \in H\}$ est relativement compact dans Y.*

1.2.1 Alternative de Fredholm :

Soient H un espace de HILBERT et $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire compact. On définit $D(A)$ comme étant l'ensemble de définition de A, $N(A)$ l'ensemble des zéros de A et $R(A)$ l'ensemble des valeurs de A dans H.
soit l'opérateur adjoint A^* de A définit par $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$.

THÉORÈME 1.2: *[48, 2]*
Soient H un espace de HILBERT *et $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire compact, on a alors*
(i). $N(I - A)$ est de dimension finie.
(ii). $R(I - A)$ est fermé
(iii). $R(I - A) = N(I - A^*)^{\perp}$.
(iv). $N(I - A) = \{0\} \Longleftrightarrow$ R(I - A) = H.
(v).dim N(I - A) = dim N(I - A^*).

Si on considère les équations

$$Au = f \qquad Au = 0 \qquad A^*v = g \qquad A^*v = 0$$

Alors, une autre version de l'alternative de FREDHOLM est la suivante :

1. Ou bien l'équation $Au = 0$ admet uniquement la solution triviale comme solution, aussi pour $A^*v = 0$, par suite l'équation $Au = f$ admet une solution unique , de même pour $A^*v = g$ pour tout f et g dans H.
2. Ou bien l'équation $Au = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes $\varphi_i(t)$, aussi $A^*v = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes $\psi_i(t)$. Les équations $Au = f$ et $A^*v = g$ sont solvables si et seulement si $\langle f, \psi_i\rangle = 0$ et $\langle g, \varphi_i\rangle = 0$.

Donc ou bien l'équation $Au = f$ admet une solution unique non triviale, ou bien 0 n'est pas l'unique solution de $Au = 0$.

1.2.2 Exemple d'opérateur complètement continu

Soit $X = C([0,T],\mathbb{R})$ muni de la norme usuelle $\|u\| = \sup_{t\in[0,T]} u(t)$ et soit $A : X \to X$ l'opérateur définie par

$$(Au)(x) = \int_0^T G(x,y)f(y,u(y))dy$$

où $G : [0,T]\times[0,T] \to \mathbb{R}$ est continue et la fonction $f : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue . Pour éviter la répitition dans ce mémoire, nous allons présenter ici la preuve que cet opérateur A est complètement continu.

(a) A est continue :

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tel que $\lim_{n\to\infty} u_n = u \in X$.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in[0,T]} |u_n(y) - u(y)| = 0$$

il existe M telque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n, u \in \overline{B}(0,M)$

f étant continue,$\sup_{y\in[0,T],z\in[-M,M]} |f(y,z)| < \infty$

on a pour tout $x \in [0,T]$

$$\begin{aligned} |Au_n(x) - Au(x)| &\leq T \sup_{(x,y)\in[0,T]^2} |G(x,y)| \sup_{y\in[0,T]} |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))| \\ &\leq TM \sup_{y\in[0,T]} |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))| \end{aligned}$$

où le second membre tend vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$.

(b) soit B un borné de X et $B' = A(B)$. Montrons en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela que B' est relativement compact :

i- B' est borné car $\forall v \in B'$ et $\forall x \in [0,T]$, $\exists u \in B : v(x) = (Au)(x)$ avec

$$|v(x)| \leq T \sup_{(x,y)\in[0,T]^2} |G(x,y)| \sup_{(y,u)\in[0,T]\times[-M,M]} |f(y,u)|$$

ii- B' est équicontinu car $\forall(x_1, x_2) \in [0, T]^2$ et $\forall u \in B$ on a

$$\begin{aligned}|Au(x_1) - Au(x_2)| &\leq \int_0^T |f(y, u(y))| \, |G(x_1, y) - G(x_2, y)| \, dy \\ &\leq \sup_{(y,u)\in[0,T]\times[-M,M]} |f(y, u)| \int_0^T |G(x_1, y) - G(x_2, y)| \, dy\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$; par l'uniforme continuité de $G(x, .)$, il existe $\delta > 0$

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2| \leq \delta &\Rightarrow |G(x_1, y) - G(x_2, y)| < \frac{\epsilon}{\sup_{(y,u)\in[0,T]\times[-M,M]} |f(y, u)|} \qquad \forall y \in [0, T] \\ &\Rightarrow |Au(x_1 - Au(x_2))| < \epsilon\end{aligned}$$

donc ,l'ensemble B' est équicontinu et borné.
Par le théorème d'Ascoli-Arzéla, B' est relativement compact, par conséquent, l'opérateur A est complètement continu.

On donne maintenant la définition de fonctions L^1-Carathéodory ;

Définition 1.2.5. *Une fonction f est dite L^1-*Carathéodory *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], & f(t, .) est\ continue \\ \forall u \in \mathbb{R}, & f(., u) est\ mesurable \\ \forall\, 0 < c < d, \exists h_{(c,d)} \in L^1[0, T], telque\, |f(t, u)| < h(t), & \forall t \in [0, T], \forall u \in [c, d] \end{cases}$$

Remarque 1.2.1. *En utilisant le théorème de convergence dominée de* lebesgue*, on peut remplacer dans l'éxemple précédent la condition f continue par f est L^1-*caratheodory.

1.3 Le degré topologique

Dans cette partie, on va donner quelques rappels sur le degré et l'indice topologique , aussi les applications compactes, et leurs applications.

1.3.1 Degré de Brower

THÉORÈME 1.3: *[2]*
Si $A = \{(f, \Omega, y); \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin f(\partial\Omega)\}$, alors il éxiste une unique application $d : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant

- ***Normalisation** : Si $y \in \Omega$,alors $d(Id, \Omega, y) = 1$.*
- ***Additivité** : Si $(f, \Omega, y) \in A$,et Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts disjoints de Ω tels que $y \notin f(\Omega \backslash \Omega_1 \cup \Omega_2)$,alors $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$*
- ***Invariance par homotopie** : Si $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, et $y : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et vérifie $\forall t \in [0, 1]\,, y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, alors $d(h(t, .), \Omega, y(t))$ est indépendant de $t \in [0, 1]$.*

Ce degré vérifie de plus :

Si $(f, \Omega, y) \in A$, $f \in C^1(\bar{\Omega})$, y est valeur régulière de f , et $f^{-1}(y) \cap \Omega = \{x_1, ..., x_n\}$,alors $d(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^{n} sgn(Jf(x_i))$, ($J$ est le jacobien de f en x_i).

Remarques: On a aussi les propriétés suivantes :

1. La propriété essentielle du degré est :

$$d(f, \Omega, y) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \Omega; \qquad f(x) = y.$$

2. Le degré ne dépend en fait que des valeurs de f sur $\partial\Omega$.

Proposition 1.3.1. *Soit X_n un éspace véctoriel de dimension n et X_m un sous-espace véctoriel de X_n de dimension m.*

Si Ω est un ouvert borné de X_n , $f \in C(\bar{\Omega}, X_n)$ vérifie $f(\bar{\Omega}) \subset X_m$ et $y \in X_m \backslash f(\partial\Omega)$, alors $d(Id - f, \Omega, y) = d((Id - f)_{|\overline{\Omega \cap X_m}}, \Omega \cap X_m, y)$.

1.3.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Théorème 1.4: *[2]*

Soit X un éspace de Banach.

Si $A = \{(Id - f, \Omega, y); \Omega$ ouvert borné de X, et $f : \Omega \longrightarrow X$ est compacte ,$y \notin (Id - f)(\partial\Omega)\}$, alors il éxiste une unique application $d : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant

- ***Normalisation** : Si $y \in \Omega$,alors $d(Id, \Omega, y) = 1$.*
- ***additivité** : Si $(Id - f, \Omega, y) \in A$,et Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts disjoints de Ω tels que $y \notin (Id - f)(\Omega \backslash \Omega_1 \cup \Omega_2)$, alors*

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y)$$

- ***Ivariance par homotopie** : Si $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte, et $y : [0, 1] \longrightarrow X$ continue et vérifie $\forall t \in [0, 1]\,, y(t) \notin (Id-h(t, .))(\partial\Omega)$, alors $d(Id-h(t, .), \Omega, y(t))$ est indépendant de $t \in [0, 1]$.*
- ***Invariance par rapport à** y_0 : Si y_1 est dans un voisinage de y_0, alors*

$$d(Id - f, \Omega, y_0) = d(Id - f, \Omega, y_1).$$

- ***In variance sur le bord** : Si $f_{|\partial\Omega} = g_{|\partial\Omega}$, alors pour tout $y_0 \notin f(\partial\Omega)$*

$$d(Id - f, \Omega, y_0) = d(Id - g, \Omega, y_0).$$

- ***Excision** : Soit $\mathrm{F} \in \Omega$ fermé et $y_0 \notin f(\mathrm{F}) \cup f(\partial\Omega)$, alors*

$$d(Id - f, \Omega, y_0) = d(Id - f, \Omega/\mathrm{F}, y_0).$$

Remarques: On a

1. La propriété essentielle du degré est :
   Si $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$,alors il éxiste $x \in \Omega$ telque $f(x) - x = y$.
2. Le degré ne dépend en fait que des valeurs de $Id - f$ sur $\partial\Omega$.

Lemme 1.3.1. *[6] Soit Ω un ouvert borné dans un espace de Banach X, et soit $T : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact.*
s'il existe $u_0 \in X, u_0 \neq 0$ tel que :

$$u - Tu \neq \tau u_0 \qquad \textit{pour tout} \qquad u \in \partial\Omega \qquad \textit{et} \qquad \tau \geq 0,$$

alors , le degré de Leray-schauder $\deg(I - T, \Omega, 0) = 0$.

Lemme 1.3.2. *[6] Soit Ω un ouvert borné dans un espace de Banach X , et $0 \in \Omega$, et soit $T : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact. si*

$$Tu \neq \tau u \qquad \textit{pour tout} \qquad u \in \partial\Omega \qquad \textit{et} \qquad \tau \geq 1,$$

Alors ,le degré de Leray-schauder $\deg(I - T, \Omega, 0) = 1$.

1.3.3 Indice du point fixe

-Dans ce qui suit,on va donner la définition de **l'indice topologique du point fixe**, qui est une éxtension du degré topologique dans le cas où on définit sur l'éspace de Banach considiré une structure de **cône** , et par conséquent, on va donner les définitions qui sont en relation avec l'indice topologique.

Soit X un éspace de Banach réel et K un sous ensemble non vide de X.

Définition 1.3.1. *On a les définiitons suivantes :*

– *K est dit convexe si $\forall x, y \in K$, $\forall t \in [0,1]$: $tx + (1-t)y \in K$.*

– *K est un cone de X si K est fermé convexe vérifiant :*

1-$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in K$; $tx \in K$.

2- Si $x \in K$, et $-x \in K$, alors $x = 0$.

– *K est un **retract** de X s'il éxiste une application $r : X \longrightarrow K$ continue appelée rétraction telle que $rx = x, \forall x \in K$.*

En particulier , si K est un cône de X, alors K est un retract de X.

Aprés avoir donné ces définitions , on a la définition de l'indice du point fixe

Définition 1.3.2. *Soit K un retract de X, Ω un ouvert borné de K , et $f : \Omega \longrightarrow K$ une application compacte.*
On suppose que $f(x) \neq x$ pour $x \in \partial\Omega \cap K$,
Si $r : X \longrightarrow K$ est une rétraction, alors on définit l'entier

$$i(f, \Omega \cap K) = d(Id - f \circ r, r^{-1}(\Omega) \cap B(0,R), 0).$$

f n'ayant pas de point fixe sur $\partial(r^{-1}(\Omega) \cap K)$.
$i(f, \Omega \cap K)$ est bien définit, et ne dépend pas de la rétraction r et du rayon R, il est appelé l'indice du point fixe.

THÉORÈME 1.5: *[2]*
L'indice du point fixe vérifie les propriétés suivantes :
1- Si $i(f, \Omega \cap K) \neq 0$,alors $x \in \Omega$ telque $f(x) = x$.

*2- **Normalisation** : $i(x_0, \Omega \cap K) = 1$ si $x_0 \in \Omega \cap K$.*

*3- **Additivité** : Si $\Omega_i \subset \Omega$ pour $i = 1, 2$,$\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \oslash$,et $0 \notin (Id-T)[\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)) \cap K]$ alors*

$$i(f, \Omega \cap K) = i(f, \Omega_1 \cap K) + i(f, \Omega_2 \cap K)$$

*4-**Invariance par homotopie** : Si* $H : [0,1]\times\overline{\Omega}\cap K \longrightarrow K$ *est continue et* $H(t,x) \neq x, \forall (t,x) \in [0,1]\times\partial\Omega$ *, alors* $i(H(t,.),\Omega\cap K)$ *ne dépend pas de* $t \in [0,1]$.

*5- **Permanence** : Si* Y *est un retract de* X *et* $f(\overline{\Omega}) \subset Y$, *alors*

$$i(f,\Omega\cap K\cap Y) = i(f_{|\overline{\Omega\cap Y}},\Omega_{\cap}K).$$

Remarque 1.3.1. *Si* $\Omega_1 \in \Omega$ *un sous ensemble ouvert tek que* $f(x) \neq x$ *dans* Ω/Ω_1, *alors on la propriété d'**excision** :*

$$i(f,\Omega\cap K) = i(f,\Omega_1\cap K)$$

On définit $K_r = \{u \in K, \|u\| < r\}$ et $\partial K_r = \{u \in K, \|u\| = r\}$.
On rappelle des lemmes importants concernant l'indice du point fixe.

Lemme 1.3.3. *[5, 2, 6] Soit* $A : \overline{K_r} \to K$ *est un opérateur complètement continu. Si* $\mu Au \neq u$ *pour tout* $u \in \partial K_r$, *et* $\mu \in]0,1]$, *alors* $i(A, K_r\cap K) = 1$

Lemme 1.3.4. *[5, 2, 6] Soit* $A : \overline{K_r} \to K$ *est un opérateur complètement continu. Si il existe* $\varphi \in K$ *avec* $\varphi \neq 0$ *tel que*

$$u \neq Au + \mu\varphi \qquad \text{pour tout} \qquad u \in \partial K_r \qquad \text{et} \qquad \mu \geq 0$$

alors $i(A, K_r\cap K) = 0$.

Lemme 1.3.5. *[6, 2] Soit* $A : \overline{K_r} \to K$ *est un opérateur compact*
Si $\|Au\| < \|u\|$ *et* $Au \neq u \quad \forall u \in \partial K_r$, *alors* $i(A, K_r\cap K) = 1$

Lemme 1.3.6. *[6, 2] Soit* $A : \overline{K_r} \to K$ *est un opérateur compact*
Si $Au \not\leq u \quad \forall u \in \partial K_r$, *alors* $i(A, K_r\cap K) = 1$

Lemme 1.3.7. *[6, 2] Soit* $A : \overline{K_r} \to K$ *est un opérateur compact*
Si $\|Au\| < \|u\|$ *et* $Au \neq u \quad \forall u \in \partial K_r$, *alors* $i(A, K_r\cap K) = 1$

Lemme 1.3.8. *[6, 2] Soit $A : \overline{K_r} \to K$ est un opérateur compact et $S : \partial K_r \to K$ est un opérateur compact*

Supposons que

1. $\inf\{\|Su\|, u \in \partial K_r\} > 0$
2. $u - Au \neq tSu, \quad \forall t \geq 0 \quad \forall u \in \partial K_r.$

Alors $i(A, K_r \cap K) = 0.$

Lemme 1.3.9. *[6, 2] Soit $A : \partial K_r \to K$ est un opérateur compact*

Supposons que

1. $\inf\{\|Au\|, u \in \partial K_r\} > 0$
2. $Au \neq tu \quad \forall t \in]0, 1] \quad \forall u \in \partial K_r.$

Alors $i(A, K_r \cap K) = 0.$

Lemme 1.3.10. *[6, 2] Soit $A : \overline{K_r} \to K$ est un opérateur compact*

Supposons que

1. $Au \neq u \quad \forall u \in \partial K_r$
2. $\|Au\| \neq \|u\| \quad \forall u \in \partial K_r.$

Alors $i(A, K_r \cap K) = 0.$

Lemme 1.3.11. *[6, 2] Soit $A : \overline{K_r} \to K$ est un opérateur compact*

Supposons que

1. $Au \not\leq u \quad \forall u \in \partial K_r$
2. $u - Au \notin K.$

Alors $i(A, K_r \cap K) = 0.$

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

1.4.1 Théorème de Schauder

THÉORÈME 1.6: *[8, 2]*

Soit C un sous ensemble convexe, férmé, borné, non vide d'un éspace de Banach X et $K : C \to C$ une application compacte. Alors K admet au moins un point fixe.

1.4.2 Théorème de Leray-schauder

THÉORÈME 1.7: *[8, 2]*

Soit X un éspace de Banach, et soit $L : X \longrightarrow X$ un opérateur compact linéaire,

Si $\lambda \neq 0$ et $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(L)$, ou $\sigma(L)$ est le spectre de L, et Ω est un ouvert borné de X contenant 0, alors $d(Id - \lambda L, \Omega, 0) \neq 0$.

Corollaire 1.4.1. *[8, 2] Soit C un sous ensemble, compact, non vide d'un éspace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moin un point fixe.*

Corollaire 1.4.2. *[8, 2] Soit C un sous ensemble convexe fermé non vide, C non nécéssairement borné d'un éspace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue telle que $f(C)$ est inclus dans un compact de C.*

Alors f admet au moins un point fixe.

1.4.3 Théorèmes de compression et d'expansion d'un cône :

On a le théorème de KRANOSEL'SKII

THÉORÈME 1.8: *[43, 6, 26]*

Soit K un cône dans un espace de BANACH $(E, \|.\|)$ et $0 < r < R$ deux constantes réelles.

Soient $F : \bar{B}_R \cap K \longrightarrow K$ un opérateur complètement continu et supposons les conditions suivantes vérifiées :

1. $\lambda x \neq Fx$ *pour tout* $\lambda \geq 1$ *et* $x \in \partial B_r \cap K$.

2. il existe $x_0 \in K \backslash \{0\}$ *tel que*

$$x \neq Fx + \lambda x_0, \qquad \forall x \in \partial B_R \cap K, \qquad \forall \lambda > 0.$$

Alors, F *admet au moins un point fixe dans* $K \cap (\bar{B}_R \backslash B_r)$

Le cône P définie un ordre partiel sur X donné par $x \succeq y$ si et seulement si $x - y \in P$, et on note $x \succ y$ pour $x - y \in P \backslash 0$.
Ainsi, on a le théorème de Kranosel'skii de type ordre

Théorème 1.9: *[6, 26]*
Soit X *un espace de Banach et soit* $P \subset X$ *un cône de* X. *Supposons que* Ω_1 *et* Ω_2 *deux sous ensembles ouverts de* X *avec* $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ *et soit* $A : P \cap \overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1 \to P$ *un opérateur complètement continu,*
Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1-) $Au \not\succeq u$ *si* $u \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $Au \not\preceq u$ *si* $u \in P \cap \partial\Omega_2$

2-) $Au \not\preceq u$ *si* $u \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $Au \not\succeq u$ *si* $u \in P \cap \partial\Omega_2$

Alors A *admet au moins un point fixe dans* $\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1$

On a le théorème de Kranosel'skii de type norme

Théorème 1.10: *[6, 26]*
Soit X *un espace de Banach et soit* $P \subset X$ *un cône de* X. *Supposons que* Ω_1 *et* Ω_2 *deux sous ensembles ouverts de* X *avec* $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ *et soit* $A : P \cap \overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1 \to P$ *un opérateur complètement continu,*
Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1- $\|Au\| \leq \|u\|$ *si* $u \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Au\| \geq \|u\|$ *si* $u \in P \cap \partial\Omega_2$

2- $\|Au\| \geq \|u\|$ *si* $u \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Au\| \leq \|u\|$ *si* $u \in P \cap \partial\Omega_2$

Alors A admet au moins un point fixe dans $\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1$

1.5 Théorème de Krein-Rutman

Avant de rappeler les théorèmes de KREIN-RUTMAN, on va donner quelques définitions concernant le spectre d'un opérateur dans le cas général où X est un espace de Banach complexe.

1.5.1 Spectre d'un opérateur

Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire , définit sur un ensemle $D(A)$ dense dans X.

Considérons ensuite l'opérateur $A - \lambda Id$ ou λ est un nombre complexe.

Définition 1.5.1. *Le point λ est un point régulier de A si $A - \lambda Id$ est inversible ; l'ensemble des points réguliers s'appelle **ensemble résolvant** de A , et se note $\rho(A)$,*

*Si $\lambda \in \rho(A)$,l'opérateur linéaire $R_\lambda(A) = (A - \lambda Id)^{-1}$ s'appelle **résolvante** de A.*

Définition 1.5.2. *Le complémentaire de $\rho(A)$ dans le plan complexe s'appelle **spectre** de A, et se note $\sigma(A)$.*

On s'intéresse particulièrement au cas A compact, alors on peut voir que le spectre $\sigma(A)$ de tout opérateur compact sur un éspace de Banach de dimension infinie, est un ensemble au plus dénombrable de valeurs propres qui n'admettent que 0 comme point d'accumulation.

1.5.2 Rayon spéctral d'un opérateur linéaire

THÉORÈME 1.11: *[48]*

Soit A un opérateur linéaire dans un éspace de Banach complexe, alors la limite

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

éxiste et elle est définie, on a la relation

$$\inf_{n\geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A) \leq \|A\|.$$

Cette limite s'appelle le rayon spéctrale de l'opérateur A.

On rappelle les définitions suivantes,

Définition 1.5.3. *Soit X un éspace de Banach, $K \subset X$ est un cône et A un opérateur linéaire compact.*
Un cône K est dit solide si l'intérieur de K est non vide ($\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$).
Il est est dit total si $X = \overline{K - K}$.
Donc si K est solide, il est total

Définition 1.5.4. *A est un opérateur positif si $AK \subset K$, c'est à dire $Ax \geq 0$ pour $x > 0$*
A est un opérateur fortement positif si $A(K/\{0\}) \subset \overset{\circ}{K}$, c'est à dire $Ax \gg 0$ pour $x > 0$.

Le cône K définie un ordre partiel sur X donné par $x \succeq y$ si et seulement si $x - y \in P$, et on note $x \succ y$ pour $x - y \in P/\{0\}$.
Si le cône K est total, le symbole $x \ll y$ signifie que $y - x \in \overset{\circ}{K}$
On donne maintenant les théorèmes de KREIN-RUTMAN

THÉORÈME 1.12: *[5, 54, 27]*
Soit X un éspace de Banach,$K \subset X$ est un cône total et A un opérateur linéaire, compact, et positive avec un rayon spéctral $r(A) > 0$, alors $r(A)$ est une valeur propre de l'opérateur A ainsi que A^* associée à des fonctions propres positives dans K et dans K^*.

THÉORÈME 1.13: *[5]*
Soit X un éspace de Banach, $K \subset X$ est un cône total et A un opérateur linéaire compact et fortement positive avec un rayon spéctral $r(A) > 0$, alors

1. *$r(A) > 0$, $r(A)$ est une valeur propre simple de fonction propre $v \in \overset{\circ}{K}$ et il n'existe pas d'autres valeurs propres avec des fonctions propres positives.*
2. *$|\lambda| < r(A)$ pour toutes les valeurs propres $\lambda \neq r(A)$.*
3. *Pour $y > 0$, l'équation $\lambda x - Ax = y$ admet une unique solution $x > 0$ si $\lambda > r(A)$ et n'admet pas de solutions dans K si $\lambda \leq r(A)$. L'équation $r(A)x - Ax = -y$ n'admet pas de solutions dans K.*
4. *Si $B \in L(X)$ (c'est à dire B est un opérateur linéaire dans X), et $Bx \geq Ax$, alors $r(B) > r(A)$ si $Bx \gg Ax$ pour $x > 0$.*

1.6 Equation différentielle linéaire du deuxième ordre

Soit l'équation différentielle du deuxieme ordre sous sa forme générale

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = r(t). \tag{1.6.1}$$

où $p, q \in L^1(J, \mathbb{R})$, $J =]a, b[$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$. Une solution de l'équation différentielle linéaire du deuxieme ordre est une fonction $u = f(t) \in C(\mathbb{R})$ qui satisfait l'équation linéaire presque pour tout point $t \in [a, b]$.

Si nous écrivons l'équation (1.6.1) sous forme d'un opérateur

$$L(u) = r(t), \qquad \text{ou} \qquad L \equiv d^2/dt^2 + pd/dt + q \tag{1.6.2}$$

on sait que L est un opérateur linéaire parceque d/dt est linéaire, donc pour des constantes α, β, on a $L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2)$.

Lemme 1.6.1. *Si $L(u) = r(t)$, et $L(v) = s(t)$, alors pour $w = \alpha u + \beta v$ on a $L(w) = \alpha r(t) + \beta s(t)$*

La preuve de ce lemme est triviale, mais le résultat a son importance dans le cas où

$r = s = 0$, ce qui implique que toute combinaison linéaire des solutions de l'équation différentielle homogène est aussi une solution pour l'équation homogène, ce qu'on appelle le principe de superposition. On a le lemme

Lemme 1.6.2. *[15] L'unique solution $g(t)$ pour l'équation homogène*
$u'' + pu' + qu = 0$
définie sur l'intervalle $[a, b]$ vérifions les conditions $g(0) = g'(0) = 0$ est la solution triviale $g(t) \equiv 0$.

Soit $f_1(t)$ et $f_2(t)$ n'importes quelles deux solutions de l'équation

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0. \tag{1.6.3}$$

définie sur l'intervalle $[a, b]$.

Supposons que les deux vecteurs $v_1 = (f_1(a), f_1'(a)), v_2 = (f_2(a), f_2'(a))$ sont linéairement indépendants, alors le vecteur $(g(a), g'(a))$ peut s'écrire comme étant une combinaison linéaire de v_1 et v_2 en donnant les deux équations

$$g(a) = c_1 f_1(a) + c_2 f_2(a),$$

$$g'(a) = c_1 f_1'(a) + c_2 f_2'(a),$$

Considérons maintenant la fonction $u(t) = g(t) - c_1 f_1(a) - c_2 f_2(a)$ qui satisfait l'équation (1.6.3) et les conditions initiales $u(a) = u'(a) = 0$, par le lemme 2 on a $u(t) = 0$, et par conséquent $g(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$, donc on a le théorème suivant

THÉORÈME 1.14: *[15]*
Soit f_1 et f_2 deux solutions de l'équation différentielle homogène

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0.$$

ou p et q sont des fonctions L^1 sur l'intervalle $[a,b]$.

si les vecteurs $(f_1(a), f_1'(a))^\tau$, $(f_2(a), f_2'(a))^\tau$ sont linéairement indépendants, alors toute solution $g(t)$ de l'équation homogène peut s'écrire en une combinaison linéaire $g(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ de f_1 et f_2 ou c_1, c_2 sont des constantes.

1.6.1 Wronksien

Deux solutions qui sont linéairement indépendantes forment toujours une base dans l'éspace des solutions d'équation différentielle linéaire homogène du deuxieme ordre,on a alors la définition suivante

Définition 1.6.1. *Le wronksien de deux fonctions différentiables f_1 et $f_2$est*

$$W(f_1, f_2, t) = f_1'(t) f_2(t) - f_1(t) f_2'(t)$$

Le wronksien de n'importe quelles deux solutions f_1, f_2 satisfait

$$W(f_1, f_2, t) = W(f_1, f_2, c) \exp(-\int_c^t p(x)dx)$$

ou $c \in [a,b]$

Preuve *:* Evidemment, en dérivant le wronksien on a

$$\frac{d}{dt} W(f_1, f_2, t) = f_1''(t) f_2(t) - f_1(t) f_2''(t)$$

comme f_1, f_2 sont des solution de (1.2.4), on en déduit

$$\frac{\partial}{\partial t} W(f_1, f_2, t) = -p(t) W(f_1, f_2, t)$$

d'où le résultat. □

Une conséquence de cette proposition est que W ne change pas de signe sur $[a,b]$, en particulier s'il s'annule en un point,alors W est partout nul.

Si $W = 0$ pour deux solutions , alors elles sont linéairement dépendantes.

1.6.2 Détermination de la deuxième solution pour l'équation homogène

Supposons qu'on a une solution non triviale $f_1$pour l'équation homogène, alors on peut avoir l'autre solution qui est linéairement indépendante par rapport à f_1 en utilisant la proposition si-dessus, on a

$$f_1'(t)f_2(t) - f_1(t)f_2'(t) = W(f_1, f_2, t) = W(f_1, f_2, c)\exp(-\int_c^t p(x)dx)$$

par coséquent

$$\frac{d}{dt}(\frac{f_2}{f_1}) = \frac{W(f_1, f_2, c)\exp(-\int_c^t p(t)dt)}{f_1^2}$$

ce qui nous donne aprés calcul

$$f_2(t) = f_1(t)\{C + K\int_t^\alpha \frac{1}{f_1^2(s)}\left[\exp(-\int_c^t p(x)dx)\right]ds\}$$

ou $K = W(c)$ est une constante arbitraire non nulle, on n'a pas a savoir $W(t)$ pour calculer $W(c)$ par conséquent on peut prendre K pour une constante arbitraire, et pour faciliter les calculs , on prend directement $C = 0$

1.6.3 La solution générale pour une équation du deuxième ordre

les équations différentielles linéaires non homogènes peuvent être disscuter d'une façon élégante en utilisant la fonction de Green dans le cas des problemes aux limites, car on a des conditions limites bien précises, ici on donne des conditions arbitraires et on va donner une solution générale pour l'équation non homogène.

