

N° d'ORDRE : 24/2009-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET  
DE LARECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
"HOUARI BOUMEDIEN"

FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Mathématiques Discrètes et  
Optimisation

Par : SAHBI Rafik

Sujet

**Nombre de broadcast domination  
dans les arbres**

Soutenu le 24/01/2009, devant le jury composé de :

M <sup>r</sup> Aïder Méziane,	Professeur,	USTHB	Président
M <sup>lle</sup> Bouchemakh Isma,	Professeur,	USTHB	Directrice de thèse
M <sup>r</sup> Aït Haddadene Hacène,	Professeur,	USTHB	Examineur
M <sup>r</sup> Berrachedi Abdelhafid,	Professeur,	USTHB	Examineur

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET  
DE LARECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
"HOUARI BOUMEDIEN"

FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Mathématiques Discrètes et  
Optimisation

Par : SAHBI Rafik

Sujet

**Nombre de broadcast domination  
dans les arbres**

Soutenu le 24/01/2009, devant le jury composé de :

M <sup>r</sup> Aïder Méziane,	Professeur,	USTHB	Président
M <sup>lle</sup> Bouchemakh Isma,	Professeur,	USTHB	Directrice de thèse
M <sup>r</sup> Aït Haddadene Hacène,	Professeur,	USTHB	Examineur
M <sup>r</sup> Berrachedi Abdelhafid,	Professeur,	USTHB	Examineur

*A la mémoire de ma mère.*

*A mon père.*

*A mes frères Elyes Areslane et Kheireddine.*

*A ma soeur Sarah Ikram.*

*A ma tante Karima.*

# Remerciements

J'exprime toute ma gratitude à ma directrice de thèse Mademoiselle BOUCHEMAKH Isma, Professeur à la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, pour la patience et la générosité avec lesquelles elle a su orienter et mener à bien mes recherches. Je la remercie vivement pour son aide et son soutien tout au long de mes travaux.

Mes vifs remerciements sont également adressés à Monsieur AÏDER Méziane, Professeur à la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, pour avoir eu l'amabilité de bien vouloir présider le jury.

De même que j'adresse mes sincères remerciements à Monsieur AÏT HADDADENE Hacène, Professeur à la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, et à Monsieur BERRACHEDI Abdelhafid, Professeur à la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail et aussi au fait d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je tiens à témoigner ma reconnaissance à Monsieur DESIGAUX Jean pour m'avoir laissé les portes du Centre Culturel Universitaire d'Alger grandes ouvertes, et à Monsieur ANES Ouali pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée dans les moments difficiles.

# Table des matières

Table des figures	4
Liste des tableaux	5
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Définitions, terminologie et notations</b>	<b>10</b>
1.1 Définitions et terminologie . . . . .	11
1.1.1 Graphe . . . . .	11
1.1.2 Incidence, adjacence . . . . .	12
1.1.3 Isomorphie, invariants de graphe . . . . .	12
1.1.4 Voisinage, degré d'un sommet . . . . .	13
1.1.5 Distance, connexité . . . . .	15
1.1.6 Sous-graphe, sous-graphe induit . . . . .	16
1.2 Domination . . . . .	16

TABLE DES MATIÈRES

---

1.2.1	Domination standard . . . . .	18
1.2.2	Indépendance . . . . .	18
1.2.3	Packing . . . . .	19
1.2.4	Efficacité . . . . .	19
1.3	Broadcast domination . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Broadcast dans les graphes</b>	<b>24</b>
2.1	Résultats fondamentaux . . . . .	24
2.2	Bornes inférieures du nombre de broadcast domination	29
2.3	Graphes avec un petit nombre de broadcast domination	30
2.4	Classes de broadcasts dominants . . . . .	33
2.4.1	Broadcast dominant minimal . . . . .	33
2.4.2	Broadcast dominant optimal . . . . .	36
2.5	Autres broadcasting invariants . . . . .	39
2.5.1	Broadcast indépendant . . . . .	40
2.5.2	Broadcast dominant indépendant . . . . .	43
2.5.3	Broadcast efficace . . . . .	45
2.5.4	Broadcast packing . . . . .	47
2.6	Complexité algorithmique . . . . .	49
2.6.1	Problème de broadcast domination optimale .	49

2.6.2	Broadcast domination optimale restreinte . . .	51
<b>3</b>	<b>Broadcasting invariants dans les arbres</b>	<b>52</b>
3.1	Broadcast domination pour deux classes particulières d'arbres . . . . .	53
3.1.1	Graphes $k$ -subdivisés d'une étoile . . . . .	55
3.1.2	Arbres $t$ -aires complets . . . . .	61
3.2	Réduction du graphe $k$ -subdivisé d'une étoile . . . . .	66
3.2.1	Résultats préliminaires . . . . .	66
3.2.2	Réduction $\gamma_b(S_{k,3})$ -radial minimale de $S_{k,3}$ . .	67
3.3	Autres broadcasting invariants pour les arbres $\mathcal{N}$ - aires complets . . . . .	74
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>80</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>81</b>

# Table des figures

1.1	Graphe . . . . .	12
1.2	Graphes isomorphes . . . . .	13
1.3	Voisinage et degré d'un sommet. . . . .	14
1.4	Maximalité et minimalité d'une propriété. . . . .	17
1.5	Broadcast dominant sur un graphe. . . . .	22
2.1	Graphe subdivisé. . . . .	26
2.2	Jonction de deux graphes en deux extrémités. . . . .	27
2.3	Graphe $G$ avec $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$	32
2.4	Broadcast dominant . . . . .	33
2.5	Graphe de PETERSEN . . . . .	45
3.1	Graphe de domination d'un graphe . . . . .	53
3.2	Graphe $k$ -subdivisé de $K_{1,t}$ . . . . .	56
3.3	Arbre binaire de profondeur 3 . . . . .	62



# Liste des tableaux

2.1	Inégalités entre broadcasting invariants. . . . .	49
-----	---	----

# Introduction

Un *graphe* ([17]) est un schéma constitué de points (sommets) et de lignes de formes quelconques (arêtes) reliant ces points. Il est utilisé pour illustrer certains liens existant entre des objets d'un même système et en particulier dans la modélisation de problèmes liés aux réseaux qu'ils soient informatiques, sociaux, routiers ou autres.

L'origine des graphes remonte au XVIII<sup>ème</sup> siècle et à la publication par le mathématicien suisse Leonhard EULER de la résolution d'un problème qui consiste, partant d'un point donné, à tracer un itinéraire sur la carte de la ville russe de Königsberg de manière à visiter une seule fois chacun des sept ponts de la ville puis retourner au point de départ.

Les graphes ont été par la suite utilisés pour l'étude des circuits électriques, en chimie, en psychosociologie et en économie. L'un des ouvrages de référence sur les graphes a été réalisé par le mathéma-

ticien français Claude BERGE dans lequel il établit les bases de la théorie [3].

Depuis son fondement, la théorie des graphes ne cesse de se développer notamment grâce à ses multiples applications tant au plan civil que militaire : aide à la décision, stratégie, optimisation, réseaux de transports (chemins de fer, électricité, ports et aéroports, ordonnancement des tâches) etc. . .

La théorie des graphes n'est pas une branche indépendante des mathématiques ; elle se rattache à la programmation linéaire, la programmation convexe et à la topologie.

Le problème de *domination* est l'un des problèmes les plus connus en théorie des graphes [13, 14]. Il consiste, étant donné un graphe, à colorer un minimum de ses sommets en blanc et le reste des sommets en noir de sorte que chaque sommet noir soit relié par une arête à au moins un sommet blanc. Ce problème est NP-complet ([12, 14]) et possède plusieurs variantes.

Le problème de *broadcast domination* est une variante du problème de domination. Ce problème a été introduit en 2001 par D. J. ERWIN [10] et consiste à attribuer des entiers positifs (poids) aux sommets du graphe de sorte que tout sommet de poids nul soit

broadcast-dominé par un sommet de poids strictement positif, et que la somme des poids de tous les sommets soit minimum ; formellement, cela revient à définir une application à valeurs entières  $f$  sur l'ensemble des sommets telle que tout sommet du graphe se trouve au plus à une distance  $f(v)$  d'au moins un sommet  $v$  avec  $f(v) > 0$ , et que la somme des poids soit minimum. Ce minimum s'appelle *nombre de broadcast domination* du graphe.

Une application de la broadcast domination est la localisation des stations radio FM dans une zone donnée, où les sites à localiser sont les sommets d'un graphe représentant la zone en question. En fait, les stations radio FM se distinguent par leurs fréquences de transmission et par leurs ERP (radiated effective power), et un transmetteur avec une grande ERP peut transmettre loin mais sa construction et son fonctionnement sont plus coûteux. Il est alors pertinent de minimiser la somme des ERP qui correspond à la minimisation du coût du broadcast.

Le broadcast domination a été prouvé polynomial en 2006 par HEGGERNES et LOKSHTANOV [15]. Cependant, une conjecture posée par Erwin [10] proposant une broadcast domination optimale pour une classe d'arbres n'a pas encore été résolue.

Dans ce mémoire, nous prouvons cette conjecture et déterminons le nombre de broadcast domination dans les arbres  $\mathcal{N}$ -aires complets.

Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de trois chapitres : Le Chapitre 1 est consacré aux définitions et à la terminologie de la théorie des graphes adoptées dans ce mémoire ; on y présente également les concepts de domination et de broadcast domination. Dans le Chapitre 2, nous énonçons les résultats établis sur les broadcasts. Dans le Chapitre 3, nous prouvons la conjecture d'ERWIN et déterminons le nombre de broadcast domination dans les arbres  $\mathcal{N}$ -aires complets ; nous déterminons également un sous-graphe minimal par rapport à la propriété de  $\gamma_b$ -radialité et enfin nous étudions d'autres broadcasting invariants d'arbres  $\mathcal{N}$ -aires complets. Nous terminons avec une conclusion et quelques perspectives.

# Chapitre 1

## Définitions, terminologie et notations

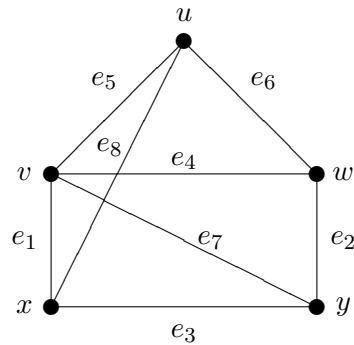
Dans ce chapitre, nous définissons les outils et le vocabulaire de la théorie des graphes utilisés dans les prochains chapitres et que nous retrouvons dans les ouvrages [2], [5] et [8]. Nous présentons d'abord le concept de domination dans les graphes ainsi que quelques paramètres de domination. Dans la dernière section, nous passerons au concept central de ce mémoire, à savoir la broadcast domination.

## 1.1 Définitions et terminologie

### 1.1.1 Graphe

Soient  $V$  un ensemble fini,  $[V]^2$  l'ensemble des parties de  $V$  à 2 éléments et  $E$  un sous-ensemble de  $[V]^2$ . Le couple  $G = (V, E)$  est appelé *graphe* sur  $V$ . Les éléments de  $V$  sont les *sommets* ou *noeuds* du graphe  $G$  et les éléments de  $E$  sont les *arêtes* de  $G$ . Un graphe d'ordre 0 ou 1 est dit *trivial*. Dans tout ce qui suit, nous noterons les ensembles de sommets et d'arêtes d'un graphe  $G$  respectivement  $V(G)$  et  $E(G)$  lorsqu'il y a risque de confusion. L'*ordre* (resp. *taille*) de  $G$  est la valeur de l'entier  $n = |V|$  (resp.  $m = |E|$ ).

Géométriquement, on représente un graphe par des points correspondant à ses sommets, placés de manière arbitraire dans un plan et l'on relie deux d'entre eux par une ligne (ou une courbe de forme quelconque) si le couple de sommets correspondant forme une arête du graphe (Figure 1.1). La représentation décrite plus haut est l'outil de base sur lequel s'appuie tout raisonnement sur un graphe.



$$G = (\{u, v, w, x, y\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\})$$

FIG. 1.1 – Graphe

### 1.1.2 Incidence, adjacence

Dans un graphe  $G$ , un sommet  $v$  est *incident* à une arête  $e$  si  $v \in e$ . Les deux seuls sommets incidents à une arête  $e$  sont ses *extrémités*. Une arête d'extrémités  $x, y$  est notée  $xy$  ou  $yx$ .

Deux sommets  $x, y$  d'un graphe  $G$  sont *adjacents* ou *voisins* si  $xy$  est une arête de  $G$ . Deux arêtes  $e \neq f$  sont *adjacentes* si elles ont une extrémité en commun.

### 1.1.3 Isomorphie, invariants de graphe

Soient  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  deux graphes. On dit que  $G$  et  $G'$  sont *isomorphes* et on écrit  $G \simeq G'$ , s'il existe une bijection  $\varphi : V \rightarrow V'$  telle que pour tous sommets  $x, y \in V$ ,  $xy \in E$  si et seulement si  $\varphi(x)\varphi(y) \in E'$  (Figure 1.2). Une application telle que  $\varphi$



est appelée *isomorphisme*.

Une application à valeurs entières positives ayant comme arguments<sup>1</sup> des graphes est appelée *invariant* de graphes si elle associe les mêmes valeurs aux graphes isomorphes. Par exemple, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe sont deux invariants simples ; la taille maximale d'un ensemble de sommets deux à deux adjacents est un autre invariant.

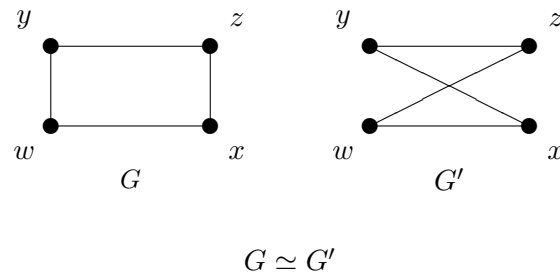


FIG. 1.2 – Graphes isomorphes

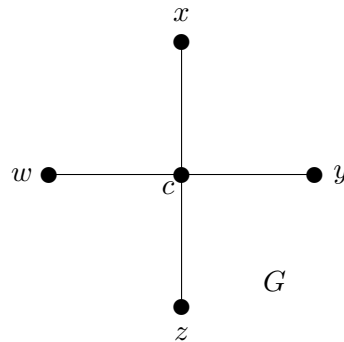
#### 1.1.4 Voisinage, degré d'un sommet

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Le *voisinage ouvert* d'un sommet  $v$  de  $G$  est l'ensemble  $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$  et le *voisinage fermé* de  $v$  est  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$  (Figure 1.3). Plus généralement, pour un

---

1. Les arguments d'une application sont les éléments de son ensemble de départ.

ensemble  $S \subseteq V$ , le voisinage ouvert de  $S$  est  $N_G(S) = \bigcup_{v \in V} N_G(v)$  et son voisinage fermé est  $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ . S'il n'y a aucun risque de confusion, nous écrirons  $N(v)$ ,  $N[v]$ ,  $N(S)$  et  $N[S]$  au lieu de  $N_G(v)$ ,  $N_G[v]$ ,  $N_G(S)$  et  $N_G[S]$  respectivement. Le degré  $d_G(v)$  d'un sommet  $v \in V$  est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul sera dit sommet *isolé* et un sommet de degré égal à 1 sera dit sommet *pendant* ou *extrémité* du graphe. Une arête dont une des extrémités est un sommet pendant est dite *arête pendante*. Nous noterons  $\delta(G)$  et  $\Delta(G)$  respectivement les degrés minimum et maximum dans  $G$ .



$$N(c) = \{w, x, y, z\} \text{ et } d_G(c) = 4$$

FIG. 1.3 – Voisinage et degré d'un sommet.

