

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
« HOUARI BOUMEDIEN »  
FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER  
EN : Recherche Opérationnelle  
Spécialité : Mathématiques Discrètes et Optimisation  
Par : LAICHE Daouya

Sujet

Sur les nombres broadcast chromatiques

Soutenu publiquement le 22/07/2010, devant le jury composé de :

Mr- AÏDER Méziane,	Professeur,	U.S.T.H.B.	Président
Mlle- BOUCHEMAKH Isma,	Professeur,	U.S.T.H.B.	Directrice du mémoire
Mr- SEMRI Ahmed	Maître de Conférences,	U.S.T.H.B.	Examineur
Mme- AHMANE Messaouda,	Attachée de Recherche,	U.S.T.H.B.	Invitée

# *Remerciements*

*Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à ma directrice de thèse, Mlle I. Bouchemakh, Professeur à l'U.S.T.H.B., pour l'honneur qu'elle m'a fait en assurant la direction du présent mémoire. Je la remercie pour sa disponibilité et pour la pertinence de ses conseils avec lesquelles elle a su me guider durant mes travaux de recherche.*

*Je remercie vivement Mr M. Aïder, Professeur à l'U.S.T.H.B., qui a bien voulu me faire honneur en acceptant de prendre en charge la présidence du jury.*

*Je remercie également Mr A. Semri, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B., et Mme M. Ahmane, Attachée de recherche à l'U.S.T.H.B. pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury.*

*Je tiens à remercier plus personnellement ma très chère maman et mes deux chers petits frères Saber et Anis pour leurs soutiens et leurs encouragements tout au long de ce travail. Je remercie tout particulièrement mon père pour ses sacrifices, sa générosité, son éducation et ses précieux conseils. Ces quelques mots ne suffiront jamais pour décrire ce que j'éprouve pour toi papa.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Définitions et notations</b>	<b>11</b>
1.1 Définitions générales . . . . .	11
1.2 Quelques invariants de graphes . . . . .	20
1.3 Complexité algorithmique . . . . .	21
1.3.1 Classes des algorithmes selon leurs complexités . . . . .	21
1.3.2 Complexité des problèmes . . . . .	22
<b>2 Broadcast coloration dans les graphes</b>	<b>25</b>
2.1 Motivation et définition du problème de broadcast coloration . . . . .	25
2.2 Nombre broadcast chromatique et autres invariants de graphes . . . . .	26
2.3 Graphes avec un nombre broadcast chromatique petit . . . . .	28
2.4 Complexité algorithmique . . . . .	30
2.5 Broadcast coloration pour la classe des arbres . . . . .	30
<b>3 Broadcast coloration de quelques classes de graphes</b>	<b>35</b>
3.1 Couronnes . . . . .	35
3.1.1 Broadcast coloration de la couronne d'une chaîne . . . . .	36
3.1.2 Broadcast coloration de la couronne d'un cycle . . . . .	38
3.2 Chenilles . . . . .	40
3.2.1 Chenille alternative . . . . .	41
3.2.2 Chenille impaire . . . . .	42
3.2.3 Chenille paire . . . . .	43
3.2.4 Chenille simple . . . . .	47

3.2.5	Chenille double . . . . .	47
3.2.6	Chenille triple . . . . .	50
3.2.7	Chenille quadruple . . . . .	51
3.2.8	Chenille infinie . . . . .	55
3.2.9	Chenille quelconque . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Nombre broadcast chromatique des grilles</b>	<b>57</b>
4.1	Résultats de Goddard et al. sur les grilles . . . . .	57
4.2	Algorithme Valeur Exacte . . . . .	58
4.2.1	Présentation des entrées (données) . . . . .	58
4.2.2	Présentation des sorties (Résultats) . . . . .	58
4.2.3	Enoncé de l'algorithme . . . . .	58
4.3	Algorithme Borne Sup 1 . . . . .	62
4.3.1	Principe de l'algorithme . . . . .	62
4.3.2	Enoncé de l'algorithme . . . . .	63
4.4	Algorithme Borne Sup 1,2,3 . . . . .	66
4.4.1	Principe de l'algorithme . . . . .	67
4.4.2	Enoncé de l'algorithme . . . . .	67
4.5	Comparaisons et commentaires sur les trois algorithmes . . . . .	70
	<b>Conclusion</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>72</b>

# Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre le temps d'exécution des algorithmes polynomiaux et exponentiels . . . . .	22
2.1	Quelques bornes de $\chi_b(Q_n)$ . . . . .	34
4.1	Valeurs exactes de $\chi_b(G_{m \times n})$ trouvées par Goddard et al. [14] . . . . .	57
4.2	Bornes supérieures de $\chi_b(G_{m \times n})$ trouvées par Goddard et al. [14] . . . . .	58
4.3	Valeurs exactes de $\chi_b(G_{m \times n})$ . . . . .	61
4.4	Bornes supérieures de $\chi_b(G_{m \times n})$ obtenues par l'Algorithme Borne Sup 1 . . . . .	65

# Table des figures

1.1	Exemple d'un multigraphe . . . . .	12
1.2	Exemple d'une roue . . . . .	13
1.3	Présentation d'un graphe $G$ et les excentricités de ses sommets . . . . .	14
1.4	Un Arbre $T$ avec $rad(T) = 3$ et $diam(T) = 6$ . . . . .	15
1.5	Un graphe biparti complet $K_{4,2}$ . . . . .	16
1.6	L'étoile $S_6$ . . . . .	16
1.7	L'étoile double $S_{3,2}$ . . . . .	17
1.8	Le graphe $K_{3,2}$ est planaire . . . . .	17
1.9	La grille $G_{5 \times 4}$ . . . . .	18
1.10	Le cylindre $Cy_{5 \times 4}$ . . . . .	18
1.11	Le tore $T_{5 \times 4}$ . . . . .	19
1.12	Le graphe joint de $G_1$ et $G_2$ . . . . .	19
1.13	Un graphe $G$ . . . . .	21
2.1	Le cycle $C_6$ . . . . .	27
2.2	Un graphe $G$ formé d'un cycle $C_6$ avec deux sommets antipodaux dupliqués	27
2.3	Un graphe $G$ et un $T$ -ajout du sommet $v$ . . . . .	29
2.4	L'arbre $T_5$ où les sommets non coloriés sont de couleur 1 . . . . .	31
2.5	Les plus petits arbres avec $\chi_b(T) = 4$ . . . . .	32
2.6	Broadcast coloration d'un arbre binaire complet à 4 niveaux . . . . .	33
2.7	L'hypercube $Q_3$ . . . . .	34
3.1	Un graphe $G$ avec sa couronne $Cr(G)$ . . . . .	35
3.2	Couronne d'une chaîne de longueur $n$ . . . . .	36

3.3	Broadcast coloration de la couronne d'une chaîne de longueur $n$ . . . . .	37
3.4	Couronne d'un cycle de longueur $n$ . . . . .	38
3.5	Broadcast coloration de $Cr(C_n)$ lorsque $n \in \{3, 4\}$ . . . . .	39
3.6	Broadcast coloration de la couronne d'un cycle de longueur $n \equiv 0[4]$ . . . . .	39
3.7	Broadcast coloration de la couronne d'un cycle de longueur $n \equiv 1[4]$ . . . . .	39
3.8	Broadcast coloration de la couronne d'un cycle de longueur $n \equiv 2[4]$ . . . . .	40
3.9	Broadcast coloration de la couronne d'un cycle de longueur $n \equiv 3[4]$ . . . . .	40
3.10	Codage de deux chenilles . . . . .	41
3.11	Chenille alternative . . . . .	41
3.12	Broadcast coloration d'une chenille alternative . . . . .	41
3.13	Chenille impaire . . . . .	42
3.14	Broadcast coloration d'une chenille impaire . . . . .	42
3.15	Chenille paire . . . . .	43
3.16	Broadcast coloration d'une chenille paire avec exactement deux sommets supports et $k_1 \equiv 0[4]$ . . . . .	44
3.17	Broadcast coloration d'une chenille paire avec exactement deux sommets supports et $k_1 \equiv 2[4]$ . . . . .	44
3.18	Broadcast coloration de $Ch_{paire}^{15}$ avec $C[Ch_{paire}^{15}] = [l_1, 0^4, l_6, 0^8, l_{15}]$ . . . . .	44
3.19	Broadcast coloration de $Ch_{paire}^{11}$ avec $C[Ch_{paire}^{11}] = [l_1, 0^2, l_4, 0^6, l_{11}]$ . . . . .	45
3.20	Broadcast coloration de $Ch_{paire}^{13}$ avec $C[Ch_{paire}^{13}] = [1, 0^4, l_6, 0^6, l_{13}]$ . . . . .	45
3.21	Broadcast coloration de $Ch_{paire}^{13}$ avec $C[Ch_{paire}^{13}] = [l_1, 0^4, l_6, 0^6, l_{13}]$ . . . . .	45
3.22	Broadcast coloration d'une chenille paire $Ch_{paire}^{16}$ . . . . .	46
3.23	Chenille simple de longueur $n$ . . . . .	47
3.24	Chenille double de longueur $n$ . . . . .	47
3.25	Chenille triple de longueur $n$ . . . . .	50
3.26	Chenille quadruple de longueur $n$ . . . . .	51
3.27	Chenille infinie de longueur $n$ . . . . .	55
4.1	Broadcast coloration de $G_{2 \times n}$ . . . . .	61
4.2	Broadcast coloration de $G_{3 \times n}$ . . . . .	61
4.3	Broadcast coloration de $G_{4 \times n}$ . . . . .	61

4.4	Broadcast coloration de $G_{5 \times n}$	61
4.5	Broadcast coloration de $G_{6 \times n}$	65
4.6	Broadcast coloration de $G_{7 \times n}$	66
4.7	Broadcast coloration de $G_{8 \times n}$	66

# Introduction

La théorie des graphes constitue une branche à part entière des mathématiques. Elle représente l'un des instruments les plus courants et les plus efficaces pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle.

Parmi les problèmes les plus anciens de la Recherche Opérationnelle, ayant suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs, on peut citer le problème de coloration des graphes planaires. Il s'agit de répondre à la question : "Suffit-il de quatre couleurs pour dessiner n'importe quelle carte géographique?". Dans le langage des graphes, ce problème se formalise : "Peut-on colorier un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes?". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par Francis Guthrie en 1852, est devenu célèbre sous le nom de problème des quatre couleurs et n'a pu trouver une réponse positive en 1976 que grâce à l'ordinateur par Appel et Haken.

Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de colorations : Elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes, faces,...) avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires.

En 2002, Sloper [32] a introduit la broadcast coloration. Il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs, noté  $\chi_b(G)$ , à affecter aux sommets d'un graphe  $G$  de telle sorte que si deux sommets  $u$  et  $v$  ont la même couleur  $\pi(u) = \pi(v)$ , alors  $d(u, v) > \pi(u)$ .

Dans ce présent travail, nous nous intéressons principalement à l'étude de cet invariant, et l'étudions sur quelques classes de graphes.

Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions de base de la théorie des graphes et de la complexité algorithmique, utiles pour la compréhension du mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'essentiel des travaux connus de la littérature sur le problème de broadcast coloration des graphes.

Le troisième chapitre étudie  $\chi_b(G)$  lorsque  $G$  est la couronne d'une chaîne, d'un cycle ou appartenant à une des 8 classes particulières des chenilles. Nous tentons de trouver des valeurs exactes, sinon des bornes supérieures pour cet invariant.

Quant au dernier chapitre, il se focalise autour de  $\chi_b(G_{m \times n})$ . Nous élaborons trois algorithmes pour déterminer soit des valeurs exactes soit des bornes pour  $\chi_b(G_{m \times n})$ . Les résultats de ces algorithmes nous permettent d'une part de comparer nos bornes à celles prouvées par Goddard et al. [14] et d'autre part d'obtenir d'autres bornes pour les autres valeurs de  $m$  et  $n$ .

Le mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble du travail réalisé et des perspectives de recherche.

# Chapitre 1

## Définitions et notations

Dans ce chapitre, nous introduisons d'abord les définitions de base de la théorie des graphes qui nous seront utiles tout au long de ce mémoire, ensuite nous rappelons l'essentiel de la théorie de la complexité algorithmique.

### 1.1 Définitions générales

Un *graphe*  $G = (V, E)$  *non orienté* est défini par la donnée d'un ensemble  $V$  fini non vide, appelé ensemble des *sommets* de  $G$ , et d'un ensemble fini  $E$  de paires de sommets distincts, appelé ensemble des *arêtes* de  $G$ . Le nombre de sommets est appelé l'*ordre* de  $G$ , et le nombre d'arêtes est appelé *taille* de  $G$ .

#### Adjacence

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Pour une arête  $e = \{x, y\}$ , notée aussi  $xy$ , on dit que :

- $x$  et  $y$  sont adjacents ;
- $x$  et  $y$  sont les extrémités de  $e$  ;
- $e$  est incidente aux sommets  $x$  et  $y$  ;
- $x$  et  $y$  sont voisins ;
- $e$  est une boucle si  $x = y$ .

Un sommet  $x$  est dit *isolé* s'il n'est adjacent à aucun sommet.

## Multigraphe

Un *multigraphe*  $G = (V, E)$  est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets.

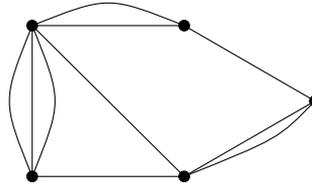


FIG. 1.1 – Exemple d'un multigraphe

Un graphe *simple* est un graphe sans boucle, et dans lequel tout couple de sommets est relié par au plus une arête.

## Voisinage

Le *voisinage ouvert* d'un sommet  $x$ , noté  $N(x)$ , est l'ensemble de sommets adjacents à  $x$ . Le *voisinage fermé* de  $x$ , noté  $N[x]$ , est l'ensemble  $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ . Le voisinage ouvert (resp. fermé) d'un ensemble de sommets  $S$  est  $N(S) = \cup_{x \in S} N(x)$  (resp.  $N[S] = \cup_{x \in S} N[x]$ ).

## Degré d'un sommet

Le *degré* d'un sommet  $x$ , noté  $d_G(x)$ , est le nombre d'arêtes incidentes  $x$ . Le degré maximum (resp. minimum) d'un graphe  $G$  est noté  $\Delta(G)$  (resp.  $\delta(G)$ ).

Un sommet de degré égal à 1 est appelé sommet *pendant*.

## Sous-graphe et sous-graphe induit

Un graphe  $H = (V_H, E_H)$  est un *sous-graphe* de  $G = (V, E)$  si  $V_H \subseteq V$  et  $E_H \subseteq E$ . Pour un sous ensemble de sommets  $W \subseteq V$ , le *sous graphe induit* par  $W$  est le graphe  $G[W] = (W, \{xy : xy \in E \text{ et } \{x, y\} \subset W\})$ .

## Chaîne, cycle et roue

Une séquence de sommets  $P_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , où  $x_i x_{i+1} \in E$  est appelée *chaîne*. Le nombre  $k - 1$  représente la *longueur* de  $P_k$ .

Un *cycle* de longueur  $k$ ,  $k \geq 3$ , noté  $C_k$ , est une chaîne  $P_{k-1}$  avec  $x_1 = x_k$ .

Une *roue* est un graphe formé d'un cycle avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets de ce cycle.

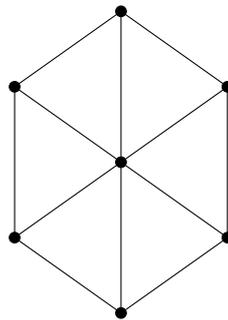


FIG. 1.2 – Exemple d'une roue

## Distance

La *distance* entre deux sommets  $x$  et  $y$ , notée  $d(x, y)$ , est la longueur de la plus courte chaîne qui relie  $x$  à  $y$ .

## Excentricité

L'*excentricité* d'un sommet  $x$ , notée  $e(x)$ , est la plus grande des distances  $d(x, y)$  où  $y \in V$ , c.à.d  $e(x) = \max_{y \in V} d(x, y)$ .

## Diamètre et rayon

L'excentricité maximum sur tous les sommets de  $G$  est appelée le *diamètre* de  $G$ , et est noté  $diam(G)$ .

L'excentricité minimum sur tous les sommets de  $G$  est appelée le *rayon* de  $G$ , et est noté  $rad(G)$ .

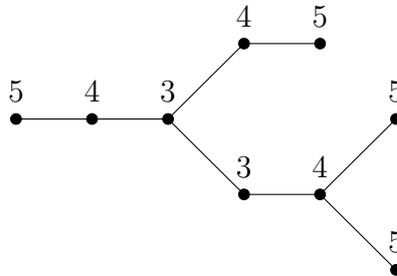


FIG. 1.3 – Présentation d'un graphe  $G$  et les excentricités de ses sommets

Pour le graphe illustré dans FIG 1.7,  $diam(G) = 5$  et  $rad(G) = 3$ .

Si  $e(u) = rad(G)$ ,  $u$  est appelé sommet *central* de  $G$ . Le sous-graphe induit par des sommets centraux est appelé *centre* de  $G$ .

## Boule

Pour un sommet  $x$  et un entier naturel  $r$ , la *boule*  $B(x, r)$  de centre  $x$  et de rayon  $r$  est l'ensemble :

$$B(x, r) = \{y : d(x, y) \leq r\}.$$

## Graphe connexe

Un graphe  $G$  est dit *connexe* si deux sommets quelconques de  $G$  sont reliés par une chaîne.

## Composante connexe

Une *composante connexe* d'un graphe  $G$  est un sous-graphe connexe maximal de  $G$ .

## Point d'articulation

Un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est un *point d'articulation* si la suppression de  $v$  augmente le nombre de composantes connexes de  $G$ .

## Graphe $h$ -connexe

Pour un graphe connexe  $G$ , la *connectivité*  $k(G)$  est le nombre minimum de sommets de  $G$  dont la suppression déconnecte le graphe  $G$  ou le réduit à un sommet isolé.  $G$  est dit  *$h$ -connexe* si sa connectivité  $k(G)$  est supérieure ou égale à  $h$ .

## Multiparti

Un graphe *multiparti complet* ou  *$t$ -parti complet*  $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ ,  $t \geq 2$  est un graphe connexe  $G = (V, E)$  où l'ensemble des sommets  $V$ ,  $|V| = n_1 + n_2 + \dots + n_t$ , peut être partitionné en  $t$  stables  $N_i$  (c.à.d.  $G[N_i]$  est sans arête),  $i = 1, \dots, t$  avec  $|N_i| = n_i$  et pour toute paire de sommets  $u \in N_i$  et  $v \in N_j$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, t$ ,  $uv \in E$ .

## Arbre

Un *arbre*  $T$  est un graphe connexe sans cycle. Les sommets de  $T$  de degré 1 sont appelés *sommets pendants* (ou *feuilles*), et les sommets adjacents aux feuilles sont appelés *supports*.

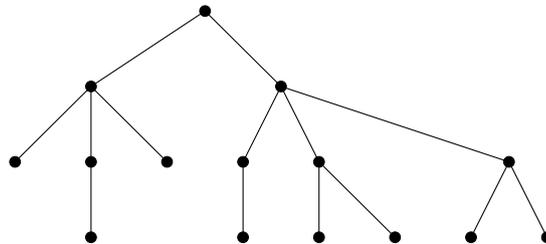


FIG. 1.4 – Un Arbre  $T$  avec  $rad(T) = 3$  et  $diam(T) = 6$

Notons que tout arbre  $T$  vérifie :

$$2 \operatorname{rad}(T) - 1 \leq \operatorname{diam}(T) \leq 2 \operatorname{rad}(T).$$

## Graphe complet

Un graphe  $G$  est dit *complet* si deux sommets quelconques de  $G$  sont adjacents.

## Graphe biparti

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *biparti* si  $V$  peut être partitionné en deux ensembles  $V_1$  et  $V_2$  de telle sorte que toute arête du graphe admet une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ .

Dans le cas particulier où  $|V_1| = m$ ,  $|V_2| = n$ ,  $d_G(x) = n \ \forall x \in V_1$  et  $d_G(y) = m \ \forall y \in V_2$ , alors  $G$  est dit graphe *biparti complet* et est noté  $K_{m,n}$ .

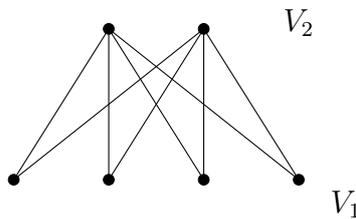


FIG. 1.5 – Un graphe biparti complet  $K_{4,2}$

## Etoile

Le graphe biparti complet  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  est appelé *étoile*, et est noté  $S_m$ , si  $|V_1| = 1$  et  $|V_2| = m$ .

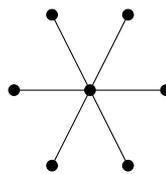
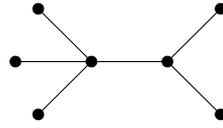


FIG. 1.6 – L'étoile  $S_6$

## Etoile Double

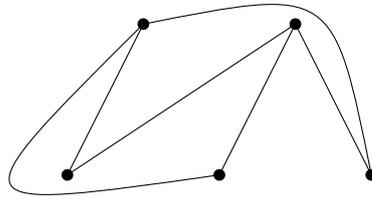
L'*étoile double*, notée  $S_{p,q}$ , est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet non pendent de l'étoile  $S_p$  au sommet non pendent de l'étoile  $S_q$ .

FIG. 1.7 – L'étoile double  $S_{3,2}$ 

## Graphe planaire

Un graphe est dit *planaire* s'il existe au moins une façon de le représenter dans un plan sans que deux arêtes ne se croisent.

Exemple : Le graphe biparti complet  $K_{3,2}$  est planaire.

