

N° D'ORDRE : 02/2011-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENE, FACULTE DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE
PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MAGISTER

EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse : Equations Aux Dérivées Partielles

Par : Zoubir SEDKAOUI

Sujet

***ETUDE DE MODELES ASYMPTOTIQUES EN
ELASTICITE NON LINEAIRE***

Soutenu publiquement, le 11/09/2011, devant le jury composé de :

Mr. Rachid BEBBOUCHI	Professeur à l'USTHB	Président
Mr. Arezki TOUZALINE	Maitre de Conférences à l'USTHB	Directeur de Mémoire
Mr. Mohamed MEDJDEN	Professeur à l'USTHB	Examinateur
Mr. Ammar KHEMMOUDJ	Maitre de Conférences à l'USTHB	Examinateur

Remerciements

Je remercie Le Professeur R. Bebbouchi de m'avoir fait l'honneur de présider ma soutenance, et messieurs, le Professeur M. Medjden et A. Khemmoudj, maître de conférences, de bien vouloir assister et compléter mon travail.

À mon directeur de magistère, Monsieur A. Touzaline (Laboratoire de Systèmes dynamiques, Faculté de mathématiques, USTHB), maître de conférences , je tiens à manifester ma gratitude pour son aide et ses encouragements.

L'aboutissement de ce mémoire a aussi été encouragé par de nombreux amis et collègues. Je ne citerai pas de noms ici, pour ne pas en oublier certains. Je tiens aussi à remercier le professeur J. J. Marigo (Laboratoire des propriétés mécaniques et thermodynamique des matériaux Paris Nord) pour m'avoir donné la possibilité d'étudier l'analyse asymptotique et pour m'avoir fait profiter de ses connaissances sur le sujet.



A toi, Tarik, mon petit frère.

*A toi, mon ami le professeur H. Guidouche
(Laboratoire d'analyse, géométrie et application, Paris Nord).*

Zoubir.

Table des matières

1	INTRODUCTION	1
2	NOMENCLATURE	2
3	DÉMARCHE ADOPTÉE	9
3.1	Première étape : Définition du problème	9
3.2	Deuxième étape : Paramétrisation	9
3.3	Troisième étape : Différentes déductions	10
4	RÉSULTATS OBTENUS	11
4.1	Ordre de grandeurs des énergies	11
4.2	Forme des déplacements optimaux	11
4.3	Modèle asymptotique limite : Tige inextensible, élastiquement flexible	12
5	POSITION DU PROBLÈME	13
5.1	Système de l'élasticité tridimensionnelle	13
5.2	Formulation variationnelle	16
6	MISE À L'ÉCHELLE ET PARAMÉTRISATION DU PROBLÈME	19
7	ESTIMATIONS DES ÉNERGIES	22
7.1	Déplacements	22
7.2	Déformations	22
7.3	Énergie élastique	23
8	MODÈLE DE SAINT-VENANT DE FLEXION, EXTENSION ET TOR- SION	28
8.1	Déplacement optimal	28
8.2	Modèle asymptotique	34
8.3	Application	41

Chapitre 1

INTRODUCTION

Dans cette étude on s'intéresse au comportement asymptotique des cylindres élastiques (homogènes, isotropes) élancés soumis à des charges conservatives d'intensité variable dont l'épaisseur $2R$ tend vers zéro.

L'approche est purement énergétique dans le sens où le problème posé est la minimisation de l'énergie du système ce qui permet de donner l'allure des déplacements optimaux et les modèles asymptotiques.

On se place dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle **non linéaire**. Le modèle asymptotique limite, une fois le problème "mis à l'échelle", de tige inextensible et élastiquement flexible est étudié ici de façon très détaillée sachant qu'une série de cinq modèles asymptotiques régissant l'équilibre du corps selon l'ordre de grandeur du chargement y sont déduits par cette méthode.

On expose la démarche adoptée comme suit :

Au chapitre 2, Notations et quelques rappels d'analyse fonctionnelle tels que les espaces de Sobolev.

Au chapitre 3, On pose le problème à étudier dans son aspect mécanique, que l'on modélise pour aboutir à différents résultats (Ordre des différentes énergies, les déplacements optimaux et modèle limite asymptotique), synthétisés au chapitre 4.

Au chapitre 5, On fait un rappel de l'élasticité tridimensionnelle et on présente la formulation variationnelle du problème mécanique (déformations et déplacements) ainsi que la série de problèmes qui lui sont équivalents.

Au chapitre 6 : On décrit la technique de mise à l'échelle et on établit la paramétrisation du problème. On expose le problème final à étudier.

Au chapitre 7 : On démontre les estimations des énergies pour chaque modèle asymptotique obtenue.

Au chapitre 8 : On aboutit au modèle de Saint Venant de flexion, extension et torsion par le résultat obtenu du déplacement optimal. L'étude d'un cas de barre en acier (application) illustre ce travail.

Il faut aussi noter que sur le plan pratique, un grand nombre d'ouvrages sont faits à partir de structures "fines" et élancées comme c'est le cas de la tuyauterie des circuits de refroidissement de diverses installations industrielles, les ponts à haubans, les câbles des lignes haute tension etc. et qui ont suscités des recherches dans le sens des développements asymptotiques [?], [?].

Chapitre 2

NOMENCLATURE

Notations :

Nous utiliserons la convention de la sommation sur les indices répétés, les indices ou exposants grecs (sauf les petits paramètres ε et η) prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$ et les indices ou exposants latins dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Le produit scalaire classique de deux vecteurs X et Y sera noté $X \cdot Y$ la somme $\sum_{i=1,2,3} X_i Y_i$ et l'on notera $X_\alpha \cdot Y_\alpha$ la somme $X_1 Y_1 + X_2 Y_2$.

$\mathbb{M}_{m \times n}$ est l'ensemble des matrices à n colonnes et m lignes.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

On appelle matrice transposée de A la matrice ${}^t A = (a_{ji})_{1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n} \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Une matrice carrée A est dite orthogonale si ${}^t A A = A {}^t A = Id$ (Id matrice identité).

$tr A$: La trace d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$ est la somme des éléments diagonaux

$$\sum_{i=1}^m a_{ii}$$

\mathbb{M}_m^+ : Ensemble des matrices carrées d'ordre m et de **déterminant strictement positif**.

$\| \cdot \|$ la norme Euclidienne de \mathbb{R}^3

$o(\cdot)$ la fonction de variable réelle telle que $\lim_{z \rightarrow 0} o(z) = 0$ lorsque z tend vers zéro.

δ_{ij} symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

E et ν respectivement le module de Young et le module de Poisson (caractéristique du matériau élastique, c'est le rapport entre la tension longitudinale et la dilatation dans le même sens).

λ et μ les constantes de Lamé.

La masse volumique de la structure ρ [kg/m^3]

La matrice d'inertie géométrique J

$$J_{\alpha\beta} = \int_S x_\alpha x_\beta dx_1 dx_2 \quad (\alpha, \beta = 1 \text{ ou } 2) \quad \text{inertie du système dans le plan } (x_1, x_2)$$

$$I_1 = \int_S x_1^2 dx_1 dx_2, \quad I_2 = \int_S x_2^2 dx_1 dx_2$$

$Aire S$ est l'aire de la section S et est supposée constante le long de la poutre.

$u_{,i}$ ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de u par rapport à la coordonnée x_i

$u_{,i}^\alpha$ ou $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_i^\alpha}$ la dérivée partielle d'ordre α de u par rapport à la coordonnée x_i

$grad v = \nabla v$, gradient de v de composantes $(\nabla v(x))_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)$

Les espaces de Sobolev [?] :

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels, munis de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre.

Soient $\Omega \in \mathbb{R}^n$, p un réel tel que $1 \leq p < \infty$ et m un entier naturel positif,
 $W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$ où α est un multi-indice tel que $0 \leq |\alpha| \leq m$
 $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible (au sens des distributions) et L^p désigne un espace de Lebesgue.

Dans le cas $p = 2$, les espaces de Sobolev sont les espaces de Hilbert.

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

Notions de la mécanique déformable [?] et [?] :

Soit un corps C , occupant dans l'espace un ensemble $\bar{\Omega}$ (adhérence de Ω).

Un point M du corps C a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) dont le mouvement est décrit par un champs de vecteurs u défini sur Ω dès que le corps est sollicité par des forces de surface ou de volume, ces forces sont notées de façon classique f et g respectivement.

L'équilibre de la structure est traduit par les équations qui relient u aux forces qui s'exercent sur C .

On pose $u(M) = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3 = u^i e_i$

$\frac{\partial u}{\partial M}$ désigne l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 qui admet dans la base (O, e_1, e_2, e_3) la représentation matricielle $\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Formuler les équations reliant u aux forces auxquelles le corps est soumis revient à trouver le champ de déplacements u traduisant l'équilibre de la structure.

Si l'on considère au repos, deux points M_1 et M_2 à un instant donné t et que le corps occupe une autre position Ω' à un autre instant t' les M_1 et M_2 deviennent M'_1 et M'_2 respectivement.

$$OM'_i = OM_i + u(M_i), M'_1M'_2 = M_1M_2 + u(M_2) - u(M_1)$$

Dans le cas où M_1 est voisin de M_2 ,

$$M'_1M'_2 = M_1M_2 + \frac{\partial u}{\partial M}(M)M_1M_2 + \|M_1M_2\| o(\|M_1M_2\|).$$

Et si l'on désigne par (\cdot, \cdot) le produit scalaire entre vecteurs de \mathbb{R}^3 associé à la base (O, e_1, e_2, e_3) alors on a ce qui suit :

$$\|M'_1M'_2\|^2 = (M'_1M'_2, M'_1M'_2) = (FM'_1M'_2, FM'_1M'_2) + \|M_1M_2\|^2 o(\|M_1M_2\|)$$

où $F = Id + \frac{\partial u}{\partial M}$ avec Id l'identité dans \mathbb{M}^3 .

Nous déduisons de ce fait la variation relative de la longueur du segment M_1M_2 dans le déplacement u :

$$\delta(M_1M_2) = \frac{\|M'_1M'_2\| - \|M_1M_2\|}{\|M_1M_2\|} \text{ qui peut aussi s'écrire}$$

$$\delta(M_1M_2) = \sqrt{\frac{(FM_1M_2, FM_1M_2)}{(M_1M_2, M_1M_2)}} - 1 + o(\|M_1M_2\|).$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{2}({}^tFF - Id) \text{ alors}$$

$$\delta(M_1M_2) = \sqrt{\frac{1 + (2\gamma(u)M_1M_2, M_1M_2)}{(M_1M_2, M_1M_2)}} - 1 + o(\|M_1M_2\|)$$

Notions de déplacements et de contraintes :

Définition 1 On appelle une **déformation** (ou le **champs de déformations**) du déplacement u (ou champs de déplacements) l'expression de l'endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^3 la quantité $\gamma(u)$. La matrice qui lui est associée a pour éléments dans la base (O, e_1, e_2, e_3)

$$\gamma_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

Remarque 1 La déformation permet de mesurer les variations relatives de longueur d'un petit segment M_1M_2 dans le solide lorsqu'il subit un déplacement u .

On admet ainsi l'existence d'une fonctionnelle W ne dépendant que de l'état de déformation du solide C et qui symbolise l'énergie stockée dans ce dernier et dont l'expression :

$$W = \int_{\Omega} \alpha(\gamma(u))$$

La densité d'énergie α est une fonction de la déformation γ telle que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\alpha(\gamma(u + \lambda v)) - \alpha(\gamma(u))}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}(\gamma(u)) \left({}^tF \frac{\partial v}{\partial M} + {}^t \left(\frac{\partial v}{\partial M} \right) F \right)$$

Définition 2 On appelle la **contrainte de Piolla-Kirchhoff** la forme linéaire définie sur l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{R}^3 ,

$$\sigma = \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}(\gamma(u))$$

Remarque 2 La contrainte de Piolla-Kirchhoff est symétrique puisque ses composantes dans la base (O, e_1, e_2, e_3) sont $\sigma_{ij} = \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma_{ij}}(\gamma(u))$ et $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$

La contrainte de Piolla-Kirchhoff est symétrique et le produit scalaire entre endomorphismes défini par $(A, B) = \text{Tr}(AB)$ vérifie $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ et $\text{Tr}A = \text{Tr}^t A$.

Principe des travaux virtuels :

Le travail des efforts intérieurs au solide, pour un déplacement virtuel v est

$$\mathcal{P}_{int}(v) = \int_{\Omega} \text{Tr} \left(\sigma^t F \frac{\partial v}{\partial M} \right)$$

Remarque 3 $\sigma^t F$, non symétrique est appelée la **contrainte de Piolla-Lagrange**. Elle n'a pas de sens physique de même pour la contrainte de Piolla-Kirchhoff.

Définition 3 La **contrainte de Cauchy** est la quantité $C = \frac{1}{\det F} F \sigma^t F$ qui intervient dans la formulation du travail intérieur lorsque, pour un déplacement v virtuel,

$$\mathcal{P}_{int}(v) = \int_{\Omega'} \text{Tr} \left(\sigma^t F \frac{\partial v}{\partial M} F \right) \det(F^{-1})$$

où Ω' est la configuration déformée (l'ensemble des points du solide occupés après que le solide ait subi une déformation).

$$\mathcal{P}_{int}(v) = \int_{\Omega} \text{Tr} \left(C \frac{\partial v}{\partial M'} \right)$$

Faisant remarquer que jusqu'ici aucune définition explicite n'a été donnée pour la fonctionnelle α mais une relation lie cette contrainte au déplacement u .

En utilisant un développement formel, pour des petites déformations de l'expression $\alpha(\gamma(u))$

$$\alpha(\gamma(u)) = \alpha(0) + \frac{\partial \alpha(0)}{\partial \gamma} \gamma(u) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}(0) \gamma(u) \gamma(u) + \dots$$

Le terme $\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}(0)$ désigne de toute évidence la contrainte de Piolla-Kirchhoff dans l'état de référence.

