N° d'ordre: 07/ 2014-M/ MT

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en mathématiques

Spécialité : Analyse : Équations aux dérivées partielles

Par

KECHICHE Naouel

THÈME

STABILISATION EXPONENTIELLE DE L'EQUATION DES ONDES AVEC DES COEFFICIENTS VARIABLES ET CONDITIONS AUX LIMITES DYNAMIQUE

Soutenue publiquement le: 14/ 12/ 2014 devant le jury composé de:

M. Rachid BEBBOUCHI	Professeur	à L.U.S.T.H.B	Président.
M. Ammar KHEMMOUDJ	M.de conférence	à L.U.S.T.H.B	Directeur de mémoire.
M. Amor KESSAB	Professeur	à L.U.S.T.H.B	Examinateur.
M. Arezki TOUZALINE	Professeur	à L.U.S.T.H.B	Examinateur.

Remerciement

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **A . KHEMMOUDJ** *mon Directeur de thèse, pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je le suis également reconnaissante pour son aide précieuse et ses conseils. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **R. BEBBOUCHI** *pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

Je remercie également Monsieur **A. KESSAB** *et à Monsieur* **A. TOUZALINE** *d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury de ce mémoire, je les remercie sincèrement.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents, mes sœurs, mes frères.

Dédicaces

Je tiens avec un immense plaisir à dédier ce travail à :

- *Ceux que personne ne peut compenser les sacrifices qu'ils ont consentis à mon éducation et à mon bien être, mes très chers parents.*
- *Mes frères :Sami, Salah.*
- *Toute ma famille et mes amies surtout: Souhila, Nassima Zarkon, Nassima Halisse, Wahiba Zaatar et à tous ceux qui connaissent et aiment Naouel.*

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La Théorie du Contrôle des Equations aux Dérivées Partielles (EDP) intervient dans différents contextes et de plusieurs manières. Les problèmes de contrôlabilité, d'observabilité et de stabilisation des équations aux dérivées partielles ont fait l'objet, récemment, de nombreux travaux.

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feedback); elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.

Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$ (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas.

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e. :

$$E(t) \to 0, \text{ lorsque } t \to +\infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e. :

$$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \ \forall t > 0,$$

où C et δ sont des constantes positives.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \ \forall t > 0,$$

où C et α sont des constantes positives.

1.1 Note historique sur la notion de stabilisation exponentielle de l'équation des ondes

Ce chapitre a pour but de rappeler les travaux principaux sur la décroissance exponentielle de l'énergie d'un système gouverné par des équations aux dérivées partielles (appelé système distribué).

Cette notion a pris, sous l'influence des travaux de D.L.Russell (cf. [60]) le nom de stabilisation frontière ou interne exponentielle.

1.1.1 Stabilisation frontière d'un exemple modèle

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dont la frontière est $\Gamma = \partial\Omega$ est de classe C^2.

On désigne par ν le champ unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω, et par ∂_ν l'opérateur de dérivation dans cette direction.

On appelle stabilisation frontière de l'équation des ondes dans Ω, avec une condition de Dirichlet homogène et une condition de Newmann non homogène considérées respectivement sur Γ_0 et Γ_1, où (Γ_0, Γ_1) est une partition de Γ, la donnée d'un opérateur (appelé opérateur de feedback frontière)

$$F : V \times H \to K$$

où V, H, K sont des espace de fonctions ou de distributions, tels que l'énergie associée à la solution du problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u = F(u, u_t) & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u^0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = u^1 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

décroisse de manière exponentielle quand $t \to +\infty$, et ceci pour tous u_0, u_1 pris dans des espaces convenables.

Remarque 1.1.1 *Le problème de stabilisation frontière consiste à exhiber un opérateur de feedback frontière de telle sorte que l'énergie $E(t)$ du système vérifie*

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \forall t \geq 0,$$

où C et β sont des constantes positives β est appelé taux de décroissance de l'énergie.

Définition 1.1.1 *On définit aussi la notion d'opérateur de feedback interne*

$$G : \tilde{V} \times \tilde{H} \to \tilde{K}$$

(où $\tilde{V}$, $\tilde{H}$, $\tilde{K}$ sont des espaces des fonctions ou de distributions), ensuite on s'intéresse au comportement asymptotique de l'énergie associée au problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = G(u, u_t) & \textit{dans} & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \textit{sur} & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u = F(u, u_t) & \textit{sur} & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u^0 & \textit{dans} & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = u^1 & \textit{dans} & \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

Remarque 1.1.2 *A vrai dire la notion de stabilisation frontière n'est pas propre aux conditions de Dirichlet homogène et Neumann non homogène, ni même à l'équation des ondes; on peut se poser ce genre de problème pour tout système évolutif, avec conditions aux limites choisies de sorte que le problème soit bien posé.*

1.1.2 Note historique

On a vu ci-dessus que les problèmes de stabilisation exponentielle, que l'on peut se poser pour les systèmes évolutifs consiste à trouver un opérateur de feedback frontière ou interne de sorte que l'énergie du système décroisse en exponentielle. On va rappeler, d'une manière brève les différentes phases qu'à connu la notion de stabilisation exponentielle, sans vraiment rentrer dans les détails, ou prétendre que cet aperçu historique soit exhaustif.

Les travauxde C. S. Morawetz

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation des ondes dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^3$, C. Wilcox (cf. [62]) a réussi à montrer que l'énergie locale décroit de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

Sous les hypothèses plus générales que celle de C. Wilcox, en 1961 C. S. Morawetz (cf. [47]) a montré que l'énergie locale décroit comme l'inverse du temps.

En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips (cf. [54]) ont prouvé en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation des ondes dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, extérieur à un domaine étoilé, décroit de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

Les travaux de G.Chen et de J.Lagnese

En se basant sur les travaux de C. S. Morawetz (cf. [47] et [61]) sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur, D. L. Russell a conjecturé, en 1974, un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné.

Énoncé de la conjecture (cf. [61])

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. S'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, extérieur à $\bar{\Omega}$ tel que le bord de Ω, noté Γ, admette une partition vérifiant la condition géométrique suivante:

$$m(x).\nu(x) \leq 0, \quad \text{pour tout } x_0 \in \Gamma_0.$$

où

1- $\nu(x)$ désigne la normale unitaire extérieure à Ω.

2- $m(x) = x - x_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3- $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \phi$.

Alors il existe deux constantes, C et w positives telles que l'énergie associée au système évolutif

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \alpha(x)\, \partial_\nu u + u_t = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = u^1 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} , \tag{1.1.1}$$

où $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$, et $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, $\forall x \in \Gamma_1$, vérifie l'inégalité suivante

$$E(t) \leq C \exp(-wt), \qquad \forall t \geq 0.$$

En 1977, J. P. Quin et D. L. Russell cf. [59]) sont parvenus à montrer, sous les hypothèses de la conjecture de Russel, l'inégalité

$$E(t) \leq \frac{C(E(0))}{1+t}, \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.1.2}$$

Mais malheureusement, ils n'ont pas réussi à monter que $C(E(0))$ vérifie

$$C(E(0)) \leq k.E(0). \tag{1.1.3}$$

où k est une constante qui ne dépend ni de $E(0)$ ni du temps.

Il est intéressant de savoir qu'à partir de (1.1.2) et (1.1.3) on peut déduire la décroissance exponentielle de $E(t)$ par une simple application des propriétés des semi groupes (cf. [54]).

Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell a été obtenu en 1979 par G. Chen, en partant des hypothèses suivantes:

il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{aligned} m(x).\nu(x) &\leq 0, & \text{pour tout } x \in \Gamma_0. \\ m(x).\nu(x) &\geq \gamma > 0, & \text{pour tout } x \in \Gamma_1. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

1- $\nu(x)$ désigne le champ unitaire normal extérieur à Ω.

2- $m(x) = x - x_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3- $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Ensuite, en adaptant les techniques, en particulier la technique des multiplicateurs, utilisées par C. S. Morawetez, W. A. Strauss et J. U. R alston, dans les domaines extérieurs, G. Chen (cf. [47]) a pu alléger les hypothèses (1.1.4), ces résultats ont été améliorés par J. Lagnese (cf; [52]), en 1983, sous l'hypothèse

il existe un champ de vecteur $h \in \left(C^2(\bar{\Omega})\right)^n$ tel que:

$$\begin{cases} m(x).\nu(x) \leq 0, & \text{pour tout } x \in \Gamma_0. \\ m(x).\nu(x) \geq \gamma > 0, & \text{pour tout } x \in \Gamma_1. \\ \text{la matrice } \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right) \text{ est uniformément définie positive sur } \bar{\Omega}. \end{cases}$$

<u>**Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani**</u>

En 1987, utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasicka et R. Triggiani (cf. [53]) ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord Γ.

Ils font appel à un opérateur de feedback frontière donné par :

$$F(u, u_t) = -b\frac{\partial}{\partial \nu}(Gu_t), \quad \text{sur } \Gamma.$$

où $b \in L^\infty(\Gamma)$, et $b(x) \geq b_0 > 0$, pour tout $x \in \Gamma$, et G est l'inverse de l'isomorphisme suivant:

$$(-\Delta) : H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega) \to L^2(\Omega).$$

qu'on note $G = (-\Delta)^{-1}$.

Dans tous les travaux, dans un domaine borné, cités ci dessus, l'inégalité

$$E(t) \leq C \exp(-wt), \qquad \forall t \geq 0,$$

a été obtenue, à partir d'une estimation sur $\int_0^\infty E(t)\,dt$, en utilisant un résultat du à R. Datko (cf. [48]) et A. Pazy (cf. [58]). Malheureusement, ce théorème prouve l'existence des constantes C et w sans donner des estimations explicites.

On remarque que lorsque la frontière est régulière, la condition (1.1.4) exige que

$$\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \phi \tag{1.1.5}$$

Donc si $\Gamma_0 \neq \varnothing$, les résultats obtenus par Chen, ou Lagnese, ne peuvent être appliques aux domaines ayant un bord connexe.

Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua

En 1987, V. Komornik et E. Zuazua ont allégé la condition (1.1.4) de G. Chen en la remplaçant par

$$m(x).\nu(x) > 0, \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_1.$$

Donc permettant, en principe, de généraliser les résultats de Chen et Lagnese aux domaines à bords réguliers et connexes, mais au prix de remplacer la condition aux limite du problème (1.1.1) sur $\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$ par

$$\partial_\nu u = -m.\nu u_t, \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+.$$

Si $\Gamma = \partial\Omega$ satisfait à la condition (1.1.5), alors pour tout $n \geq 2$, la méthode de Komornik et Zuazua (cf [51]) donne, d'une manière simple des estimations explicites pour C et w en fonction de la géométrie de Ω et x_0.

Leur procédé devient inapplicable dans le cas général où

$$\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 \neq \phi, \tag{1.1.6}$$

car dans ce cas la régularité des solutions n'est pas suffisante pour justifier l'application de la méthode des multiplicateurs.

Cependant, la même année (1987), P. Grisvard est parvenu à montrer (cf. [49]) que, au moins pour $n \leq 3$, l'identité fondamentale, sur laquelle est basée la technique des multiplicateurs de Komornik et Zuazua, devient une inégalité qui est suffisante pour mener les calculs à bout et obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie, avec des estimations explicites pour C et w.

Le cas $n \geq 4$, sans l'hypothèse (1.1.5) reste ouvert; à moins que l'inégalité de Grisvard ne puisse être prouvée dans ce cas; alors le procédé de stabilisation de Komornik et Zuazua peut être appliqué avec efficacité.

Les travaux de J. L. Lions

En 1986, Lions a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contrôlables.

Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle optimal et la méthode de pénalisation. Mais il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'opérateur de feedback, ni d'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

1.2 but du travail

Dans ce mémoire, on étudie la décroissance exponentielle de l'énergie des solutions lorsque le temps tend vers l'infini de l'équation des ondes semi linéaire amor avec des coefficients variables et des conditions aux limites dynamiques.

Ce travail est une généralisation du papier de Gerbi et Said Houari voir [16] au cas de l'équation des ondes avec des coefficients variables.

En utilisant la variété de Nehari comme méthode de démonstration, la difficulté principale du problème considéré est liée aux conditions aux limites dynamiques définies sur Γ_1.

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(A\nabla u) - \alpha \operatorname{div}(A\nabla u_t) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ v_{tt}(x,t) = a\left[\frac{-\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} - \frac{\partial u_t}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} + \operatorname{div}_\Gamma (A\nabla v_\Gamma) - r\,|v_t|^{m-2} v_t(x,t) + |v|^{p-2} v\right], & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ u(x,t) = v(x,t) & x \in \Omega, t > 0, \\ (u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) & x \in \Omega, t > 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

où $(u,v)=(u(x,t),v(x,t))$, $t\geq 0$, $x\in\Omega$, Ω est un domaine régulier, borné de $\mathbb{R}^N$, $(N\geq 1)$, $\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma_1$, mes$(\Gamma_0)>0$, $\Gamma_0\cap\Gamma_1=\varnothing$, $A=(a_{ij})$ est une matrice, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ sont des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i$, $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)^T$ désigne la dérivée normale unitaire extérieure a Ω, $\nu_{\mathcal{A}}=A.\nu$.

$m\geq 2$, a, α et r sont des constantes positives, $p>2$ et u_0,u_1,v_0,v_1 sont des fonctions données. Pour des raisons de simplicité, dans ce mémoire, on considère le cas où $a=1$.

Les opérateurs différentiels $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\Gamma$ sont définis par

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u &= -\operatorname{div}(A\nabla u),\\ \mathcal{A}_\Gamma v &= -\operatorname{div}_\Gamma(A\nabla_\Gamma v).\end{aligned}$$

On suppose que les opérateurs différentiels du deuxième ordre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_\Gamma$ vérifient la condition d'ellipticité uniforme

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j>\lambda\sum_{i,j=1}^n\xi_i^2, x\in\bar{\Omega}, 0\neq\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)^T\in\mathbb{R}_*^n. \tag{1.2.2}$$

On suppose aussi que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j>0, x\in\mathbb{R}^n, 0\neq\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)^T\in\mathbb{R}_*^n. \tag{1.2.3}$$

Donnons maintenant un bref résumé du contenu de ce document.

·le premier chapitre est consacré aux définitions et aux rappels de quelques notions de base d'analyse fonctionnelle.

·Dans le deuxième chapitre :on étudie l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.2.1) et ce chapitre comporte deux sections

·Dans la première section on étudie l'existence et l'unicité locale de la solution du problème (1.2.1), on utilise la méthode de Faedo -Galerkin et le théorème de l'application contractante.

·Dans la deuxième section on montre que si les données initiales sont dans le l'ensemble stable, et nous allons alors montrer l'existence globale de la solution.

·Dans le troisième chapitre on étudie la stabilisation exponentielle du problème (1.2.1).

1.2.1 Notions d'analyse fonctionnelle:

Dans ce chapitre, on va rappeler des notions essentielles d'analyse fonctionnelle nécessaire à la compréhension des énoncés on va aussi démontrer des problèmes qui forment le thème de ce mémoire.

Topologie faible $\sigma(X, X')$

Soit X un espace de Banach et soit $f \in X'$ (X' l'espace dual de X). On désigne par $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$ Lorsque f parcourt X' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in X'}$ d'applications de X dans $\mathbb{R}$.

1.3 La topologie faible $\sigma(X, X')$:

Définition 1.3.1 *La topologie faible $\sigma(X, X')$ sur X est la topologie la mions fine sur X rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$.*

Pour définir cette topologie d'une façon plus précise il suffit de définir une base de voisinages pour tout élément $x \in X$ comme suit:

Etant donné un point $x \in X$ on obtient une base de voisinages de x pour la topologie $\sigma(X, X')$ en considérant les ensembles de la forme $\bigcap_{finie} \varphi_f^{-1}(V_f)$, où V_f est un voisinage de $\varphi_f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

(i.e. $V_f =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ avec $a = \langle f, x \rangle$).

Définition 1.3.2 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert X converge faiblement vers $u \in X$, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si*

$\lim_{n \to \infty} \langle v, u_n \rangle = \langle v, u \rangle$ *pour tout $v \in X$.*

Remarque 1.3.1 *a)-la limite faible quand elle existe est unique.*

En effet si $\langle u_1, v \rangle = \langle u_2, v \rangle$ pour tout $v \in X$, on a pour $v = u_1 - u_2$

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0$$

donc $u_1 = u_2$ (On peut prendre $v \in X$, car X est espace de Hilbert, donc $X = X'$ (Théorème de Riesz).

b)-Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in X$ pour la norme (on dit alors qu'elle converge fortement vers u) alors $u_n \rightharpoonup u$. En effet, on a

$$|\langle u_n - u, v\rangle| \leq \|u_n - u\| \|v\| .$$

Ce qui implique que $\langle u_n - u, v\rangle \to 0$ quand, $n \to \infty$.

$c)-$Si X est de dimension finie alors la convergence faible implique la convergence forte.

Il suffit de considér la base $e_1, ..., e_n$ et d'observer que $\langle u, e_i\rangle = u_i$ pour $u \in X$ ce qui monte que la convergence faible équivaut alors à la convergence composante par composante, c'est à dire à la convergence forte .

Proposition 1.3.1 *Soient X et Z des espaces de Hilbert, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite qui converge faiblement vers u et $l(X, Z)$ (opérateur linéaire continue de X dans Z).*

Alors la suite $(A(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $A(u)$

Preuve : En effet, pour tout $v \in Z$, la fonction $u \mapsto \langle A(u), v\rangle$ est linéaire continue car

$$|\langle A(u), v\rangle| \leq \|A\| \|v\| \|u\|, \forall u \in X, \forall v \in Z$$

Il existe donc $w \in X$ $(w = A^*(v))$, A^* est l'adjoint de A) tel que

$$\langle A(u), v\rangle = \langle u, w\rangle \text{ pour tout } u \in X$$

On a alors, pour tout $v \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u_n), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, w\rangle = \langle u, w\rangle = \langle A(u), v\rangle .$$

■

Théorème 1.3.1 *Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite bornée dans un espace de Hilbert X.*

Alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ possède une sous -suite faiblement convergente.

Théorème 1.3.2 *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert X est bornée.*

Corollaire 1.3.1 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui converge faiblement vers* u *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui converge fortement vers* v*. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle = \langle u, v\rangle$$

Définition 1.3.3 *Soit* X *un espace normé, et soit* $X' = l(X, \mathbb{R})$ *son dual topologique. Alors la topologie étoile faible sur* X' *notée* $\sigma(X', X)$ *est la topologie initiale associée au système* $(\mathbb{R}, \theta, \psi_u)_{u\in X}$ *où* θ *désigne la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$ *et* $\psi_u : X' \to \mathbb{R}$ *est définie par* $\psi_u(l) = l(u)$*. C'est donc la moins fine des topologie sur* X *rendant continues toutes les fonctionnelles* $\psi_u, u \in X$.

Proposition 1.3.2 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* X'*. On a*

1/ $f_n \to f$ *(étoile faible)* $\Longleftrightarrow$ $(\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in X)$.

2/ Si $f_n \to f$ *pour* $\sigma(X', X)$ *et* $x_n \to x$ *fortement dans* X*,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Remarque 1.3.2 *L'espace* X' *des fonctionnelles linéaires sur un espace* X *admet deux interprétations:*

-Ou bien il est considéré comme le dual de l'espace initial X*.*

-Ou bien X' *est considéré comme espace de base et alors on lui associe son dual* X"*.*

Cela signifie que nous pouvons introduire sur X' la topologie faible de deux maniéres différentes:

-Ou bien comme dans l'espace des fonctionnelles, en définissant les voisinages dans X' à l'aide des sous-ensembles finis de X (topologie étoile faible),

-Ou bien comme dans l'espace de base, à laide de l'espace dual X". Dans le cas d'un espace réflexif cela revient, bien sur, au même.

Si, par contre, l'espace X n'est pas réflexif, ce sont deux topologies différentes sur X'. Il est évident que la topologie étoile faible de l'espace X' est moins fine que la topologie faible de X (c'est -à- dire la topologie faible contient au moins des ensembles ouverts que ceux de la topologie faible étoile). Étant donné un espace normé X, son dual topologique X' est muni d'une structure d'espace normé en posant

$$\|l\|_* = \sup_{\|u\| \leq 1} |l(u)| .$$

La boule unité de X'(ainsi que toutes les boules fermées) possède alors une propriété remarquable, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.3.3 *Soit X un espace normé, alors la boule unité*

$$B_* = \{l \in X' : \|l\|_* \leq 1\}$$

de X' est $\sigma(X', X)$compacte.

1.4 Espaces fonctionnels

1.4.1 Espace $L^P(\Omega)$:

On rappelle ici quelques définitions et propriétés élémentaires :

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ensemble mesurable au sens de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.on définit

$L^p(\Omega) = \left\{ (\text{classe de fonctions }) \; f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$

On note

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Si $p = \infty$, on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ mesurable et il existe une constante } C \\ \text{telle que } |f(x)| \leq C \; p.p \text{ sur } \Omega \end{array} \right\}.$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf \{C > 0, |f(x)| \leq C \; p.p \text{ sur } \Omega\} = \sup_\Omega ess\, |f| .$$

Notation :

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

Inégalité de Hölder

Théorème 1.4.1 *(Inégalité de Hölder)*

Soient $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder.