Supposons $g(t)$ une solution particulière de l'équation

$$L(u) = u'' + pu' + qu = r(t)$$

et soit $h(t)$ une autre solution de cette équation, par conséquent $h(t) - g(t)$ est une solution pour l'équation homogène donc peut s'écrire comme une combinaison linéaire de f_1 et f_2, on a donc

$$h(t) = f_1(t) + f_2(t) + g(t) \tag{1.6.4}$$

On en déduit que si on a une solution particulière pour l'équation non homogène, et deux solutions pour l'équation homogène, alors on donne la solution générale de l'équation non homogène comme étant la somme de la solution particulière avec la solution générale de l'équation homogène.

Dans ce qui suit, on verra que le fait d'avoir une solution générale pour l'équation homogène, peut nous donner une solution particulière pour l'équation non homogène en utilisant la méthode de la variation de la constante, cette méthode peut aussi etre utilisée pour avoir une deuxième solution pour l'équation homogène.

Soit f_1 et f_2 deux solutions pour l'équation homogène, et soit $g(t)$ la solution recherchée.

On écrit $g(t) = f_1(t)v(t)$, et on remplace $g(t)$ dans l'équation non homogène ; on trouve

$$v'' + (p + \frac{2f_1'}{f_1})v = \frac{r(t)}{f_1}$$

C'est une équation linéaire du premier ordre par rapport à v' qui a une solution de la forme (en tenant compte que $p(t) = -\frac{W'}{W}$)

$$v' = \frac{W(t)}{f_1^2(t)} \left[C + \int_a^t \frac{f_1(x)r(x)}{W(x)} dx \right].$$

ou $W(t)$ est le wronksien.

On posant $C = 0$ (on cherche une solution particulière), on obtient

$$\begin{aligned} dv/dt &= \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \int_a^t \frac{f_1(x)r(x)}{W(x)} dx \\ &= \frac{d}{dt}[\frac{f_2(t)}{f_1(t)}(t) \int_a^t \frac{f_1(x)r(x)}{W(x)} dx] - \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \frac{d}{dt}(\int_a^t \frac{f_1(x)r(x)}{W(x)} dx) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$v(t) = \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \int_a^t \frac{f_1(x)r(x)}{W(x)} dx - \int_a^t \frac{f_2(x)r(x)}{W(x)} dx$$

ce qui nous donne la solution particulière

$$g(t) = f_1(t)v(t) = \int_a^t \frac{f_2(t)f_1(x) - f_1(t)f_2(x)}{W(x)} r(x)dx. \tag{1.6.5}$$

Ainsi , on a une solution particulière $g(t)$, et donc on peut obtenir une solution générale $h(t)$ de l'équation non homogène

$$h(t) = g(t) + \alpha f_1(t) + \beta f_2(t).$$

1.7 Problème de sturm-liouville

Dans cette partie de ce chapitre, on va rappeler quelques résultats concernant le problème de STURM-LIOUVILLE

Soit l'équation différentielle linéaire :

$$-(p(t)y')' + q(t)y = f \qquad \text{sur} \qquad J \tag{1.7.1}$$

associée aux conditions initiales

$$y(c) = h, \qquad py'(c) = k, \qquad c \in J, \qquad h, k \in \mathbb{R} \tag{1.7.2}$$

où

$$J =]\,a, b\,[, \qquad -\infty \leq a < b \leq +\infty, \qquad 1/p, q, f : J \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.7.3}$$

1.7.1 Existence et unicité de solutions

Définition 1.7.1. *y est une solution de l'équation (1.7.1) , si $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction absolument continue*[1]*, ainsi que $y^{[1]} = py'$ sur tout compact de J, et l'équation (1.7.1) est satisfaite presque pour tout $y \in J$.*

Théorème 1.15: *Supposons que*

$$1/p, q, f \in L_{loc}(J, \mathbb{R}) \tag{1.7.4}$$

alors toute équation différentielle (1.7.1)-(1.7.2) admet une unique solution réelle y non triviale définie sur J.

Preuve *:* Soit : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ q & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \qquad , Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix}$

L'équation (1.7.1) est équivalente au système du premier ordre

$$Y' = PY + F \qquad \text{sur} \qquad J \tag{1.7.5}$$

dans le sens où, si toute solution de l'équation (1.7.1), alors le vécteur Y est solution du système (1.7.5), et inversement, si Y est solution du système, alors y est solution de l'équation(1.7.1). Montrons que le système (1.7.5) admet une unique solution.

On costruit une solution par la méthode des aproximations succéssives ;

On définit la suite

$$Y_0(t) = C, \qquad Y_{n+1}(t) = C + \int_u^t (PY_n + F), \qquad t \in J, \qquad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.7.6}$$

1. Une fonction est absolument continue si c 'est une primitive d'une fonction $L^p([a,b])$

Donc Y_n est une fonction continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, on vérifie que la suite $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformément vers une fonction Y sur tout compact de J et que cette limite est l'unique solution de l'équation intégrale

$$Y(t) = C + \int_u^t (PY + F), \qquad t \in J \tag{1.7.7}$$

Soit $b \in J$ telque $b > u$, et posons

$$\varphi(t) = \int_u^t |P(s)|\, ds, \qquad \psi_n(t) = max_{u \leq s \leq t} |Y_{n+1} - Y_n|\,, u \leq t \leq b \tag{1.7.8}$$

alors ;

$$|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| = \int_u^t P(s)[Y_n(s) - Y_{n-1}(s)]ds, \qquad t \in J, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.7.9}$$

on a par suite

$$\begin{aligned}
|Y_2(t) - Y_1(t)| &\leq \psi_0(t) \int_u^t |P(s)|\, ds = \psi_0(t)\varphi(t) \leq \psi_0(b)\varphi(b). \\
|Y_3(t) - Y_2(t)| &\leq \int_u^t |P(s)|\, |Y_2(t) - Y_1(t)|\, ds \\
&\leq \int_u^t |P(s)|\, \psi_0(s)\varphi(s)ds \\
&\leq \psi_0(s) \int_u^t |P(s)|\, \varphi(s)ds \\
&\leq \psi_0(b)\varphi(t)^2(t)/2 \\
&\leq \psi_0(b)\varphi(t)^2(b)/2. \qquad u \leq t \leq b.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \leq \psi_0(b)\varphi^n(b)(b)/n!. \qquad u \leq t \leq b. \tag{1.7.10}$$

Pour toutk$\in \mathbb{N}$,

$$|Y_{n+k+1}(t) - Y_n(t)| \leq \psi_0(b)\varphi^n(b)/n![1 + \frac{\varphi(b)}{n+1} + \frac{\varphi^2(b)}{(n+1)(n+2)} + ...] \tag{1.7.11}$$

ce qui implique pour $n \to +\infty$, la suite $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformément vers la fonction Y sur $[u, b]$.

Pour voir que la solution est unique, on suppose Z une autre solution, donc Z est continue et par suite $|Y - Z|$ est majorée par une constante M sur $[u, b]$; alors

$$|Y(t) - Z(t)| = \left|\int_u^t P(s)\,[Y - Z]\,ds\right| \leq M \int_u^t |P(s)|\,ds \leq M\varphi(t).$$

Avec le même raisonnement, on trouve

$$|Y(t) - Z(t)| \leq M\varphi^n(t)/n! \leq M\varphi^n(b)/n!$$

donc $Y = Z$ sur $[u, b]$, on procède de la même façon pour le cas $b < u$. on conclut que l'équation différentielle (1.7.1) avec les conditions initiales (1.7.2) admet une unique solution réelle y dans J. $\square$

Soit $P \in M_n(L_{loc}(J))$, d'aprés le théorème précédent on sait que pour tout point s de J, il existe une matrice solution X du systeme $Y' = PY$ satisfaisant $X(s) = I_n$.

Définition 1.7.2. ***La résolvante***

Pour tout s fixé dans J, on définit la matrice solution fondamentale du systeme $Y' = PY$ par la matrice $\Phi(., s, P)$ satisfaisant

1. $\Phi(s, s, P) = I_n$.
2. $\Phi(t, s, P)$ *est inversible* $\forall t, s \in J$.
3. $\Phi(t, s, P) = Y(t)Y^{-1}(s)$.

1.7.2 Théorèmes de comparaison et de séparation de Sturm

On considère l'équation différentielle

$$-(p(t)y')' + q(t)y = \lambda w(t)y \qquad t \in J \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.7.12}$$

où

$$1/p, q, w \in L_{loc}(J, \mathbb{R}), \qquad J =]\, a, b\, [. \tag{1.7.13}$$

Les théorèmes de séparation et de comparaison de STURM sont parmi les plus importants et les plus célèbres résultats dans la théorie des équations différentielles linéaires, mais avant de les annoncer, on rappelle que les zéros des solutions non triviales sont toujours isolés dans touts les points réguliers de l'équation différentielle.

THÉORÈME 1.16: *[55]*
Considérons l'équation (1.7.12)-(1.7.13), et supposons $p > 0$, alors les zéros de n'importe quelle solution non triviale y de (1.7.12) sont isolés dans l'intérieur de J, et aussi sur les points du bord de J s'ils sont des points réguliers, et uniquement les points singuliers peuvent être un point d'accumulation des zéros d'une solution non triviales.

. *Théorème de séparation de* Sturm
Soit $p > 0$, supposons que y, z sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.7.12) , alors z admet au moins un zéro entre n'importe quels deux zéros de y.

On cosidère l'équation

$$-(p(t)y')' + q(t)y = 0 \qquad t \in J, \qquad p > 0, \qquad 1/p, q \in L_{loc}(J, \mathbb{R}). \tag{1.7.14}$$

. *Théoreme de comparaison de* Sturm

Soit l'équation (1.7.14) , et on considère l'équation

$$-(p_1(t)z')' + q_1(t)z = 0 \qquad t \in J, \qquad p > 0, \qquad 1/p_1, q_1 \in L_{loc}(J, \mathbb{R}). \tag{1.7.15}$$

satisfaisant

$$q_1 \geq q, \qquad 0 < p_1 \leq p. \tag{1.7.16}$$

Si y est une solution de (1.7.14) satisfaisant $y(c) = y(d) = 0$ pour certains $c, d \in J$, alors toute solution de (1.7.15) a au moins un zéro dans l'intervalle fermé $[c, d]$.

1.7.3 Problème aux limites

On considère l'équation

$$-(p(t)y')' + q(t)y = \lambda wy + f, \qquad t \in J, \qquad p > 0, \tag{1.7.17}$$

$$AY(a) + BY(b) = 0, \qquad Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix} \tag{1.7.18}$$

où

$$1/p, q, w \in L_{loc}(J, \mathbb{R}), \qquad J =]\, a, b\,[.$$

et
$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ q & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \qquad , Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix}, A, B \in M_2(\mathbb{R})$

On en déduit que l'équation (1.7.17) est équivalent au systeme du premier ordre

$$Y' = (P - \lambda W)Y + F \qquad \text{sur} \qquad J, \qquad AY(a) + BY(b) = 0, \qquad Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix} \tag{1.7.19}$$

Soit $\Phi(.,.,\lambda)$ la matrice solution fondamentale du systeme homogène $Y' = (P - \lambda W)Y$. Noter que $\Phi(t, s, \lambda) = \Phi(t, a, \lambda)\Phi(a, s, \lambda)$, ceci vient du fait que $\Phi(t, s) = Y(t)Y^{-1}(s)$.

Théorème 1.17: *[55]*
Soient les équations (1.7.17)-(1.7.18) et (1.7.19) et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Lorsque $f = 0$, le problème aux limites (1.7.17)-(1.7.18) admet uniqement la solution triviale comme solution.(De même pour (1.7.19)-(1.7.18))*
2. *La matrice $[A + B\Phi(b, a, \lambda)]$ est inversible.*
3. *Pour tout $f \in L^1(J, \mathbb{R})$, le problème aux limites (1.7.17)-(1.7.18) admet une unique solution*

Si l'une de ces assertions est vérifiée, et pour la fonction matrice $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$, définie par

$$K(t, s, \lambda) = \begin{cases} \Phi(t, a, \lambda)U(\lambda)\Phi(b, s, \lambda) & a \leq t < s \leq b \\ \Phi(t, a, \lambda)U(\lambda)\Phi(b, s, \lambda) + \Phi(t, s, \lambda) & a \leq s < t \leq b \end{cases}$$

où $U(\lambda) = -[A + B\phi(b, a, \lambda)]^{-1}B$;

alors, pour tout $f \in L^1$, l'unique solution y de (1.7.17)-(1.7.18) et l'unique solution

Y de (1.7.19)-(1.7.18) sont données (respectivement) par

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^b k_{12}(t,s,\lambda) f(s) ds \qquad a \leq t \leq b. \\ Y(t) &= \int_a^b K(t,s,\lambda) F(s) ds \qquad a \leq t \leq b. \end{aligned} \tag{1.7.20}$$

La fonction $k_{12}(t,s)$ est la fonction de GREEN.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Chapitre 2

Quelques éléments de bases pour les PLP

2.1 Problème aux Valeurs Propres :

On considère l'équation différentielle

$$-(p(t)u')' + q(t)u = \lambda w(t)u \qquad t \in [0,T]\,. \tag{2.1.1}$$

assujeties à l'une des conditions aux limites(2.1.2) ou (2.1.3) suivantes :

$$u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \tag{2.1.2}$$

$$u(0) = -u(T) \qquad u^{[1]}(0) = -u^{[1]}(T) \tag{2.1.3}$$

où

$$u^{[1]}(t) = p(t)u'(t)$$

Les fonctions p et q sont supposées vérifier la condition suivante :

$$\begin{cases} 1/p, q, w \in L^1\,[0,T] \\ p > 0, w > 0 \qquad \text{sur} \qquad [0,T] \end{cases}$$

Les conditions aux limites (2.1.2) sont dites périodiques, et les conditions (2.1.3) sont dites anti-périodiques.

Le problème aux valeurs propres a toujours joué un rôle axiale dans l'étude de l'éxistence des solutions pour les problèmes. Concernant les problèmes aux limites périodiques ou anti-périodiques ; on rappelle le théorème suivant :

Théorème 2.1: *[25, 34, 55]*
Les problèmes aux valeurs propres (2.1.1)-(2.1.2) et (2.1.1)-(2.1.3) admettent deux suites réelles croissantes de valeurs propres rangées comme suit

$$\overline{\lambda}_0 < \underline{\lambda}_1 \leq \overline{\lambda}_1 < .... < \underline{\lambda}_m \leq \overline{\lambda}_m \leq .... \qquad (Vp)$$

Telles que :

1. $\underline{\lambda}_m \longrightarrow +\infty$ *et* $\overline{\lambda}_m \longrightarrow +\infty$ *lorsque* $m \longrightarrow +\infty$.
2. λ *est une valeur propre du probleme (2.1.1)-(2.1.2) (respec.(2.1.1)-(2.1.3)) si* $\lambda = \underline{\lambda}_m$*, ou bien* $\lambda = \overline{\lambda}_m$*, pour* $m = 2k \in \mathbb{Z}^+$ *est pair. (respec.* $m = 2k + 1 \in \mathbb{N}$ *est impair) .*
3. *Les valeurs propres du problème (2.1.1)-(2.1.2) (respectivement (2.1.1)-(2.1.3)) sont dites valeurs propres périodiques (respectivement valeurs propres anti-périodiques).*
4. *Pour* $\lambda = \overline{\lambda}_0$*, il existe une unique fonction propre* v_0 *(*$\overline{\lambda}_0$ *est une valeur propre simple).*
5. *Si* $\underline{\lambda}_{2i} < \overline{\lambda}_{2i}$ *pour tout* $i \geq 0$*, il y a une unique fonction propre* v_{2i} *pour* $\lambda = \underline{\lambda}_{2i}$*, et une unique fonction* $\tilde{v}_{2i}$ *pour* $\lambda = \overline{\lambda}_{2i}$*.*
6. *Si toutefois* $\underline{\lambda}_{2i} = \overline{\lambda}_{2i}$ *, alors il y a deux fonctions propres independantes* v_{2i} *et* $\tilde{v}_{2i}$ *pour la même valeur propre double* $\lambda = \underline{\lambda}_{2i} = \overline{\lambda}_{2i}$*.*

Un résultat similaire est valable pour les cas $\underline{\lambda}_{2i+1} < \overline{\lambda}_{2i+1}$ *et* $\underline{\lambda}_{2i+1} = \overline{\lambda}_{2i+1}$ *, où la fonction propre est notée* w_{2i+1} *et* $\tilde{w}_{2i+1}$*.*

v_0 *n'admet pas de zero dans* $[0, 1]$ *; et* v_{2i} *et* $\tilde{v}_{2i}$*,* $i \geq 0$*, ont exactement* $2i + 2$ *zeros chacunes dans* $[0, 1]$ *; et* w_{2i+1} *et* $\tilde{w}_{2i+1}$*, ont éxactement* $2i + 1$ *zeros chacunes dans* $[0, 1]$

.

Dans ce qui suit, on va présenter quelques propriétés des valeurs propres des problèmes (2.1.1)-(2.1.2) et (2.1.1)-(2.1.3) que nous éstimons important de les rappeler.
Soit $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les suites des valeurs propres associées à l'équation différentielle (2.1.1) assujeties réspectivement aux conditions aux limites de DIRICHLET
$(u(0) = u(T) = 0)$ et de NEUMANN $(u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) = 0)$, on a la comparaison suivante,

Proposition 2.1.1. *[55, 25] Les suites $(\overline{\lambda}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\underline{\lambda}_i)_{i\in\mathbb{N}}$,
$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont rangées comme suit :*

$$\nu_0 < \overline{\lambda}_0 < \underline{\lambda}_1 \leq \mu_0, \nu_1 \leq \overline{\lambda}_1 < \underline{\lambda}_2 \leq \mu_1, \nu_2 \leq \overline{\lambda}_2 < \underline{\lambda}_3 \leq \mu_2, \nu_3 \leq \overline{\lambda}_3 < \underline{\lambda}_4 ...$$

où μ_i, ν_j signifit qu'on n'a pas d'inégalité entre les deux valeurs de propres de DIRICHLET et NEUMANN.

Dans le cas particulier où $q(t) \geq 0$, on a le théorème :

THÉORÈME 2.2: *[55]*
Supposons la condition (H) vérifiée, si de plus $q(t) \geq 0$; alors les valeurs propres du problème de STURM-LIOUVILLE (2.1.1)-(2.1.2) sont toutes positives.

Dans ce qui reste de ce chapitre, nous supposons que $p \equiv 1$, et nous allons présenter d'autres propriétés de la suite des valeurs propres $(\overline{\lambda}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\underline{\lambda}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Désignons par $(\lambda_i^\theta)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres de l'équation $(2.1.1) - (CL_\theta)$ où (CL_θ) est la condition aux limites

$$u(0)\sin\theta + u'(0)\cos\theta = u(T)\sin\theta + u'(T)\cos\theta = 0 \qquad CL_\theta$$

où $\theta \in [0, \pi]$, alors le problème admet une suite de valeurs propres tendant vers ∞,

$$\lambda_0^\theta(q) < \lambda_1^\theta(q) < \lambda_2^\theta(q) < ... < \lambda_k^\theta(q) < ...$$

A noter que $CL_{\frac{\pi}{2}}$ corresponds au cas de DIRICHLET, et CL_0 corresponds au cas de NEUMANN . On a la propriété

Proposition 2.1.2. *[58, 24, ?] Pour tout $k \in N$ et $0 \leq \theta \leq \pi$,*
on a $\underline{\lambda}_k(q) = \min_{s\in R} \lambda_k^\theta(q_s)$ et $\overline{\lambda}_k(q) = \max_{s\in R} \lambda_k^\theta(q_s)$, où $q_s(t) \equiv q(t+s)$ sont des translations de la fonction $q(t)$.
En outre, la premiere valeur propre périodique $\overline{\lambda}_0$ peut etre éxprimée en fonction de la première valeur propre de NEUMANN*, $\overline{\lambda}_0(q) = \max_{s\in R} \lambda_0^0(q_s)$.*

On donne la définition de la constante $K(\alpha)$ appelée *meilleure constante de* SOBOLEV , Pour $\alpha \in [1, +\infty]$, $K(\alpha)$ est la meilleure constante parmi les constantes $C > 0$ satisfaisantes

$$C\left\|u\right\|_\alpha^2 \leq \left\|u'\right\|_2^2. \qquad \forall u \in H_0^1\left[0, T\right]$$

donné par

$$K(p) = \inf_{u\in H_0^1]0,T]} \frac{\left\|u'\right\|_2^2}{\left\|u\right\|_\alpha^2}$$

et la constante de SOBOLEV $K(\alpha)$ est déterminée dans [44] par la formule

$$K(\alpha) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha T^{1+\frac{1}{2\alpha}}}\left(\frac{2}{2+\alpha}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha})}\right)^2 & 1 \leq \alpha < +\infty \\ \frac{4}{T} \qquad \alpha = +\infty \end{cases}$$

Où Γ est la fonction Gamma d'ELEUR. La première valeur propre anti-périodique vérifie en particulier :

Proposition 2.1.3. *[60] On a l'inégalité suivante :*

$$\underline{\lambda}_1(q) \geq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2\left(1 - \frac{\|q\|_\alpha}{K(2\alpha^*)}\right)$$

où α^* est l'éxposant conjugué de α, $(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^*} = 1)$.

On en déduit la proposition suivante

Proposition 2.1.4. *[60] Supposons que $q \in L^{\alpha}[0,1]$ et vérifie les conditions suivantes :*

$$\int_0^1 q(t)dt > 0, \qquad \|q_-\|_\alpha < K(2\alpha^*)$$

tel que $q_-(t) = \max\{-q(t), 0\}$.

Alors, $\underline{\lambda}_1 \geq 0$.

Une solution $u(t)$ de (2.2.1) est dite oscillatoire si $u(t)$ admet une infinité de zéros ; la proposition suivante donne une relation de caractère oscillatoire des solutions de (2.1.1)

Proposition 2.1.5. *[59] L'équation (2.1.1)- vérifie :*

1. *Si $\lambda \leq \overline{\lambda}_0(q)$, alors toute solution non triviale de (2.1.1) n'est pas oscillatoire , plus précisément, $u(t)$ admet au plus une seule racine.*
2. *Si $\lambda > \overline{\lambda}_0(q)$, toute solution non triviale $u(t)$ est oscillatoire, plus précisément,$u(t)$ admet une infinité de zéros.*

2.2 Fonction de Green :

On considère le PLP linéaire non homogène suivant pour tout $h \in L^1[0,T]$:

$$\begin{cases} -(p(t)u')' + q(t)u = h(t) \qquad t \in [0,T] \\ u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \end{cases} \tag{2.2.1}$$

On suppose que les coefficients $p(t)$ et $q(t)$ de l'équation (2.2.1) sont des fonctions réelles mesurables qui sont définies sur $[0,T]$ et satisfaisant la conditions (H)

Le problème homogène associé à (2.2.1) est :

$$\begin{cases} -(p(t)u')' + q(t)u = 0 \qquad t \in [0,T] \\ u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Définition 2.2.1. *On appelle fonction de* GREEN *associée à l'équation (2.2.2) , une fonction* $G : [0,T] \times [0,T] \to R$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. G *est continue sur* $[0,T] \times [0,T]$
2. G *est symétrique :* $G(t,s) = G(s,t), \forall (t,s) \in [0,T]^2$
3. $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ *est continue pour tout* $t \neq s$
4. $\frac{\partial G}{\partial t}(0,s) = \frac{\partial G}{\partial t}(T,s)$ *pour tout* $s \in]0,T[$
5. *La fonction partielle* $t \to G(t,s)$ *est solution de l'équation (2.2.2) pour tout* $t \neq s$

On a le théorème :

THÉORÈME 2.3: *On suppose que l'unique solution du problème (2.2.2) est la solution triviale, alors le problème aux limites (2.2.1) admet une unique fonction de* GREEN $G(t,s)$ *telle que* $u(t)$ *est solution de (2.2.1) équivaut à*

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds.$$

Preuve *:* Soit φ_1, φ_2 les deux soltions linéairement indépendantes pour l'équation homogène

$$-(p(t)u')' + q(t)u = 0$$

satisfaisant les conditions initiales

$$\varphi_1(0) = 1 \qquad \varphi_1^{[1]}(0) = 0$$
$$\varphi_2(0) = 0 \qquad \varphi_2^{[1]}(0) = 1$$

La solution de l'équation générale de (2.2.1) s'écrit sous la forme :[1]

$$u(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \int_0^T (\varphi_2(t)\varphi_1(s) - \varphi_1(t)\varphi_2(s))\, h(s)ds \qquad t \in [0,T].$$

1. chapitre 1,1.6.3

Où $c_i \in R$ sont des constantes. Pour que $u(t)$ soit T-périodique , il est nécéssaire et suffisant que c_i satisfait les conditions

$$c_1 = \varphi_1(T)c_1 + \varphi_2(T)c_2 + \int_0^T (\varphi_2(T)\varphi_1(s) - \varphi_1(T)\varphi_2(s))\, h(s)ds$$

$$c_2 = \varphi_1^{[1]}(T)c_1 + \varphi_2^{[1]}(T)c_2 + \int_0^T \left(\varphi_2^{[1]}(T)\varphi_1(s) - \varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(s)\right) h(s)ds.$$

Ce qui nous donne :

$$c_1(1 - \varphi_1(T)) = \varphi_2(T)c_2 + \int_0^T (\varphi_2(T)\varphi_1(s) - \varphi_1(T)\varphi_2(s))\, h(s)ds$$

D'autre part

$$-\varphi_1^{[1]}(T)c_1 = (\varphi_2^{[1]}(T) - 1)c_2 + \int_0^T \left(\varphi_2^{[1]}(T)\varphi_1(s) - \varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(s)\right) h(s)ds.$$

Par suite

$$(1 - \varphi_1(T)) \left[(\varphi_2^{[1]}(T) - 1)c_2 + \int_0^T \left(\varphi[1]_2(T)\varphi_1(s) - \varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(s)\right) h(s)ds\right]$$

$$= -\varphi_1^{[1]}(T) \left[\varphi_2(T)c_2 + \int_0^T (\varphi_2(T)\varphi_1(s) - \varphi_1(T)\varphi_2(s))\, h(s)ds\right]$$

Comme

$$D = \varphi_2^{[1]}(T) + \varphi_1(T) - 2 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2^{[1]}(T)\varphi_1(T) - \varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(T) = 1.$$

On trouve alors :

$$c_2 = \frac{1}{2 - (\varphi_2^{[1]}(T) + \varphi_1(T)} \int_0^T \left((\varphi_2^{[1]}(T) - 1)\varphi_1(s) - \varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(s)\right) h(s)ds.$$

Puis aprés, on trouve

$$c_1 = \frac{1}{2 - (\varphi_2^{[1]}(T) + \varphi_1(T)} \int_0^T (\varphi_2(T)\varphi_1(s) + (1 - \varphi_1(T))\varphi_2(s))\, h(s)ds$$

On remplaçons dans l'équation c_1 et c_2, on trouve

$$u(t) = \int_0^T \left[\frac{\varphi_2(T)\varphi_1(t)\varphi_1(s)}{D} - \frac{\varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(t)\varphi_2(s)}{D} \right] h(s)ds$$

$$+ \begin{cases} \int_0^T (\frac{\varphi_2^{[1]}(T)-1}{D}\varphi_1(t)\varphi_2(s) - \frac{\varphi_1(T)-1}{D}\varphi_1(s)\varphi_2(t))h(s)ds. & 0 \leq s \leq t \leq T. \\ \int_0^T (\frac{\varphi_2^{[1]}(T)-1}{D}\varphi_1(s)\varphi_2(t) - \frac{\varphi_1(T)-1}{D}\varphi_1(t)\varphi_2(s))h(s)ds. & 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases}$$

d'ou le résultat . □

2.3 Principe du Maximum et de l'Anti-Maximum :

Le Principe du Maximum (PM), et de l'Anti-Maximum (PAM), sont des outils fondamentaux dans de nombreux problèmes. De manière générale, les critères du (PM) et du (PAM) sont liés à l'emplacement des valeurs propres.