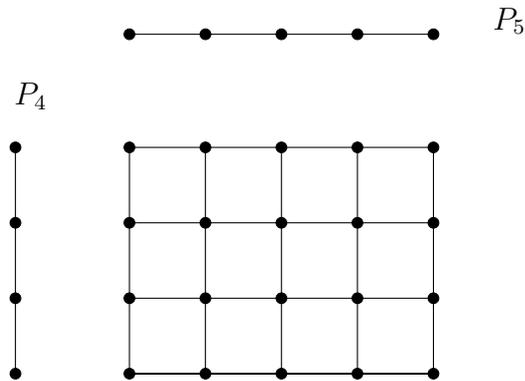
FIG. 1.8 – Le graphe  $K_{3,2}$  est planaire

## Produit cartésien de deux graphes

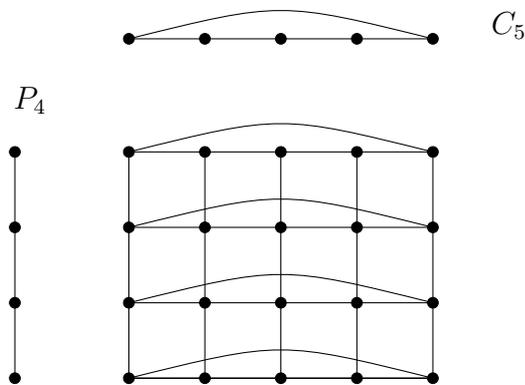
Soient  $G$  et  $H$  deux graphes. Le *produit cartésien*  $G \square H$  de  $G$  et  $H$  est le graphe ayant pour ensemble de sommets  $V(G) \times V(H)$ . Deux sommets  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  de  $V(G) \times V(H)$  sont reliés par une arête si et seulement si,  $x_1 x_2 \in E(G)$  et  $y_1 = y_2$ , ou alors  $y_1 y_2 \in E(G)$  et  $x_1 = x_2$ .

**Exemples.**

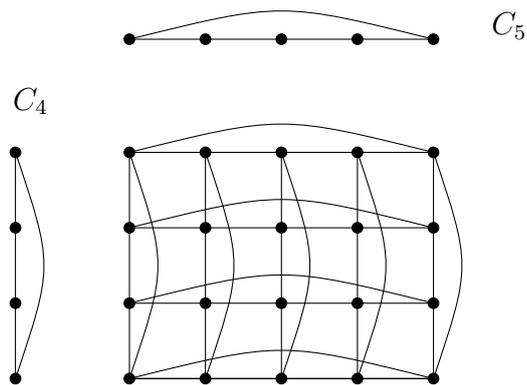
1. Une grille  $G_{m \times n}$  est le produit cartésien de deux chaînes  $P_m$  et  $P_n$ .

FIG. 1.9 – La grille  $G_{5 \times 4}$ 

2. Un cylindre  $Cy_{m \times n}$  est le produit cartésien d'une chaîne  $P_m$  par un cycle  $C_n$ .

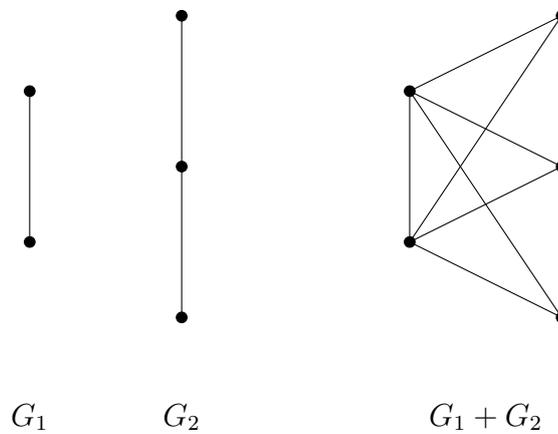
FIG. 1.10 – Le cylindre  $Cy_{5 \times 4}$ 

3. Un tore  $T_{m \times n}$  est le produit cartésien de deux cycles  $C_m$  et  $C_n$ .

FIG. 1.11 – Le tore  $T_{5 \times 4}$ 

## Graphe joint

Soient  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes. Le graphe  $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E')$  où  $E'$  est l'ensemble de toutes les arêtes possibles joignant les sommets de  $V_1$  à  $V_2$ , est appelé le graphe joint de  $G_1$  et  $G_2$ .

FIG. 1.12 – Le graphe joint de  $G_1$  et  $G_2$

## 1.2 Quelques invariants de graphes

Soit  $G = (V, E)$  un graphe.

### Stable

Un *stable*  $S$  dans un graphe  $G$  est un sous ensemble de sommets de  $G$  tel que  $G[S]$  est un graphe sans arêtes.

$\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$  est appelé *nombre de stabilité* de  $G$ .

### Transversal

Un *transversal*  $T$  dans un graphe  $G$  est un sous ensemble de sommets de  $G$  tel que  $\forall e \in E, \exists v \in T$ , tel que  $v$  est une extrémité de  $e$ .

$\tau(G) = \min\{|T| : T \text{ est un transversal de } G\}$  est appelé *nombre de transversalité* de  $G$ .

### Clique

Une *clique*  $K$  dans un graphe  $G$  est un sous ensemble de sommets de  $G$  tel que  $G[K]$  est un graphe complet.

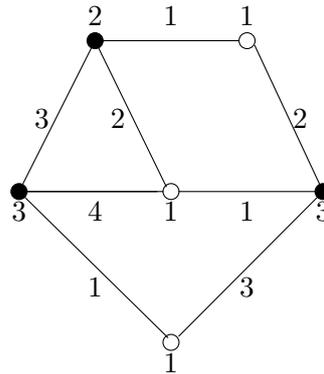
$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ est une clique de } G\}$  est appelé *nombre de clique* de  $G$ .

### Le nombre chromatique

Le *nombre chromatique* d'un graphe  $G$ , noté  $\chi(G)$ , est le nombre minimum de couleurs à affecter aux sommets de  $G$ , de telle sorte que les sommets adjacents sont de couleurs différentes.

### L'indice chromatique

L'*indice chromatique* d'un graphe  $G$ , noté  $\chi'(G)$ , est le nombre minimum de couleurs à affecter aux arêtes de  $G$ , de telle sorte que les arêtes adjacentes sont de couleurs différentes.

FIG. 1.13 – Un graphe  $G$ 

Pour le graphe  $G$  illustré dans FIG 1.13, l'ensemble des sommets en blancs représente un stable  $S$  de cardinalité maximum, l'ensemble des sommets noir représente un transversal  $T$  de cardinalité minimum. La numérotation des sommets représente une coloration optimale des sommets de  $G$  et la numérotation des arêtes représente une coloration optimale des arêtes de  $G$ . D'où  $\alpha(G) = \tau(G) = 3$ ,  $\chi(G) = 3$ ,  $\chi'(G) = 4$  et  $\omega(G) = 3$ .

### ***i*-packing**

Un sous ensemble de sommets  $V_i$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est dit *i*-packing si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de  $V_i$  est supérieure à  $i$ .

## **1.3 Complexité algorithmique**

Un algorithme de résolution d'un problème  $P$  donné est une procédure, décomposable en opérations élémentaires, transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple du problème  $P$  en une chaîne de caractères représentant les résultats de  $P$ .

### **1.3.1 Classes des algorithmes selon leurs complexités**

La *complexité d'un algorithme*  $A$  représente le nombre de ses étapes élémentaires en fonction de  $n$  qui représente la longueur d'écriture des données à une instance  $I$ .

Un algorithme est dit *polynomial* si sa complexité est majorée par une fonction polynomiale en la taille des données. Dans le cas contraire, il est dit *exponentiel*.

**Exemple :**

Le temps de calcul nécessaire pour traiter des données de taille  $n$ , comprise entre 10 et 50, à l'aide des algorithmes de complexités différentes, peut passer d'une seconde à des siècles. Ceci peut être vu dans le tableau TAB 1.1, où le calcul est exécuté par une machine de Turing capable d'effectuer mille pas en une seconde.

n	10	20	30	40	50
$\log_{10}(n)$	0,001s	0,0013s	0,0015s	0,0016s	0,0017s
$n$	0,01s	0,02s	0,03s	0,04s	0,05s
$n^3$	1s	8s	27s	64s	125s
$2^n$	1s	17,5mn	12,4 jours	34,9ans	357siècles
$n!$	1h	7, $7 \cdot 10^5$ siècles	8, $4 \cdot 10^{19}$ siècles	2, $6 \cdot 10^{35}$ siècles	9, $6 \cdot 10^{51}$ siècles
$n^n$	116jours	3, $3 \cdot 10^{31}$ siècles	6, $5 \cdot 10^{31}$ siècles	3, $8 \cdot 10^{51}$ siècles	2, $8 \cdot 10^{72}$ siècles

TAB. 1.1 – Comparaison entre le temps d'exécution des algorithmes polynomiaux et exponentiels

On remarque que le temps de traitement des algorithmes exponentiels est très grand, même si on utilise une puissance de calcul phénoménale qui permettrait de rendre plus rapides nos ordinateurs actuels.

### 1.3.2 Complexité des problèmes

De même que la complexité des algorithmes, on peut définir les classes des problèmes selon leurs difficultés intrinsèques.

#### Classe P

Un problème est dit *appartenir à la classe P* s'il peut être résolu par un algorithme polynomial. On dit que les problèmes de la classe  $P$  sont faciles.

Notons que la non-connaissance d'un algorithme polynomial pour résoudre un problème donné ne signifie pas qu'il ne soit pas dans la classe  $P$ .

Nous allons maintenant décrire une autre classe, plus vaste, qui contiendra ces problèmes.

Un problème de *décision* est un problème dont les résultats ne peuvent prendre que l'une des deux valeurs VRAI ou FAUX.

Etant donné un problème d'optimisation combinatoire. " Trouver  $\hat{s} \in S$  tel que  $f(\hat{s}) = \min_{s \in S} [f(s)]$  (resp.  $f(\hat{s}) = \max_{s \in S} [f(s)]$ )" et un nombre  $k$ , on définit le problème de décision associé :

"Existe-t-il  $\hat{s} \in S$  tel que  $f(\hat{s}) \leq k$  (resp.  $f(\hat{s}) \geq k$ )?"

### Classe NP

Un problème appartient à la *classe NP* si, lorsqu'une solution à ce problème est proposée, alors on peut vérifier en temps polynomial que la réponse correspondante est VRAI.

### Réduction polynomiale (au sens de Turing)

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux problèmes de décision.  $P_1$  se réduit *polynomialement* à  $P_2$  s'il existe un algorithme pour  $P_1$  qui fait appel (comme sous programme) à un algorithme de résolution de  $P_2$ , et si cet algorithme de résolution de  $P_1$  est polynomial lorsque la résolution de  $P_2$  est comptabilisée comme une opération élémentaire.

**Théorème 1.1.** [12] *Si le problème  $P_1$  se réduit en temps polynomial au problème  $P_2$  et si  $P_2$  peut être résolu par un algorithme polynomial alors il en est de même de  $P_1$ .*

### Classe NP-complet

Un problème de décision est dit *NP-complet* si tout problème de la classe *NP* se réduit polynomialement à lui.

Un problème d'optimisation combinatoire dont le problème de décision associé est *NP-complet* est dit *NP-dur*.