Le terme $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}(0)$, dit tenseur de rigidité est une forme quadratique sur l'ensemble des endomorphismes symétriques de \mathbb{R}^3 dont les composantes dans la base (O, e_1, e_2, e_3) :

$$\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}(0) \right)_{ijkl} = A_{ijkl} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}}(0)$$

La symétrie de la contrainte de déplacement donne : $A_{ijkl} = A_{ijlk} = A_{jikl}$.
Et en inversant l'ordre de dérivation de la contrainte de Piolla-Kirchhoff on a :
 $A_{ijkl} = A_{klij}$

Dans la cas d'un matériau isotrope le tenseur de rigidité a pour composantes :

$$A_{ijkl} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)$$

En pratique, ces éléments du tenseur de rigidité sont déterminés expérimentalement et jusqu'à présent nous ne connaissons que les matériaux tels que leur nombre de Poisson est strictement positif.

Remarque 4 Dans le cas où le nombre de Poisson ν est égal à $\frac{1}{2}$, alors le matériau est de type incompressible.

Le travail des efforts extérieurs du solide qui s'exprime en fonction, des forces de volume et de surface respectivement f' et g' (force agissant sur la frontière du solide déformé Γ' ou une partie de cette dernière)

$$\mathcal{P}_{ext}(v) = \int_{\Omega'} f'v + \int_{\Gamma'} g'v$$

Le principe des travaux virtuels consiste à supposer que pour tout champ de déplacement virtuel v et qui est compatible avec les liaisons du solide, $\mathcal{P}_{ext}(v) = \mathcal{P}_{int}(v)$ et donc

$$\int_{\Omega'} Tr \left(C \frac{\partial v}{\partial M'} \right) = \int_{\Omega'} f'v + \int_{\Gamma'} g'v$$

Rappels d'analyse fonctionnelle :

Nous allons à présent donner quelques rappels d'analyse fonctionnelle qui nous seront de grande utilité :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$ et $W : \mathbb{M}_{m \times n} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Définition 4 W est dite **convexe** si

pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et tout couple (F, G) de $\mathbb{M}_{m \times n} \times \mathbb{M}_{m \times n}$ on a l'inégalité

$$W((1 - \alpha)F + \alpha G) \leq (1 - \alpha)W(F) + \alpha W(G)$$

Définition 5 W est dite **quasi-convexe** si

pour tout borné D de \mathbb{R}^n et tout F de $\mathbb{M}_{m \times n}$ on a, pour toute fonction ϕ de classe $\mathcal{C}_0^1(D; \mathbb{R}^m)$, ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(D; \mathbb{R}^m)$ à support compact (nulle en dehors d'une partie compacte de D), l'inégalité

$$\text{mes}(D) W(F) \leq \int_D W(F + \nabla \phi(X)) dX$$

Définition 6 W est dite **polyconvexe** s'il existe une fonctionnelle \mathcal{L} définie par

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexe telle que pour tout } F \text{ de } \mathbb{M}_{m \times n},$$

$$W(F) = \mathcal{L}(M_1(F), M_2(F), \dots, M_n(F))$$

$$M_i(F) \text{ désigne le mineur de } F \text{ d'ordre } i \text{ et } \tau(n, m) = \sum_{i=1}^n \frac{n!m!}{(i)^2 (n-i)! (m-i)!}$$

Définition 7 W est dite **rang-1-convexe** si

pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et tout couple (F, G) de $\mathbb{M}_{m \times n} \times \mathbb{M}_{m \times n}$ tel que $Rg(F - G) \leq 1$ on a l'inégalité

$$W((1 - \alpha)F + \alpha G) \leq (1 - \alpha)W(F) + \alpha W(G)$$

Remarque 5 Dans le cas où W est de classe \mathcal{C}^2 , la rang-1-convexité est équivalente à la condition $I'(\phi) = 0$ associée à la minimisation de l'énergie

$$I(\phi) = \int_{\Omega} W(\nabla \phi(x)) dx$$

appelée aussi condition de Legendre-Hadamard concernant l'ellipticité de l'équation d'Euler.

Remarque 6 Pour W finie, on a les implications suivantes :

$$W \text{ convexe} \implies W \text{ polyconvexe} \implies W \text{ quasi-convexe} \implies W \text{ rang-1-convexe.}$$

La réciproque est fautive, loin de notre objectif, nous nous contentons simplement de citer un exemple pour chaque cas,

* L'application $F \rightarrow W(F) = \det F$ est polyconvexe et est non convexe pour $n \geq 2$.

** L'application $F = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \rightarrow W(F)$ définie par

$$W(F) = (a_{11} - a_{23} - a_{32})^2 + (a_{12} - a_{31} - a_{13})^2 + (a_{12} - a_{13} - a_{31})^2 + (a_{22})^2 + (a_{33})^2 - \varepsilon \sum_{i,j} (a_{ij})^2$$

(ε réel positif assez petit) est quasi-convexe mais non polyconvexe. Voir Terpstra [?] et Serre dans [?].

*** L'application $W : \mathbb{M}_{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$W(F) = f(\text{Pr } F) + \varepsilon^2 \|F\|^2 + \varepsilon \|F\|^4 + k \|F - \text{Pr } F\|^2$$

où l'on a défini l'application Pr la projection orthogonale et la fonction f

$$\text{Pr} : \mathbb{M}_{3 \times 2} \rightarrow L := \left\{ M_{tt}^{rs} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ t & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 2} \right\} \text{ et } f : L \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que}$$

$$f(M_{tt}^{rs}) = -r s t \text{ est rang-1-convexe et est non quasi-convexe.}$$

Résultat 1 si l'on note par QW (resp PW , RW) l'enveloppe quasi-convexe (resp polyconvexe et rang-1-convexe) de W définie par

QW resp (PW et RW) = $\sup\{\psi; \psi$ quasi-convexe (resp polyconvexe et rang-1-convexe) $\psi \leq W\}$ et W^{**} définie par

$W^{**} = \sup\{\psi; \psi$ convexe et semi-continue inférieure $\psi \leq W\}$ sa convexifiée alors

$$W^{**} \leq PW \leq QW \leq RW$$

Enfin signalons que dans un cadre infini Ball & Murat, [?] donnent un exemple de fonction quasi-convexe et non rang-1-convexe. Autrement dit dans ce cadre, on a les implications suivantes :

Convexité \implies Polyconvexité \implies Rang-1-convexité

Convexité \implies Polyconvexité \implies Quasi-convexité

Définition 8 On dit que l'application $W : \mathbb{M}_{m \times n} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ satisfait le **principe d'indifférence matérielle** si pour tout couple (F, Q) de $\mathbb{M}_{m \times n} \times \mathcal{O}(m)$ on a la relation

$$W(QF) = W(F)$$

$\mathcal{O}(m)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre m qui sont orthogonales.

Définition 9 $W : \mathbb{M}_{m \times n} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ satisfait l'**isotropie** si pour tout couple (F, Q) de $\mathbb{M}_{m \times n} \times \mathcal{O}(m)$ on a la relation

$$W(FQ) = W(F)$$

Chapitre 3

DÉMARCHE ADOPTÉE

Notre objectif est de trouver le modèle asymptotique (modèle limite unidimensionnel) régissant l'équilibre du corps suivant l'intensité des forces.

Pour ce faire, nous allons procéder selon le schéma qui suit :

3.1 Première étape : Définition du problème

Nous allons définir le problème dans ses différentes variantes et pour des raisons pratiques nous parlerons au début de cette note plus de déformations et aussi par la suite plus de déplacements. Et c'est pour cette raison que nous citerons quelques rappels utiles.

Pour un déplacement v , l'énergie du système est de type

$$\mathcal{P}(v) = \int_{\Omega} W(\nabla v) dx - \bar{\eta} \mathcal{F}(v)$$

W représentant l'énergie élastique volumique, non négative.

\mathcal{F} une forme linéaire liée aux forces qui s'exercent sur le corps et

$\bar{\eta}$ l'intensité de ces forces.

La position d'équilibre stable du corps soumis à ce système de forces correspond aux champs de déplacements possédant la plus petite énergie

3.2 Deuxième étape : Paramétrisation

Nous allons transférer le problème dans un domaine fixe et plutôt que de considérer l'épaisseur de la poutre comme paramètre, nous allons prendre son élancement (rapport de la longueur sur l'épaisseur) afin de simplifier les différentes équations.

Le comportement asymptotique de u^ε , solution du problème, une fois paramétré $\varepsilon = \frac{R}{L}$ lorsque l'élanement tend vers l'infini, dépend fortement de l'ordre de grandeur de l'intensité du chargement.

On prendra aussi $\bar{\eta}$ une fonction de ε particulière $\bar{\eta} = \varepsilon^n \eta$ pour simplifier les écritures des différentes énergies.

3.3 Troisième étape : Différentes déductions

Après avoir décortiqué tout le problème (développement complet de $\mathcal{P}(v)$) en série entière de ε , nous allons identifier terme à terme selon les puissances du nouveau paramètre ε .

Cette méthode permet de donner l'allure du premier terme, voire les premiers termes du développement de la solution u^ε , ainsi que les équations qu'il(s) vérifie(nt).

On obtient ainsi une hiérarchie de modèles asymptotiques différents suivant l'ordre de grandeur du chargement.

cinq modèles se dégagent de l'étude selon l'intensité du chargement appliqué au corps [?]. Cependant seulement le cas non linéaire de tige inextensible nous intéresse.

Chapitre 4

RÉSULTATS OBTENUS

4.1 Ordre de grandeurs des énergies

Nous montrons que, si la densité des forces, supposées admettant un développement en série de ε , est en $\mathcal{O}(\varepsilon^{2n-2})$ avec $n \leq 2$ alors les déplacements u^ε solution du problème de minimisation de l'énergie du système dans le cas de l'élasticité tridimensionnelle non-linéaire, une fois le problème "mis à l'échelle", sont d'ordre 0.

L'énergie élastique est toujours du même ordre que l'énergie potentielle sauf quand $n = 1$.

n	$\mathcal{O}(u^\varepsilon)$	$\mathcal{O}(E(u^\varepsilon))$	$\mathcal{O}(\varepsilon^n \mathcal{F}(u^\varepsilon))$	$\mathcal{O}(\mathcal{W}(u^\varepsilon))$	$\mathcal{O}(\mathcal{P}(u^\varepsilon))$
$n \geq 2$	$n - 2$	$n - 1$	$2n - 2$	$2n - 2$	$2n - 2$
1	0	1	1	2	1
0	0	0	0	0	0

Tableau (1). Ordre des grandeurs suivant l'intensité du chargement

4.2 Forme des déplacements optimaux

On pose r l'ordre de l'énergie potentielle de $\mathcal{O}(\mathcal{P}(u^\varepsilon))$

$$r = \mathcal{O}(\mathcal{P}(u^\varepsilon))$$

$$r := n + \max\{0; n - 2\}.$$

Pour que les déformations soient de l'ordre indiqué dans le tableau (1), il faut que le(s) premier(s) terme(s) du développement des déplacements, $(u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots)$, soi(en)t de la forme qui suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0(x) = U(x_3) \\ U'(x_3) = (\mathcal{R}(x_3) - Id) e_3, \\ \mathcal{R}(x_3) \text{ est une matrice de rotation} \\ \\ u^1(x) = U(x_3) + (\mathcal{R}(x_3) - Id)(x - x_3 e_3) \end{array} \right.$$

4.3 Modèle asymptotique limite : Tige inextensible, élastiquement flexible

$n = 2$, alors $r = 2$ [?]

Les déplacements sont finis, les déformations sont petites.

$\mathcal{P}^2[v^\varepsilon]$ dépend de \mathcal{Q} , \bar{V} et v^2 .

La minimisation par rapport à v^2 conduit aux problèmes de flexion, extension et torsion, ce dernier fournissant en particulier le moment d'inertie à la torsion J_3 .

La minimisation par rapport à \bar{V} fournit $(\mathcal{R}^T U')_3 = 0$. \mathcal{R} s'obtient en minimisant sur $\{\mathcal{Q}; \mathcal{Q}(x_3) \text{ matrice de rotation}, \mathcal{Q}(0) = Id\}$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ J_{\alpha\beta} (\mathcal{Q}^T \mathcal{Q}')_{3\alpha}(x_3) (\mathcal{Q}^T \mathcal{Q}')_{3\beta}(x_3) + \frac{\mu}{E} J_3 (\mathcal{Q}^T \mathcal{Q}')_{12}(x_3)^2 \right\} dx_3 - \bar{\eta} \mathcal{F}^0(V)$$

sachant $V(x_3) = \int_0^{x_3} Q(z) e_3 dz$

Chapitre 5

POSITION DU PROBLÈME

Formuler les équations reliant u aux forces auxquelles le corps est soumis revient à trouver le champ de déplacements u traduisant l'équilibre de la structure.

5.1 Système de l'élasticité tridimensionnelle

On considère le corps élastique, occupant dans sa configuration de référence naturelle le cylindre (poutre), $\hat{\Omega} = \hat{S} \times (0, L)$, \hat{S} étant sa section de centre $(0, 0)$ et de rayon R , L sa longueur.

La poutre est **encastrée en une de ses extrémités** $\hat{\Gamma}_0 := \hat{S} \times \{0\}$ et tirée par une force dans la direction de l'axe e_3 en l'autre $\hat{\Gamma}_L := \hat{S} \times \{L\}$ et n'est soumise à aucune autre force autre que son propre poids.