### 1.1.5 Distance, connexité

Une *chaîne*  $C$  d'un graphe  $G$  est une séquence finie  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de sommets de  $G$  telle que pour tout entier  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G)$ . L'entier  $k - 1$  est appelé *longueur* de  $C$  et les sommets  $v_1$  et  $v_k$  sont les *extrémités* de la chaîne  $C$ ; on dit que  $C$  *relie* ses extrémités. Si les sommets d'une chaîne sont deux à deux distincts la chaîne est dite *simple*.

Un *cycle* est une chaîne simple dont les extrémités sont confondues. Par exemple, le graphe  $G$  de la Figure 1.2 est un cycle de longueur 4. Un graphe est dit *connexe* si pour toute paire de sommets du graphe, il existe une chaîne les reliant. *Un arbre* est un graphe connexe sans cycles. Le graphe de la Figure 1.3 est un arbre.

Une chaîne est dite *élémentaire* si tous ses sommets sont distincts. Une chaîne élémentaire à  $n$  sommets est notée  $P_n$ .

La *distance*  $d(x, y)$  entre deux sommets  $x$  et  $y$  d'un graphe  $G$  est la longueur d'une plus courte chaîne (i.e : de plus petite longueur) d'extrémités  $x$  et  $y$ ; une telle chaîne est une  $u - v$  *géodésique*. L'*excentricité* d'un sommet  $v$  est  $e(v) = \max\{d(v, w) : w \in V(G)\}$ . Le *rayon* et le *diamètre* de  $G$ , notés respectivement  $rad(G)$  et  $diam(G)$ , sont respectivement les plus petite et plus grande excen-

tricités dans  $G$ . Pour tout arbre  $T$ , il est prouvé que  $2rad(T) - 1 \leq diam(T) \leq 2rad(T)$  [1] ce qui est équivalent à  $rad(T) = \left\lceil \frac{diam(T)}{2} \right\rceil$ . Un sommet d'un graphe  $G$  vérifiant  $e(v) = rad(G)$  est dit sommet *central* dans  $G$ . Dans la Figure 1.3,  $c$  est un sommet central et on a  $d(x, y) = 2$ ,  $rad(G) = 1$  et  $diam(G) = 2$ . Le *centre*  $c(G)$  de  $G$  est l'ensemble des sommets centraux de  $G$ .

### 1.1.6 Sous-graphe, sous-graphe induit

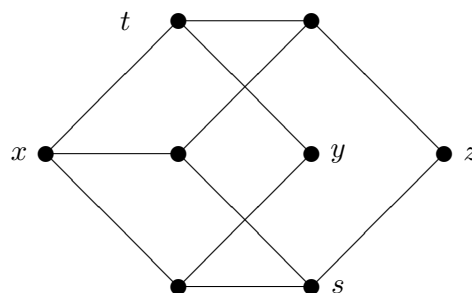
Soient  $G$  et  $H$  deux graphes. Si  $V(H) \subseteq V(G)$  et  $E(H) \subseteq E(G)$ , alors  $H$  est appelé *sous-graphe* de  $G$  et on écrit  $H \subseteq G$ ; on dit aussi que  $G$  *contient*  $H$ . Si de plus  $H \neq G$ , alors  $H$  est un sous-graphe propre de  $G$  et on écrit  $H \subset G$ .

Pour un ensemble  $S \subseteq V(G)$ , le sous-graphe de  $G$  *induit* par  $S$  noté  $\langle S \rangle$ , est le graphe ayant  $S$  pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de  $E$  ayant leurs deux extrémités dans  $S$ .

## 1.2 Domination

Dans cette section nous présentons quelques paramètres de domination que nous reverrons dans le prochain chapitre. Avant, nous avons besoin d'une définition :

Un sous-ensemble  $S$  de sommets d'un graphe  $G$  est dit *maximal* (resp. *minimal*) pour une certaine propriété  $\mathcal{P}$  si  $S$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  et qu'aucun sous-ensemble de sommets  $S' \subset S$  (resp.  $S' \supset S$ ) de  $G$  distinct de  $S$  ne vérifie  $\mathcal{P}$ . Par exemple, si  $\mathcal{P}$  est la propriété d'indépendance (c'est-à-dire les sommets sont non adjacents deux à deux), alors l'ensemble  $S = \{x, y, z\}$  de la Figure 1.4 est maximal pour la propriété  $\mathcal{P}$ ; dans la même figure, si  $\mathcal{P}$  est la propriété de domination (c'est-à-dire tout sommet de  $V - S$  est adjacent à au moins un sommet de  $S$ ), alors  $S = \{x, y, z\}$  est dominant minimal.



Indépendant maximal et dominant minimal  $\{x, y, z\}$

FIG. 1.4 – Maximalité et minimalité d'une propriété.

Dans la suite, nous ne considérons que les graphes non triviaux connexes.

### 1.2.1 Domination standard

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$  est un *dominant* de  $G$  si tout sommet de  $V - S$  est adjacent à au moins un sommet de  $S$ , c'est-à-dire si  $N[S] = V$ . Le *nombre de domination*  $\gamma(G)$  et le *nombre supérieur de domination*  $\Gamma(G)$  de  $G$  sont, respectivement, les cardinalités minimum et maximum d'un ensemble dominant minimal sur  $G$ . Un ensemble dominant minimal de  $G$  de cardinalité minimum est appelé  $\gamma$ -ensemble, et un ensemble dominant minimal de  $G$  de cardinalité maximum est appelé  $\Gamma$ -ensemble. Par exemple, dans la Figure 1.4  $\{s, t\}$  est un  $\gamma$ -ensemble et  $\gamma(G) = 2$ .

### 1.2.2 Indépendance

Un sous-ensemble de sommets  $S$  d'un graphe  $G$  est un *indépendant* (ou *stable*) si aucune paire de ses éléments ne constitue une arête. Le *nombre d'indépendance* (ou de *stabilité*)  $i(G)$  et le *nombre supérieur d'indépendance*  $\beta_0(G)$  sont, respectivement, les plus petite et la plus grande cardinalités d'un stable maximal dans  $G$ . Nous avons vu dans la Figure 1.4 que  $\{x, y, z\}$  était indépendant maximal.

#### **Proposition 1** [14]

*Un stable  $S$  est maximal si et seulement s'il est stable et dominant.*

La Figure 1.4 illustre la Proposition 1 où  $\{x, y, z\}$  est à la fois stable maximal et dominant.

La Proposition 1 montre que tout stable maximal est dominant. Alors il en découle la chaîne d'inégalités suivante :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_{i_0}(G) \leq \Gamma(G) \quad (1).$$

### 1.2.3 Packing

Soit  $G$  un graphe. Un sous-ensemble de sommets  $S$  de  $G$  est un *packing* de  $G$  si pour tout sommet  $v \in V(G)$ ,  $|N[v] \cap S| \leq 1$ . Autrement dit,  $S$  est un packing de  $G$  si et seulement si tout sommet de  $G$  est adjacent à au plus un sommet de  $S$ ; en particulier, tout packing est un ensemble indépendant. Le *nombre de packing*  $P(G)$  et le *nombre inférieur de packing*  $p(G)$  sont respectivement la cardinalité maximum et minimum d'un packing maximal dans  $G$ .

On obtient alors la chaîne d'inégalités (2) [14] :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_{i_0}(G) \leq \Gamma(G) \quad (2).$$

### 1.2.4 Efficacité

Soit  $G$  un graphe. Un ensemble dominant  $S$  de  $G$  est dit *efficace* si pour tout sommet  $v \in V$ ,  $|N[v] \cap S| = 1$ .

De la définition précédente, on voit immédiatement que tout ensemble dominant efficace est un packing. Alors, on déduit grâce à la chaîne d'inégalités (2) que si un graphe  $G$  possède un ensemble dominant efficace, alors celui-ci est forcément un  $\gamma$ -ensemble.

Par ailleurs, il existe des graphes qui ne possèdent pas d'ensemble dominant efficace. Citons, à titre d'exemple, le cycle de longueur 5,  $C_5$ .

### 1.3 Broadcast domination

Soit  $G$  un graphe. On appelle *broadcast* sur  $G$ , toute application  $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$  vérifiant  $f(v) \leq e(v)$  pour tout sommet  $v \in V(G)$ . Un sommet  $v$  pour lequel  $f(v) > 0$  est appelé un sommet *f-dominant*, et l'ensemble  $V_f(G) = \{v \in V(G) : f(v) > 0\}$  des sommets *f-dominants* est appelé un ensemble *f-dominant*. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrivons  $V_f$  pour  $V_f(G)$ . On dit qu'un sommet *f-dominant*  $v$  *f-domine* tout sommet  $u$  avec  $d(u, v) \leq f(v)$ , tandis que les sommets de  $V(G) - V_f$  ne *f-dominent* aucun sommet de  $G$ . Un sommet  $u$ , *f-dominé* par  $v$ , est un *f-voisin* de  $v$ . L'ensemble des *f-voisins* de  $v$  est appelé *f-voisinage* de  $v$  et est noté



$N_f[v]$ . Le  $f$ -voisinage d'un ensemble  $S \subseteq V$  est  $N_f[S] = \bigcup_{u \in S} N_f[u]$ . L'ensemble des sommets qui  $f$ -dominent le sommet  $v$  est noté  $H_f(v)$  ou  $H(v)$  lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté. Un  $f$ -voisin privé de  $v$  est un sommet  $u$  vérifiant  $H_f(u) = \{v\}$ . L'ensemble des  $f$ -voisins privés de  $v$  est appelé  $f$ -voisinage privé de  $v$  et est noté  $PN_f[v]$ . Un broadcast dominant sur  $G$  est un broadcast  $f$  tel que tout sommet est  $f$ -dominé par au moins un sommet de  $V_f(G)$ . Par conséquent,  $f$  est un broadcast dominant sur  $G$  si et seulement si  $N_f[V_f] = V(G)$ . Un broadcast dominant  $f$  est *minimal* si aucun broadcast dominant  $g$  ne vérifie à la fois  $g \neq f$  et  $g(v) \leq f(v)$  pour tout sommet  $v \in V(G)$ .

Pour un broadcast  $f$  sur un graphe  $G = (V, E)$ , on appelle *coût* de  $f$ , le nombre  $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ . Le *nombre de broadcast domination*  $\gamma_b(G)$  de  $G$  est la valeur minimum de  $f(V)$  sur l'ensemble des broadcasts  $f$ -dominants sur  $G$ . Un broadcast dominant  $f$  sur  $G$  pour lequel  $f(V) = \gamma_b(G)$  est un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $G$  et  $V_f$  est appelé  $\gamma_b$ -ensemble sur  $G$ . Par conséquent,  $f$  est un broadcast dominant si et seulement si  $|H_f(v)| \geq 1$  pour tout sommet  $v \in V$ .

Pour illustrer ces concepts, considérons le graphe  $G = (V, E)$  de diamètre 4 sur la Figure 1.5. Les Figures 1.5(b) et 1.5(c) représentent deux broadcasts dominants  $f$  et  $g$ , où l'ensemble  $f$ -dominant est  $V_f =$



minimal  $S$  dans un graphe  $G$  est un broadcast dominant minimal.

D'autre part, soit  $u \in V$  un sommet du graphe  $G$ , et soit  $f_u : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \text{diam}(G)\}$  défini par  $f_u(u) = e(u)$  et  $f_u(v) = 0$ , si  $v \neq u$ .

Alors le broadcast  $f_u$  est dominant minimal ; en particulier, cela tient lorsque  $e(u) = \text{rad}(G)$  ou  $e(u) = \text{diam}(G)$  et  $f(V)$  a respectivement pour valeur  $\text{rad}(G)$  et  $\text{diam}(G)$  :

**Observation 1** [9]

*Pour tout graphe  $G$ ,*

$$\gamma_b(G) \leq \min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\} \leq \max\{\Gamma(G), \text{diam}(G)\} \leq \Gamma_b(G).$$

**Théorème 1** [9]

*Si  $G$  est un graphe de taille  $m$ , alors  $\Gamma_b(G) \leq m$  et l'égalité est atteinte si et seulement si  $G$  est une étoile ou une chaîne non triviale.*

# Chapitre 2

## Broadcast dans les graphes

Dans ce chapitre, nous énonçons les résultats établis sur les broadcasts incluant ceux relatifs à la complexité algorithmique [4], [7] et [15] de deux problèmes de broadcast domination.

### 2.1 Résultats fondamentaux

Pour tout graphe  $G$  et tout entier fixé  $k$  avec  $1 \leq k \leq \text{rad}(G)$ , le *nombre de  $k$ -distance domination*, noté  $\gamma_k(G)$ , est la plus petite cardinalité d'un ensemble de sommets  $S$  de  $G$  tel que tout sommet de  $G$  est à distance inférieure ou égale à  $k$  d'au moins un sommet de  $S$ .

**Proposition 2** [11]

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\gamma_b(G) \leq \min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq \text{rad}(G)\}.$$

En appliquant la Proposition 2 pour  $k = 1$  et  $k = \text{rad}(G)$ , on obtient  $\gamma_b(G) \leq \text{rad}(G)$  et  $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$  et on a le Corollaire 1 :

**Corollaire 1** [11]

Pour un graphe  $G$ ,

$$\gamma_b(G) \leq \min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\}.$$

L'inégalité du Corollaire 1 a été prouvée de manière différente par DUNBAR et al. (voir Observation 1 dans le Chapitre 1).