Dans cette partie, nous donnons les critères du (PM) et du (PAM) pour les problèmes périodiques d'équations différentielles ordinaires. Les (PM) et (PAM) ne sont pas seulement liés aux valeurs propres périodiques, mais aussi aux valeurs propres anti-périodiques. L'objectif principal est de donner plusieurs critères optimaux - du (PM) et du (PAM) du problème périodique - qui sont exprimés à l'aide des valeurs propres, ou la fonction de Green.

Etant donné une fonction 1-périodique $q \in L^1[0,1]$, on définit un opérateur différentiel linéaire

$$(L_q u)(t) = u''(t) + q(t)u(t) \tag{2.3.1}$$

Pour tout $h(t) \in L^1[0,1]$, $h \succ 0$ signifie que $h(t) \geq 0$ presque partout et $h(t) > 0$ sur un sous-ensemble de mesure non nulle.

Définition 2.3.1. *On dit que $L_q : W^{2,1}[0,1] \to L^1[0,1]$ vérifie le principe anti-maximum (PAM) si :*

(i) $L_q : W^{2,1}[0,1] \to L^1[0,1]$ est inversible .

(ii) Pour tout $h \in L^1[0,1]$ avec $h \succ 0$, on a $min_{t\in[0,1]}(L_q^{-1}h)(t) > 0$.

Définition 2.3.2. *On dit que L_q vérifie le principe du maximum (PM) si*

(i) $L_q : W^{2,1}[0,1] \to L^1[0,1]$ est inversible

(ii) pour tout $h \in L^1$, $\max_t(L_q^{-1}h)(t) < 0$ pour tout $h \in L^1$ tel que $h \succ 0$.

L_q vérifie le principe anti-maximum (PAM) signifie que l'opérateur

$$L_q^{-1} : L^1[0,1] \to W^{2,1}[0,1]$$

est un opérateur strictement positif , (en respectant l'ordre $h_1 \geq h_2$ définie par $h_1(t) \geq h_2(t), \forall t \in [0,1]$).

Donc ; L_q vérifie le principe anti-maximum (PAM) si et seulement si

(i) pour tout $h \in L^1$, l'équation suivante :

$$u'' + q(t)u = h(t) \tag{2.3.2}$$

admet une unique solution 1-périodique $u = u_h \in W^{2,1}[0,1]$.

(ii) si $h \succ 0$, alors on a $u_h(t) > 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

En utilisant les valeurs propres périodiques et antipériodiques du problème périodique (2.3.1), nous obtenons la caractérisation suivante sur le PM et le PAM.

Théorème 2.4: *[59]*

Soit $q \in L^1[0,1]$, alors :

1- L_q vérifie le PM si et seulement si $\overline{\lambda_0}(q) > 0$.

2- L_q vérifie le PAM si et seulement si $\overline{\lambda_0}(q) < 0 \leq \underline{\lambda_1}(q)$.

Soit une fonction arbitraire $q \in L^1[0,1]$, en introduisant les fonctions paramétrées $\lambda + q$, $\lambda \in \mathbb{R}$, le théorème 2.3.1 peut être énoncé comme suit :

Théorème 2.5: *[59]*
Soit $q \in L^1[0,1]$, alors :
1- $L_{q+\lambda}$ vérifie le (PM) si et seulement si $\lambda \in \left]-\infty, \overline{\lambda_0}(q)\right[$.
2- $L_{q+\lambda}$ vérifie le (PAM) si et seulement si $\lambda \in \left]\overline{\lambda_0}(q), \underline{\lambda_1}(q)\right]$.

Soit$G(t,s)$ la fonction de Green associée à l'équation (2.3.1) avec les condition périodiques. Le théorème suivant donne des conditions nécéssaires et suffisantes sur G pour que L_q vérifie le principe du maximum ou de l'anti-maximum.

Théorème 2.6: *[59]*
Soit $q \in L^1[0,1]$ associé a la fonction de Green *$G(t,s)$, alors :*

1. *L_q vérifie le PM si et seulement si $\max_{(t,s)\in[0.1]^2} G(t,s) \leq 0$.*
2. *L_q vérifie le PAM si et seulement si $\min_{(t,s)\in[0.1]^2} G(t,s) \geq 0$.*

Les deux propositions suivantes nous fournissent des conditions suffisantes sur $q(t)$ pour que L_q vérifie le principe de l'anti-maximum.

Proposition 2.3.1. *[46] Supposons que $q \in L^1[0,1]$ vérifie les conditions suivantes :*

$$q \succ 0, \qquad \underline{\lambda}_1(q) \geq 0.$$

alors L_q vérifie le PAM.

Proposition 2.3.2. *[3] Supposons que $q \in L^1$ vérifie les conditions suivantes :*

$$\int_0^1 q(t)dt > 0, \qquad \|q_+\|_p < K(2p^*)$$

alors L_q vérifie le PAM.

La condition $\underline{\lambda}_1(q) \geq 0$ est la meilleure condition possible pour garantir l'éxistence du principe de l'anti-maximum. et pour avoir cette condition il suffit que $q \in L^1[0,T]$ et $\|q_+\|_p \leq K(2p^*)$

Proposition 2.3.3. *[46] Supposons que $q(t) > 0$ et $q \in L^P[0,T]$:*

Si $\|q\|_p \leq K(2p^*)$, alors $G(t,s) > 0$;$\forall(t,s) \in [0,T]^2$.

◇◇◇◇◇

Chapitre 3

Existence de solutions positives pour un PLP

Par les auteurs : F.M. Atici et G.Sh. Gueseinov [1] (2001)

3.1 Notations et définitions

Dans ce chapitre, on considère le problème aux limites périodique :

$$- (p(t)u')' + q(t)u = f(t, u) \qquad t \in [0, T] \tag{3.1.1}$$

$$u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \tag{3.1.2}$$

où les poids p et q sont des fonctions réelles mesurables telles que $p > 0$ dans $[0, T]$, $q \geq 0$ dans $[0, T]$ et $q(t) \neq 0$ presque pour tout $t \in [0, T]$, et

$$\int_0^T ds/p(s) < \infty, \qquad \int_0^T q(s)ds < \infty$$

$u^{[1]}(t) = p(t)u'(t)$.

Une fonction y est solution de l'équation (3.1.1) si y est dérivable est py' est absolument continue et l'équation (3.1.1) est satisfaite presque partout sur $[0, T]$.

1. voir [1]

Notre but dans ce chapitre, est de trouver des conditions sur la fonction non linéaire f pour que le problème (3.1.1)-(3.1.2) aie une solution positive. Ainsi et en vue d'utiliser le théorème du point fixe de GUO-KRANOSEL'SKII, nous allons démontrer dans la section suivante que la fonction de GREEN associée à l'équation $-(pu')' + qu = 0$ avec les conditions (3.1.2) est strictement positive. Ce qui nous permettra d'avoir dans la formulation au point fixe un opérateur positif, c'est à dire ; il laisse le cône des fonctions positives invariant. Dans la section 3 et 5, nous présentrons des conditions sur la nonlinéarité f pour que les deux inégalités du théorème de KRANOSEL'SKII aient lieux.

3.2 Positivité de la fonction de Green :

On considère l'équation non homogène (3.1.1)-(3.1.2), on note par φ_1, φ_2 les deux solutions pour l'équation homogène

$$-(p(t)u')' + q(t)u = 0 \qquad t \in [0, T] \tag{3.2.1}$$

satisfaisant les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1 & \qquad \varphi_1^{[1]}(0) &= 0 \\ \varphi_2(0) &= 0 & \qquad \varphi_2^{[1]}(0) &= 1 \end{aligned}$$

On pose

$$D = \varphi_1(T) + \varphi_2^{[1]}(T) - 2 \tag{3.2.2}$$

Lemme 3.2.1. *Soit $K(t, s)$ une fonction positive, continue définie pour $-\infty < a \leq t, s \leq b < +\infty$ et $\psi(t)$ une fonction positive intégrable sur $[a, b]$, alors pour toute fonction* *positive continue $\varphi(t)$ définie sur $[a,b]$, l'équation intégrale de Volterra*

$$u(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(t,s)\psi(s)u(s)ds \qquad a \le t \le b \tag{3.2.3}$$

admet une unique solution u. Cette solution est continue et vérifie

$$u(t) \ge \psi(t), \qquad \forall a \le t \le b \tag{3.2.4}$$

Preuve : On résoud l'équation (3.2.3) par la méthode des approximations successives, on pose

$$u_0(t) = \varphi(t), \qquad u_n(t) = \int_a^t K(t,s)\psi(s)u_{n-1}(s)ds. \tag{3.2.5}$$

Si la série $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ est uniformément convergente pour $t \in [a,b]$, alors cette somme sera une fonction continue solution de l'équation (3.2.3). Pour prouver la convergence de cette série, on pose

$$\max_{a\le t\le b} \varphi(t) = c \qquad \max_{a\le t,s\le b} K(t,s) = c_1.$$

Par conséquent, le terme général

$$u_n(t) \le c\frac{c_1^n}{n!}[\int_a^t \psi(t)dt]^n.$$

Ce qui implique que u est une solution continue, et puisque $u_0(t) = \psi(t) \ge 0$, alors l'inégalité (3.2.4) est vérifiée.

Pour l'unicité on peut utiliser la preuve standard. □

Remarque 3.2.1. *Le lemme 3.2.1 reste valable aussi pour l'équation de Volterra*

$$u(t) = \varphi(t) + \int_t^b K(t,s)\psi(s)u(s)ds \qquad a \le t \le b$$

Lemme 3.2.2. *Le nombre D définit par (3.2.2) est strictement positif.*

***Preuve** :* En utilisant les conditions initiales des solutions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$, on déduit de l'équation (3.2.1) les équations suivantes

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \left[\int_s^t \frac{dx}{p(x)}\right] q(s)\varphi_1(s)ds \tag{3.2.6}$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \frac{dx}{p(x)} + \int_0^t \left[\int_s^t \frac{dx}{p(x)}\right] q(s)\varphi_2(s)ds. \tag{3.2.7}$$

$$p(t)\varphi_2'(t) = 1 + \int_0^t q(s)\varphi_2(s)ds. \tag{3.2.8}$$

Par le lemme 3.2.1, on a

$$\varphi_1(t) \geq 1, \qquad \varphi_2(t) \geq \int_0^t \frac{dt}{p(t)}, \qquad t \in [0,T] \tag{3.2.9}$$

Et

$$\varphi_1(T) > 1 \qquad \varphi_2^{[1]}(T) > 1 \tag{3.2.10}$$

D'où le résultat $D > 0$. □

Théorème 3.1: *Soit $h \in L^1[0,T]$, la fonction u donnée par*

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds. \tag{3.2.11}$$

est l'unique solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -(p(t)u')' + q(t)u = h(t) & t \in [0,T] \\ u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \end{cases}$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green *définie par :* [1]

$$G(t,s)=\frac{\varphi_2(T)}{D}\varphi_1(t)\varphi_1(s)-\frac{\varphi_1(T)}{D}\varphi_2(t)\varphi_2(s)$$

$$+\begin{cases}\frac{\varphi_2^{[1]}(T)-1}{D}\varphi_1(t)\varphi_2(s)-\frac{\varphi_1(T)-1}{D}\varphi_1(s)\varphi_2(t). & 0\leq s\leq t\leq T.\\ \frac{\varphi_2^{[1]}(T)-1}{D}\varphi_1(s)\varphi_2(t)-\frac{\varphi_1(T)-1}{D}\varphi_1(t)\varphi_2(s). & 0\leq t\leq s\leq T.\end{cases} \tag{3.2.12}$$

Théorème 3.2: *La fonction de* Green *associée au problème*

$$\begin{cases}-(p(t)u')'+q(t)u=h(t) & t\in[0,T]\\ u(0)=u(T) \qquad u^{[1]}(0)=u^{[1]}(T)\end{cases}$$

est strictement positive, pour t,s dans $[0,T]$, c'est à dire

$$G(t,s)>0,\forall(t,s)\in[0,T]^2. \tag{3.2.13}$$

Preuve *:* Comme la fonction de Green $G(t,s)$ est symmetrique, il suffit de prouver que $G(t,s)>0$ pour $t\in[0,T]$ et $s\in[0,t]$.

On pose

$$E(t,s)=\varphi_1(s)\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\varphi_2(s). \tag{3.2.14}$$

$$F(t,s)=\left[\varphi_2(T)\varphi_1(t)-\varphi_1(T)\varphi_2(t)\right]\varphi_1(s)+\left[\varphi_2^{[1]}(T)\varphi_1(t)-\varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(t)\right]\varphi_2(s). \tag{3.2.15}$$

On a donc pour $s\leq t$

$$G(t,s)=\frac{1}{D}\left[E(t,s)+F(t,s)\right] \tag{3.2.16}$$

1. voir chapitre 2, théorème 2.3

On doit vérifier les propriétés suivantes :

$$E(t,t) = 0, \qquad \forall t \in [0,T], \qquad F(T,0) = 0. \tag{3.2.17}$$

$$E(t,s) > 0, \qquad \forall s \in [0,T[, \qquad \forall t \in]s,T]. \tag{3.2.18}$$

$$F(t,s) > 0, \qquad \forall s \in [0,T], \qquad \forall t \in [s,T], (t,s) \neq (T,0). \tag{3.2.19}$$

La propriété (3.2.17) est évidente.

Pour montrer (3.2.18), il suffit de voir que pour $s \in [0,T[$

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dE(t,s)}{dt}\right] = q(t)E(t,s) \qquad \forall t \in [s,T]$$

$$E(s,s) = 0 \qquad p(t)\frac{dE(t,s)}{dt} = 1 \qquad \text{pour} \qquad t = s.$$

Ce qui implique que pour tout $t \in [s,T]$

$$E(t,s) = \int_s^t \frac{dt}{p(t)} + \int_s^t \left[\int_\xi^t \frac{dt}{p(t)}\right] q(\xi)E(\xi,s)d\xi \tag{3.2.20}$$

En utilisant le lemme 3.2.1, et (3.2.20), on a

$$E(t,s) > 0, \qquad \forall t \in]s,T].$$

On passe maintenant à $F(t,s)$, alors pour s fixé dans $[0,T[$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[p(t)\frac{\partial F(t,s)}{\partial t}\right] = q(t)F(t,s) \qquad \forall t \in [s,T]$$

$$F(T,s) = \varphi_2(s), \qquad p(t)\frac{\partial F(t,s)}{\partial t} = -\varphi_1(s) \qquad \text{pour} \qquad t = T.$$

Par conséquent, on a pour tout $t \in [s, T]$

$$F(t,s) = \varphi_2(t) + \varphi_1(s)\int_t^T \frac{dt}{p(t)} + \int_t^T \left[\int_t^\xi \frac{dt}{p(t)}\right] q(\xi)F(\xi,s)d\xi \qquad (3.2.21)$$

En utilisant (3.2.9), et le lemme 3.2.1, on conclut que $F(t,s) > 0$, par conséquent la fonction de Green est strictement positive pour touts $t, s \in [0,T]$. □

3.3 Existence des solutions positives

Consédérons le problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2), on suppose que la fonction $f(t,\xi)$ vérifie la condition suivante :

$f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue , et $f(t,\xi) > 0$ pour $\xi \in \mathbb{R}^+$

Dans tout ce qui suit, on note

$$m = \min_{(t,s)\in[0,T]^2} G(t,s) \qquad M = \max_{(t,s)\in[0,T]^2} G(t,s) \qquad \sigma = \frac{m}{M} \qquad (3.3.1)$$

X désigne l'éspace des fonctions continues définies sur $[0,T]$ muni de la norme usuelle $\|u\| = \sup_{t\in[0,T]} |u(t)|$, P et P_0 sont les cônes définis par

$$P = \{u(t) \in X : u(t) \geq 0, \forall t \in [0,T]\}$$

$$P_0 = \{u(t) \in P : \min_{t\in[0,T]} u(t) \geq \sigma \|u\|\}$$

D'aprés le thèorème 3.1, u est solution du problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2) si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur $A : X \longrightarrow X$ définit par

$$Au(t) = \int_0^T G(t,s)f(s,u(s))ds, \qquad t \in [0,T] \qquad (3.3.2)$$

A noter que pour tout $u \in X$, $Au(t)$ vérifie les conditions aux limites (3.1.2) en vertu de la définition de la fonction de Green.

Comme $f(t,\xi)$ est continue et $G(t,s)$ est une fonction continue, alors on peut en déduire par le théorème d'Ascoli-Arzéla que l'opérateur A est complètement continu dans X.

Lemme 3.3.1. *Pour tout $u \in P$, $Au \in P_0$. En particulier, A garde le cône P_0 invariant.*

Preuve *:* X, P et P_0 étant ceux défnis dans la section 3, et l'opérateur A définit par (3.3.2), On déduit de (3.2.13) que pour tout $u \in P$, $Au(t) \geq 0$ dans $t \in [0,T]$;

$$\begin{aligned} \min_{t\in[0,T]} Au(t) &\geq m \int_0^T f(s,u(s))ds \\ &\geq \sigma \int_0^T \{\max_{t\in[0,T]} G(t,s)\} f(s,u(s))ds \\ &\geq \sigma \max_{t\in[0,T]} \int_0^T G(t,s) f(s,u(s))ds \\ &= \sigma \left\| Au \right\| . \end{aligned}$$

Par conséquent $Au \in P_0$. □

On suppose maintenant que

(H_1).il éxiste deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $t \in [0,T]$

$$f(t,\xi) \leq \frac{1}{TM}\xi \quad \text{si} \quad 0 \leq \xi \leq r, \qquad f(t,\xi) \geq \frac{\sigma^{-1}}{Tm}\xi \quad \text{si} \quad R \leq \xi < \infty.$$

Théorème 3.3: *Supposons que la condition (H_1) soit vérifiée, alors le problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins une solution u telle que*

$$\sigma r \leq u(t) \leq \sigma^{-1} R, \qquad t \in [0,T] . \tag{3.3.3}$$

***Preuve** :* Pour $u \in P_0$ avec $\|u\| = r$, et pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned}
Au(t) &\leq M \int_0^T f(s,u(s))ds \\
&\leq \frac{M}{TM} \int_0^T u(s)ds \\
&\leq \frac{1}{T} \|u\| T \\
&= \|u\| .
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Si on pose $\Omega_1 = \{u \in X : \|u\| < r\}$, alors (3.3.4)entraîne que

$$\|Au\| \leq \|u\| , \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_1.$$

D'autre part, soit $R_1 = \sigma^{-1}R$, et $\Omega_2 = \{u \in X : \|u\| < R_1\}$.

Alors $u \in P_0$ et $\|u\| = R_1$ implique

$$\min_{t\in[0,T]} u(t) \geq \sigma \|u\| = \sigma R_1 = R$$

Comme $u(s) \geq R$ pour tout $s \in [0,T]$, alors pour tout $t \in [0,T]$

$$Au(t) \geq m \int_0^T f(s,u(s))ds \geq m\frac{M}{Tm^2} \int_0^T u(s)ds \geq \frac{\sigma^{-1}}{T} \int_0^T \sigma \|u\| ds = \|u\| .$$

Par conséquent

$$\|Au\| \geq \|u\| , \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_2.$$

D'aprés le théoreme de Kranosel'skii, l'opérateur A admet un point fixe u dans $P_0 \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$, c'est à dire pour $t \in [0,T]$.

$$\sigma r \leq \sigma \|u\| \leq u(t) \leq R \leq \sigma^{-1}R.$$

Ce qui prouve l'inégalité (3.3.3). □

Remarque 3.3.1. *L'inégalité (3.3.3) montre que la solution u est positive pour tout*

$t \in [0, T]$.

Remarque 3.3.2. *Si les limites*

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = 0, \qquad \lim_{\xi \to \infty} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = \infty$$

éxistent uniformément pour $t \in [0, T]$ *, alors la condition* (H_1) *est vérifiée pour* $r > 0$ *infiniment petit, et* $R > 0$ *infiniment grand.*

Dans le théorème qui suit, on suppose la condition suivante :

(H_2).il éxiste deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $t \in [0, T]$

$$f(t,\xi) \geq \frac{\sigma^{-1}}{Tm}\xi \quad \text{si} \quad 0 \leq \xi \leq r, \qquad f(t,\xi) \leq \frac{1}{TM}\xi \quad \text{si} \quad R \leq \xi < \infty.$$

Théorème 3.4: *[1]*

Supposons que la condition (H_2) *soit vérifiée, alors le problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins une solution* $u(t)$ *telle que*

$$\sigma r \leq u(t) \leq \sigma^{-1} R, t \in [0, T] \tag{3.3.5}$$

Remarque 3.3.3. *Si*

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = \infty, \qquad \lim_{\xi \to \infty} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = 0$$

éxistent uniformément pour $t \in [0, T]$ *, alors la condition* (H_2) *est vérifiée pour* $r > 0$ *infiniment petit, et* $R > 0$ *infiniment grand.*

3.4 Problème aux limites dépendant d'un paramètre

Dans cette section, on considère le Problème aux limites suivant dépendant d'un paramètre réel λ.

$$-(p(t)u')' + q(t)u = \lambda f(t,u) \qquad t \in [0,T]$$

$$u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \tag{3.4.1}$$

On suppose que $f(t,\xi)$ vérifie la condition suivante

(H_3). Il éxiste deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $t \in [0,T]$

$$f(t,\xi) \le f_0(t)\xi \quad \text{si} \quad 0 \le \xi \le r, \qquad f(t,\xi) \ge f_\infty(t)\xi \quad \text{si} \quad R \le \xi < \infty.$$

où $f_0(t), f_\infty(t)$ sont des fonctions positives définies sur $[0,T]$.

Théorème 3.5: *Supposons la condition (H_3) vérifiée, et*

$$M^2 \int_0^T f_0(s)ds \le m^2 \int_0^T f_\infty(s)ds$$

alors, pour tout λ qui vérifie

$$\frac{M}{m^2 \int_0^T f_\infty(s)ds} \le \lambda \le \frac{1}{M \int_0^T f_0(s)ds}, \tag{3.4.2}$$

le problème aux limites (3.4.1) admet au moins une solution u telle que

$$\sigma r \le u(t) \le \sigma^{-1} R, \qquad t \in [0,T] \tag{3.4.3}$$

Preuve *:* Le problème aux limite (3.4.1) est équivalent à l'équation intégrale

$$u(t) = \lambda \int_0^T G(t,s) f(s,u(s))ds, \qquad t \in [0,T]$$

Par conséquent, il est équivalent à la recherche d'un point fixe pour l'opérateur $A : X \longrightarrow X$ définit par

$$Au(t) = \lambda \int_0^T G(t,s) f(s,u(s))ds \qquad t \in [0,T] \tag{3.4.4}$$

A est complètement continue et garde le cône P_0 invariant pour $\lambda > 0$, supposons que λ vérifie (3.4.2), alors pour $u \in P_0$, avec $\|u\| = r$, on a pour tout $t \in [0,T]$

$$Au(t) \leq \lambda M \int_0^T f(s,u(s))ds \leq \lambda M \int_0^T f_0(s)u(s)ds \leq \lambda M \|u\| \int_0^T f_0(s)ds \leq \|u\| .$$

Donc, si on pose $\Omega_1 = \{u \in X : \|u\| < r\}$, alors

$$\|Au\| \leq \|u\| , \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_1.$$

D'autre part, soit $R_1 = \sigma^{-1}R$, et $\Omega_2 = \{u \in X : \|u\| < R_1\}$.
alors $u \in P_0$ et $\|u\| = R_1$ implique que

$$\min_{t\in[0,T]} u(t) \geq \sigma \|u\| = \sigma R_1 = R$$

Comme $u(s) \geq R$ pour tout $s \in [0,T]$, alors pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} Au(t) &\geq \lambda m \int_0^T f(s,u(s))ds \\ &\geq \lambda m \int_0^T f_\infty(s)u(s)ds \\ &\geq \lambda m\sigma \|u\| \int_0^T f_\infty(s)ds \\ &= \|u\| . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|Au\| \geq \|u\|, \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_2.$$

D'aprés le théorème de KRANOSEL'SKII, l'opérateur A admet un point fixe u dans $P_0 \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$, □

Corollaire 3.4.1. *Si les limites*

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = f_0(t) \qquad et \qquad \lim_{\xi \to \infty} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = f_\infty(t) \tag{3.4.5}$$

éxistent uniformément pour $t \in [0,T]$, et si

$$M^2 \int_0^T f_0(s)ds \leq m^2 \int_0^T f_\infty(s)ds$$

alors, pour tout λ qui vérifie

$$\frac{M}{m^2 \int_0^T f_\infty(s)ds} \leq \lambda \leq \frac{1}{M \int_0^T f_0(s)ds}, \tag{3.4.6}$$

le problème aux limites (3.4.1) admet au moins une solution u telle que $u > 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

Preuve *:* Soit λ satisfaisant (3.4.6)

On choisit $\epsilon > 0$ te lque

$$\frac{M}{m^2 \int_0^T \left[f_\infty(s) - \delta(s)\right] ds} \leq \lambda \leq \frac{1}{M \int_0^T \left[f_0(s) + \epsilon\right] ds}$$

où $\delta(t) = \min\{\epsilon, f_\infty(t)\}$, en appliquant la définition de la limite pour ϵ, on peut trouver $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $t \in [0,T]$

$$f(t,\xi) \leq (f_0(t)+\epsilon)\xi \quad \text{si} \quad 0 \leq \xi \leq r, \qquad f(t,\xi) \geq (f_\infty(t) - \delta(s))\xi \quad \text{si} \quad R \leq \xi < \infty.$$

Ainsi, le corollaire est obtenu par application directe du théorème 3.5 □

On suppose maintenant que $f(t,\xi)$ vérifie la condition

(H_4).Il éxiste deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $t \in [0,T]$

$$f(t,\xi) \geq f_0(t)\xi \quad \text{si} \quad 0 \leq \xi \leq r, \qquad f(t,\xi) \leq f_\infty(t)\xi \quad \text{si} \quad R \leq \xi < \infty.$$

où $f_0(t), f_\infty(t)$ sont des fonctions mesurables positives définies sur $[0,T]$.

Théorème 3.6: *supposons la conditions (H_4) vérifiée, et*

$$M^2 \int_0^T f_0(s)ds \leq m^2 \int_0^T f_\infty(s)ds$$

alors, pour tout λ vérifiant (3.4.6),le problème aux limite (3.4.1) admet au moins une solution u telle que

$$\sigma r \leq u(t) \leq \sigma^{-1} R, \qquad t \in [0,T]$$

La preuve est analogue à celle du théorème 3.5, en utilisant la deuxième assertion du théorème de Kranosel'skii, et on a l'analogue du corollaire (3.4.1).

Corollaire 3.4.2. *Si les limites*

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = f_0(t) \qquad et \qquad \lim_{\xi \to \infty} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = f_\infty(t) \tag{3.4.7}$$

éxistent uniformément pour $t \in [0,T]$, et si

$$M^2 \int_0^T f_\infty(s)ds \leq m^2 \int_0^T f_0(s)ds$$

alors, pour tout λ qui vérifie

$$\frac{M}{m^2 \int_0^T f_0(s)ds} \leq \lambda \leq \frac{1}{M \int_0^T f_\infty(s)ds} \tag{3.4.8}$$

le problème aux limites (3.4.1) admet au moins une solution $u(t)$ telle que $u(t) > 0$ pour *tout* $t \in [0,T]$.

3.5 Existence de deux solutions positives

On suppose que $f(t,\xi)$ vérifie la condition

(H_5).ils éxistent des nombres $0 < r < a < R < \infty$ tels que $r < \sigma a$ et pour tout $t \in [0,T]$

$$f(t,\xi) \geq \frac{\sigma^{-1}}{Tm}\xi \qquad \text{si} \qquad 0 \leq \xi \leq r, \qquad \text{et} \qquad R \leq \xi < \infty.$$

$$f(t,\xi) \leq \frac{1}{TM}a \qquad \text{si} \qquad \sigma a \leq \xi \leq a,$$

Théorème 3.7: *Supposons que la condition* (H_5) *soit vérifiée, alors le problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins deux solutions* u_1 *et* u_2 *telle que*
$\|u_1\| < a < \|u_2\|$ *et*

$$\sigma r \leq u_1(t) \leq a, \qquad \sigma a \leq u_2(t) \leq \sigma^{-1}R, \qquad t \in [0,T]$$

Preuve *:* Soit X, P, et P_0 ceux définit dans la section 3, et A l'opérateur définit par (3.3.2).
Si on pose $\Omega_1 = \{u \in X : \|u\| < r\}$, alors

$$Au(t) \geq m\int_0^T f(s,u(s))ds \geq m\frac{M}{Tm^2}\int_0^T u(s)ds \geq \frac{\sigma^{-1}}{T}\int_0^T \sigma\,\|u\|\,ds = \|u\|\,.$$

Par conséquent

$$\|Au\| \geq \|u\|\,, \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_1.$$

Encore, pour $u \in P_0$, avec $\|u\| = a$, on a

$$\sigma a \leq u(t) \leq a, \qquad t \in [0,T]$$

Donc

$$Au(t) \leq M \int_0^T f(s,u(s))ds \leq \frac{M}{TM} \int_0^T a ds \leq \frac{1}{T} aT = \|u\| .$$

Si on pose $\Omega_2 = \{u \in X : \|u\| < a\}$, alors

$$\|Au\| \leq \|u\| , \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_2.$$

Donc, d'aprés la deuxième assertion du théoreme de Kranosel'skii, l'opérateur A admet un point fixe u_1 dans $P_0 \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$, comme $Au \neq u$ pour $u \in P_0$ avec $\|u\| = a$, alors $r \leq u_1 < a$. Pour $u \in P_0$ on a $u(t) \geq \sigma \|u\|$ par suite $\sigma r \leq u_1(t) \leq a$ pour tout $t \in [0,T]$.