Inégalité de Hölder généralisée

Corollaire 1.4.1 *(Inégalité de Hölder généralisée)*

Soient $f_1, f_2, ..., f_k$ *des fonctions telles que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ *avec*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1\ f_2...f_k$ *appartient à* $L^p(\Omega)$ *et*

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} ... \|f_k\|_{p_k}.$$

Théorème 1.4.2 $L^p(\Omega)$ *est réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Lemme de Gronwall

Lemme 1.4.1 *(de Gronwall) Soient* g *une fonction* $\in L^\infty(0,T)$, $g(t) \geq 0$, *p.p.* $t \in [0,T]$, a *une fonction* $\in L^1(0,T)$, $a(t) \geq 0$, *p. p.* $t \in [0,T]$.

On suppose

$$g(t) \leq \int_0^t a(s)\, g(s)\, ds + \beta, \text{ p. p. } t \in [0,T].$$

Alors

$$g(t) \leq \beta \exp\left(\int_0^t a(s)\, ds\right), \text{ p. p . } t \in [0,T].$$

Notions de base sur les distributions:

On appelle support d'une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ le plus petit fermé $K_\varphi \subset \Omega$ en dehors duquel la fonction φ est nulle presque partout. Une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite à support compact dans Ω si son support est un compact contenu dans Ω. On notera par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions φ définies et indéfiniment dérivables sur Ω et à support compact contenu dans Ω.

On désigne par $D(\bar{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$.

La longueur d'un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est l'entier noté $|\alpha|$ et défini par: $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_i + ... + \alpha_n$.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit l'opérateur de dérivation $\partial^\alpha : D(\Omega) \to D(\Omega)$ par:

$$\varphi \to \partial^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\right) ... \left(\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}\right) ... \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right)(\varphi) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_i^{\alpha_i} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Proposition 1.4.1 $\forall p \geq 1$, *l'ensemble* $D(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

Preuve : Voir Vo-kHAC KHOAN, page 148. ■

Convergence dans $D(\Omega)$

Définition 1.4.1 *Convergence dans* $D(\Omega)$:

On dit qu'une suite $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\} \subset D(\Omega)$ *converge vers une fonction* $\varphi \in D(\Omega)$ *s'il existe un compact* K *contenu dans* Ω *tel que:*

i) $supp(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\partial^\alpha(\varphi_n)$ *converge uniformément vers* $\partial^\alpha \varphi_n$, $\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Espaces des distributions $D'(\Omega)$

Définition 1.4.2 *Espace des distributions* $D'(\Omega)$:

On appelle espace des distributions sur Ω, *l'ensemble* $D'(\Omega)$ *des applications linéaires* $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ *telles que pour toute suite* $\{\varphi_j, n \in \mathbb{N}\} \subset D(\Omega)$, *on a:*

$(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \to \varphi$ *dans* $D(\Omega) \Longrightarrow T(\varphi_j) \to T(\varphi)$ *dans* $\mathbb{R}$

On notera $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$ la dualité entre $D'(\Omega)$ et $D(\Omega)$.

Et on dira, que deux distributions T_1 et T_2 sur Ω sont égales si elles le sont en tant qu'application de $D(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$:

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Remarque 1.4.1 *Les distributions généralisent la notion de fonction puisque à toute classe de fonctions* $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ *on peut associer de façon canonique et biunivoque une distribution notée* $T_{\tilde{f}}$ *et définie par:*

$$\langle T_{\tilde{f}}, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle T_f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \ \forall \varphi \in D(\Omega) \ \ et\ \forall f = \tilde{f}\ p.p\ sur\ \Omega.$$

On dira qu'une distribution $T \in D'(\Omega)$ *appartient à* $L^2(\Omega)$ *s'il existe une classe de fonction* $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ *telle que*

$$\langle T, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx\ ,\ \forall \varphi \in D(\Omega)\ ,\ f \in L^2(\Omega)$$

La convergence dans $D'(\Omega)$

Définition 1.4.3 *Convergence dans* $D'(\Omega)$:

On dit qu'une suite de distributions $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset D'(\Omega)$ *converge vers* T *dans* $D'(\Omega)$ *si:*

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \lim_{n\to\infty} |\langle T_n, \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = 0$$

Définition 1.4.4 *On peut identifier* $L^2(\Omega)$ *à son dual et comme* $D(\Omega)$ *est dense dans* $L^2(\Omega)$, *on a les inclusions suivantes*

$$D(\Omega) \subset L^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)' \subset D'(\Omega)$$

Dérivation dans $D'(\Omega)$

Définition 1.4.5 *Dérivation dans* $D'(\Omega)$:

Pour toute distribution $T \in D'(\Omega)$, *on définit pour tout indice* $i \in \{1, ..., n\}$ *l'opérateur de dérivation* $\frac{\partial}{\partial x_i} : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ *par:*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

Et en général, pour tout multi-indice $\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, *on définit l'opérateur de dérivation* $\partial^\alpha : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ *par:* $\varphi \mapsto \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in D(\Omega)$ *i.e*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_i^{\alpha_i} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \right\rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Continuité dans $D'(\Omega)$

Définition 1.4.6 *Continuité dans* $D'(\Omega)$:

On dit qu'une application linéaire $\mathcal{A}$: $D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ *est continue si pour toute suite de distributions* $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset D'(\Omega)$ *l'implication suivante est vérifiée:*

$$T_n \text{ converge dans } D'(\Omega) \text{ vers } T \Longrightarrow \mathcal{A}(T_n) \text{ converge dans } D'(\Omega) \text{ vers } \mathcal{A}(T).$$

Proposition 1.4.2 *Pour toute distribution* $T \in D'(\Omega)$ *et pour tout multi-indice* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *l'opérateur de dérivation*

$$\partial^\alpha : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$$

est continu au sens de la définition précédente et on a

$$\partial^\alpha T \in D'(\Omega) \ \forall T \in D'(\Omega)$$

Preuve : Voir Vo-kHAC KHOAN, page 183 ■

1.4.2 Espace de Sobolev:

On introduit l'espace $H^m(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $v \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égale à m-prises au sens des distributions sont dans $L^2(\Omega)$, ou Ω est ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Ces espaces jouent un rôle fondamental dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.4.7 *Pour* $m \in \mathbb{N}$, *on définit l'espace de Sobolev d'ordre* $m \in \mathbb{N}$ *par:*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in D'(\Omega) ; D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_i + ... + \alpha_n$, *et* $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$ *où* $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

On munit $H^m(\Omega)$ *du produit scalaire*

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x)\, D^\alpha v(x)\, dx$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u(x)\|_2^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On introduit ensuite :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \text{ adhérence de } D(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega) \\ &= \text{ sous-espace de } H^1(\Omega) \text{ des fonctions "nulles" sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Puisque (par définition) $D(\Omega)$ *est dense dans* $H_0^1(\Omega)$, *on peut identifier le dual* $H^{-1}(\Omega)$ *de* $H_0^1(\Omega)$ *à un espace de distributions sur* Ω :

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega)\right)', \\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega). \end{cases}$$

Les injections précédentes sont continues .

Proposition 1.4.3 *1/Si* $m \geq m', H^m(\Omega)$ *est contenu, avec injection continue, dans* $H^{m'}(\Omega)$.

2/$H^m(\Omega)$ *muni du produit scalaire* $(.,.)_m$ *est un espace de Hilbert.*

Théorème 1.4.3 *(Formule de Green)*

Pour tout $u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$ *on a*

$$-\int_\Omega \operatorname{div} \nabla u v dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v dx$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ *est la dérivée normale de* u *à* Γ *dirigée vers l'extérieur.*

De façon générale, X étant un espace de Banach, on désigne par $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, l'espace des classes de fonctions $t \to f(t)$ de $]0,T[\to X$ qui sont mesurables à valeurs dans X et telles que

$$\left(\int_0^T \|f(x)\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f(x)\|_{L^p(0,T;X)} < \infty;$$

si $p = \infty$, on remplace la norme précédente par

$$\sup_{0<t<T} ess \|f\|_X = \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} < \infty.$$

l'espace normé $L^p(0,T;X)$ est complet.

On définit $L^q(0,T;L^p(\Omega_t))$ comme étant l'espace des fonctions $w \in L^q(0,T;L^p(\Omega))$ telles que $w(x,t) = 0$ p.p. dans $\Omega \diagdown \Omega_t$, où $1 \leq p < \infty$, muni de la norme

$$\|w\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega_t))} = \left(\int_0^T \|w(t,x)\|^q_{L^p(\Omega_t)} \, dxdt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Si $q = \infty$

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega_t))} = \sup_{0<t<T} ess \|w(t,x)\|_{L^p(\Omega_t)}.$$

On définit de la même façon les espaces $L^q\left(0,T;H_0^1(\Omega_t)\right)$, $1 \leq p < \infty$.

Remarque 1.4.2 *Nous rappelons que si X et Y sont deux espaces de Banach tels que $X \hookrightarrow Y$ (injection continue), alors*

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y), 1 \leq p \leq \infty,$$

nous définissons l'exposant critique de Sobolev pour la fonctionnelle trace par

$$\bar{q} = \begin{cases} \frac{2(N-1)}{N-2}, & si\ N \geq 3 \\ +\infty & si\ N = 1,2. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Inégalité de Young

Lemme 1.4.2 *(Inégalité de Young)*

Soient $1 < q,\ p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ (a,\ b) > 0,$$

on a aussi

$$\forall a,\ b \geq 0,\ \varepsilon > 0,\ ab \leq \varepsilon a^2 + C(\varepsilon) b^2,\ C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1},$$

appelée inégalité de Young avec ε

L'injection de sobolev

Théorème 1.4.4 *(L'injection de Sobolev)*

On suppose que Ω *ouvert borné. Alors il existe une constante strictement positive* C *(dépendant de* Ω*) telle que*

$$\|u\|_{2,\Gamma} \leq C \|\nabla u\|_2 , \forall u \in H_0^1(\Omega) .$$

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution du problème (P)

2.1 Existence locale

Dans ce chapitre, nous allons montrer l'existence et l'unicité locale de la solution du problème (1.2.1). Nous allons aussi adapter les idées utilisées par Georgiev et Todorova de [17] dans le cas du problème à coefficients constants, qui consistent à construire des approximations de Faedo-Galerkin afin d'utiliser le théorème de l'application contractante. Cette méthode nous permet de réduire les restrictions sur les données initiales. Par conséquent, le même résultat peut être établit en utilisant la méthode d'approximation de Faedo-Galerkin couplée avec la méthode du puits du potentiel [7]. A cause de la présence de l'amortissement linéaire fort $-\operatorname{div}(A\ \nabla u_t)$ et les conditions aux limites dynamiques sur Γ_1, on ne peut pas utiliser directement le résultat d'existence de Todorova de [17], ni le résultat de Vitillaro [44, 45] .

Dans ce mémoire on considère les équations suivantes:

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(A\nabla u) - \alpha \operatorname{div}(A\nabla u_t) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ v_{tt}(x,t) = a\left[\frac{-\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} - \frac{\partial u_t}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} + \operatorname{div}_\Gamma(A\nabla v_\Gamma) - r|v_t|^{m-2} v_t(x,t) + |v|^{p-2} v\right], & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ u(x,t) = v(x,t) & x \in \Omega, t > 0, \\ (u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad . \tag{2.1.1}$$

où $(u,v) = (u(x,t), v(x,t))$, $t \geq 0$, $x \in \Omega$, Ω est un domaine régulier, borné de $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\operatorname{mes}(\Gamma_0) > 0$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, $A = (a_{ij})$ est une matrice, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ sont des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)^T$, désigne la dérivée normale unitaire extérieure a Ω, et $\nu_{\mathcal{A}} = A.\nu$.

$m \geq 2$, a, α et r sont des constantes positives, $p > 2$ et u_0, v_0, u_1, v_1 sont des fonctions données. Pour des raisons de simplicité, dans ce mémoire, on considère le cas où $a = 1$.

Les opérateurs différentiels $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\Gamma$ sont définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= -\operatorname{div}(A\nabla u), \\ \mathcal{A}_\Gamma v &= -\operatorname{div}_\Gamma(A\nabla_\Gamma v). \end{aligned}$$

On suppose que les opérateurs différentiels du deuxième ordre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_\Gamma$ vérifient la condition d'ellipticité uniforme

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > \lambda \sum_{i,j=1}^n \xi_i^2, x \in \bar{\Omega}, 0 \neq \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T \in \mathbb{R}_*^n. \tag{2.1.2}$$

On suppose aussi que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0, x \in \mathbb{R}^n, 0 \neq \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T \in \mathbb{R}_*^n. \tag{2.1.3}$$

On considère les espaces

$$\mathbf{V} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^m(\Gamma_1),$$

$$\mathbf{Z} = \left\{(u,v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1) : u/_{\Gamma_1} = v\right\},$$

où

$$H^1_{\Gamma_0} = \left\{ u \in H^1\left(\Omega\right) : u/_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

et

$$\mathbf{H} = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1),$$

munis des normes suivantes

$$\begin{aligned} \|(u,v)\|^2_{\mathbf{H}} &= |u|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{L^2(\Gamma_1)} \\ \|(u,v)\|^2_{\mathbf{Z}} &= \|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \|v\|^2_{H^2(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

$\mathbf{Z}$ et $\mathbf{H}$ sont des espace de Hilbert et $\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{H}$ et injection continue.

L'énergie associée au problème (1.2.1) est définie par

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\left[\|u_t\|^2_2 + \|v_t\|^2_{2,\Gamma_1} + \|\nabla_g u\|^2_2 + \left\|\left(\nabla_g\right)_{\Gamma_1} v\right\|^2_{2,\Gamma_1}\right]. \tag{2.1.4}$$

Ainsi, on a le théorème d'existence locale suivant.

Théorème 2.1.1 *Soient* $2 \leq p \leq \bar{q}$ *et* $\max\left(2, \frac{\bar{q}}{\bar{q}+1-p}\right) \leq m \leq \bar{q}$.

Alors, étant donné $(u_0, v_0) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)$ *et* $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$*, il existe* $T > 0$ *et une unique solution* (u,v) *du problème (1.2.1) dans* $(0,T)$ *telle que*

$$\begin{aligned} (u,v) &\in C\left([0,T], H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)\right), \\ (u_t, v_t) &\in L^2\left([0,T]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)\right), \\ v_t &\in L^m\left([0,T], \Gamma_1\right). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer ce Théorème en utilisant l'approximation de Faedo-Galerkin et le Théorème de l'application contractante. Pour définir la fonction pour laquelle il existe un point fixe, nous allons examiner d'abord un problème connexe.

Pour $v \in C\left([0,T], H^1(\Gamma_1)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Gamma_1)\right)$ donné, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \operatorname{div}(A\ \nabla\varphi) - \alpha \operatorname{div}(A\ \nabla\varphi_t) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ \varphi\left(x,t\right) = 0 & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ \begin{array}{l} \psi_{tt}\left(x,t\right) = \Big[-\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} - \alpha\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} + \operatorname{div}_\Gamma\left(A\nabla_\Gamma\psi\right) \\ \qquad\qquad -r\left|\psi_t\right|^{m-2}\psi_t\left(x,t\right) + \left|v\right|^{p-2}v\Big] \end{array} & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ \varphi\left(x,t\right) = \psi\left(x,t\right), & \Gamma \in \Omega, t > 0, \\ \left(\varphi\left(x,0\right), \psi\left(x,0\right)\right) = \left(u_0\left(x\right), v_0\left(x\right)\right), \left(\varphi_t\left(x,0\right), \psi_t\left(x,0\right)\right) = \left(u_1\left(x\right), v_1\left(x\right)\right), & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Lemme 2.1.1 *Soient* $2 \leq p \leq \bar{q}$ *et* $\max\left(2, \frac{\bar{q}}{\bar{q}+1-p}\right) \leq m \leq \bar{q}$. *Etant donnée* $(u_0, v_0) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)$ *et* $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$, *il existe* $T > 0$ *et une unique solution* (φ, ψ) *du problème (2.1.5) dans* $(0,T)$ *telle que*

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &\in C\left([0,T], H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)\right), \\ (\varphi_t, \psi_t) &\in L^2(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)), \\ \psi_t &\in L^m\left((0,T) \times \Gamma_1\right). \end{aligned}$$

De plus la solution vérifie l'identité de l'énergie

$$\frac{1}{2}\left[\|\varphi_t\|_2^2 + \|\nabla_g\varphi\|_2^2 + \|\psi_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma\psi\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right]_0^T + \alpha\int_0^T \|\nabla_g\varphi_t(\tau)\|_2^2\,d\tau +$$
$$r\int_0^T \|\psi_t(\tau)\|_{m,\Gamma_1}^m\,d\tau = \int_s^T\int_{\Gamma_1} |v(\tau)|^{p-2}v(\tau)\,\psi_t(\tau)\,d\sigma d\tau,$$

pour $0 \leq s \leq t \leq T$.

Pour démontrer ce Lemme, on étudie d'abord: pour $T > 0$ et $f \in H^1\left(0,T,L^2\left(\Gamma_1\right)\right)$ le problème suivant

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \operatorname{div}(A\ \nabla\varphi) - \alpha \operatorname{div}(A\ \nabla\varphi_t) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ \varphi\left(x,t\right) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ \psi_{tt}\left(x,t\right) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} - \alpha\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} + \operatorname{div}_\Gamma\left(A\nabla_\Gamma\psi\right) - \\ r\left|\psi_t\right|^{m-1}\psi_t\left(x,t\right) + f\left(x,t\right) \end{bmatrix}, & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ \varphi\left(x,t\right) = \psi\left(x,t\right), & x \in \Gamma, t > 0, \\ \left(\varphi\left(x,0\right), \psi\left(x,0\right)\right) = \left(u_0\left(x\right), v_0\left(x\right)\right), \left(\varphi_t\left(x,0\right), \psi_t\left(x,0\right)\right) = \left(u_1\left(x\right), v_1\left(x\right)\right), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Comme l'a fait Doronin et al [13] dans le cadre d'un problème à coefficients constants, il faut préciser exactement à quel type de solution du problème (2.1.6) on s'attend.