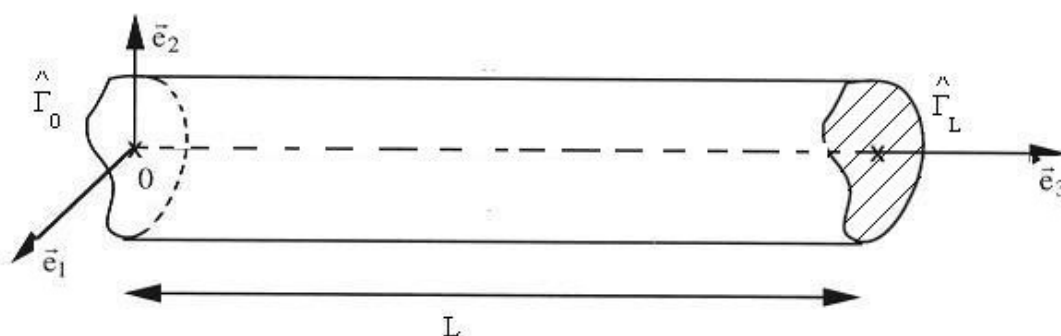


FIGURE 5.1 – Domaine $\hat{\Omega}$

$$\hat{\Omega} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3); (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{S} \text{ et } 0 \leq \hat{x}_3 \leq L\}$$

La déformation $\hat{\phi} : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ induit une configuration déformée $\hat{\phi}(\hat{\Omega})$ (c'est une application injective et préserve l'orientation autrement dit $\det [\hat{\nabla} \hat{\phi}(\hat{x})]$ est strictement positif pour tout \hat{x} de $\hat{\Omega}$).

$$\left(\hat{\nabla} \hat{\phi}(\hat{x}) \right)_{ij} = \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}).$$

$\hat{\phi}$ résout le système de l'élasticité tridimensionnelle non-linéaire

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\hat{\nabla}\hat{\phi}\hat{S}) = \hat{f} & \text{dans } \hat{\Omega} \\ \hat{\phi} = Id & \text{sur } \hat{\Gamma}_0 \\ \hat{\nabla}\hat{\phi}\hat{S} \cdot \nu = \hat{g} & \text{sur } \hat{\Gamma}_L \end{cases}$$

$\nu = (\nu^i e_i)$ étant le vecteur unitaire, ici la troisième composante de la base canonique de \mathbb{R}^3 .

\hat{S} est le second tenseur de Piolla-Kirchhoff et est donné par la relation :

$$\hat{S} = \hat{W}(\hat{\nabla}\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}) = \hat{S}(\hat{E}(\hat{\phi})) \text{ dans } \hat{\Omega}$$

$$\hat{E}(\hat{\phi}) = \hat{\nabla}\hat{\phi}^T \cdot \hat{\nabla}\hat{\phi} - 1$$

\hat{W} est appelée énergie élastique et \hat{E} le tenseur de Green-Lagrange .

Rivlin & Ericksen, en 1955 [?] ont prouvés que le second tenseur de Piolla-Kirchhoff doit nécessairement s'écrire

$$\hat{S}(\hat{E}) = \gamma_0(i(\hat{C}))1 + \gamma_1(i(\hat{C}))\hat{C} + \gamma_2(i(\hat{C}))\hat{C}^2$$

\hat{C} étant le tenseur de Cauchy-Green, $\hat{C} = 1 + 2\hat{E}$ et dont les principaux invariants l'ensemble $i(C)$ et γ_i trois fonctions à valeurs réelles.

Lorsque la configuration de référence est un état naturel [?],

$$2\hat{S}(\hat{E}) = \lambda \operatorname{Tr}[\hat{E}] \cdot 1 + 2\mu\hat{E} + o(\|\hat{E}\|)$$

$$\lambda = 2 \sum_{r=0}^2 \gamma'_r(i(1))(1, 2, 1) \text{ et } \mu = (\gamma_1 + 2\gamma_2)(i(1))$$

Le système précédent est **quasi-linéaire** du second ordre et même avec des hypothèses d'ellipticité, il est difficile de prouver l'existence de solutions.

La restriction aux cas de poutres constituées de **matériau de type St-Venant Kirchhoff**, donne pour le second tenseur de Piolla-Kirchhoff

$$2\hat{S}(\hat{E}) = \lambda \operatorname{Tr}[\hat{E}] \cdot 1 + 2\mu\hat{E}$$

λ et μ étant les constantes de Lamé qui sont des caractéristiques du matériau élastique de la poutre considérée sont tels que :

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0$$

Ce qui équivaut en termes de déformations

$$2 \hat{S} = \lambda \left(\text{Tr} \hat{\nabla} \hat{\phi}^T \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} - 3 \right) \cdot \text{Id} + 2 \mu \left(\hat{\nabla} \hat{\phi}^T \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} - \text{Id} \right)$$

les composantes du tenseur \hat{S} sont données par la relation

$$\hat{S}^{ij} = C^{ijkl} \hat{E}_{kl} \text{ et } C^{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ij} + 2 \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Définition 10 Notons $\hat{\Phi}$ l'espace des déformation admissibles. Il est défini par

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} = \{ \hat{\psi} : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; \text{ régulière, injective et telle que } \det [\hat{\nabla} \hat{\psi}(\hat{x})] > 0 \text{ dans } \hat{\Omega} \text{ et} \\ \hat{\psi} = \text{Id sur } \hat{\Gamma}_0 \} \end{aligned}$$

Le problème d'équilibre tridimensionnel correspond à minimiser sur $\hat{\Phi}$, l'énergie du système - Principe des travaux virtuels - [?].

Problème $\hat{\mathcal{P}}_1$

Trouver $\hat{\phi}$ dans $\hat{\Phi}$ telle que

$$\hat{\mathcal{P}}(\hat{\phi}) = \min_{\hat{\phi} \in \hat{\Phi}} [\hat{\mathcal{P}}(\hat{\psi})]$$

$$\hat{\mathcal{P}}(\hat{\psi}) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{W}(\hat{\nabla} \hat{\psi}) \, d\hat{x} + \hat{\mathcal{F}}(\hat{\psi})$$

\hat{W} est la densité d'énergie élastique totale du matériau et la fonction \mathcal{F} est l'énergie potentielle des forces appliquées au corps

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{\psi}) = - \int_{\hat{\Omega}} \hat{f} \cdot \hat{\psi} \, d\hat{x} - \int_{\hat{\Gamma}_L} \hat{g} \cdot \hat{\psi} \, d\hat{s}$$

$d\hat{x} := d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 d\hat{x}_3$ est la densité de volume dans $\hat{\Omega}$ et

$d\hat{s} := d\hat{x}_1 d\hat{x}_2$ est la densité de surface sur $\partial\hat{\Omega}$.

Remarque 7 Dans la suite c'est cette approche que nous adopterons, c'est à dire minimisation de l'énergie potentielle totale du système. Elle n'est valable que dans le cas des corps hyperélastiques.

Nous allons donner plus loin des hypothèses de généralisation à des densités de forces et donc de la fonction $\hat{\mathcal{F}}$ et de la densité d'énergie \hat{W} assurant l'existence de la fonctionnelle $\hat{\mathcal{P}}$, ci-dessus.

On désigne par $\hat{\sigma}_{ij}$, les composantes du champs de contraintes de Piolla-Kirchhoff et par \hat{u}_i celles du champs de déplacements $\hat{u} = \hat{\phi} - Id$.

L'équilibre des forces de pression, dans la configuration initiale (non déformée) :

$$\hat{\partial}_j \left(\hat{\sigma}_{ij} + \hat{\sigma}_{kj} \hat{\partial}_k \hat{u}_i \right) + \hat{f}_i = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}$$

(On admet la convention sur les sommations implicites des indices répétés).

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} \left(\hat{\nabla} \hat{u} \right) := \lambda \hat{E}_{pp}(\hat{u}) \delta_{ij} + 2\mu \hat{E}_{ij}(\hat{u})$$

$$\text{avec } 2 \hat{E}_{ij}(\hat{v}) := \hat{\partial}_i \hat{v}_j + \hat{\partial}_j \hat{v}_i + \hat{\partial}_i \hat{v}_k \hat{\partial}_j \hat{v}_k$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{\sigma}_{ij} + \hat{\sigma}_{kj} \hat{\partial}_k \hat{u}_i \right) \hat{v}_j &= \hat{g}_i \text{ sur } \hat{\Gamma}_L \\ \left(\hat{\sigma}_{ij} + \hat{\sigma}_{kj} \hat{\partial}_k \hat{u}_i \right) \hat{v}_j &= 0 \text{ sur } \partial \hat{S} \times [0, L] \\ \hat{u}_i &= 0 \text{ sur } \hat{\Gamma}_0 \text{ (condition d'encastrement)} \end{aligned}$$

Le milieu considéré étant élastique, le champ de contraintes est localement relié au champs de déformations exprimés par la relation $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{A}_{ijkl} \hat{\gamma}_{kl}(\hat{u})$ où les \hat{A}_{ijkl} sont les composantes du tenseur de rigidité défini précédemment.

Remarque 8 *Nous allons abandonner ce formalisme pour un autre plus usuel et plus pratique qu'est celui des déplacements au lieu des déformations.*

5.2 Formulation variationnelle

Pour plus de commodité dans la formulation variationnelle nous adopterons le formalisme qui suit : Pour un matériau hyperélastique, un minimum de régularité de la solution au problème est requis afin qu'il y ait une cohérence entre les équations qui seront définies ultérieurement.

Nous définissons au premier lieu l'espace de Sobolev, pour $\hat{\Omega} = \hat{S} \times (0, L)$,

$$\hat{\mathcal{W}}^{1,4}(\hat{\Omega}) := \left\{ \hat{v} = (\hat{v}_i); \hat{v}_i \in L^4(\hat{\Omega}); D^\alpha \hat{v}_i \in L^4(\hat{\Omega}) \right\} \text{ où } \alpha \text{ est un multi-indice tel que } 0 \leq |\alpha| \leq 1$$

Le problème $\hat{\mathcal{P}}_1$ est formellement équivalent au problème suivant (Principe des travaux virtuels correspondant à l'équilibre stable) dans l'espace :

$$\hat{\mathcal{V}}(\hat{\Omega}) := \left\{ \hat{v} = (\hat{v}_i) \in \hat{\mathcal{W}}^{1,4}(\hat{\Omega}); \hat{v} = 0 \text{ sur } \hat{\Gamma}_0 \right\}$$

Problème $\hat{\mathcal{P}}_2$

Trouver \hat{u} dans $\hat{\mathcal{V}}(\hat{\Omega})$ telle que

$$\int_{\hat{\Omega}} \{ \hat{\sigma}_{ij}(\hat{\nabla}\hat{u}) \cdot \hat{\partial}_j \hat{v}_i + \hat{\sigma}_{kj}(\hat{\nabla}\hat{u}) \hat{\partial}_k \hat{u}_i \hat{\partial}_j \hat{v}_i \} d\hat{x} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{f}_i \hat{v}_i d\hat{x} + \int_{\hat{\Gamma}_L} \hat{g}_i \hat{v}_i d\hat{s}$$

pour tout $\hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}(\hat{\Omega})$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij}(\hat{\nabla}\hat{u}) &= \lambda \hat{E}_{pp}(\hat{u}) \delta_{ij} + 2 \mu \hat{E}_{ij}(\hat{u}) \\ 2 \hat{E}_{ij}(\hat{u}) &= \hat{\partial}_i \hat{u}_j + \hat{\partial}_j \hat{u}_i + \hat{\partial}_i \hat{u}_k \hat{\partial}_j \hat{u}_k \end{aligned}$$

Le problème $\hat{\mathcal{P}}_2$ constitue le problème tridimensionnel de l'élasticité non-linéaire d'une poutre, constituée d'un matériau de type Saint Venant-Kirchhoff encastree en une de ses extrémités $\hat{\Gamma}_0$.

Le dernier problème est fondamentalement équivalent au problème $\hat{\mathcal{P}}_3$ de minimisation de l'énergie du système :

Problème $\hat{\mathcal{P}}_3$

Trouver \hat{u} dans $\hat{\mathcal{V}}(\hat{\Omega})$ telle que

$$\hat{\mathcal{P}}(\hat{u}) = \min_{\hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}(\hat{\Omega})} [\hat{\mathcal{P}}(\hat{v})]$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}(\hat{v}) &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{W}(\hat{F}(\hat{v})) d\hat{x} - \hat{\mathcal{F}}(\hat{v}) \\ 2 \hat{W}(\hat{F}) &= \lambda (\text{Tr} \hat{E})^2 + 2 \mu \hat{E} \cdot \hat{E} \\ 2 \hat{E}(\hat{v}) &= \hat{F}^T(\hat{v}) \cdot \hat{F}(\hat{v}) - Id \\ \hat{F}(\hat{v}) &= \hat{\nabla} \hat{v} + Id \end{aligned}$$

Le tenseur $\hat{E}(\hat{v})$ est appelé tenseur de Green-St-Venant associé au vecteur \hat{v} .

Remarque 9 \hat{W} , régulier, de classe au moins \mathcal{C}^0 , non négatif, ne dépend que de \hat{E} , admet au voisinage de $\hat{E} = 0$ (lorsque les déformations sont très petites) le développement

$$\begin{aligned} 2 \hat{W}(\hat{F}) &:= \lambda (\text{Tr} \hat{E})^2 + 2 \mu \hat{E} \cdot \hat{E} + o(\hat{E} \cdot \hat{E}) \text{ et} \\ \hat{W} &\text{ est nul en } \hat{E} = 0. \end{aligned}$$

Hypothèse 1 \hat{W} possède les propriétés de (poly- ou quasi-) convexité et de coercivité c'est à dire que pour tout δ positif strictement, il existe une constante c_δ , tels que si $\det(\hat{F}) \geq \delta$, alors $\hat{W}(\hat{F}) \leq c_\delta \left(1 + \|\hat{F}\|^p\right)$.

Hypothèse 2 $\det(\hat{F}) > 0$ (sinon $\hat{W}(\hat{F}) = +\infty$) condition dite de "non retournement".

La réduction du corps élastique, ici la poutre, à sa ligne moyenne (ici $[0, 1]$), nécessite une densité d'énergie infinie.

Remarque 10 Le chargement $\hat{\mathcal{F}} : \hat{\mathcal{V}}(\hat{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction régulière, nulle lorsque le corps est dans son état naturel.