**Théorème 1.2.** [12] *Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux problèmes de décisions. Si  $P_1 \in NP$ ,  $P_2$  est NP-complet et  $P_2$  se réduit polynomialement à  $P_1$ , alors  $P_1$  est NP-complet.*

Donc pour montrer qu'un problème de décision  $P_1$  est NP-complet, il suffit d'adopter la démarche suivante :

1. Montrer que  $P_1$  appartient à la classe  $NP$  ;
2. Choisir un problème  $P_2$  connu pour être NP-complet ;
3. Etablir la relation " $P_2$  se réduit polynomialement à  $P_1$ ".

# Chapitre 2

## Broadcast coloration dans les graphes

Nous présentons dans ce chapitre tous les travaux publiés à notre connaissance, sur le problème de broadcast coloration. Ils sont dûs à W. Goddard et al. [14] et à Christian Sloper [32].

### 2.1 Motivation et définition du problème de broadcast coloration

Le problème de broadcast coloration a été posé suite à l'établissement de nombreux règles et règlements par la Commission des Communications des Etats-Unis concernant l'attribution des fréquences de radio-diffusion à des stations de radio. En particulier, deux stations de radio qui sont affectées de la même fréquence de diffusion doivent être localisées suffisamment loin l'une de l'autre pour que la diffusion de l'une n'altère pas la réception de l'autre. La distance géographique entre deux stations qui sont affectées de la même fréquence est donc directement liée à la puissance de leurs signaux de radio-diffusion.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $k \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $\pi : V \longrightarrow \{1, \dots, k\}$  est appelée *broadcast coloration d'ordre  $k$*  si l'égalité  $\pi(u) = \pi(v)$  implique  $d(u, v) > \pi(u)$ .

L'ordre minimum d'une broadcast coloration de  $G$  est appelé le *nombre broadcast chromatique*, et est noté  $\chi_b(G)$ . La broadcast coloration est donc une partition  $P_\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  de  $V$  en  $k$  *i-packing*.

Notons que toute broadcast coloration est une coloration propre et donc  $\chi(G) \leq \chi_b(G)$ . De plus, pour tout sous graphe  $H$  d'un graphe  $G$ , on a  $\chi_b(H) \leq \chi_b(G)$ .

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

## 2.2 Nombre broadcast chromatique et autres invariants de graphes

Tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  admet une broadcast coloration d'ordre  $n$ , puisqu'il est possible d'affecter  $n$  entiers distincts, entre 1 et  $n$ , à chaque sommet de  $V$ . Ainsi, une borne supérieure naturelle serait l'ordre du graphe qui n'est pas forcément la meilleure.

**Proposition 2.1.** [14] *Tout graphe  $G$  vérifie,  $\chi_b(G) \leq \tau(G) + 1$ , avec égalité si  $G$  est de diamètre 2.*

D'après la Proposition 2.1, on déduit que si  $G$  est un graphe complet, multiparti complet ou une roue, alors le nombre broadcast chromatique n'est autre que le rajout d'une unité au nombre de transversalité. Par ailleurs, puisque le problème du nombre de transversalité pour les graphes de diamètre 2 est *NP-dur* alors le problème de broadcast coloration est aussi *NP-dur* pour cette classe de graphes [14].

Pour les graphes bipartis  $G$  de diamètre 3, la valeur de  $\chi_b(G)$  ne peut prendre que deux valeurs.

**Proposition 2.2.** [14] *Si  $G$  est un graphe biparti de diamètre 3, alors*

$$\tau(G) \leq \chi_b(G) \leq \tau(G) + 1.$$

**Exemple 2.1.** *Le graphe illustré dans FIG 2.1 représente une broadcast coloration*

optimale de  $C_6$  et l'ensemble de sommets en blanc représente un transversal optimal. On a  $\tau(C_6) = 3$  et  $\chi_b(C_6) = 4$ . La borne supérieure peut donc être atteinte.

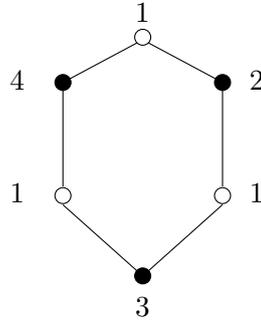


FIG. 2.1 – Le cycle  $C_6$

De même pour la borne inférieure, le graphe  $G$  formé du cycle  $C_6$  avec deux sommets antipodaux<sup>1</sup> dupliqués vérifient  $\chi_b(G) = \tau(G) = 4$ .

**Exemple 2.2.** Le graphe illustré dans FIG 2.2 représente une broadcast coloration optimale de  $G$  et l'ensemble des sommets en blanc représente un transversal optimal. On a  $\tau(G) = 4$  et  $\chi_b(G) = 4$ .

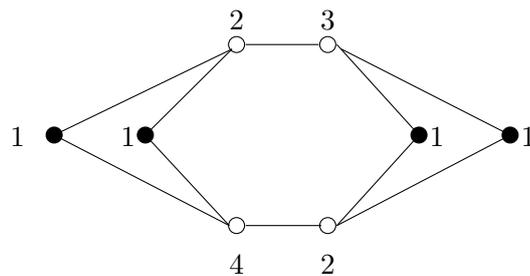


FIG. 2.2 – Un graphe  $G$  formé d'un cycle  $C_6$  avec deux sommets antipodaux dupliqués

Concernant les chaînes  $P_n$ , de longueur  $n$ , l'affectation des couleurs 1, 2, 1, 3, ... aux sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de  $P_n$  représente une broadcast coloration minimum.

**Proposition 2.3.** [14] Pour  $2 \leq n \leq 3$ ,  $\chi_b(P_n) = 2$  et pour  $n \geq 4$ ,  $\chi_b(P_n) = 3$ .

<sup>1</sup>Dans un cycle de longueur  $n$  paire, deux sommets  $u$  et  $v$  sont dit antipodaux si  $d(u, v) = n/2$ .

Pour les cycles  $C_n$ , la valeur de  $\chi_b(C_n)$  dépend de la multiplicité de  $n$  par le nombre 4. Goddard et al [14]. montrent que la broadcast coloration optimale est donnée par l'affectation aux sommets  $v_1, \dots, v_n$  de  $C_n$  les couleurs

$$\begin{aligned} 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 2, \dots, 1, 2, 1, 3 & \quad \text{si } n = 4r \\ 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 2, \dots, 1, 2, 1, 3, 4 & \quad \text{si } n = 4r + 1 \\ 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 2, \dots, 1, 2, 1, 3, 1, 4 & \quad \text{si } n = 4r + 2 \\ 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 2, \dots, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 4 & \quad \text{si } n = 4r + 3 \end{aligned}$$

**Proposition 2.4.** [14] *Soit  $n \geq 3$ . Si  $n$  vaut 3 ou  $n$  est un multiple de 4, alors  $\chi_b(C_n) = 3$  sinon  $\chi_b(C_n) = 4$ .*

Comme tout graphe  $G = (V, E)$  vérifie  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_b(G)$ , il serait alors intéressant de caractériser ceux qui ont le nombre broadcast chromatique égal au nombre de clique.

Pour un graphe  $G$ , l'égalité  $\omega(G) = \chi_b(G)$  implique forcément que les voisins d'une clique maximum  $K$  forme d'une part un ensemble stable et d'autre part qu'au moins un sommet  $v$  de  $K$  vérifie  $N[v] = K$ . Si  $G$  est un graphe scindé<sup>2</sup> alors cette condition nécessaire devient aussi suffisante.

Entre les nombres chromatique et broadcast chromatique, on a égalité si le nombre de clique est grand.

**Proposition 2.5.** [14] *Pour tout graphe  $G$ , si  $\chi(G) = \chi_b(G)$  alors  $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$ .*

## 2.3 Graphes avec un nombre broadcast chromatique petit

En utilisant le fait qu'un graphe  $G$  tel que  $\chi_b(G) = 2$  ne contient pas  $P_4$  comme sous-graphe induit et vérifie  $diam(G) \leq 2$ , alors de la Proposition 2.1, on a forcément  $\tau(G) = 1$  c.à.d. que  $G$  est une étoile. D'où la caractérisation des graphes de nombre broadcast chromatique égal à 2.

<sup>2</sup>Un graphe scindé est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux ensembles A et B, où A est un sous-graphe induit complet et B est un stable.

**Proposition 2.6.** [14] *Pour un graphe connexe  $G$ , on a  $\chi_b(G) = 2$  ssi  $G$  est une étoile.*

Soit  $G$  un graphe et  $S(G)$  le graphe subdivision de  $G$ , qui est obtenu à partir de  $G$  par la subdivision de chacune de ses arêtes une seule fois. Commençons par la caractérisation des graphes 2-connexes dont le nombre broadcast chromatique égal à 3 avant d'arriver au cas général.

**Proposition 2.7.** [14] *Soit  $G$  un graphe 2-connexe. Alors  $\chi_b(G) = 3$  si et seulement si  $G = S(H)$  où  $H$  est un multigraphe biparti ou alors  $G$  est le joint de  $K_2$  et d'un stable.*

Pour un sommet  $v$ , on définit un  $T$ -ajout de  $v$  comme étant l'opération qui consiste à ajouter un sommet  $w_v$ , un stable  $X_v$ , l'arête  $vw_v$  et quelques arêtes entre  $\{v, w_v\}$  et  $X_v$ . Cette notion permet de caractériser les graphes  $G$  non forcément 2-connexes, qui vérifient  $\chi_b(G) = 3$ . Soit donc  $\{V_1, V_2, V_3\}$  une partition de  $V$  tel que chaque classe de couleur  $V_i$  est un  $i$ -packing.

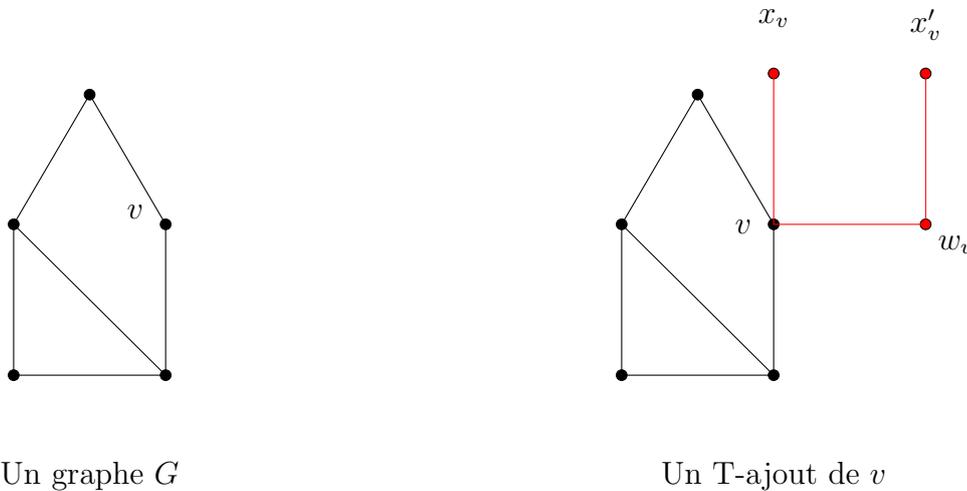


FIG. 2.3 – Un graphe  $G$  et un  $T$ -ajout du sommet  $v$

**Proposition 2.8.** [14] *Soit  $G$  un graphe. Alors  $\chi_b(G) = 3$  si et seulement si  $G$  peut être formé en prenant un certain multigraphe biparti  $H$  avec la bipartition  $(V_2, V_3)$ , en subdivisant chaque arête exactement une fois, en ajoutant des feuilles à quelques sommets de  $V_2 \cup V_3$ , et en effectuant ensuite l'opération  $T$ -ajout à quelques sommets de  $V_3$ .*

De la Proposition 2.7 et la Proposition 2.8, Goddard et al. [14] ont pu construire un algorithme pour déterminer si un graphe a un nombre broadcast chromatique égal au plus à 3.