Soit maintenant $R_1 = \sigma^{-1} R$, et $\Omega_3 = \{u \in X : \|u\| < R_1\}$.

alors $u \in P_0$ et $\|u\| = R_1$ implique

$$\min_{t \in [0,T]} u(t) \geq \sigma \|u\| = \sigma R_1 = R$$

Comme $u(s) \geq R$ pour tout $s \in [0,T]$, alors pour tout $t \in [0,T]$

$$Au(t) \geq m \int_0^T f(s,u(s))ds \geq m \frac{M}{Tm^2} \int_0^T u(s)ds \geq \frac{\sigma^{-1}}{T} \int_0^T \sigma \|u\| ds = \|u\| .$$

Par conséquent

$$\|Au\| \geq \|u\| , \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_3.$$

Donc, d'aprés la premiere assertion du théoreme de Kranosel'skii, l'opérateur A admet un point fixe u_2 dans $P_0 \cap (\bar{\Omega}_3 \backslash \Omega_2)$,et

$$\sigma a \leq u_2(t) \leq \sigma^{-1} R, \qquad t \in [0,T]$$

On ne peut pas avoir la même solution puisque $\|u_1\| < a < \|u_2\|$ $\partial\Omega_2$ $\square$

Remarque 3.5.1. *Si les limites*

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = \infty \qquad et \qquad \lim_{\xi \to \infty} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = \infty$$

éxistent uniformément pour $t \in [0,T]$ *, alors la condition* (H_5) *est vérifiée pour* $r > 0$ *infiniment petit, et* $R > 0$ *infiniment grand.*

On suppose que $f(t,\xi)$ vérifie la condition

(H_6).ils éxistent des nombres $0 < r < a < R < \infty$ tels que $r < \sigma a$, et pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} f(t,\xi) &\leq \frac{1}{TM}\xi \qquad \text{si} \qquad 0 \leq \xi \leq r, \qquad \text{et} \qquad R \leq \xi < \infty. \\ f(t,\xi) &\geq \frac{1}{Tm}a \qquad \text{si} \qquad \sigma a \leq \xi \leq a, \end{aligned}$$

Théorème 3.8: *Supposons que la condition* (H_6) *soit vérifiée, alors le problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins deux solutions* $u_1(t)$ *et* $u_2(t)$ *telle que* $\|u_1\| < a < \|u_2\|$ *et*

$$\sigma r \leq u_1(t) \leq a, \qquad \sigma a \leq u_2(t) \leq \sigma^{-1}R, \qquad t \in [0,T]$$

La preuve est analoque à celle du théorème 3.7.

Remarque 3.5.2. *Si les limites*

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = 0 \qquad et \qquad \lim_{\xi \to \infty} \frac{f(t,\xi)}{\xi} = 0$$

éxistent uniformément pour $t \in [0,T]$ *, alors la condition* (H_6) *est vérifiée pour* $r > 0$ *infiniment petit, et* $R > 0$ *infiniment grand.*

3.6 Existence de solutions périodiques

Considérons l'équation (3.1.1) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier

$$-(p(t)u') + q(t)u = f(t, u(t)), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.6.1}$$

On suppose que les coefficients de l'équation (3.6.1) sont T-périodiques :

(H_7) . $p(t+T) = p(t)$, $q(t) = q(t+T)$, $t \in \mathbb{R}$.

(H_8) .$f(t, \xi) = f(t+T, \xi)$, $t, \xi \in \mathbb{R}$.

On s'intéresse à l'éxistence des solutions T-périodiques pour l'équation (3.6.1), il est clair que si les conditions (H_7) et (H_8) sont vérifiées, alors toute solution du problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2) se prolonge de $[0, T]$ à $\mathbb{R}$ tout entier comme étant une fonction T-périodique , et sera par suite une solution de l'équation (3.6.1).

Les théorèmes 3.3 et 3.4 entraînent réspectivement les résultats suivants

Théorème 3.9: *Supposons les conditions (H_1) ,(H_7) et (H_8) vérifiées, alors l'équation (3.6.1) admet au moins une solution T-périodique u telle que*

$$\sigma r \leq u(t) \leq \sigma^{-1} R, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.10: *Supposons les conditions (H_2) ,(H_7) et (H_8) vérifiées,alors l'équation (3.6.1) admet au moins une solution T-périodique $u(t)$ telle que*

$$\sigma r \leq u(t) \leq \sigma^{-1} R, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.6.1. *De même, on peut en déduire des résultats d'éxistence de solutions positives à partir des théorèmes 3.5 et 3.6 pour le problème*

$$-(pu')' + qu = \lambda f(t, u) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Les résultats suivants découlent réspectivement des théorèmes 3.7 et 3.8

THÉORÈME 3.11: *Supposons les conditions* (H_5) ,(H_7) *et* (H_8) *vérifiées,alors l'équation (3.6.1) admet au moins deux solutions T-périodiques* $u_1(t)$, $u_2(t)$ *telles que* $\|u_1(t)\| < a < \|u_2(t\|$ *et*

$$\sigma r \leq u_1(t) < a, \qquad \sigma a < u_2(t) \leq \sigma^{-1}R, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.6.2}$$

THÉORÈME 3.12: *Supposons les conditions* (H_6) ,(H_7) *et* (H_8) *vérifiées,alors l'équation (3.6.1) admet au moins deux solutions T-périodiques* $u_1(t)$, $u_2(t)$ *telles que* $\|u_1(t)\| < a < \|u_2(t\|$ *et*

$$\sigma r \leq u_1(t) < a, \qquad \sigma a < u_2(t) \leq \sigma^{-1}R, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3.7 Remarques

1. Dans le cas où $p(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv c^2$, c est une constante réelle strictement positive, la fonction du GREEN associée au problème (3.2.1)-(3.1.2) a la forme

$$G(t,s) = \frac{1}{2c(e^{cT}-1)} \begin{cases} e^{c(t-s)} + e^{c(T+s-t)}. & 0 \leq s \leq t \leq T. \\ e^{c(s-t)} + e^{c(T+t-s)}. & 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Dans ce cas ; $m = \frac{e^{\frac{cT}{2}}}{c(e^{cT}-1)}$, $\qquad M = \frac{1+e^cT}{2c(e^{cT}-1)}$.

2. Dans le cas ou $p(t) > 0$, $q(t) = \frac{c^2}{p(t)}$, c est une constante réelle strictement positive, la fonction du GREEN associée au problème (3.2.1)-(3.1.2) a la forme

$$G(t,s) = \frac{1}{2c(e^{c\int_0^T (dt/p(t))} - 1)} \begin{cases} e^{c\int_s^t (dt/p(t))} + e^{c[\int_0^T (dt/p(t)) + \int_t^s (dt/p(t))]}. & 0 \leq s \leq t \leq T. \\ e^{c\int_t^s (dt/p(t))} + e^{c[\int_0^T ((dt/p(t)) + \int_s^t (dt/p(t))]}. & 0 \leq s \leq t \leq T. \end{cases}$$

Dans ce cas $m = \frac{e^{c/2\int_0^T (dt/p(t))}}{c(e^{c\int_0^T (dt/p(t))}-1)}$, $\qquad M = \frac{1+e^{c\int_0^T (dt/p(t))}}{2c(e^{c\int_0^T (dt/p(t))}-1)}$.

3. Afin d'appliquer les théorèmes énoncés plus haut, il suffit de donner des bornes inférieures et superieures pour la fonction de GREEN, et pas nécéssairement connaitre m et M éxactement. Si par éxemple

$$m_1 < G(t,s) < M_1 \qquad \text{où} \qquad 0 < m_1 \leq m < M \leq M_1 < \infty$$

et on suppose qu'il éxiste deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $t \in [0,T]$

$$f(t,\xi) \leq \frac{1}{TM_1}\xi \qquad \text{si} \qquad 0 \leq \xi \leq r, \qquad f(t,\xi) \geq \frac{M_1}{Tm_1^2}\xi \qquad \text{si} \qquad R \leq \xi < \infty.$$

Pour r et R , la condition (H_1) reste toujours valable parceque

$$\frac{1}{M_1} < \frac{1}{M} \qquad\qquad \frac{M}{m^2} < \frac{M_1}{m_1^2}$$

et le théorème 3.3 est applicable, on en déduit que le problème (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins une solution positive u telle que

$$\frac{m_1}{M_1}r < u(t) < \frac{M_1}{m_1}R.$$

$\diamond \diamond \Diamond \diamond \diamond$

Chapitre 4

Existence des solutions pour un PLP via le théorème de Guo-Kranosel'skii

Par l'auteur : Pedro torres [1] (2003)

On va étudier dans ce chapitre l'éxistence des solutions périodique pour l'équation du deuxième ordre $u'' = f(t, u)$, où f est une fonction L^1- CARATHÉODORY. En combinant quelques propriétés de la fonction de GREEN avec des hypothèses sur la nonliniarité f, on obtient des résultats d'existence par le théorème du point fixe d'expansion et de compréssion d'un cône de type norme de KRANOSEL'SKII[6, 26].

La diffuculté rencontré lors de cette démarche réside dans le fait que la fonction de GREEN associée au problème périodique n'est pas de signe constantce qui signfie d'aprés la formulation en équation au point fixe par l'intermédiaire de la fonction de GREEN que l'opérateur n'est pas positif, chose indispensable pour utiliser le théorème de KRANOSEL'SKII.

Afin de surmonter ce problème, on utilise le principe de l'anti-maximum pour les normes L^p développés dans [47].

1. voir [46]

4.1 Etude du signe de la fonction de Green

On considère le PLP

$$u''(t) + q(t)u(t) = 0 \qquad q \in L^1[0,T]. \tag{4.1.1}$$

$$u(0) = u(T) \qquad u'(0) = u'(T) \tag{4.1.2}$$

On suppose que l'unique solution du problème homogène est la solution triviale, une conséquence de l'alternative de FREDHOLM[1] est que l'équation non homogène

$$u''(t) + q(t)u(t) = h(t) \tag{4.1.3}$$

admet une unique solution T-périodique :

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds$$

où $G(t,s)$ est la fonction de GREEN associée au problème (4.1.1)-(4.1.2).
On a le théorème :

THÉORÈME 4.1: *On suppose que la distance entre deux zéros consécutifs d'une solution non triviale de l'équation (4.1.1) est superieur à T, alors la fonction de* GREEN $G(t,s)$ *à un signe constant.*

***Preuve** :* Comme $G(t,s)$ est continue sur $[0,T]^2$, il suffit de prouver que $G(t,s)$ ne s'annule en aucun point.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $(t_0,s_0) \in [0,T]^2$ tel que $G(t_0,s_0) = 0$, on suppose que $(t_0,s_0) \in \,]0,T[\times[0,T]$.

1. Pour $s_0 \in]0,T[$, $G(t,s_0)$ fonction de t est solution de l'équation (4.1.1) sur les

1. chpaitre 1

intervalles $[0, s_0[$ et $]s_0, T]$ tel que

$$\begin{aligned} G(0, s_0) &= G(T, s_0) \\ \tfrac{d}{dt}G(0, s_0) &= \tfrac{d}{dt}G(T, s_0) \end{aligned}$$

On construit alors la fonction :

$$u(t) = \begin{cases} G(t, s_0), & t \in [s_0, T] \\ G(t - T, s_0) & t \in [T, s_0 + T] \end{cases}$$

Cette fonction est de classe C^1, et par suite, c'est une solution de (4.1.1) dans l'intervalle $[s_0, s_0 + T]$.

Aussi, on a $u(t_0) = 0$, et d'aprés l'hypothèse, t_0 est l'unique racine dans $[s_0, s_0 + T]$ d'une part, et d'autre part $u(s_0) = u(s_0 + T)$ ce qui implique $u'(t_0) = 0$ (car t_0 doit être un zéro double).

Par l'unicité du problème initial, on en déduit que $\forall t, u(t) \equiv 0$, ce qui contredit les propriétés de la fonction de Green.

2. De la même façon, si $t_0 \in [0, s_0[$, le même raisonnement avec

$$u(t) = \begin{cases} G(t - T, s_0), & t \in [s_0, T] \\ G(t, s_0) & t \in [T, s_0 + T] \end{cases}$$

conduit à une contradiction.

3. Finalement, si $s_0 = 0$ ou $s_0 = T$, alors $G(t, s_0)$ est une solution dans l'intevalle $[0, T]$ telle que $G(0, s_0) = G(T, s_0)$, et les même arguments conduisent à une contradiction.

$\square$

Dans le but d'appliquer ces résultats, on étudie deux différents cas, $q < 0$ et $q > 0$

Corollaire 4.1.1. *Si $q(t) < 0$, alors $G(t, s) < 0$ pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$*

Preuve *:* Si $q(t) < 0$, alors toute solution de (4.1.1) admet au plus un seul zéro, ainsi par le théorème 4.1, la fonction de Green à un signe constant.
Soit $u(t) = \int_0^T G(t,s)$, u est l'unique solution du PLP

$$u''(t) + q(t)u(t) = 0.$$

$$u(0) = u(T) \qquad u'(0) = u'(T)$$

par intégration sur $[0,T]$, on obtient

$$\int_0^T u(t)q(t)dt = \int_0^T -u''(t) + 1dt = T > 0.$$

Et par suite, $u(t) < 0$, donc $G(t,s) < 0$. □

Dans le cas contraire, si $q(t) > 0$, alors toute solution pour l'équation (4.1.1) admet une infinité de zéros, et pour avoir la distance entre les zéros, on utilise le principe du anti-maximum donné par Torres et Zhang [47] basé sur les propriétés des deux premières valeurs propres $\overline{\lambda}_0$ et $\underline{\lambda_1}$ [1].

Ainsi, on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.2. *Suppposons que $q(t) > 0$ et $q(t) \in L^p\,[0,T]$, Si $\|q\|_p \leq K(2p^*)$, alors $G(t,s) > 0$ pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$.*

Le résultat suivant permet de calculer $M = \max G(t,s)$ et $m = \min G(t,s)$ sous les conditions des corollaires (4.1.1) et (4.1.2).

Soit $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation linéaire (4.1.1) avec les conditions initiales :

$$\varphi_1(0) = 0, \qquad \varphi_1'(0) = 1, \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(T) = 0, \qquad \varphi_2'(T) = -1$$

1. voir chapitre 2, théorème 2.4, propositions 2.3.1 et 2.3.2

Proposition 4.1.1. *on a les propriétés suivantes :*

1)- Si $q(t) < 0$

$$m = \frac{\varphi_2(0)}{2 + \varphi_2'(0) - \varphi_1'(T)} \qquad M = \frac{min_{t\in[0,T]}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t))}{2 + \varphi_2'(0) - \varphi_1'(T)}$$

2)- Si $q(t) > 0, q \in L^p\,[0,T]$ *et* $\|q\|_p \leq K(2p^*)$

$$m = \frac{\varphi_2(0)}{2 + \varphi_2'(0) - \varphi_1'(T)} \qquad M = \frac{Max_{t\in[0,T]}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t))}{2 + \varphi_2'(0) - \varphi_1'(T)}.$$

Preuve *:* La fonction de Green s'écrit :

$$G(t,s) = \alpha(s)\varphi_1(t) + \beta(s)\varphi_2(t) - \frac{1}{\varphi_2(0)}[\varphi_1(t)\varphi_2(s)H(s-t) - \varphi_1(s)\varphi_2(t)H(t-s)]$$

où H est la fonction d'Heavyside, et α et β sont des constantes imposées par les propriétés de G.

Comme

$$\begin{aligned} -\varphi_1(T) &= \varphi_1(T)\varphi_2'(T) - \varphi_1'(T)\varphi_2(T) \\ &= \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t) \\ &= \varphi_1(0)\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0)\varphi_2(0) \\ &= -\varphi_2(0) \end{aligned}$$

donc $\varphi_(T) = \varphi_2(0)$. Comme $G(0,0) = G(0,T)$, on trouve que $\alpha(s) = \beta(s)$, et en imposant la condition sur la dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial t}G(0^+,0) - \frac{\partial}{\partial t}G(T^-,0) = 1$$

on en déduit que :

$$\alpha = \frac{1}{2 + \varphi_2'(0) - \varphi_1'(T)}$$

Noter que α et $q(t)$ ont le même signe.

D'autre part, $G(t, s_0)$ vue comme fonction de t, est une solution du problème (4.1.1) avec un saut égal à 1 en $t = s_0$. Donc $G(t, s_0)$ est concave sur les intervalles $[0, s_0[$ et $s_0, T]$, alors on conclut que :

$$m = \min_{t \in [0,T]} G(t, t).$$

Si on pose :

$$h(t) = G(t, t) = \alpha(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) - \frac{1}{\varphi_2(0)} \varphi_1(t)\varphi_2(t).$$

En utilisant le fait que le wronksien $W(t) = \varphi_2(0)$, on trouve :

$$h(t)'' = \alpha(\varphi_1''(t) + \varphi_2''(t)) = -q(t)\alpha(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) < 0.$$

Comme $h(0) = h(T)$, on trouve

$$m = G(0, 0) = \alpha\varphi_2(0) = \frac{\varphi_2(0)}{2 + \varphi_2'(0) - \varphi_1'(T)}.$$

Pour calculer le maximum, il suffit de voir la fonction de Green pour réaliser qu'il est atteint lorsque $s = T$, car $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ est toujours positif, on a alors :

$$M = \max_{t \in [0,T]} G(t, T) = \max_{t \in [0,T]} [\alpha(\varphi_1(t) + \varphi_2(t))]$$

Ainsi, on a le resultat voulu. □

Exemple 4.1.1. *On peut calculer le maximum et le minimum de la fonction de* Green *lorsque* $q(t) = -k^2$

$$m_k = \frac{1 + e^{kT}}{2k(e^{kT} - 1)} \qquad M_k = \frac{e^{kT/2}}{k(e^{kT} - 1)}$$

Et si $q(t) = k^2, k < \pi/T$.

$$\tilde{m_k} = \frac{1}{2k} cot\left(\frac{kT}{2}\right) \qquad \tilde{M_k} = \frac{1}{2ksin\left(\frac{kT}{2}\right)}$$

4.2 Existence de solutions périodiques :

Considèrons le problème :

$$(P) = \begin{cases} u'' = f(t,u) \\ u(0) = u(T) \qquad u'(0) = u'(T) \end{cases}$$

Où $f \in L^1 - Car\left([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ L^1-Carathéodory.

On définit les ensembles :

$$\Lambda^- = \left\{q \in L^1(0,T) : q \prec 0\right\}$$

$$\Lambda^+ = \left\{q \in L^1(0,T) : q \succ 0, \|q\|_p \leq K(2p^*), 1 \leq p \leq +\infty\right\}$$

On a vu que si $q(t) \in \Lambda^- \cup \Lambda^+$, alors le PLP (4.1.1) a une fonction de Green avec un signe constant.

On utilisera dans ce qui suit ce résultat avec le théorème d'expansion et de compression d'un cône de type norme de Kranosel'skii pour obtenir des solutions non triviales pour le PLP (P).

On note :

$$M = \max G(t,s), \qquad m = \min G(t,s), \qquad \sigma = \frac{m}{M} \qquad \text{et} \qquad \sigma^{-1} = \frac{M}{m}$$

Notre premier résultat d'existence est :

Théorème 4.2: *Supposons qu'il existe* $q \in \Lambda^+$ *et des réels* r *et* R *avec* $0 < r < R$ *tels* *que :*

$$f(t,u) + q(t)u \geq 0 \qquad \forall u \in \left[\sigma r, \sigma^{-1}R\right] \qquad \forall t \in [0,T] \tag{4.2.1}$$

Si pour tout $t \in [0,T]$, l'une des deux conditions (i) ou (ii) suivantes :

$$(i) \begin{cases} f(t,u) + q(t)u \geq \frac{M}{Tm^2}u & \forall u \in [\sigma r, r] \\ f(t,u) + q(t)u \leq \frac{1}{TM}u & \forall u \in \left[R, \sigma^{-1}R\right] \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} f(t,u) + q(t)u \leq \frac{1}{TM}u & \forall u \in [\sigma r, r] \\ f(t,u) + q(t)u \geq \frac{M}{Tm^2}u & \forall u \in \left[R, \sigma^{-1}R\right] \end{cases}$$

a lieu, alors le problème (P) admet au moins une solution positive.

***Preuve** :* On a $M > m > 0$ car $q \in \Lambda^+$, le problème (P) est équivalent à

$$P = \begin{cases} u''(t) + q(t)u(t) = f(t,u) + q(t)u(t). \\ u(0) = u(T) \qquad u'(0) = u'(T) \end{cases}$$

On définit les ensembles ouverts suivants :

$$\Omega_1 = \{u \in C[0,T] : \|u\| < r\}$$

$$\Omega_2 = \left\{u \in C[0,T] : \|u\| < \sigma^{-1}R\right\}$$

et on définit le cône K :

$$K = \left\{u \in C[0,T], \min_{t\in[0,T]} u(t) \geq \sigma \|u\|\right\}$$

On voit que si $u \in K \cap (\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$ alors

$$\sigma r \leq u(t) \leq \sigma^{-1} R \qquad \forall t \in [0,T].$$

On définie l'operateur $A : K \longrightarrow K$

$$Au = \int_0^T G(t,s)[f(s,u(s)) + q(s)u(s)]ds$$

On peut montrer que A est complètement continu ;

Si la condition (i) est vérifiée pour $u \in (\partial\Omega_1 \cap K)$, alors

$$\|u\| = r \qquad \sigma r \leq u(t) \leq r$$

$$Au(t) \geq m \int_0^T f(t,u)ds + q(t)u(s) \geq \frac{\sigma^{-1}}{T} \int_0^T u(s)ds \geq r = \|u\|$$

Si $u \in (\partial\Omega_2 \cap K)$ alors

$$\|u\| = \sigma^{-1} R \qquad \text{et} \qquad R \leq u(t) \leq \sigma^{-1} R$$

$$Au(t) \leq M \int_0^T f(t,u)ds \leq M \frac{1}{TM} \int_0^T u(s)ds \leq R = \|u\|$$

Donc d'aprés le théorème de Kranosel'skii

$\exists u \in K \cap (\overline{\Omega}_2/\Omega_1)$ solution de (P) tel que

$$0 < \sigma r \leq u(t) \leq \sigma^{-1} R$$

Le cas où (ii) est satisfaite se démontre de manière similaire. □

Une conséquence directe de ce théorème est le corollaire suivant obtenu par le changement de variable $v = -u$.

Corollaire 4.2.1. *Supposons qu'il existe $q \in \Lambda^+$ et $0 < r < R$ tels que :*

$$f(t,u) + q(t)u \leq 0, \qquad \forall u \in \left[-\sigma^{-1}R, -\sigma r\right] \qquad \forall t \in [0,T] \tag{4.2.2}$$

Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(i) \begin{cases} f(t,u) + q(t)u \leq \frac{m}{Tm^2}u & \forall u \in [-r, -\sigma r] \\ f(t,u) + q(t)u \geq \frac{1}{Tm}u & \forall u \in \left[-\sigma^{-1}R, -R\right] \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} f(t,u) + q(t)u \geq \frac{1}{Tm}u & \forall u \in [-\sigma r, -r] \\ f(t,u) + q(t)u \geq \frac{1}{TM}u & \forall u \in \left[-\sigma^{-1}R, -R\right] \end{cases}$$

Alors le problème (P) admet une solution négative.

Le fait de connaitre le signe de la fonction de GREEN pour $q \in \Lambda^-$, nous permet d'obtenir le résultat suivant

THÉORÈME 4.3: *Supposons qu'il existe $q \subset \Lambda^-$ et $0 < r < R$ tels que* [1]

$$f(t,u) + q(t)u \leq 0 \qquad \forall u \in \left[\sigma^{-1}r, \sigma R\right] \qquad \forall t \in [0,T] \tag{4.2.3}$$

Si l'une des deux conditions suivantes est verifiée :

$$(i) \begin{cases} f(t,u) + q(t)u \leq \frac{m}{TM^2}u & \forall u \in \left[r, \sigma^{-1}r\right] \\ f(t,u) + q(t)u \geq \frac{1}{Tm}u & \forall u \in [\sigma R, R] \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} f(t,u) + q(t)u \geq \frac{1}{Tm}u & \forall u \in \left[r, \sigma^{-1}r\right] \\ f(t,u) + q(t)u \geq \frac{m}{TM^2}u & \forall u \in [\sigma R, R] \end{cases}$$

Alors le problème (P) admet une solution positive.

Preuve *:* Comme on a $m < M < 0$, le théorème 4.3 se démontre de manière analogue

1. Ca dépend bien sur du choix de r et R ,pour ne pas avoir d'embiguité.

que le théorème 4.2, avec les changements suivants :

$$\Omega_1 = \{u \in C(0,T) : \|u\| < r\}$$

$$\Omega_2 = \{u \in C(0,T) : \|u\| < \sigma R\}$$

$$K = \left\{u \in C[0,T], \min_{t\in[0,T]} u \geq \sigma^{-1} \|u\|\right\}$$

□

Corollaire 4.2.2. *Supposons qu'il existe $q \in \Lambda^-$ et $0 < r < R$ tel que :*

$$f(t,u) + q(t)u \geq 0, \qquad \forall u \in \left[-\sigma^{-1}r, -\sigma R\right] \qquad \forall t \in [0,T]$$

Si l'une des conditions (i) ou (ii) suivantes est vérifiée :

$$(i) \begin{cases} f(t,u) + q(t)u \geq \frac{m}{TM^2}u & \forall u \in \left[-\sigma^{-1}r, -r\right] \\ f(t,u) + q(t)u \geq \frac{1}{Tm}u & \forall u \in [-R, -\sigma R] \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} f(t,u) + q(t)u \leq \frac{1}{Tm}u & \forall u \in \left[-\sigma^{-1}r, -r\right] \\ f(t,u) + q(t)u \geq \frac{m}{TM^2}u & \forall u \in [-R, -\sigma R] \end{cases}$$

Alors le problème (P) admet une solution négative.

4.3 Applications et exemples :

Dans ce qui quit, on va donner des applications des théorèmes démontrés dans la section précédente. On considère deux types d'équations, suivant que la nonlinéarité est singulière ou régulière.

4.3.1 Nonlinéarité définie sur la droite réelle :

Dans tout ce paragraphe, f est supposée appartenir à $Car\left([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$.
On remarque qu'il n'est pas nécéssaire d'avoir les valeurs m et M, ce manque sera remplit par des hypothèses sur le comportement assymptotique de la nonlinéarité f.

Corollaire 4.3.1. *Supposons $q \in \Lambda^+$ et $\forall u \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [0,T], f(t,u) \geq 0$.*
Si l'une des deux conditions (i) ou (ii) suivantes est vérifiées :

$$(i) \qquad \lim_{u\to 0^+} \frac{f(t,u)}{u} = +\infty \qquad \lim_{u\to +\infty} \frac{f(t,u)}{u} = 0$$

$$(ii) \qquad \lim_{u\to 0^+} \frac{f(t,u)}{u} = 0 \qquad \lim_{u\to +\infty} \frac{f(t,u)}{u} = +\infty$$

alors le problème (P) admet une solution positive.

Remarque 4.3.1. *Dans le corollaire 4.3.1, on suppose que les limites existent et sont uniformes.*

Preuve *:* On applique le théoreme 4.2 directement avec r infinimment petit, et R infiniment grand.
Evidemment, si (i) est vérifiée, alors $f(t,u)/u+q(t) \geq \frac{M}{Tm^2}$ au voisinage de 0, $f(t,u)/u+q(t) \leq \frac{1}{Tm}$ au voisinage de $+\infty$.
De même pour de (ii), en appliquant (ii) du théorème 4.2. □

On peut extraire des corollaires analogues du théoreme 4.3, du corollaire 4.2.2 et 4.2.4 en imposant des conditions assymptotiques sur f.

On peut aussi combiner ces résultats affin d'avoir des résultats de multiplicité comme les exemples suivants.