Chapitre 6

MISE À L'ÉCHELLE ET PARAMÉTRISATION DU PROBLÈME

Le changement de domaine, précédemment annoncé donne les transformations de coordonnées de tout point \hat{x} de $\hat{\Omega}$ en un point $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\Omega = S \times (0, 1)$, S section de rayon 1, via une transformation bijective φ^ε , tel que :

$$x = \left(\frac{\hat{x}_1}{R}, \frac{\hat{x}_2}{R}, \frac{\hat{x}_3}{L} \right)$$

De ce fait, l'élément de volume $d\hat{x}$ dans $\hat{\Omega}$ devient $R^2 L dx$ dans Ω et l'élément de surface $d\hat{s}$ sur \hat{S} devient $R^2 ds$ dans S avec dx et ds les éléments de volume et de surface dans Ω et S respectivement.

Au déplacement arbitraire $\hat{v} = (\hat{v}_i) : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, on associe le déplacement

$$v = (v_i) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ défini par : } v(x) = \frac{\hat{v}(\hat{x})}{L} \text{ via la bijection } \varphi^\varepsilon.$$

Nous adopterons cette formulation pour tout déplacement admissible de $\hat{\mathcal{V}}(\hat{\Omega})$.

Au potentiel $\hat{W} : \hat{\Omega} \times \mathbb{M}_3^+ \rightarrow \mathbb{R}$, on associe le potentiel $W : \Omega \times \mathbb{M}_3^+ \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $W = \frac{\hat{W}}{E}$ (E étant le module de Poisson associé aux constantes physiques λ et μ du matériau).

$$E = \frac{\lambda}{2} (1 - 2\nu)^2 + \mu (1 + \nu^2), \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

Et enfin, afin de déplacer tout le problème $\hat{\mathcal{P}}_3$ sur le nouveau domaine $\mathcal{V}(\Omega)$, on associe au potentiel $\hat{\mathcal{F}} : \hat{\mathcal{V}}(\hat{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ du chargement, le potentiel $\mathcal{F} : \mathcal{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{F}^\varepsilon(v^\varepsilon) = \frac{\hat{\mathcal{F}}(\hat{v})}{F L}$$

En introduisant le paramètre de l'intensité des forces $\eta = \frac{F}{E R^2}$, l'énergie potentielle $\hat{\mathcal{P}}$ définie dans le problème $\hat{\mathcal{P}}_3$ peut s'écrire, vu aussi les relations précédentes, $E R^2 L \mathcal{P}^{\varepsilon\eta}(v)$

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{\varepsilon\eta}(v) = \mathcal{W}^\varepsilon(v) - \eta \mathcal{F}^\varepsilon(v) \\ \mathcal{W}^\varepsilon(v) = \int_{\Omega} W(F^\varepsilon(v)) dx \end{cases}$$

On s'est donc ramené à la recherche d'un déplacement $u^{\varepsilon\eta}$ minimisant la fonctionnelle $\mathcal{P}^{\varepsilon\eta}$ problème de minimisation paramétré par ε et η .

Le comportement de $u^{\varepsilon\eta}$ au voisinage de $\varepsilon = 0$ dépend de l'ordre de grandeur du paramètre η . **L'objectif principal est d'étudier cette dépendance.**

Comme nous voulons le faire varier depuis 0 jusqu'à des valeurs arbitrairement grandes, nous avons à le comparer aux puissances de ε . Nous considérons η comme fonction donnée η^ε de ε .

Nous nous sommes limités au cas où η^ε est proportionnel à une puissance entière de ε , $\eta^\varepsilon = \bar{\eta} \varepsilon^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $\bar{\eta} \in \mathbb{R}$.

Il s'agit finalement d'étudier le comportement asymptotique, lorsque ε tend vers zéro, du déplacement u^ε minimisant l'énergie potentielle.

Pour rappel, la justification des modèles de structures minces non-linéaires pour des petits déplacements s'est faite par la méthode des développements asymptotiques en contraintes - déplacements par les professeurs P.G. Ciarlet et Ph. Destynder [?] et en déplacements par ce dernier [?].

Le transport du problème sur l'ouvert fixe nous conduit au :

Théorème 1 *Pour \hat{u} dans $\hat{V}(\hat{\Omega})$ solution du problème $\hat{\mathcal{P}}_3$, le déplacement $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$ qui lui est correspondant est solution du problème $E R^2 L \mathcal{P}^\varepsilon$ de minimisation, sur l'espace $V^\varepsilon(\Omega)$, $V^\varepsilon(\Omega) := \{v^\varepsilon, v^\varepsilon \in W^{1,4}(\Omega); v^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ de l'énergie du système*

$$\mathcal{P}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \min_{v^\varepsilon \in V^\varepsilon(\Omega)} [\mathcal{P}^\varepsilon(v^\varepsilon)]$$

$$\mathcal{P}^{\varepsilon\eta}(v) = \mathcal{W}^\varepsilon(v) - \bar{\eta} \varepsilon^n \mathcal{F}^\varepsilon(v)$$

$$\mathcal{W}^\varepsilon(v) = \int_{\Omega} W(F^\varepsilon(v)) dx$$

$$\text{où } 2 E W(F^\varepsilon) := \lambda (\text{Tr} E^\varepsilon)^2 + 2 \mu E^\varepsilon \cdot E^\varepsilon$$

Définition 11 *Pour toute fonction f^ε développable en série entière de ε , on appelle **ordre** de la fonction le plus petit entier relatif dont le coefficient du développement est non nul et est noté $\mathcal{O}(f^\varepsilon)$:*

$$f^\varepsilon = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i f^i; \mathcal{O}(f^\varepsilon) = \inf \{i \in \mathbb{Z} : f^i \neq 0\}$$

Hypothèse 3 *Admettons, formellement, le développement du chargement \mathcal{F}^ε en série entière de ε*

$$\mathcal{F}^\varepsilon := \mathcal{F}^0 + \varepsilon^1 \mathcal{F}^1 + \varepsilon^2 \mathcal{F}^2 + \dots$$

Hypothèse 4 *Les éléments \mathcal{F}^n de la série du chargement (développement appliqué à la poutre) sont de type $(L^2(\Omega))^3$ pour tout n dans \mathbb{N} ensemble des entiers naturels.*

Hypothèse 5 *Pour tout n dans \mathbb{Z} , ensemble des entiers relatifs, les éléments du développement en série de la solution u^ε sont dans $(W^{1,4}(\Omega))^3$.*

Cette dernière hypothèse est d'ordre physique puisque on impose la restriction de u_α^p sur S est au moins $\mathcal{C}^1(S)$ et l'application $\varphi_\varepsilon : S_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2) + u_\alpha^p(x_1, x_2, a)$ préserve l'orientation pour tout a de 0 à 1 inclus.

Ces différentes hypothèses sont très usuelles et que nous trouvons dans tout les ouvrages utilisant la méthode des développement asymptotique comme [?].

Hypothèse 6 *Pour information, pour les deux premiers modèles - modèles linéaires exposés dans l'article - on suppose que la restriction de $\mathcal{F}^{0'}(0)$ sur*

$V(\Omega) := \{V = V(x_3); v_\alpha \in H^2(0, 1), V_3 = 0 \text{ et } V(0) = V'(0) = 0\}$, *dérivée de \mathcal{F}^0 en 0 n'est pas nulle.*

La proposition qui suit est très importante. Nous lui ferons référence à chaque besoin, essentiellement lors de l'annulation des diverses "énergies partielles : $\mathcal{P}^q, \mathcal{P}^{q+1}, \dots$ ".

Proposition 1 : *Si $W(F) = 0$ alors $E = 0$ pour $2W(F) = \lambda(\text{Tr}E)^2 + 2\mu E \cdot E$*

En effet, si l'on décompose l'opérateur matriciel E en deux parties orthogonales

$$E = \frac{\text{Tr}E}{3} Id + E^D \text{ telle que } E^D, \text{ appelé déviateur, vérifie } \text{Tr}E^D = 0,$$

il vient $E \cdot E = \frac{(\text{Tr}E)^2}{9} 3 + E^D \cdot E^D$ car $E^D \cdot Id = \text{Tr}E^D = 0$ et $Id \cdot Id = 3$.

Ainsi, $2W(F) = \frac{2}{3} (3\lambda + 2\mu) E_{\alpha\alpha}^2 + 4\mu E^D \cdot E^D$ et μ étant toujours positive, le membre de droite l'est aussi et comme $3\lambda + 2\mu > 0$ alors $E_{\alpha\beta}^2 = 0$ pour tout α et β dès que la quantité $W(F)$ est nulle.

Chapitre 7

ESTIMATIONS DES ÉNERGIES

Ici, on montre de façon très technique la méthode qui nous permet de retrouver les résultats concernant les différents ordres de grandeurs des différentes énergies et différents tenseurs et ce en partant de la définition du déplacement u^ε et du potentiel de Green-Lagrange $E^\varepsilon(u^\varepsilon)$.

7.1 Déplacements

Toute la théorie de l'analyse asymptotique repose sur le fait qu'on admet l'écriture de la solution aux problèmes de vibrations de structures, à la détermination des différentes contraintes énergétiques (efforts tranchants, moments de torsion, etc ...) en série entière.

$$u^\varepsilon = \varepsilon^p u^0 + \varepsilon^{p+1} u^1 + \varepsilon^{p+2} u^2 + \dots$$

7.2 Déformations

Le potentiel de Green-Lagrange $E^\varepsilon(u^\varepsilon)$ s'écrit :

$$E^\varepsilon(v) = \frac{1}{2} (F^\varepsilon(v))^T \cdot F^\varepsilon(v) - Id = \begin{pmatrix} E^\varepsilon(v)_{\alpha\beta} & E^\varepsilon(v)_{\alpha 3} \\ E^\varepsilon(v)_{3\beta} & E^\varepsilon(v)_{33} \end{pmatrix}$$

avec

$$F^\varepsilon(v) = Id + \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right)$$

Il vient pour u^ε ,

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varepsilon} (u_{\alpha,\beta}^\varepsilon + u_{\beta,\alpha}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} u_{i,\alpha}^\varepsilon u_{i,\beta}^\varepsilon$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = u_{\alpha,3}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{3,\alpha}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{i,\alpha}^\varepsilon u_{i,3}^\varepsilon$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} = 2 u_{3,3}^\varepsilon + u_{i,3}^\varepsilon u_{i,3}^\varepsilon$$

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{3\alpha}$$

7.3 Énergie élastique

L'énergie élastique s'exprime en fonction des deux définitions précédentes et donc du potentiel de Green-Lagrange $E^\varepsilon \mathcal{W}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} (\text{Tr} E^\varepsilon(u^\varepsilon))^2 + \mu E^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot E^\varepsilon(u^\varepsilon) \right) dx$

Cas $p \geq 3$: $u^\varepsilon = \varepsilon^p u^0 + \varepsilon^{p+1} u^1 + \varepsilon^{p+2} u^2 + \dots$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} = \varepsilon^{p-1} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0) + \varepsilon^p (u_{\alpha,\beta}^1 + u_{\beta,\alpha}^1) + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = \varepsilon^{p-1} u_{3,\alpha}^0 + \varepsilon^p (u_{3,\alpha}^1 + u_{\alpha,3}^0) + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} = 2 \varepsilon^p u_{3,3}^0 + \dots$$

$$\begin{aligned} 2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} &= \varepsilon^{p-1} E_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon^p E_{\alpha\beta}^1 + \dots \\ 2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} &= \varepsilon^{p-1} E_{\alpha 3}^0 + \varepsilon^p E_{\alpha 3}^1 + \dots \\ 2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} &= \varepsilon^p E_{33}^1 + \dots \end{aligned}$$

$$2 E_{\alpha\beta}^0 = u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 \quad 2 E_{\alpha\beta}^1 = u_{\alpha,\beta}^1 + u_{\beta,\alpha}^1$$

$$2 E_{\alpha 3}^0 = u_{3,\alpha}^0 \quad 2 E_{\alpha 3}^1 = u_{3,\alpha}^1 + u_{\alpha,3}^0$$

$$2 E_{33}^0 = 0 \quad 2 E_{33}^1 = u_{3,3}^0$$

u^ε	$E^0 \neq 0$	$E^1 \neq 0$	$u^0 \neq 0$
\mathcal{W}^ε	ε^{2p-2}	ε^{2p}	ε^{2p+2}

$$\text{Cas } p = 2 : u^\varepsilon = \varepsilon^2 u^0 + \varepsilon^3 u^1 + \varepsilon^4 u^2 + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} = \varepsilon (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0) + \varepsilon^2 (u_{\alpha,\beta}^1 + u_{\beta,\alpha}^1 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^0) +$$

$$\varepsilon^3 (u_{\alpha,\beta}^2 + u_{\beta,\alpha}^2 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^1 + u_{i,\beta}^0 u_{i,\alpha}^1) + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = \varepsilon u_{3,\alpha}^0 + \varepsilon^2 (u_{\alpha,3}^0 + u_{3,\alpha}^1) + \varepsilon^3 (u_{\alpha,3}^1 + u_{3,\alpha}^2 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^0) + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} = 2 \varepsilon^2 u_{3,3}^0 + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} = \varepsilon E_{\alpha\beta}^1 + \varepsilon^2 E_{\alpha\beta}^2 + \varepsilon^3 E_{\alpha\beta}^3 + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = \varepsilon E_{\alpha 3}^1 + \varepsilon^2 E_{\alpha 3}^2 + \varepsilon^3 E_{\alpha 3}^3 + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} = \varepsilon^2 E_{33}^2 + \varepsilon^3 E_{33}^3 + \dots$$

$$2 E_{\alpha\beta}^1 = u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 \quad 2 E_{\alpha\beta}^2 = u_{\alpha,\beta}^1 + u_{\beta,\alpha}^1 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^0$$

$$2 E_{\alpha 3}^1 = u_{3,\alpha}^0 \quad 2 E_{\alpha 3}^2 = u_{\alpha,3}^0 + u_{3,\alpha}^1$$

$$2 E_{33}^1 = 0 \quad 2 E_{33}^2 = 2 u_{3,3}^0$$

$$2 E_{\alpha\beta}^3 = u_{\alpha,\beta}^2 + u_{\beta,\alpha}^2 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^1 + u_{i,\beta}^0 u_{i,\alpha}^1$$

$$2 E_{\alpha 3}^3 = u_{\alpha,3}^1 + u_{3,\alpha}^2 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^0$$

$$2 E_{33}^3 = \dots$$

u^ε	$E^1 \neq 0$	$E^2 \neq 0$	$u^0 \neq 0$
\mathcal{W}^ε	ε^2	ε^4	ε^6

$$\text{Cas } p = 1 : u^\varepsilon = \varepsilon u^0 + \varepsilon^2 u^1 + \varepsilon^3 u^2 + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varepsilon} [(\varepsilon u_{\alpha,\beta}^0 + \varepsilon^2 u_{\alpha,\beta}^1 + \varepsilon^3 u_{\alpha,\beta}^2 + \dots) + (\varepsilon u_{\beta,\alpha}^0 + \varepsilon^2 u_{\beta,\alpha}^1 + \varepsilon^3 u_{\beta,\alpha}^2 + \dots)] +$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} (\varepsilon^2 u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^0 + \varepsilon^3 u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^1 + \varepsilon^3 u_{i,\beta}^0 u_{i,\alpha}^1 + \dots)$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = \varepsilon u_{\alpha,3}^0 + \varepsilon^2 u_{\alpha,3}^1 + \dots + u_{3,\alpha}^0 + \varepsilon u_{3,\alpha}^1 + \dots + \varepsilon u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^0$$