Définition 2.1.1 *Une fonction* (φ, ψ) *telle que*

$$\begin{aligned}
(\varphi,\psi) &\in L^{\infty}\left(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)\right),\\
(\varphi_t,\psi_t) &\in L^2(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)),\\
\psi_t &\in L^m\left((0,T)\times\Gamma_1\right),\\
(\varphi_t,\psi_t) &\in L^{\infty}(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)),\\
\psi_t &\in L^{\infty}\left((0,T)\times L^2\left(\Gamma_1\right)\right),\\
(\varphi_{tt},\psi_{tt}) &\in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))\times L^{\infty}(0,T;L^2\left(\Gamma_1\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\varphi\left(x,0\right),\psi\left(x,0\right)\right) &= \left(u_0\left(x\right),v_0\left(x\right)\right),\\
\left(\varphi_t\left(x,0\right),\psi_t\left(x,0\right)\right) &= \left(u_1\left(x\right),v_1\left(x\right)\right),
\end{aligned}$$

est une solution généralisée du problème (2.1.6), si pour toute fonction $w=(w^1,w^2)$ $\in\left(H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)\right)$, *avec* $w^2\in L^m\left(\Gamma_1\right)$, $\zeta\in C^1\left(0,T\right)$ *et* $\zeta\left(T\right)=0$, *on a l'identité suivante*

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(f,w^2\right)\zeta\left(t\right)dt &= \int_0^T\left[\left(\varphi_{tt}\left(t\right),w^1\left(t\right)\right)+\left(A\nabla\varphi\left(t\right),\nabla w^1\left(t\right)\right)+\alpha\left(A\nabla\varphi_t\left(t\right),\nabla w^1\left(t\right)\right)\right]\zeta\left(t\right)dt\\
&\quad+\int_0^T\zeta\left(t\right)\int_{\Gamma_1}\left[\left(\psi_{tt}\left(t\right),w^2\left(t\right)\right)-\left(r\left|\psi_t\right|^{m-2}\psi_t\left(x,t\right),w^2\left(t\right)\right)\right]dtd\sigma\\
&\quad+\int_0^T\zeta\left(t\right)\int_{\Gamma_1}\left(\mathrm{div}_{\Gamma}\left(A\nabla_{\Gamma}\psi\right)\left(t\right),w^2\left(t\right)\right)dtd\sigma.
\end{aligned}$$

Lemme 2.1.2 *Soient* $2\le p\le\bar{q}$ *et* $\max\left(2,\frac{\bar{q}}{\bar{q}+1-p}\right)\le m\le\bar{q}$. *Soient* $(u_0,v_0)\in H^2\left(\Omega\right)\times H^2(\Gamma_1)\cap V$, $(u_1,v_1)\in H^1\left(\Omega\right)\times H^1\left(\Gamma_1\right)$ *et* $f\in H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma_1\right)\right)$, *alors pour tout* $T>0$, *il existe une unique solution généralisée* (φ,ψ) *(dans le sens de la définition (2.1.1)), du problème (2.1.6).*

2.1.1 Démonstration du lemme 2.1.2

Pour démontrer le Lemme ci-dessus, on va utiliser la méthode de Faedo-Galerkin, qui consiste à construire des approximations de la solution. On obtient ensuite des estimations à priori nécessaires pour garantir la convergence de ces approximations. Pour éviter les difficultés rencontrées pour estimer $(\varphi_{tt}(0), \psi_{tt}(0))$ dans l'espace $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$ et suivant les méthodes de Doronin et Larkin dans [12] et Cavalcanti et al [8], on fait un changement de fonctions, en posant

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(t,x) \\ \tilde{\psi}(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t,x) \\ \psi(t,x) \end{pmatrix} - F(t,x) \text{ avec } F(t,x) = \begin{pmatrix} \phi^1(t,x) \\ \phi^2(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x) + tu_1(x) \\ v_0(x) + tv_1(x) \end{pmatrix}.$$

Les changements effectués nous permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{tt}(t,x) &= \varphi_{tt}(t,x), \\
\operatorname{div}(A\nabla\varphi) &= \operatorname{div}(A\ \nabla\tilde{\varphi}) + \operatorname{div}\left(A\ \nabla\phi^1\right), \\
\operatorname{div}(A\nabla\varphi_t) &= \operatorname{div}(A\ \nabla\tilde{\varphi}_t) + \operatorname{div}\left(A\ \nabla\phi_t^1\right), \\
\tilde{\psi}_{tt}(t,x) &= -\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}+\phi^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} - \alpha\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_t+\phi_t^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} + \left(r\left|\tilde{\psi}_t+\phi_t^2\right|^{m-2}\left(\tilde{v}_t+\phi_t^2\right)\right) - \operatorname{div}_\Gamma\left(\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}+\phi^2\right)\right), \\
\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(0,x) \\ \tilde{\psi}(0,x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_t(0,x) \\ \tilde{\psi}_t(0,x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a le problème suivant avec l'inconnue $\left(\tilde{\varphi}(t,x), \tilde{\psi}(t,x)\right)$ et des conditions initiales nulles

$$\begin{cases}
\tilde{\varphi}_{tt} - \operatorname{div}(A\ \nabla\tilde{\varphi}) - \alpha\operatorname{div}(A\ \nabla\tilde{\varphi}_t) = \operatorname{div}\left(A\ \nabla\phi^1\right) + \alpha\operatorname{div}\left(A\ \nabla\phi_t^1\right), & x\in\Omega, t>0, \\
\tilde{\varphi}(x,t) = 0, & x\in\Gamma_0, t>0 \\
\tilde{\psi}_{tt}(x,t) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}+\phi^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} - \alpha\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_t+\phi_t^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} + \operatorname{div}\left(A_\Gamma\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}+\phi^2\right)\right) \\ -r\left|\left(\tilde{\psi}_t+\phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\tilde{\psi}_t(x,t)+\phi_t^2(x,t)\right) + f(x,t) \end{bmatrix}, & x\in\Gamma_1, t>0, \\
\tilde{\varphi}(x,t) = \tilde{\psi}(x,t) & x\in\Gamma_1, t>0, \\
\binom{\tilde{\varphi}(x,0)}{\tilde{\psi}(x,0)} = \binom{0}{0}, \binom{\tilde{\varphi}_t(x,0)}{\tilde{\psi}_t(x,0)} = \binom{0}{0}, & x\in\Omega,
\end{cases} \tag{2.1.7}$$

Remarque 2.1.1 *Il est bien évident que si $\left(\tilde{\varphi}(t,x), \tilde{\psi}(t,x)\right)$ est une solution du problème (2.1.7) sur $[0,T]$, alors (φ,ψ) est une solution du problème (2.1.6) sur $[0,T]$. Donc l'écriture du problème en fonction de (φ,ψ) montre exactement les régularités nécessaires sur les conditions initiales (u_1,v_1) et (u_0,v_0) pour assurer l'existence.*

Maintenant, on va construire des approximations de la solution du problème $\left(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n\right)$ par la méthode de Faedo- Galerkin de la manière suivante

Pour chaque $n \geq 0$, soit $W_n = span\left\{w_1^1, ..., w_n^1\right\} \times \left\{w_1^2, ..., w_n^2\right\}$, où $\left\{w_j^1(x), w_j^2(x)\right\}_{1\leq j\leq n}$ est une base de l'espace $\mathbf{V}$ En utilisant le processus d'orthogonalisation de Grahm -Schmidt, on peut prendre, $w^1 = \left\{w_1^1, ..., w_n^1\right\}$, $w^2 = \left\{w_1^2, ..., w_n^2\right\}$, comme orthonormée dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$.

On définit les approximations

$$\left(\tilde{\varphi}_n(t,x), \tilde{\psi}_n(t,x)\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} g_{jn}^1(t)\, w_j^1(x), \sum_{j=1}^{n} g_{jn}^2(t)\, w_j^2(x)\right), \tag{2.1.8}$$

où $\left(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n\right)$ sont des solutions pour le problème de Cauchy en dimension finie (écrite sous forme normale puisque $w = (w^1, w^2)$ est une base orthonormée dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$. en multipliant la première équation de (2.1.7) par w_j^1 et en intégrant par parties sur Ω , on obtient

$$\int_\Omega (\tilde{\varphi}_n)_{tt}\, w_j^1 dx + \int_\Omega A\ \nabla\left(\tilde{\varphi}_n + \phi^1\right) \nabla w_j^1 dx + \alpha \int_\Omega A\ \nabla\left((\tilde{\varphi}_n)_t + \phi_t^1\right) \nabla w_j^1 dx$$
$$- \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\left(\tilde{\varphi} + \phi^1\right)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} w_j^1 d\sigma - \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_t + \phi_t^1\right)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} w_j^1 d\sigma = 0. \tag{2.1.9}$$

De même en multipliant la troisième équation de (2.1.7) par w_j^2 et en intégrant par parties sur Γ_1, on obtient

$$\int_{\Gamma_1} \left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt} + r\left|\left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\right|^{m-2} \left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\right) w_j^2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\left(\tilde{\varphi} + \phi^1\right)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} w_j^2 d\sigma + \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_t + \phi_t^1\right)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} w_j^2 d\sigma$$
$$- \int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n + \phi\right) \nabla w_j^2 d\sigma = \int_{\Gamma_1} f w_j^2 d\sigma. \tag{2.1.10}$$

Maintenant, en combinant (2.1.9) et (2.1.10), il vient alors

$$\int_\Omega (\tilde{\varphi}_n(t))_{tt}\, w_j^1 dx + \int_\Omega A\ \nabla\left(\tilde{\varphi}_n + \phi^1\right) \nabla w_j^1 dx + \alpha \int_\Omega A\ \nabla\left((\tilde{\varphi}_n)_t + \phi_t^1\right) \nabla w_j^1 dx +$$
$$\int_{\Gamma_1} \left(\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt} + r\left|\left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\right|^{m-2} \left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\right) w_j^2 d\sigma -$$
$$\int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n + \phi\right) \nabla w_j^2 d\sigma = \int_{\Gamma_1} f w_j^2 d\sigma. \tag{2.1.11}$$

$$\begin{aligned} g_{jn}^1(0) &= \left(g_{jn}^1(0)\right)' = 0, j = 1, ..., n, \\ g_{jn}^2(0) &= \left(g_{jn}^2(0)\right)' = 0, j = 1, ..., n, \end{aligned}$$

d'après le Théorème de Carathéodory, voir [10], le problème (2.1.7) admet une solution $(g_{jn}^1(t), g_{jn}^2(t))_{j=1,n} \in H^3(0,t_n) \times H^3(0,t_n)$ définie sur $[0,t_n)$. On a besoin maintenant de montrer que:

1- Premièrement que pour tous $n \in \mathbb{N}, t_n = T$.

2- Deuxièmement, que ces approximations convergent vers la solution du problème (2.1.7).

Pour celà, nous avons besoin de deux estimations à priori. La première estimation à priori pour démontrer le premier point et la deuxième estimation à priori pour démontrer le second point. La présence du terme non linéaire $|v_t|^{p-2} v_t$ nous oblige à tirer une seconde estimation à priori pour passer à la limite dans le terme non linéaire. En effet, l'outil clé dans notre preuve est le Lemme d'Aubin-Lions qui utilise la compacité de l'inclusion $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$.

2.1.2 Première estimation à priori

En multipliant l'équation (2.1.9) par $(g_{jn}^1)'$, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\tilde{\varphi}_n(t))_{tt} \left(g_{jn}^1(t)\right)' w_j^1 dx + \int_\Omega A\nabla\tilde{\varphi}_n \left(g_{jn}^1(t)\right)' \nabla w_j^1 dx + \int_\Omega A\nabla\phi^1 \left(g_{jn}^1(t)\right)' \nabla w_j^1 dx + \\ &\alpha \int_\Omega A\ \nabla(\tilde{\varphi}_n)_t \left(g_{jn}^1(t)\right)' \nabla w_j^1 dx + \alpha \int_\Omega A\ \nabla\phi_t^1 \left(g_{jn}^1(t)\right)' \nabla w_j^1 dx + \\ &- \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\left(\tilde{\varphi} + \phi^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \left(g_{jn}^1(t)\right)' w_j^1 d\sigma - \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_t + \phi_t^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \left(g_{jn}^1(t)\right)' w_j^1 d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

En multipliant l'équation (2.1.10) par $(g_{jn}^2)'$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_1} \left(\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt} + r\left|\left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\right|^{m-2} \left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\right) \left(g_{jn}^2(t)\right)' w_j^2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\left(\tilde{\varphi} + \phi^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \left(g_{jn}^2\right)' w_j^2 d\sigma + \\ &\alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_t + \phi_t^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \left(g_{jn}^2\right)' w_j^2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\tilde{\psi} \left(g_{jn}^2(t)\right)' \nabla_\Gamma w_j^2 d\sigma + \\ &\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi \left(g_{jn}^2(t)\right)' \nabla_\Gamma w_j^2 d\sigma = \int_{\Gamma_1} f(t,x) \left(g_{jn}^2(t)\right)' w_j^2 d\sigma. \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

En sommant les équations (2.1.12) et (2.1.13) , il vient

$$\int_\Omega (\tilde{\varphi}_n(t))_{tt} \left(g^1_{jn}(t)\right)' w^1_j dx + \int_\Omega A\ \nabla\tilde{\varphi}_n \left(g^1_{jn}(t)\right)' \nabla w^1_j dx + \int_\Omega A\ \nabla\phi^1 \left(g^1_{jn}(t)\right)' \nabla w^1_j dx +$$

$$\alpha \int_\Omega A\ \nabla(\tilde{\varphi}_n)_t \left(g^1_{jn}(t)\right)' \nabla w^1_j dx + \alpha \int_\Omega A\ \nabla\phi_t \left(g^1_{jn}(t)\right)' \nabla w^1_j dx +$$

$$\int_{\Gamma_1} \left(\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt} + r\left|\left(\tilde{\psi}_t + \phi^2_t\right)\right|^{m-2}\left(\tilde{\psi}_t + \phi^2_t\right)\right)\left(g^2_{jn}(t)\right)' w^2_j d\sigma$$

$$+\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi \left(g^2_{jn}(t)\right)' \nabla_\Gamma w^2_j d\sigma + \int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi \left(g^2_{jn}(t)\right)' \nabla_\Gamma w^2_j d\sigma = \int_{\Gamma_1} f(t,x)\left(g^2_{jn}(t)\right)' w^2_j d\sigma.$$

En faisant la somme par rapport à j, on obtient

$$\int_\Omega (\tilde{\varphi}_n(t))_{tt} \sum_{j=1}^n \left(g^1_{jn}(t)\right)' w^1_j dx + \int_\Omega A\ \nabla\tilde{\varphi}_n \sum_{j=1}^n \left(g^1_{jn}(t)\right)' \nabla w^1_j dx + \int_\Omega A\ \nabla\phi^1 \sum_{j=1}^n \left(g^1_{jn}(t)\right)' \nabla w^1_j dx +$$

$$\alpha \int_\Omega A\ \nabla(\tilde{\varphi}_n)_t \sum_{j=1}^n \left(g^1_{jn}(t)\right)' \nabla w^1_j dx + \alpha \int_\Omega A\ \nabla\phi_t \sum_{j=1}^n \left(g^1_{jn}(t)\right)' \nabla w^1_j dx +$$

$$\int_{\Gamma_1} \left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt} \sum_{j=1}^n \left(g^2_{jn}(t)\right)' w^2_j d\sigma + r\int_{\Gamma_1} \left|\left(\tilde{\psi}_t + \phi^2_t\right)\right|^{m-2}\left(\tilde{\psi}_t + \phi^2_t\right) \sum_{j=1}^n \left(g^2_{jn}(t)\right)' w^2_j d\sigma$$

$$+\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi \sum_{j=1}^n \left(g^2_{jn}(t)\right)' \nabla_\Gamma w^2_j d\sigma + \int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi \sum_{j=1}^n \left(g^2_{jn}(t)\right)' \nabla_\Gamma w^2_j d\sigma = \int_{\Gamma_1} f(t,x) \sum_{j=1}^n \left(g^2_{jn}(t)\right)' w^2_j d\sigma.$$

On trouve, donc

$$\int_\Omega (\tilde{\varphi}_n(t))_{tt} (\tilde{\varphi}_n(t))_t dx + \int_\Omega A\ \nabla\tilde{\varphi}_n (\tilde{\varphi}_n(t))_t dx + \int_\Omega A\ \nabla\phi^1 (\tilde{\varphi}_n(t))_t dx +$$

$$\alpha \int_\Omega A\ \nabla(\tilde{\varphi}_n)_t (\tilde{\varphi}_n(t))_t dx + \alpha \int_\Omega A\ \nabla\phi^1_t (\tilde{\varphi}_n(t))_t dx +$$

$$\int_{\Gamma_1} \left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt}\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t d\sigma + r\int_{\Gamma_1} \left|\left(\tilde{\psi}_t + \phi^2_t\right)\right|^{m-2}\left(\tilde{\psi}_t + \phi^2_t\right)\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t d\sigma$$

$$+\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi^2 \left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t d\sigma + \int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi^2 \left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t d\sigma = \int_{\Gamma_1} f(t,x)\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t d\sigma.$$

En intégrant entre 0 et t et en intégrant par parties, on obtient pour chaque $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2}\left[\|(\tilde{\varphi}_n(t))_t\|_2^2 + \|\nabla_g\ \tilde{\varphi}_n(t)\|_2^2 + \|(\tilde{\varphi}_n(t))_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma\tilde{\psi}_n(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right] + \alpha\int_0^t \|\nabla_g\tilde{\varphi}_n(s)\|_2^2 ds$$

$$+\alpha\int_0^t\int_\Omega A\nabla\phi^1_t\nabla(\tilde{\varphi}_n(s))_t dx + \int_0^t\int_\Omega A\nabla\phi^1\nabla(\tilde{\varphi}_n(s))_t dx + \int_0^t\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi^2\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n(s)\right)_t d\sigma$$

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(\left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_{tt} + r \left| \left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2 \right) \right|^{m-2} \left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2 \right) \right) \left(\tilde{\psi}_n \right)_t d\sigma ds = \int_0^t \int_{\Gamma_1} f(t,x) \left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_t d\sigma ds. \tag{2.1.14}$$

On a

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma \phi^2 \nabla_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_t d\sigma ds = \int_0^t \int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma \phi_t^2 \nabla_\Gamma \tilde{\psi}_n(s)\, d\sigma ds - \int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma \phi^2 \nabla_\Gamma \tilde{\psi}_n(s) \Big|_0^t d\sigma.$$

Ce qui donne

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma \phi^2 \nabla_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_t d\sigma ds = \int_0^t \int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma \phi_t^2 \nabla_\Gamma \tilde{\psi}_n(s)\, d\sigma ds - \int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma \phi^2 \nabla_\Gamma \tilde{\psi}_n(t)\, d\sigma.$$

On a aussi

$$\int_0^t \int_\Omega A\ \nabla \phi^1 \nabla \left(\tilde{\varphi}_n \right)_t (s)\, d\sigma ds = \int_0^t \int_\Omega A\ \nabla \phi_t^1 \nabla \tilde{\varphi}_n(s)\, d\sigma ds - \int_\Omega A\ \nabla \phi^1 \nabla \tilde{\varphi}_n(t) \Big|_0^t d\sigma.$$

Ce qui donne

$$\int_0^t \int_\Omega A\ \nabla \phi^1 \nabla \left(\tilde{\varphi}_n(s) \right)_t d\sigma ds = \int_0^t \int_\Omega A\ \nabla \phi_t^1 \nabla \tilde{\varphi}_n(s)\, d\sigma ds - \int_\Omega A\ \nabla \phi^1 \nabla \tilde{\varphi}_n(t)\, d\sigma.$$

En utilisant l'inégalité de Young, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma \phi^2 \nabla_\Gamma \tilde{\psi}_n(s)\, d\sigma \le \delta_1 \left\| (\nabla_g)_\Gamma \tilde{\psi}_n \right\|_{2,\Gamma_1}^2 ds + \frac{1}{4\delta_1} \left\| (\nabla_g)_\Gamma \phi^2 \right\|_{2,\Gamma_1}^2 ds, \tag{2.1.15}$$

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} A\ \nabla \phi_t^2 \nabla_\Gamma \tilde{\psi}_n(s)\, d\sigma \le \delta_1 \int_0^t \left\| (\nabla_g)_\Gamma \tilde{\psi}_n \right\|_2^2 ds + \frac{1}{4\delta_1} \int_0^t \left\| (\nabla_g)_\Gamma \phi_t^2 \right\|_2^2 ds, \tag{2.1.16}$$

$$\alpha \int_0^t \int_\Omega A\ \nabla \phi_t^1 \nabla \left(\tilde{\varphi}_n(s) \right)_t dx ds \le \delta_1 \int_0^t \left\| \nabla_g \tilde{\varphi}_{tn} \right\|_2^2 ds + \frac{1}{4\delta_1} \int_0^t \left\| \nabla_g \phi_t^1 \right\|_2^2 ds, \tag{2.1.17}$$

$$\int_0^t \int_\Omega A \nabla \phi_t^1 \nabla \tilde{\varphi}_n(s)\, dx ds \le \delta_1 \int_0^t \left\| \nabla_g \tilde{\varphi}_n \right\|_2^2 ds + \frac{1}{4\delta_1} \int_0^t \left\| \nabla_g \phi_t^1 \right\|_2^2 ds, \tag{2.1.18}$$

$$\int_\Omega A \nabla \phi^1 \nabla \tilde{\varphi}_n(s)\, dx ds \le \delta_1 \left\| \nabla_g \tilde{\varphi}_n \right\|_2^2 ds + \frac{1}{4\delta_1} \left\| \nabla_g \phi^1 \right\|_2^2 ds.$$

D'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} f(x,t) \left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_t d\sigma ds \le C \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(f^2 + \left| \left(\tilde{\psi}_n \right)_t (s) \right|^2 \right) d\sigma ds. \tag{2.1.19}$$

Le dernier terme du membre gauche de l'équation (2.1.14) peut être réecrit sous la forme

$$r \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| \left(\left(\tilde{\psi}_n \right)_t + \phi_t \right) \right|^{m-2} \left(\left(\tilde{\psi}_n \right)_t + \phi_t^2 \right) \left(\tilde{\psi}_n \right)_t d\sigma dt = r \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| \left(\left(\tilde{\psi}_n \right)_t + \phi_t^2 \right) \right|^m d\sigma dt$$

$$-r\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\phi_t^2 d\sigma ds,$$

L'application de l'inégalité de Young donne, pour $\delta_2>0$,

$$\left|\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\phi_t^2 d\sigma ds\right|\leq\frac{\delta_2^m}{m}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^m d\sigma ds+$$

$$\frac{m-1}{m}\delta_2^{-m/(m-1)}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\phi_t^2\right|^m d\sigma ds. \tag{2.1.20}$$

Par conséquent, en substituant les inégalités (2.1.15)-(2.1.20) dans l'équation (2.1.14) et en choisissant δ_1 et δ_2 assez petit, on obtient

$$\left[\frac{1}{2}\left\|\left(\tilde{\varphi}_n(t)\right)_t\right\|_2^2+\left(\frac{\delta_1}{2}+1\right)\left\|\nabla_g\ \tilde{\varphi}_n(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\left(\tilde{\varphi}_n(t)\right)_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\left(\frac{\delta_1}{2}+1\right)\left\|\left(\nabla_g(t)\right)_\Gamma\tilde{\varphi}_n\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right]$$

$$+\alpha\int_0^t\left\|\nabla_g\tilde{\varphi}_n(s)\right\|_2^2 ds+\int_0^t\left[\delta_1\left\|\nabla_g\left(\tilde{\varphi}_n(s)\right)_t\right\|_2^2+\delta_1\left\|\nabla_g\ \tilde{\varphi}_n(s)\right\|_2^2+\delta_1\left\|\left(\nabla_g\right)_\Gamma\tilde{\psi}_n(s)\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right]ds$$

$$+\frac{1}{2\delta_1}\int_0^t\left\|\nabla_g\ \phi_t^1\right\|_2^2 ds+\frac{1}{4\delta_1}\left\|\nabla_g\ \phi^1\right\|_2^2+\frac{1}{4\delta_1}\int_0^t\left\|\left(\nabla_g\right)_\Gamma\phi_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 ds+\frac{1}{4\delta_1}\left\|\left(\nabla_g\right)_\Gamma\phi_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2$$

$$+\frac{1}{4\delta_1}\left\|\left(\nabla_g\right)_\Gamma\phi_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^m d\sigma dt-\frac{\delta_2^m}{m}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^m d\sigma ds+$$

$$\frac{m-1}{m}\delta_2^{-m/(m-1)}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\phi_t^2\right|^m d\sigma ds\leq C\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left(f^2+\left|\left(\tilde{\psi}_n\right)_t(s)\right|^2\right)d\sigma ds.$$

Donc

$$\left[\frac{1}{2}\left\|\left(\tilde{\varphi}_n\right)_t\right\|_2^2+\left(\frac{\delta_1}{2}+1\right)\left\|\nabla_g\ \tilde{\varphi}_n\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\left(\tilde{\psi}_n\right)_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\left(\frac{\delta_1}{2}+1\right)\left\|\left(\nabla_g\right)_\Gamma\tilde{\psi}_n\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right]+$$

$$\alpha\int_0^t\left\|\nabla_g\ \tilde{\varphi}_n(s)\right\|_2^2 ds\leq\int_0^t\left[\delta_1\left\|\nabla_g\left(\tilde{\varphi}_n(s)\right)_t\right\|_2^2+\delta_1\left\|\nabla_g\ \tilde{\varphi}_n(s)\right\|_2^2+\right.$$

$$\left.\delta_1\left\|\left(\nabla_g\right)_\Gamma\tilde{\psi}_n(s)\right\|_{2,\Gamma_1}^2+C\left\|\left(\tilde{\psi}_n(s)\right)_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right]ds+\frac{1}{2\delta_1}\int_0^t\left\|\nabla_g\ \phi_t^1\right\|_2^2 ds$$

$$+\frac{1}{4\delta_1}\left\|\nabla_g\phi^1\right\|_2^2+\frac{1}{4\delta_1}\int_0^t\left\|\left(\nabla_g\right)_\Gamma\phi_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 ds+\frac{1}{4\delta_1}\left\|\left(\nabla_g\right)_\Gamma\phi_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2$$

$$+\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^m d\sigma dt-\frac{\delta_2^m}{m}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^m d\sigma ds+$$

$$\frac{m-1}{m}\delta_2^{-m/(m-1)}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|\phi_t^2\right|^m d\sigma ds+C\int_0^t\int_{\Gamma_1}f^2 d\sigma ds.$$

En appliquant le Lemme 2.2.1 (de Gronwall), (pour δ_1 assez petit) , on déduit

$$\|(\tilde{\varphi}_n)_t(t)\|_2^2 + \|\nabla_g \tilde{\varphi}_n(t)\|_2^2 + \left\| \left(\tilde{\psi}_n\right)_t (t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\| (\nabla_g)_\Gamma \tilde{\psi}_n(t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \leq C_T,$$

où C_T est une constante positive indépendante de n.