Exemple 4.3.1. ***Equation de*** **Mathieu-Duffing** *:*

Soit l'opérateur du type MATHIEU-DUFFING *:*

$$u'' + (a + b\cos t)u + cu^3 = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \qquad (M.D)$$

Cette équation a été étudiée dans [53] au moyen du théorème du point fixe de SCHAUDER. *Noter que ce théorème n'exclu pas le fait que la solution obtenue peut être la solution triviale.*

On a maintenant un nouveau résultat ;

Corollaire 4.3.2. *Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) $a < b \leq 0 < c$

(ii) $c < 0$, $(a + b\cos t) \in \Lambda^+$

Alors l'équation (M.D) admet au moins deux solutions non triviales 2π-périodiques.

Preuve *:* La nonlinéarité du terme $f = -cu^3$ est sublinéaire en 0 et superlinéaire à ∞, on applique directement le théoreme 4.3 et le corollaire 4.2.2 avec $r = \epsilon > 0$ et $R \to +\infty$. Si (i) est vérifiée, alors $(a + b\cos t) \in \Lambda^-$ et $\forall u \in \mathbb{R}^+, f(t,u) < 0$, on vérifie que $f(t,u)/u \longrightarrow 0$ donc $f(t,u)/u \geq \frac{1}{TM}$ au voisinage de 0 et $f(t,u)/u \longrightarrow -\infty$ donc $f(t,u)/u \leq \frac{M}{Tm^2}$ au voisinage de $+\infty$ car $m < M < 0$, par (ii) du théorème 4.3, le problème (MD) admet une solution positive.

D'autre part, $\forall u \in \mathbb{R}^-, f(t,u) \geq 0$, on vérifie que $f(t,u)/u \longrightarrow 0$ donc $f(t,u)/u \geq \frac{M}{Tm^2}$ au voisinage de 0, et $f(t,u)/u \longrightarrow -\infty$ donc $f(t,u)/u \leq \frac{1}{TM}$ au voisinage de $-\infty$, par (i) du corollaire 4.2.2, le problème (MD) admet une solution négative. Donc le problème (MD) admet deux solutions 2π-périodiques [1].

De la même façon, si la condition (ii) est vérifiée, on applique le théorème 4.2 est le corollaire 4.2.1 pour avoir l'existence de deux solutions 2π-périodiques. □

1. $(a + b\cos t)$ est 2π-périodique

Exemple 4.3.2. *Si* $q \in \Lambda^+$ *,l'équation :*

$$u'' + q(t)u = sgn(u)\,|u|^v$$

Admet au moins deux solutions non triviales qui sont T-périodiques $\forall v \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Evidemment, la non linéarité du terme $u'' + q(t)u = sgn(u)\,|u|^v$ est sublinéaire á ∞ et superlinéaire en 0 si $0 < v < 1$ et le contraire bien sur si $v > 1$, dans tout les cas la conclusion est la même. (théoreme 4.2 et le corollaire 4.2.1)

Exemple 4.3.3. ***Cas de nonlinéarité à sauts***
Dans cet exemple, on considère le cas des nonlinéarités à sauts. A cause du fait qu'elles modélisent les oscillations d'un pont en suspension, ce type d'équations a attiré l'intéret de beaucoup de mathématiciens. [1]

Corollaire 4.3.3. *Soit l'équation :*

$$u'' + q_1(t)u^+ - q_2(t)u^- = f(t,u). \qquad (JNL)$$

Avec $f \in Car([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $q_1, q_2 \in \Lambda^+$ *on suppose que*

$$sng(u)f(t,u) \geq 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad u \in \mathbb{R} \qquad \textit{et} \qquad t \in [0,T]$$

Et si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

$$(i) \qquad \lim_{u \to 0} \frac{f(t,u)}{u} = 0 \qquad \lim_{|u| \to +\infty} \frac{f(t,u)}{u} = +\infty$$

$$(ii) \qquad \lim_{u \to 0^+} \frac{f(t,u)}{u} = +\infty \qquad \lim_{|u| \to +\infty} \frac{f(t,u)}{u} = 0$$

uniformément par rapport à t*, alors l'équation (JNL) a aux moins deux solutions non*

1. voir [29] et les réfférences qu'il cite.

triviales T-périodiques.

Noter que l'exemple 4.3.2 est un cas special de l'exemple 4.3.3 lorsque $(q_1 \equiv q_2)$, *dans notre cas il est interessant de remarquer que* q_1 *et* q_2 *peuvent être non bornées, et par suite peuvent traverser la valeur propre du problème périodique* $u'' + \lambda u = 0$ *, et ce résultat peut être comparé avec d'autres résultats [28, 12, 13, 42, 52]*

4.3.2 Non linéarités singuliéres :

Dans le but de donner plus des applications des résultats de la section 4.2 à d'autres types de nonlinéarité, nous attirons l'attention du lecteur aux fait que les hypothèses de ses résultats sont éxigées être vérifiées sur des compacts de la forme $\left[\sigma r, \sigma^{-1} R\right]$.
Ce fait nous permet de faire des troncatures dans le cas où la nonlinéarité admet une singularité en 0. A notre connaissance, les premiers qui ont initié l'étude de l'existence de solutions périodiques pour des équations différentielles singulières sont Lazer et Solimini ,[30], où le model d'équations :

$$u'' \pm \frac{1}{u^\alpha} = p(t)$$

a été étudié au moyen de la méthode des sous et sur-solutions. Depuis, plusieurs auteurs se sont intéréssés à ce type d'équations, voir [20, 11, 17, 35, 36, 40, 21, 56, 57]

Si on considère le problème

$$\begin{cases} u'' + q(t)u(t) = f(t,u) \\ u(0) = u(T) \qquad u'(0) = u'(T) \end{cases} \qquad t \in [0,T] \qquad (NS)$$

Avec $q \in L^1[0,T]$ et $f \in Car\left([0,T] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}\right)$.
Le problème (NS) a une singularité atractive si

$$\lim_{x\to 0^+} f(t,u) = -\infty \qquad \text{unif} \qquad t \in [0,T]$$

et il a une singularité répulsive si

$$\lim_{x\to 0^+} f(t,u) = +\infty \qquad \text{unif} \qquad t \in [0,T]$$

m, M et σ étant les constantes définies dans la section 4.2.

Notre premier résultat concerne le cas des singularités attractives.

THÉORÈME 4.4: *Supposons que $q \in \Lambda^-$ et*

$$\lim_{u\to 0} f(t,u) = -\infty$$

Alors s'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,T]$

$$f(t,u) \leq 0 \qquad \forall u \in [0, \sigma R] \qquad et \qquad f(t,u) \geq \frac{1}{TM}u \qquad \forall u \in \left[R, \sigma^- R\right].$$

Alors le PLP (NS) admet une solution positive.

Si $q \in \Lambda^-$, alors l'équation :

$$u'' + q(t)u + b(t)u^v + \frac{1}{u^\lambda} = 0 \qquad \lambda > 0, \qquad 0 < v < 1 \qquad \text{et} \qquad b(t) > 0$$

Admet une solution T-periodique.

Preuve *:* Si $q \in \Lambda^-$ alors $m < M < 0$ la non linéarité de $f(t,u) = -\frac{1}{u\lambda} - b(t)u^v$ est négative singuliére en 0, et superlinéaire á $+\infty$.

On vérifie facilement les conditions du théorème 4.4. □

On considère maintenant le cas répulsif.

THÉORÈME 4.5: *Supposons que* $q \in \Lambda^+$ *et*

$$\lim_{u \to 0^+} f(t,u) = +\infty$$

Alors s'il existe $R > 0$ *tel que, pour tout* $t \in [0,T]$

$$f(t,u) \geq 0 \qquad \forall u \in \left[0, \sigma^{-1}R\right] \qquad et \qquad f(t,u) \leq \frac{1}{M}u \qquad \forall u \in \left[R, \sigma^{-1}R\right]$$

Alors le PLP (N.S) admet une solution positive.

Preuve *:* Ce théorème est une application directe du théorème 4.2. □

Exemple 4.3.4. *Soit l'équation*

$$u'' - \frac{q}{u^\lambda} + k^2 u = e(t) \qquad (NS)'$$

Où $q, k, \lambda \in \mathbb{R}^+$ *et* $e \in L^1[0,1]$.

Rappelons que

$$e^* = \sup ess(e(t)) \qquad e_* = \inf ess(e(t))$$

Il est prouvé dans [21] que si $k \in]0,\pi]$ *et l'inégalité suivante est vérifiée*

$$e_* > -\left(\frac{\pi^2 - k^2}{\lambda q}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} (\lambda+1)q.$$

alors, l'équation (NS)' admet une solution périodique positive. En particulier, ce résultat est vraie si $e_* \geq 0$.

On a maintenant un nouvau résultat.

Corollaire 4.3.4. *Supposons que* $e \in L^\infty[0,1]$, $k \in]0,\pi[$, $e_* < 0$ *et*

$$e^* \leq \frac{e_*}{\cos^\lambda\left(\frac{k}{2}\right)} + k\sin(k)\left(\frac{q}{|e_*|}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

Alors il éxiste une solution positive 1-périodique.

Preuve *:* Si $k \in]0,\pi[$ alors $k^2 \in \Lambda^+$, le minimum et le maximum de la fonction de Green correspendante ont été calculés dans l'éxprèssion de l'éxemple 4.1.1 , et cela entraîne que

$$m = \frac{1}{2k}\cot\left(\frac{k}{2}\right) \qquad M = \frac{1}{2k\sin\left(\frac{k}{2}\right)}$$

Ensuite, les conditions du théoreme 4.4 sont réduites à trouver $R > 0$ tel que

$$(i) \qquad \frac{q}{u^\lambda} + e_* \geq 0 \qquad \text{si} \qquad 0 < u \leq \frac{R}{\cos\left(\frac{k}{2}\right)}$$

et

$$(ii) \qquad \frac{q}{u^\lambda} + e^* \leq 2k\sin\left(\frac{k}{2}\right)u \qquad \text{si} \qquad R \leq u \leq \frac{R}{\cos\left(\frac{k}{2}\right)}$$

En utilisant le monotonie du terme gauche, la condition (i) est vérifiée en fixant

$$R = \left(\frac{q}{|e_*|}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\cos\left(\frac{k}{2}\right)$$

De manière analogue, la condition (ii) est vérifiée si

$$e^* \leq 2k\sin\left(\frac{k}{2}\right)R - \frac{q}{R^\lambda}$$

Maintenant, il est facile de prouver, par des opérations de base que cette inégalité et la condition

$$e^* \leq \frac{e_*}{\cos^\lambda\left(\frac{k}{2}\right)} + k\sin(k)\left(\frac{q}{|e_*|}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

sont équivalentes. □

Corollaire 4.3.5. *Si* $q(t) \in \Lambda^+$, $\lambda > 0$ *et* $b \in L^\infty(0,T$ *tel que* $b_* > 0$ *alors l'équation*

$$u'' + q(t)u - \frac{b(t)}{u^\lambda} = e(t)$$

a une solution T-périodique pour $e \in L^\infty(0,T)$ *tel que* $e_* \geq 0$

Exemple 4.3.5. *Comme exemple de ce résultat, on considére l'équation de* MATHIEU-DUFFING *singulière*

$$u'' + a(1 + b\cos t)u = \frac{1}{u^\lambda} \qquad (MD)'$$

ce problème a été traité dans plusieurs papiers [7, 45, 51, 56, 57].

on a le résultat suivant

Si $b = 1$ *et* $0 < a < 0,16488$ *et* $\lambda > 0$ *alors l'équation (MD)' a une solution* 2π*-périodique.*

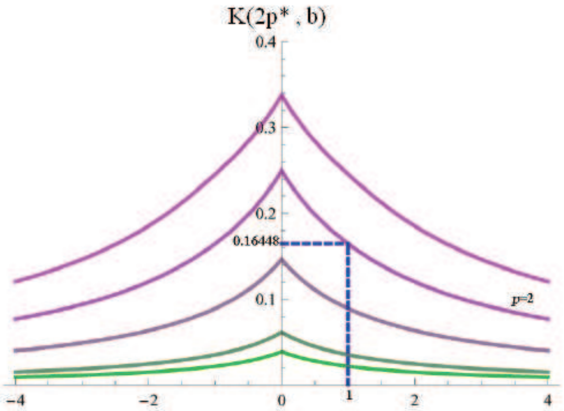

Figure 4.1 –

Preuve : Elle est déduite directement du corollaire 3.3.5 si l'on tient compte du fait que

$$q(t) = a(1 + \cos t) \in \Lambda^+$$

Si

$$a < \max_{1<p<+\infty} \frac{K(2p^*)}{\|1+\cos t\|_p} \approx 0,16488$$

(le maximum est atteint pour $P \approx 2,1941$). □

On termine ces applications par un résultat de multiplicité pour la singularité répulsive.

Théorème 4.6: *Supposons que*

$\lim_{t\to 0^+} f(t,u) = +\infty$,

pour $q \in \Lambda^+$ *et que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1- $f(t,u) \geq 0 \ \forall u > 0$

2-$lim_{u\to+\infty} \frac{f(t,u)}{u} = +\infty$

3- $\exists R > 0$ *tel que* $f(t,u) \leq \frac{1}{TM} u \ \forall u \in \left(R, \sigma^{-1}R\right)$

$\forall t \in [0,T]$.

Alors le problème (NS)

$$\begin{cases} u'' + q(t)u(t) = f(t,u) \\ u(0) = u(T) \qquad u'(0) = u'(T) \end{cases} \qquad \text{unif} \qquad t \in [0,T] \qquad (NS)$$

admet au moins deux solutions positives.

Preuve *:* En utilisant le comportement asymptotique de f, il est possible d'appliquer le théorème 4.2 deux fois, on obtient deux solutions périodiques u_1, u_2.

Montrons que ces solutions sont différentes;

On en déduit de la preuve du théorème 4.2, que si $u_1 \equiv u_2$ alors $R \leq u_1(t) \leq \sigma^{-1}R$ pour tout t, mais en utilisant l'hypothèse 3 du théorème 4.6 , nous arrivons à une contradiction, car

$$u_1(t) = \int_0^T G(t,s)f(s,u_1(s))ds \leq \frac{1}{TM}\int_0^T G(t,s)u_1(s)ds < \frac{1}{T}\int_0^T u_1(s)ds$$

Pour tout t,

Par conséquent, u_1 et u_2 sont des solutions différentes. $\square$

$\diamond \diamond \Diamond \diamond \diamond$

Chapitre 5

Solutions positives pour un PLP du second ordre

Par l'auteur : Q.Yao [1] (2007)

5.1 Inroduction

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et la multiplicité de solutions positives pour le PLP

$$(P) = \begin{cases} u'' = f(t, u(t)) \qquad \text{presque pour tout} \qquad t \in [0, 2\pi]. \\ u(0) = u(2\pi) \qquad u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

où $f\ :\ [0, 2\pi]\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction L^1-Carathéodory. Dans tout ce chapitre, k est une constante telle que $0 < k < 1/4$.
La nonlinéarité f peut être singulière on 0. Ce problème a été étudié dans le chapitre précédent et en déduit du théorème 4.2 ce qui suit

Théorème 5.1: *Supposons qu'ils existent deux constantes positives $a, b \in \mathbb{R}$ telles que :*

1) $f(t, u) + k.u \geq 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\forall u \in [\sigma min\{a, b\}, max\{a, b\}]$.

2) $f(t, u) + k.u \leq \frac{1}{2\pi M}u$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\forall u \in [\sigma a, a]$.

1. voir [50]

3) $f(t,u) + k.u \geq \frac{1}{2\pi\sigma m}u,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ \forall u \in [\sigma b, b].$

Alors le probleme (P) admet une solution positive.

Ici, m, M et σ sont ceux du chapitre 3.

Le théorème 4.2 est un moyen éfficace pour étudier l'existence des solutions positives lorsque le quotient $\frac{f(t,u)}{u}$ est essentiellement borné sur un des compacts $[0, 2\pi] \times [\sigma a, a]$ et $[0, 2\pi] \times [\sigma b, b]$, mais ce théorème est impuissant lorsque le quotient $\frac{f(t,u)}{u}$ n'est pas essentiellement borné sur l'un de ces compacts.

Le but de ce chapitre est de surmonter cet obstacle en utilisant deux fonctions hauteurs φ et ψ dépendantes du terme non linéaire $f + ku$.

Le théorème d'existence montre que le problème (P) admet au moins une solution à condition que les intégrales des fonctions φ et ψ vérifient certaines conditions.

5.2 Préliminaires

On considère l'espace de Banach $C\,[0, 2\pi]$ muni de la norme usuelle $\|u\| = \max_{t\in[0,2\pi]} |u(t)|$, et soient :

$$C^+\,[0, 2\pi] = \{u \in [0, 2\pi]\,, u(t) \geq 0, t \in [0, 2\pi]\,\}.$$

$$K = \{u \in C^+\,[0, 2\pi]\,, u(t) \geq \sigma\,\|u\|\,, t \in [0, 2\pi]\,\}.$$

On peut voir facilement que K représente le cône des fonctions positives dans $[0, 2\pi]$. Soit $\Omega(c) = \{u \in K, \|u\| < c\}, \partial\Omega = \{u \in K, \|u\| = c\}$.

La fonction de Green $G(t, s)$ associée à l'équation $u'' + ku = 0$ et les conditions $u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)$ est donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{k}(t-s)+\sin\sqrt{k}(2\pi-t+s)}{2\sqrt{k}(1-\cos\sqrt{k}2\pi)} & 0 \leq s \leq t \leq 2\pi \\ \frac{\sin\sqrt{k}(s-t)+\sin\sqrt{k}(2\pi-s+t)}{2\sqrt{k}(1-\cos\sqrt{k}2\pi)} & 0 \leq t \leq s \leq 2\pi \end{cases}$$

Comme $0 < \sqrt{k} < 1/2$, alors

$$G(t,s) \geq 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq t, s \leq 2\pi$$

Les points critiques de la fonction

$$G(|t-s|) = \hat{G}(u) = \frac{\sin\sqrt{k}u + \sin\sqrt{k}(2\pi - u)}{2\sqrt{k}(1 - \cos\sqrt{k}2\pi)}$$

sont donnés par $u = 0$ et $u = \pi$.

Noter aussi que $\hat{G}(u)$ est concave et atteint son maximum au point $u = \pi$ et atteint son minimum au point $u = 0 = 2\pi$.

$$\hat{G}'(u) > 0 \Rightarrow 0 < u < \pi, \qquad \hat{G}'(u) < 0 \Rightarrow \pi < u < 2\pi$$

$$\min_{[0,2\pi]} \hat{G}(u) = \hat{G}(0) = \hat{G}(2\pi) = \frac{\sin 2\sqrt{k}(\pi)}{2\sqrt{k}(1 - \cos\sqrt{k}2\pi)} \qquad \max_{[0,2\pi]} \hat{G}(u) = \hat{G}(\pi) = \frac{\sin\sqrt{k}(\pi)}{\sqrt{k}(1 - \cos\sqrt{k}2\pi)}.$$

On remarque que

$$G(s,t) = \hat{G}(|t-s|), \qquad \sigma = \frac{m}{M} = cos\sqrt{k}\pi$$

On définit l'opérateur :

$$T_k(u) = \int_0^{2\pi} G(t,s)\,[f(t,u(s)) + ku(s)] \qquad t \in [0,2\pi]$$

On a le lemme suivant :

Lemme 5.2.1. *L'opérateur T_k vérifie les propriétés :*

a_1- *Pour tout $0 < r_1 < r_2$, $T_k : \overline{\Omega(r_2)}\backslash\Omega(r_1) \longrightarrow C\,[0,2\pi]$ est un opérateur compact.*

a_2- *Si $u \in K$ tel que $f(t,u(t)) + ku(t) \geq 0$ pour $t \in [0,2\pi]$, alors $T_k(u) \in K$*

a_3- *Si* $u^* \in K$ *un point fixe de* T_k, $u^* \neq 0$, *alors* u^* *est solution positive du problème (P).*

Preuve *:* 1) Pour la première assertion, on a vu dans le chapitre précédent que l'opérateur $A = T_q$ est complètement continu , ainsi, T_k est un opérateur compact.

2) $f(t, u) + k.u \geq 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$, alors

$$\begin{aligned}
T_k(u) &= \int_0^{2\pi} G(t,s)\left[f(t,u(s)) + ku(s)\right] ds \\
&\geq \int_0^{2\pi} mG(t,s)\left[f(t,u(s)) + ku(s)\right] ds \\
&= mM^{-1} \int_0^{2\pi} MG(t,s)\left[f(t,u(s)) + ku(s)\right] ds \\
&\geq \sigma \max_{t\in[0,2\pi]} \int_0^{2\pi} G(t,s)\left[f(t,u(s)) + ku(s)\right] ds \\
&= \sigma \left\| T_k u \right\|
\end{aligned}$$

Donc, $(Tu) \in K$.

3) Si $0 \neq u^* \in K$ est un point fixe de T_k, alors $\|u^*\| > 0$ et $u^*(t) \geq \sigma \|\|u^*\|$, pour $t \in [0, 2\pi]$, et par suite

$$u(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)\left[f(t,u(s)) + ku(s)\right] \qquad t \in [0, 2\pi]$$

donc , le point fixe de l'opérateur T_k est une solution positive du problème (P). □

5.3 Existence de solutions et multiplicité

On considère maintenant deux fonctions dépendantes de la nonlinéarité f :

$$\varphi(t,r) = Sup_{t\in[0,2\pi]}\left\{f(t,u) + k.u, u \in [\sigma r, r]\right\}$$

$$\psi(t,r) = Inf_{t\in[0,2\pi]}\left\{f(t,u) + k.u, u \in [\sigma r, r]\right\}$$

En géométrie les fonctions φ et ψ éxprime la hauteur minimale et maximale de la fonction $f + ku$ dans le segment $t \times [\sigma r, r]$.

Comme f est une fonction L^1-CARATHEODORY, on déduit le résultat suivant ;

$$\forall r > 0, \exists h > 0, h \in L^1[0, 2\pi] \qquad \text{tel que} \qquad 0 \leq \psi(t, r) \leq \varphi(t, r) \leq h_{[\sigma r, r]}(t, r) + kr$$

Par suite $\psi(., r), \varphi(., r) \in L^1[0, 2\pi]$.

On obtient le théorème de base suivant :

THÉORÈME 5.2: *Supposons qu'ils existent a, b des réels positifs tel que :*

(b_1) $f(t, u) + k.u \geq 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ \forall u \in [\sigma min\{a, b\}, max\{a, b\}]$

(b_2) $\int_0^{2\pi} \varphi(t, a)dt \leq a.M^{-1}$ *et* $\int_0^{2\pi} \psi(t, b)dt \geq b.m^{-1}$

Alors le probleme (P) admet une solution positive $u^* \in K$ *tel que*

$$min\{a, b\} \leq \|u^*\| \leq max\{a, b\}$$

Preuve *:* Supposons que $a < b$.

Par la condition (b_1) et le lemme 5.2.1, on peut voir que l'operateur T_k est compact.

Si $u \in \partial\Omega_1(a)$ alors $\sigma.a \leq u(t) \leq a$.

On a aussi pour (b_1) et (b_2)

$$0 \leq f(t, u(t)) + k.u(t) \leq \varphi(t, a)$$

$$\begin{aligned} \|T_k\| &= \max_{0\leq t\leq 2\pi} \int_0^{2\pi} G(t, s)[f(s, u(s)) + k.u(s)]ds \\ &\leq \max_{0\leq t\leq 2\pi} \int_0^{2\pi} G(t, s).\varphi(s, a)ds \\ &\leq M.\frac{a}{M} \\ &\leq \|u\| \end{aligned}$$

Si $u \in \partial\Omega(b)$ alors $\sigma b \leq u(t) \leq b$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$f(t,u(t)) + k.u \geq \psi(t,b) \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\|T_k\| &= \max_{0\leq t\leq 2\pi} \int_0^{2\pi} G(t,s)[f(s,u(s)) + k.u(s)]ds \\
&\geq \max_{0\leq t\leq 2\pi} \int_0^{2\pi} G(t,s)\psi(s,b)ds \\
&\geq m\int_0^{2\pi} \psi(s,b)ds \\
&\geq b = \|u\|
\end{aligned}$$

Par le théoreme de Kranosel'skii, l'opérateur A admet au moins un point fixe, $u^* \in \overline{\Omega}(b)/\Omega(a)$, donc $u^* \in K$, et $a \leq \|u^*\| \leq b$

Par le lemme 5.2.1, u^* est une solution positive de PLP (P) □

Le théorème 5.2 montre que le problème (P) admet au moins une solution positive à condition que les intégrales des fonctions φ et ψ sont appropriées.

Soit $[c]$ la partie entière d'un réel c, le corollaire suivant nous donne un résultat de multiplicité.

Corollaire 5.3.1. *Supposons qu'il existe (n+1) a_i des nombres strictement positifs et $a_i \leq a_{i+1}$ tels que :*

(c_1)- $f(t,u) + k.u \geq 0, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \qquad \forall u \in [\sigma a_1, a_{n+1}]$.

(c_2)- *L'une des assertions suivantes est satisfaite :*

$$(i) - \begin{cases} \int_0^{2\pi} \varphi(t,a_{2i-1})dt < a_{2i-1}.M^{-1} & avec \quad i = 1,2...\left[\frac{n+2}{2}\right] \\ \int_0^{2\pi} \psi(t,a_{2i})dt > a_{2i}.m^{-1} & avec \quad i = 1,2...\left[\frac{n+1}{2}\right] \end{cases}$$

$$(ii) - \begin{cases} \int_0^{2\pi} \psi(t,a_{2i-1})dt > a_{2i-1}.m^{-1} & avec \quad i = 1,2...\left[\frac{n+2}{2}\right] \\ \int_0^{2\pi} \varphi(t,a_{2i})dt < a_{2i}.M^{-1} & avec \quad i = 1,2...\left[\frac{n+1}{2}\right] \end{cases}$$

Alors le PLP (P) admet au moins n solutions positives $u_i^* \in K$ telles que

$$a_i \leq \|u_i^*\| \leq a_{i+1}$$

Preuve *:* Par le théorème 5.2 , (P) admet au moins une solution pour $a_i \leq u_i^* \leq a_{i+1}$ tel que $min\{a,b\} \leq \|u^*\| \leq max\{a,b\}$

alors (P) admet au moins n solutions telles que

$$a_i \leq \|u_i^*\| \leq a_{i+1}$$

□

5.4 Lemmes priliminaires sur les fonctions limites

Supposons dans ce qui suit que les fonctions limites suivantes èxistent et sont uniformes :

$$F_0(t) = \lim_{u \to 0^+} \frac{f(t,u)}{u}, \qquad F_\infty(t) = \lim_{u \to +\infty} \frac{f(t,u)}{u}$$

$$\Phi_0(t) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\varphi(t,r)}{r}, \qquad \Phi_\infty(t) = \lim_{r \to +\infty} \frac{\varphi(t,r)}{r}$$

$$\Psi_0(t) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\psi(t,r)}{r}, \qquad \Psi_\infty(t) = \lim_{r \to +\infty} \frac{\psi(t,r)}{r}$$

Comme la fonction f est L^1-CARATHEODORY($f(.,u)$ est mesurable, pour $u \in \mathbb{R}^+$),alors ces fonctions limites sont des fonctions mesurables dans $[0, 2\pi]$.