Pour tout entier positif  $t \geq 3$ , on appelle *étoile* et on note  $K_{1,t}$  l'arbre à  $t$  sommets pendants reliés à l'unique sommet de degré  $t$ . Le graphe de la Figure 1.3 du Chapitre 1 représente l'étoile  $K_{1,4}$ .

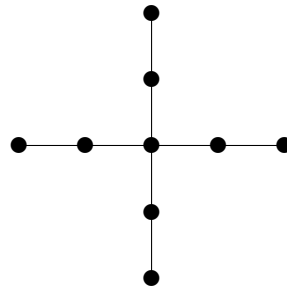
On appelle graphe subdivisé d'un graphe  $G$  le graphe  $S(G)$  obtenu en insérant un ou plusieurs sommets sur quelques arêtes de  $G$  (Figure 2.1).

Dans ce qui suit, un graphe subdivisé d'un graphe  $G$  désignera le graphe obtenu en insérant exactement un sommet sur chaque arête

de  $G$ .

Plus généralement, pour tout entier  $k \geq 0$ , le graphe  $k$ -subdivisé d'un graphe  $G$  est le graphe obtenu en insérant  $k$  sommets sur chaque arête de  $G$ .

Considérons  $S(K_{1,t})$  le graphe subdivisé de l'étoile  $K_{1,t}$  où  $t \geq 2$  est entier. Pour un entier strictement positif  $k$ , soit  $H_k$  le graphe obtenu en joignant un sommet pendant de  $S(K_{1,2+k})$  à un sommet pendant de la chaîne  $P_{2k}$  (Figure 2.2).



$S(K_{1,4})$

FIG. 2.1 – Graphe subdivisé.

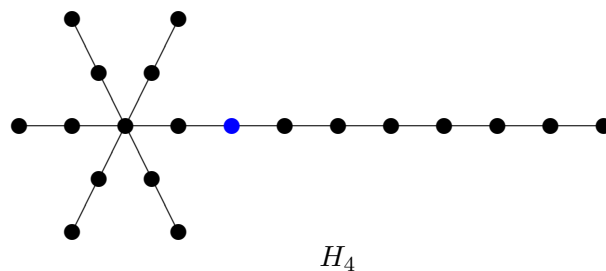


FIG. 2.2 – Jonction de deux graphes en deux extrémités.

Alors  $\Gamma(H_k) = 2k+3$  et  $diam(H_k) = 2k+4$ , donc  $max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} = 2k+4$ . Soit  $v$  l'extrémité de  $P_{2k}$  qui est extrémité de  $H_k$ . Soit le broadcast  $f : V(H_k) \rightarrow \{0, 1, 2k + 2\}$  défini par  $f(v) = 2k + 2$ ,  $f(x) = 1$  pour tout extrémité de  $H_k$  distincte de  $v$  et  $f(x) = 0$  pour tout autre sommet. Alors  $f$  est un broadcast dominant minimal sur  $H_k$  de coût  $3k + 3$  et  $\Gamma_b(H_k) \geq 3k + 3$  :

**Observation 2** [9]

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\Gamma_b(H_k) - max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} \geq k - 1.$$

Dans [11], ERWIN résoud le problème d'existence d'un graphe  $G$  avec  $\gamma_b(G) < min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq rad(G)\}$ , par le théorème suivant :

**Théorème 2** [11]

Pour tout entier positif  $k$ ,

$$\min\{t\gamma_t(H_k) : 1 \leq t \leq \text{rad}(H_k)\} - \gamma_b(H_k) \geq \frac{2k}{15} - 1.$$

Les graphes  $G$  vérifiant  $\gamma_b(G) = \text{rad}(G)$  sont fondamentaux pour l'étude des  $\gamma_b$ -broadcasts. Les trois propositions suivantes, dont deux sont des caractérisations de ces graphes, le montrent :

**Proposition 3** Soit  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur un graphe  $G$ . Alors  $V_f = v$  si et seulement si  $f(v) = e(v) = \text{rad}(G)$ .

**Proposition 4** Soit  $G$  un graphe et  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $G$ . Si  $v \in V_f$ , alors  $f(v) = \gamma_b(\langle N_f[v] \rangle) = \text{rad}(\langle N_f[v] \rangle)$ .

**Proposition 5** Soit  $G$  un graphe. Alors  $\gamma_b(G) = \text{rad}(G)$  si et seulement si  $\min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq \text{rad}(G)\} = \text{rad}(G)$ .

Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n \geq 4$  tel que  $\Delta(G) = n - 2$ , et soit  $H$  le graphe obtenu en joignant un nouveau sommet à tous les sommets de  $G$ . Alors  $\gamma_b(G) > \gamma_b(H)$ ; cependant, le théorème suivant montre que cette relation n'est pas vraie en général :

**Théorème 3** [11]

Si  $H$  est le graphe subdivisé d'un graphe  $G$ , alors  $\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H)$ .



## 2.2 Bornes inférieures du nombre de broadcast domination

Dans [11], ERWIN détermina une borne inférieure pour le nombre de broadcast domination d'un graphe arbitraire qui généralise l'inégalité  $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\text{diam}(G)+1}{3} \right\rceil$  connue pour le nombre de domination [14] :

### **Théorème 4** [11]

*Pour tout graphe  $G$ , on a :*

$$\gamma_b(G) \geq \left\lceil \frac{\text{diam}(G)+1}{3} \right\rceil.$$

### **Corollaire 2** [11]

*Pour tout entier  $n \geq 2$ ,*

$$\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Il existe d'autres bornes qui dépendent du rayon. Pour un  $\gamma_b$ -broadcast  $f$ , notons par  $M = \max\{f(x) : x \in V_f\}$  :

### **Lemme 1** [11]

*Soit  $G$  un graphe et  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $G$ . Alors  $\text{rad}(G) \leq 2\gamma_b(G) + |V_f| - M - 1$ .*

**Corollaire 3** [10]

*Soit  $G$  un graphe et  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $G$ . Alors*

$$\gamma_b(G) \geq \left\lceil \frac{\text{rad}(G) + M + 1 - |V_f|}{2} \right\rceil.$$

## 2.3 Graphes avec un petit nombre de broadcast domination

Pour un graphe non trivial connexe  $G$ , on peut aisément démontrer la caractérisation connue suivante :  $\gamma(G) = 1$  si et seulement si  $\text{rad}(G) = 1$  (il suffit d'appliquer la Proposition 5). Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 1 admettent une caractérisation identique :

**Proposition 6** [11]

*Soit  $G$  un graphe. Alors  $\gamma_b(G) = 1$  si et seulement si  $\text{rad}(G) = 1$ .*

Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 2 se caractérisent aussi en fonction du rayon :

**Théorème 5** [11]

*Soit  $G$  un graphe. Alors  $\gamma_b(G) = 2$  si et seulement si*

$$\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = 2.$$

Cependant, ERWIN [11] propose des exemples pour montrer qu'il existe :

- (i) une infinité de graphes  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 2 = rad(G) < \gamma(G)$  (les graphes  $S(K_{1,n})$ ,  $n \geq 3$ );
- (ii) une infinité de graphes  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) < rad(G)$  (les graphes  $G_n$  obtenus en insérant 2 sommets sur chaque arête du graphe multiple à 2 sommet reliés par  $n$  arêtes,  $n \geq 1$ );
- (iii) une infinité de graphes  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) = rad(G)$  (les graphes multipartis complets  $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ ,  $t \geq 2$  et  $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ ).

Il déduit de (i) qu'un graphe avec  $\gamma_b(G) = 2$  peut avoir un nombre de domination aussi grand que l'on voudrait. De (ii), il se pose la question sur la borne supérieure de  $rad(G)$  pour les graphes  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 2$ . Il y répondit par cette conséquence du Théorème 5 :

**Proposition 7 [11]**

*Si  $G$  est un graphe avec  $\gamma_b(G) = 2$ , alors*

1.  $rad(G) = 2$ , ou,
2.  $rad(G) = 3$  et  $\gamma(G) = 2$ .

Une autre conséquence du Théorème 5 est la suivante :

**Proposition 8** [11]

*Si  $G$  est un graphe et  $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = 3$ , alors  $\gamma_b(G) = 3$ .*

ERWIN résuma la Proposition 6, le Théorème 5 et la Proposition 8 par :

**Proposition 9** [10]

*Soit  $G$  un graphe. Si  $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = k$ , où  $1 \leq k \leq 3$ , alors  $\gamma_b(G) = k$ .*

ERWIN montra que le résultat de la Proposition 9 n'est pas vérifié lorsque  $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = 4$ . Il considéra le graphe  $G$  obtenu en joignant une extrémité de  $S(K_{1,4})$  à une extrémité de  $P_3$  (Figure 2.3) et il montra que  $\gamma_b(G) = 3$  et  $\min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\} = 4$ .

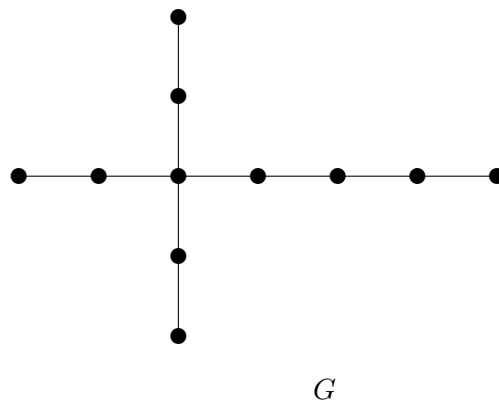


FIG. 2.3 – Graphe  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 3$  et  $\min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\} = 4$

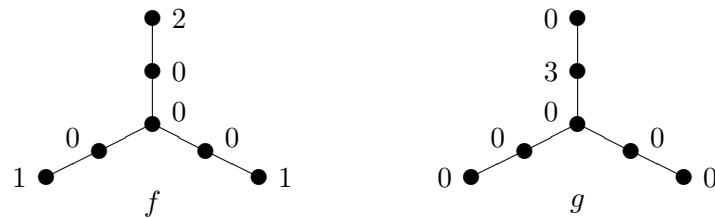
## 2.4 Classes de broadcasts dominants

### 2.4.1 Broadcast dominant minimal

Un ensemble dominant  $S$  d'un graphe  $G$  est *minimal* si aucun sous-ensemble propre de  $S$  ne domine  $V(G)$ . Par analogie, un broadcast dominant  $f$  sur un graphe  $G$  est dit *minimal* s'il n'existe aucun broadcast dominant  $f'$  sur  $G$  satisfaisant :

- (i)  $f'(v) \leq f(v)$  pour tout  $v \in V(G)$  et
- (ii)  $f'(u) < f(u)$  pour un certain  $u \in V(G)$ .

La Figure 2.4 illustre deux broadcasts dominants minimaux distincts  $f$  et  $g$  sur  $S(K_{1,3})$ .



Broadcasts dominants minimaux  $f, g$  sur  $S(K_{1,3})$ .

FIG. 2.4 – Broadcast dominant

Tout  $\gamma_b$ -broadcast minimum est minimal mais l'inverse n'est pas vrai en général (voir l'exemple illustré dans la Figure 2.4).

Des conditions nécessaires ou des caractérisations existent sur la minimalité d'un broadcast.

**Proposition 10** [11]

*Si  $f$  est un broadcast minimal sur un graphe  $G$  et  $|V_f| \geq 2$ , alors pour tout sommet  $v$ ,  $f(v) < e(v)$ .*

**Théorème 6** [11]

*Soit  $G$  un graphe et  $f$  un broadcast dominant sur  $G$ . Alors  $f$  est minimal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

- (a) Pour tout sommet  $v$  avec  $f(v) \geq 2$ , il existe un  $f$ -voisin privé  $u$  de  $v$  qui est à une distance  $f(v)$  de  $v$ .*
- (b) Si  $f(v) = 1$ , alors  $v$  possède un  $f$ -voisin privé  $u \in N[v]$ .*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 5.

**Corollaire 4** [11]

*Si  $G$  est un graphe et  $f$  est un broadcast dominant minimal sur  $G$ , alors  $|f(u) - f(v)| < d(u, v)$  pour chaque paire  $u, v$  de sommets distincts dans  $V_f$ .*

Pour un graphe  $G$ , une fonction  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  est dite *continue sur*  $V(G)$  si pour toute paire  $u, v$  de sommets adjacents de  $G$  on a que  $|f(u) - f(v)| \leq 1$ .

Le Lemme 2 suivant est une définition équivalente de la continuité.

**Lemme 2** [10]

*Soit  $G$  un graphe et  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction. Alors  $f$  est continue sur  $V(G)$  si et seulement si  $|f(u) - f(v)| \leq d(u, v)$  pour toute paire  $u, v$  de sommets de  $G$ .*

Grâce au Lemme 2, on déduit que le Corollaire 4 n'est autre que la continuité des broadcasts dominants minimaux sur l'ensemble des broadcast-dominants.

**Remarques**

- 1) Un broadcast dominant minimal n'est en général pas continu sur tout l'ensemble des sommets d'un graphe (voir les broadcasts de la Figure 2.4).
- 2) Tout graphe admet un broadcast dominant minimal continu sur tout l'ensemble de ses sommets. Il suffit de considérer la fonction caractéristique d'un ensemble dominant minimal sur ce graphe.

Soit  $f$  un broadcast dominant sur un graphe  $G$  et soit  $v \in V_f$ . Un

sommet  $x$  est dit  $f$ -essentiel à  $v$  s'il existe un  $f$ -voisin privé  $u$  de  $v$  et une  $u - v$  géodésique contenant  $x$ .

**Lemme 3** [11]

*Soit  $f$  un broadcast dominant sur un graphe  $G$  et soient  $x, x' \in V(G)$ ,  $v, v' \in V_f$  avec  $v \neq v'$ . Si  $x$  est  $f$ -essentiel à  $v$  et  $x'$  est  $f$ -essentiel à  $v'$ , alors  $x \neq x'$ .*

**Théorème 7** [11]

*Soit  $f$  un broadcast dominant sur un graphe  $G$ . Pour tout sommet  $v \in V_f$  et tout  $f$ -voisin privé  $v'$  de  $v$ , aucun sommet  $f$ -dominant distinct de  $v$  n'appartient à la géodésique  $v - v'$ .*

**2.4.2 Broadcast dominant optimal**

Soit  $G$  un graphe. Posons  $\gamma_c(G) = \min\{f(V) : f \text{ est un broadcast dominant sur } G \text{ et continu sur } V(G)\}$ . Un broadcast  $f$  dominant continu de coût minimum sur un graphe  $G$  est appelé  $\gamma_c$ -broadcast sur  $G$ . On a le lemme suivant :



**Lemme 4** [10]

*Si  $G$  est un graphe et  $f$  est un broadcast dominant minimal continue sur  $V(G)$ , alors*

$$\max\{f(v) : v \in V(G)\} = 1.$$

Soit  $G$  un graphe. Posons  $\Gamma_c(G) = \max\{f(V) : f \text{ est un broadcast dominant sur } G \text{ et continu sur } V(G)\}$ . Un broadcast  $f$  dominant continu de coût maximum sur un graphe  $G$  est appelé  $\Gamma_c$ -broadcast sur  $G$ .