On déduit aussi

$$\frac{1}{2}\left[\|(\tilde{\varphi}_n(t))_t\|_2^2 + \|\nabla_g \tilde{\varphi}_n(t)\|_2^2 + \left\| \left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\| (\nabla_g)_\Gamma \tilde{\psi}_n(t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right]$$
$$+\alpha \int_0^t \|\nabla_g \tilde{\varphi}_n(s)\|_2^2 \, ds + r \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| \left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t + \phi_t^2 \right) \right|^m d\sigma dt \leq C_T, \tag{2.1.21}$$

D'autre part, l'estimation (2.1.21) nous donne, $t_n = T$, $\forall n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que

$$\left(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée dans } L^\infty\left(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)\right), \tag{2.1.22}$$

$$\begin{aligned} &((\tilde{\varphi}_n)_t)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée dans } L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \\ &\left((\tilde{\varphi}_n)_t, \left(\tilde{\psi}_n\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée dans } L^2\left(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)\right) \\ &\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée dans } L^\infty\left(0,T; L^2(\Gamma_1)\right). \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité algébrique suivante (voire [16])

$$(A+B)^\lambda \leq 2^{\lambda-1}\left(A^\lambda + B^\lambda\right), \ A,\ B \geq 0,\ \lambda \geq 1, \tag{2.1.24}$$

on peut trouver des constantes positives c_1, $c_2 > 0$, telles que

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| \left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t + \phi_t^2 \right) \right|^m d\sigma dt \geq c_1 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| \left(\tilde{\psi}_n\right)_t \right|^m d\sigma ds - c_2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left|\phi_t^2\right|^m d\sigma ds. \tag{2.1.25}$$

D'après l'injection de $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Gamma_1)$ $(2 \leq m \leq \bar{q})$, on conclut que $v_1 \in L^m(\Gamma_1)$. Par conséquent, à partir des inégalités (2.1.21) et (2.1.25), il existe une constante $C'_T > 0$ telle que

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| \left(\tilde{\psi}_n\right)_t \right|^m d\sigma ds \leq C'_T,$$

ce qui donne

$$\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^m\left((0,T) \times \Gamma_1\right). \tag{2.1.26}$$

2.1.3 Seconde estimation à priori

Afin d'obtenir une seconde estimation à priori, nous allons d'abord estimer les quantités $\|(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\|_2^2$ et $\left\|\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}\right\|_{2,\Gamma_1}^2$. Pour cela, en posant $w_j^1 = (\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}$ et $t = 0$ dans l'équation (2.1.9), on obtient

$$\int_\Omega (\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,dx + \int_\Omega A\,\nabla\left(\tilde{\varphi}_n + \phi^1\right)\nabla(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,dx + \alpha\int_\Omega A\,\nabla\left((\tilde{\varphi}_n)_t + \phi_t^1\right)\nabla(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,dx +$$

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_n + \phi^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,d\sigma + \alpha\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\left((\tilde{\varphi}_n)_t + \phi_t^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,d\sigma = 0. \qquad (2.1.27)$$

En posant aussi $w_j^2 = \left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}$ et $t = 0$ dans l'équation (2.1.10), on obtient

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_n + \phi^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma + \alpha\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\left((\tilde{\varphi}_n)_t + \phi_t^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma$$
$$\int_{\Gamma_1}\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt}\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma + \int_{\Gamma_1} r\left|\left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma.$$

$$\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n + \phi^2\right)\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma = \int_{\Gamma_1} f(0,t)\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma. \qquad (2.1.28)$$

Maintenant, en sommant les équations (2.1.27) et (2.1.28), on trouve

$$\int_\Omega (\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,dx + \int_\Omega A\,\nabla\left(\tilde{\varphi}_n + \phi^1\right)\nabla(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,dx + \alpha\int_\Omega A\,\nabla\left((\tilde{\varphi}_n)_t + \phi_t^1\right)\nabla(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,dx +$$

$$\int_{\Gamma_1}\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt}\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma + \int_{\Gamma_1} r\left|\left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\tilde{\psi}_t + \phi_t^2\right)\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma$$
$$\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n + \phi^2\right)\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma = \int_{\Gamma_1} f(0,t)\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma.$$

En intégrant par parties on obtient l'équation suivante

$$\|(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\|_2^2 + \left\|\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \int_\Omega A\,\nabla\phi^1\nabla(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,dx + \alpha\int_\Omega A\,\nabla\phi_t^1\nabla(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\,dx +$$

$$r\int_{\Gamma_1}\left|\phi_t^2(0)\right|_t^{m-2}\phi^2\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma ds - \int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi^2\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma = \int_{\Gamma_1} f(0,t)\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}d\sigma. \qquad (2.1.29)$$

Puisque les égalités suivantes sont vérifiées

$$\begin{pmatrix}\phi^1(0)\\ \phi^2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\phi_t^1\\ \phi_t^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix},$$

$$\int_\Omega A\ \nabla \phi_t^1(0)\nabla(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}=-\int_\Omega \operatorname{div}\left(A\ \nabla\phi_t^1(0)\right)(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}+\int_{\Gamma_1}\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt}\frac{\partial\phi_t^1}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}d\sigma,$$

Comme $f\in H^1(0,T;L^2(\Gamma_1))$ et $(u_0,u_1)\in H^2(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)$, d'après l'inégalité de Young et l'injection de $H^2(\Omega)\hookrightarrow L^m(\Gamma_1)$, on déduit l'existence d'une constante $C>0$ indépendante de n, telle que

$$\|(\tilde{\varphi}_n(0))_{tt}\|_2^2+\left\|\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}\right\|_{2,\Gamma_1}^2\leq C. \tag{2.1.30}$$

En dérivant l'équation (2.1.9) par rapport à t, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega(\tilde{\varphi}_n(t))_{tt}w_j^1dx+\frac{d}{dt}\int_\Omega A\nabla\left(\tilde{\varphi}_n+\phi^1\right)\nabla w_j^1dx+\alpha\frac{d}{dt}\int_\Omega A\nabla\left((\tilde{\varphi}_n)_t+\phi_t^1\right)\nabla w_j^1dx+$$
$$-\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_n+\phi^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}w_j^1d\sigma-\alpha\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\left((\tilde{\varphi}_n)_t+\phi_t^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}w_j^1d\sigma=0. \tag{2.1.31}$$

En dérivant l'équation (2.1.10) par rapport à t, il vient

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt}w_j^2d\sigma+r\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)w_j^2d\sigma-$$
$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_n+\phi^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}w_j^1d\sigma+\alpha\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\left((\tilde{\varphi}_n)_t+\phi_t^1\right)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}w_j^1d\sigma+$$
$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}A\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n+\phi^2\right)\nabla_\Gamma w_j^2d\sigma=\int_{\Gamma_1}f_t(x,t)\left(\tilde{\psi}_n(s)\right)_{tt}d\sigma. \tag{2.1.32}$$

En multipliant les égalités (2.1.31) et (2.1.32) par $\left(\left(\overset{1}{g}_{jn}(t)\right)'',\left(\overset{2}{g}_{jn}(t)\right)''\right)$ respectivement on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega(\tilde{\varphi}_n(t))_{tt}\left(\overset{1}{g}_{jn}(t)\right)''w_j^1dx+\frac{d}{dt}\int_\Omega A\nabla\left(\tilde{\varphi}_n+\phi^1\right)\left(\overset{1}{g}_{jn}(t)\right)''\nabla w_j^1dx+$$
$$\alpha\frac{d}{dt}\int_\Omega A\nabla\left((\tilde{\varphi}_n)_t+\phi_t^1\right)\left(\overset{1}{g}_{jn}(t)\right)''\nabla w_j^1dx+\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt}\left(\overset{2}{g}_{jn}(t)\right)''w_j^2d\sigma$$
$$+\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\left(r\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right)\left(\overset{2}{g}_{jn}(t)\right)''w_j^2d\sigma-$$
$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}A\ \nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n+\phi^2\right)\left(\overset{2}{g}_{jn}(t)\right)''\nabla_\Gamma w_j^2d\sigma=\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}f(t,x)\left(\overset{2}{g}_{jn}(t)\right)''w_j^2(s)\,d\sigma.$$

En sommant par rapport à j, on déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla_g(\tilde{\varphi}_n(t))_t\|_2^2+\|(\tilde{\varphi}_n(t))_{tt}\|_2^2+\left\|\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt}\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\left\|\left(\nabla_g\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t\right)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right]$$

$$+\int_{\Omega} A\ \nabla\phi_t^1 \nabla\left(\tilde{\varphi}_n(t)\right)_{tt} dx+\alpha\int_{\Omega}\left\|\nabla_g\left(\tilde{\varphi}_n(t)\right)_t\right\|_2^2+\int_{\Gamma_1} A\ \nabla_\Gamma\phi_t^2\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt} d\sigma+$$

$$r(m-1)\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt}+\phi_{tt}^2\right)\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt} d\sigma=\int_{\Gamma_1} f_t(t,x)\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt} d\sigma. \tag{2.1.33}$$

Comme $\phi_{tt}^2=0$, le dernier terme du membre gauche de l'équation (2.1.33) peut être réecrit sous la forme

$$\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt}+\phi_{tt}^2\right)\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt} d\sigma=$$

$$\frac{4}{m^2}\int_{\Gamma_1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^{\frac{m-2}{2}}\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right)\right]^2 d\sigma.$$

En replaçant

$$\int_{\Gamma_1}\left|\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right|^{m-2}\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt}+\phi_{tt}^2\right)^2 d\sigma,$$

par

$$\frac{4}{m^2}\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right|^{\frac{m-2}{2}}\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_t+\phi_t^2\right)\right)\right)^2 d\sigma,$$

dans l'équation (2.1.33) et en intégrant entre 0 et t, il vient

$$\frac{1}{2}\left[\left\|\nabla_g\left(\tilde{\varphi}_n(t)\right)_t\right\|_2^2+\left\|\left(\tilde{\varphi}_n(t)\right)_{tt}\right\|_2^2+\left\|\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt}\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\left\|\left(\nabla_g\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t\right)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right]$$

$$+\int_0^t\int_{\Omega} A\nabla\phi_t^1\nabla\left(\tilde{\varphi}_n(t)\right)_{tt} dxds-\frac{1}{2}\left[\left\|\left(\tilde{\varphi}_n(0)\right)_{tt}\right\|_2^2+\left\|\left(\tilde{\psi}_n(0)\right)_{tt}\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right]$$

$$+\alpha\int_0^t\left\|\nabla_g\left(\tilde{\varphi}_n(s)\right)_t\right\|_2^2 ds+\int_0^t\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi_t^2\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt} d\sigma ds+$$

$$\frac{4r(m-1)}{m^2}\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t+\phi_t^2\right|^{\frac{m-2}{2}}\left(\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t+\phi_t^2\right)\right)\right)^2 d\sigma\leq\int_0^t\int_{\Gamma_1} f_t(t,x)\left(\tilde{\psi}_n(s)\right)_{tt} d\sigma ds. \tag{2.1.34}$$

En utilisant l'inégalité (2.1.30) et les inégalités de Young et Poincaré (comme dans (2.1.20), on obtient

$$\int_0^t\int_{\Omega} A\nabla\phi_t^1\nabla\left(\tilde{\varphi}_n(t)\right)_{tt} dxds\leq\delta_1\int_0^t\left\|\nabla_g\left(\tilde{\varphi}_n(s)\right)_{tt}\right\|_2^2 ds+\frac{1}{4\delta_1}\int_0^t\left\|\nabla_g\phi_t^1(s)\right\|_2^2 ds,$$

D'autre part

$$\int_0^t\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi_t^2\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n(s)\right)_{tt} d\sigma ds=\int_0^t\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma\phi_{tt}^2\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n(s)\right)_t d\sigma ds-\int_{\Gamma_1}\left[A\nabla_\Gamma\phi_t^2\nabla_\Gamma\left(\tilde{\psi}_n(s)\right)_t\right]_0^t d\sigma,$$

puisque $\phi_{tt}^2 = 0$ on a

$$\int_{\Gamma_1} \left[A\nabla_\Gamma \phi_t^2 \nabla_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_t \right]_0^t d\sigma = \int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma \phi_t^2 \nabla_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t d\sigma.$$

En utilisant l'estimation suivante

$$\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma \phi_t^2 \nabla_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t d\sigma \leq \delta_1 \left\| (\nabla_g)_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{1}{4\delta_1} \left\| (\nabla_g)_\Gamma \phi_t^2 \right\|_{2,\Gamma_1}^2 .$$

Dans (2.1.34), on obtient

$$\frac{1}{2} \left[\left\| \nabla_g (\tilde{\varphi}_n(t))_t \right\|_2^2 + \left\| (\tilde{\varphi}_n(t))_{tt} \right\|_2^2 + \left\| \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_{tt} \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\| (\nabla_g)_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right] + \alpha \int_0^t \left\| \nabla_g (\tilde{\varphi}_n(s))_t \right\|_2^2 ds$$

$$+ \frac{4r(m-1)}{m^2} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t + \phi_t^2 \right|^{\frac{m-2}{2}} \left(\left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t + \phi_t^2 \right) \right) \right)^2 d\sigma \leq \frac{1}{2} C + \delta_1 \int_0^t \left\| \nabla_g (\tilde{\varphi}_n)_{tt} \right\|_2^2 ds$$

$$+ \frac{1}{4\delta_1} \int_0^t \left[\left\| \nabla_g \phi_t^2 \right\|_2^2 + \delta_1 \left\| (\nabla_g)_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_t \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{1}{4\delta_1} \left\| (\nabla_g \ \phi_t^2)_\Gamma \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right] ds$$

$$+ C \left(\int_0^t \left\| f_t \right\|^2 ds + \int_0^t \left\| \left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_{tt} \right\|_{2,\Gamma_1}^2 ds \right). \tag{2.1.35}$$

Un réarrangement des termes dans l'inégalité (2.1.35) donne

$$\frac{1}{2} \left[\left\| \nabla_g (\tilde{\varphi}_n(t))_t \right\|_2^2 + \left\| (\tilde{\varphi}_n(t))_{tt} \right\|_2^2 + \left\| \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_{tt} \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + (\delta_1 + 1) \left\| (\nabla_g)_\Gamma \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right] +$$

$$\alpha \int_0^t \left\| \nabla_g (\tilde{\varphi}_n(s))_t \right\|_2^2 ds + \frac{4r(m-1)}{m^2} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t + \phi_t^2 \right|^{\frac{m-2}{2}} \left(\left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t + \phi_t^2 \right) \right) \right)^2 d\sigma$$

$$\leq \int_0^t \left[\delta_1 \left\| \nabla_g (\tilde{\varphi}_n(s))_{tt} \right\|_2^2 + C \int_0^t \left\| \left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_{tt} \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right] ds$$

$$\frac{1}{2} C + \frac{1}{4\delta_1} \int_0^t \left\| \nabla_g \phi_t^2 \right\|_2^2 dx + \frac{1}{4\delta_1} \left\| (\nabla_g)_\Gamma \phi_t^2 \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + C \int_0^t f_t^2 ds.$$

Maintenant, en appliquant le Lemme 2.2.1 (de Gronwall), on obtient

$$\frac{1}{2} \left[\left\| \nabla_g (\tilde{\varphi}_n)_t \right\|_2^2 + \left\| (\tilde{\varphi}_n)_{tt} \right\|_2^2 + \left\| \left(\tilde{\psi}_n \right)_{tt} \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\| (\nabla_g)_\Gamma \tilde{\psi}_n \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right] + \alpha \int_0^t \left\| \nabla_g \left(\tilde{\psi}_n(s) \right)_t \right\|_2^2 ds$$

$$+ \frac{4r(m-1)}{m^2} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t + \phi_t^2 \right|^{\frac{m-2}{2}} \left(\left(\tilde{\psi}_n(t) \right)_t + \phi_t^2 \right) \right) \right)^2 d\sigma \leq \tilde{C}_T,$$

où $\tilde{C}_T$ est une constante positive, indépendante n pour tout $t \in [0,T], n \in \mathbb{N}$.

D'après ce qui précède, on déduit

$$\begin{aligned}
&((\tilde{\varphi}_n)_{tt})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), &(2.1.36)\\
&\left(\left(\tilde{\psi}_n\right)_{tt}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right),\\
&\left((\tilde{\varphi}_n)_t, \left(\tilde{\psi}_n\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)\right).
\end{aligned}$$

A partir de (2.1.22), (2.1.23), (2.1.26) et (2.1.36), on a

$$\left(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)\right).$$

Ensuite

$$\left(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2\left(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)\right),$$

Puisque

$$\left((\tilde{\varphi}_n)_t, \left(\tilde{\psi}_n\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_1)\right),$$

et

$$\left((\tilde{\varphi}_n)_t, \left(\tilde{\psi}_n\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_1)\right),$$

alors

$$\left(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } H^1\left(0,T;H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)\right).$$

Puisque l'injection de $H^1(0,T;H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_1))$ est compacte, en utilisant le Théorème d'Aubin-Lions, on peut extraire une sous-suite $\left(\tilde{\varphi}_\mu, \tilde{\psi}_\mu\right)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $\left(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\tilde{\varphi}_\mu \longrightarrow \tilde{\varphi} \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

et

$$\tilde{\psi}_\mu \longrightarrow \tilde{\psi} \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right).$$

Donc

$$\tilde{\varphi}_\mu \longrightarrow \tilde{\varphi} \text{ fortement et presque partout dans } (0,T)\times\Omega.$$

D'autre part, on a déjà prouvé dans la section précédente que

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right),\\
&\left(\nabla_\Gamma\tilde{\psi}(t)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right).
\end{aligned}$$

Comme

$$\left\|\tilde{\psi}_n(t)\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C\left\|\nabla_g \tilde{\varphi}_n(t)\right\|_2$$

et

$$\left\|\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C\left\|\nabla_g\left(\tilde{\varphi}_n(t)\right)_t\right\|_2,$$

et à partir de (2.1.22), (2.1.36) on déduit que

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right),\\
&\left(\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right),\\
&\left(\left(\tilde{\psi}_n(t)\right)_{tt}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right),
\end{aligned}$$

Comme l'injection de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$ est compacte, et d'après le Théorème d'Aubin-Lions, on peut extraire une sous suite de $\left(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ notée aussi $\left(\tilde{\varphi}_\mu, \tilde{\psi}_\mu\right)_{\mu\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\left(\tilde{\psi}_\mu\right)_t \longrightarrow \tilde{\psi}_t \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right). \tag{2.1.37}$$

Donc à partir de (2.1.26), on obtient que

$$\left|\left(\tilde{\psi}_\mu\right)_t\right|^{m-2}\left(\tilde{\psi}_\mu\right)_t \rightharpoonup \chi \text{ faiblement dans } L^{m'}\left((0,T)\times\Gamma_1\right),$$

Il reste maintenant à montrer que

$$\chi = \left|\tilde{\psi}_t\right|^{m-2}\tilde{\psi}_t.$$

Il est clair, à partir de (2.1.37) que l'on a

$$\left|\left(\tilde{\psi}_\mu\right)_t\right|^{m-2}\left(\tilde{\psi}_\mu\right)_t \longrightarrow \left|\tilde{\psi}_t\right|^{m-2}\tilde{\psi}_t \text{ fortement et presque partout dans } (0,T)\times\Gamma_1.$$

En utilisant le Lemme 1.3 de Lions [26], on obtient

$$\chi = \left|\tilde{\psi}_t\right|^{m-2}\tilde{\psi}_t.$$

D'autre part, le Lemme 3.1 de Lions [26], donne

$$\left|\tilde{\psi}_\mu\right|^{p-2}\tilde{\psi}_\mu \longrightarrow \left|\tilde{\psi}\right|^{p-2}\tilde{\psi} \text{ fortement et presque partout dans } (0,T)\times\Gamma_1.$$

La preuve peut maintenant être achevée en faisant comme dans [26, Théorème 3.1].