## 2.4 Complexité algorithmique

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et un entier  $k \leq n = |V|$ , le problème qui consiste à déterminer s'il existe une broadcast coloration d'ordre au plus  $k$  est le problème de décision associé au problème de recherche d'une broadcast coloration d'ordre minimum.

Les problèmes de broadcast 2-coloration et broadcast 3-coloration sont polynomiaux, mais le problème de broadcast 4-coloration ne l'est pas.

**Théorème 2.1.** [14] *Le problème de broadcast 4-coloration est un problème NP-dur.*

Le problème de broadcast 4-coloration reste aussi NP-dur pour les graphes planaires [14].

## 2.5 Broadcast coloration pour la classe des arbres

Le nombre broadcast chromatique d'un arbre de diamètre 2 (c.à.d, une étoile) vaut 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre broadcast chromatique égal à 3. Le cas des arbres de diamètre 4 est plus compliqué, mais la valeur exacte est connue. Afin d'exprimer cette valeur, définissons ce qu'est un sommet large et un sommet petit. On dit qu'un sommet est *large* s'il est de degré 4 ou plus, et est *petit* sinon. La formule qui donne le nombre broadcast chromatique pour les arbres  $T$  de diamètre 4 dépend de la nature des voisins du sommet central de  $T$ .

**Proposition 2.9.** [14] *Soit  $T$  un arbre de diamètre 4 et de sommet central  $v$ . Pour  $i = 1, 2, 3$ , soit  $n_i$  le nombre de voisins de  $v$  de degré  $i$ , et soit  $L$  le nombre de voisins larges de  $v$ .*

Si  $L = 0$ , alors

$$\chi_b(T) = \begin{cases} 4 & \text{si } n_3 \geq 2 \text{ et } n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et si  $L > 0$ , alors

$$\chi_b(T) = \begin{cases} L + 3 & \text{si } n_3 \geq 1 \text{ et } n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L + 1 & \text{si } n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 2.1.** Pour un arbre  $T$  de diamètre 4, considérons la fonction broadcast coloration définie comme suit :

On attribue la couleur 1 au centre et aux feuilles qui ne lui sont pas adjacents. Aux sommets restants, on attribue des couleurs différentes. Cette coloration nécessite  $L + n_1 + n_2 + n_3 + 1$  couleurs, et est optimale quand  $n_1 = n_2 = 0$  et quand soit  $2 \leq n_3 \leq 3$  et  $L = 0$ , soit  $0 \leq n_3 \leq 2$  et  $L > 0$  (Voir FIG 2.4).

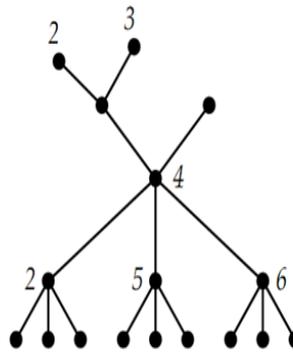


FIG. 2.4 – L'arbre  $T_5$  où les sommets non coloriés sont de couleur 1

Si  $L = 0$  et  $n_3 = 1$ , alors 3 couleurs suffisent : On affecte la couleur 3 au sommet central, la couleur 2 à ses voisins de degré 3 et aux enfants de ses voisins de degré 2. Aux sommets restants, on affecte la couleur 1.

Pour les arbres  $T$  vérifiant  $\chi_b(T) = 2, 3$ , ou 4 leur ordre ne peut être inférieur à 2, 4 ou 8 respectivement.

**Proposition 2.10.** [14] *L'ordre minimum d'un arbre  $T$  avec  $\chi_b(T) = 2$  est 2. Pour  $\chi_b(T) = 3$  c'est 4 et pour  $\chi_b(T) = 4$  c'est 8. De plus,  $P_4$  est l'unique arbre à 4 sommets qui nécessite 3 couleurs. Les deux arbres à 8 sommets qui nécessitent 4 couleurs sont (i) l'arbre de diamètre 4 avec  $n_3 = 2$ ,  $n_1 = 1$  et  $L = n_2 = 0$ , appelé  $A_8$ ; et (ii) l'arbre de diamètre 5 où les deux sommets centraux sont de degré 3 et pour chaque sommet central, ses trois voisins sont de degrés respectivement 1, 2 et 3, appelé  $B_8$ .*

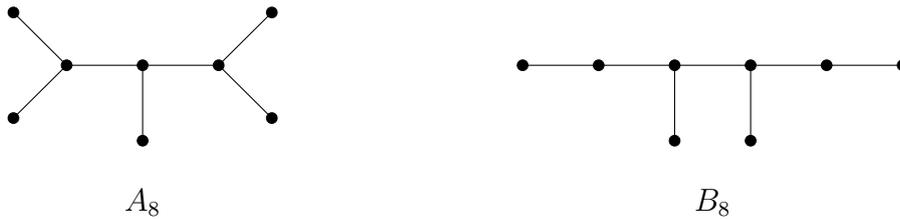


FIG. 2.5 – Les plus petits arbres avec  $\chi_b(T) = 4$

Le nombre broadcast chromatique d'une classe particulière d'arbre ne varie pas par la suppression d'un certain sommet pendant.

**Proposition 2.11.** [32] *Soit  $T$  un graphe différent de  $P_4$ . Supposons que  $T$  contient une chaîne  $\{t, u, v, w\}$  où  $t$  est de degré 1,  $u$  et  $v$  sont de degré 2. Alors  $\chi_b(T) = \chi_b(T - t)$ .*

Comme application de la Proposition 2.11, on peut affirmer directement que  $\chi_b(P_n) = 3$  pour tout  $n \geq 4$ .

**Théorème 2.2.** [32] *Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n$ , on a  $\chi_b(T) \leq \frac{n+7}{4}$ , excepté pour les cas  $n = 4$  ou  $8$ , où il faut ajouter  $\frac{1}{4}$  à la borne, et ces bornes sont atteintes.*

L'arbre extrémal  $T_d$ ,  $d \geq 2$ , qui atteint la borne du Théorème 2.2 est construit comme suit : Il est de diamètre 4;  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $n_2 = 0$ ,  $L = d - 2$  et tous les sommets larges sont de degré exactement 4. L'arbre  $T_d$  a  $4d - 3$  sommets et on a bien  $d + 1 = \frac{(4d-3)+7}{4}$  donc  $\chi_b(T_d) = d + 1$ .

La borne supérieure définie dans le Théorème 2.2 peut être améliorée pour la sous classe des graphes binaires complets. Encore mieux, elle sera indépendante de l'ordre

de l'arbre. Commençons par définir ce qu'est un arbre binaire complet.

Un *arbre binaire* est un arbre où tous les sommets sont de degrés 1, 2 ou 3.

On définit par induction l'*arbre binaire complet*  $B_h$  comme suit :

1.  $B_1$  par définition est une racine, ce sommet est de niveau 1.
2.  $B_h$  est construit à partir de  $B_{h-1}$  et ajoutant deux nouvelles feuilles à chaque feuille de  $B_{h-1}$  (qui deviendra alors support dans  $B_h$ ). Ces nouvelles feuilles sont de niveau  $h$ .

La taille d'un arbre binaire complet  $B_h$  vaut  $h$ .

Tout arbre binaire complet avec une taille supérieure ou égal à 3 peut être broadcast colorié par au maximum 7 couleurs. Le nombre de couleurs reste le même pour les grands arbres binaires.

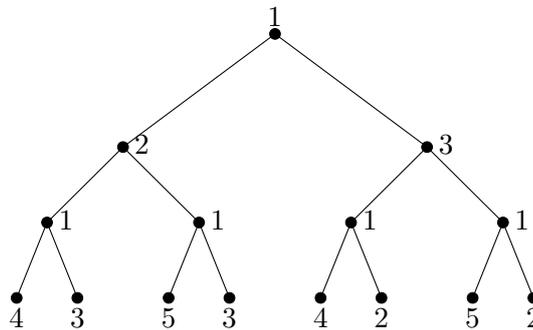


FIG. 2.6 – Broadcast coloration d'un arbre binaire complet à 4 niveaux

**Théorème 2.3.** [32] *Tout arbre binaire complet  $B_h$  où  $h \geq 3$  vérifie  $\chi_b(B_h) \leq 7$ .*

**Théorème 2.4.** [32] *Tout arbre  $T$  avec des sommets de degrés 1, 2 et 3 et de diamètre  $\geq 14$  vérifie  $\chi_b(T) \leq 7$ .*

## Broadcast coloration pour la classe des hypercubes

L'hypercube de dimension  $d$  (noté  $Q_d$ ) est le graphe dont tous les sommets représentent les  $d$ -uplets de  $\{0, 1\}^d$ . Deux sommets sont adjacents si et seulement si, ils

diffèrent exactement d'une composante.

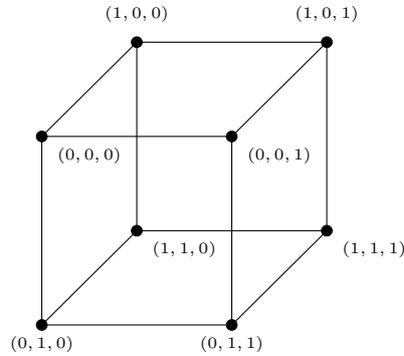


FIG. 2.7 – L'hypercube  $Q_3$

Pour les petites valeurs de  $n$ , la valeur exacte de  $\chi_b(Q_n)$  est donnée par la proposition qui suit :

**Proposition 2.12.** [14] On a :  $\chi_b(Q_1) = 2$ ,  $\chi_b(Q_2) = 3$ ,  $\chi_b(Q_3) = 5$ ,  $\chi_b(Q_4) = 7$  et  $\chi_b(Q_5) = 15$ .

Pour la valeur asymptotique, on a

**Proposition 2.13.** [14]  $\chi_b(Q_n) \sim (\frac{1}{2} - O(\frac{1}{n}))2^n$ .

Le tableau suivant donne quelques bornes du nombre broadcast chromatique de  $Q_n$  pour  $6 \leq n \leq 11$ .