**Théorème 8** [10]

*Pour tout graphe  $G$ ,*

$$\gamma_c(G) = \gamma(G) \text{ et } \Gamma_c = \Gamma(G).$$

**Corollaire 5** [10]

*Soit  $G$  un graphe. Alors  $G$  admet un  $\gamma_c$ -broadcast si et seulement si  $\gamma_b(G) = \gamma(G)$ .*

Le résultat qui suit généralise la condition nécessaire (b) du Théorème 6 aux  $\gamma_b$ -broadcasts :

**Théorème 9** [11]

*Soit  $G$  un graphe d'ordre au moins égal à 2. Alors il existe un  $\gamma_b$ -broadcast  $f$  sur  $G$  tel que pour tout sommet  $v \in V_f$ , il existe un  $f$ -voisin privé  $u$  de  $v$  qui est à une distance  $f(v)$  de  $v$ .*

Si  $f$  est un broadcast sur un graphe  $G$  et  $S \subseteq V_f$ , alors on définit l'ensemble des  $f$ -voisins privés de  $S$  par  $PN_f[S] = N_f[S] - N_f[V_f - S]$ .

**Théorème 10** [11]

*Si  $f$  est un  $\gamma_b$ -broadcast sur un graphe  $G$ , alors pour tout ensemble non vide  $S \subseteq V_f$ ,  $\sum_{u \in S} f(u) \leq \min_{v \in V(G)} \max_{u \in PN_f[S]} d(u, v)$ .*

L'inégalité présentée dans le Théorème 10 n'est pas une condition suffisante. En effet, pour  $n \geq 4$ , soit  $v$  le sommet central de  $P_{2n+1}$  et  $\chi_v$  la fonction caractéristique de  $v$ . La fonction  $n\chi_v$  est un broadcast dominant minimal sur  $P_{2n+1}$  satisfaisant le Théorème 10 mais n'est pas un  $\gamma_b$ -broadcast puisque  $\gamma_b(P_{2n+1}) = \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil < n$ .

**Corollaire 6** [11]

*Soient  $G$  un graphe et  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $G$ . Alors pour toute paire de sommets distincts  $u, v$  avec  $0 < f(u) \leq f(v)$ ,*

$$f(u) \leq \left\lceil \frac{d(u,v)}{2} \right\rceil \text{ et } f(v) \leq d(u,v).$$

La réciproque du Corollaire 6 est fautive en général. Considérons le contre exemple suivant : soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , et  $T$  l'ensemble des sommets de degré 2 du graphe  $S(K_{1,2+k})$ .

Le broadcast  $f : V(S(K_{1,2+k})) \rightarrow \{0, 1\}$  défini par

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in T, \\ 0 & \text{si } v \notin T \end{cases}$$

est un dominant minimal mais pas un  $\gamma_b$ -broadcast [11].

Pour un graphe  $G$ , soient  $v \in V(G)$  et  $S \subseteq V(G)$ . Soit  $d(v, S) = \min\{d(v, s) : s \in S\}$  si  $S$  est non vide et  $d(v, S) = \infty$  sinon. Pour un  $\gamma_b$ -broadcast  $f$  sur  $G$  et un sommet  $v$ , posons  $V_f^{\leq}(v) = \{u \in V_f - \{v\} : f(u) \leq f(v)\}$  et  $V_f^{\geq}(v) = \{u \in V_f - \{v\} : f(u) \geq f(v)\}$ . Du Corollaire 6 on obtient :  $f(v) \leq \min\{d(v, V_f^{\leq}(v)), \left\lceil \frac{d(v, V_f^{\geq}(v))}{2} \right\rceil\}$ .

## 2.5 Autres broadcasting invariants

Dans [9], DUNBAR et al. définirent et étudièrent d'autres paramètres liés aux broadcasts appelés *broadcasting invariants*. Nous citerons dans cette partie l'essentiel des résultats obtenus

### 2.5.1 Broadcast indépendant

Soit  $G$  un graphe. Un broadcast  $f$  est dit *indépendant* si tout sommet  $f$ -dominant n'est  $f$ -dominé que par lui-même, c'est-à-dire si pour tout sommet  $v \in V_f$ ,  $N_f[v] \cap V_f = \{v\}$ , ou de manière équivalente,  $|H_f(v)| = 1$ . Un broadcast indépendant n'est donc pas nécessairement dominant. Le coût maximum d'un broadcast indépendant de  $G$  est appelé *nombre de broadcast indépendance* et est noté par  $\beta_b(G)$ . Le *nombre inférieur de broadcast indépendance*  $i_b(G)$  est égal au coût minimum d'un broadcast indépendant maximal de  $G$ .

**Observation 3** [9]

*Pour tout graphe  $G$ ,  $i_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq \beta_b(G)$ .*

Soit  $M$  un sous-ensemble de sommets de  $G$  tel que pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  de  $M$ ,  $d(u, v) = \text{diam}(G)$ , et soit  $\mu(G)$  la cardinalité maximum d'un tel sous-ensemble de  $G$ . L'observation suivante montre que la borne inférieure sur  $\beta_b(G)$  peut être améliorée :

**Proposition 11** [9]

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(\text{diam}(G) - 1) \geq 2(\text{diam}(G) - 1)$$

et cette borne est atteinte par.

En fait, la borne inférieure de  $\beta_{i_0}$  de la Proposition 11 est atteinte par le graphe  $S(K_{1,t})$ ,  $t \geq 2$ .

Dans ce qui suit, lorsque deux paramètres  $\alpha$  et  $\epsilon$  sont incomparables, nous écrirons brièvement  $\alpha \diamond \epsilon$ .

**Observation 4** [9]

Pour tout graphe  $G$ ,

(i)  $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$ ,

(ii)  $\{\gamma(G), i(G)\} \diamond i_b(G)$ ,

(iii)  $\{p(G), P(G)\} \diamond \{\gamma_b(G), i_b(G)\}$ .

Dans [9], les auteurs étudièrent l'extension de la chaîne d'inégalités  $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G)$  énoncée au Chapitre 2, à savoir si  $\gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \beta_b(G) \leq \Gamma_b(G)$  est satisfaite.

Pour tout sommet  $v \in V_f$ , posons  $d_f(v) = \{d(v, u) \mid u \in V_f - \{v\}\}$ . Le théorème suivant est une caractérisation des broadcasts indépendants qui généralise la Proposition 1 vue au Chapitre 1.

**Théorème 11** [11]

Soit  $f$  un broadcast indépendant sur un graphe  $G$ . Si  $V_f = \{v\}$  alors  $f$  est maximal si et seulement si  $f(v) = e(v)$ . Par ailleurs, si  $|V_f| \geq 2$ , alors  $f$  est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $f$  est un broadcast dominant et
- (ii) pour tout  $v \in V_f$ ,  $f(v) = d_f(v) - 1$ .

**Corollaire 7** [9]

Pour tout graphe  $G$ ,

- (i)  $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$ ,
- (ii)  $\beta_b(G) \diamond \Gamma_b(G)$ , et
- (iii)  $\beta_b(G) \diamond \Gamma(G)$ .

Le résultat suivant établit une chaîne d'inégalités entre  $\beta_0$  et les nombres de broadcast indépendance :

**Proposition 12** [9]

Pour tout graphe  $G$ ,  $i_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$ .

**Corollaire 8** [9]

Pour tout graphe  $G$ , si  $\gamma_b(G) = \text{rad}(G)$ , alors  $i_b(G) = \text{rad}(G)$ .

Nous obtenons alors le schéma de comparaison suivant donné dans [9] :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \gamma(G) & \leq & i(G) & \leq & \beta_0(G) & \leq & \Gamma(G) \\
 \vee | & & \diamond & & | \wedge & & | \wedge \\
 \gamma_b(G) & \leq & i_b(G) & \leq & \beta_b(G) & \leq & \Gamma_b(G)
 \end{array}$$

### 2.5.2 Broadcast dominant indépendant

Un broadcast  $f$  est dit *dominant indépendant* s'il est à la fois indépendant et dominant. Le coût maximum d'un broadcast indépendant dominant minimal sur  $G$  est appelé *nombre supérieur de broadcast indépendant de domination* et est noté par  $\Gamma_{ib}(G)$ . *nombre de broadcast indépendant de domination*  $\gamma_{ib}(G)$  est égal au coût minimum d'un broadcast dominant indépendant sur  $G$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. Si  $A$  est sous-ensemble propre de  $B$ , on écrit  $A \subset B$  :

#### **Théorème 12** [10]

*Si  $f$  est un broadcast dominant non indépendant sur un graphe  $G = (V, E)$ , alors il existe un broadcast  $g$  sur  $G$  qui est dominant indépendant avec  $g(V) \leq f(V)$  et  $V_g \subset V_f$ .*

**Corollaire 9** [10]

Tout graphe  $G$  possède un  $\gamma_b$ -broadcast qui est indépendant, c'est-à-dire que pour tout graphe  $G$ ,

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G).$$

**Proposition 13** [9]

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\gamma_{ib}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Pour le nombre supérieur de broadcast indépendant de domination, nous avons ce qui suit :

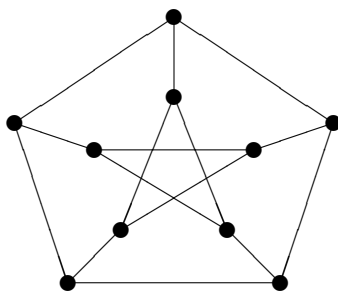
**Proposition 14** [9]

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq \min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}.$$

D'autre part, DUNBAR et al. montrèrent que, pour le graphe de PETERSEN  $PG$  (Figure 3.1) et la chaîne  $P_{10}$ , on a  $\Gamma_{ib}(PG) = 4 < 5 = \Gamma(PG)$  et  $\Gamma(P_{10}) = 5 < 9 = diam(P_{10}) \leq \Gamma_{ib}(P_{10})$ . Ainsi,  $\Gamma_{ib} \diamond \Gamma(G)$ .





PG.

FIG. 2.5 – Graphe de PETERSEN

### 2.5.3 Broadcast efficace

Un broadcast  $f$  est efficace si tout sommet est  $f$ -dominé exactement par un seul sommet  $f$ -dominant, c'est-à-dire que pour tout sommet  $v \in V$ ,  $|H_f(v)| = 1$ . Le coût maximum d'un broadcast efficace est appelé le *nombre supérieur d'efficacité* d'un broadcast  $\Gamma_{eb}(G)$ , et le *nombre d'efficacité* d'un broadcast  $\gamma_{eb}(G)$  est égal au coût minimum d'un broadcast efficace.

Un résultat très important sur lequel nous nous baserons pour prouver certains résultats dans le Chapitre 3 concerne l'existence d'un  $\gamma_b$ -broadcast efficace avec une propriété supplémentaire sur le graphe  $G$ .

#### **Théorème 13** [9]

*Tout graphe possède un  $\gamma_b$ -broadcast qui est efficace.*

**Corollaire 10** [9]

*Tout graphe  $G$  possède un  $\gamma_b$ -broadcast  $f$  pour lequel la distance entre deux sommets  $f$ -dominants  $u, v$  est supérieure à  $f(u) + f(v)$ .*

Parce que tout broadcast dominant efficace est dominant minimal, tout graphe  $G$  vérifie :

$$\Gamma_{eb}(G) \leq \min\{\beta_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}.$$

Tous les résultats étendent la chaîne d'inégalités entre les invariants de broadcast :

**Corollaire 11** [9]

*On a :*

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \leq i_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

**Observation 5** [9]

*Pour tout graphe  $G$ ,*

$$\Gamma_{eb}(G) \diamond \{p(G), P(G), \gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G)\}.$$

### 2.5.4 Broadcast packing

Un broadcast  $f$  est appelé *broadcast packing* si tout sommet admet au plus un sommet  $f$ -dominant, c'est-à-dire tout sommet  $v \in V$  vérifie  $|H(v)| \leq 1$ . Le coût maximum d'un broadcast packing de  $G$  est appelé *nombre de broadcast packing* et est noté par  $P_b(G)$ . Le *nombre inférieur de broadcast packing* est égal au coût minimum d'un broadcast packing maximal, et est noté par  $p_b(G)$ .

**Observation 6** *Pour tout graphe  $G$ ,*

(i)  $p_b(G) \diamond P(G)$ ,

(ii)  $p_b(G) \diamond p(G) \leq P(G) \leq P_b(G)$ , et

(iii)  $p_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq P_b(G) \leq \beta_b(G)$ .

On sait (voir Chapitre 2) que la chaîne d'inégalité suivante est valide pour tout graphe  $G$  :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G).$$

DUNBAR et al. se posèrent naturellement la question de la conservation de cette chaîne entre les broadcasting invariants correspondants. Ils apportèrent une réponse complète à cette question par ce qui suit :

**Proposition 15** [9]

*Tout broadcast efficace est*

- (i) *un broadcast packing maximal,*
- (ii) *un broadcast dominant minimal, et*
- (iii) *un broadcast dominant indépendant minimal.*

Le corollaire suivant est immédiat du Corollaire 11 et de la Proposition 15 :

**Corollaire 12** [9]

*Pour tout graphe  $G$ ,*

$$p_b(G) \leq \gamma_{eb}(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \min\{P_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}.$$

**Observation 7** [9]

*Pour tout graphe  $G$ ,*

$$P_b(G) \diamond \{\gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G), \Gamma_{ib}(G), \Gamma_b(G)\}.$$

Les inégalités et comparaisons entre broadcasting invariants vues dans ce chapitre sont résumées dans le Tableau 2.1 [9].