2.1.4 Unicité

Soient $(v^1, v^2), (z^1, z^2)$ deux solutions du problème (2.1.6) avec les mêmes données initiales.

on note

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 - z^1 \\ v^2 - z^2 \end{pmatrix}, \\ Grad\Phi &= \left(\nabla_g \phi^1, (\nabla_g)_\Gamma \phi^2\right), \end{aligned}$$

on note aussi

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(\psi^1, \psi^2\right) \\ &= Grad\Phi \\ &= \left(\nabla_g \phi^1, (\nabla_g)_\Gamma \phi^2\right), \end{aligned}$$

et

$$Div\Psi = \left(\operatorname{div} \psi^1, \operatorname{div}_\Gamma \psi^2\right),$$
$$= \left(\operatorname{div} \nabla_g \phi^1, \operatorname{div}_\Gamma (\nabla_g)_\Gamma \phi^2\right).$$

On définit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\mathcal{A} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} & -\mathcal{A}_\Gamma \end{pmatrix}, \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\alpha \mathcal{A} & 0 \\ -\alpha \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} & 0 \end{pmatrix},$$

et on considère maintenant le problème linéaire du problème (3.1.2) suivant:

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \mathbb{A}\Phi - \mathbb{B}\Phi_t = \mathbf{F}(x,t) + \mathbf{G}(x,t) \\ \Phi(0) = \Phi^0 \\ \Phi_t(0) = \Phi^1 \end{cases},$$

où

$$\mathbf{F}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |v|^{p-2} v - |z|^{p-2} z \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{G}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |v_t|^{m-2} v_t - |z_t|^{m-2} z_t \end{pmatrix},$$

alors Φ vérifie

$$(0,0) = (\Phi_{tt}, \Phi_t) - (\mathbb{A}\Phi, \Phi_t) - (\mathbb{B}\Phi_t, \Phi_t) + (\mathbf{G}(x,t), \Phi_t).$$

Par une intégration par parties, on a

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\Phi\|_H^2 + \|Grad\Phi\|_H^2\right] + \alpha\left\|\nabla_g \phi_t^1\right\|_2^2 + (\mathbf{G}(x,t), \Phi_t).$$

Par conséquent, on a

$$\frac{d}{dt}\left[\left\|\phi_t^1\right\|_2^2 + \left\|\phi_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|\nabla_g \phi^1\right\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma \phi^2\right\|_2^2\right] + 2\alpha\left\|\nabla_g \phi_t^1\right\|_2^2$$

$$+r\int_{\Gamma_1}\left[|v_t(s)|^{m-2} v_t(s) - |z_t|^{m-2} z_t(s)\right](v_t(s) - z_t(s))\, d\sigma = 0. \tag{2.1.38}$$

En intégrant (2.1.38) entre 0 et t, on obtient

$$\left[\left\|\phi_t^1\right\|_2^2 + \left\|\phi_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|\nabla_g \phi^1\right\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma \phi^2\right\|_2^2\right] + 2\alpha\int_0^t \left\|\nabla_g \phi_t^1\right\|_2^2 ds$$

$$2r\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left[|v_t(s)|^{m-2} v_t(s) - |z_t|^{m-2} z_t(s)\right](v_t(s) - z_t(s))\, d\sigma ds = 0. \tag{2.1.39}$$

En utilisant l'inégalité algébrique

$$\forall m \geq 2, \exists c > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, \left[|a|^{m-2} a - |b|^{m-2} b\right](a-b) \geq c\,|a-b|^m. \tag{2.1.40}$$

L'égalité(2.1.39) devient

$$\left[\left\|\phi_t^1\right\|_2^2 + \left\|\phi_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|\nabla_g \phi^1\right\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma \phi^2\right\|_2^2\right] + 2\alpha\int_0^t \left\|\nabla_g \phi_t^1\right\|_2^2 ds +$$

$$c\int_0^t\int_{\Gamma_1}|v_t(s) - z_t(s)|^m\, d\sigma dt \leq 0. \tag{2.1.41}$$

d'où l'on tire $\Phi = 0$.

Ceci achève la démonstration du Lemme 2.1.2

Preuve : du Lemme 2.1.1

Premièrement on approxime $(u,v) \in C\left([0,T], H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)\right)$ muni de la norme standard

$$\|(u,v)\| = \max_{0<t\leq T}\left[\|u_t(t)\|_2 + \|v_t(t)\|\right.$$

par une suite

$$\begin{aligned}\left(u^k\right)_{k\in\mathbb{N}} &\subset C^\infty\left([0,T]\times\Omega\right),\\ \left(v^k\right)_{k\in\mathbb{N}} &\subset C^\infty\left([0,T]\times\Gamma\right),\end{aligned}$$

en utilisant des arguments standards de convolution (voir [4]). Il est clair que

$$f\left(v^k\right)=\left|v^k\right|^{p-2}v^k\in H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma_1\right)\right).$$

Ce type d'approximation a déjà été utilisé par Vitillaro dans [44, 45].

Ensuite, on approche les données initiales

$$\left(u_1,v_1\right)\in L^2\left(\Omega\right)\times L^2\left(\Gamma_1\right).$$

par une suite

$$\left(u_1^k,v_1^k\right)_{k\in\mathbb{N}}\subset C_0^\infty\left(\Omega\right)\times C_0^\infty\left(\Gamma_1\right).$$

Finalement, puisque l'espace $\left[H^2\left(\Omega\right)\cap H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right)\right]\times\left[H^2\left(\Gamma_1\right)\cap L^m\left(\Gamma_1\right)\right]$ est dense dans $H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right)\times H^1\left(\Gamma_1\right)$ pour la norme de $H^1\left(\Omega\right)\times H^1\left(\Gamma_1\right)$,

on approxime

$$\left(u_0,v_0\right)\in H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right)\times H^1(\Gamma_1)$$

par une suite

$$\left(u_0^k,v_0^k\right)_{k\in\mathbb{N}}\subset\left[H^2\left(\Omega\right)\cap H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right)\right]\times\left[H^2\left(\Gamma_1\right)\cap L^m\left(\Gamma_1\right)\right].$$

On considère maintenant l'ensemble des problèmes suivants

$$\begin{cases}\varphi_{tt}^k-\operatorname{div}\left(A\nabla\varphi^k\right)-\alpha\operatorname{div}\left(A\nabla\varphi_t^k\right)=0, & x\in\Omega,t>0,\\ \varphi^k\left(x,t\right)=0, & x\in\Gamma_0,t>0,\\ \psi_{tt}^k\left(x,t\right)=\begin{bmatrix}-\frac{\partial\varphi^k}{\partial\nu_A}-\alpha\frac{\partial\varphi_t^k}{\partial\nu_A}+\operatorname{div}_\Gamma\left(A_\Gamma\nabla_\Gamma\psi^k\right)-\\ r\left|\psi_t^k\right|^{m-2}\psi_t^k\left(x,t\right)+\left|v^k\right|^{p-2}v^k\end{bmatrix} & x\in\Gamma_1,t>0,\\ \varphi^k\left(x,t\right)=\psi^k\left(x,t\right) & \Gamma\in\Omega.t>0,\\ \left(\varphi^k\left(x,0\right),\psi^k\left(x,0\right)\right)=\left(u_0^k\left(x\right),v_0^k\left(x\right)\right),\left(\varphi_t^k\left(x,0\right),\psi_t^k\left(x,0\right)\right)=\left(u_1^k\left(x\right),v_1^k\left(x\right)\right) & x\in\Omega.t>0,\end{cases},\tag{2.1.42}$$

Comme les hypothèses du lemme (2.1.2) sont vérifiées, on peut trouver une suite de solutions uniques $(\varphi_k, \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ du problème (2.1.42). Notre but maintenant est de montrer que $(\varphi^k, \psi^k, \varphi_t^k, \psi_t^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace

$$\begin{gathered} Y_T = \{(\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t) : (\varphi, \psi) \in C\left([0,T], H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)\right), \\ (\varphi_t,\psi_t) \in L^2(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)), \\ \psi_t \in L^m\left((0,T) \times \Gamma_1\right)\}, \end{gathered}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t)\|^2_{Y_T} &= \max_{0\le t\le T} \left[\|\varphi_t\|_2^2 + \|\varphi_t\|^2_{2,\Gamma_1} + \|\nabla_g \varphi\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma \psi\right\|^2_{2,\Gamma_1}\right] + \\ &\quad \|\psi_t\|^2_{L^m((0,T)\times\Gamma_1)} + \alpha \int_0^T \|\nabla_g \varphi_t(s)\|_2^2 \, ds. \end{aligned}$$

Pour cela, on note

$$\begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v^k - v^{k'} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^k - \varphi^{k'} \\ \psi^k - \psi^{k'} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que V vérifie

$$\begin{cases} V^1_{tt} - \operatorname{div}(A\nabla V^1) - \alpha \operatorname{div}(A\nabla V^1_t) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ V(x,t) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ V^2_{tt}(x,t) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial V^1}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} - \alpha \frac{\partial V^1_t}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} + \operatorname{div}_\Gamma\left(A\nabla_\Gamma V^2\right) + \left|v^k\right|^{p-2} v^k - \left|v^{k'}\right|^{p-2} v^{k'} \\ -r\left(\left|\psi^k_t\right|^{m-2} \psi^k_t(x,t) - \left|\psi^{k'}_t\right|^{m-2} \psi^{k'}_t(x,t)\right) \end{bmatrix} & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ \binom{V^1(x,0)}{V^2(x,0)} = \binom{\varphi^k_0 - \varphi^{k'}_0}{\psi^k_0 - \psi^{k'}_0}, \binom{V^1_t(x,0)}{V^2_t(x,0)} = \binom{\varphi^k_1 - \varphi^{k'}_1}{\psi^k_1 - \psi^{k'}_1}, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1.43}$$

En multipliant scalairement les premières équations différentielles de (2.1.43) par V^1_t, et en intégrant par parties sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega V^1_{tt} V^1_t dx - \int_\Omega A\nabla V^1 \nabla V^1_t dx - \alpha \int_\Omega A\nabla V^1_t \nabla V^1_t dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial V^1}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} V^1_t d\sigma - \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial V^1_t}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} V^1_t d\sigma = 0, \tag{2.1.44}$$

En multipliant scalairement les secondes équations différentielles de (2.1.43) par V^2_t, et en intégrant par parties sur Γ_1, on trouve

$$\int_{\Gamma_1} V^2_{tt} V^2_t d\sigma + r \int_{\Gamma_1} \left(\left|\psi^k_t\right|^{m-2} \psi^k_t - \left|\psi^{k'}_t\right|^{m-2} \psi^{k'}_t\right) \left(\psi^k_t - \psi^{k'}_t\right) d\sigma$$

$$-\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma V^2 \nabla_\Gamma V_t^2 d\sigma = \int_{\Gamma_1} \left(\left|v^k\right|^{p-2} v^k - \left|v^{k'}\right|^{p-2} v^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma. \tag{2.1.45}$$

En sommant les équations (2.1.44) et (2.1.45) on obtient

$$\int_\Omega V_{tt}^1 V_t^1 dx + \int_\Omega A\nabla V^1 \nabla V_t^1 dx + \alpha \int_\Omega A\nabla V_t^1 \nabla V_t^1 dx + \int_{\Gamma_1} V_{tt}^1 V_t^1 d\sigma +$$

$$r \int_{\Gamma_1} \left(\left|\psi_t^k\right|^{m-2} \psi_t^k - \left|\psi_t^{k'}\right|^{m-2} \psi_t^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma$$

$$\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma V^2 \ \nabla_\Gamma V_t^2 d\sigma = \int_{\Gamma_1} \left(\left|v^k\right|^{p-2} v^k - \left|v^{k'}\right|^{p-2} v^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma.$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left(\left\|V_t^1\right\|_2^2 + \left\|\nabla_g V^1\right\|_2^2 + \left\|V_t^1\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma V^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right) + \alpha \left\|\nabla_g V_t^1\right\|_2^2 ds +$$

$$r \int_{\Gamma_1} \left(\left|\psi_t^k\right|^{m-2} \psi_t^k - \left|\psi_t^{k'}\right|^{m-2} \psi_t^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma$$

$$= \int_{\Gamma_1} \left(\left|v^k\right|^{p-2} v^k - \left|v^{k'}\right|^{p-2} v^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma.$$

En intégrant entre 0 et t, on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\left\|V_t^1\right\|_2^2 + \left\|\nabla_g V^1\right\|_2^2 + \left\|V_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma V^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right) + \alpha \int_0^t \left\|\nabla_g V_t^1(s)\right\|_2^2 ds +$$

$$r \int_{\Gamma_1} \left(\left|\psi_t^k\right|^{m-2} \psi_t^k - \left|\psi_t^{k'}\right|^{m-2} \psi_t^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left\|V_t^1(0)\right\|_2^2 + \left\|\nabla_g V^1(0)\right\|_2^2 + \left\|V_t^2(0)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma V^2(0)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right) +$$

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(\left|v^k\right|^{p-2} v^k - \left|v^{k'}\right|^{p-2} v^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma d\tau, \forall t \in (0,T). \tag{2.1.46}$$

En utilisant l'inégalité algébrique (2.1.40), on trouve

$$\left(\left|\psi_t^k\right|^{m-2} \psi_t^k - \left|\psi_t^{k'}\right|^{m-2} \psi_t^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) \geq c_1 \left|\psi_t^k - \psi_t^{k'}\right|^m.$$

En substituant cette dernière inégalité dans (2.1.46), on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\left\|V_t^1\right\|_2^2 + \left\|\nabla_g V^1\right\|_2^2 + \left\|V_t^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma V^2\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right) + \alpha \int_0^t \left\|\nabla_g V_t^1(s)\right\|_2^2 ds +$$

$$c_1 \left\|V_t^2(t)\right\|_{m,\Gamma_1}^m \leq \frac{1}{2} \left(\left\|V_t^1(0)\right\|_2^2 + \left\|\nabla_g V^1(0)\right\|_2^2 + \left\|V_t^2(0)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma V^2(0)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right) +$$

$$+\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(\left| v^k \right|^{p-2} v^k - \left| v^{k'} \right|^{p-2} v^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma d\tau, \forall t \in (0,T).$$

Afin de trouver une majoration du terme

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(\left| v^k \right|^{p-2} v^k - \left| v^{k'} \right|^{p-2} v^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma d\tau, \forall t \in (0,T),$$

dans l'inégalité précédente, on utilise un résultat de Georgiev et Todorova [17] (dans le cadre d'un problème à coefficients constante)

L'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}= 1$, nous donne

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(\left| v^k \right|^{p-2} v^k - \left| v^{k'} \right|^{p-2} v^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma d\tau \leq$$

$$C \left\| v^k - v^{k'} \right\|_{(2n/n-2),\Gamma_1} \left\| \psi^k - \psi^{k'} \right\|_{2,\Gamma_1} \left(\left\| v^k \right\|_{n(p-2),\Gamma_1}^{p-2} - \left\| v^{k'} \right\|_{n(p-2),\Gamma_1}^{p-2} \right). \tag{2.1.47}$$

Ensuit l'injection de $H^1(\Gamma_1) \hookrightarrow L_{2n(n-2),\Gamma_1}$ donne

$$\left\| v^k - v^{k'} \right\|_{(2n/n-2),\Gamma_1} \leq C \left\| \nabla_g \left(v^k - v^{k'} \right) \right\|_{2,\Gamma_1} \leq C_1 \left\| U \right\|_2 , \tag{2.1.48}$$

et

$$\left\| v^k \right\|_{n(p-2),\Gamma_1}^{p-2} \leq C \left\| U \right\|_2^{p-2} , \tag{2.1.49}$$

donc (2.1.47), il vient

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(\left| v^k \right|^{p-2} v^k - \left| v^{k'} \right|^{p-2} v^{k'} \right) \left(\psi_t^k - \psi_t^{k'} \right) d\sigma d\tau \leq$$

$$C \int_0^t \left(\left\| \nabla_g v^k \right\|_2^{p-2} + \left\| \nabla_g v^{k'} \right\|_2^{p-2} \right) \left\| V_t \right\|_2 \left\| \nabla U \right\|_2 d\tau.$$

En substituant (2.1.51) et (2.1.48) dans l'inégalité (2.1.47), on trouve

$$\frac{1}{2} \left(\left\| V_t^1 \right\|_2^2 + \left\| \nabla_g V^1 \right\|_2^2 + \left\| V_t^2 \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\| (\nabla_g)_\Gamma V^2 \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right) + \alpha \int_0^t \left\| \nabla_g V_t^1 (s) \right\|_2^2 ds +$$

$$c_1 \left\| V_t^2 (t) \right\|_{m,\Gamma_1}^m \leq \frac{1}{2} \left(\left\| V_t^1 (0) \right\|_2^2 + \left\| \nabla_g V^1 (0) \right\|_2^2 + \left\| V_t^2 (0) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\| (\nabla_g)_\Gamma V^2 (0) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right) +$$

$$+C \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left\| U \right\|_{Y_T} \left\| V \right\|_{Y_T} d\sigma dt, \forall t \in (0,T).$$

Ainsi, en appliquant les inégalités de Young et de Gronwall, il existe C ne dépendant que de Ω et p telle que

$$\frac{1}{2} \left(\left\| V_t^1 \right\|_2^2 + \left\| \nabla_g V^1 \right\|_2^2 + \left\| V_t^2 \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\| (\nabla_g)_\Gamma V^2 \right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right) + \alpha \int_0^t \left\| \nabla_g V^1 \right\|_2^2 ds + c_1 \left\| V_t^2 (t) \right\|_{m,\Gamma_1}^m$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left\|V_t^1(0)\right\|_2^2+\left\|\nabla_g V^1(0)\right\|_2^2+\left\|V_t^2(0)\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\left\|(\nabla_g)_\Gamma V^2(0)\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right)+C\int_0^t\left\|\psi_t^k-\psi_t^{k'}\right\|_2 ds$$

$$\left\|\left(V^1,V^2\right)\right\|_{Y_T}\leq C\left(\left\|V_t^1(0)\right\|_2^2+\left\|\nabla_g V^1(0)\right\|_2^2+\left\|V_t^2(0)\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\left\|(\nabla_g)_\Gamma V^2(0)\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right)+CT\left\|U\right\|_{Y_T}.$$

On remarque qu'à partir des notations utilisées, on a

$$\begin{pmatrix} V^1(0)\\ V^2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_0^k-\varphi_0^{k'}\\ \psi_0^k-\psi_0^{k'}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} V_t^1(0)\\ V_t^2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1^k-\varphi_1^{k'}\\ \psi_1^k-\psi_1^{k'}\end{pmatrix},\text{et } U=v^k-v^{k'}.$$

Ainsi, puisque $\left(\varphi_0^k,\psi_0^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)$, $\left(\varphi_1^k,\psi_1^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_1)$ et $\left(\varphi^k,\psi^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $C\left([0,T],H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)\right)\cap C^1\left([0,T],L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_1)\right)$ (donc dans Y_T aussi); on déduit que $\left(\varphi^k,\psi^k,\varphi_t^k,\psi_t^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y_T, c'est à dire que $\left(\varphi^k,\psi^k,\varphi_t^k,\psi_t^k\right)$ converge vers $(\varphi,\psi,\varphi_t,\psi_t)\in Y_T$.

La solution faible du problème (2.1.5)

Maintenant avec la même démarche que celle utilisée par Georgiev et Todorova dans [17], on montre que cette limite est une solution faible du problème (2.1.5).