Donc

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} = (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^0) + \varepsilon (u_{\alpha,\beta}^1 + u_{\beta,\alpha}^1 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^1 + u_{i,\beta}^0 u_{i,\alpha}^1) + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = u_{\alpha,3}^0 + \varepsilon (u_{3,\alpha}^0 + u_{3,\alpha}^1 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^0) + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} = 2 u_{3,3}^0 + \dots$$

$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} =$	$E_{\alpha\beta}^0 +$	$\varepsilon E_{\alpha\beta}^1 +$	\dots
$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} =$	$E_{\alpha 3}^0 +$	$\varepsilon E_{\alpha 3}^1 +$	\dots
$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} =$	$\varepsilon E_{33}^1 +$	\dots	

$$2 E_{\alpha\beta}^0 = u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^0 \quad 2 E_{\alpha\beta}^1 = u_{\alpha,\beta}^1 + u_{\beta,\alpha}^1 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^1 + u_{i,\beta}^0 u_{i,\alpha}^1$$

$$2 E_{\alpha 3}^0 = u_{\alpha,3}^0 \quad 2 E_{\alpha 3}^1 = u_{\alpha,3}^1 + u_{3,\alpha}^1 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^0$$

$$2 E_{33}^0 = u_{3,3}^0 \quad 2 E_{33}^1 = 2 u_{3,3}^1$$

u^ε	$E^1 \neq 0$	$E^2 \neq 0$	$u^0 \neq 0$
\mathcal{W}^ε	1	ε^2	ε^4

Cas $p = 0 : u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} =$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[(u_{\alpha,\beta}^0 + \varepsilon u_{\alpha,\beta}^1 + \varepsilon^2 u_{\alpha,\beta}^2 + \dots) + (u_{\beta,\alpha}^0 + \varepsilon u_{\beta,\alpha}^1 + \varepsilon^2 u_{\beta,\alpha}^2 + \dots) \right] +$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} (u_{i,\alpha}^0 + \varepsilon u_{i,\alpha}^1 + \varepsilon^2 u_{i,\alpha}^2 + \dots) (u_{i,\beta}^0 + \varepsilon u_{i,\beta}^1 + \varepsilon^2 u_{i,\beta}^2 + \dots)$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = (u_{\alpha,3}^0 + \varepsilon u_{\alpha,3}^1 + \varepsilon^2 u_{\alpha,3}^2 + \dots) +$$

$$\frac{1}{\varepsilon} (u_{3,\alpha}^0 + \varepsilon u_{3,\alpha}^1 + \varepsilon^2 u_{3,\alpha}^2 + \dots) +$$

$$\frac{1}{\varepsilon} (u_{i,\alpha}^0 + \varepsilon u_{i,\alpha}^1 + \varepsilon^2 u_{i,\alpha}^2 + \dots) (u_{i,3}^0 + \varepsilon u_{i,3}^1 + \varepsilon^2 u_{i,3}^2 + \dots)$$

Donc

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varepsilon^2} u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^0 + \frac{1}{\varepsilon} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + 2 u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^1) +$$

$$(u_{\alpha,\beta}^1 + u_{\beta,\alpha}^1 + 2 u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^2 + u_{i,\alpha}^1 u_{i,\beta}^1) + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = \frac{1}{\varepsilon} (u_{3,\alpha}^0 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^0) + (u_{\alpha,3}^0 + u_{3,\alpha}^1 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^1 + u_{i,3}^0 u_{i,\alpha}^1) + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} = 2 u_{3,3}^0 + u_{i,3}^0 u_{i,3}^0 + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-2} E_{\alpha\beta}^{-2} + \varepsilon^{-1} E_{\alpha\beta}^{-1} + E_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon E_{\alpha\beta}^1 + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = \varepsilon^{-1} E_{\alpha 3}^{-1} + E_{\alpha 3}^0 + \varepsilon E_{\alpha 3}^1 + \dots$$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} = E_{33}^0 + \varepsilon E_{33}^1 + \dots$$

$$2 \ E_{\alpha\beta}^{-2} = u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^0 \quad 2 \ E_{\alpha\beta}^{-1} = u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + 2 u_{i,\alpha}^0 u_{\beta,\alpha}^1$$

$$2 \ E_{\alpha 3}^{-2} = 0 \quad 2 \ E_{\alpha 3}^{-1} = u_{3,\alpha}^0 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^0$$

$$2 \ E_{33}^{-2} = 0 \quad 2 \ E_{33}^{-1} = 0$$

$$2 \ E_{\alpha\beta}^0 = u_{\alpha,\beta}^1 + u_{\beta,\alpha}^1 + 2 u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^2 + u_{i,\alpha}^1 u_{i,\beta}^1$$

$$2 \ E_{\alpha 3}^0 = u_{\alpha,3}^0 + u_{3,\alpha}^1 + u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^1 + u_{i,3}^0 u_{i,\alpha}^1$$

$$2 \ E_{33}^0 = 2 u_{3,3}^0 + u_{i,3}^0 u_{i,3}^0$$

u^ε	$E^{-2} \neq 0$	$E^{-1} \neq 0$	$E^0 \neq 0$	$u^0 \neq 0$
\mathcal{W}^ε	ε^{-4}	ε^{-2}	1	ε^2

Cas $p \leq -1$: $u^\varepsilon = \varepsilon^p u^0 + \varepsilon^{p+1} u^1 + \varepsilon^{p+2} u^2 + \dots$

$$2 \ E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} = \varepsilon^{2p-2} u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^0 + \dots$$

$$2 \ E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} = \varepsilon^{2p-1} u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^0 + \dots$$

$$2 \ E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} = \varepsilon^{2p} \varepsilon u_{i,3}^0 u_{i,3}^0 + \dots$$

$2 \ E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha\beta} =$	$\varepsilon^{2p-2} E_{\alpha\beta}^{2p-2} +$	$\varepsilon^{2p-1} E_{\alpha\beta}^{2p-1} +$	$\varepsilon^{2p} E_{\alpha\beta}^{2p} + \dots$
$2 \ E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{\alpha 3} =$		$\varepsilon^{2p-1} E_{\alpha 3}^{2p-1} +$	$\varepsilon^{2p} E_{\alpha 3}^{2p} + \dots$
$2 \ E^\varepsilon(u^\varepsilon)_{33} =$			$\varepsilon^{2p} E_{33}^{2p} + \dots$

$$2 \ E_{\alpha\beta}^{2p-2} = u_{i,\alpha}^0 u_{i,\beta}^0 \quad 2 \ E_{\alpha\beta}^{2p-1} = \dots \quad 2 \ E_{\alpha\beta}^{2p} = \dots$$

$$2 \ E_{\alpha 3}^{2p-2} = 0 \quad 2 \ E_{\alpha 3}^{2p-1} = u_{i,\alpha}^0 u_{i,3}^0 \quad 2 \ E_{\alpha 3}^{2p} = \dots$$

$$2 \ E_{33}^{2p-2} = 0 \quad 2 \ E_{33}^{2p-1} = 0 \quad 2 \ E_{33}^{2p} = u_{i,3}^0 u_{i,3}^0$$

u^ε	$u^0 \neq 0$
\mathcal{W}^ε	$\geq \varepsilon^{4p}$

Chapitre 8

MODÈLE DE SAINT-VENANT DE FLEXION, EXTENSION ET TORSION

Evidemment et comme nous en avons précédemment parlé, nous n'essayerons pas de donner une justification mathématique à la méthode des développements asymptotiques ni même les résultats de convergence. Des travaux ont déjà été fait auparavant.

$$\mathcal{O}(\varepsilon^n \mathcal{F}^\varepsilon(u^\varepsilon)) = 2$$

8.1 Déplacement optimal

Théorème 2 *Pour un chargement d'ordre 2, la solution du problème u^ε est d'ordre 0,*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(u^\varepsilon) &= 0 \\ u^\varepsilon &= u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots \end{aligned}$$

Le premier terme u^0 du développement de u^ε ne dépend que de la troisième composante x_3 de x

$$u^0(x) = U(x_3)$$

Il existe une matrice de rotation $\mathcal{R}(x_3)$ ne dépendant que de x_3 telle que,

$$U'(x_3) = (\mathcal{R}(x_3) - Id) e_3$$

Théorème 3 *Il existe un vecteur $\bar{U}(x_3)$ ne dépendant que de x_3 tel que le second terme u^1 du développement de la solution u^ε est de type*

$$u^1(x) = \bar{U}(x_3) + (\mathcal{R}(x_3) - Id)(x - x_3 e_3)$$

En effet, le tenseur E s'écrit : $2 E^\varepsilon(u^\varepsilon) = (F^\varepsilon(v^\varepsilon))^T (F^\varepsilon(v^\varepsilon)) - Id$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon) = [(Id + H^\varepsilon(v^\varepsilon))]^T [(Id + H^\varepsilon(v^\varepsilon))] - Id$$

et si l'on note, pour $v^\varepsilon = v^0 + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + \dots$,
 $H_{-1}(v) = \left[\frac{\partial v^0}{\partial x_1} \mid \frac{\partial v^0}{\partial x_2} \mid 0 \right]$, $H_0(v) = \left[\frac{\partial v^1}{\partial x_1} \mid \frac{\partial v^1}{\partial x_2} \mid \frac{\partial v^0}{\partial x_3} \right]$, $H_1(v) = \left[\frac{\partial v^2}{\partial x_1} \mid \frac{\partial v^2}{\partial x_2} \mid \frac{\partial v^1}{\partial x_3} \right]$
 et $H_k(v) = \left[\frac{\partial v^{k-1}}{\partial x_1} \mid \frac{\partial v^{k-1}}{\partial x_2} \mid \frac{\partial v^{k-2}}{\partial x_3} \right]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$
 alors $H^\varepsilon(v^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} H_{-1}(v) + H_0(v) + \varepsilon H_1(v) + \varepsilon^2 H_2(v) + \dots$

$$2 E^\varepsilon(v^\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} H_{-1}(v) + (H_0(v) + Id) + \varepsilon^1 H_1(v) + \dots \\ \varepsilon^{-1} H_{-1}(v) + (H_0(v) + Id) + \varepsilon^1 H_1(v) + \dots \end{bmatrix}^T - Id$$

$$2 E^\varepsilon(v^\varepsilon) = \varepsilon^{-2} H_{-1}(v)^T H_{-1}(v)$$

$$+ \varepsilon^{-1} [H_{-1}(v) + H_{-1}^T(v) + H_{-1}^T(v) H_0(v) + H_0^T(v) H_{-1}(v)]$$

$$+ [(H_0(v) + Id)^T (v) (H_0(v) + Id) (v) + H_{-1}^T(v) H_1(v) + H_1^T(v) H_{-1}(v)]$$

$$+ \varepsilon [\dots]$$

$$+ \dots$$

- Id

et aussi en adoptant l'écriture $H_k^L(v) = H_k(v) + H_k^T(v)$ et $H_{ij}^{NL}(v) = H_i(v) H_j^T(v)$
 alors

$$2 E^\varepsilon(v^\varepsilon) = \varepsilon^{-2} H_{-1-1}^{NL}(v)$$

$$+ \varepsilon^{-1} [H_{-1}^L(v) + H_{0-1}^{NL}(v) + H_{-10}^{NL}(v)]$$

$$+ [(H_0(v) + Id)^T (H_0(v) + Id) + H_{1-1}^{NL}(v) + H_{-11}^{NL}(v) - Id]$$

$$+ \varepsilon [\dots]$$

$$+ \dots$$

L'énergie du système se décompose donc en

$$\mathcal{P}^\varepsilon(v^\varepsilon) = \sum_{k \geq -4} \varepsilon^k \mathcal{P}^k(v)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-4}(v) &= \int_{\Omega} \mathcal{W}(F^{-4}(v)) \, dx \\ 2 E \mathcal{W}(F^{-4}) &= \lambda (Tr H_{-1-1}^{NL}(v))^2 + 2 \mu H_{-1-1}^{NL}(v) \cdot H_{-1-1}^{NL}(v) \\ \mathcal{P}^{-3}(v) &= \int_{\Omega} \mathcal{W}(F^{-3}(v)) \, dx \\ 2 E \mathcal{W}(F^{-3}) &= 2 \lambda Tr H_{-1-1}^{NL}(v) Tr (H_{-1}^L(v) + H_{-10}^{NL}(v) + H_{0-1}^{NL}(v)) + \\ &\quad \mu H_{-1-1}^{NL}(v) \cdot (H_{-1}^L(v) + H_{-10}^{NL}(v) + H_{0-1}^{NL}(v)) + \\ &\quad \mu (H_{-1}^L(v) + H_{-10}^{NL}(v) + H_{0-1}^{NL}(v)) \cdot H_{-1-1}^{NL}(v) \dots \end{aligned}$$

... etc.