	$p$	$P$	$\gamma$	$i$	$\beta_0$	$\Gamma$	$\gamma_b$	$i_b$	$\beta_b$	$\Gamma_b$	$\Gamma_{ib}$	$\Gamma_{eb}$	$p_b$	$P_b$
$p$	=	≤	≤	≤	≤	≤	◇	◇	≤	≤	≤	◇	◇	≤
$P$	≥	=	≤	≤	≤	≤	◇	◇	≤	≤	≤	◇	◇	≤
$\gamma$	≥	≥	=	≤	≤	≤	≥	◇	≤	≤	≤	◇	≥	◇
$i$	≥	≥	≥	=	≤	≤	≥	◇	≤	≤	≤	◇	≥	◇
$\beta_0$	≥	≥	≥	≥	=	≤	≥	≥	≤	≤	≤	◇	≥	◇
$\Gamma$	≥	≥	≥	≥	≥	=	≥	≥	◇	≤	◇	◇	≥	◇
$\gamma_b$	◇	◇	≤	≤	≤	≤	=	≤	≤	≤	≤	≤	≥	≤
$i_b$	◇	◇	◇	◇	≤	≤	≥	=	≤	≤	≤	≤	≥	≤
$\beta_b$	≥	≥	≥	≥	≥	◇	≥	≥	=	◇	≥	≥	≥	≥
$\Gamma_b$	≥	≥	≥	≥	≥	≥	≥	≥	◇	=	≥	≥	≥	◇
$\Gamma_{ib}$	≥	≥	≥	≥	≥	◇	≥	≥	≤	≤	=	≥	≥	◇
$\Gamma_{eb}$	◇	◇	◇	◇	◇	◇	≥	≥	≤	≤	≤	=	≥	≤
$p_b$	◇	◇	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	=	≤
$P_b$	≥	≥	◇	◇	◇	◇	≥	≥	≤	◇	◇	≥	≥	=

TAB. 2.1 – Inégalités entre broadcasting invariants.

## 2.6 Complexité algorithmique

Dans cette section, nous énonçons brièvement des résultats relatifs à la complexité algorithmique du problème de détermination de  $\gamma_b$ . Cependant, la théorie de la complexité algorithmique n'est pas rappelée mais le lecteur non familiarisé avec cette théorie est orienté vers les ouvrages [6], [12] ou [18].

### 2.6.1 Problème de broadcast domination optimale

On appelle problème de *broadcast domination optimale* le problème suivant : étant donné un graphe  $G = (V, E)$  et un entier positif

$K$ , existe-t-il un broadcast dominant  $f$  de  $G$  tel que  $\sum_{v \in V} f(v) \leq K$  ?

**Théorème 14** [15]

*Le problème de broadcast domination optimale est polynomial, de complexité  $O(n^6)$ .*

La polynomialité du problème de broadcast domination optimale a quelque peu surpris la communauté algorithmique puisque le problème de détermination du nombre de domination, qui en est une restriction à la recherche de solutions particulières, est NP-complet dans des graphes arbitraires (voir page 190 de [12] ou page 300 de [14]).

En 2004, BLAIR et al. publièrent un papier [15] dans lequel ils prouvèrent la polynomialité du problème de broadcast domination optimale dans les graphes d'intervalles, les graphes séries-parallèles et les arbres en exhibant des algorithmes respectivement en  $O(n^3)$ ,  $O(nr^4)$  et  $O(nh)$  où  $r$  est le rayon du graphe série-parallèle et  $h$  la profondeur de l'arbre (voir [4]).

Suite à cela, DABNEY et al. proposèrent un nouvel algorithme pour les arbres qui permet d'atteindre l'optimum en  $O(n)$  [7].

### 2.6.2 Broadcast domination optimale restreinte

On appelle problème de *broadcast domination optimale restreinte*, le problème suivant : Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et deux entiers positifs  $K, M \leq |V|$ , Existe-t-il un broadcast dominant  $f$  de  $G$  tel que  $\sum_{v \in V} f(v) \leq K$  et  $\max_{v \in V} f(v) \leq M$  ?

#### **Théorème 15** [16]

*Le problème de broadcast domination restreinte est NP-complet.*

La preuve du Théorème 15 est immédiate puisque pour  $M = 1$ , le problème se réduit au problème de domination qui est NP-complet.

## Chapitre 3

# Broadcasting invariants dans les arbres

Dans ce chapitre, nous prouvons dans un premier temps la conjecture d'ERWIN citée dans l'introduction. Ensuite, nous nous intéressons à la  $\gamma_b$ -radialité des arbres  $\mathcal{N}$ -aires complets. Dans la dernière section, nous déterminons le plus petit sous-graphe de  $S_{k,3}$  ayant même rayon que  $S_{k,3}$  et qui est  $\gamma_b$ -radial minimal au sens de la suppression d'arêtes pendantes; nous dirons qu'un tel sous-graphe est  $\gamma_b(S_{k,3})$ -radial minimal.



### 3.1 Broadcast domination pour deux classes particulières d'arbres

Soit  $G$  un graphe et soit  $f$  un broadcast dominant efficace sur  $G$ . On définit le *graphe de domination* de  $G$  par  $f$  par  $G(f) = (V_f, \{uv | N_G(N_f(u)) \cap N_f(v) \neq \emptyset\})$ . Le graphe de domination peut être vu comme une modification de  $G$  par laquelle tout  $f$ -voisinage  $N_f(v)$  est contracté en un sommet  $v$ , et les voisinages sont préservés. Comme  $G$  est connexe et  $f$  est dominant,  $G(f)$  est toujours connexe.

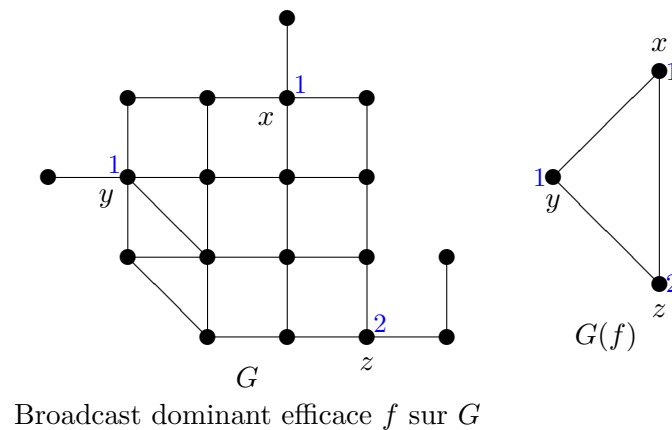


FIG. 3.1 – Graphe de domination d'un graphe

Dans leur entreprise de conception d'un algorithme polynomial pour la détermination d'une broadcast domination optimale pour des

graphes arbitraires, HEGGERNES et LOKSHTANOV [15] s'appuyèrent sur un théorème très important auquel on fera appel dans la preuve de la conjecture d'ERWIN :

**Théorème 16** [15]

*Pour tout graphe  $G$ , il existe un  $\gamma_b$ -broadcast efficace  $f$  sur  $G$  tel que le graphe de domination  $G(f)$  soit une chaîne ou un cycle.*

En particulier pour les arbres, on a

**Corollaire 13** [7]

*Pour tout arbre  $T$ , il existe un  $\gamma_b$ -broadcast efficace  $f$  tel que le graphe de domination  $T(f)$  soit une chaîne.*

Nous allons maintenant énoncer un théorème que nous utiliserons par la suite.

**Théorème 17** *Soient  $T = (V, E)$  un arbre et  $\tau = (U, F)$  un sous-arbre induit de  $T$ . Alors,  $\gamma_b(T) \geq \gamma_b(\tau)$ . L'égalité est satisfaite si  $\gamma_b(\tau) = \text{rad}(T)$ .*

**Preuve.** Il n'existe aucune chaîne  $\mathcal{C}$  de  $T$  d'extrémités distinctes dans  $U$ , et dont tous les autres sommets sont dans  $V - U$  ; sinon,  $\tau$  étant un sous-arbre donc connexe, les extrémités d'une telle chaîne

seraient reliées par une autre chaîne  $\mathcal{C}'$  dont tous les sommets sont dans  $\tau$  et on aurait un cycle dans  $T$ , ce qui est impossible.

Soit  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast efficace sur  $T$ . Pour tout  $u \in U \cap N(V - U)$ , posons  $\mathcal{N}(u) = \{v \in V - U \mid d(u, v) = \min\{d(w, v); w \in U\}\}$ .

Alors, d'après la remarque en début de preuve,  $\mathcal{N}(u) \cap \mathcal{N}(v) = \emptyset$  pour tous sommets  $u \neq v$ .

Soit  $g$  le broadcast sur  $T$  défini par :

$$g(u) = \begin{cases} \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} f(v) + f(u) & \text{si } u \in U, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La restriction  $g|_U$  de  $g$  à  $U$  est un broadcast dominant sur  $\tau$  et  $g|_U(U) = \gamma_b(T)$ . Par suite,  $\gamma_b(T) \geq \gamma_b(\tau)$ . De plus, si  $\gamma_b(\tau) = \text{rad}(T)$ , l'inégalité précédente devient  $\gamma_b(T) \geq \text{rad}(T)$  et en appliquant le Corollaire 1, l'égalité se déduit.  $\square$

### 3.1.1 Graphes $k$ -subdivisés d'une étoile

Pour tous entiers  $k \geq 0$  et  $t \geq 3$ , on note  $S_{k,t}$  le graphe  $k$ -subdivisé du graphe  $t$ -étoile  $K_{1,t}$  définis au Chapitre 2 (Figure 3.2). Notons que le *centre* de  $S_{k,t}$  contient un unique sommet  $c$  qu'on appellera égale-

### 3.1. BROADCAST DOMINATION POUR DEUX CLASSES PARTICULIÈRES D'ARBRES

---

ment centre de  $S_{k,t}$ . Pour tout sommet  $v \in V(S_{k,t}) - \{c\}$ , on appelle *bras* de  $v$ , et on note  $arm(v)$ , l'unique chaîne de  $S_{k,t}$  de longueur  $k$  contenant  $v$  et ne contenant pas  $c$ . Pour tout sommet  $v \in V(S_{k,t})$ ,  $arm(v)$  est appelé *un bras de  $S_{k,t}$* . Ainsi,  $S_{k,t}$  possède exactement  $t$  bras.

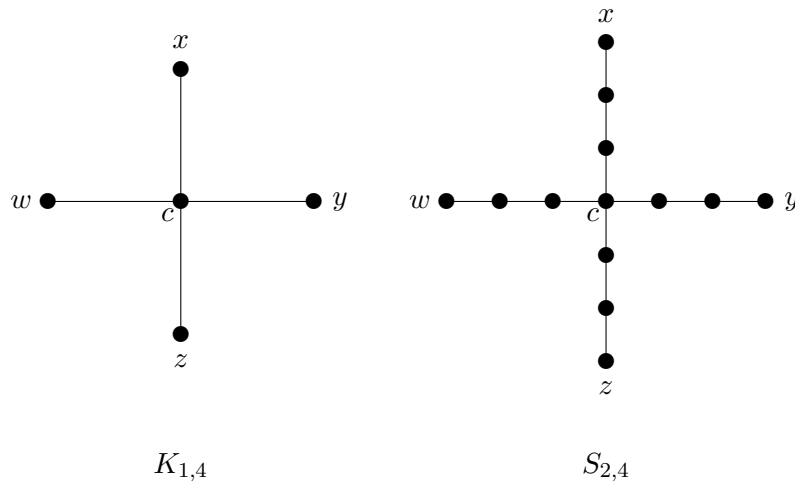


FIG. 3.2 – Graphe  $k$ -subdivisé de  $K_{1,t}$

Un graphe  $G$  est  $\gamma_b$ -radial si  $\gamma_b(G) = rad(G)$ .

En 2001, Erwin [10] montra que le graphe  $k$ -subdivisé du graphe étoile  $K_{1,t}$  est  $\gamma_b$ -radial pour  $k \geq 0$  et  $t \geq 5$  puis proposa la conjecture qui affirme la véracité du résultat pour  $t \in \{3, 4\}$  :

**Théorème 18** [10]

Pour tous entiers  $k \geq 0$  et  $t \geq 5$ ,

$$\gamma_b(S_{k,t}) = \text{rad}(S_{k,t}) = k + 1.$$

**Conjecture 1** [10]

Pour tous entiers  $k \geq 0$  et  $t \in \{3, 4\}$ ,

$$\gamma_b(S_{k,t}) = \text{rad}(S_{k,t}) = k + 1.$$

Dans ce qui suit, nous généralisons le Théorème 14 et ainsi répondons à la conjecture d'ERWIN.

**Théorème 19** Pour tous entiers  $k \geq 0$  et  $t \geq 3$ ,

$$\gamma_b(S_{k,t}) = \text{rad}(S_{k,t}) = k + 1.$$

**Preuve** Soient  $k, t \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 3$ . Comme l'arbre  $S_{k,t}$  contient  $S_{k,3}$  comme sous-arbre induit, nous déduisons du Théorème 17 qu'il suffit de montrer la  $\gamma_b$ -radialité de  $S_{k,3}$ .

Pour  $k = 0$ , le Corollaire 1 et le Théorème 4 impliquent directement  $1 = \left\lceil \frac{\text{diam}(S_{0,3})+1}{3} \right\rceil \leq \gamma_b(S_{0,3}) \leq \text{rad}(S_{0,3}) = 1$ . Pour  $k = 1$ , on obtient

de manière analogue  $\gamma_b(S_{1,3}) = rad(S_{1,t}) = 2$ .

Soient  $k \geq 2$  et  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast efficace dont le graphe de domination  $S_{k,3}(f)$  est une chaîne ( $f$  existe d'après le Corollaire 13). D'après le Corollaire 1,  $\gamma_b(S_{k,3}) = f(V(S_{k,3})) \leq k + 1$ .

Supposons que  $f(V(S_{k,3})) < k + 1$ . Notons que tout bras de  $S_{k,3}$  contient au moins un sommet  $f$ -dominant. En effet, si ce n'est pas le cas, il existerait deux sommets  $u$  et  $v$ ,  $u \neq c$ ,  $v \neq c$  tels que  $v$  est un sommet pendent,  $arm(v) \cap V_f = \emptyset$  et  $H_f(v) = \{u\}$ . Nous obtiendrons alors  $\gamma_b(S_{k,3}) \geq f(u) \geq d(c, v) = k + 1$ . Contradiction.

Si le centre  $c$  de  $S_{k,3}$  vérifie  $f(c) \neq 0$ , alors dans  $S_{k,3}(f)$ ,  $c$  serait adjacent à exactement un sommet  $f$ -dominant de chacun des bras de  $S_{k,3}$ . Ainsi,  $d_{S_{k,3}(f)}(c) = 3$ , qui est une contradiction avec le fait que  $S_{k,3}(f)$  est une chaîne. Il s'ensuit,  $f(c) = 0$  et  $c \in V_f^0$ .