Pour tout $(\kappa^1,\kappa^2)\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1),\kappa^2\in L^m(\Gamma_1)$, l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_t,\kappa^1\right)_\Omega+\frac{d}{dt}\left(\psi_t,\kappa^2\right)_\Gamma+\left(A\nabla\varphi,\nabla\kappa^1\right)_\Omega+\alpha\left(A\nabla\varphi_t,\nabla\kappa^1\right)_\Omega+\left(A\nabla_\Gamma\psi,\nabla_\Gamma\kappa^2\right)_\Gamma$$
$$-r\left(\left|\psi_t\right|^{m-2}\psi_t,\kappa^2\right)_\Gamma=\left(|v|^{p-2}v,\kappa^2\right)_\Gamma, \tag{2.1.50}$$

est vérifiée pour tous $t\in[0,T]$.

En multipliant l'équation

$$\varphi_{tt}^k-\operatorname{div}A\nabla\varphi^k-\alpha\operatorname{div}A\nabla\varphi^k=0,$$

par $\kappa^1\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, et en intégrant par parties sur Ω, on obtient

$$\left(\varphi_{tt}^k,\kappa^1\right)_\Omega+\left(A\nabla\varphi^k,\nabla\kappa^1\right)_\Omega+\alpha\left(A\nabla\varphi^k,\nabla\kappa^1\right)_\Omega-\left(\frac{\partial\varphi^k}{\partial\nu_{\mathcal{A}}},\kappa^1\right)_\Gamma-\left(\frac{\partial\varphi_t^k}{\partial\nu_{\mathcal{A}}},\kappa^1\right)_\Gamma=0, \tag{2.1.51}$$

et en multipliant l'équation

$$\psi_{tt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}-\alpha\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}+\operatorname{div}_\Gamma\left(A_\Gamma\nabla\psi_\Gamma\right)-r\left|\psi_t\right|^{m-2}\psi_t+|v|^{p-2}v,$$

par $\kappa^2 \in H^1(\Gamma_1)$, $\kappa^2 \in L^m(\Gamma_1)$, et en intégrant par parties sur Γ_1, on obtient

$$\left(\psi_{tt},\kappa^2\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}},\kappa^1\right)-\alpha\left(\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu_{\mathcal{A}}},\kappa^1\right)+\left(A\nabla_\Gamma\psi,\kappa^2\right)-r\left(\left|\psi_t\right|^{m-2}\psi_t,\kappa^2\right)=\left(\left|v\right|^{p-2}v,\kappa^2\right). \tag{2.1.52}$$

En sommant l'égalité (2.1.51) et (2.1.52) on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_t,\kappa^1\right)_\Omega+\frac{d}{dt}\left(\psi_t,\kappa^2\right)_\Gamma+\left(A\nabla\varphi^k,\nabla\kappa^1\right)_\Omega+\alpha\left(A\nabla\varphi_t^k,\nabla\kappa^1\right)_\Omega+\left(A\nabla_\Gamma^k\psi,\nabla_\Gamma\kappa^2\right)_\Gamma$$
$$-r\left(\left|\psi_t^k\right|^{m-2}\psi_t^k,\kappa^2\right)_\Gamma=\left(\left|v^k\right|^{p-2}v^k,\kappa^2\right)_\Gamma. \tag{2.1.53}$$

En faisant tendre $(k^1,k^2)\to\infty$, on voit que

$$\begin{aligned}
\left(A\nabla\varphi^k,\nabla\kappa^1\right)_\Omega &\to \left(A\nabla\varphi,\nabla\kappa^1\right)_\Omega,\\
\alpha\left(A\nabla\varphi_t^k,\nabla\kappa^1\right)_\Omega &\to \alpha\left(A\nabla\varphi_t,\nabla\kappa^1\right)_\Omega,\\
r\left(\left|\psi_t^k\right|^{m-2}\psi_t^k,\kappa^2\right)_\Gamma &\to r\left(\left|\psi_t\right|^{m-2}\psi_t,\kappa^2\right)_\Gamma,\\
\left(\left|v^k\right|^{p-2}v^k,\kappa^2\right)_\Gamma &\to \left(\left|v\right|^{p-2}v,\kappa^2\right)_\Gamma,\\
\left(A\nabla_\Gamma\psi^k,\nabla_\Gamma\kappa^2\right)_\Gamma &\to \left(A\nabla_\Gamma\psi,\nabla_\Gamma\kappa^2\right)_\Gamma,
\end{aligned}$$

dans $C([0,T])$.

Ensuite, l'égalité (2.1.53) montre que $\lim_{k\to\infty}\left(\left(\varphi_t^k,\psi_t^k\right),\left(\kappa^1,\kappa^2\right)\right)=\left(\left(\varphi_t,\psi_t\right),\left(\kappa^1,\kappa^2\right)\right)$ est une fonction absolument continue, donc chaque terme dans (2.1.50) vrai.

De la même manière, à partir de l'identité de l'énergie (2.1.4) pour (φ^k,ψ^k), on démontre que l'identité de l'énergie pour (φ,ψ) est vérifiée.

Démonstration de l'unicité de la solution du problème (1.2.1)

Pour montrer l'unicité de la solution de (1.2.1) on prend U, $\bar{U}$ dans $C([0,T];H)$ et soient V, $\bar{V}$ les solutions correspondantes de (1.2.1), avec $X=\binom{V^1}{V^2}$ et $\bar{X}=\binom{\bar{V}^1}{\bar{V}^2}$

En posant

$$W=X-\bar{X},$$

dans l'équation (1.2.1), on obtient

$$\frac{1}{2}\left[\left\|\left(V_t^1-\bar{V}_t^1\right)\right\|_2^2+\left\|\nabla_g\left(V^1-\bar{V}^1\right)\right\|_2^2+\left\|\left(V_t^2-\bar{V}_t^2\right)\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\left\|\nabla_g\left(V^2-\bar{V}^2\right)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right]$$
$$+\int_0^t\left(\left|V_t^2\right|^{p-2}V_t-\left|\bar{V}_t^2\right|^{p-2}\bar{V}_t^2\right)\left(V^2-\bar{V}^2\right)d\sigma dt=\int_0^t\left(\left|U\right|^{p-2}U-\left|\bar{U}\right|^{p-2}\bar{U}\right)\left(V^2-\bar{V}^2\right)d\sigma dt,$$

Si $U=\bar{U}$, alors cette identité implique $W=0$ et la solution est unique.

Ceci achève la démonstration du lemme 2.1.1. ■

2.1.5 la démonstration de Théorème 2.1.1

Pour démontrer le Théorème 2.1.1, on utilise le Théorème du point fixe.

Pour $T>0$, on définit le sous-ensemble convexe fermé X_T de Y_T par

$$X_T=\left\{(\varphi,\psi,\varphi_t,\psi_t)\in Y_T \text{ telles que } (\varphi(0),\psi(0))=(u_0(0),v_0(0)),(\varphi_t(0),\psi_t(0))=(u_1,v_1)\right\}.$$

On note par

$$B_R(X_T)=\left\{x=(\varphi,\psi)\in X_T;\|(\varphi,\psi)\|_{Y_T}\leq R\right\}.$$

D'autre part, le Lemme 2.1.1 implique que pour tout $y=(u,v)\in X_T$, on peut définir l'unique solution, correspondante à $x=(\varphi,\psi)$, de (2.1.5) par $x=(\varphi,\psi)=\Phi(y)$. Notre objectif maintenant est de montrer que pour un $T>0$ convenable, Φ est une application contractante.

1) Montrons que $\Phi(B_R(X_T))\subset B_R(X_T)$

Soient $y\in B_R(X_T)$ et $x=\Phi(y)$. Alors pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$\begin{gathered}\left(\|\varphi_t\|_2^2+\|\nabla_g\varphi\|_2^2+\|\psi_t\|_{2,\Gamma_1}^2+\left\|(\nabla_g\psi)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right)+2\alpha\int_0^t\|\nabla_g\varphi(s)\|_2^2\,ds\\ +2\int_0^t\|\psi_t(s)\|_{m,\Gamma_1}^m\,ds=\|u_1\|_2^2+\|u_0\|_2^2+\|v_1\|_{2,\Gamma_1}^2+\left\|(\nabla_g v_0)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2\\ +2\int_0^t\int_{\Gamma_1}|v(\tau)|^{p-2}v(\tau)\psi_t(\tau)\,dxd\tau.\end{gathered}\tag{2.1.54}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on peut majorer le dernier terme du membre de droite de l'inégalité (2.1.54) de la manière suivante

$$\int_0^t\int_{\Gamma_1}|v(\tau)|^{p-2}v(\tau)\psi_t(\tau)\,dxd\tau\leq\int_0^t\|v(\tau)\|_{2N/(N-2),\Gamma_1}^{p-2}\|\psi_t(\tau)\|_{2N/(3N-Np+2(p-1)),\Gamma_1}\,d\tau,$$

et puisque $p\leq\frac{2N}{N-2}$, on a

$$\frac{2N}{(3N-Np+2(p-1))}\leq\frac{2N}{N-2}.$$

Donc, d'après les inégalités de Young et de Sobolev, on obtient $\forall\delta > 0, \exists C(\delta) > 0$, telle que

$$\forall t \in (0,T), \int_0^t \int_{\Gamma_1} |v(\tau)|^{p-2} v(\tau)\,\psi_t(\tau)\,d\tau \leq C(\delta)\,tR^{2(p-1)} + \delta \int_0^t \|\nabla_g \varphi_t(\tau)\|_2^2\,d\tau. \quad (2.1.55)$$

En substituant l'équation (2.1.55) dans l'inégalité (2.1.54) on obtient

$$\left(\|\varphi_t\|_2^2 + \|\nabla_g\varphi\|_2^2 + \|\psi_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|(\nabla_g\psi)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right) + 2\alpha \int_0^t \|\nabla_g\varphi(s)\|_2^2\,ds$$
$$+2\int_0^t \|\psi_t(s)\|_{m,\Gamma_1}^m\,ds \leq \frac{1}{2}R^2 + C(\delta)\,tR^{2(p-1)} + \delta \int_0^t \|\nabla_g\varphi_t(\tau)\|_2^2\,d\tau.$$

Maintenant, en choisissant δ assez petit afin de majorer le dernier terme du membre de gauche de l'inégalité (2.1.54) on trouve

$$\|x\|_{Y_T}^2 \leq \frac{1}{2}R^2 + CTR^{2(p-1)}.$$

Ainsi, pour T suffisamment petit, on a $\|x\|_{Y_T} \leq R$ et cela montre que

$$x \in B_R(X_T).$$

2) Montrons que Φ est une contraction

Pour cela, on pose

$$U = v - \bar{v}$$

et

$$\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi - \bar{\varphi} \\ \psi - \bar{\psi} \end{pmatrix},$$

où

$$(\varphi,\psi) = \Phi(u,v),$$

et

$$\left(\bar{\varphi},\bar{\psi}\right) = \Phi(\bar{u},\bar{v}),$$

sont les solutions du problème (2.1.5) correspondantes respectivement à (u,v) et (φ,ψ). Par conséquent, on a

$$\begin{cases} V_{tt}^1 - \operatorname{div}(A\nabla V^1) - \alpha \operatorname{div}(A\nabla V_t^1) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ V(x,t) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ V_{tt}^2(x,t) = -\frac{\partial V^1}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} - \alpha\frac{\partial V_t^1}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} + \operatorname{div}_\Gamma(A\nabla_\Gamma V^2) - & . \\ r\left(|\psi_t|^{m-2}\psi_t(x,t) - \left|\bar{\psi}_t\right|^{m-2}\bar{\psi}_t(x,t)\right) + |v|^{p-2}v - |\bar{v}|^{p-2}\bar{v}, & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ \binom{V^1(x,0)}{V^2(x,0)} = \binom{0}{0}, \binom{V_t^1(x,0)}{V_t^2(x,0)} = \binom{0}{0}, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1.56)$$

En multipliant la première équation de (2.1.56) par V_t^1 et en intégrant sur Ω, on trouve

$$\int_\Omega V_{tt}^1 V_t^1 dx + \int_\Omega A\ \nabla V^1 \nabla V_t^1 dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial V^1}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} V_t^1 d\sigma + \alpha \int_\Omega A\ \nabla V_t^1 \nabla V_t^1 dx - \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial V_t^1}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} V_t^1 d\sigma = 0. \tag{2.1.57}$$

De même en multipliant la troisième équation de (2.1.56) par V_t^2 et en intégrant sur Γ_1 il vient

$$\int_{\Gamma_1} V_{tt}^2 V_t^2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial V^1}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} V_t^1 d\sigma + \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial V_t^1}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} V_t^1 V_t^1 d\sigma + \int_{\Gamma_1} A \nabla_\Gamma V^2 V_t^2 d\sigma$$

$$+r \int_{\Gamma_1} \left(|\psi_t|^{m-2} \psi_t(x,t) - \left|\bar{\psi}_t\right|^{m-2} \bar{\psi}_t(x,t) \right) V_t^2 d\sigma = \int_{\Gamma_1} |v|^{p-2} v - |\bar{v}|^{p-2} \bar{v}] d\sigma, \tag{2.1.58}$$

La addition des équations (2.1.57) et (2.1.58) nous donne

$$\int_\Omega V_{tt}^1 V_t^1 dx + \int_\Omega A \nabla V^1 \nabla V_t^1 dx + \alpha \int_\Omega A \nabla V_t^1 \nabla V_t^1 dx + \int_{\Gamma_1} [V_{tt}^2 + A \nabla_\Gamma V^2$$

$$+r \left(|\psi_t|^{m-2} \psi_t(x,t) - \left|\bar{\psi}_t\right|^{m-2} \bar{\psi}_t(x,t) \right) + |v|^{p-2} v - |\bar{v}|^{p-2} \bar{v}] d\sigma.$$

En intégrant sur $(0,T)$, on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\left\|V_t^1(t)\right\|_2^2 + \left\|\nabla_g V^1(t)\right\|_2^2 + \left\|V_t^2(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma V^2(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right)$$

$$+r \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(|\psi_t|^{m-2} \psi_t - \left|\bar{\psi}_t\right|^{m-2} \bar{\psi}_t \right) \left(\psi_t - \bar{\psi}_t \right) d\sigma ds$$

$$\alpha \int_0^t \left\|\nabla_g V_t^1(s)\right\|_2^2 ds = \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(|v|^{p-2} v - |\bar{v}|^{p-2} \bar{v} \right) \left(\psi_t - \bar{\psi}_t \right) d\tau ds, \forall t \in (0,T).$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité algébrique (2.1.40), on trouve

$$\frac{1}{2} \left(\left\|V_t^1(t)\right\|_2^2 + \left\|\nabla_g V^1(t)\right\|_2^2 + \left\|V_t^2(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|\left(\nabla_g V^2(t)\right)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \right) + \alpha \int_0^t \left\|\nabla_g V_t^1(s)\right\|_2^2 ds$$

$$+c_1 \int_0^t \left\|V_t^2(s)\right\|_{m,\Gamma_1}^m \leq \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(|v|^{p-2} v - |\bar{v}|^{p-2} \bar{v} \right) \left(\psi_t - \bar{\psi}_t \right) dx d\tau, \forall t \in (0,T). \tag{2.1.59}$$

Pour estimer le terme du membre de droite de l'inégalité (2.1.59), on note que

$$I(t) := \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(|v|^{p-2} v - |\bar{v}|^{p-2} \bar{v} \right) \left(\psi_t - \bar{\psi}_t \right) dx d\tau.$$

En utilisant l'inégalité algébrique

$$\left||v|^{p-2}v-|\bar{v}|^{p-2}\bar{v}\right|\leq c_p\,|v-\bar{v}|\left(|v|^{p-2}-|\bar{v}|^{p-2}\right),$$

qui est vraie pour toute $v,\bar{v}\in\mathbb{R}$, où c_p est une constante positive dépendante uniquement de p , on trouve que

$$I\left(t\right)\leq c_p\int_0^T\int_{\Gamma_1}|v-\bar{v}|\left(|v|^{p-2}-|\bar{v}|^{p-2}\right)\left|V_t^2\right|dxd\tau.$$

D'après le même argument que celui utilisé par Vitillaro dans [45, eq77], en choisissant $p<r_0<\bar{q}$, avec

$$\frac{\bar{q}}{\bar{q}-p+1}<\frac{r_0}{r_0-p+1}<m.$$

Soit $s>1$ tel que

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{r_0}+\frac{1}{s}=1.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$I\left(t\right)\leq c_p\int_0^T\left(\|v-\bar{v}\|_{r_0,\Gamma_1}\left\|V_t^2\right\|_{m,\Gamma_1}\right)\cdot\left(\int_{\Gamma_1}\left(|v|^{p-2}-|\bar{v}|^{p-2}\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{2.1.60}$$

Par conséquent, l'inégalité algébrique (2.1.24) donne

$$\left(\int_{\Gamma_1}\left(|v|^{p-2}-|\bar{v}|^{p-2}\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}\leq 2^{s-1}\left(\|v\|_{(p-2)s,\Gamma_1}^{(p-2)s}+\|\bar{v}\|_{(p-2)s,\Gamma_1}^{(p-2)s}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Mais comme

$$(A+B)^\beta\leq A^\beta+B^\beta,\ \forall A,B\geq 0 \text{ et } 0<\beta<1,$$

on a

$$\left(\int_{\Gamma_1}\left(|v|^{p-2}-|\bar{v}|^{p-2}\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}\leq 2^{s-1}\left(\|v\|_{(p-2)s,\Gamma_1}^{(p-2)}+\|\bar{v}\|_{(p-2)s,\Gamma_1}^{(p-2)}\right). \tag{2.1.61}$$

Ensuite, en substituant l'inégalité (2.1.61) dans (2.1.60), alors on obtient

$$I\left(t\right)\leq c_p\int_0^T\left(\|v-\bar{v}\|_{r_0,\Gamma_1}\left\|V_t^2\right\|_{m,\Gamma_1}\right)\cdot\left(2^{s-1}\left(\|v\|_{(p-2)s,\Gamma_1}^{(p-2)}+\|\bar{v}\|_{(p-2)s,\Gamma_1}^{(p-2)}\right)\right).$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Sobolev

$$\left\|V_t^2\right\|_{m,\Gamma_1}\leq\left\|\nabla_g V_t^1\right\|_2,$$

on obtient l'estimation suivante

$$I(t) \leq c_2 R^{p-2} \int_0^T \|v-\bar{v}\|_{r_0,\Gamma_1} \left\|\nabla_g V_t^1\right\|_2^2 ds.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder par rapport au t, on trouve

$$\begin{aligned}I(t) &\leq c_2 R^{p-2} T^{\frac{1}{2}} \|v-\bar{v}\|_{L^\infty([0,T],L^{r_0}(\Gamma_1))} \left(\int_0^T \left\|\nabla_g V_t^1\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c_2}{2} R^{p-2} T^{\frac{1}{2}} \left[\|v-\bar{v}\|^2_{L^\infty([0,T],L^{r_0}(\Gamma_1))} + \int_0^T \left\|\nabla_g V_t^1\right\|_2^2\right]. \qquad (2.1.62)\end{aligned}$$

Enfin, en choisissant T suffisamment petit afin d'avoir

$$\alpha - \frac{c_2}{2} R^{p-2} T^{\frac{1}{2}} > 0,$$

et en injectant l'estimation (2.1.62) dans l'estimation (2.1.59), on conclut que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\left\|V_t^1(t)\right\|_2^2 + \left\|\nabla_g V^1(t)\right\|_2^2 + \left\|V_t^2(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|\left(\nabla_g V^2(t)\right)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right) + \alpha \int_0^t \left\|\nabla_g V_t^1(s)\right\|_2^2 ds \\ &\qquad + c_1 \int_0^t \left\|V_t^2(s)\right\|_{m,\Gamma_1}^m \leq \frac{c_2}{2} R^{p-2} T^{\frac{1}{2}} \|v-\bar{v}\|^2_{L^\infty([0,T],L^{r_0}(\Gamma_1))}. \qquad (2.1.63)\end{aligned}$$

Comme $r_0 < \bar{q}$, en utilisant l'injection

$$L^\infty\left([0,T], H^1_{\Gamma_0}(\Gamma_1)\right) \hookrightarrow L^\infty\left([0,T], L^{r_0}(\Gamma_1)\right),$$

on obtient à partir de (2.1.63)

$$\|V\|_{Y_T}^2 \leq c_3 R^{p-2} T^{\frac{1}{2}} \|U\|_{Y_T}^2. \qquad (2.1.64)$$

En choisissant T assez petit afin d'avoir

$$c_3 R^{p-2} T^{\frac{1}{2}} < 1.$$

l'estimation (2.1.64) montre que Φ est une application contractante. Par conséquent, le Théorème de l'application contractante garantit l'existence et l'unicité d'un (φ, ψ) vérifiant

$$(\varphi, \psi) = \Phi(\varphi, \psi).$$

La démonstration du Théorème 2.1.1 est maintenant achevée.