$n$	6	7	8	9	10	11
$\chi_b(Q_n) \geq$	15	28	63	132	285	610
$\chi_b(Q_n) \leq$	25	49	95	219	441	881

TAB. 2.1 – Quelques bornes de  $\chi_b(Q_n)$

# Chapitre 3

## Broadcast coloration de quelques classes de graphes

Dans ce chapitre, nous déterminons des valeurs exactes du nombre broadcast chromatique des couronnes des chaînes et des cycles, ensuite, nous établissons soit des valeurs exactes, soit des bornes pour différentes classes de chenilles.

### 3.1 Couronnes

La *couronne* d'un graphe  $G$ , notée  $Cr(G)$ , est le graphe obtenu à partir d'une copie de  $G$  dans laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de  $G$ .

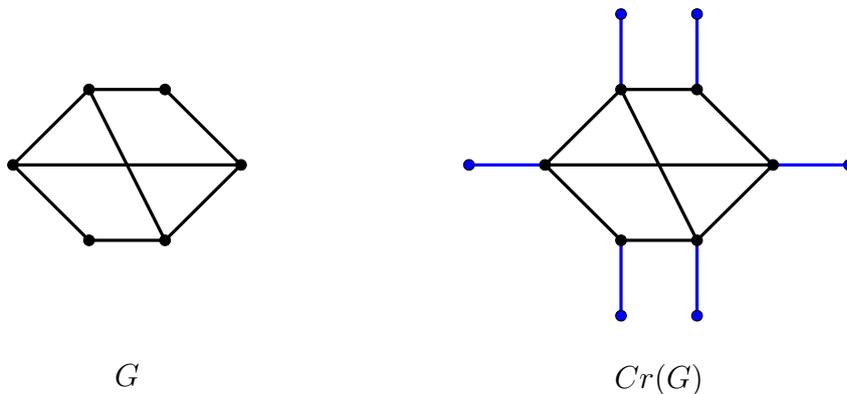


FIG. 3.1 – Un graphe  $G$  avec sa couronne  $Cr(G)$

### 3.1.1 Broadcast coloration de la couronne d'une chaîne

Soit  $P_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  une chaîne de longueur  $n$  et  $Cr(P_n)$  la couronne de  $P_n$ . Notons  $y_1, \dots, y_n$  les sommets pendants adjacents aux sommets  $x_1, \dots, x_n$  respectivement.

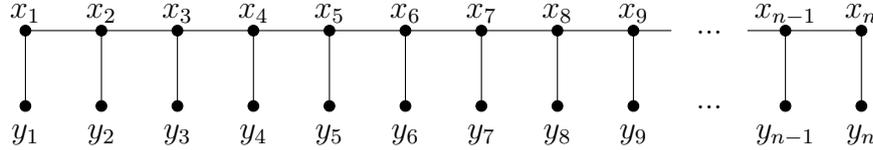


FIG. 3.2 – Couronne d'une chaîne de longueur  $n$

**Proposition 3.1.** *Pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 11$ , on a :*

$$\chi_b(Cr(P_n)) = 5.$$

Il n'est pas difficile de trouver que  $\chi_b(Cr(P_n)) = 3$  pour  $n \in \{2, 3\}$  et  $\chi_b(Cr(P_n)) = 4$  pour  $n \in \{4, \dots, 10\}$ .

**Preuve.** *Montrons que  $\chi_b(Cr(P_n)) \leq 5$  pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 11$ . Pour cela, considérons la fonction  $\pi$  définie comme suit :*

*Si  $x_i$  est un sommet support posons,*

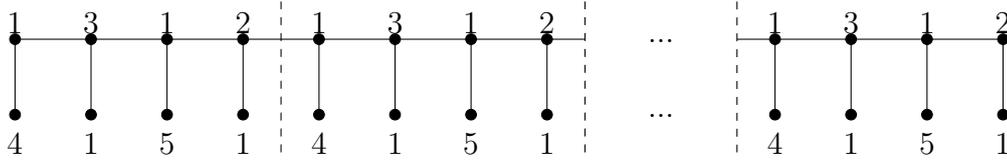
$$\pi(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1[2], \\ 3 & \text{si } i \equiv 2[4], \\ 2 & \text{si } i \equiv 0[4]. \end{cases}$$

*et si  $y_i$  est un sommet pendant posons,*

$$\pi(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 0[2], \\ 4 & \text{si } i \equiv 1[4], \\ 5 & \text{si } i \equiv 3[4]. \end{cases}$$

*La fonction  $\pi$  représente une fonction broadcast coloration périodique sur  $Cr(P_n)$  d'où  $\chi_b(Cr(P_n)) \leq 5$  pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 11$ .*

*Montrons l'inégalité dans l'autre sens, et supposons que 4 couleurs suffisent pour colorier la couronne d'une chaîne de longueur supérieure ou égale à 8. Nous distinguons*

FIG. 3.3 – Broadcast coloration de la couronne d'une chaîne de longueur  $n$ 

quatre cas suivant le choix de la couleur affectée à  $x_2$ .

*Cas 1.*  $\pi(x_2) = 1$ .

Si  $\pi(x_3) = 2$ , alors soit  $\pi(y_2) = 3$  et  $\pi(x_1) = 4$ , soit  $\pi(y_2) = 4$  et  $\pi(x_1) = 3$ , et par suite  $\pi(x_4) = 1$ . D'où  $x_5$  et  $y_4$ , voisins de  $x_4$ , vérifient  $\pi(y_4) = \pi(x_5) = 3$ . Contradiction.

Si  $\pi(x_3) = 3$ , alors soit  $\pi(y_2) = 2$  et  $\pi(x_1) = 4$ , soit  $\pi(y_2) = 4$  et  $\pi(x_1) = 2$ , et par suite  $\pi(x_4) \in \{1, 2\}$ . Dans le cas où  $\pi(x_4) = 1$ ,  $x_5$  et  $y_4$ , voisins de  $x_4$ , vérifient  $\pi(y_4) = \pi(x_5) = 3$ , et dans le cas où  $\pi(x_4) = 2$  alors  $\pi(x_5) = 1$  et par suite  $\pi(y_5) = \pi(x_6) = 4$ . Dans les deux cas on obtient une contradiction.

Si  $\pi(x_3) = 4$ , alors soit  $\pi(y_2) = 2$  et  $\pi(x_1) = 3$ , soit  $\pi(y_2) = 3$  et  $\pi(x_1) = 2$  et par suite  $\pi(x_4) \in \{1, 2\}$ . Dans le cas où  $\pi(x_4) = 1$ , alors  $\pi(x_5) \in \{2, 3\}$ . Si  $\pi(x_5) = 2$ , alors  $\pi(y_4) = 3$  et  $\pi(x_6) = 1$  et par suite  $\pi(y_6) = \pi(x_7) = 4$ . Contradiction. Si  $\pi(x_5) = 3$ , donc  $\pi(y_4) = 2$  et  $\pi(x_6) \in \{1, 2\}$ .  $\pi(x_6) = 1$  implique  $\pi(y_6) = \pi(x_7) = 2$  et  $\pi(x_6) = 2$  implique  $\pi(x_7) = 1$ . D'où  $\pi(y_7) = \pi(x_8) = 4$ . Contradiction. Dans le cas où  $\pi(x_4) = 2$ , alors  $\pi(x_5) \in \{1, 3\}$ . Si  $\pi(x_5) = 1$ , alors  $\pi(y_5) = \pi(x_6) = 3$  et si  $\pi(x_5) = 3$ , alors  $\pi(x_6) = 1$ . D'où  $\pi(y_6) = \pi(x_7) = 2$ . Contradiction.

*Cas 2.*  $\pi(x_2) = 2$ .

On peut supposer, sans perte de généralité, que  $\pi(x_i) \neq 1$ , pour  $i \geq 2$ , puisque ce cas se ramène au cas 1. Ainsi  $\pi(x_3) \in \{3, 4\}$ . Si  $\pi(x_3) = 3$  alors  $\pi(x_4) = 4, \pi(x_5) = 2$  et par suite  $x_6$  ne peut être colorié. Si  $\pi(x_3) = 4$  alors  $\pi(x_4) = 3, \pi(x_5) = 2$  et par suite  $x_6$  ne peut aussi être colorié.

*Cas 3.*  $\pi(x_2) = 3$ .

On peut supposer, sans perte de généralité,  $\pi(x_i) \neq 1$  et  $\pi(x_i) \neq 2$ , pour  $i \geq 2$ , puisque ces deux cas se ramènent aux cas 1 et cas 2.

Donc  $\pi(x_3) = 4$  et par suite  $\pi(y_3) = \pi(x_4) = 2$ . *Contradiction.*

*Cas 4.*  $\pi(x_2) = 4$ .

Donc  $\pi(x_3) \in \{1, 2, 3\}$ , ces trois possibilités se ramènent aux cas 1, cas 2 et cas 3.

*En conclusion, 4 couleurs sont insuffisantes pour colorier une couronne d'une chaîne de longueur supérieure ou égale à 11. D'où  $\chi_b(Cr(P_n)) \geq 5$ , et l'égalité en découle.*

### 3.1.2 Broadcast coloration de la couronne d'un cycle

Soit  $Cr(C_n)$  la couronne d'un cycle  $C_n = \{x_1, \dots, x_n, x_1\}$  de longueur  $n$ . Notons par  $y_1, \dots, y_n$  les sommets pendants adjacents aux sommets de  $C_n$ .

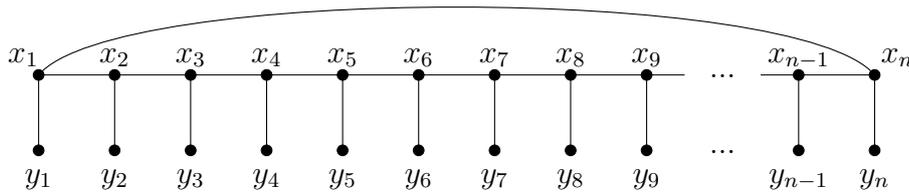


FIG. 3.4 – Couronne d'un cycle de longueur  $n$

Pour la couronne du cycle, nous avons un résultat identique à celui de la couronne d'une chaîne.

Pour les autres valeurs de  $n$ , le résultat est donné par la proposition suivante.

**Proposition 3.2.** *Pour tout entier  $n$ , on a :*

$$\begin{cases} 4 & \text{si } n \in \{3, 4\}, \\ 5 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve.** *Pour  $n \in \{3, 4\}$ , on peut vérifier que  $\chi_b(Cr(C_n)) = 4$ , et pour  $n \in \{5, 6, 7, 8\}$ ,  $\chi_b(Cr(C_n)) = 5$ .*

*Comme  $Cr(P_{n-1})$  est un sous graphe induit de  $Cr(C_n)$ , alors  $\chi_b(Cr(C_n)) \geq \chi_b(Cr(P_{n-1}))$ , c.à.d.  $\chi_b(Cr(C_n)) \geq 5$  pour  $n \geq 9$ .*



FIG. 3.5 – Broadcast coloration de  $Cr(C_n)$  lorsque  $n \in \{3, 4\}$

Supposons maintenant que  $n \geq 9$ , et déterminons une borne supérieure pour  $\chi_b(Cr(C_n))$ .  
 Considérons les broadcast colorations périodiques suivantes.