Montrons qu'il existe au moins un bras de  $S_{k,3}$  avec un unique sommet  $f$ -dominant. Supposons le contraire. Soit  $v$  un sommet,  $v \neq c$ , tel que  $|arm(v) \cap V_f| \geq 2$  et soit  $u$  un sommet,  $u \in arm(v) \cap V_f$  tel que  $d(c, u) = \min\{d(c, w); w \in arm(v) \cap V_f\}$  et  $u \in H_f(c)$ . Nous obtenons alors que  $u$  est adjacent dans  $S_{k,3}(f)$  à exactement un sommet  $f$ -dominant de chaque bras de  $S_{k,3}$  et ainsi,  $d_{S_{k,3}(f)}(u) = 3$ . Par suite,  $S_{k,3}(f)$  n'est pas une chaîne. Contradiction.

### 3.1. BROADCAST DOMINATION POUR DEUX CLASSES PARTICULIÈRES D'ARBRES

---

Nous déduisons qu'il existe un seul bras contenant un unique sommet  $f$ -dominant avec la propriété que  $c$  est  $f$ -dominé par ce sommet. Soit  $v \in V(S_{k,3}) - \{c\}$  tel que  $H_f(c) = \{v\}$ . Alors  $d(c, v) \leq f(v)$ . Soit  $w$  l'unique sommet pendant de  $arm(v)$  et  $y, z$  deux sommets  $f$ -dominants distincts, différents de  $v$ .

Nous avons d'une part  $k \geq f(V(S_{k,3})) \geq f(v) + f(y) + f(z) \geq f(v) + 2$  et donc  $f(v) \leq k - 2$ . D'autre part, si  $f(v) < \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ , nous obtenons  $f(v) \geq d(c, v) = k + 1 - d(v, w) \geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1 \geq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1 > \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$  qui est une contradiction. Ainsi,  $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq f(v) \leq k - 2$ .

Aussi,  $d(v, w) \geq f(v) - 1$  car sinon, il existe un sommet  $s \in arm(v)$  tel que  $d(s, c) = d(v, c) - 1$  (puisque si  $d(v, c) = 1$  nous aurons  $k - 2 \geq f(v) \geq d(v, w) = k + 1 - d(v, c) = k$  qui est absurde).

Soit  $\sigma$  le broadcast sur  $S_{k,3}$  défini par :

$$\sigma(u) = \begin{cases} f(u) - 1 & \text{si } u = s \\ 0 & \text{si } u = v \\ f(u) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\sigma$  est un broadcast dominant sur  $S_{k,3}$  de valeur  $\sigma(V(S_{k,3})) = f(V(S_{k,3})) - 1 = \gamma_b(S_{k,3}) - 1 \geq \gamma_b(S_{k,3})$ . Impossible. Donc,  $f(v) - 1 \leq d(v, w) \leq$

$f(v)$ .

1<sup>er</sup> cas  $d(v, w) = f(v) - 1$ . Nous avons,  $\gamma_b(S_{k,3}) = f(V(S_{k,3})) = f(v) + 2\gamma_b(P_n)$  où  $n = 2(k + 1) - [d(v, w) + f(v)] = 2(k + 1) - 2f(v) + 1$ . D'après le Corollaire 3,  $\gamma_b(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ . On a alors,  $\gamma_b(S_{k,3}) = f(V(S_{k,3})) = \min\{x + 2 \lceil \frac{2(k+1-x)+1}{3} \rceil; x \in \mathbb{N} \cap [\lceil \frac{k+1}{2} \rceil, k-2]\} = k + 1$ , puisque l'application  $\phi_k$  définie par  $\phi_k(x) = x + \frac{4}{3}(k + 1 - x) + \frac{2}{3}$  est strictement décroissante. Par conséquent  $\gamma_b(S_{k,3}) > k + 1$ . Contradiction.

2<sup>ème</sup> cas :  $d(v, w) = f(v)$ . Nous aboutissons de manière similaire que le 1<sup>er</sup> cas à la contradiction  $\gamma_b(S_{k,3}) \geq k + 2$ .  $\square$

**Corollaire 14** *Pour tous entiers  $k \geq 0$  et  $t \geq 3$ ,*

$$i_b(S_{k,t}) = k + 1.$$

**Preuve.** D'après le Théorème 19,  $\gamma_b(S_{k,t}) = \text{rad}(S_{k,t}) = k + 1$ . Il suffit alors d'appliquer le Corollaire 8.  $\square$

**Corollaire 15** *Pour un entier  $k \geq 0$ , soit  $T = (V, E)$  un arbre de rayon  $k + 1$  contenant un sous-arbre induit  $\tau = (U, F)$  isomorphe à  $S_{k,3}$ . Alors,*

$$\gamma_b(T) = i_b(T) = \text{rad}(T) = k + 1.$$



**Preuve.** D'après le Théorème 19, pour tout entier  $k \geq 0$  on a  $\gamma_b(S_{k,3}) = \text{rad}(S_{k,3}) = k + 1$ . Comme  $\tau \simeq S_{k,3}$  alors  $\gamma_b(\tau) = k + 1 = \text{rad}(T)$ . Il suffit alors d'appliquer le Théorème 17 puis le Corollaire 8.  $\square$

### 3.1.2 Arbres $t$ -aires complets

Pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $t \geq 2$ , on appelle arbre  $t$ -aire complet de profondeur  $k$  le graphe  $A_{k,t}$  défini inductivement comme suit :

- $A_{1,t}$  est le graphe biparti complet  $K_{1,t}$ .
- Pour  $k \geq 2$ ,  $A_{k,t}$  est obtenu à partir de  $t$  copies disjointes de  $A_{k-1,t}$  et d'un sommet relié par une arête à l'unique sommet de degré  $t$  de chacune des  $t$  copies de  $A_{k-1,t}$  (Figure 3.3).

L'unique sommet  $r$  de  $A_{k,t}$  de degré  $t$  est la *racine* de  $A_{k,t}$ .

Soit  $k \geq 1$  un entier. Pour tout entier  $0 \leq i \leq k$ , on définit la  $i^{\text{ème}}$  *génération* de  $A_{k,2}$  par  $V_i(A_{k,2}) = \{u \in V(A_{k,2}) \mid d(u, r) = i\}$ . En particulier,  $V_k(A_{k,2})$  est l'ensemble des sommets pendants de  $A_{k,2}$ . Pour un sommet  $v \in V_i(A_{k,2})$  on écrit  $l(v) = i$  et on dit que  $i$  est la profondeur de  $v$ . Enfin, pour tout sommet  $u \in V(A_{k,2})$ , on note  $A_{k,2}(u)$  l'unique sous-arbre binaire complet de  $A_{k,2}$  de racine  $u$  et de profondeur  $k - l(u)$ .

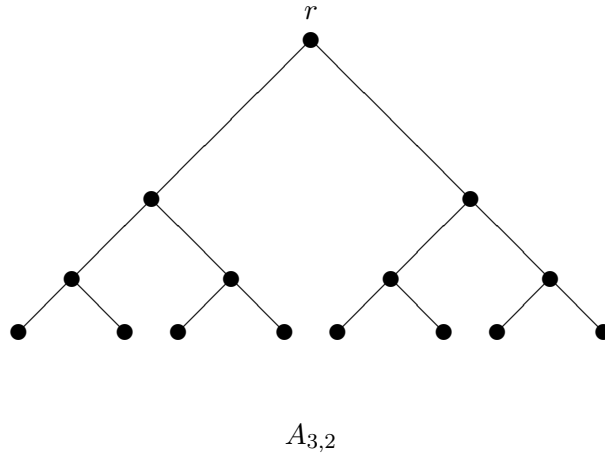


FIG. 3.3 – Arbre binaire de profondeur 3

Posons  $H'_f(v) = \{u \in H_f(v) \mid d(u,v) = \min\{d(w,v); w \in H_f(v)\}\}$ .

**Théorème 20** *Pour tout entier  $k \geq 1$  on a*

$$\gamma_b(A_{k,2}) < \gamma_b(A_{k+1,2}).$$

**Preuve.** Grâce au Théorème 17, on a l'inégalité  $\gamma_b(A_{k,2}) \leq \gamma_b(A_{k+1,2})$ .

Supposons  $\gamma_b(A_{k,2}) = \gamma_b(A_{k+1,2})$ .

Soit  $A_{k,2}$  l'arbre binaire complet de profondeur  $k$  obtenu à partir de  $A_{k+1,2}$  en supprimant ses sommets pendants. Soient  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $A_{k+1,2}$  et  $g$  le broadcast sur  $A_{k+1,2}$  défini par :

$$g(v) = \begin{cases} f(v) + f(v_1) + f(v_2) & \text{si } N_{A_{k+1,2}}(v) \cap V_{k+1}(A_{k+1,2}) = \{v_1, v_2\} \\ 0 & \text{si } d_{A_{k+1,2}}(v) = 1 \\ f(v) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors la restriction de  $g$  à  $A_{k,2}$  est un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $A_{k,2}$ .

Si  $V_g \cap V_k(A_{k,2}) \neq \emptyset$ , alors le broadcast  $h$  défini sur  $A_{k,2}$  par :

$$h(v) = \begin{cases} g(v) + g(v_1) + g(v_2) - 1 & \text{si } N_{A_{k,2}}(v) \cap V_k(A_{k,2}) = \{v_1, v_2\} \\ & \text{et } f(v_1) + f(v_2) \geq 1 \\ 0 & \text{si } d_{A_{k,2}}(v) = 1 \\ g(v) & \text{sinon} \end{cases}$$

est dominant sur  $A_{k,2}$  et  $h(V(A_{k,2})) \leq g(V(A_{k,2})) - 1 < g(V(A_{k,2})) = \gamma_b(A_{k,2})$ , absurde. D'où,  $g(v) = 0$  pour tout sommet  $v$  de  $V_k(A_{k,2})$ .

Par conséquent, pour tous sommets  $v \in V_{k+1}(A_{k+1,2})$  et  $u \in H_g(v)$ , on a  $f(u) \geq d(u, v) \geq 2$ .

Soient maintenant  $v_1$  un sommet pendent de  $A_{k+1,2}$  et  $u_1 \in H_g(v_1)$ .

D'après le Corollaire 1,  $rad(A_{k,2}) = k \geq \gamma_b(A_{k,2}) = \gamma_b(A_{k+1,2}) \geq g(u_1) \geq d(u_1, v_1)$  et par suite  $1 \leq l(u_1) \leq k - 1$ .

3.1. BROADCAST DOMINATION POUR DEUX CLASSES PARTICULIÈRES  
D'ARBRES

---

Supposons que  $u_1 \in H'_g(v_1)$ . On a bien sûr  $v_1 \in V(A_{k+1,2}(u_1))$ . Soient  $u, u_2 \in V(A_{k+1,2})$  tels que  $l(u_1) = l(u_2)$  et  $u_1, u_2 \in N_{A_{k+1,2}}(u)$ . Soient  $v' \in V(A_{k+1,2}(u_2))$  un autre sommet pendant de  $A_{k+1,2}$  et  $u' \in H'_g(v')$ . Supposons  $u' \notin V(A_{k+1,2}(u)) - \{u\}$ . Alors  $g(u') \geq d(u', v_1) = d(u', v') \geq d(u, v_1) > d(u, v_1) - 1 = d(u, v') - 1 = d(u_1, v_1)$ . Donc  $u'$   $g$ -domine  $v_1$ . Le broadcast  $\phi$  défini sur  $A_{k+1,2}$  par :

$$\phi(v) = \begin{cases} g(u_1) + g(u') - 1 & \text{si } v = u' \\ 0 & \text{si } v = u_1 \\ g(v) & \text{sinon} \end{cases}$$

est un broadcast dominant sur  $A_{k+1,2}$  et  $\phi(V(A_{k+1,2})) = g(V(A_{k+1,2})) - 1 < g(V(A_{k+1,2})) = \gamma_b(A_{k+1,2})$  ce qui est absurde. Donc  $u' \in V(A_{k+1,2}(u)) - \{u\}$ . Dans ce cas, le broadcast  $\psi$  défini sur  $A_{k+1,2}$  par :

$$\psi(v) = \begin{cases} g(u_1) + g(u') - 1 & \text{si } v = u \\ 0 & \text{si } v \in \{u_1, u'\} \\ g(v) & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie  $g(u_1) + g(u') - 1 \geq g(u_1) + 1 = d(u, v_1)$ ,  $\psi$  est un broadcast dominant sur  $A_{k+1,2}$  et  $\psi(V(A_{k+1,2})) = g(V(A_{k+1,2})) - 1 < g(V(A_{k+1,2})) = \gamma_b(A_{k+1,2})$ , ce qui est absurde.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer la  $\gamma_b$ -radialité de tous les arbres  $t$ -aires complets :

**Théorème 21** *Pour tous entier  $k \geq 1$  et  $t \geq 2$  on a*

$$\gamma_b(A_{k,t}) = rad(A_{k,t}) = k.$$

D'après le Corollaire 15,  $\gamma_b(A_{k,t}) = rad(A_{k,t}) = k$  pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $t \geq 3$ . Il reste à montrer que cette égalité reste vraie pour les arbres binaires complets.

Pour  $k = 1$ ,  $A_{1,2} = P_3$  et d'après le Corollaire 2,  $\gamma_b(P_3) = 1$ .

Pour  $k = 2$ , d'après le Corollaire 1,  $\gamma_b(A_{2,2}) \leq rad(A_{2,2}) = 2$ . De plus,  $\gamma_b(A_{2,2}) \geq \left\lceil \frac{diam(A_{2,2})+1}{3} \right\rceil = 2$  d'après le Théorème 4.

Supposons  $\gamma_b(A_{k,2}) = rad(A_{k,2}) = k$  pour un entier  $k \geq 2$ . D'après le Théorème 20,  $\gamma_b(A_{k,2}) < \gamma_b(A_{k+1,2})$  ou encore  $\gamma_b(A_{k+1,2}) \geq k + 1$ . Par ailleurs, le Corollaire 1 conduit à  $\gamma_b(A_{k+1,2}) \leq rad(A_{k+1,2}) = k + 1$ . D'où l'égalité.  $\square$

**Corollaire 16** *Pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $t \geq 2$  on a,*

$$i_b(A_{k,t}) = rad(A_{k,t}) = k.$$

**Preuve.** D'après le Théorème 21,  $\gamma_b(A_{k,t}) = \text{rad}(A_{k,t}) = k$ . Il suffit alors d'appliquer le Corollaire 8.

## 3.2 Réduction du graphe $k$ -subdivisé d'une étoile

Soit  $G$  un graphe  $\gamma_b$ -radial et soit  $H$  un sous-graphe de  $G$  tel que  $\text{rad}(H) = \text{rad}(G)$ . Si  $H$  est  $\gamma_b$ -radial, on dit que  $H$  est un sous-graphe  $\gamma_b(G)$ -radial.