En comparant terme à terme les éléments du problème de minimisation originel de l'énergie du système nous pouvons déduire

Première étape :

$$\mathcal{P}^{-4}(u^\varepsilon) = 0 \quad (\implies \mathcal{W}(F^{-4})(u) = 0)$$

$$\text{C'est à dire } \lambda (Tr H_{-1-1}^{NL}(u))^2 + 2 \mu H_{-1-1}^{NL}(u) \cdot H_{-1-1}^{NL}(u) = 0$$

$$\text{Et donc en appliquant la proposition, on a : } H_{-1-1}^{NL}(u) = 0$$

$$H_{-1-1}^{NL}(u) = 0 \iff H_{-1}(u) = 0$$

$$\text{Donc } H_{-1}(u) = 0 \iff u_{,\alpha}^0 = 0 \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_\alpha} = 0 \right)$$

Il existe donc un vecteur U de x_3 , tels que, le premier terme du développement u^0 de u^ε , solution du problème \mathcal{P}^ε , s'écrit

$$u^0(x) = U(x_3)$$

Deuxième étape :

$$\begin{aligned} 2 E^\varepsilon(v^\varepsilon) &= \left[(H_0(v) + Id)^T (H_0(v) + Id) - Id \right] \\ &+ \varepsilon \left[\dots \right] \\ &+ \varepsilon^2 \left[\dots \right] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Un même raisonnement que pour l'étape d'avant nous conduit à $(H_0(u) + Id)^T (H_0(u) + Id) - Id = 0$

$$(H_0(u) + Id)^T (H_0(u) + Id) = Id$$

Comme $\det F^\varepsilon > 0$ donc $\det (H_0(u) + Id) \geq 0$.

On en déduit l'existence d'une matrice de rotation $\mathcal{R}(x)$ telle que $(H_0(u) + Id) = \mathcal{R}(x)$

Remarque 11 *La matrice de rotation \mathcal{R} ne dépend que de x_3 .*

$$\text{En effet, } H_0(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \frac{\partial u^1}{\partial x_2} & \frac{\partial u^0}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}(x) = \left(\left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_1} \right] \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_2} \right] \left[\vec{e}_3 + \vec{U}' \right] \right)$$

La matrice de rotation $\mathcal{R}(x)$ est orthogonale donc ses vecteurs colonnes sont de norme 1,

$$\left\| \vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_1} \right\| = 1, \quad \left\| \vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_2} \right\| = 1 \quad \text{et} \quad \left\| \vec{e}_3 + \vec{U}' \right\| = 1$$

Ces vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux,

$$\left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_1} \right] \cdot \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_2} \right] = 0$$

$$\left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_2} \right] \cdot \left[\vec{e}_3 + \vec{U}' \right] = 0$$

$$\left[\vec{e}_3 + \vec{U}' \right] \cdot \left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_1} \right] = 0$$

Ainsi, nous pouvons voir facilement les relations suivantes, pour tout α

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_1} \right] \cdot \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_2} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^1}}{\partial x_1} \right] \cdot \left[\vec{e}_3 + \vec{U}' \right] = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] \cdot \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] \cdot \left[\vec{e}_3 + \vec{U}^I \right] = 0 \end{array} \right.$$

Finalement,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_1} \right] // \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] // \left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_1} \right] \end{array} \right.$$

mais comme

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right]$$

il vient alors,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] = 0$$

De l'égalité

$$\left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_1} \right] \cdot \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] = 0$$

on a,

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_1} \right] \cdot \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] + \left[\vec{e}_1 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_1} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\vec{e}_2 + \frac{\overrightarrow{\partial u^I}}{\partial x_2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\vec{e}_1 + \frac{\partial u^I}{\partial x_1} \right] \cdot \left[\vec{e}_2 + \frac{\partial u^I}{\partial x_2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\vec{e}_2 + \frac{\partial u^I}{\partial x_2} \right] \cdot \left[\vec{e}_1 + \frac{\partial u^I}{\partial x_1} \right] = 0$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\vec{e}_1 + \frac{\partial u^I}{\partial x_1} \right] = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\vec{e}_2 + \frac{\partial u^I}{\partial x_2} \right] = 0$$

et donc les vecteurs $\left[\vec{e}_1 + \frac{\partial u^I}{\partial x_1} \right]$ et $\left[\vec{e}_2 + \frac{\partial u^I}{\partial x_2} \right]$ ne dépendent que de x_3 .

Finalement $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(x_3)$

On a donc $(H_0(u) + Id) = \mathcal{R}(x_3)$

Ce qui termine la démonstration du théorème puisque $\mathcal{R}(x_3) e_3 = e_3 + U'(x_3)$

$$U'(x_3) = (\mathcal{R}(x_3) - Id) e_3$$

Fin théorème 2.

Nous avons les résultats suivants

$$\left[\vec{e}_1 + \frac{\partial u^I}{\partial x_1} \right] = \mathcal{R}(x_3) \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \left[\vec{e}_2 + \frac{\partial u^I}{\partial x_2} \right] = \mathcal{R}(x_3) \vec{e}_2.$$

La première égalité donne l'existence d'une fonction $\vec{\xi}$ indépendante de x_1 telle que

$$\vec{u}^1(x) = -x_1 \vec{e}_1 + \mathcal{R}(x_3) (x_1 \vec{e}_1) + \vec{\xi}(x_2, x_3)$$

que nous remplaçons dans la seconde

$$\frac{\partial \vec{\xi}(x_2, x_3)}{\partial x_2} + \vec{e}_2 = \mathcal{R}(x_3) \vec{e}_2 \quad \text{par ce que} \quad \frac{\partial u^I}{\partial x_2} = \frac{\partial \vec{\xi}(x_2, x_3)}{\partial x_2}$$

$$\text{Et donc} \quad \frac{\partial \vec{\xi}(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -\vec{e}_2 + \mathcal{R}(x_3) \vec{e}_2$$

Finalement, $\vec{\xi}(x_2, x_3) = -x_2 \vec{e}_2 + \mathcal{R}(x_3) (x_2 \vec{e}_2) + \xi(x_3)$ et donc

$$\vec{u}^1(x) = -x_\alpha e_\alpha + \mathcal{R}(x_3) (x_\alpha e_\alpha) + \xi(x_3)$$

D'où l'existence d'un vecteur \vec{U} tel que

$$u^1(x) = \vec{U}(x_3) + (\mathcal{R}(x_3) - Id) (x - x_3 e_3)$$

Fin théorème 3.

8.2 Modèle asymptotique

On pose $\mathcal{V}(\Omega) = \{v^\varepsilon = v^0 + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + \dots / v^0(x) = V(x_3)\}$
 il existe une matrice de rotation $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(x_3)$, $\mathcal{Q}(0) = Id$ telle que
 $V'(x_3) = (\mathcal{Q}(x_3) - Id) e_3$ $v^1(x) = \bar{V}(x_3) + (\mathcal{Q}(x_3) - Id)(x - x_3 e_3) \forall x$

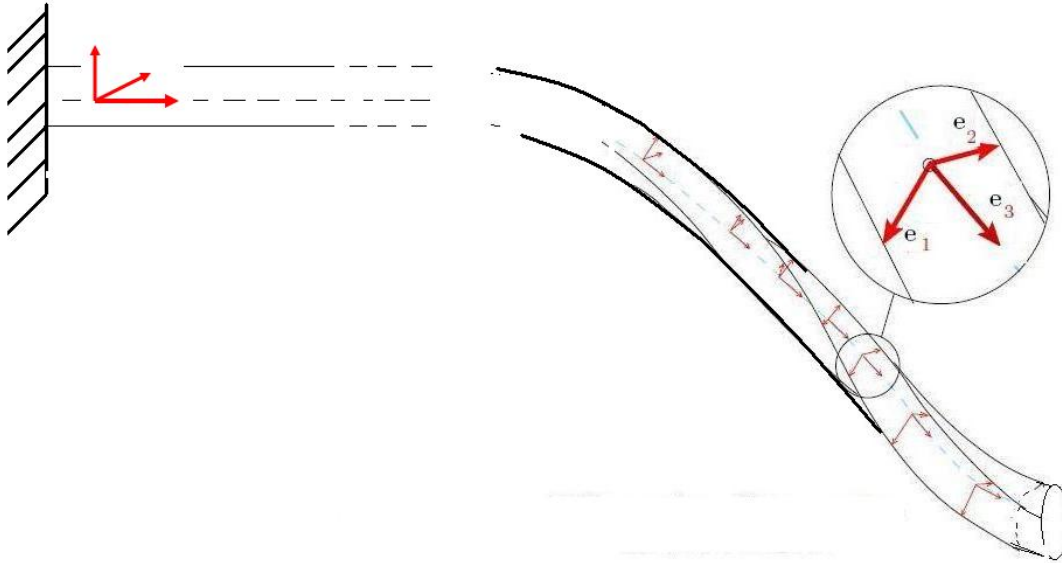


FIGURE 8.1 – Déformation d'une poutre inextentionnelle

Théorème 4 $u^\varepsilon \in \mathcal{V}(\Omega)$, et minimise la fonctionnelle énergétique \mathcal{P} sur l'espace $\mathcal{V}(\Omega)$

$$\begin{cases} \mathcal{P}(v) = \mathcal{W}(v) - \bar{\eta} \mathcal{F}^0(v) \\ \mathcal{W}(v) = \int_0^1 W(F(v)) dX_3 \end{cases}$$

$$2W(v) = J_{\alpha\beta} (Q^T DQ)_{3\alpha} (Q^T DQ)_{3\beta} + \frac{\mu}{E} J_3 (Q^T DQ)_{12}$$

$J_{\alpha\beta}$ composantes de l'inertie géométrique du système

J_3 moment d'inertie à la torsion.

Le premier terme du développement u^0 de $u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots$ ne dépend que de la troisième composante de x ,

$$u^0(x) = U(x_3), U'(x_3) = (\mathcal{R}(x_3) - Id) e_3 \text{ et}$$

$$u^1(x) = \bar{U}(x_3) + (\mathcal{R}(x_3) - Id)(x - x_3 e_3)$$

alors

$$u^\varepsilon(x) = U(x_3) + \varepsilon [\bar{U}(x_3) + (\mathcal{R}(x_3) - Id)(x - x_3 e_3)] + \varepsilon^2 u^2 + \dots$$

On note, $\mathcal{R}(x_3) = (\bar{d}_1 \ \bar{d}_2 \ \bar{d}_3) = \mathcal{R}$

$u_{,i}$ ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de u par rapport à la coordonnée x_i

$$F^\varepsilon(u^\varepsilon) = Id + \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3} \right)$$

$$F^\varepsilon(u^\varepsilon) = Id + \left(\frac{1}{\varepsilon} u_{,1}^\varepsilon \quad \frac{1}{\varepsilon} u_{,2}^\varepsilon \quad u_{,3}^\varepsilon \right)$$

$$F^\varepsilon(u^\varepsilon) = Id +$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} (\mathcal{R} - Id) e_1 + \varepsilon u_{,1}^2 + \dots & | & (\mathcal{R} - Id) e_2 + \varepsilon u_{,2}^2 + \dots \\ \hline & & U' + \varepsilon (\bar{U}' + \mathcal{R}'(x - x_3 e_3)) \\ \hline & & \end{array} \right]$$

$$F^\varepsilon(u^\varepsilon) = \mathcal{R} + \varepsilon \left[\begin{array}{c|c|c} u_{,1}^2 & | & | \\ \hline & u_{,2}^2 & | \\ \hline & & (\bar{U}' + \mathcal{R}'(x_\alpha e_\alpha)) \\ \hline & & \end{array} \right] + \dots$$

$$F^1 = \left[\begin{array}{c|c|c} u_{,1}^2 & | & | \\ \hline & u_{,2}^2 & | \\ \hline & & (\bar{U}' + \mathcal{R}'(x_\alpha e_\alpha)) \\ \hline & & \end{array} \right]$$