On suppose que :

(d_1)- $f(t,u(t)) + k.u \geq 0, \qquad \forall u \in [0, +\infty[.$

(d_2)- $\exists q \in L^1[0, 2\pi]$ et $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq +\infty$ tels que

$$\frac{f(t,u)}{u} \leq q(t) \qquad \forall u \in]0, c_1[\cup]c_2, +\infty[$$

Lemme 5.4.1. *Supposons que* (d_2) *est verifiée, on a alors :*

$\lim_{u\to 0^+}\int_0^{2\pi}\frac{f(t,u)}{u}dt=\int_0^{2\pi}F_0(t)dt$ $\qquad$ $\lim_{u\to +\infty}\int_0^{2\pi}\frac{f(t,u)}{u}dt=\int_0^{2\pi}F_\infty(t)dt.$

$\lim_{r\to 0^+}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(t,r)}{r}dt=\int_0^{2\pi}\Phi_0(t)dt$ $\qquad$ $\lim_{r\to +\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(t,r)}{r}dt=\int_0^{2\pi}\Phi_\infty(t)dt$

$\lim_{r\to 0^+}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(t,r)}{r}dt=\int_0^{2\pi}\Psi_0(t)dt$ $\qquad$ $\lim_{r\to +\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(t,r)}{r}dt=\int_0^{2\pi}\Psi_\infty(t)dt$

Preuve *:* Si (d_2) est verifiée, alors il existe une fonction $q\in L^1[0,2\pi]$ et $c_2>0$ tel que

$$\frac{f(t,u)}{u}\leq q(t) \qquad \forall u\in]c_2,+\infty[$$

si $\sigma t\geq c_2$, alors pour tout $t\in[0,2\pi]$ et $\forall u\in[c_2,r]$

$$\frac{|f(t,u)+k.u|}{r}\leq\frac{|f(t,u)|}{u}+k\leq q(t)+k$$

donc

$$\frac{\psi(t,r)}{r}\leq\frac{\varphi(t,r)}{r}\leq q(t)+k$$

en appliquant le théorème de la convergence dominée de LEBESGUE, on obtient

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{f(t,u)}{u}dt=\int_0^{2\pi}\lim_{u\to+\infty}\frac{f(t,u)}{u}dt=\int_0^{2\pi}F_\infty(t)dt$$

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(t,r)}{r}dt=\int_0^{2\pi}\lim_{r\to+\infty}\frac{\varphi(t,r)}{r}dt=\int_0^{2\pi}\Phi_\infty(t)dt$$

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(t,r)}{r}dt=\int_0^{2\pi}\lim_{r\to+\infty}\frac{\psi(t,r)}{r}dt=\int_0^{2\pi}\Psi_\infty(t)dt$$

La preuve est similaire pour les autres égalités. □

Lemme 5.4.2. *Supposons que* (d_1) *est verifiee, on a alors :*

1)- Si $\int_0^{2\pi}F_0(t)dt<\frac{1}{M}-2\pi k$ *alors* $\qquad$ $\int_0^{2\pi}\Phi_0(t)dt<\frac{1}{M}$

2)- Si $\int_0^{2\pi}F_\infty(t)dt<\frac{1}{M}-2\pi k$ *alors* $\qquad$ $\int_0^{2\pi}\Phi_\infty(t)dt<\frac{1}{M}$

3)-Si $\int_0^{2\pi}F_0(t)dt>\frac{1}{\sigma m}-2\pi k.$ *alors* $\qquad$ $\int_0^{2\pi}\Psi_0(t)dt<\frac{1}{m}$

4)- Si $\int_0^{2\pi} F_\infty(t)dt > \frac{1}{\sigma m} - 2\pi k$ *alors* $\int_0^{2\pi} \Psi_\infty(t)dt < \frac{1}{m}$

Preuve *:* Pour (1), on a

$$\begin{aligned}
F_0(t) + k &= \limsup_{u\to 0^+} \frac{f(t,u)}{u} + k \\
&= \lim_{u\to 0^+} \sup_{0<u\leq r} \frac{f(t,u)}{u} + k \\
&\geq \lim_{r\to 0^+} \sup_{\sigma r\leq u\leq r} \left[\frac{f(t,u)+ku}{u}\right] \\
&\geq \lim_{r\to 0^+} \sup_{\sigma r\leq u\leq r} \left[\frac{f(t,u)+ku}{r}\right] \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{\varphi(t,r)}{r} \\
&= \Phi_0(t)
\end{aligned}$$

Par intégration sur $[0, 2\pi]$, on a

$$\int_0^{2\pi} \Phi_0(t)dt \leq \int_0^{2\pi} F_0(t)dt + 2k\pi \leq M^{-1}$$

Pour la preuve du (4), on a

$$\begin{aligned}
F_\infty(t) + k &= \lim_{u\to\infty} \inf_{r\leq u<\infty} \frac{f(t,u)}{u} \\
&= \lim_{r\to\infty} \inf_{r\leq u<\infty} \frac{f(t,u)}{u} + k \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \inf_{r\leq u<\sigma^{-1}r} \frac{f(t,u)+ku}{r} \\
&= \lim_{r\to\infty} \inf_{\sigma r\leq u<r} \frac{f(t,u)+ku}{\sigma r} \\
&= \sigma^{-1} \lim_{r\to\infty} \frac{\psi(t,r)}{r} \\
&= \sigma^{-1}\Psi_\infty(t).
\end{aligned}$$

Par suite

$$\Psi_\infty(t) \geq \sigma(F_\infty(t) + k)$$

et

$$\int_0^{2\pi} \Psi_\infty(t)dt \geq \sigma \int_0^{2\pi} F_\infty(t)dt + 2k\pi > \sigma\sigma^{-1}m^{-1} = m^{-1}.$$

la preuve pour (2) et (3) est similaire. □

5.5 Cas des fonctions limites non linéaires

Les lemmes 5.4.1 et 5.4.2 sont les outils éssentiels pour prouver les resultats d'éxistence et d'unicité pour les cas des fonctions limites.

ces resultats implique que le probleme (P) peut admettre une solution positive lorsque la limite $\frac{f(t,u)}{u}$ est une fonction et pas nécéssairement une constante.

THÉORÈME 5.3: *Supposons que les conditions d_1 et d_1 sont verifiées, et qu'une des conditions suivantes soit verifiée :*

(1)- $\int_0^{2\pi} \Phi_0(t)dt < \frac{1}{M}$ *et* $\int_0^{2\pi} \Psi_\infty(t)dt > \frac{1}{m}$.

(2)- $\int_0^{2\pi} \Phi_\infty(t)dt < \frac{1}{M}$ *et* $\int_0^{2\pi} \Psi_0(t)dt > \frac{1}{m}$

(3)- $\int_0^{2\pi} F_0(t)dt < \frac{1}{M} - 2\pi k$ *et* $\int_0^{2\pi} F_\infty(t)dt > \frac{1}{\sigma m} - 2\pi k$

(4)- $\int_0^{2\pi} F_\infty(t)dt < \frac{1}{M} - 2\pi k$ *et* $\int_0^{2\pi} F_0(t)dt > \frac{1}{\sigma m} - 2\pi k$.

Alors le probleme (P) admet au moins une solution positive $u^* \in K$

Preuve *:* Par la condition (d2) et le lemme 5.4.1 , on a

$$\lim_{r\to 0^+} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(t,r)}{r}dt = \int_0^{2\pi} \Phi_0(t)dt < M^{-1}.$$

$$\lim_{r\to +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(t,r)}{r}dt = \int_0^{2\pi} \Psi_\infty(t)dt = m^{-1}.$$

Ceci implique qu'ils existent des nombres positifs $0 < a < b < +\infty$, tels que $\int_0^{2\pi} \varphi(t,a)dt < aM^{-1}$ et $\int_0^{2\pi} \psi(t,b) > bm^{-1}$.

Par la condition d_1 et le théorème 5.2, on en déduit que le problème (P) admet au moins une solution positive $u^* \in K$.

La preuve du (2) est similaire à celle du (1), du (3) et (4) peuvent être déduites du (1) et (2) respectivement, en appliquant le lemme 5.4.2. $\square$

On donne maintenant un résultat de multiplicité des solutions pour (P).

THÉORÈME 5.4: *Supposons les conditions d_1 et d_2 vérifiées, Si l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

(1) $-$ $\int_0^{2\pi} \Phi_0(t)dt < \frac{1}{M}$ $\int_0^{2\pi} \Phi_\infty(t)dt < \frac{1}{M}$ *et*

$\exists b > 0$ *tel que* $\int_0^{2\pi} \psi(t,b)dt > b\frac{1}{m}$.

(2) $-$ $\int_0^{2\pi} \Psi_0(t)dt > \frac{1}{m}$ $\int_0^{2\pi} \Psi_\infty(t)dt > \frac{1}{m}$ *et*

$\exists a > 0$ *tel que* $\int_0^{2\pi} \varphi(t,b)dt < a\frac{1}{M}$.

(3) $-$ $\int_0^{2\pi} F_0(t)dt < \frac{1}{M} - 2\pi k$ $\int_0^{2\pi} F_\infty(t)dt < \frac{1}{M} - 2\pi k$ *et*

$\exists b > 0$ *tel que* $\int_0^{2\pi} \psi(t,b)dt > b\frac{1}{m}$

(4) $-$ $\int_0^{2\pi} F_0(t)dt > \frac{1}{\sigma m} - 2\pi k$ $\int_0^{2\pi} F_\infty(t)dt > \frac{1}{\sigma m} - 2\pi k$ *et*

$\exists a > 0$ *tel que* $\int_0^{2\pi} \varphi(t,b)dt < a\frac{1}{M}$.

Alors le probleme (P) admet au moins deux solutions positives $u_1^*, u_2^* \in K$.

On termine ce chapitre par un corollaire global pour l'existence de solutions positives 2π-périodiques pour (P).

Corollaire 5.5.1. *Supposons qu'ils existent $a, b > 0$ tel que :*

1) $-$ $f(t,u) + ku \geq 0$ $\forall t \in [0, 2\pi]$ $\forall u \in [\sigma min\{a,b\}, max\{a,b\}]$

2) $-$ $f(t,u) + ku \leq \frac{1}{2\pi M}a$ $\forall t \in [0, 2\pi]$ $\forall u \in [\sigma a, a]$

3) $-$ $f(t,u) + ku \leq \frac{1}{2\pi\sigma m}b$ $\forall t \in [0, 2\pi]$ $\forall u \in [\sigma b, b]$

Alors le probleme (P) admet une solution positive tel que $u^* \in K$ satisfaisant

$$min\{a,b\} \leq \|u^*\| \leq max\{a,b\}$$

***Preuve** :*

$$\varphi(t,a) \leq \frac{a}{2\pi M} \qquad \text{et} \qquad \psi(t,a) \geq \frac{b}{2\pi m}$$

Alors

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t,a) \leq \frac{a}{M} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} \psi(t,a) \geq \frac{b}{m}$$

Le théorème 5.2 complete la preuve. □

Noter qu'on peut voir le théorème 5.1 comme étant un cas particulier du corollaire 5.5.1.

5.6 Exemples :

Dans les exemples suivants, on choisit $k = 1/9$, par suite on trouve
$M = \sqrt{3}, \qquad m = \sqrt{3}/2, \qquad \sigma = 1/2.$

Exemple 5.6.1. *Considerons le probleme suivant :*

$$(P_1)\begin{cases} u''(t) = \max\left\{10\sqrt{3}, \min\left\{\frac{10\sqrt{3}}{3600\pi^2}u^2(t), 160\sqrt{3}\right\}\right\} - \frac{1}{9}u(t) \qquad pour \qquad t \in [0,2\pi] \\ u\,(0) = u\,(2\pi) \qquad u'\,(0) = u'\,(2\pi) \end{cases}$$

Tel que $f(t,u) + ku = max\left\{10\sqrt{3}, min\frac{10\sqrt{3}}{3600\pi^2}u^2, 160\sqrt{3}\right\}$ *et*

1)-$f(t,u) + ku \leq 10\sqrt{3} = \frac{60\pi}{2\pi M}u^2, 160\sqrt{3}$ *pour* $t \in [0,2\pi]$ *et* $u \in [30\pi, 60\pi]$

2)-$f(t,u) + ku \geq \frac{10\sqrt{3}}{3600\pi^2}(240\pi)^2 = \frac{280\pi}{2\pi m}$ *pour* $t \in [0,2\pi]$ *et* $u \in [240\pi, 480\pi]$

Par le corollaire 5.5.1, le problème (P_1) *admet une solution positive* $u^* \in K$ *et* $60\pi \leq \|u^*\| \leq 480\pi$.

mais comme

3)- $f(t,u) + ku > \frac{1}{2\pi M}u$ *pour* $t \in [0,2\pi]$ *et* $u \in [30\pi, 60\pi[$

4)- $f(t,u) + ku < \frac{1}{2\pi\sigma m}u$ *pour* $t \in [0,2\pi]$ *et* $u \in]240\pi, 480\pi]$

la conclusion ne peut être dérivée du théorème 4.2 du chapitre précédent.

Exemple 5.6.2. *Considerons le probleme suivant :*

$$(P_2)\begin{cases} u''(t) = q(t)\max\left\{\frac{2u(t)}{3\sqrt{3}}, 4u(t)-10\right\} - \frac{1}{9}u(t) \qquad pour \qquad t \in [0,2\pi] \\ u(0) = u(2\pi) \qquad u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

quand $q(t) = \frac{1}{\pi-2}[\frac{1}{\sqrt{t(2\pi-t}} - \frac{1}{n}]$ *alors* $f(t,u) + ku = q(t)max\left\{\frac{2u(t)}{3\sqrt{3}}, 4u(t)-10\right\}$

Un cacul direct nous donne :

$\int_0^{2\pi} q(t)dt = \frac{1}{\pi-2}(\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t(2\pi-t}}dt - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}dt) = 1$

il est facile de verifier que $\varphi_0(t) = \frac{2}{3\sqrt{3}}q(t)$ *et* $\Psi_\infty(t) = 2q(t)$.

alors

$$\int_0^{2\pi}\varphi_0(t)dt = \frac{2}{3\sqrt{3}} < \frac{}{\sqrt{3}} = M^{-1}$$

$$\int_0^{2\pi}\Psi_\infty(t)dt = 2 > \frac{2}{\sqrt{3}} = m^{-1}$$

par le theoreme 5.3-(1), le probleme (P_2) *admet une solution positive. Mais comme*

$$f(0,u) + ku = f(2\pi,u) + ku = +\infty$$

$$f(\pi,u) + ku = 0 \qquad u \in [0,+\infty[$$

la conclusion ne peut être dérivée du corollaire 5.5.1.

Remarque 5.6.1. *Soit* $k > 0$*, la fonction de* Green *associée au problème :*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{\sqrt{k}(t-s)} + e^{\sqrt{k}(2\pi-t+s)}}{2\sqrt{k}(e^{2\sqrt{k}\pi}-1)} & 0 \le s \le t \le 2\pi \\ \frac{e^{\sqrt{k}(t-s)} + e^{\sqrt{k}(2\pi+t-s)}}{2\sqrt{k}(e^{2\sqrt{k}\pi}-1)} & 0 \le s \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$m = \frac{e^{\sqrt{k}\pi}}{\sqrt{k}(e^{2\sqrt{k}\pi}-1)}, \qquad M = \frac{1+e^{2\sqrt{k}\pi}}{2\sqrt{k}(e^{2\sqrt{k}\pi}-1)}, \qquad \sigma = \frac{2e^{\sqrt{k}\pi}}{1+e^{2\sqrt{k}\pi}}.$$

ALors, les résultats de ce chapitre resterons valables pour le problème aux limites *périodique :*

$$(P') = \begin{cases} -u'' = f(t, u(t)) & t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(T) & u'(0) = u'(T) \end{cases}$$

On a besoin que k soit strictement positive seulement.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Chapitre 6

Existence des solutions périodiques positives pour l'équation différentielle non linéaire

Par les auteurs : Fuyi Li et Zhanping Liangs[1] (2005)

6.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on étudiera l'éxistence de solutions positives périodiques des équations differentielles non linéaires

$$u''(t) + q(t)u(t) = f(t, u(t)) \tag{6.1.1}$$

où q et f vérifient les conditions :

(H1) $q : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ est une fonction T-périodique continue et $q(t)$ non identiquement nulle.

(H2) $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est continue et $f(., u) : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ est aussi une fonction T-périodique pour chaque $u \in [0, +\infty[$.

Une fonction u est une solution positive T-périodique de l'équation (6.1.1) si et seule-

1. voir [32]

ment si

(i) $u \in C^2(\mathbb{R})$, $u(t+T) = u(t)$, $u(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $u(t)$ non identiquement nul.

(ii) $u''(t) + q(t)u(t) = f(t, u(t))$, $t \in \mathbb{R}$

Il est facile de voir que u est solution positive périodique de l'équation (6.1.1) si et seulement si u est solution du PLP suivant

$$u''(t) + q(t)u(t) = f(t, u(t)) \qquad t \in [0, T] \tag{6.1.2}$$

$$u(0) = u(T), \qquad u'(0) = u'(T) \tag{6.1.3}$$

Récemment, la théorie de l'indice du point fixe a été utilisée par plusieurs auteurs pour obtenir des résultats d'existence des solutions positives pour diveres classes de problèmes aux limites, voir [10, 31, 19, 62]

Dans ce travail, comme dans [33, 61], nous allons utiliser cette théorie pour obtenir des résultats d'existence de solutions positives pour le PLP (6.1.2)-(6.1.3) sous les conditions que le quotient $f(t, u)/u$ change sa position par rapport à la première valeur propre du problème aux valeurs propres associés à (6.1.2)-(6.1.3), c'est à dire le problème

$$u'' + q(t)u = \lambda u$$

$$u(0) = u(T) \qquad u'(0) = u'(T)$$

6.2 Préléminaires :

Dans cette section, nous allons démontrer quelques lemmes utiles pour les preuves des résultats principaux de ce chapitre.

Tout au long de cette section, nous supposons que q vérifie (H1) et f vérifie (H2).

E désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[0, T]$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|.\|$ et K est le cône de E constitué par les fonctions positives.

K induit dans E l'ordre partiel $\preceq$, c'est à dire pour $u, v \in E, u \preceq v$ signfie que $u-v \in K$. Parfois on utilise pour $u, v \in E$ la notation $u \prec v$ qui signifie que $u \preceq v, u \neq v$.

Lemme 6.2.1. *Si $0 < M \leq (\pi/T)^2$, alors pour tout $h \in C[0,T]$, il existe une unique solution u satisfaisant le problème aux limites*

$$u''(t) + Mu(t) = h(t), \qquad t \in [0,T] \tag{6.2.1}$$

$$u(0) = u(T) \qquad u'(0) = u'(T) \tag{6.2.2}$$

la solution u est donnée par $u := Th$ oú T satisfait

(i) $T : C[O,T] \longrightarrow C[0,T]$ est un opérateur linéaire compact et $\|T\| = 1/M$

(ii) T est un opérateur linéaire positif, c'est à dire $Th \in K$ pour tout $h \in K$

(iii) T est est également un opérateur linéaire fortement positif,

c'est à dire $(Th)(t) > 0$, $t \in [0,T]$ pour tout $h \in K$ avec h non identiquement nulle.

***Preuve** :* Soit

$$r(t) = \alpha_0 cos\beta(t - T/2) \qquad t \in [0,T]$$

où $\beta = \sqrt{M}$ et $\alpha_0 = (2\beta sin\beta T/2)^{-1}$.

Il est évident que $r \in C^2[0,T]$, $r(t) \geq 0, \forall t \in [0,T]$ et

$$r''(t) + Mr(t) = 0, \qquad r(0) = r(T), \qquad r'(0) = r'(T) + 1 \tag{6.2.3}$$

Soit $G : [0,T] \times [0,T] \longrightarrow [0,+\infty)$ comme suit

$$G(t,s) = \begin{cases} r(t-s) & 0 \leq s \leq t \leq T \\ r(T+t-s) & 0 \leq s \leq t \leq T \end{cases}$$

D'apres (6.2.3) on peut facilement voir que

$$u(t) := (Th)(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds = \int_0^t r(t-s)h(s)ds + \int_t^T r(T+t-s)h(s)ds \tag{6.2.4}$$

est l'unique solution du problème (6.2.1) et (6.2.2).
Comme G est continue , $T : C[0,T] \longrightarrow C[0,T]$ est un operaeur linèair compact. Evidemment $1/M$ est la solution du problème (6.2.1) et (6.2.2) avec $h(t) \equiv 1$. Ainsi nous obtenons

$$\int_0^T G(t,s)ds = \frac{1}{M} \qquad t \in [0,T] \tag{6.2.5}$$

Donc,

$$\|Th\| \leq \int_0^T |G(t,s)|\,|h(s)|\,ds \leq \frac{1}{M}\,\|h\| \qquad t \in [0,T]$$

A cause de la positivité de G, on en déduit que $\|T\| = 1/M$
Il est clair que $Th \in K$ pour tout $h \in K$. Il reste à montrer que T est strictement positif. Pour $h \in K$ avec h non identiquement nulle, on obtient

$$(Th)(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds > 0, \qquad t \in [0,T]$$

Il s'agit de prouver que, pour chaque $t \in [0,T]$, $G(t,s)h(s)$ n'est pas identiquement nulle sur $[0,T]$.
Comme h n'est pas identiquement nulle, alors il existe $s_0 \in]0,T[$ et $\delta > 0$ tel que $h(s) > 0$ pour tout $s \in [s_0-\delta, s_0+\delta] \subset [0,T]$ ainsi que $t \in [0, s_0[$,

$$G(t,s_0)h(s_0) = r(T+t-s_0)h(s_0) = \alpha_0 cos\beta(t-s_0+T/2)h(s_0)$$

avec

$$-T/2 < T/2 - s_0 \leq t - s_0 + T \leq \frac{T}{2}$$

Ceci implique que

$$\beta(t - s_0 + T/2) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

et

$$G(t, s_0)h(s_0) > 0$$

Lorsque $t = s_0$, On a

$$G(t, s_0 + \delta)h(s_0 + \delta) = G(s_0, s_0 + \delta)h(s_0 + \delta) = \alpha_0 cos\beta(T/2 - \delta)h(s_0 + \delta) > 0$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

Lemme 6.2.2. *Soit l'opérateur* $B : E \longrightarrow E$ *définit pour tout* $h \in E$ *par*
$(Bh)(t) = (M - q(t))h(t)$, $t \in [0, T]$
Alors B *est un opérateur linéaire, continu et positif .*
De plus, si $0 < M \leq (\frac{\pi}{T})^2$ *alors* $\|TB\| < 1$.

Preuve *:* Il est facile de vérifier que B :$C\,[0, T] \longrightarrow$C $[0, T]$ est un opérateur linéaire , continu et positif, et que $\|B\| < M$.
Maintenant pour $h \in E$, on a la suite d'inégalité :

$$\begin{aligned}
|(TBh)(t)| &\leq \int_0^T G(t, s)(M - q(s))\,|h(s)|\,ds \\
&\leq \|h\| \int_0^T G(t, s)(M - q(s))ds \\
&= \|h\|\,(1 - (Tq)(t)) \\
&\leq \|h\|\, max_{[0,T]}(1 - (Tq)(t))
\end{aligned}$$

Puisque $q \in K$, le lemme 6.2.1 entraîne que

$$0 \leq Tq(t) \leq \|T\|\,\|q\| = \frac{\|q\|}{M} \leq 1, \qquad t \in [0, T]\,.$$

puis

$$\|TB(h)\| \leq \|h\| \, max_{[0,T]}(1-(Ta)(t)) < \|h\| \,.$$

c'est à dire $\|TB\| < 1$. □

Remarque 6.2.1. *Le lemme 6.2.2 améliore le résultat dans [33] dans le sens où dans notre cas q peut s'annuler sur $[0,T]$ et que M peut être égal à $(\frac{\pi}{T})^2$*

Lemme 6.2.3. *Si $0 < M \leq (\frac{\pi}{T})^2$, alors pour tout $h \in E$, le PLP suivant :*

$$u''(t) + q(t)u(t) = h(t) \qquad t \in [0,T] \tag{6.2.6}$$

$$u(0) = u(T), \qquad u'(0) = u'(T) \tag{6.2.7}$$

admet une unique solution u, où u=Lh et :

1- L :$E \longrightarrow E$ est un opérateur linéaire positif compact.

2- $Lh \geq Th$ pour tout $h \in K$

3- L est fortement positif .

Preuve *:* Il est clair que le problème (6.2.6)-(6.2.7) est equivalent à l'équation $u = TBu + Th$ ou encore

$$(I - TB)u = Th \tag{6.2.8}$$

Comme $\|TB\| < 1$, le lemme 5.2.2 entraîne que $I-TB$ admet un inverse borné$(I-TB)^{-1}$ et ainsi l'équation admet une unique solution $u = (I-TB)^{-1}Th = Lh$ où
$L = (I-TB)^{-1}T$ est linéaire et compact puisque T l'est .
Le développement de Newmann donne :

$$\begin{aligned} L &= (I + TB + (TB)^2 + (TB)^3 + ... + (TB)^n + ...)T \\ &= T + TBT + (TB)^2T + ...(TB)^nT + ... \end{aligned}$$

Il découle de ce développement que L est positif puisque T et B le sont et que $L > T$ qui signifie que L est fortement positif. Ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

Lemme 6.2.4. *Si $0 < M < (\pi/T)^2$ et r_L est le rayon spectral de l'opérateur L. Alors $r_L > 0$ et il existe $\varphi > 0$ tel que $L\varphi = r_L\varphi$. Ainsi $\lambda_0 = 1/r_L$ est la première valeur propre positive du problème périodique linéaire correspondant au problème (6.1.2), (6.1.3) et on a :*

$$\int_0^T \varphi(t)(Lu)(t)dt = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^T \varphi(t)u(t)dt \qquad \text{pour tout} \qquad u \in E. \tag{6.2.9}$$

***Preuve** :* Puisque L est un opérateur fortement positif et $Lh > Th$, $r_L > (1/M)^n$ est strictement positif et il est la première valeur propre positive de L, de plus, r_L est algébriquement simple. [1]

Il existe un unique $\varphi > 0$ tel que $L\varphi = r_L\varphi$. En terme d'équation différentielle, le couple (φ, r_L) vérifie

$$\varphi''(t) + q(t)\varphi(t) = (1/r_L)\varphi, \qquad t \in [0,T]$$
$$\varphi(0) = \varphi(T), \qquad \varphi'(0) = \varphi'(T)$$

ce qui signifie que $\lambda = 1/r_L$ est la première valeur propre positive du PLP associé (6.2.6)-(6.2.7)

Comme Lu est l'unique solution du problème périodique linéaire suivant

$$w''(t) + q(t)w(t) = u(t) \qquad t \in [0,T]$$

$$w(0) = w(T), \qquad w'(0) = w'(T)$$

1. Théorème de Krein-rutman

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \int_0^T \varphi(t)(Lu)(t)dt &= \int_0^T (\varphi''(t) + q(t)\varphi(t))(Lu)(t)dt \\
&= \varphi'(t)(Lu)(t)\Big|_0^T - \int_0^T \varphi'(t)(Lu)'(t)dt + \int_0^T q(t)\varphi(t)(Lu)(t)dt \\
&= -\varphi(t)(Lu)'(t)\Big|_0^T + \int_0^T \left[\varphi(t)(Lu)''(t) + q(t)\varphi(t)(Lu)(t)\right] dt \\
&= \int_0^T \varphi(t)u(t)dt
\end{aligned}$$

Ainsi (6.2.9) est vérifiée. □

Maintenant, nous définissons les opérateurs $F, A : E \to E$ par

$$(Fu)(t) = f(t, u(t)), \qquad t \in [0, T] \qquad \forall u \in E$$

$$A = LF \tag{6.2.10}$$

A noter que le (iii) du lemme 6.2.3 entraîne que $\varphi(t) = \lambda_0(L\varphi)(t) > 0$. $\forall t \in [0, T]$. soit $b = \min_{t\in[0,T]} \varphi(t)$; alors $b > 0$, où $\varphi > 0$ et $r_L\varphi = L\varphi$ avec $\int_0^T \varphi(t) = \lambda_0$.

Soit le cône P de K donné par :

$$P = \{u \in K : \int_0^T u(t)\varphi(t)dt \geq \delta \|u\|\}.$$

où

$$\delta = \frac{b}{\lambda_0\alpha_0 \|(I - TB)^{-1}\|}$$

On a le résultat suivant :

Lemme 6.2.5. *$A(K) \subset P$ et $A : K \longrightarrow P$ est complètement continue.*

***Preuve** :* Pour $u \in K$, de l'équation (6.2.9) et de la définition de A et F il s'ensuit que

$$\int_0^T \varphi(t)(Lu)(t)dt = \int_0^T \varphi(t)(LFu)(t)dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_0}\int_0^T \varphi(t)f(t,u(t))(t)dt \tag{6.2.11}$$

$$\geq \frac{b}{\lambda_0}\int_0^T f(t,u(t))(t)dt.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|Au\| &= \|LFu\| \\
&= \left\|(I-TB)^{-1}TFu\right\| \\
&\leq \left\|(I-TB)^{-1}\right\| \|TFu\| \\
&= \left\|(I-TB)^{-1}\right\| \max_{t\in[0,T]} \int_0^T G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&\leq \left\|(I-TB)^{-1}\right\| \max_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]} G(t,s) \int_0^T f(s,u(s))ds \\
&= \alpha_0 \left\|(I-TB)^{-1}\right\| \int_0^T f(s,u(s))ds
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus et (6.2.11), nous obtenons

$$\int_0^T \varphi(t)(Au)(y)dt \geq \frac{b}{\lambda_0\alpha_0 \left\|(I-TB)^{-1}\right\|}\|Au\| = \delta \|Au\|$$

Par conséquent, $Au \in P$; donc $A(K) \subset P$. Il est évident que $A : C^+[0,T] \to P$ est complètement continue. $\square$

6.3 Existence de solutions périodiques positives

L'énoncé du théorème principal de ce chapitre a besoin d'introduire les notations suivantes :

$$f^0 = \lim_{u\to 0^+} sup \max_{t\in[0,T]} \frac{f(t,u)}{u} \qquad f_0 = \lim_{u\to 0^+} inf \min_{t\in[0,T]} \frac{f(t,u)}{u}$$

$$f^\infty = \lim_{u\to +\infty} sup \max_{t\in[0,T]} \frac{f(t,u)}{u} \qquad f_\infty = \lim_{u\to +\infty} inf \min_{t\in[0,T]} \frac{f(t,u)}{u}$$

Théorème 6.1: *Supposons les conditions (H1) et (H2) vérifiées. Si* $0 < M \leq (\pi/T)^2$, *alors l'équation (6.1.1) admet au moins une solution positive périodique dans chacun des cas suivants :*

(i)- $f^0 < \lambda_0 < f_\infty$

(ii)- $f_0 < \lambda_0 < f^\infty$

où λ_0 *est la première valeur propre positive de l'équation linéaire correspondant à l'équation (6.1.1).*

Preuve *:* D'après le lemme 6.2.4 et la définition du cône P, tout point fixe nontrivial de l'opérateur A dans P est une solution positive du PLP (6.1.2) et (6.1.3) et c'est une solution positive périodiques de l'équation (6.1.1). Soit φ est la fonction propre positive de l'opérateur L associée à la valeur propre $r_L = 1/\lambda_0$ avec $\int_0^T \varphi(t)dt = \lambda_0$.