Dans cette section, nous déterminons l'unique sous-graphe de  $S_{k,3}$ ,  $\gamma_b(S_{k,3})$ -radial et minimal (au sens de la suppression d'arêtes).

### 3.2.1 Résultats préliminaires

Nous allons énoncer et démontrer quelques résultats préliminaires dont on aura besoin pour la détermination du sous-graphe minimal  $\gamma_b(S_{k,t})$ -radial de  $S_{k,3}$ .

**Proposition 16** *Soit  $k \geq 0$  un entier et soit  $H$  un sous-graphe non trivial connexe de  $S_{k,3}$ . Alors,  $\text{rad}(H) = \text{rad}(S_{k,3}) = k + 1$  si et seulement si  $\text{diam}(H) \geq 2k + 1$ .*

**Preuve.** On a  $\text{rad}(H) = \left\lceil \frac{\text{diam}(H)}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil = k$ .

Réciproquement, si  $\text{diam}(H) \geq 2k + 1$  alors,  $k + 1 = \text{rad}(S_{k,3}) \geq \text{rad}(H) = \left\lceil \frac{\text{diam}(H)}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil = k + 1$ . Donc,  $\text{rad}(H) = k + 1$ .  $\square$

**Lemme 5** *Pour tout entier  $n \geq 8$ ,  $\text{rad}$*

$$\text{rad}(P_n) > \gamma_b(P_n).$$

**Preuve.**  $\text{rad}(P_n) = \left\lceil \frac{\text{diam}(P_n)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ . Comme  $\gamma_b(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ , on obtient  $\text{rad}(P_n) - \gamma_b(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil > 0 \forall n \geq 8$ .  $\square$

Le Lemme 5 motive la recherche d'arbres  $\gamma_b$ -radiaux puisqu'il montre que les arbres les plus simples qui sont les chaînes ne sont pas  $\gamma_b$ -radiaux. D'ailleurs, la caractérisation des arbres  $\gamma_b$ -radiaux est un problème ouvert (voir [7] pages 2,3 et [9] page 73).

### 3.2.2 Réduction $\gamma_b(S_{k,3})$ -radial minimale de $S_{k,3}$

Nous allons déterminer l'unique sous-graphe  $\gamma_b(S_{k,3})$ -radial minimal de  $S_{k,3}$  comme énoncé dans le résumé de ce chapitre. Avant, nous démontrons quelques théorèmes :

**Théorème 22** Soit  $k \geq 3$  un entier et soit  $H = (U, F)$  un sous-graphe connexe de  $S_{k,3}$  tel que  $\text{rad}(H) = \text{rad}(S_{k,3}) = k + 1$ . Si  $H$  est  $\gamma_b$ -radial alors les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $H$  contient  $P_{2k+2}$  comme sous-arbre induit.
- (ii) Pour tout sommet pendant  $v$  de  $H$ ,  $d(c, v) \geq k - 1$ .

**Preuve.** D'après la Proposition 16,  $\text{diam}(H) \geq 2k + 1$ . Par conséquent,  $H$  contient  $P_{2k+2}$  comme sous-arbre induit, ce qui prouve d'une part l'assertion (i) et d'autre part  $c \in V(H)$ . Soit  $\mathcal{C}$  la plus longue chaîne contenue dans  $H$ . Alors  $P_{2k+2} \subseteq \mathcal{C} \subseteq P_{2k+3}$  et tout sommet pendant de  $\mathcal{C}$  vérifie (ii). De plus, on a  $c \in \mathcal{C}$ . On distingue alors deux cas :

1<sup>er</sup> cas : Si  $H = \mathcal{C}$ , alors tout sommet pendant  $v$  de  $H$  vérifie (ii).

2<sup>ème</sup> cas : Si  $H \neq \mathcal{C}$  alors il existe un unique sommet pendant  $v_0$  de  $H$  n'appartenant pas à  $\mathcal{C}$ . Supposons que  $d(c, v_0) \leq k - 2$  et considérons le broadcast  $f_k$  sur  $H$  défini par :

$$f_k(v) = \begin{cases} k - 2 & \text{si } v = c \\ 1 & \text{si } d(c, v) = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



$f_k$  est un broadcast dominant sur  $H$  si et seulement si  $k \geq 3$ . Or, cette dernière hypothèse est vérifiée donc  $f_k$  est un broadcast dominant sur  $H$  et on a  $\gamma_b(H) \leq f_k(U) = k < k + 1 = \text{rad}(H)$ . Contradiction.  $\square$

**Théorème 23** *Soit  $k \geq 3$  un entier et  $S'_{k,3}$  le sous-graphe de  $S_{k,3}$  à 3 sommets pendants  $v_1, v_2$  et  $v_3$  tels que  $d(c, v_1) = k + 1$ ,  $d(c, v_2) = k$  et  $d(c, v_3) = k - 1$ . Alors  $S'_{k,3}$  est  $\gamma_b(S_{k,3})$ -radial.*

**Preuve.** Soit  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast efficace dont le graphe de domination  $S'_{k,t}(f)$  est une chaîne; l'existence de  $f$  est garantie par le Corollaire 13. Supposons sans perte de généralité que  $f(V(S'_{k,t})) \leq k$ , c'est-à-dire tout sommet  $v \in V_f$  vérifie  $f(v) \leq k$ .

(i) Montrons que tout bras de  $S'_{k,t}$  contient au moins un sommet  $f$  dominant, c'est-à-dire que pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\text{arm}(v_i) \cap V_f \neq \emptyset$ . Supposons le contraire (la notion de bras s'étend naturellement dans ce cas). Nous distinguons 3 cas :

1<sup>er</sup> cas :  $\text{arm}(v_1) \cap V_f = \emptyset$ .

Alors, pour tout  $v \in H_f(v_1)$ ,  $f(V(S'_{k,3})) \geq f(v) \geq d(v, v_1) \geq d(c, v_1) = k + 1$ . Contradiction.

2<sup>ème</sup> cas :  $\text{arm}(v_2) \cap V_f = \emptyset$ .

Alors, soit  $v$  un sommet tel que  $H_f(v_2) = \{v\}$ . Nous avons  $f(V(S'_{k,3})) \geq f(v) \geq d(v, v_2) \geq d(c, v_2) = k$ . Ainsi,  $f(v) = k < d(c, v_1)$ , c'est-à-

### 3.2. RÉDUCTION DU GRAPHE $K$ -SUBDIVISÉ D'UNE ÉTOILE

---

dire que  $c = v$  et  $v_1$  n'est pas  $f$ -dominé par  $c$ . Par conséquent, il existe un sommet  $u \in V_f - \{c\}$  tel que  $H_f(v_1) = \{u\}$ . Par suite  $f(V(S'_{k,3})) \geq f(c) + f(u) \geq k + 1$ . Contradiction.

3<sup>ème</sup> cas :  $arm(v_3) \cap V_f = \emptyset$ .

Alors, soit  $v$  un sommet tel que  $H_f(v_3) = \{v\}$ . Nous avons  $f(V(S'_{k,3})) \geq f(v) \geq d(v, v_3) \geq d(c, v_3) = k - 1$ . Si  $v = c$  alors ni  $v_1$  ni  $v_2$  n'est  $f$ -dominé par  $v$  et par suite  $f(V(S'_{k,3})) \geq f(c) + f(H_f(v_1)) + f(H_f(v_2)) \geq k + 1$ , une contradiction. Si  $d(v_3, v) = k$  alors  $v_1$  ou  $v_2$  n'est pas  $f$ -dominé par  $v$  et  $f(V(S'_{k,3})) \geq f(v) + 1 = k + 1$ . Contradiction.

Donc tout bras de  $S'_{k,3}$  contient un sommet  $f$ -dominant.

De plus, nous pouvons déduire que  $f(c) = 0$  car sinon  $d_f(S'_{k,t})(c) = 3$ .

(ii) Montrons qu'il existe au moins un bras de  $S'_{k,3}$  contenant un unique sommet  $f$ -dominant, c'est-à-dire qu'il existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $|V_f \cap arm(v_i)| = 1$ . Supposons le contraire, c'est-à-dire que pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $|arm(v_i) \cap V_f| \geq 2$ . Soit  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $u \in arm(v_i) \cap V_f$  tel que  $d(c, u) = \min_{w \in arm(v_i)} d(c, w)$ . Alors,  $u$  est adjacent dans  $S'_{k,3}(f)$  à exactement un sommet de chaque bras de  $S'_{k,3}$ . Donc  $d_{S'_{k,3}}(u) = 3$ , ce qui contredit le fait que  $S'_{k,3}(f)$  soit une chaîne. Nous pouvons dire de plus que  $c$  est  $f$ -dominé par un sommet de  $V_f$

qui est l'unique sommet  $f$ -dominant de son bras. Si ce n'est pas le cas, nous obtiendrons une fois encore la contradiction  $d_{S'_{k,3}}(u) = 3$ .

(iii) Soit  $v \in S'_{k,3} - \{c\}$  tel que  $arm(v) \cap V_f = \{v\}$  et  $H_f(c) = \{v\}$ .

Alors  $d(c, v) \leq f(v)$ . Soit  $w$  l'unique sommet pendant de  $arm(v)$ .

Alors  $d(v, w) \leq f(v)$ . Soient  $y$  et  $z$  deux sommets  $f$ -dominants distincts, différents de  $v$ , appartenant respectivement aux deux autres bras.

Nous avons  $k \geq f(V(S'_{k,3})) \geq f(v) + f(y) + f(z) \geq f(v) + 2$ .

D'où  $f(v) \leq k - 2$ .

Soit  $l$  la longueur de  $arm(v)$ . Si  $f(v) \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$ , alors  $d(v, w) \leq$

$f(v) \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$ . Par suite,  $f(v) \geq d(c, v) = l - d(v, w) \geq \lceil \frac{l}{2} \rceil + 1 \geq$

$\lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 1 > \lfloor \frac{l}{2} \rfloor > \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$ , une contradiction. Donc  $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor \leq f(v) \leq k - 2$ .

Par conséquent  $d(v, w) \leq f(v) \leq k - 2$ .

Aussi,  $d(v, w) \geq f(v) - 1$ . Si ce n'est pas le cas, Il existerait un som-

met  $s \in arm(v)$  tel que  $d(s, c) = d(v, c) - 1$ , puisque si  $d(v, c) = 1$

nous aurons  $k - 2 \geq f(v) \geq d(v, w) = k + 1 - d(v, c) = k$  qui est

absurde.

Soit  $\sigma$  le broadcast sur  $S'_{k,3}$  défini par :

$$\sigma(u) = \begin{cases} f(u) - 1 & \text{si } u = s \\ 0 & \text{si } u = v \\ f(u) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\sigma$  est un broadcast dominant sur  $S'_{k,3}$  de valeur  $\sigma(V(S'_{k,3})) = f(V(S'_{k,3})) - 1 = \gamma_b(S'_{k,3}) - 1 \geq \gamma_b(S'_{k,3})$ . Impossible. Donc,  $f(v) - 1 \leq d(v, w) \leq f(v)$ .

- Si  $d(v, w) = f(v)$ , nous distinguons trois cas :

1<sup>er</sup> cas :  $w = v_1$ .

Alors  $l = k + 1$ . Dans ce cas,  $\gamma_b(S'_{k,3}) = f(V(S'_{k,3})) = f(v) + \gamma_b(P_n) + \gamma_b(P_m)$  où  $n = 2k + 1 - 2d(v, w) = n = 2k + 1 - 2f(v)$  et  $m = 2k - 2d(v, w) = 2k - 2f(v)$ . Ainsi,  $\gamma_b(S'_{k,3}) = \min\{x + \left\lceil \frac{2(k-x)+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2(k-x)}{3} \right\rceil; x \in \mathbb{N} \cap \left[ \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor, k-2 \right]\} = k + 3 > k$  puisque l'application  $\nu_k$  définie par  $\nu_k(x) = x + \frac{2(k-x)+1}{3} + \frac{2(k-x)}{3}$  est strictement décroissante. Contradiction.

2<sup>ème</sup> cas :  $w = v_2$ .

De manière analogue que dans le premier cas, on obtient  $\gamma_b(S'_{k,3}) \geq k + \frac{8}{3}$ . Comme  $\gamma_b(S'_{k,3})$  est entier, on en déduit que  $\gamma_b(S'_{k,3}) \geq k + 2 > k$ . Contradiction.

### 3.2. RÉDUCTION DU GRAPHE $K$ -SUBDIVISÉ D'UNE ÉTOILE

---

3<sup>ème</sup> cas :  $w = v_3$ .

De la même manière que dans les deux premiers cas, on obtient  $\gamma_b(S'_{k,3}) \geq k + \frac{7}{3}$ . Comme  $\gamma_b(S'_{k,3})$  est entier, on en déduit que  $\gamma_b(S'_{k,3}) \geq k + 3 > k$ . Contradiction.

-Si  $d(v, w) = f(v) - 1$ , la discussion se fait de manière similaire que les trois précédents cas et l'on aboutit à chaque fois à la contradiction  $\gamma_b(S'_{k,3}) > k$ .

En conclusion,  $\gamma_b(S'_{k,3}) = k + 1$ .  $\square$

**Corollaire 17** *Pour tout entier  $k \geq 3$ ,  $S'_{k,3}$  est l'unique sous-graphe de  $S_{k,3}$  qui est  $\gamma_b(S_{k,t})$ -radial minimal au sens de la suppression d'arêtes pendantes.*

**Preuve.** D'une part,  $S'_{k,3}$  est  $\gamma_b(S_{k,t})$ -radial d'après le Théorème 23. D'autre part, soit  $e$  une arête pendante de  $S'_{k,3}$ . On distingue deux cas :

(i)  $v_3$  une extrémité de  $e$ .

Alors, la suppression de  $e$  a pour conséquence un sommet pendant  $v'_3$  tel que  $d(c, v'_3) = k - 2 < k - 1$ . Donc la condition (ii) du Théorème 22 n'est pas satisfaite.

(ii)  $\{v_1$  ou est une extrémité de l'arête  $e$ .

Alors la suppression de  $e$  a pour conséquence que la plus longue

chaîne  $v'_1 v'_2$  de  $S'_{k,3}$  est isomorphe à  $P_{2k+1}$ . Donc, la condition (ii) du Théorème 22 n'est pas vérifiée.  $\square$

En appliquant le Théorème 17, on obtient :

**Corollaire 18** *Tout arbre  $H = (U, F)$  de rayon  $k + 1$  contenant  $S'_{k,3}$  est  $\gamma_b$ -radial.*

**Corollaire 19** *Pour tout entier  $k \geq 4$ , l'arbre binaire  $A_{k,2}$  est  $\gamma_b$ -radial.*

**Preuve.** Pour  $k \geq 4$  on a  $S'_{k-1,3} \subset A_{k,2}$ . On applique ensuite le Théorème 15.  $\square$

Pour  $k \in \{1, 2\}$ , il est aisé de vérifier la  $\gamma_b$ -radialité de  $A_{k,2}$ . Ainsi, nous obtenons une seconde preuve de la  $\gamma_b$ -radialité des arbres binaires.