2.2 Existence globale

Définition 2.2.1 *Soient* $2 \leq p \leq \bar{q}$, *et* $\max\left(2, \frac{\bar{q}}{\bar{q}+1-p}\right) \leq m \leq \bar{q}$. *Soient* $(u_0, v_0) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)$ *et* $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$, *on note par* (u, v) *la solution de (1.2.1) et on définit*

$$T_{\max} = \sup\left\{T > 0,\ (u, v) = (u(t), v(t)) \text{ existe dans } [0, T]\right\}.$$

Comme la solution $(u, v) \in Y_T$ *(la solution est "assez régulière "), d'après la définition de la norme proposée par (2.1.4), on rappelle que si* $T_{\max} < \infty$, *on aura*

$$\lim_{t \longrightarrow T_{\max}} \left[\|\nabla_g u\|_2 + \|u_t\|_2 + \|v_t\|_{2,\Gamma_1} + \left\|(\nabla_g)_\Gamma v\right\|_2\right] = +\infty.$$

Si $T_{\max} < \infty$, *on dit que la solution de (1.2.1) explose et que* $T_{\max}$ *est le temps d'explosion.*

Si $T_{\max} = \infty$, *on dit que la solution de (1.2.1) est globale.*

Afin d'étudier l'existence globale de la solution de (1.2.1), et d'après [19], on définit les fonctions

$$I,\ J:\ H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R},$$

par

$$I(u, v) = \|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma u(t)\right\|_2^2 - \|v_t(t)\|_{p,\Gamma_1}^p,$$
$$J(u, v) = \frac{1}{2}\|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_2^2 - \frac{1}{p}\|v(t)\|_{p,\Gamma_1}^p.$$

Pour une fonctionnelle donnée $(u, v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)$, quand nous allons utiliser l'évaluation de la fonction ci-dessus à un moment $0 \leq t \leq T_{\max}$, pour des raisons de simplicité, on écrit

$$I(t) = \|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_2^2 - \|v_t(t)\|_{p,\Gamma_1}^p, \tag{2.2.1}$$

$$J(t) = \frac{1}{2}\|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_2^2 - \frac{1}{p}\|v(t)\|_{p,\Gamma_1}^p. \tag{2.2.2}$$

L'énergie associée à la solution (u, v) de (1.2.1) est donnée par

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_g u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2}\left\|(\nabla_g)_\Gamma v\right\|_2^2 - \frac{1}{p}\|v\|_{p,\Gamma_1}^p = -r\|v_t\|_{m,\Gamma_1}^m - \alpha\|\nabla_g u_t\|_2^2$$

$$E(t) = J(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|_{2,\Gamma_1}^2, \forall 0 \le t \le T_{\max}. \tag{2.2.3}$$

En multipliant la première équation de (1.2.1) par u_t et la troisième équation de (1.2.1) par v_t,, en sommant et en intégrant sur $(0,T)\times\Omega$, on obtient l'identité de l'énergie suivante

$$E(t) - E(s) = -\int_0^t \|h_t(\tau)\|_*^2 \, d\tau, \forall 0 \le s \le t \le T_{\max}, \tag{2.2.4}$$

où

$$\|h\|_*^2 = \alpha \|v\|_{q,\Gamma}^2 + r\|u\|_2^2. \tag{2.2.5}$$

Donc, la fonction E est une fonction décroissante pour la variable t. on définit d par

$$d = \inf_{(u,v)\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1(\Gamma_1)/\{0\}} \max J(\lambda(u,v)). \tag{2.2.6}$$

On peut maintenant définir ce qu'on appelle la " variété de Nehari" de la manière suivante

variété de Nehari

$$\mathcal{N} = \left\{(u,v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1) \setminus \{0,0\}; I(u,v) = (0,0)\right\}.$$

$\mathcal{N}$ se décompose en les deux sous ensembles, non bornés, suivants

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$$

où

$$\mathcal{N}^+ = \left\{(u,v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1); I((u,v)) > 0\right\} \cup \{0\},$$

et

$$\mathcal{N}^- = \left\{(u,v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1); I((u,v)) < 0\right\}.$$

Ensemble stable -Ensemble instable

L'ensemble stable $\mathcal{W}$ et l'ensemble instable $\mathcal{U}$ sont définis respectivement par

$$\mathcal{W} = \left\{(u,v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1); J((u,v)) \le d\right\} \cap \mathcal{N}^+$$

et

$$\mathcal{U} = \left\{(u,v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1); J((u,v)) \le d\right\} \cap \mathcal{N}^-$$

Il est facile de voir que la constante d est caractérisée par (voir [15] dans le cadre d'un problème à coefficients constants)

$$d = \min_{u \in N} J\left((u,v)\right). \tag{2.2.7}$$

Comme il a été remarqué par Gazzola et Squassina dans [15] pour un problème à coefficients constants), cette caractérisation de d montre que

$$\beta = dist\left(0, N\right) = \min_{u \in N} \left\|\nabla_g u\left(t\right)\right\|_2 = \sqrt{\frac{2dp}{p-2}} > 0. \tag{2.2.8}$$

Dans le Lemme 2.2.1, on démontre que si les données initiales (u_0, v_0) sont dans l'ensemble $\mathcal{N}^+$ et si l'énergie initiale $E\left(0\right)$ n'est pas grande (on va préciser exactement à quel point l'énergie initiale peut être grande), alors $\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right)$ appartient à $\mathcal{N}^+$, pour tous $t \in [0, T)$, où $\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right)$ est la solution de (1.2.1) obtenue d'après le Théorème 2.1.1.

A cet effet, on note par C_* la meilleure constante dans l'injection de Poincaré-Sobolev $H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right) \hookrightarrow L^p\left(\Gamma_1\right)$ définie par

$$C_*^{-1} = \inf\left\{\left\|\nabla_g u\left(t\right)\right\|_2 : (u,v) \in H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right) \times H^1\left(\Gamma_1\right), \left\|v\left(t\right)\right\|_{p,\Gamma_1} = 1\right\}. \tag{2.2.9}$$

Exposont critique

Notons l'exposant critique de Sobolev par

$$\bar{p} = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{si } N \geq 3 \\ +\infty, & \text{si } N = 1, 2. \end{cases}.$$

Notons, que si $p < \bar{p}$ l'injection précédente est compacte et la borne inférieure dans (2.2.9) (ainsi que dans (2.2.6) est atteinte. Dans ce cas, toute solution du problème stationnaire est un minimum pour (2.2.9) et C_* est liée à l'énergie.Maintenant, pour obtenir la valeur de d, on a

$$\left\|v\right\|_{p,\Gamma_1} \leq C_* \left\|\nabla_g u\right\|_2,$$

et

$$\left\|v\right\|^P_{p,\Gamma_1} \leq C^P_* \left\|\nabla_g u\right\|^p_2,$$

et

$$\|v\|_{p,\Gamma_1}^p \leq C_*^p \left(\|\nabla_g u\|_2^p + \left\| (\nabla_g)_\Gamma v \right\|_{2,\Gamma_1}^p \right).$$

D'après ces dernière inégalités on trouve

$$\frac{\frac{1}{p}\|v\|_{p,\Gamma_1}^p}{\|\nabla_g u\|_2^p + \left\| (\nabla_g)_\Gamma v \right\|_{2,\Gamma}^p} \leq \frac{C_*^{-p}}{p},$$

on note par

$$K_0 = \sup \left(\frac{\frac{1}{p}\|v\|_{p,\Gamma_1}^p}{\|\nabla_g u\|_2^p + \left\| (\nabla_g)_\Gamma v \right\|_{2,\Gamma_1}^p} \right), \tag{2.2.10}$$

et

$$f(\lambda) = \inf \{ \sup J(\lambda(u,v)) \} = d.$$

D'après (2.2.2) et (2.2.10) on trouve

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{1}{2}\|\nabla_g(\lambda u)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\| (\nabla_g(\lambda))_\Gamma v \right\|_2^2 - \frac{1}{p}\|\lambda v\|_{p,\Gamma_1}^p, \\
&= \frac{\lambda^2}{2}\|\nabla_g u\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left\| (\nabla_g)_\Gamma v \right\|_2^2 - \frac{\lambda^p}{p}\|v\|_{p,\Gamma_1}^p, \\
&= \frac{\lambda^2}{2}\left[\|\nabla_g u\|_2^2 + \left\| (\nabla_g)_\Gamma v \right\|_2^2 \right] - \frac{\lambda^p}{p}\|v\|_{p,\Gamma_1}^p, \\
&= \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^p \left[\frac{\frac{1}{p}\|v\|_{p,\Gamma_1}^p}{\|\nabla_g u\|_2^2 + \left\| (\nabla_g)_\Gamma v \right\|_2^2} \right], \\
&= \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^p K_0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lambda - p\lambda^{p-1}K_0 = 0,$$

implique

$$\lambda\left(1 - p\lambda^{p-2}K_0\right) = 0.$$

D'où on eu

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{pK_0}\right)^{\frac{1}{p-2}},$$

et

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{1}{pK_0}\right)^{\frac{2}{p-2}},$$

donc

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{1}{pK_0}\right)^{\frac{2}{p-2}} = C_*^{-2p/p-2}.$$

On pose maintenant

$$d = \frac{p-2}{2p}\lambda_1^2.$$

Donc, d s'exprime par

$$d = \frac{p-2}{2p}C_*^{-2p/p-2}. \tag{2.2.11}$$

On note aussi que dans le Théorème 2.1.1, on a supposé

$$p < \bar{p},$$

où $\bar{q}$ est définie par (1.4.1).

Comme

$$\bar{q} < \bar{p},$$

on peut utiliser la caractérisation de d.

2.2.1 Existence globale

On commence par introduire et démontrer les Lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 *On suppose* $2 \leq p \leq \bar{q}$, *et* $\max\left(2, \frac{\bar{q}}{\bar{q}+1-p}\right) \leq m \leq \bar{q}$.

Soient $(u_0, v_0) \neq (0,0)$, *et* $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$, *D'autre part, on suppose que* $E(0) < d$. (u, v) *la solution du problème (1.2.1) dans le sens de la définition (2.1.1). Donc* $(u(t,.), v(t,.)) \in \mathcal{N}^+$ *pour tout* $t \in [0, T_{\max})$.

Remarque 2.2.1 *Notons, que si il existe* $\bar{t} \in [0, T_{\max})$. *Tel que*

$$E(\bar{t}) < d \ \text{ et } \ (u(\bar{t}), v(\bar{t})) \in \mathcal{N}^+. \tag{2.2.12}$$

(*2.2.12*) *reste vrai. C'est la raison pour laquelle on choisi* $\bar{t} = 0$.

Par ailleurs, on peut facilement voir que (2.2.11), et la condition $E(0) < d$ sont équivalents a l'inégalité

$$C_*^p \left(\frac{2p}{p-2} E(0) \right)^{\frac{p-2}{2}} < 1. \tag{2.2.13}$$

Cette dernière inégalité sera utilisée dans les preuves ultérieurement.

Preuve : Puisque $I(u_0, v_0) > 0$ et par continuité, il existe $T_* \leq T_{\max}$ telle que

$$I(u(t,.), v(t,.)) \geq 0,$$

pour tout $t \in [0, T_*)$.

On a la relation suivante

$$J(t) = \frac{p-2}{2p} \|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \frac{p-2}{2p} \left\| (\nabla_g)_\Gamma v(t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{1}{p} I(t), \forall t \in [0, T_*).$$

On montre facilement que

$$J(t) \geq \frac{p-2}{2p} \|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \frac{p-2}{2p} \left\| (\nabla_g)_\Gamma v(t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2, \forall t \in [0, T_*).$$

on a donc

$$\left\| (\nabla_g)_\Gamma v(t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|\nabla_g u(t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2} J(t), \forall t \in [0, T_*).$$

A partir de (2.2.2) et (2.2.3), évidemment on a

$$J(t) \leq E(t), \forall t \in [0, T_*).$$

Ensuite, on obtient

$$\left\| (\nabla_g)_\Gamma v(t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|\nabla_g u(t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2} E(t), \forall t \in [0, T_*).$$

Comme E est une fonction décroissante de t, on a

$$\left\| (\nabla_g)_\Gamma v(t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|\nabla_g u(t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2} E(0), \forall t \in [0, T_*). \tag{2.2.14}$$

Finalement

$$\|\nabla_g u(t)\|_2^2 \leq \left\| (\nabla_g)_\Gamma v(t) \right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|\nabla_g u(t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2} E(0),$$

et

$$\|\nabla_g u(t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2} E(0). \tag{2.2.15}$$

D'après la définition de C_*, on a

$$\|v(t)\|_{p,\Gamma_1}^p \leq C_*^p \|\nabla_g u(t)\|_2^p = C_*^p \|\nabla_g u(t)\|_2^{p-2} \|\nabla_g u(t)\|_2^2,$$

et d'après l'inégalité (2.2.3), on déduit que

$$\|v(t)\|_{p,\Gamma_1}^p \leq C_*^p \left(\frac{2p}{p-2} E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla_g u(t)\|_2^2 \leq$$

$$C_*^p \left(\frac{2p}{p-2} E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} \left[\|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2\right], \forall t \in [0, T_*). \tag{2.2.16}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité (2.2.13), on obtient

$$\|v(t)\|_{p,\Gamma_1}^p < \|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2, \forall t \in [0, T_*).$$

Par conséquent

$$\|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 - \|v(t)\|_{p,\Gamma_1}^p > 0, \ \ \forall t \in [0, T_*).$$

Cela montre que

$$(u(t,.), v(t,.)) \in \mathcal{N}^+, \ \ \forall t \in [0, T_*).$$

Comme l'énergie décroit, on a l'inégalité suivante

$$\lim_{t \longrightarrow T_*} C_*^p \left[\frac{2p}{p-2} E(t)\right]^{\frac{p-2}{2}} \leq C_*^p \left[\frac{2p}{p-2} E(0)\right]^{\frac{p-2}{2}} < 1.$$

Ainsi, en répétant cette procédure, T_* se prolonge à $T_{\max}$. ■

Solution globale

Lemme 2.2.2 *On suppose que* $2 \leq p \leq \bar{q}$ *et max* $\left(2, \frac{\bar{q}}{\bar{q}+1-p}\right) \leq m \leq \bar{q}$.

Soient $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}^+$, $(u_0, v_0) \neq (0,0)$, $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$. *D'autre part, on suppose que* $E(0) < d$.

Alors la solution du problème (1.2.1) dans le sens de la définition (2.1.1) est globale par rapport au temps.

Preuve : Comme l'application $t \longrightarrow E(t)$ est une fonction non croissante du temps t, en utilisant la relation (2.2.14), on a

$$E(0) \geq E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \|v_t(t)\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{p-2}{2p}\|\nabla_g u(t)\|_2^2 +$$

$$\frac{p-2}{2p}\left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{1}{p}\|v(t)\|_{p,\Gamma_1}^p, \forall t \in [0, T_{\max}).$$

D'après le Lemme 2.2.1, on a

$$(u(t,.), v(t,.)) \in \mathcal{N}^+ \text{ pour tout } t \in (0,T].$$

Par conséquent

$$E(0) \geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{p-2}{2p}\|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \frac{p-2}{2p}\left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2, \forall t \in [0, T_{\max}). \tag{2.2.17}$$

D'apres(2.2.17), $\forall t \in [0, T_{\max})$ La norme

$$\|v_t\|_{2,\Gamma_1} + \|\nabla_g u\|_2 + \|u_t\|_2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_{2,\Gamma_1}$$

est uniformément bornée par une fonction dépendante uniquement de $E(0)$ et de p. Alors, d'après la définition 2.2.1, la solution est globale, c'est a dire

$$T_{\max} = +\infty.$$

■

Le Lemme suivant est utilisé dans la preuve de notre résultat. Un résultat similaire (mais pour un autre problème) a été introduit dans [22].

Lemme 2.2.3 *Pour chaque solution de (1.2.1), donnée par le Théorème (2.1.1), seule l'hypothèse suivante est vérifiée*

(**i**) *s'il existe un temps $\bar{t} \geq 0$ tel que*

$$(u(\bar{t}), v(\bar{t})) \in \mathcal{W},$$

et

$$E(\bar{t}) < d,$$

alors

$$(u(t), v(t)) \in \mathcal{W},$$

et

$$E(t) < d, \ \ \forall t \geq \bar{t}.$$

(**ii**) *s'il existe un certain* $\bar{t} \geq 0$ *tel que*

$$(u(\bar{t}), v(\bar{t})) \in \mathcal{U},$$

et

$$E(\bar{t}) < d,$$

alors

$$(u(t), v(t)) \in \mathcal{U},$$

et

$$E(t) < d, \ \ \forall t \geq \bar{t},$$

(*iii*)

$$E(t) \geq d, \ \ \forall t \geq 0.$$

Preuve : Sans perte de généralités, on peut supposer que $\bar{t} = 0$ et dans la suite, on suppose que $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$.

a) On va d'abord démontrer (i) du Lemme 2.2.3:

En effet en exploitant l'inégalité (2.2.4), on déduit que la fonctionnelle de l'énergie est une fonction non croissante et par conséquent,

$$E(t) < d, \text{ pour tout } t \in (0, T_{\max}],$$

donc (2.2.5) implique que

$$J(t) < d \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max}),$$

en conbinant ceci avec le Lemme 2.2.1 donne (i).

b) La démonstration de (ii) **du Lemme 2.2.3:**

Soit $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ telle que

$$E(0) < d.$$

Alors (2.2.4) implique que

$$E(t) \leq E(0) < d,\ \forall t \in [0, T_{\max}).$$

Enfin, on suppose par contradiction qu'il existe $\bar{t} \in [0, T_{\max})$ telle que $(u(\hat{t}), v(\hat{t})) \notin \mathcal{U}$ et par continuité $I(u(\hat{t}), v(\hat{t})) = (0,0)$. Cela implique que $(u(\hat{t}), v(\hat{t})) \in \mathcal{N}$.

Maintenant, en utilisant (2.2.7), on obtient $J(u(\hat{t}), v(\hat{t})) \geq d$, cela ne peut pas être vrai puisque

$$J(u(t), v(t)) < d, \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max}),$$

par conséquence, (**ii**) est vraie.

c) La démonstration de (iii) du Lemme 2.2.3:

La relation (**iii**) est toujours vrai si (**i**) et (**ii**) sont fausses. ■

Ceci achève la preuve du Lemme 2.2.3.

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution du problème (P)

Dans ce chapitre on considère le problème (1.2.1) pour lequel allons démontrer la stabilisation exponentielle de l'énergie associée à la solution de ce problème.

On a le Théorème suivant

Théorème 3.0.1 *On suppose que* $2 \leq p \leq \bar{q}$ *et* $\max\left(2, \frac{\bar{q}}{\bar{q}+1-p}\right) \leq m \leq \bar{q}$*. Soit* $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}^+$ *et* $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$*. Par ailleurs, supposons que* $E(0) < d$*.*

Alors, il existe deux constantes positives $\hat{C}$ *et* ξ *indépendantes de* T *telles que*

$$0 < E(t) \leq \hat{C}e^{-\xi t}, \forall t \geq 0. \tag{3.0.1}$$

Notons que (3.0.1) implique qu'il existe des constantes positives k et ξ indépendantes de T telles que

$$\left[\|\nabla_g u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 + \left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|v_t(t)\|_{2,\Gamma_1}^2\right] \leq Ke^{-\xi t}, \forall t \geq 0.$$

Preuve : du Théorème 3.0.1 Puisque $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}^+$ et $E(0) < d$, d'après le Lemme 2.2.1 et le Lemme 2.2.2, on a

$$(u(t), v(t)) \in \mathcal{N}^+ \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On montre dans une première étape que

$$0 < E\left(t\right), \forall t \geq 0.$$

La preuve de l'autre inégalité repose sur la construction d'une fonctionnelle de Liapounov en effectuant une modification appropriée de l'énergie. Pour cela, et pour tout $\varepsilon > 0$, qui sera choisi plus tard, on définit pour $(u, v) \in \mathcal{N}^{+}$, la fonctionnelle $L\left(t\right)$ par

$$L\left(t\right) = E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_t u dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} v v_t d\sigma + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \left\|\nabla_g u\right\|_2^2, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.0.2}$$

Equivalence entre $L\left(t\right)$ et $E(t)$

on a, pour tous $t \geq 0$

$$\left|L\left(t\right) - E(t)\right| = \left|\varepsilon \int_{\Omega} u_t u dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} v v_t d\sigma + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \left\|\nabla_g u\right\|_2^2\right|, \tag{3.0.3}$$

Comme on l'a prouvé dans le Lemme 2.2.1 et le Lemme 2.2.3 on a

$$t \geq 0, \;\; I\left(t\right) > 0,$$

et

$$\left\|\nabla_g u\right\|_2^2 + \left\|\left(\nabla_g v\right)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \left\|u_t\right\|_2^2 + \left\|v_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2$$

est uniformément bornée par une constante dépendante uniquement de $E(0)$ et de p.