Le tenseur de déformation, associé à la solution du problème de minimisation initial devient $2 E^\varepsilon(u^\varepsilon) = F^\varepsilon(u^\varepsilon)^T \cdot F^\varepsilon(u^\varepsilon) - Id$

$$2 E^\varepsilon(u^\varepsilon) = [\mathcal{R} + \varepsilon F^1 + \dots]^T [\mathcal{R} + \varepsilon F^1 + \dots] - Id$$

$$\text{Comme } \mathcal{R}^T \mathcal{R} = Id, \quad 2 E^\varepsilon(u^\varepsilon) = \varepsilon [\mathcal{R}^T F^1 + F^{1T} \mathcal{R}] + \varepsilon^2 [\dots] + \dots$$

$$\mathcal{R}^T F^1 = \begin{bmatrix} \bar{d}_1^T \\ \bar{d}_2^T \\ \bar{d}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,1}^2 & u_{,2}^2 & (\bar{U}' + \mathcal{R}'(x_\alpha e_\alpha)) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}^T F^1 = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \cdot u_{,1}^2 & \bar{d}_1 \cdot u_{,2}^2 & \bar{U}' \cdot \bar{d}_1 + x_\alpha \mathcal{R}' e_\alpha \cdot \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \cdot u_{,1}^2 & \bar{d}_2 \cdot u_{,2}^2 & \bar{U}' \cdot \bar{d}_2 + x_\alpha \mathcal{R}' e_\alpha \cdot \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \cdot u_{,1}^2 & \bar{d}_3 \cdot u_{,2}^2 & \bar{U}' \cdot \bar{d}_3 + x_\alpha \mathcal{R}' e_\alpha \cdot \bar{d}_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \bar{d}_i &= \mathcal{R} e_i \text{ donc } \bar{d}_i \cdot \bar{d}_j = \delta_{ij} \\
 \text{avec } (\bar{d}_1 \wedge \bar{d}_2) \cdot \bar{d}_3 &= 1 \text{ et } \bar{d}_3 = e_3 + U' \implies \bar{d}'_3 = U'' \\
 \text{Donc } \mathcal{R}' &= (\bar{d}'_1 \ \bar{d}'_2 \ U'') \text{ et donc } U'' = \bar{d}'_3 = \mathcal{R}' e_3 \\
 U'' \cdot \bar{d}_\alpha &= \mathcal{R}' e_3 \cdot \mathcal{R} e_\alpha \\
 U'' \cdot \bar{d}_\alpha &= \mathcal{R}^T \mathcal{R}' e_3 \cdot e_\alpha \\
 \text{On pose } 2 E_1(u) &= \mathcal{R}^T F^1 + F^{1T} \mathcal{R} \\
 \text{Tr} E_1 &= u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2 + (x_1 \bar{d}'_1 + x_2 \bar{d}'_2 + \bar{U}') \cdot \bar{d}_3
 \end{aligned}$$

$$E_1 \cdot E_1 = (u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1)^2 + (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + [(x_1 \bar{d}'_1 + x_2 \bar{d}'_2 + \bar{U}') \cdot \bar{d}_3]^2$$

$$\begin{aligned}
 E_1 \cdot E_1 &= \frac{1}{2} (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + \\
 &\quad \frac{1}{2} [(x_1 \bar{d}'_1 + x_2 \bar{d}'_2 + \bar{U}') \cdot \bar{d}_1 + u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_3]^2 + \\
 &\quad \frac{1}{2} [(x_1 \bar{d}'_1 + x_2 \bar{d}'_2 + \bar{U}') \cdot \bar{d}_2 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_3]^2
 \end{aligned}$$

$$W(E_1) = \frac{\lambda}{2} (\text{Tr} E_1)^2 + \mu E_1 \cdot E_1$$

$$\begin{aligned}
 W(E_1) &= \frac{\lambda}{2} (u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2 + (x_1 \bar{d}'_1 + x_2 \bar{d}'_2 + \bar{U}') \cdot \bar{d}_3)^2 + \\
 &\quad \mu [(u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1)^2 + (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + ((x_1 \bar{d}'_1 + x_2 \bar{d}'_2 + \bar{U}') \cdot \bar{d}_3)^2] + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} ((x_1 \bar{d}'_1 + x_2 \bar{d}'_2 + \bar{U}') \cdot \bar{d}_1 + u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_3)^2 + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} ((x_1 \bar{d}'_1 + x_2 \bar{d}'_2 + \bar{U}') \cdot \bar{d}_2 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_3)^2 \\
 W(E_1) &= \frac{\lambda}{2} (u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2 + x_1 \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_3 + x_2 \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_3 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_3)^2 + \\
 &\quad \mu [(u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1)^2 + (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + (x_1 \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_3 + x_2 \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_3 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_3)^2] + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} (x_2 \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_1 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_1 + u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_3)^2 + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} (x_1 \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_2 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_2 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_3)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(E_1) &= \frac{\lambda}{2} (u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + \\
 &\quad \lambda (u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2) (x_1 \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_3 + x_2 \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_3 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_3) + \\
 &\quad \frac{\lambda}{2} (x_1 \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_3 + x_2 \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_3 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_3)^2 + \\
 &\quad \mu \left[(u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1)^2 + (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 \right] + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} \left[(x_2 \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_1 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_1 + u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_3)^2 \right] + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} \left[(x_1 \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_2 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_2 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_3)^2 \right] \\
 W(E_1) &= \frac{\lambda}{2} (u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + \\
 &\quad \mu \left[(u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1)^2 + (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 \right] + \frac{\mu}{2} (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_2)^2 + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} (u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_3)^2 + \frac{\mu}{2} (u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_3)^2 + \\
 &\quad \lambda [u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1 + u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2] [x_1 \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_3 + x_2 \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_3 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_3] + \\
 &\quad \mu (x_2 \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_1) u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_3 + \\
 &\quad \mu (x_1 \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_1) u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_3 + \\
 &\quad \frac{\lambda}{2} [x_1^2 (\bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_3)^2 + x_2^2 (\bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_3)^2 + (\bar{U}' \cdot \bar{d}_3)^2] + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} [x_2^2 (\bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_1)^2 + x_1^2 (\bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_2)^2 + (\bar{U}' \cdot \bar{d}_1)^2 + (\bar{U}' \cdot \bar{d}_2)^2] + \\
 &\quad \mu [x_1^2 (\bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_3)^2 + x_2^2 (\bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_3)^2 + (\bar{U}' \cdot \bar{d}_3)^2]
 \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
 u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_1 &\equiv u_{1,1}, & u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_1 &\equiv u_{1,2} \\
 u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_2 &\equiv u_{2,1}, & u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_2 &\equiv u_{2,2} \\
 u_{,1}^2 \cdot \bar{d}_3 &\equiv u_{3,1}, & u_{,2}^2 \cdot \bar{d}_3 &\equiv u_{3,2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(E_1) = & \frac{\lambda}{2} (u_{1,1} + u_{2,2})^2 + \\
 & \mu [(u_{1,1})^2 + (u_{2,2})^2] + \frac{\mu}{2} (u_{1,2} + u_{2,1})^2 + \\
 & \frac{\mu}{2} [(u_{3,1})^2 + (u_{3,2})^2] + \\
 & \lambda [u_{1,1} + u_{2,2}] [x_1 \bar{d}'_{13} + x_2 \bar{d}'_{23} + \bar{U}' \cdot \bar{d}_3] + \\
 & \mu (x_2 \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_1 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_1) u_{3,1} + \\
 & \mu (x_1 \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_1 + \bar{U}' \cdot \bar{d}_2) u_{3,2} + \\
 & \frac{\lambda}{2} [x_1^2 (\bar{d}'_{13})^2 + x_2^2 (\bar{d}'_{23})^2 + (\bar{U}' \cdot \bar{d}_3)^2] + \\
 & \frac{\mu}{2} [x_2^2 (\bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_1)^2 + x_1^2 (\bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_2)^2 + (\bar{U}' \cdot \bar{d}_1)^2 + (\bar{U}' \cdot \bar{d}_2)^2] + \\
 & \mu [x_1^2 (\bar{d}'_{13})^2 + x_2^2 (\bar{d}'_{23})^2 + (\bar{U}' \cdot \bar{d}_3)^2]
 \end{aligned}$$

Et en posant

$$\begin{aligned}
 \bar{U}'_1 &\equiv \bar{U}' \cdot \bar{d}_1, \quad \bar{U}'_2 \equiv \bar{U}' \cdot \bar{d}_2, \quad \bar{U}'_3 \equiv \bar{U}' \cdot \bar{d}_3, \quad \bar{d}'_i \cdot \bar{d}_j = \bar{d}_{ij} \\
 \int_{\Omega} W(E_1) dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} (u_{\alpha,\alpha})^2 + \mu [\gamma_{\alpha,\beta}(u) \gamma_{\alpha,\beta}(u)] + \frac{\mu}{2} u_{3,\alpha} u_{3,\alpha} \right) dx + \\
 & \int_{\Omega} (\lambda u_{\alpha,\alpha} (x_1 \bar{d}'_{13} + x_2 \bar{d}'_{23} + \bar{U}'_3)) dx + \\
 & \int_{\Omega} (\mu (x_2 \bar{d}'_{21} + \bar{U}'_1) u_{3,1} + \mu (x_1 \bar{d}'_{12} + \bar{U}'_2) u_{3,2}) dx + \\
 & \int_0^1 (\lambda (I_1 \bar{d}'_{13}{}^2 + I_2 \bar{d}'_{23}{}^2 + S \bar{U}'_3{}^2)) dx_3 + \\
 & \int_0^1 \left(\frac{\mu}{2} (I_2 \bar{d}'_{21}{}^2 + I_1 \bar{d}'_{12}{}^2 + \bar{U}'_1{}^2 + \bar{U}'_2{}^2) \right) dx_3
 \end{aligned}$$

La minimisation par rapport à u donne

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\lambda u_{\alpha,\alpha} v_{\beta,\beta} + 2 \mu \gamma_{\alpha,\beta}(u) \gamma_{\alpha,\beta}(v)) dx + \\
 & \int_{\Omega} \lambda (x_1 \bar{d}'_{13} + x_2 \bar{d}'_{23} + \bar{U}'_3) v_{\alpha,\alpha} dx = 0 \quad \forall v_{\alpha}
 \end{aligned}$$

et aussi

$$\int_{\Omega} \mu u_{3,\alpha} v_{3,\alpha} dx + \int_{\Omega} \mu [(x_2 \bar{d}_{21} + \bar{U}'_1) v_{3,1} + (x_1 \bar{d}_{12} + \bar{U}'_2) v_{3,2}] dx = 0 \quad \forall v_3$$

$$\bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_1 + \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_2 = 0$$

$$\bar{d}'_{21} = \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_1 = \bar{U}'_1$$

$$\bar{d}'_{12} = \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_2 = -\bar{U}'_2$$

$$\bar{d}'_{13} = \bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_3$$

$$\bar{d}'_{23} = \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_3$$

$$\bar{d}'_1 \cdot \bar{d}_3 + \bar{d}'_3 \bar{d}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \bar{d}'_2 \cdot \bar{d}_3 + \bar{d}'_3 \bar{d}_2 = 0$$

Ainsi on a,

$$\int_{\Omega} (\mu [u_{3,1} + \bar{U}'_1] v_{3,1} + \mu [u_{3,2} + \bar{U}'_2] v_{3,2}) dx + \int_{\Omega} \mu (x_2 \bar{d}'_{21} v_{3,1} + x_1 \bar{d}'_{12} v_{3,2}) dx = 0 \quad \forall v_3$$

$$\text{Pour } v_3 = -x_1 \bar{U}'_1 - x_2 \bar{U}'_2 + U_3(x_3)$$

$$\int_{\Omega} (\mu [u_{3,1} + \bar{U}'_1] \bar{U}'_1 + \mu [u_{3,2} + \bar{U}'_2] \bar{U}'_2) dx =$$

$$\int_{\Omega} \mu ([I_1 + I_2] \bar{U}'^2 + \bar{U}'_1{}^2 + \bar{U}'_2{}^2) dx$$

$$\int_{\Omega} W(E_1) dx = \int_0^1 \left(\frac{E}{2} (I_1 \bar{d}'_{13}{}^2 + I_2 \bar{d}'_{23}{}^2 + S \bar{U}'_3{}^2) \right) dx_3 +$$

$$\int_0^1 \frac{\mu}{2} J \bar{U}'_2{}^2 dx_3$$

$$2 E \mathcal{W}^2 = \int_{\Omega} \left(\lambda (\text{Tr } E^1)^2 + 2 \mu E^1 \cdot E^1 \right) dx$$

$$2 \mathcal{W}^2 = \int_0^1 \left(J_{\alpha\beta} U'' \cdot d_\alpha U'' \cdot d_\beta + |S| \bar{U}'^2 + \frac{\mu}{E} J \omega_3^2 \right) dx$$

Le min par rapport à \bar{U}'_3

$$2 \mathcal{W}^2(v) = \int_0^1 \left(J_{\alpha\beta} U'' V'' + |S| u_3^* v_3^{*'} + \frac{\mu}{E} J \omega^2 \right) dx$$

$|S|$ étant la mesure de la section S de la poutre

Finalemnt

$$\mathcal{P}^2[u^i] = \mathcal{P}^2(\mathcal{R}, \bar{U}, u^2).$$

Le problème de minimisation \mathcal{P}^2 dépend de \mathcal{Q} , \bar{V} et v^2 .

$$\begin{cases} \mathcal{P}^2(\mathcal{Q}, \bar{V}, v^2) = \mathcal{W}(\mathcal{Q}, \bar{V}, v^2) - \bar{\eta} \mathcal{F}^0(V) \\ \mathcal{W}(\mathcal{Q}, \bar{V}, v^2) = \int_\Omega \left(\lambda (F^1 \cdot \mathcal{Q})^2 + 2 \mu \| F^{1T} \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^T F^1 \|^2 \right) dx \end{cases}$$

$$F^1 = (v_{,1}^2 \quad v_{,2}^2 \quad (\bar{V}' + \mathcal{Q}'(x_\alpha e_\alpha)))$$

$$V(x_3) = \int_0^{x_3} \mathcal{Q}(z) e_3 dz - x_3 e_3$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(x_3), \quad \mathcal{Q}^T \mathcal{Q} = Id, \quad \det(\mathcal{Q}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(0) = Id$$

La minimisation par rapport à v^2 conduit ici aux problèmes de Saint Venant de flexion, extension et torsion, ce dernier fournissant en particulier le moment d'inertie à la torsion J_3 .

La minimisation par rapport à \bar{V} fournit $(\mathcal{R}^T \bar{U}')_3 = 0$.

Enfin, en notant $J_{\alpha\beta}$ composantes de l'inertie géométrique du système et J_3 moment d'inertie à la torsion, \mathcal{R} s'obtient en minimisant sur : $\mathcal{Q}(x_3)$ rotation ; $\mathcal{Q}(0) = Id$

$$\int_0^1 J_{\alpha\beta} (\mathcal{Q}^T \mathcal{Q}')_{3\alpha}(x_3) (\mathcal{Q}^T \mathcal{Q}')_{3\beta}(x_3) + \frac{\mu}{E} J_3 (\mathcal{Q}^T \mathcal{Q}')_{12}(x_3)^2 dx_3 - \bar{\eta} \mathcal{F}^0(V)$$

Remarque 12 *Le couplage entre la flexion et la torsion n'est effectif que si la section ne possède pas assez de symétrie. Si elle en possède assez de façon à ce que $J = J Id$, alors $(\mathcal{Q}^T \mathcal{Q}')_{12} = 0$ et l'énergie élastique se réduit à l'énergie de flexion comme dans des chargements d'ordre supérieur.*

Remarque 13 *Le problème reste toutefois **non linéaire** à cause de la **condition d'inextensibilité** $\| e_3 + U' \| = 1$.*

Remarque 14 *Ce modèle correspond aussi au modèle obtenu par la Γ -convergence par [?]*

8.3 Application

Pour illustrer notre étude nous allons donner un exemple.