* Supposons que la condition (i) soit vérifiée. Lorsque $f^0 < \lambda_0$, par la définition de f^0, il existe $r_0 > 0$ et $\epsilon > 0$ telle que

$$f(t,u) \leq \lambda_0(1-\epsilon)u \qquad \text{pour tout} \qquad t \in [0.T] \qquad \text{et} \qquad u \in [0, r_0] \tag{6.3.1}$$

Soit $r \in]0, r_0[$; nous allons prouver que $\mu Au \neq u$, pour tout $u \in \partial P_r$ et $\mu \in]0.1]$. En fait, s'il existe $u_0 \in \partial P_r$ et $\mu_0 \in]0.1]$ tel que $\mu_0 Au_0 = u_0$, alors $u_0 \leq Au_0$. En multipliant cette inégalité par φ, et en l'intégrant sur $[0,T]$, en utilisant (6.2.9) et (6.3.1) , on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt &\leq \int_0^T \varphi(t)(Au_0)(t)dt \\ &= \int_0^T \varphi(t)(LFu_0)(t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda_0}\int_0^T f(t,u_0(t))\varphi(t)((t)dt \\ &\leq \frac{1}{\lambda_0}\lambda_0(1-\epsilon)\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt \\ &= (1-\epsilon)\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt\end{aligned}$$

Comme $\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt \geq \delta \|u_0\| = \delta r > 0$, cela implique que $1 \leq 1-\epsilon$, qui est une contradiction. D'où A satisfait les hypothèses du Lemme 1.4.1 [1]. Par conséquent, nous avons

$$i(A, P_r, P) = 1 \tag{6.3.2}$$

D'autre part, puisque $f_\infty > \lambda_0$, par la définition de f_∞, il existe $R_0 > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que

$$f(t,u) \geq \lambda_0(1+\epsilon)u \qquad \text{pour tout} \qquad t\in[0,T] \qquad \text{et} \qquad u \geq R_0 \tag{6.3.3}$$

Puisque $f(t,u) - \lambda_0(1+\epsilon)u$ est continue sur $[0,T]\times[0,R_0]$, on peut choisir $C > 0$ tel que $f(t,u) - \lambda_0(1+\epsilon)u \geq -C$ pour tout $(t,u) \in [0,T]\times[0,R_0]$. Donc nous avons tout à fait

$$f(t,u) \geq \lambda_0(1+\epsilon)u - C \qquad \text{pour tout} \qquad t\in[0,T] \qquad \text{et} \qquad u \geq 0$$

Soit $R > max(C/\epsilon\delta, R_0, r_0)$. S'il existe $u_0 \in \partial P_R$ et $\mu_0 \geq 0$ tel que $u_0 = Au_0 + \mu_0\varphi$, donc $u_0 \geq Au_0$.

En multipliant cette inégalité par φ, en intégrant sur $[0,T]$, en utilisant (6.2.9) et (6.3.3) et en notant que $\int_0^T \varphi(t))dt = \lambda_0$

1. Priliminaires, section 4

nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt &\geq \int_0^T \varphi(t)(Au_0)(t)dt \\
&= \int_0^T \varphi(t)(LFu_0)(t)dt \\
&= \frac{1}{\lambda_0}\int_0^T f(t,u_0(t))\varphi(t)((t)dt \\
&\geq \frac{1}{\lambda_0}\int_0^T (\lambda_0(1-\epsilon)u_0(t)-C)\varphi(t)dt \\
&= (1+\epsilon)\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt - C
\end{aligned}$$

Par la definition de P, on a $\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt \geq \delta \|u_0\| = \delta R$. Il s'ensuit donc que $R \leq C/\epsilon\delta$, ce qui contredit le choix de R. Donc l'hypothése du Lemme 1.4.2 est vérifiée.
Alors on a

$$i(A, P_R, P) = 0 \tag{6.3.4}$$

Maintenant, par la propriété de l'additivité de l'indice du point fixe (6.3.2) et (6.3.4), nous avons

$$i(A, P_R\backslash\overline{P_r}, P) = i(A, P_R, P) - i(A, P_r, P) = -1.$$

Alors A a un point fixe dans $P_R\backslash\overline{P_r}$.

* Supposons que la condition (ii) est vérifiée. lorsque $f_0 > \lambda_0$, par la définition de f_0, il existe $r_0 > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que

$$f(t,u) \geq \lambda_0(1+\epsilon)u \qquad \text{pour tout} \qquad t\in[0,T] \qquad \text{et} \qquad u\in[0,r_0] \tag{6.3.5}$$

Soit $r \in [0, r_0]$. S'il existe $u_0 \in \partial P_r$ et $\mu_0 \geq 0$ tel que $u_0 = Au_0 + \mu_0\varphi$, alors $u_0 \geq Au_0$. En multipliant cette inégalité par φ, en intégrant sur $[0, T]$, en utilisant (6.2.9) et (6.3.5), nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt &\leq \int_0^T \varphi(t)(LFu_0)(t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda_0}\int_0^T f(t,u_0(t))\varphi(t)((t)dt \\ &\geq \frac{1}{\lambda_0}\lambda_0(1+\epsilon)\int_0^T u_0(t)\varphi(t)dt \\ &\geq (1+\epsilon)\int_0^T u_0(t)\varphi(t)dt\end{aligned}$$

Comme $\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt > 0$, il s'ensuit que $1 \geq 1+\epsilon$, ce qui est une contradiction.
Sur la base du Lemme 1.4.2, nous avons

$$i(A, P_r, P) = 0 \tag{6.3.6}$$

D'autre part, puisque $f^\infty < \lambda_0$, il existe $R_0 > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que

$$f(t,u) \leq \lambda_0(1-\epsilon)u \qquad \text{pour tout} \qquad t \in [0,T] \qquad \text{et} \qquad u \geq R_0$$

Comme $f(t,u) - \lambda_0(1-\epsilon)u$ est continue sur $[0,T] \times [0,R_0]$, on peut choisir $C > 0$ tel que

$$f(t,u) \leq \lambda_0(1-\epsilon)u + C \qquad \text{pour tout} \qquad t \in [0,T] \qquad \text{et} \qquad u \in [0,R_0]$$

Donc nous avons

$$f(t,u) \leq \lambda_0(1-\epsilon)u + C \qquad \text{pour tout} \qquad t \in [0,T] \qquad \text{et} \qquad u \geq 0 \tag{6.3.7}$$

Soit $R > max(C/\epsilon\delta, R_0, r_0)$.

S'il existe $u_0 \in \partial P_R$ et $u_0 \in]0,1]$ tel que $u_0 = \mu_0 A u_0$, alors $u_0 \leq A u_0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt &\leq \int_0^T \varphi(t)(LFu_0)(t)dt \\
&= \frac{1}{\lambda_0}\int_0^T f(t,u_0(t))\varphi(t)((t)dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda_0}\int_0^T (\lambda_0(1-\epsilon)u_0(t)+C)\varphi(t)dt \\
&= (1-\epsilon)\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt + C
\end{aligned}$$

En outre, $\int_0^T \varphi(t)u_0(t)dt \geq \delta \|u_0\| = \delta R$. On a $R \leq C/\epsilon\delta$, qui est une contradiction. Alors

$$i(A, P_R, P) = 1 \tag{6.3.8}$$

De (6.3.6) et (6.3.8) il s'ensuit que

$$i(A, P_R \backslash \overline{P_r}, P) = i(A, P_R, P) - i(A, P_r, P) = 1. \quad \square$$

Corollaire 6.3.1. *Supposons que (H1) et (H2) sont vérifiées.*
Si $0 < M \leq (\pi/T)^2$ *et l'un des cas suivants :*
i- $f^0 = 0,\ f^\infty = \infty$ *(superlinéaire)*
ii- $f^0 = \infty,\ f^\infty = 0$ *(sublinéaire)*
est satisfaite, alors l'équation (6.1,1) admet au moins une solution positive périodique.

Remarque 6.3.1. *Les conditions (i) et (ii) du théorème 6.1 sont données par la première valeur propre positive de l'équation différentielle linéaire correspondant à l'équation (6.1,1), donc un résultat d'existence est essentiel avant l'application de ce théorème, et les résultats obtenus dans [33] sont améliorés.*

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Chapitre 7

Résultats d'existence pour un PLP non linéaire

Par les auteurs : John R. Graef et Lingju Kong [1](2010)

7.1 Introduction

On étudiera dans cette partie le problème aux limites :

$$\begin{cases} -(p(t)u')' + q(t)u = w(t)f(t,u) & t \in [0,T] \\ u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \end{cases} \tag{7.1.1}$$

où $u^{[1]}(t) = p(t)u'(t)$, et p, q, w et f sont telles que

$$(H_1)\begin{cases} w > 0 \qquad p(t) > 0, q(t) \geq 0, q(t) \neq 0 \qquad \text{presque partout dans} \qquad [0,T] \\ 1/p, q, w \in L^1[0,T] \end{cases}$$

$(H_2) f \in C([0,T] \times \mathbb{R}$.

et comme application, on étudiera aussi le problème aux valeurs propres :

$$-(p(t)u')' + q(t)u = \lambda w(t)f(t,u) \qquad t \in [0,T] \tag{7.1.2}$$

1. voir [16]

$$u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T)$$

où λ est un paramétre réel .

Par une solution du PLP (7.1.1), on signifie une fonction $u \in C^1[0, T]$ telle que pu' est absolument continue sur $[0, T]$ et u satisfait l'équation (7.1.1).

Les PLP ont été étudié dans plusieurs papiers, voir à titre d'éxemple [61, 22, 4, 37, 11, 12, 14, 20, 40, 39, 38].

Dans les chapitres 2,3,4 on a utilisé le théorème du point fixe de GUO-KRANOSEL'SKII pour obtenir des résultats d'existence des solutions positives périodiques.

Dans ce chapitre, on fera appel à la théorie du degré topologique pour établir des résultats d'existence et de multiplicité pour le problème (7.1.1) dans le cas où la nonlinéarité f peut changer de signe. Ces résultats sont obtenus grâce à des hypothèses sur la position du quotient $f(t, u)/u$ en 0 et en $+\infty$ par rapport à λ_0 [1]

Des critères d'éxistence comme ceux du [18] sont obtenus dans [9, 49]

Introduisons quelques notations qu'on utilisera plus tard

Pour tout $b > 0$, on note par Φ_b et Ψ_b les solutions uniques pour les problèmes initiaux :

$$-(p(t)u')' + (q(t) + bw(t))u = 0, \qquad u(0) = 1, \qquad u^{[1]}(0) = 0$$
$$-(p(t)u')' + (q(t) + bw(t))u = 0, \qquad u(0) = 0, \qquad u^{[1]}(0) = 1$$

respectivement,

On pose :

$$D = \Phi_b(t) + \Psi_b^{[1]}(t) - 2.$$

On a montré que $D > 0$ [2].

1. λ_0 est la première valeur propre du problème homogène associé à (7.1.1)
2. lemme (3.2.2) chap 3

On définit la fonction $H(t,s,b)$ par :

$$H(t,s,b) = \frac{\Psi_b(T)}{D}\Phi_b(t)\Phi_b(s) - \frac{\Phi_b(T)}{D}\Psi_b(t)\Psi_b(s)$$

$$+\begin{cases} \frac{\Psi_b^{[1]}(T)-1}{D}\Phi_b(t)\Psi_b(s) - \frac{\Phi_b(T)-1}{D}\Phi_b(s)\Psi_b(t). & 0 \le s \le t \le T. \\ \frac{\Psi_b^{[1]}(T)-1}{D}\Phi_b(s)\Psi_b(t) - \frac{\Phi_b(T)-1}{D}\Phi_b(t)\Psi_b(s). & 0 \le t \le s \le T. \end{cases}$$

On a vu que $H(t,s,b) > 0$ [1] pour $t, s \in [0,T]$, et lorsque $b = 0$,$H(t,s,0)$ est la fonction de Green $G(t,s)$ associé au problème (7.2.1)

7.2 Résultats d'existence de solutions périodiques

Considérons le problème aux valeurs propres :

$$-(p(t)u')' + q(t)u = \lambda w(t)u \qquad t \in [0,T] \tag{7.2.1}$$

$$u(0) = u(T). \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T)$$

Comme $q(t) \ge 0$, d'aprés le théorème 2.2, ce problème admet une suite dénombrable de valeurs propres λ_i toutes positives, qui tend vers $+\infty$;

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < .... < \lambda_{2n-3} \le \lambda_{2n-2} < \lambda_{2n-1} \le \lambda_{2n} < \lambda_{2+1} \le .... \tag{7.2.2}$$

et les λ_i peuvent être au plus de mutiplicité 2.

On pose les hypotheses suivantes

$(A1)$ ils existent $b \ge 0, c > 0, \alpha > 1$ et $0 < r < 1$,tels que :

$$f(t,x) + bx + c\,|x|^{\alpha} \ge 0 \qquad \text{pour}(t,x) \in [0,T] \times [-r, 0] \tag{7.2.3}$$

1. Chapitre 3, Th 3.2

$(A2)$ il éxiste $b > 0$ tels que

$$x(f(t,x) + bx) \geq 0 \qquad \text{pour}(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \tag{7.2.4}$$

$(A3)$ ils existent $0 < r_1 < r_2 < \infty$ tels que

$$f(t,x) \geq \frac{1}{m\int_0^T w(s)ds} x \qquad \text{pour}(t,x) \in [0,T] \times [0,r_1] \tag{7.2.5}$$

et

$$f(t,x) \leq \frac{1}{M\int_0^T w(s)ds} x \qquad \text{pour}(t,|x|) \in [0,T] \times [r_2,+\infty] \tag{7.2.6}$$

Et notera dans ce qui suit

$$f_0 = \liminf_{x \to 0^+} \min_{t\in[0,T]} \frac{f(t,x)}{x} \qquad f^\infty = \limsup_{|x| \to +\infty} \max_{t\in[0,T]} \left|\frac{f(t,x)}{x}\right|$$

On énonce les résultats suivants

Théorème 7.1: *Supposons qu'en plus de $(A1)$ la condition suivante*

$$f^\infty < \lambda_0 < f_0 \tag{7.2.7}$$

est vérifiée, alors le problème périodique (7.1.1) admet au moins une solution.

Corollaire 7.2.1. *On suppose que $(A1)$ et$(A3)$ sont vérifiées, alors le problème périodique (7.1.1) admet au moins une solution.*

Les résultats suivants sont des résultats de multiplicité de solutions :

Théorème 7.2: *Supposons que $(A2)$ est vérifiée,si en plus :*

$$f^\infty < \lambda_0 < f_0$$

alors le problème périodique (7.1.1) admet aux moins une solution positive et une solution négative .

Corollaire 7.2.2. *Supposons que* $(A2)$ *et* $(A3)$ *sont vérifiées,alors le problème périodique (7.1.1) admet au moins une solution positive et une négative.*

Remarque 7.2.1. - *les deux premiers résultats nous garantissent l'éxistence des solutions non triviales ,on a juste besoin de connaitre le comportement des assymptotes de* f *au voisinage de* 0 *et* $+\infty$.

-les deux derniers résultats sont un prologement des resultats précédents qui ont été établi juste pour les solutions positives.

Maintenant, on donne les resultats pour le problème périodique au valeurs propres (7.1.2) :

Théorème 7.3: *Supposons que* $(A1)$ *est vérifié, si en plus on a :*

$$\frac{\lambda_0}{f_0} < \lambda < \frac{\lambda_0}{f^\infty} \tag{7.2.8}$$

alors le problème (7.1.2) admet au moins une solution non triviale.

Corollaire 7.2.3. *Supposons que* $(A1)$ *est vérifié, si en plus on a :*

$$\frac{1}{mf_0 \int_0^T w(s)ds} \leq \lambda \leq \frac{1}{Mf^\infty \int_0^T w(s)ds} \tag{7.2.9}$$

alors, le problème (7.1.2) admet au moins une solution non triviale.

On a maintenant le résultat de multiplicité suivant :

Théorème 7.4: *Supposons* $(A2)$ *est vérifié,si en plus on a :*

$$\frac{\lambda_0}{f_0} < \lambda < \frac{\lambda_0}{f^\infty}$$

alors le problème (7.1.2) admet aux moins une solution positive et une solution négative.

Corollaire 7.2.4. *Supposons que $(A2)$ est vérifié, si en plus on a :*

$$\frac{1}{mf_0 \int_0^T w(s)ds} \leq \lambda \leq \frac{1}{Mf^\infty \int_0^T w(s)ds}$$

alors, le problème (7.1.2) admet aux moins une solution positive et une solution négative .

Remarque 7.2.2. *Le corolaire 7.2.4 est une éxtension du résultat du chapitre 3 (théorème3.6 et corolaire 3.4.2) où uniquement les solutions positives sont prises en consédirations.*

Exemple 7.2.1. *On considère le problème aux limites suivant*

$$-u'' + u = f(t,u) \qquad t \in [0,1] \tag{7.2.10}$$

$$u(0) = u(1) \qquad u'(0) = u'(1) \tag{7.2.11}$$

où

$$f(t,x) = \begin{cases} -12t^2 + 13 + (|x|^{\frac{1}{2}} - 2)x^{\frac{1}{3}} & \textit{pour} \quad x < -4. \\ -t^2(x^2 + x) + 3\,|x| + 1. & \textit{pour} \quad -4 \leq x \leq 0. \\ 1 - tx^{\frac{1}{2}}. & \textit{pour} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

alors, le problème admet au moins une solution.

Ici, $T = 1$, et $p(t) = q(t) = w(t) = 1$ sur $[0,T]$, donc (H_1) est vérifiée.

pour $b = c = 1$ et $\alpha = 2$, la condition $(A1)$ est vérifiée pour $r \in [0,1]$.

plus encore, on a $f_0 = \infty$ et $f^\infty = 0$.

On sait que pour le problème constitué de l'équation

$$-u'' = \lambda u \qquad \text{pour} \qquad t \in [0,T]\,.$$

et les conditions périodiques (7.2.11), on a la premiere valeur propre est $\lambda_0 = 0$. Par conséquent, pour le problème :

$$-u'' + u = \lambda u \qquad \text{pour} \qquad t \in [0, T] .$$

avec les mêmes conditions limites, la premiere valeur propre est $\lambda_0 = 1$, comme $f^\infty < \lambda_0 = 1 < f_0$, on a directement la conclusion en appliquant le théoreme 7.1.

Exemple 7.2.2. *Considérons le problème aux valeurs propres suivant :*

$$-u'' + 8u = \lambda f(t, u) \qquad t \in [0, T] \tag{7.2.12}$$

$$u(0) = u(1) \qquad u'(0) = u'(1) \tag{7.2.13}$$

où λ est un parametre positif, et :

$$f(t, x) = x^{\frac{1}{3}} - 2t^2 x$$

on en déduit que pour tout $0 < \lambda < 4$, le problème admet aux moins une solution positive et une solution négative.

Ici, $T = 1$, $p(t) = w(t) = 1$, et $q(t) = 8$, on prend $b = 2$, la fonction $f(t, x)$ vérifie la condition $(A2)$, plus encore, on a $f_0 = \infty$, et $f^\infty = 2$, pour le problème :

$$-u'' + 8u = \lambda u \qquad \text{pour} \qquad t \in [0, T] .$$

et avec le même raisonnement précédent on peut voir que $\lambda_0 = 8$, donc la condition

$$\frac{\lambda_0}{f_0} < \lambda < \frac{\lambda_0}{f^\infty}$$

est vérifiée et la conclusion se déduit directement du théoreme 7.4

Exemple 7.2.3. *Soit le problème périodique :*

$$-((t^2+1)u')' + \frac{64}{t^2+1}u = t^{-\frac{1}{2}}f(t,u) \tag{7.2.14}$$

$$u(0) = u(1) \qquad u'(0) = 2u'(1) \tag{7.2.15}$$

Où :

$$f(t,x) = \begin{cases} -(e^{2\pi}+1)^2 - 2e^{2\pi}t(x^{\frac{1}{3}}+1)x^{\frac{2}{3}} & \textit{pour} \quad x < -1. \\ (e^{2\pi}+1)^2 x \quad \textit{pour} \quad -1 \le x \le 1. \\ (e^{2\pi}+1)^2 + 2e^{2\pi}t^3(1-x^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{2}} & \textit{pour} \quad 1 \le x \end{cases}$$

On en déduit que pour tout λ tq :

$$\frac{4(e^{2\pi}-1)}{e^{\pi}(e^{2\pi}+1)^2} \le \lambda \le \frac{4(e^{2\pi}-1)}{e^{2\pi}(e^{2\pi}+1)}$$

Donc , le problème (7.21.4)-(7.2.15) admet aux moins une solution positive et une solution négative.

Ici, $T = 1$, $p(t) = t^2+1$, $q(t) = \frac{64}{t^2+1} = \frac{8^2}{p(t)}$, et $w(t) = t^{-\frac{1}{2}}$.

Pour $b = 2e^{2\pi}$, on peut voir que la condition $(A2)$ est vérifiée , plus encore, on a $f_0 = (e^{2\pi}+1)^2$ et $f^{\infty} = 2e^{2\pi}$.

on peut calculer les éxtrémums de $G(t,s)$ [1], on trouve :

$$m = \frac{e^x}{8(e^{2x}-1)} \qquad \text{et} \qquad M == \frac{e^{2x}+1}{16(e^{2x}-1)}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{1}{mf_0\int_0^T w(s)ds} = \frac{4(e^{2x}-1)}{e^x(e^{2x}+1)^2}$$

et

$$\frac{1}{Mf^{\infty}\int_0^T w(s)ds} = \frac{4(e^{2x}-1)}{e^{2x}(e^{2x}+1)}$$

1. chapitre 3, section 3.7 N°2

donc la condition

$$\frac{1}{mf_0 \int_0^T w(s)ds} \leq \lambda \leq \frac{1}{Mf^\infty \int_0^T w(s)ds}$$

est vérifiée.

Par conséquent, la conclusion se déduit directement du corollaire 7.2.4.

7.3 Lemmes priliminaires

Les lemmes qui vont suivre sont utiles pour les preuves des résultats de la section précédente.

Lemme 7.3.1. *Pour tout $b > 0$ et $h \in L[0, T]$, le PLP :*

$$-(p(t)u')' + (q(t) + bw(t))u = h(t) \qquad t \in [0, T]$$

$$u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T)$$

admet une solution $u(t)$ si et seulement si :

$$u(t) = \int_0^T H(t, s, b)h(s)ds$$

Où $H(t, s, b)$ est la fonction définie précédemment. [1].

Maintenant, on considère un espace de BANACH réel X muni de la norme usuelle,X^* est l'espace dual de X, P un cône total dans X, c'est à dire $P = \overline{X - X}$ et P^* le cône dual de P, c'est à dire

$$P^* = \{g(u), g(u) \geq 0 \qquad \forall u \in P\}$$

Soient $L : X \longrightarrow X$ un opérateur linéair compact positif, L^* l'opérateur adjoint de

1. chapitre 2,théorème 2.3

L et r_L le rayon spéctral de L, donc si $r_L > 0$, alors c'est est une valeur propre positive d'aprés le théorème de KREIN-RUTMAN et ils existent $\varphi \in P/0$ et $h \in P^*/0$ tels que

$$L\varphi = r_L\varphi \qquad \text{et} L^*h = r_L h$$

Soit $\delta > 0$, on définit :

$$P(h,\delta) = \{u \in P; h(u) \geq \delta \|u\|\}. \tag{7.3.1}$$

Par suite,$P(h,\delta)$ est un cône dans X.

Lemme 7.3.2. *Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :*
(C_1) *: Il éxiste $\varphi \in P\backslash(0)$ et $h \in P^*\backslash(0)$ tels que :*

$$L\varphi = r_L\varphi \qquad et \qquad L^*h = r_L h \qquad et \qquad L(P) \subseteq P(h,\delta)$$

(C_2) *: $A : X \longrightarrow P$ est un opérateur continu, et il éxiste $\alpha > 1$ et $K > 0$ tels que :*

$$\|Au\| \leq K\|u\|^\alpha \qquad \forall u \in X$$

(C_3) *: $F : X \longrightarrow X$ est un opérateur continu borné , et il éxiste $r^* > 0$ tel que :*

$$Fu + Au \in P \qquad \forall u \in X \qquad avec \|u\| \leq r^*$$

(C_4) *: Il éxiste $\eta > 0$ et $r^{**} > 0$ tel que :*

$$LFu \geq r_L^{-1}(1+\eta) \qquad \forall u \in X \qquad avec \|u\| \leq r^{**}$$

Soit $T = LF$, alors il éxiste $0 < R < \min(r^*, r^{**})$ tel que le degré de Leray-schauder $\deg(I - T, B(0,R), 0) = 0$, *où $B(0,R) = \{u \in X : \|u\| < R\}$.*

Preuve : Il suffit juste de montrer qu'il éxiste $0 < R < \min(r^*, r^{**})$, tel que :

$$u - Tu \neq \tau \qquad \forall u \in \partial B(0,R) \qquad \text{et} \qquad \tau \geq 0. \tag{7.3.2}$$

dans le cas contraire, il éxiste $u_1 \in \partial B(0,R)$ et $\tau_1 \geq 0$ tel que :

$$u_1 - LFu_1 = \tau_1 \varphi \qquad \forall 0 < R < \min(r^*, r^{**}). \tag{7.3.3}$$

par suite, d'aprés (7.3.1) et (C_4), on a

$$\begin{aligned}
h(u_1) &= h(LFu_1) + \tau_1 \varphi \\
&\geq h(LFu_1) \\
&\geq r_L^{-1}(\eta+1)h(Lu_1) \\
&= r_L^{-1}(\eta+1)(L^*h)(u_1) \\
&= (r_L^{-1}(\eta+1)(r_L h)(u_1) \\
&= (1+\eta)h(u_1).
\end{aligned}$$

ce qui implique que $h(u_1) \leq 0$.

En prenant en considération que r_L est une valeur propre pour L et L^* [1], et la condition (C_2), on a alors :

$$\begin{aligned}
h(u_1 + LAu_1) &= h(u_1) + h(LAu_1) \\
&= h(u_1 + (L^*h)(Au_1) \\
&\leq (L^*h)(Au_1) \\
&\leq r_L h(Au_1) \\
&\leq (r_L K \|h\| \, \|u_1\|^{\alpha} \\
&= D_1 \|u_1\|^{\alpha}
\end{aligned}$$

1. Théorème de KREIN-RUTMAN

où $D_1 = r_L K \|h\|$.

par conséquent :

$$u_1 + LAu_1 = LF(u_1) + LAu_1 + \tau_1 \varphi.$$

$$= L(Fu_1 + Au_1) + \tau r_L^{-1} L\varphi.$$

par les conditions (C_1) et (C_3), on peut voir que $u_1 + LAu_1 \in P(h, \delta)$, donc :

$$h(u_1 + LAu_1) \geq \delta \|u_1 + LAu_1\| \geq \delta \|u_1\| - \delta \|LAu_1\| .$$

par suite :

$$\|u_1\| \leq \delta^{-1} h(u_1 + LAu_1) + \|LAu_1\| .$$

la condition (C_2) nous donne :

$$R = \|u_1\| \leq \delta^{-1} D_1 \|u_1\|^{\alpha} + K \|L\| \|u_1\|^{\alpha}$$

$$= D_2 \|u_1\|^{\alpha} .$$

$$= D_2 R^{\alpha}.$$

où $D_2 = \delta^{-1} D_1 + K \|L\|$.