### 3.3 Autres broadcasting invariants pour les arbres $\mathcal{N}$ -aires complets

Dans cette section, nous déterminons le nombre supérieur de broadcast domination et le nombre supérieur de broadcast indépendant de domination dans les arbres  $t$ -aires complets de profondeur  $k$  pour  $t \geq 2$  et  $k \in \{1, 2\}$ .

Rappelons 3 résultats énoncés aux Chapitres 1 et 2.

**Observation 1** [8]

*Pour tout graphe  $G$ ,*

$$\gamma_b(G) \leq \min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\} \leq \max\{\Gamma(G), \text{diam}(G)\} \leq \Gamma_b(G).$$

**Théorème 1** [8]

*Si  $G$  est un graphe de taille  $m$ , alors  $\Gamma_b(G) \leq m$  et l'égalité est atteinte si et seulement si  $G$  est une étoile ou une chaîne non triviale.*

**Proposition 14** [8]

*Pour tout graphe  $G$ ,*

$$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq \min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}.$$

Dans le théorème suivant, nous déterminons le nombre  $\Gamma_b$  et  $\Gamma_{ib}$  dans l'arbre  $A_{1,t}$  ( $t \geq 2$ ) :

**Théorème 24** *Pour tout entier  $t \geq 2$ ,*

$$\Gamma_{ib}(A_{1,t}) = \Gamma_b(A_{1,t}) = \Gamma(A_{1,t}) = t.$$

**Preuve.** Pour tout entier  $t \geq 2$ , nous avons  $A_{1,t} \simeq K_{1,t}$  et  $\Gamma_b(A_{1,t}) = |E(A_{1,t})| = t$  d'après le Théorème 1.

Le broadcast  $f$  défini sur  $A_{1,t}$  par

$$f(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = r \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un broadcast indépendant dominant minimal sur  $A_{1,t}$  et  $f(V(A_{1,t})) = t = \Gamma_b(A_{1,t})$ . Par suite  $\Gamma_b(A_{1,t}) = \Gamma_{ib}(A_{1,t}) = \Gamma(A_{1,t}) = t$  grâce à l'Observation 1 et la Proposition 14.  $\square$

Les mêmes paramètres du Théorème 25 sont donnés pour  $A_{2,t}$  ( $t \geq 2$ ) dans le théorème qui suit :

**Théorème 25** *Pour tout entier  $t \geq 2$ ,*

$$\Gamma_{ib}(A_{2,t}) = \Gamma_b(A_{2,t}) = \Gamma(A_{2,t}) = t^2 + 1.$$

**Preuve.** Pour  $t = 2$ ,  $A_{2,2}$  est différent de  $K_{1,6}$  et de  $P_7$  et nous avons  $\Gamma_b(A_{2,2}) \leq |E(A_{2,2})| - 1 = 5$  grâce au Théorème 1.

Le broadcast  $f$  défini sur  $A_{2,2}$  par

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = r \text{ ou } d_{A_{2,2}}(v) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un broadcast indépendant dominant minimal sur  $A_{2,2}$  et  $f(V(A_{2,2})) = 5$ . Par suite  $\Gamma_{ib}(A_{2,2}) = \Gamma_b(A_{2,2}) = \Gamma(A_{2,2}) = 2^2 + 1 = 5$ .



Supposons les égalités  $\Gamma_{ib}(A_{2,t}) = \Gamma_b(A_{2,t}) = \Gamma(A_{2,t}) = t^2 + 1$  vraies jusqu'à un ordre  $t \geq 2$ .

Le broadcast  $g$  défini sur  $A_{2,t+1}$  par

$$g(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = r \text{ ou } d_{A_{2,t+1}}(v) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un broadcast indépendant dominant minimal sur  $A_{2,t+1}$  et  $g(V(A_{2,t+1})) = (t+1)^2 + 1 \leq m = \min\{\Gamma_{ib}(A_{2,t+1}), \Gamma_b(A_{2,t+1}), \Gamma(A_{2,t+1})\}$ .

Soit  $\phi$  un  $\Gamma_b$ -broadcast sur  $A_{2,t+1}$ . Nous avons  $\Gamma_b(A_{2,t+1}) \geq (t+1)^2 + 1 \geq 10$ .

-Nous allons montrer que tout sommet  $v \in V(A_{2,t+1}) \cap V_\phi$  vérifie  $\phi(v) = 1$ .

Supposons qu'il existe un sommet  $u$  de  $A_{2,t+1}$  tel que  $\phi(u) \geq 2$ .

Soit  $A$  le sous-graphe obtenu en supprimant tous les sommets pendants de  $A_{2,t+1}$  à une distance inférieure ou égale à 2 de  $u$  (y compris  $u$  si lui-même est pendent).

(i) Si  $\phi(u) = \text{diam}(A_{2,t+1}) = 4$ , alors,  $u$   $\phi$ -domine tout  $A_{2,t+1}$  et  $\phi$  n'est pas minimal. Contradiction.

Donc, tout sommet  $v$  de  $A_{2,t+1}$  vérifie  $\phi(v) \leq 3$ .

(ii) Si  $\phi(u) = 3$ , nous distinguons deux cas :

- $u$  n'est pas pendant.

Dans ce cas,  $u$   $\phi$ -domine tout  $A_{2,t+1}$  et  $\phi$  n'est pas minimal. Contradiction.

Donc,  $\phi(v) \leq 2$  pour tout sommet non pendant  $v$  de  $A_{2,t+1}$ .

- $u$  est un sommet pendant de  $A_{2,t+1}$ .

Du Théorème 1 nous déduisons  $\phi(V(A_{2,t+1})) = \Gamma_b(A_{2,t+1}) \leq \phi|_A(V(A)) + 3 \leq \Gamma_b(A) + 3 \leq |E(A)| + 2 = t(t+1) + 2 < (t+1)^2 + 1$ . Contradiction.

Par conséquent,  $\phi(v) \leq 2$  pour tout sommet  $v$  de  $A_{2,t+1}$ .

(iii) Si  $\phi(u) = 2$  nous distinguons comme dans (ii) deux cas :

- $u$  est un sommet pendant.

Du Théorème 1 nous avons  $\phi(V(A_{2,t+1})) = \Gamma_b(A_{2,t+1}) \leq \phi|_A(V(A)) + 2 \leq \Gamma_b(A) + 2 \leq |E(A)| + 1 = t(t+1) + 1 < (t+1)^2 < (t+1)^2 + 1$ .

Contradiction.

- $u$  est un sommet non pendant.

Alors, soit  $u = r$  et alors tout  $A_{2,t+1}$  est  $\phi$ -dominé par  $r$  et  $\phi$  n'est pas minimal, ce qui est une contradiction ; soit  $u$  est distinct de  $r$ , et alors

par le Théorème 1,  $\phi(V(A_{2,t+1})) = \Gamma_b(A_{2,t+1}) \leq \phi|_A(V(A)) + 2 \leq \Gamma_b(A) + 2 \leq |E(A)| + 1 = t(t+1) + 1 < (t+1)^2 < (t+1)^2 + 1$ .

Contradiction.

Nous déduisons de (i), (ii) et (iii) que  $\phi(v) \leq 1$  pour tout sommet  $v$  de  $A_{2,t+1}$ .

-Soit  $u$  un sommet non pendant de  $A_{2,t+1}$  distincts de  $r$  tel que  $\phi(u) = 1$ . Alors, tout sommet pendant voisin de  $u$  est de poids nul.

(i) Si  $\phi(r) = 1$  alors,  $u$  est voisin de  $r$  et il existe un sommet voisin de  $r$ , de poids nul, sinon  $\phi$  ne serait pas minimal. Par suite, en pondérant tous les autres sommet à 1 nous obtenons  $\Gamma_b(A_{2,t+1}) \leq (t+1) + t(t+1) = (t+1)^2 < (t+1)^2 + 1$ . Contradiction.

(ii) Si  $\phi(u) = 0$ , nous pondérons tous les autres sommets à 1 et nous avons  $\Gamma_b(A_{2,t+1}) \leq (t+1) + t(t+1) = (t+1)^2 < (t+1)^2 + 1$ . Contradiction.

Donc, tout sommet non pendant de  $A_{2,t+1}$  distinct de  $r$  est de poids nul.

Par conséquent, en affectant le poids 1 à tous les autres sommets de  $A_{2,t+1}$ , nous obtenons le broadcast  $g$  et déduisons que  $g(V(A_{2,t+1})) = (t+1)^2 + 1 = \Gamma_{ib}(A_{2,t+1}) = \Gamma_b(A_{2,t+1}) = \Gamma(A_{2,t+1})$  grâce à l'Observation 1 et la Proposition 14.  $\square$

## Conclusion et perspectives

Nous avons prouvé un théorème et une conjecture dus à ERWIN. Ceci a permis de montrer la  $\gamma_b$ -radialité des arbres  $\mathcal{N}$ -aires complets, de déterminer un sous-arbre induit  $\gamma_b$ -radial minimal de  $S_{k,3}$  ayant même rayon que ce dernier, et de prouver d'autres résultats. Nous avons également réussi à déterminer le nombre supérieur de broadcast domination ainsi que le nombre supérieur de broadcast indépendant de domination dans les arbres binaires complets  $A_{1,t}$  et  $A_{2,t}$  pour  $t \geq 2$ .

Pour les broadcasting invariants, il existe beaucoup de problèmes ouverts (voir [9] pages 73 et 75). Parmi ces problèmes figurent l'étude de la complexité ainsi que la détermination de ces paramètres dans les graphes grilles. De plus, les broadcasting invariants généralisent des paramètres de domination standard dont la complexité est NP-complet pour la plupart d'entre eux. Il serait alors intéressant d'en-

visager ce qui suit :

- des applications pratiques des broadcasts et broadcasting invariants en vue de motiver l'étude de ces derniers ;
- la caractérisation des arbres  $\gamma_b$ -radiaux ainsi que les graphes  $\gamma_b$ -radiaux arbitraires ;
- la détermination des broadcasting invariants dans les arbres en général ;
- la détermination des broadcasting invariants dans les graphes grilles et dans les différentes classes de graphes rencontrés en pratique et ayant un lien avec ces paramètres ;
- une étude de la complexité de chaque broadcasting invariant ;
- la détermination du nombre supérieur de broadcast domination ainsi que le nombre supérieur de broadcast indépendant de domination dans les arbres binaires complets  $A_{k,t}$  pour  $t \geq 2$  et  $k \geq 3$ .

# Bibliographie

- [1] Bang Ye Wu, Kun-Mao Chao, *A note on eccentricities, diameters and radii*, preprint, 2004.
- [2] C. BERGE, *Graphes*, Gauthier-Villars, 1983.
- [3] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, 1970.
- [4] J. R. S. BLAIR, P. HEGGERNES, S. HORTON, F. MANNE, *Broadcast Domination Algorithms for Interval Graphs, Series-Parallel Graphs, and Trees*, *Congressus Numerantium*, 169(2004)55-77.
- [5] J. A. BONDY, U. S. R. MURTY, *Graph theory with applications*, American elsevier publishing, 1976.
- [6] I. CHARON, A. GERMA, O. HURDY, *Méthodes d'optimisation combinatoire*, Masson, 1996.
- [7] J. DABNEY, B. C. DEAN, S. T. HEDETNIEMI, *A Linear-Time Algorithm for Broadcast Domination in a Tree*, Department of Computer Science, Clemson University, August 21, 2006.

- [8] R. DIESTEL, *Graph theory*, Springer, 2000.
- [9] J. E. DUNBAR, D. J. ERWIN, T. W. HAYNES, S. M. HEDETNIEMI, S. T. HEDETNIEMI, *Broadcasts in graphs*, Discrete Applied Mathematics, 154(2006)59-75.
- [10] D. J. ERWIN, *Cost Domination in Graphs*, Ph.D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.
- [11] D. J. ERWIN, *Dominating broadcast in graphs*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 42(2004)89-105.
- [12] M. R. GAREY, D. S. JOHNSON, *Computers and intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman, 1979.
- [13] T. W. HAYNES, S. T. HEDETNIEMI, P. J. SLATER, *Domination in Graphs : Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [14] T. W. HAYNES, S. T. HEDETNIEMI, P. J. SLATER, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [15] P. HEGGERNES, D. LOKSHTANOV, *Optimal broadcast domination in polynomial time*, Discrete Mathematics 306(2006)3267-3280.
- [16] S. B. HORTON, *On Some Problems Related to Dominating Set*. Preprint.

- [17] O. ORE, *Les graphes et leurs applications*, Dunod, 1970.
- [18] M. SAKAROVITCH, *Optimisation Combinatoire "Programmation Discrète"*, Hermann, 1984.



Soit  $G$  un graphe non trivial connexe. On appelle *broadcast* sur le graphe  $G$  toute application  $f : V \rightarrow \text{diam}(G)$  vérifiant l'inégalité  $f(v) \leq e(v)$  pour tout sommet  $v \in V(G)$ . Un broadcast  $f$  est dit *dominant* si pour tout sommet  $u \in V(G)$  de poids  $f(u) = 0$ , il existe un sommet  $v \in V(G)$  tel que  $f(v) \geq 1$  et  $d(u, v) \leq f(v)$ . Le nombre de broadcast domination  $\gamma_b(G)$  du graphe  $G$  est égal au minimum de

$\sum_{v \in V(G)} f(v)$  où  $f$  parcourt l'ensemble des broadcasts dominants sur  $G$ . Un graphe  $G$  est  $\gamma_b$ -radial si  $\gamma_b(G) = \text{rad}(G)$ .

Dans ce mémoire, nous prouvons une conjecture due à Erwin énonçant la  $\gamma_b$ -radialité des graphes  $k$ -subdivisés  $S_{k,t}$ , du graphe  $t$ -étoile  $K_{1,t}$  pour tous entiers  $k \geq 0$  et  $t \in \{3, 4\}$  et réduisons par suppression d'arêtes pendantes le graphe  $S_{k,t}$  sans changer son rayon jusqu'à obtenir son unique sous-graphe minimal  $\gamma_b$ -radial. Nous montrons également que les arbres  $t$ -aires complets sont également  $\gamma_b$ -radiaux pour tout entier  $t \geq 2$  et déterminons d'autres broadcasting invariants pour ces graphes.