On considère une **barre horizontale en acier** fixée (encastrée) à son extrémité, soumise uniquement à son poids et une force horizontale de tention T à son extrémité libre.

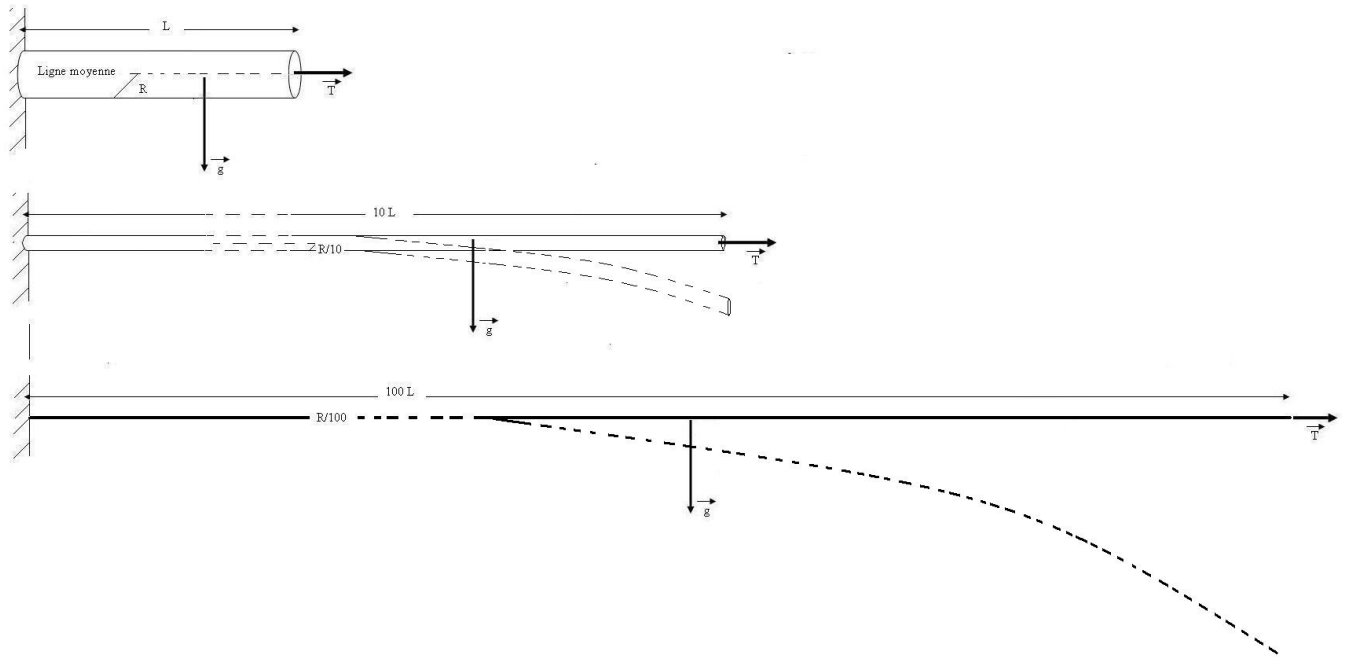


FIGURE 8.2 – Barre en élancement

La solution U du problème de minimisation vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(U) = \mathcal{W}(U) - \bar{\eta} \mathcal{F}(U) \leq \mathcal{P}(V) \text{ pour tout } V \\ \mathcal{W}(V) = \int_0^1 J_{\alpha\beta} V_\beta'' V_\beta'' dx_3 \end{array} \right.$$

$J_{\alpha\beta}$ composantes de l'inertie géométrique du système

Le chargement \mathcal{F}^ε , pour $v^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon = \{v^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3 / v^\varepsilon(0) = 0\}$

$$\mathcal{F}^\varepsilon(v^\varepsilon) = - \int_{\Omega^\varepsilon} \rho g v_1^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{S^\varepsilon \times \{L\}} T v_3^\varepsilon dx_1^\varepsilon dx_2^\varepsilon$$

$$\mathcal{F}^\varepsilon(v^\varepsilon) = - \rho g R^2 L^2 \int_{\Omega} V_1 dx + T R^2 L \int_{S \times \{L\}} V_3 ds$$

$$\mathcal{F}(v) = -k \left[- \int_{\Omega} V_1 dx + \frac{T}{\rho g L} \int_{S \times \{L\}} V_3 ds \right]$$

$$F L k = \rho g R^2 L^2 \implies F = \frac{\rho g R^2 L}{k} \implies \eta = \frac{\rho g L}{k E} \quad \left(\eta = \frac{F}{E R^2} \right)$$

$$\mathcal{F}(v) = -\frac{\rho g L}{E} \int_{\Omega} V_1 dx + \frac{T}{E} \int_{S \times \{1\}} V_3 ds$$

Comme $(1 + U_3')^2 + (U_1')^2 = 1$ (la condition d'inextensibilité) et $U_2(x_3) = 0$ donc

$U_3(z) = -z + \int_0^1 \sqrt{1 - V_1'(s)^2} ds$, on arrive donc au problème de minimisation suivant

$$\min_{V_1(0)=0} \frac{1}{8} \int_0^1 V_1'' V_1'' ds + \frac{\rho g L}{E} \int_0^1 V_1 ds - \frac{T}{E} \int_0^1 \sqrt{1 - V_1'(s)^2} ds$$

$$\frac{1}{4} \int_0^1 U_1'' V_1'' ds + \frac{\rho g L}{E} \int_0^1 V_1 ds + \frac{T}{E} \int_0^1 \frac{U_1' V_1'}{\sqrt{1 - V_1'(s)^2}} ds = 0$$

$$\frac{1}{4} \int_0^1 U_1^{(4)} V_1 ds + \frac{\rho g L}{E} \int_0^1 V_1 ds - \frac{T}{E} \int_{Sx1} \frac{d}{ds} \left[\frac{U_1'}{\sqrt{1 - U_1'(s)^2}} \right] V_1 ds -$$

$$\frac{1}{4} \left| U_1^{(3)} V_1 \right|_0^1 + \frac{1}{4} \left| U_1^{(2)} V_1' \right|_0^1 + \frac{T}{E} \left| \frac{U_1'}{\sqrt{1 - V_1'(s)^2}} V_1 \right|_0^1 = 0$$

Finalement, avec le flambement ($T < 0$) se situant près de $\frac{|T|}{E} = \frac{\pi^2}{4} \varepsilon^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^{(4)} + 4 \frac{\rho g L}{E} - 4 \frac{T}{E} \frac{d}{ds} \left[\frac{U_1' U_1'}{\sqrt{1 - U_1'(s)^2}} \right] = 0 \\ U_1(0) = U_1'(0) = 0 \\ U_1''(1) = 0, \quad U_1'''(1) - 4 \frac{T}{E} \frac{U_1'(1)}{\sqrt{1 - U_1'(1)^2}} = 0 \end{array} \right.$$

On considère une barre en acier de rayon $R = 1 \text{ cm}$ dont le module de Young $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, de masse volumique $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Cas 1 : $L = 1 \text{ m}$

$$\varepsilon = \frac{R}{L} = 10^{-2}$$

$$\frac{\rho g L}{E} = \frac{8 * 10^3 * 10}{2 * 10^{11}} = 4 * 10^{-7} = 0.4 \varepsilon^3 = 40 \varepsilon^4$$

Flambement

$$T = \frac{\pi^2}{4} E \varepsilon^2 \cong 2.5 * 2 * 10^{11} * 10^{-4} Pa = 5 * 10^7 Pa \cong 50 MPa$$

Cas 2 : $L = 10 m$

$$\varepsilon = \frac{R}{L} = 10^{-3}$$

$$\frac{\rho g L}{E} = \frac{8 * 10^3 * 10 * 10}{2 * 10^{11}} = 4 * 10^{-6} = 0.4 \varepsilon^2$$

Flambement

$$T = \frac{\pi^2}{4} E \varepsilon^2 \cong 2.5 * 2 * 10^{11} * 10^{-6} Pa = 5 * 10^5 Pa \cong 0.5 MPa$$

Cas 3 : $L = 100 m$

$$\varepsilon = \frac{R}{L} = 10^{-4}$$

$$\frac{\rho g L}{E} = \frac{8 * 10^5}{2 * 10^{11}} = 4 * 10^{-5} = 0.4 \varepsilon$$

Flambement

$$T = \frac{\pi^2}{4} E \varepsilon^2 \cong 2.5 * 2 * 10^{11} * 10^{-8} Pa = 5 * 10^3 Pa \cong 0.005 MPa$$

Bibliographie

- [1] A. CIMETIERE, G. GEYMONAT, H. LEDRET, A. RAOULT, AND Z. TUTEK. An asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods. *University Pierre et Marie Curie* (1988).
- [2] A. J. KARWOWSKI. Asymptotic models for a long, elastic cylinder. *Journal of elasticity* 24 (1990).
- [3] A. RIGOLOT. Sur une théorie asymptotique des poutres. *J. Mecanique* 11, 4 (1972), 673–703.
- [4] B. MORREY. Multiple integrals in the calculus of variations. *Springer, Berlin* (1965).
- [5] D. D. FOX. A justification of nonlinear properly invariant plate theories. *University Pierre et Marie Curie* (1993).
- [6] D. SERRE. Formes quadratiques et calcul des variations. *Proc. Roy. Soc. Edingburg, J. Math. Pures Appl.* 62 (1983).
- [7] E. ACERBI, G. BUTTAZZO, AND D. PERCIVALE. A variational definition of the strain energy for an elastic string. *J. Elasticity* 25 (1991).
- [8] F. J. TERPSTRA. Die derstellung biquadratischer formen als summen von quadraten mit anwendung auf die variationrechnung. *Math.ann.* 116 (1938), 166–180.
- [9] F. KRAZUKI, AND J. MARIGO. Analyse élastique d’une poutre cylindrique isotrope transverse par une méthode de développement asymptotique. *madani* (1987).
- [10] G. GEYMONAT, F. KRAZUKI, AND J. J. MARIGO. Stress distribution in anisotropic elastic composite beams. in application of multiple scalings in mechanics. *P. G. Ciarlet & E. Sanchez Palancia* (1987).
- [11] H. LEDRET, AND A. RAOULT. Enveloppe quasi-convexe de la densité d’énergie de saint venant-kirchhoff. *C.R.Acad.Sci.Paris* (1994).
- [12] H. LEDRET, AND A. RAOULT. The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear elasticity. *J. Math. Pures Appl.* 74, 318 (1995), 549–578.
- [13] J. BERTOLINI. Contribution à l’analyse expérimentale et théorique des ruptures de structures composites en post-flambement par décollement de raidisseurs. *THESE : Génie Mécanique* (2008).
- [14] J. DUC, AND D. BELLET. Mécanique des solides réels - élasticité. *Cepadues-Edition* (1977).
- [15] J. E. MARSDEN, AND T. J. R. HUGES. Mathematical foundations of elasticity. *Printice Hall. Englewood Cliffs* (1983).

- [16] J. J. MARIGO, H. GUIDOUCHE, AND Z. SEDKAOUI. Des poutres flexibles aux fils extensibles : une hierarchie de modeles asymptotiques. *C. R. Acad. Sci. Paris* 79 (1998).
- [17] J. M. BALL, AND F. MURRAT. $w^{1,p}$ -quasiconvexity and weak convergence in the calculus of variations. *J. functional Anal.* 58 (1984), 225–253.
- [18] J. SANCHEZ HUBERT, AND E. SANCHEZ PALANCIA. Introduction aux méthodes asymptotiques et à l’homogénéisation. *Masson* (1992).
- [19] L. LANDAU, AND E. LIFCHITZ. Théorie de l’élasticité. *Mir. Moscou* (1967).
- [20] M. ROSEAU. Vibration des systèmes mécaniques-méthodes analytiques et applications. *Masson* (1984).
- [21] M.G. MORA, AND S. MULLER. Derivation of the nonlinear bending-torsion theory for inextensible rods by gamma-convergence. *Calc. Var.* 18 287 (2002).
- [22] M.G. MORA, AND S. MULLER. A nonlinear model for inextensible rods as a low energy gamma-limit of three-dimensional nonlinear elasticity. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. nonlinéaire* 21 271 (2004).
- [23] O. PANTZ. Le modèle de poutre inextensionnelle comme limite de l’élasticité non-linéaire tridimensionnelle. *Ecole polytechnique, Physique des Interactions Fines* (2005).
- [24] P. CARTRAUD. Mécanique des structures etude des poutres. *Ecole Centrale de Nantes* (2009).
- [25] P. G. CIARLET. A justification of the van-kármán equation. *Arch. Rational Mech. Anal* 73 (1980), 349–389.
- [26] P. G. CIARLET. Three dimensional elasticity. *Mathematical Elasticity North-Holland, Amsterdam* (1988).
- [27] P. G. CIARLET. Plates and junctions in elastic multistructures-an asymptotic analysis. *Springer-Verlag* (1990).
- [28] PH. DESTUYNDER. Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques. *Thèse Univ. Pierre & Marie Curie* (1980).
- [29] PH. DESTUYNDER. Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire.
- [30] PH. DESTUYNDER, AND P. G. CIARLET. A justification of a nonlinear model in plate theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng* 17-18, 4 (1979), 227–258.
- [31] PH. DESTUYNDER, AND P. G. CIARLET. A justification of the two-dimensional linear plate model. *J. Mecanique* 18 (1979), 315–344.
- [32] R.A. ADAMS. Sobolev spaces. *Academic Press* (1975).
- [33] V. SVERAK. Rank-one-convexity does not imply quasiconvexity. *Proc. Roy. Soc. Edingburg* 120 (1992), 185–187.