En utilisant les inégalités de Young, de Poincaré, et l'injection de Sobolev, alors on montre l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\varepsilon \int_{\Omega} u_t u dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} v v_t d\sigma + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \left\|\nabla_g u\right\|_2^2\right| \leq \tag{3.0.4}$$

$$\left|\varepsilon \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} v^2 d\sigma + \varepsilon \int_{\Gamma_1} v_t^2 d\sigma + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \left\|\nabla_g u\right\|_2^2\right| =$$

$$\left|\varepsilon \left\|u_t\right\|_2^2 + \varepsilon \left\|u\right\|_2^2 + \varepsilon \left\|v\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \varepsilon \left\|v_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \left\|\nabla_g u\right\|_2^2\right|$$

$$\leq \left|\varepsilon \left\|u_t\right\|_2^2 + \varepsilon \left\|v_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + 2\varepsilon \left\|\nabla_g u\right\|_2^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \left\|\nabla_g u\right\|_2^2\right|$$

$$\leq \left|\varepsilon \left\|u_t\right\|_2^2 + \varepsilon \left\|v_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + 2\varepsilon \left\|\nabla_g u\right\|_2^2 + \varepsilon \left\|\left(\nabla_g\right)_\Gamma v\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \left\|\nabla_g u\right\|_2^2\right| \leq C\varepsilon E(t), \forall t \geq 0.$$

En combinant, (3.0.3) et (2.1.20) on obtient

$$(1-C\varepsilon)E(t) \leq L(t) \leq (1+C\varepsilon)E(t), \forall t \geq 0.$$

Il est clair que pour ε suffisamment petit, $E(t)$ et $L(t)$ sont équivalents, c'est à dire que l'on peut trouver deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t), \forall t \geq 0. \tag{3.0.5}$$

Décroissance exponentielle de $L(t)$

En dérivant la fonctionnelle $L(t)$ définie par l'équation (3.0.2) par rapport au temps t, en utilisant le problème (1.2.1) et la formule (2.2.4), et en effectuant plusieurs intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dL(t)}{dt} &= \frac{dE(t)}{dt}+\frac{d}{dt}\left[\varepsilon\int_\Omega u_t u dx+\varepsilon\int_{\Gamma_1} v v_t d\sigma+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\left\|\nabla_g u\right\|_2^2\right] \qquad (3.0.6)\\
\frac{dL(t)}{dt} &= -\alpha\left\|\nabla_g u_t\right\|_2^2-r\left\|v_t\right\|_{m,\Gamma_1}^m+\varepsilon\int_\Omega u_{tt} u dx+\varepsilon\int_\Omega u_t^2 dx\\
&\quad+\varepsilon\int_{\Gamma_1} v_t^2 d\sigma+\varepsilon\int_{\Gamma_1} v v_{tt} d\sigma+\alpha\varepsilon\int_\Omega A\nabla u\nabla u_t dx. \qquad (3.0.7)
\end{aligned}$$

D'après la première équation du problème (1.2.1) on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon\int_\Omega u_{tt} u dx &= \varepsilon\int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u)\, u dx+\alpha\varepsilon\int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u)\, u dx\\
&= -\varepsilon\int_\Omega A\nabla u\nabla u dx+\varepsilon\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} v d\sigma-\alpha\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_t\nabla u dx+\alpha\varepsilon\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_t}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} u d\sigma\\
&= -\varepsilon\left\|\nabla_g u\right\|_2^2-\alpha\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_t\nabla u dx+\varepsilon\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} u d\sigma+\alpha\varepsilon\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_t}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} u d\sigma,
\end{aligned}$$

et d'après la troisième équation du problème (1.2.1) on a aussi

$$\varepsilon\int_{\Gamma_1} v v_{tt} d\sigma=\varepsilon\int_{\Gamma_1}\left(-\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}-\alpha\frac{\partial u_t}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\right) v d\sigma+\varepsilon\int_{\Gamma_1} A\nabla_\Gamma v\nabla_\Gamma v d\sigma-r\varepsilon\int_{\Gamma_1}\left(\left|v_t\right|^{m-2} v_t+\left|v\right|^{p-2} v\right) v d\sigma.$$

En substituant les deux égalités précédentes dans (3.0.6), on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{dL(t)}{dt} &= -\alpha\left\|\nabla u_t\right\|_2^2-r\left\|v_t\right\|_{m,\Gamma_1}^m-\varepsilon\left\|\nabla_g u\right\|_2^2-\alpha\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_t\nabla u dx+\varepsilon\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} v d\sigma+\\
&\quad \alpha\varepsilon\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_t}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} v_t d\sigma+\varepsilon\left\|v\right\|_{p,\Gamma_1}^p+\varepsilon\int_\Omega u_t^2 dx+\varepsilon\int_{\Gamma_1} v_t^2 dx+\varepsilon\int_{\Gamma_1}\left(-\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}-\alpha\frac{\partial u_t}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\right) v d\sigma\\
&\quad -\varepsilon\left\|\left(\nabla_g v\right)_\Gamma\right\|_{2,\Gamma_1}^2-\varepsilon r\int_{\Gamma_1}\left|v_t\right|^{m-2} v_t v d\sigma+\alpha\varepsilon\int_\Omega A\nabla u\nabla u_t dx.
\end{aligned}$$

Enfin, une majoration du second membre de l'égalité précédente donne

$$\frac{dL(t)}{dt} \leq -\alpha \left\|\nabla_g u_t\right\|_2^2 - r\left\|v_t\right\|_{m,\Gamma_1}^m + \varepsilon \left\|u_t\right\|_2^2 + \varepsilon \left\|v_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2 - \varepsilon \left\|\nabla_g u\right\|_2^2$$

$$-\varepsilon \left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 + \varepsilon \left\|v\right\|_{p,\Gamma_1}^p - \varepsilon r \int_{\Gamma_1} \left|v_t\right|^{m-2} v_t v d\sigma. \tag{3.0.8}$$

Maintenant, pour estimer le dernier terme du membre de droite de (3.0.8), on utilise l'inégalité de Young, pour tout $\delta > 0$, et l'on obtient

$$\left|\int_{\Gamma_1} \left|v_t\right|^{m-2} v_t v d\sigma\right| \leq \frac{\delta^{-m}}{m} \left\|v\right\|_{m,\Gamma_1}^m + \frac{m-1}{m}\delta^{\frac{m}{m-1}} \left\|v_t\right\|_{m,\Gamma_1}^m. \tag{3.0.9}$$

L'inégalité des traces implique que

$$\left\|v\right\|_{m,\Gamma_1}^m \leq C \left\|\nabla_g u\right\|_2^m,$$

où C ici et dans la suite désigne une constante positive générique qui pourrait changer de ligne en ligne.

Puisque l'inégalité (2.2.15) est vraie, on a

$$\left\|v\right\|_{m,\Gamma_1}^m \leq C \left(\frac{2pE(0)}{p-1}\right)^{\frac{m-2}{2}} \left\|\nabla_g u\right\|_2^2. \tag{3.0.10}$$

En substituant les deux inégalités (3.0.9) et (3.0.10) dans (3.0.8) et en utilisant (2.2.16), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} \leq\ & -\alpha \left\|\nabla_g u_t\right\|_2^2 + r\left(\varepsilon\frac{m-1}{m}\delta^{\frac{m}{m-1}} - 1\right) \left\|v_t\right\|_{m,\Gamma_1}^m + \varepsilon \left\|u_t\right\|_2^2 + \varepsilon \left\|v_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \\ & -\varepsilon \left\|(\nabla_g)_\Gamma v(t)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 - \varepsilon \left\|\nabla_g u\right\|_2^2 + \\ & \varepsilon\left(C_*^p \left(\frac{2pE(0)}{p-1}\right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 + Cr\frac{\delta^{-m}}{m}\left(\frac{2pE(0)}{p-1}\right)^{\frac{m-2}{2}}\right) \left\|\nabla_g u\right\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.0.11}$$

A partir de (2.2.13), on a

$$C_*^p \left(\frac{2pE(0)}{p-1}\right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 < 0.$$

Maintenant, on choisit δ assez grand de telle sorte que

$$\left(C_*^p \left(\frac{2pE(0)}{p-1}\right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 + Cr\frac{\delta^{-m}}{m}\left(\frac{2pE(0)}{p-1}\right)^{\frac{m-2}{2}}\right) < 0.$$

une fois δ fixé, on fixe ε suffisamment petit de telle sorte que

$$\left(\varepsilon\frac{m-1}{m}\delta^{\frac{2}{m-2}}-1\right)<0.$$

A partir de (2.2.6), on pout trouver $\eta>0$, que ne dépend que δ, tel que

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt} &\leq -\alpha\left\|\nabla_g u_t\right\|_2^2+\varepsilon\left\|v_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\varepsilon\left\|u_t\right\|_2^2-\varepsilon\eta\left\|\nabla_g u\right\|_2^2-\varepsilon\left\|(\nabla_g)_\Gamma v\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \\ \frac{dL(t)}{dt} &\leq -M\varepsilon E(t)+M\varepsilon E(t)-\alpha\left\|\nabla_g u_t\right\|_2^2+\varepsilon\left\|v_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2+\varepsilon\left\|u_t\right\|_2^2+\varepsilon\eta\left\|\nabla_g u\right\|_2^2 \\ &\quad+\varepsilon\left\|(\nabla_g)_\Gamma v\right\|_{2,\Gamma_1}^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la définition de l'énergie, pour toute constante $M>0$, alors, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt} &\leq -M\varepsilon E(t)+\varepsilon\left(1+\frac{M}{2}\right)\left\|u_t\right\|_2^2-\alpha\left\|\nabla_g u_t\right\|_2^2 \\ &\quad+\varepsilon\left(\frac{M}{2}-\eta\right)\left\|\nabla_g u\right\|_2^2+\varepsilon\left(1+\frac{M}{2}\right)\left\|(\nabla_g)_\Gamma v\right\|_{2,\Gamma_1}^2.\end{aligned}\tag{3.0.12}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et l'inégalité des traces

$$\left\|u_t\right\|_2^2\leq C\left\|\nabla_g u_t\right\|_2^2,$$

$$\left\|v_t\right\|_{2,\Gamma_1}^2\leq C\left\|\nabla_g u_t\right\|_2^2,$$

et en choisissant de nouveau ε assez petit et $M\leq 2\eta$, à partir (3.0.12), on a

$$\frac{dL(t)}{dt}\leq -M\varepsilon E(t),\forall t\geq 0.\tag{3.0.13}$$

D'autre part, d'après (3.0.5), en prenant $\xi=M\varepsilon/\beta_2$, l'inégalité (3.0.13) donne

$$\frac{dL(t)}{dt}\leq -\xi L(t),\forall t\geq 0.\tag{3.0.14}$$

L'intégration de (3.0.14) entre 0 et t donne l'estimation suivante pour la fonctionnelle $L(t)$

$$L(t)\leq Ce^{-\xi t},\forall t\geq 0.$$

Décroissance exponentielle de $E(t)$

En utilisant (3.0.5), on déduit que

$$E(t)\leq \tilde{C}e^{-\xi t},\forall t\geq 0.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.0.1. ∎

Conclusion

Dans ce mémoire on a prouvé l'existence et l'unicité de la solution de l'équation des ondes semi linéaire amortie avec des coefficients variables et des conditions aux limites dynamiques, en utilisant la méthode d'approximation de Faedo Galerkin couplée avec le Théorème du point fixe, nous avons aussi obtenu la décroissance exponentielle de l'énergie associée à la solution.

Perspectives

Il serait souhaitable d'étudier

- Le même problème avec des dissipations

1- par des termes mémoires interne et frontière avec des noyaux définis positifs.

2- avec un terme source non linéaire interne et des noyaux définis positifs.

- D'étudier le problème de Petrovesky avec des coefficients variables, un terme source non linéaire et des noyaux définis positifs.

Bibliographie

[1] R. A. Adames. Sobolev espaces. Academic Presse York , 1975.

[2] K. T. Andrews, K. L. Kuttler, and M. Shillor. Second ordre evolution eqautions with dynamic boundary conditions. J. Math. Anal. Appl. 197(3): 781-795, 1996.

[3] J. T. Beale. Spectral properties of an acoustic boundray condition. Indiana Univ. Math. J., 25(9): 895-917, 1976.

[4] Haim Brizis. Analyse fonctionnelle. Masson, Paris, 1983.

[5] B. M. Budak, A. A. Samarskii, and A. N. Tikhonov. A collection of problems on mathematical physics. Translated by A. R. M. Robson. The macmillan Co., New York, 1964.

[6] C. Castro and E. Zuazua. Boundray controllability of hybrid system consisting in two flixible beams connected by a mass. SIAM J. Control Optimization, 36(5): 1576, 1998.

[7] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, and P. Martinz.Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundray damping and source term. J. Differential Equations, 203(1): 199- 158, 2004.

[8] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano, and L. A. Medeiros. On the existence and uniforme decay of a hyperbolic equa-

tion with non-linear boundray conditions .Southeastb asiam bull. Math., 24(2): 183 -199, 2000.

[9] S. Chen, K. Liu, and Z. Liu. Spectrum and stability for elastic systems with global or local kelvin -voigt damping. SIAM J. Appl. Math., 59(2): 651 - 668, 1999.

[10] E. A. Coddington and N. Levinson. Theory of ordinary differential equations McGraw -Hill Book Company, 1955.

[11] F. Conrad and O. Morgul. On the stabilition of flixible beam with a tip mass .SIAM J. Control optim., 36(6): 1986 (electronic), 1998.

[12] G. G. Dornin and N. A. Larkin. Global solvability for the quasilinear damping wave equation with nonlinear second- order boundray conditions. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 8: 1119-1134, 2002.

[13] G. G. Dornin and N. A. Larkin, and A. J. Souza. A hyperbolic problem with nonlinear second- order boundray damping. Election. J. Differ. Equ. 1998, paper 28, pages 1-10, 1998.

[14] C. L. Frota andJ. A. Goldstein. Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions. J. Differential Equations, 164: 92-109, 2000.

[15] F. Gazzola and M. Squassina. global solutions and finte time blow up for damping semilinear wave equations. Ann. I. H. Poincaré, 23: 185-207, 2006.

[16] S. Gerbi and B. Said-Houari. Local existence and exponential growth for a semilinear damped wave equation with dynamic boundary conditions. Advances in Differential Equations, 13(11-12): 1051-1074, 2008.

[17] V. Georgiev and G. Todrova. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source ters. J. Differentail Equations, 109(2): 295-308, 1994.

[18] M. Grobbelaar-Van Dalsen On fractional powers of a closed piar of operators and a damped wave equation with dynamic boundray conditions. Appl. Anal, 53(1-2): 41-54, 1994.

[19] M. Grobbelaar-Van Dalsen. Uniform stabilisation of a one-dimensional hybrid thermo-elastic structure. Math. Methods Appl. Sci., 26(14): 1223-1240, 2003.

[20] M. Grobbelaar-Van Dalsen. On the initial-boundary -value problem for the extensible beam with attached load. Math. Methods Appl. Sci., 19 (12): 943-957, 1996.

[21] M. Grobbelaar-Van Dalsen and A. Van Der Merwe. Boundray stabilisation for the extensible beam with attached load. Math. Models Methods Appl. Sci., 9 (3): 379-394, 1999.

[22] J. Esquivel- Avila. The dynamics of nonlinear wave equation J. Math. Anal. Appl., 279: 135-150, 2003.

[23] M. Kirane. blow-up for some equations with semilinear dynamical boundary conditions of parabolic and hyperbolic type. Hokkaido Math. J., 21 (2): 221-229, 1992.

[24] H. A. Levine. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$.Trans. Amer. Math. Soc., 192: 1-21, 1974.

[25] H. A. Levine. Some additional remarks onn the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations. SIAM J. Math. Anal., 5: 138-146, 1974.

[26] J. L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Dunod, 1969.

[27] J. L. Lions and E. Magenes. Problémes aux limites non homogénes et applications. Vol. 1,2. Dunod , Paris, 1968.

[28] W. Littman and L. Markus. Stabilization of a hybrid system of elastic by feedback boundary damping. Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser., 152: 281-330, 1988.

[29] K. Lui and Z. Lui. Exponential decay of energy of the Euler-Bernouli beam with locally distributed Kelvin -Voint damping. SIAM J. Control Optimization, 36(3): 1086-1098, 1998.

[30] K. Lui and Z. Lui. Exponential decay of energy of vibrating stings with local viscoelastisity. Z.Angew. Math. Phys., 53(2): 265-280, 2002.

[31] K. Ono. On global existence, asymptotic stability and bowing up of solutions for some degenerate nonlinear wave equation of Kirchhoff type with a stong dissipation. Math. Methods Appl . Sci., 20(2): 151-177, 1997.

[32] L. E. Payne and D. H. Sattinger. Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. Israel J. Math., 22 (3-4): 273-303, 1975.

[33] M. Pellicer and J. Solà-Morales. Analysis of a viscoelastic spring-mass model. J. Math. Anal. Appl., 294 (2): 698-698, 2004.

[34] M. Pellicer. Large time dynamics of a nonlinear spring-mass model. Nonlin. Anal., 69(1): 3110-3127, 2008.

[35] M. Pellicer and J. Solà-Morales. Spectral analysis and limil behaviours in a spring-mass system . Commun. Pure Appl. Anal., 7(3): 563-577, 2008.

[36] G.Ruiz Goldstien. Derivation and physical interpretation of general boundary conditions. Adu. Differ. Equ., 11(4): 457-480, 2006.

[37] N.Sauer. Linear evolution equations in two Banch spaces. Proc. Roy. Soc. Edinbugh Sect. A, 91(3-4): 287-303, 1981/ 82.

[38] N.Sauer. Empathy theory and the laplace transform. In Linear operators (Warsaw, 1994), volume 38 of Banch Center Publ., pages 325-338. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1997.

[39] G. Todorova. Cauchy problem for a nonlinear wave with non-linear damping and source terms. C.R.Acad Sci. Paris Ser., 326(1): 191-196, 1998.

[40] G.Todorova. The occurence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type. C.R.Acad Sci. Paris Ser., 326(1): 191-196, 1998.

[41] G.Todorova. Stable and unstable sets for the cauchy problem for a nonlinear wave with nonlinear damping and source terms. J.Math. Anal. Appl. 239: 213-266, 1999.

[42] G. Todorova and E.Vitillaro.Blow-up for nonlinear dissipative wave equations in $\mathbb{R}^n$. J. Math. Anal.appl., 303 (1): 242-257, 2005.

[43] E.Vitillaro. Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation .Arch Ration. Mech. Anal., 149(2): 155-182, 1999.

[44] E.Vitillaro. Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms. J.Differential Equations, 186(1): 259-298, 2002.

[45] E.Vitillaro. A potential well theory for the wave equation with nonlinear source and boundary damping terms. Glasg. Math. J., 44(3): 395, 2002.

[46] H.Zang and Q. Hu. Energy decay for a nonlinear viscoealastic rod equations with dynamic boundary conditions Math. Methods Appl. Sci., 30 (3): 249-256, 2007.

[47] G.Chen A note on the boundary stabilistion of the wave equation (S.I.A.M.J.control. opt, 19 (1981), 106-113).

[48] R.Dutko. Exetentending a theorem of liapounov to hilbert spaces (J. Math. Anal. Appl. 32, (1970), p. 610-616);

[49] P.Grisvard. Controlabilité exacte des solutions de l'équtions des ondes en présence de singularités (J. M Pures Appl. 68(1989), 215-259).

[50] A.Heminna. Stabilisation frontièr de problème de ventcel. E.S.A.I.M: Control, optimisation and calcules of variations, Novembre 2000, VOL 5, 591-622.

[51] V.Komornik et E; Zuazua: A direct mothode for the boundary stabilisation of the wave equation (J.Math. Pures Appl; 58 (1999), 33-54).

[52] J.Lagnese. Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation, (J. Diff; Equations, 50, 1983, 163-182).

[53] I. Lasiecka and K. Triggiani; Uniform exponential decay in a bounded region with $L^2(0, T, L^2(\Sigma))$ feedback control in the Dirichlet boundary conditions (J.Equations , 66, 1987, 1340-390).

[54] P. D. Lax, C. S. Moractz, R. S. Phillips: Exponential decay of solutions of the wave equations in exterior of start-shaped obstacle (comm. pure. Appl. Math, vol 16, 1963, p 477-489).

[55] J.L.Lions. Exact controlability stabilization, and perturbation for distributed systeme (S.I.A.M.Rev. 30, (1988), 1-68).

[56] M.Medjden. Propriétés de régularité pour le problème de Navier-Stokes et estimations d'énergie pour certaines équations aux dirivée partielles, thése U. S. T. H. B., Alger (2004).

[57] C.S.Moraetz. Exponential decay of solution of the wave equation (comm. pure. Appl; Math, vol 19, 1966, p (539-444).

[58] A.Pazy-Semi-groupe of linear operators and applications of partial difirential equation, Springer Verlag, Berlingo, New-York, 1983.

[59] J.P.Quinn and D.L.Russel. Asymptotic. Stability and energer decay rates for solutions of hyperbolic equations with boundary damping (Po. Ray. Soc. Edinburgh) Sect .A, 77, 1977, 97-127).

[60] D.L.Russel. Exact controlablity and stabilisation for lienar partial diffirential equations

[61] D. L. Russel. Exact boundary value controlablility theoremes for wave and heat processes in star-comlemented regions ,in diffirential gamesand control theory, (raxin, liu and sternberg, Eds, Maercel Dekker Inc, New-York 1974).

[62] C. Wilcox. The initial- boundary value problem for the wave equation in a exterior domain with spherical boundary (Amer-Math. Soc. Not. A bstract n° 564-20, Vol 6, 1959.

[63] E. Zuazua. C.R.A.Sci. Paris, 307, Série I, p. 587-591, (1988).