Comme $\alpha > 1$, l'égalité $R = D_2 \|u\|^{\alpha}$ ne peut avoir lieu pour R suffisamment petit, donc il éxiste $0 < R < \min(r^*, r^{**})$. Comme T est compact, la preuve se déduit directement du lemme 1.3.1 [1]. $\square$

7.4 Preuve des résultats :

Soit $X = C\,[0, T]$ un éspace de Banach muni de la norme usuelle $\|u\| = \max_{t \in [0,T]} |u(t)|$ on définie le cône :

$$P = \{u \in X : u(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]\}.$$

1. Premier chapitre, Lemme du degré topologique

et on définie les opérateurs :$L, f, T : X \longrightarrow X$ par :

$$Lu(t) = \int_0^T H(t,s,b)w(s)u(s)ds,$$

$$Fu(t) = f(t,u(t)) + bu(t).$$

et :

$$Tu(t) = LFu(t) = \int_0^T H(t,s,b)w(s)Fu(s)ds,$$

par suite,$L : X \longrightarrow X$ est compact, linéaire et positif.

$F : X \longrightarrow X$ est continue et borné, est par suite ;$T : X \longrightarrow X$ est compact.

par le lemme 7.3.1, $u(t)$ est une solution de l'équation (7.1.1) si et seulement si u est point fixe de T.

***Preuve.* du théorème 7.1** On doit vérifier avant tout que les conditions $(C_1) - (C_4)$ du lemme 7.3.2 sont satisfaites ;
comme $H(t,s,b) > 0$, alors $Lv(t) > 0, t \in [0,T]$, pour tout $v \in P$ avec $v(t)$non identiquement nulle sur $[0,T]$. par suite, il éxiste $d > 0$ tel que $d(Lv)(t) > v(t), t \in [0,T]$, par suite le rayon spectrale r_L de L vérifie $r_L > 0$, et par le théorème de KREIN-RUTMAN , il éxiste $\varphi \in P\backslash(0), h \in P^*\backslash(0)$, tel que

$$L\varphi = r_L \qquad \text{et} \qquad L^*h = r_L h$$

Et on peut voir que $r_L^{-1} = \lambda_0 + b$
Maintenant, on vérifie que h est donnée éxplicitement par

$$h(u) = \int_0^T w(t)\varphi(t)u(t)dt \qquad u \in X$$

Par conséquent, comme $H(t,s,b)$ est symmetrique par rapport à (s,t) , on a :

$$\begin{aligned}
\forall u \in X, \qquad r_L h(u) &= \int_0^T w(t)(r_L\varphi(t))u(t)dt \\
&= \int_0^T w(t)u(t)(\int_0^T H(t,s,b)w(s)\varphi(s)ds)dt \\
&= \int_0^T w(s)\varphi(s)(\int_0^T H(t,s,b)w(t)u(t)dt)ds \\
&= \int_0^T w(s)\varphi(s)(\int_0^T H(s,t,b)w(t)u(t)dt)ds \\
&= \int_0^T w(s)\varphi(s)(Lu)(s)ds \\
&= h(Lu) = (L^*h)(u).
\end{aligned}$$

Noter que $\varphi > 0$ sur $[0,T]$, donc il éxiste $\delta_1 > 0$ tel que :

$$\varphi(s) > \delta_1 H(t,s,b). \qquad (t,s) \in [0,T]^2$$

Posons $\delta = r_L\delta_1$, on montre que $L(P) \subseteq P(h,\delta)$.

$\forall u \in P$, on a d'aprés ce qui précède :

$$\begin{aligned}
h(Lu) &= r_L \int_0^T w(t)\varphi(s)u(s)ds \\
&\geq r_L\delta_1 \int_0^T h(t,s,b)w(s)u(s)ds \\
&= \delta(Lu)(t)
\end{aligned}$$

donc pour $t \in [0,T]$

$$h(Lu) \geq \delta \|Lu\|$$

c'est à dire

$$L(P) \subseteq P(h,\delta).$$

La condition (C_1) du lemme 7.3.2 est vérifiée.

On pose $Au(t) = c\,|u(t)|^\alpha$ pour $u \in X$, où c et α sont données dans la condition (C_1), donc pour $c = K$, la condition(C_2) du lemme 7.3.2 est vérifiée.

Soit r celui donné dans la condition $(A1)$,$0 < r < 1$

Comme $f_0 > \lambda_0$, il éxiste $\eta > 0$ et $0 < c_1 < 1$ tel que :

$$\begin{aligned} f(t,x) + bx &\geq (\lambda_0 + b)(1+\eta)x \\ &= r_L^{-1}(1+\eta)x \geq 0. \qquad (t,x) \in [0,T] \times [0,c_1]\,. \end{aligned}$$

on a $Fu = f(t,u(t)) + bu(t)$, par la condition $(A1)$, on peut voir que la condition(C_3) du lemme 7.3.2 est vérifiée, en prenant $r^* = \min(c_1, r)$.

D'aprés la condition $(A1)$, on a :

$$f(t,x) + bx \geq -c\,|x|^{\alpha} \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times [-r,0]\,.$$

on choisit $0 < c_2 < \min(c_1, r)$ suffisament petit tel que

$-c\,|x|^{\alpha} \geq r_L^{-1}(1+\eta)x$ pour $x \in [-c_2, 0]$,

alors :

$$f(t,x) + bx \geq r_L^{-1}(1+\eta) \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times [-c_2,0]\,.$$

et par conséquent :

$$f(t,x) + bx \geq r_L^{-1}(1+\eta) \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times [-c_2,c_2]\,.$$

ce qui implique :

$$LFu \geq r_L^{-1}(1+\eta)x \qquad \forall u \in X, \|u\| < c_2.$$

donc , la condition (C_4) du lemme 7.3.2 est vérifiée, avec $r^{**} = c_2$.

On a vu que toutes les conditions du lemme 7.3.2 sont vérifiées, alors il éxiste $R_1 > 0$, tel que

$$\deg(I - T, B(0,R_1), 0) = 0. \qquad \text{où} \qquad B(0,R) = \{u \in X : \|u\| < R\}.$$

Ensuite , comme $f_\infty < \lambda_0$, il éxiste $0 < \nu < 1$ et $R_3 > R_1$ tels que :

$$\begin{aligned} |f(t,x) + bx| &\leq (\lambda_0 + b)(1-\nu)\,|x| \\ &= r_L^{-1}(1-\nu)\,|x|\,. \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times]R_3, +\infty[\end{aligned}$$

posons :

$$L = \sup_{u \in X, \|u\| < R_3} \max_{t \in [0,T]} \int_0^T H(t,s,b) w(s)\,|Fu(s)|\,ds.$$

alors, $0 < L < \infty$. on choisit R_2 suffisamment grand tel que :

$$R_2 > \max(R_3, \nu^{-1} L.$$

$\forall u \in X$, en définie les deux ensembles :

$$I_1^u = \{t \in [0,T] : |u(t)| > R_3\}$$

$$I_2^u = [0,T] \backslash I_1^u$$

et

$$\tilde{u}(t) = \min\{|u(t)|\,, R_3\}$$

On définit

$$B(0, R_2) = \{u \in X : \|x\| < R_2\}$$

par conséquent, on affirme que :

$$Tu \neq \tau u \qquad \text{pour tout} \qquad u \in \partial B(0,R_2) \qquad \text{et} \qquad \tau \geq 1$$

Si ce n'est pas le cas, alors il éxiste $u^* \in \partial B(0, R_2)$ et $\tau^* \geq 1$ tel que $Tu^* = \tau^* u^*$.

Il s'ensuit que $u^* = s^*Tu^*$ où $s^* = 1/\tau^*$, avec $s^* \in (0,1)$. Supposons qu'il éxiste $t^* \in [0,T]$ tel que :

$\|u^*\| = |u^*(t^*)|$. Alors $R_2 = |u^*(t^*)| = s^* |Tu^*(t^*)|$ pour h definie comme précédemment par

$$h(u) = \int_0^T w(t)\varphi u(t)dt \qquad u \in X$$

on a :

$$\begin{aligned} h(R_2) &= h\left(|u^*(t^*)|\right) \\ &= s^* h\left(|Tu^*(t^*)|\right) \\ &\leq h\left(|Tu^*(t^*)|\right) \\ &= h\left(\left|\int_0^T H(t^*,s,b)w(s)Fu^*(s)ds\right|\right) \\ &\leq h\left(\int_0^T H(t^*,s,b)w(s)\left|Fu^*(s)\right|ds\right) \\ &= h\left(\int_{I_1^{u^*}} H(t^*,s,b)w(s)\left|Fu^*(s)\right|ds\right) + h\left(\int_{I_2^{u^*}} H(t^*,s,b)w(s)\left|Fu^*(s)\right|ds\right) \end{aligned}$$

maintenant ,comme

$$|f(t,x)+bx| \leq r_L^{-1}(1-\nu)\,|x| \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times]R_3,+\infty[$$

et

$$L = \sup_{u\in X, \|u\|<R_3} \max_{t\in[0,T]} \int_0^T H(t,s,b)w(s)\left|fu(s)\right|ds.$$

et aussi le faite que $L^*h = r_L h$, on obtient alors

$$h\left(\int_{I_1^{u^*}} H(t^*,s,b)w(s)\left|Fu^*(s)\right|ds\right) + h\left(\int_{I_2^{u^*}} H(t^*,s,b)w(s)\left|Fu^*(s)\right|ds\right)$$

$$\leq r_L^{-1}(1-\nu)h\left(\int_{I_1^{u^*}} H(t^*,s,b)w(s)\left|Fu^*(s)\right|ds\right) + \left(\int_{I_2^{u^*}} H(t^*,s,b)w(s)\left|Fu^*(s)\right|ds\right)$$

$$\leq r_L^{-1}(1-\nu)h\left(\int_0^T H(t^*,s,b)w(s)\left|Fu^*(s)\right|ds\right)+\left(\int_0^T H(t^*,s,b)w(s)\left|Fu^*(s)\right|ds\right)$$

$$\leq r_L^{-1}(1-\nu)h\left(L\left|u^*(t^*)\right|\right)+h(L)$$

$$= r_L^{-1}(1-\nu)(L^*h)\left(\left|u^*(t^*)\right|\right)+h(L)$$

$$= r_L^{-1}(1-\nu)r_L h\left(\left|u^*(t^*)\right|\right)+h(L)$$

$$= (1-\nu)h(R_2)+h(L)$$

ainsi

$$h(R_2)\leq(1-\nu)h(R_2)+h(L)$$

ce qui implique que

$$(\nu R_2-L)+h(1)\leq 0$$

Compte tenu du fait que $h(1)>0$ alors $R_2\leq\nu^{-1}L$ ceci contredit le fait que $R_2>\max(R_3,\nu^{-1}L)$.

par suite on a bien

$$Tu\neq\tau u \qquad \text{pour tout} \qquad u\in\partial B(0,R_2) \qquad \text{et} \qquad \tau\geq 1$$

Du lemme 1.3.2 du premier chapitre (degré de LERAY-SCHAUDER), on a

$$deg(I - T, B(0, R_2), 0) = 1$$

Grâce à la propriété d'additivité du degré de LeraySchauder ;

$$deg(I - T, B(0, R_2) \backslash \overline{B(O, R_1)}, 0) = 1$$

Ainsi, T admet au moins un point fixe u dans $B(0, R_2) \backslash \overline{B(O, R_1)}$. De toute évidence, $u(t)$ est une solution non triviale du PLP (7.1,1)-(7.1.2), ce qui achève la preuve du théorème. □

Le lemme suivant sera utilisé dans certaines de nos preuves restantes.

Lemme 7.4.1. *Soit λ_0 la première valeur propre du problème (7.1.3). alors*

$$\frac{1}{M \int_0^T w(s)ds} < \lambda_0 < \frac{1}{m \int_0^T w(s)ds}$$

***Preuve** :* Soit l'opérateur L_0 défini par

$$L_0 u(t) = \int_0^T G(t, s) w(s) u(s) ds$$

Maintenant L_0 est u_0-positif avec $u_0 \equiv 1$, alors il éxiste $k_i(u) > 0$, $i = 1, 2$, tels que

$$k_1(u).1 \leq L_0 u \leq k_2(u).1$$

Rappelons que

$$L_1 u(t) = \int_0^T m w(s) ds \leq L_0 u(t)$$

donc $r(L_1) \leq r(L_0)$,alors

$$\int_0^T mw(s)ds \leq rL_0 = \frac{1}{\lambda_0}$$

Cela prouve l'inégalité de droite dans le lemme. l'autre preuve est similaire. □

***Preuve.* du corollaire 7.2.1 :**

Soit f_0 et f^∞ . De $(A3)$, on a

$$f_0 \geq \frac{1}{m\int_0^T w(s)ds}$$

et

$$f^\infty \leq \frac{1}{M\int_0^T w(s)ds}$$

Par conséquent, la conclusion résulte du théorème 7.1 et du lemme 7.4.1. □

***Preuve.* du théorème 7.2**

pour $u \in X$, soit

$$F_1u(t) = \begin{cases} f(t,u(t)) + bu(t) & u(t) \geq 0 \\ -f(t,u(t)) + bu(t) & u(t) < 0 \end{cases}$$

En vertu de la condition $(A2)$, nous voyons que la $F_1 : X \to \mathbb{R}$ est continue et positive. Définissons un opérateur compact $T_1 : X$ par

$$T_1u(t) = \int_0^T H(t,s,b)w(s)F_1u(s)ds$$

Notons que $F_1u(t) + c\,|u(t)|^\alpha \geq 0$ pour $u \in X$, où c et α sont données dans $(A1)$.

Puis, comme dans la preuve du théorème 7.1, on voit que toutes les conditions (A1) - (A4) du lemme 7.3.2 sont vérifiées, où l'opérateur A est défini comme précédemment,

$F = F_1$ et $T = T_1$. Ainsi, d'après le lemme 7.3.2, il éxiste $R_1 > 0$ tel que

$$deg(I - T_1, B(0, R_1), 0) = 0$$

où

$$B(0, R_1) = \{u \in X : \|u\| < R_1\}$$

Comme $f^\infty < \lambda_0$, il éxiste $0 < \nu < 1$ et $R_3 > R_1$ tel que

$$\begin{aligned} |f(t,x) + bx| &\leq (\lambda_1 + b)(1-\nu)\,|x| \\ &= r_L^{-1}(1-\nu)\,|x| \qquad \text{pour} \qquad (t, |x|) \in [0,T] \times]R_3, +\infty[\end{aligned}$$

Soit

$$L_1 = \sup_{u \in X, \|x\| \leq R_3} \max_{t \in [0,T]} \int_0^T H(t,s,b) w(s) \,|F_1 u(s)|\, ds$$

Alors $0 < L < \infty$. On Choisit R_2 assez grand tel que

$$R_2 > max\left\{R_3, \nu^{-1} L_1\right\}$$

et on définit

$$B(0, R_2) = \{u \in X : \|u\| < R_2\}$$

Un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du théorème 7.1 pour avoir la condition (du degré topologique) du lemme 1.4.4 donne

$$T_1 u \neq \tau u \qquad \text{pour tout} \qquad u \in B(0, R_2) \qquad \text{et} \qquad \tau \geq 1$$

Ainsi, nous avons

$$deg(I - T_1, B(0, R_2), 0) = 1$$

Par la propriété d'additivité du degré de Leray-Schauder, nous obtenons

$$deg(I - T_1, B(0, R_2)\backslash\overline{B(O, R_1)}, 0) = 1$$

Ainsi, T_1 a au moins un point fixe u dans $B(0, R_2)\backslash\overline{B(O, R_1)}$.

Par conséquent

$$u_1(t) = \int_0^T H(t, s, b)w(s)F_1u(s)ds \qquad \text{pour} \qquad t \in [0, T]$$

Comme $H(t, s, b) > 0$, alors $u_1(t) > 0$ sur $[0, T]$. Par conséquent,

$$F_1u_1(t) = f(t, u_1(t)) + bu_1(t)$$

et ainsi de $u_1(t)$ est une solution positive du PLP (7.1.1)-(7.1.2).

Pour la deuxième solution , on pose pour $u \in X$,

$$F_2u(t) = \begin{cases} -f(t, -u(t)) + b(-u(t)) & x \geq 0 \\ f(t, u(t)) + b(-u(t)) & x < 0 \end{cases}$$

Par la condition (A2), on voit que la fonction $F_2 : X \to \mathbb{R}$ est continue et positive. Soit un opérateur compact $T_2 : X \to X$ par

$$(T_2u)(t) = \int_0^T H(t, s, b)w(s)F_2u(s)ds$$

Par un raisonnement semblable à celui ci-dessus, nous voyons que T_2 a un point fixe v satisfaisant $v(t) > 0$ sur $[0, T]$. et du fait que

$$v(t) = \int_0^T H(t, s, b)w(s)F_2v(s)ds$$

on obtient

$$-v(t) = \int_0^T H(t,s,b)w(s)(f(s,-v(s)) + b(-v(s)))ds$$

Par conséquent, $u_2(t) := -v(t)$ est une solution négative pour (7.1.1), et le théorème est prouvé. $\square$

Preuve. **du corollaire 7.2.2**

Comme (A3) implique

$$f_0 \geq \frac{1}{m \int_0^T w(s)ds}$$

et

$$f^\infty \leq \frac{1}{M \int_0^T w(s)ds}$$

la conclusion suit alors du théorème 7.2 et du lemme 7.3.1. $\square$

Enfin, en vertu du lemme 7.3.1, les théorèmes 7.3 et 7.4 et les corollaires 7.2.3 et 7.2.4 sont des applications directes des théorèmes 7.1 et 7.2 et des corollaires 7.2.1 et 7.2.2 en remplaçons f dans l'équation (7.1.1) par λf.

En conclusion, nous notons qu'il éxiste des résultats analogues aux théorèmes 7.1 et 7.2 si

$$f^0 < \lambda < f_\infty$$

où f^0 et f_∞ sont définis de manière analogue à f_0 et f^∞. A condition que certaines modifications soit apportées dans les conditions $(A1)$ - $(A3)$ ainsi que dans les preuves des théorèmes 7.1 et 7.2 .

◇◇◊◇◇

Conclusion

On a traité dans ce mémoire l'existence des solutions périodiques pour des PLP associés aux EDO du deuxiéme ordre. On a utilisé dans la première partie le faite que la fonction de Green ne change pas de signe, dans la plupart des cas on s'intéréssé au cas strictement positive -car $m > 0$- afin d'appliquer le théorème de Guo-Kranosel'skii et dans la deuxième partie, on a utilisé le fait que la première valeur propre associè à un PLP homogène soit strictement positive et on a utilisé le théorème de Krein-Rutman qui a été combiné à d'autres conditions sur la nonlinéarité f.
Néanmoins, cette étude constitue une infime partie dans l'étude des PLP et beaucoup d'autres méthodes existent que soit par l'applications d'autres théorèmes du point fixe, ou par les sous solutions et sur solutions mais la plus part des résultats récents utilise l'indice du point fixe.
Récemment, l'auteur dans [22] a utilisé l'indice du point fixe pour montrer l'existence de solutions périodiques sous la condition que la fonction de Green soit positive et pas nécéssairement strictement positive, c'est à dire elle peut s'annuler sur $[0, T]$.
Dans un récent article, l'auteur a étudié le problème

$$\begin{gathered} u''(t) + k^2 u(t) = f(u) \qquad t \in [0, T] \\ u(0) = u(T), \qquad u'(0) = u'(T) \end{gathered}$$

avec $k < 3\pi/2T$, et f est continue et la fonction de Green n'a pas de signe constant et il a montré l'existence de solutions en utilisant l'indice du point fixe, il a utilisé le fait

que l'intégrale de G soit positive lorsque $k < 3\pi/2T$ tout en définissant la cône
$K = \{u \in C[0,T], u \geq 0 \int_0^T u(t)dt \geq \sigma \|u\|\}$
Les derniers résultats concernant ces problèmes utilisent dans la plupart des cas l'indice du point fixe, ce qui montre sa grande impotance et son utilité dans la résolution des problèmes aux limites dans le cas général.

Bibliographie

[1] F. M. Atici and G. Sh. Guseinov. On the existence of positive solutions for nonlinear differential equations with periodic boundary conditions. *J. Computat. Appl. Math*, 132 :341 – 356, 2001.

[2] A. Benmezai. Analyse non linéaire et problèmes aux limites . degré de LERAY-SCHAUDER. indice du point fixe. *USTHB, cours policopiés.*

[3] A. Cabada and J. A. Cid. On the sign of the greens functions associated to hills equation with an indefinite potential. *Applied Mathematics and Computation*, 205, no. 1 :303 308, 2008.

[4] D. ORegan D. Jiang, J. Chu and R. Agarwal. Multiple positive solutions to superlinear periodic boundary-value problems with repulsive singular forces. *Math. Analysis Applic*, 286 :563 576, 2003.

[5] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[6] D.Guo and V.Lakshmikantham. *Nonlinear Problems in Abstract Cones.* Academic Press, San Diego, 1988.

[7] T. Ding. A boundary value problem for the periodic brillouin focusing system. *Acta Sci. Natur. Univ.Pekinensis*, 11 :3138, 1965.

[8] S . Djebali. Degré topologique : théorie et applications aux. *EDO-EDP. E.N.S, Kouba, cours policopiés.*

[9] L.H. Erbe. Eignvalue creteria for existence of positive solutions for boundary value problems. *Math. Comput. Modelling*, 32 :529539, 2000.

[10] L.H. Erbe and H.Wang. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations. *Proc.Amer.Math.Soc.*, 120 :743748, 1994.

[11] A. Fonda. Periodic solutions of scalar second order differential equations with a singularity. *Mém. Classe Sci. Acad. Roy. Belgique*, 8-IV :68 98, 1993.

[12] A. Fonda and P. Habets. Periodic solutions of asymptotically positively homogeneous differential equations. *J. Differential Equations*, 81 :68 98, 1989.

[13] B. Friedman. *Principles and techniques of Applied Mathematics*. Dover Publications Inc., new york edition, 1990.

[14] S. Gaete and R.F. Manasevich. Existence of a pair of periodic solutions of an o.d.e. generalizing a problem in nonlinear elasticity, via variational methods. *J. Math. Anal. Appl.*, 134 :257 271, 1988.

[15] G.Birkhoff and G.C.Rota. Ordinary differential equations. *Jhon wiley and sons*, 4 édition, 1989.

[16] John R. Graef and Lingju Kong. Existence results for nonlinear periodic boundary value problem. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 52 :79 95, 2009.

[17] P. Habets and L. Sanchez. Periodic solution of some liénard equations with singularities. *Proc. Amer.Math. Soc.*, 109 :1135 1144, 1990.

[18] G. Han and Y. Wu. Nontrivial solutions of singular two-point boundary-value problems with sign-changing nonlinear terms. *Math. Analysis Applic.*, 325 :1327 1338, 2007.

[19] J. Henderson and H. Wang. Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems. *Math. Anal. Appl.*, 208 :252 259, 1997.

[20] R. Manàsevich I. del Pino and A. Montero. T-periodic solutions for some second order differential equations with singularities. *Proc. Roy. Soc. Edinbourgh Sect.*, A 120 :231243, 1992.

[21] M. Tvrdy´ I. Rachunkova and I. Vrkoc. Existence of nonnegative and nonpositive solutions for second order periodic boundary value problems. *J. Differential Equations*, 176 :445 469, 2001.

[22] L. Kong J. R. Graef and H.Wang. A periodic boundary-value problem with vanishing greens functions. *Appl. Math. Lett.*, 21 :176 180, 2008.

[23] J.Dieudonné. *Elements d'analyse, Fondement d'analyse moderne*, volume 1. Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[24] R. Johnson and J. Moser. The rotation number for almost periodic potentials. *Communications in Mathematical Physics*, 84, N˚3 :403 – 438, 1982.

[25] J.Weidmann. *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*. LNM1258, Springer, 1987.

[26] M.A. Krasnoselskii. *Positive Solutions of Operator Equations*. Noordhoff, Groningen, 1964.

[27] M.G. Krein and M.A. Rutman. Linear operators leaving invariant a cone in a banach space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 10 :199 325, 1962.

[28] P. Drabek Landesman and A.C. Lazer. Condition for nonlinear problems with jumping nonlinearities. *Differential Equations*, 85 :186199, 1990.

[29] A.C. Lazer and P.J. McKenna. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges : some new connections with nonlinear analysis. *SIAM Rev.*, 32 :537 578, 1990.

[30] A.C. Lazer and S. Solimini. On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99 :109 114, 1987.

[31] S.Hu L.H. Erbe and H.Wang. Multiple positive solutions of some boundary value problems. *J.Math.Anal.Appl*, 184 :640 648, 1994.

[32] Fuyi Li and Zhanping Liangs. Existence of positive periodic solutions to nonlinear second order differential equations. *Applied Mathematic Letters*, 18 :1256 – 1264, 2005.

[33] Y. Li. Positive periodic solutions of nonlinear second order ordinary differential equations. *Acta Math. Sinica*, 45 :481 488, Acta Math. Sinica.

[34] W. Magnus and S. Winkler. *Hill's Equation*. Dover, New York, 1979.

[35] R. Martins. *Existence of periodic solutions for second-order differential equations with singularities and the strong force condition*, volume preprint.

[36] J. Mawhin. Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations, in : M. furi, p. zecca (eds.), topological methods for ordinary differential equations. *Lecture Notes in Mathematics*, 1537 :74 142, 1993.

[37] D. ORegan and H. Wang. Positive periodic solutions of systems of second order ordinary differential equations. *Positivity*, 10 :285 298, 2006.

[38] R. Ortega. The twist coefficient of periodic solutions of a time-dependent newton's equation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 4, no. 4 :651 – 665, 1992.

[39] R. Ortega. Periodic solutions of a newtonian equation : stability by the third approximation. *Journal of Differential Equations*, 128, no. 2 :491 – 518, 1996.

[40] W.Y. Ye P. Omari. Necessary and sufficient conditions for the existence of periodic solutions of second-order ordinary differential equations with singular nonlinearities. *Differential Integral Equations*, 8 :1843 1858, 1995.

[41] J. Poschel and E. Trubowitz. *The Inverse Spectrum Theory*. Academic Press, New York, NY, USA, 1987.

[42] P. Omari F. Zanolin R. Ianacci, M.N. Nkashama. Periodic solutions of forced liénard equations with jumping nonlinearities under nonuniform conditions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 110 :183 198, 1988.

[43] M. Meehan R.A. Agarwal and D. O'Regan. *Fixed point theory and applications*, volume 141. Cambridge University press, 1 edition, 2001.

[44] G. Talenti. Best constant in sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4 no. 110 :353 372, 1976.

[45] P. Torres. Existence and uniqueness of elliptic periodic solutions of the brillouin electron beam focusing system. *Math. Methods Appl. Sci.*, 23 :1139 1143, 2000.

[46] P. J. Torres. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a krasnoselskii fixed-point theorem. *J. Diff. Eqns*, 190 :643 662, 2003.

[47] P.J. Torres and M. Zhang. A monotone iterative scheme for a nonlinear second order equation based on a generalized anti-maximum principle. *Math. Nachr.*, 251 :101 10, 2003.

[48] V.Trénoguine. *Analyse fonctionnelle*. Mir .moscou. edition, 1985.

[49] J. R. L. Webb. Optimal constants in a nonlocal boundary-value problem. *Nonlin. Analysis*, 63 :672 685, 2005.

[50] Q. Yao. Positive solutions of nonlinear second-order periodic boundary-value problems. *Appl. Math. Lett.*, 20 :583 590, 2007.

[51] Y. Ye and X. Wang. Nonlinear differential equations in electron beam focusing theory. *Acta Math. Appl. Sinica*, 1 :1341, 1978.

[52] D. Yujun. Invariance of homotopy and an extention of a theorem by habets-metzen on periodic solutions of duffing equations. *Nonlinear Anal.*, 46 :1123 1132, 2001.

[53] E. Esmail zadeh and G. Nakhaie-Jazar. Periodic solutions of a mathieu-duffing type equation. *Non Linear Mech*, 32 :905912, 1997.

[54] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications, I, Fixed-point theorems*. Springer, 1986.

[55] A. Zettl. *Sturm-Liouville Theory, vol. 121 of Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2005.

[56] M. Zhang. Periodic solutions of equations with singular forces of repulsive type. *J. Math. Anal. Appl.*, 203 :254 269, 1996.

[57] M. Zhang. A relationship between the periodic and the dirichlet bvps of singular differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinbourgh*, 128 Sect. A :1099 1114, 1998.

[58] M. Zhang. The rotation number approach to eigenvalues of the one-dimensional p-laplacian with periodic potentials. *J. London Math. Soc.*, 64 no. 1 :125 14, 2001.

[59] M. Zhang. Optimal conditions for maximum and anti-maximum principles for the periodic solution problem. Article ID 410986, doi :10.1155/2010/410986 :26 pages, 2010.

[60] M. Zhang and W. Li. A lyapunov-type stability criterion using l^α norms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130 :3325 – 3333, 2002.

[61] Z. Zhang and J. Wang. On existence and multiplicity of positive solutions to periodic boundary-value problems for singular nonlinear second-order differential equations. *J. Math. Analysis Applic.*, 281 :99 107, 2003.

[62] Z.Liu and F.Li. Multiple positive solutions for nonlinear two-point boundary value problems. *Math.Anal.Appl.*, 203 :610 625, 1996.