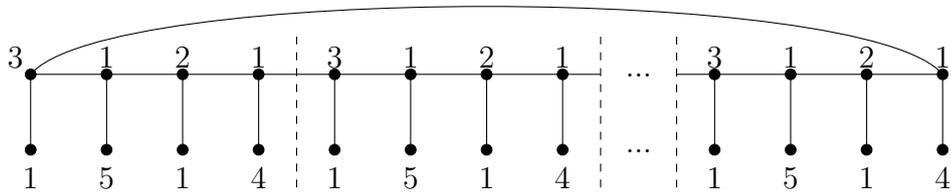


FIG. 3.6 – Broadcast coloration de la couronne d'un cycle de longueur  $n \equiv 0[4]$

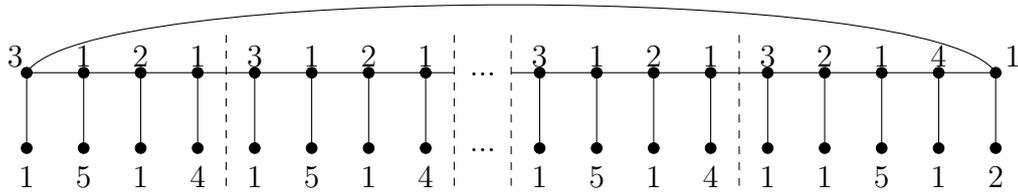


FIG. 3.7 – Broadcast coloration de la couronne d'un cycle de longueur  $n \equiv 1[4]$

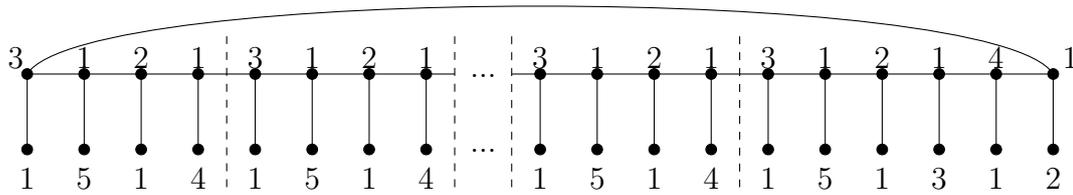


FIG. 3.8 – Broadcast coloration de la couronne d’un cycle de longueur  $n \equiv 2[4]$

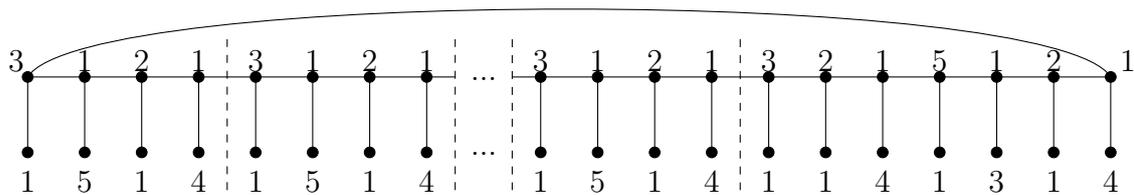


FIG. 3.9 – Broadcast coloration de la couronne d’un cycle de longueur  $n \equiv 3[4]$

De ces colorations nous obtenons l’inégalité  $\chi_b(Cr(C_n)) \leq 5$

Passons maintenant à une autre classe de graphes, qui est la classe des chenilles.

### 3.2 Chenilles

Une *chenille*, notée  $Ch$ , est un arbre tel que, si on supprime tous ses sommets pendants, on obtient une chaîne  $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ . La chaîne  $C$  est appelée épine dorsale et ses sommets sont appelés épines. Les épines qui ne sont pas supports sont appelées troncs.

Le code d’une chenille  $Ch$  est  $C[Ch] = [l_1, l_2, \dots, l_n]$  où  $l_i$  est le nombre de sommets pendants adjacents au sommet support  $v_i$ ,  $l_1 \neq 0$  et  $l_n \neq 0$ . Dans le soucis de simplifier les notations, des parenthèses et des puissances seront employées :

Par exemple  $[3, 3, 3, 3]$  et  $[0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 2]$  seront notés  $[(3)^4]$  et  $[0, (2, 0)^3, (0, 2)^2]$  respectivement.

Avant de donner des résultats sur les chenilles en général, commençons par en étudier quelques classes.

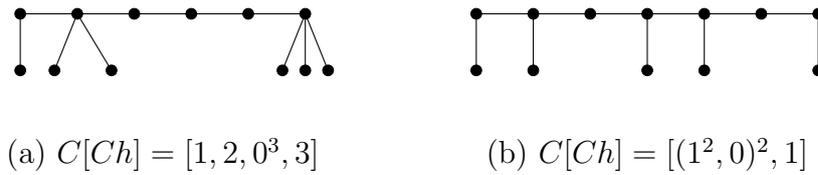


FIG. 3.10 – Codage de deux chenilles

### 3.2.1 Chenille alternative

Une *chenille alternative* de longueur  $n$ , notée  $Ch_{alt}^n$ , est une chenille définie par le code  $C[Ch_{alt}^n] = [l_1, 0, l_3, 0, \dots, l_{n-2}, 0, l_n]$  avec  $l_i \neq 0$  pour  $i \equiv 1[2]$ .

Pour une chenille  $Ch_{alt}^n$ , notons  $x_1, x_2, \dots$  ses sommets supports,  $x'_1, x'_2, \dots$  ses sommets troncs et pour  $i = 1, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ,  $\{y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik_i}\}$  l'ensemble des sommets pendants adjacents au sommet  $x_i$ .

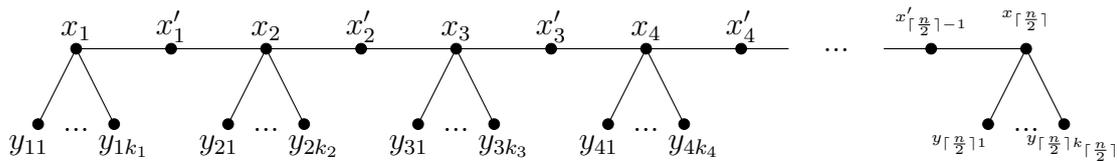


FIG. 3.11 – Chenille alternative

**Proposition 3.3.** *Pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 3$ , on a :*

$$\chi_b(Ch_{alt}^n) = 3.$$

**Preuve.** *Considérons la broadcast coloration périodique suivante :*

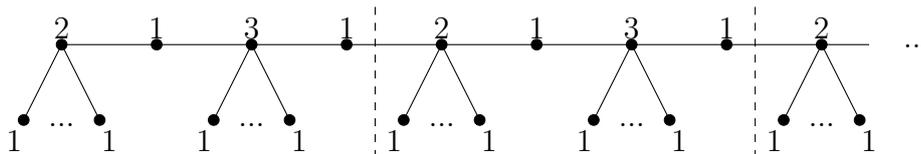


FIG. 3.12 – Broadcast coloration d'une chenille alternative

On obtient donc  $\chi_b(Ch_{alt}^n) \leq 3$  pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 3$ . Pour l'inégalité dans l'autre

sens, il suffit de remarquer qu'une chaîne de longueur  $n$  est un sous graphe induit d'une chenille alternative, et donc  $3 = \chi_b(P_n) \leq \chi_b(Ch_{alt}^n)$ .

### 3.2.2 Chenille impaire

Une chenille impaire à  $n$  épines, notée  $Ch_{impaire}^n$ , est une chenille qui contient entre chaque paire de sommets supports successifs un nombre impair de troncs. Le code d'une chenille impaire est donné par :

$$C[Ch_{impaire}^n] = [l_1, 0^{k_1}, l_{k_1+2}, 0^{k_2}, \dots, 0^{k_{r-1}}, l_r] \text{ avec } k_i \equiv 1[2] \text{ et } l_i \neq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, r.$$

Soient  $x_i^1, \dots, x_i^{k_i}$  les sommets troncs de  $Ch_{impaire}^n$  situés entre les deux supports  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

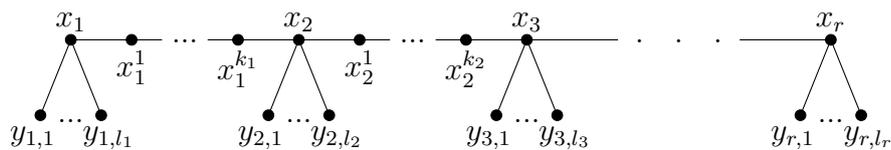


FIG. 3.13 – Chenille impaire

**Proposition 3.4.** *Pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 3$ , on a :*

$$\chi_b(Ch_{impaire}^n) = 3.$$

**Preuve.** *Montrons que  $\chi_b(Ch_{impaire}^n) \leq 3$ . Pour cela, il suffit de trouver une broadcast coloration avec 3 couleurs. Ceci est possible en affectant aux sommets de l'épine dorsale les couleurs : 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, : 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, : ... et aux sommets pendants la couleur 1.*

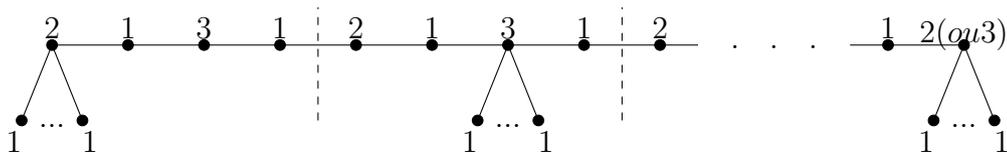


FIG. 3.14 – Broadcast coloration d'une chenille impaire

La fonction  $\pi$  représente une fonction broadcast coloration périodique sur  $Ch_{impaire}^n$ .  
D'où  $\chi_b(Ch_{impaire}^n) \leq 3$  pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 3$ .

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, il suffit de remarquer que  $P_n$  est un sous graphe induit de  $Ch_{impaire}^n$ , et donc  $3 = \chi_b(P_n) \leq \chi_b(Ch_{impaire}^n)$ .

### 3.2.3 Chenille paire

Une chenille paire à  $n$  épines, notée  $Ch_{paire}^n$ , est une chenille qui contient entre chaque paire de sommets supports successifs un nombre pair non nul de troncs. Le code d'une chenille paire est donné par :

$C[Ch_{paire}^n] = [l_1, 0^{k_1}, l_{k_1+2}, 0^{k_2}, \dots, 0^{k_r-1}, l_r]$  avec  $k_i \equiv 0[2]$  et  $l_i, k_i \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$ .

Soient  $x_1^1, \dots, x_i^{k_i}$  les sommets troncs de  $Ch_{paire}^n$  situés entre les deux supports  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

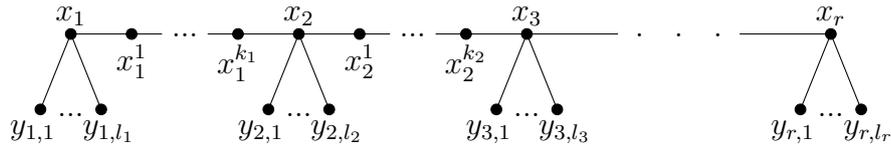


FIG. 3.15 – Chenille paire

Soient  $I_1 = \{(k_1, k_2) \in N^{*,2} : k_1, k_2 \equiv 0[4]\}$ ,  $I_2 = \{(k_1, k_2) \in N^{*,2} : k_1, k_2 \equiv 2[4]\}$  et  $I_3 = \{(k_1, k_2) \in N^{*,2} : k_1 \equiv 0[4], k_1 \equiv 2[4] \text{ et } d(x_1) = 2 \text{ ou } d(x_3) = 2\}$ . Posons  $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ .

**Proposition 3.5.** *Pour toute chenille paire  $Ch_{paire}^n$ , on a :*

$$\chi_b(Ch_{paire}^n) = \begin{cases} 3 & \text{si } Ch_{paire}^n \text{ admet exactement 2 sommets supports ou bien} \\ & 3 \text{ sommets supports avec } (k_1, k_2) \in I; \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve.**

*Cas 1.  $Ch_{paire}^n$  admet exactement 2 sommets supports.*

*Considérons les broadcast colorations périodiques suivantes.*

- Si  $k_1 \equiv 0[4]$ , on affecte à  $x_1$  la couleur 3, à  $x_2$  la couleur 2, aux sommets pendants la couleur 1 et aux sommets restants la coloration périodique 1, 2, 1, 3 : 1, 2, 1, 3 : ...

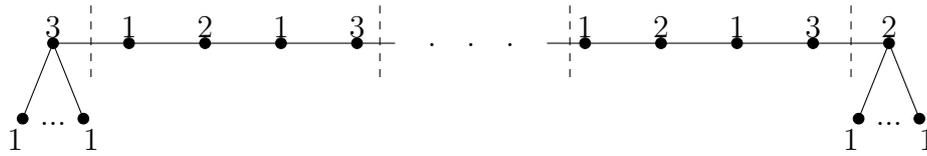


FIG. 3.16 – Broadcast coloration d’une chenille paire avec exactement deux sommets supports et  $k_1 \equiv 0[4]$

- Si  $k_1 \equiv 2[4]$ , on affecte aux deux sommets supports la couleur 2, aux sommets pendants la couleur 1 et aux sommets restants la coloration périodique  $1, 3 : 1, 2, 1, 3 : 1, 2, 1, 3 : \dots$

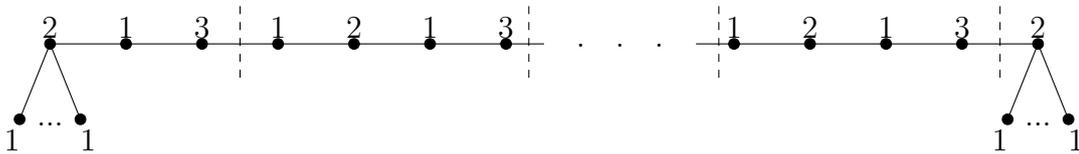


FIG. 3.17 – Broadcast coloration d’une chenille paire avec exactement deux sommets supports et  $k_1 \equiv 2[4]$

Par ailleurs  $P_4$  est un sous graphe induit de  $Ch_{paire}^n$ , donc  $\chi_b(Ch_{paire}^n) \geq 3$ . D’où  $\chi_b(Ch_{paire}^n) = 3$ .

Cas 2.  $Ch_{paire}^n$  admet exactement 3 sommets supports.

- Si  $(k_1, k_2) \in I_2$ , on affecte aux sommets pendants et aux sommets  $x_i^j$  tels que  $j \equiv 1[2]$  la couleur 1 et aux sommets restants les couleurs 2 et 3 comme suit :

$2, 3 : 2, 3 : \dots$

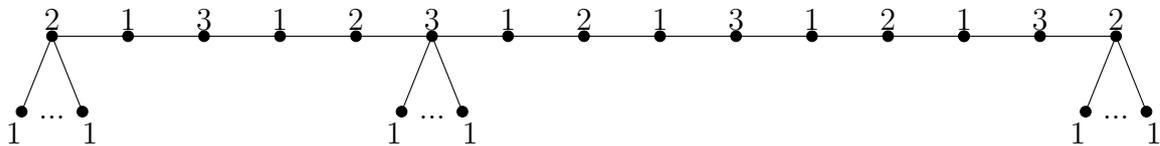


FIG. 3.18 – Broadcast coloration de  $Ch_{paire}^{15}$  avec  $C[Ch_{paire}^{15}] = [l_1, 0^4, l_6, 0^8, l_{15}]$

- Si  $(k_1, k_2) \in I_2$ , on affecte aux sommets pendants et aux sommets  $x_i^j$  tels que  $j \equiv 0[2]$  la couleur 1 et aux sommets restants les couleurs 2 et 3 comme suit :

$2, 3 : 2, 3 : \dots$  (Voir FIG3.20).

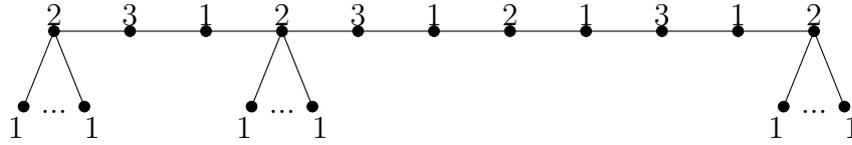


FIG. 3.19 – Broadcast coloration de  $Ch_{paire}^{11}$  avec  $C[Ch_{paire}^{11}] = [l_1, 0^2, l_4, 0^6, l_{11}]$

- Si  $(k_1, k_2) \in I_3$ , on affecte à  $y_{1,1}$  la couleur 3, à  $x_3$  la couleur 2, aux autres sommets pendants la couleur 1 et aux sommets restants 1, 2, 1, 3 : 1, 2, 1, 3 : ... (Voir FIG3.21).

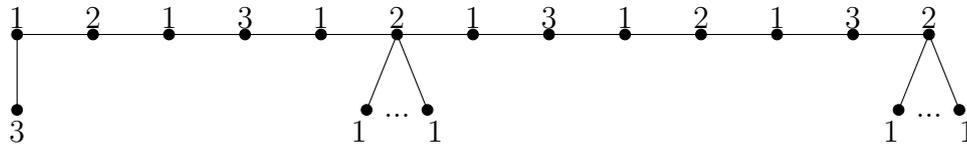


FIG. 3.20 – Broadcast coloration de  $Ch_{paire}^{13}$  avec  $C[Ch_{paire}^{13}] = [1, 0^4, l_6, 0^6, l_{13}]$

Donc toutes les chenilles  $Ch_{paire}^n$  tels que  $(k_1, k_2) \in I$  vérifient  $\chi_b(Ch_{paire}^n) \leq 3$ .

Comme  $3 = \chi_b(P_4) \leq \chi_b(Ch_{paire}^n)$  on obtient  $\chi_b(Ch_{paire}^n) = 3$ .

- Si  $(k_1, k_2) \notin I$ . Supposons sans perte de généralité que  $k_1 \equiv 0[4]$ ,  $k_2 \equiv 2[4]$  et  $d(x_1)$ ,  $d(x_3) \geq 3$ . On affecte la couleur 1 à tous les sommets pendants et les sommets troncs  $x_i^j$  tels que  $j \equiv 1[2]$  et aux sommets restants, les couleurs 2, 3 ou 4 comme suit : 4, 2, 3, 2 : 4, 2, 3, 2 : ... Par exemple, pour  $Ch_{paire}^{13}$ , on obtient : (Voir FIG3.22).)

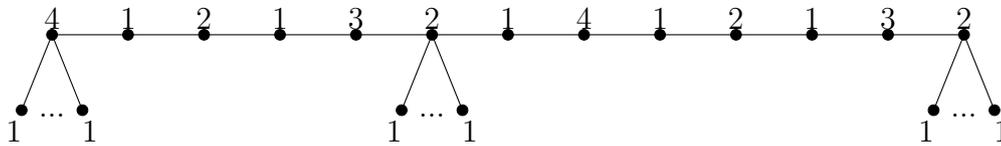


FIG. 3.21 – Broadcast coloration de  $Ch_{paire}^{13}$  avec  $C[Ch_{paire}^{13}] = [l_1, 0^4, l_6, 0^6, l_{13}]$

Il s'agit bien d'une broadcast coloration, donc  $\chi_b(Ch_{paire}^n) \leq 4$ .

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, supposons que 3 couleurs suffisent pour colorier ce type de chenilles. Naturellement  $\pi(x_2) \neq 1$  car  $d(x_2) \geq 3$ . Si  $\pi(x_2) = 2$ , alors la chaîne  $\{x_1^{k_1}, x_1^{k_1-1}, \dots, x_1^1\}$  ne peut être coloriée que comme suit : 1, 3, 1, 2 : 1, 3,

$1, 2 \dot{:} \dots \dot{:} 1, 3, 1, 2$  (resp.  $1, 3, 1, 2 \dot{:} \dots \dot{:} 1, 3, 1, 2 \dot{:} 1, 3, 2, 1$ ) qui conduit à une impossibilité d'affecter une couleur à au moins un sommet pendant  $y_{1,l_i}$  (resp.  $x_1$ ). Si  $\pi(x_2) = 3$  alors la chaîne  $\{x_2^1, \dots, x_2^{k_2}\}$  ne peut être coloriée que comme suit :  $1, 3, 1, 2 \dot{:} 1, 3, 1, 2 \dot{:} \dots \dot{:} 1, 3, 1, 2 \dot{:} 1, 2$  (resp.  $1, 3, 1, 2 \dot{:} \dots \dot{:} 1, 3, 1, 2 \dot{:} 2, 1$ ) qui conduit à une impossibilité d'affecter un couleur à au moins un sommet pendant  $y_{3,l_i}$  (resp.  $x_3$ ). D'où  $\chi_b(Ch_{paire}^n) \geq 4$  et par suite  $\chi_b(Ch_{paire}^n) = 4$ .

Cas 3.  $Ch_{paire}^n$  admet au moins 4 sommets supports :

Montrons que  $\chi_b(Ch_{paire}^n) \leq 4$ . Pour cela, considérons la coloration suivante :

Affectons la couleur 1 à tous les sommets pendants et les sommets troncs  $x_i^j$  tels que  $j \equiv 1[2]$ . Aux sommets restants, nous affectons les couleurs 2, 3 ou 4 comme suit : 2, 3, 2, 4, 2, 3, 2, 4, 2, ... Par exemple, pour  $Ch_{paire}^{16}$ , on obtient :

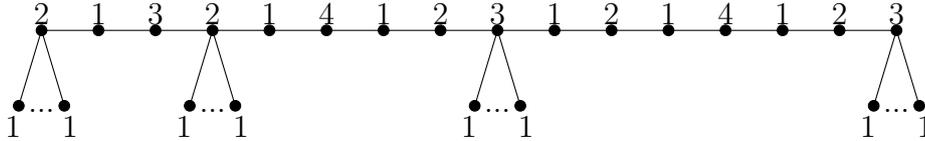


FIG. 3.22 – Broadcast coloration d’une chenille paire  $Ch_{paire}^{16}$

Il s’agit bien d’une broadcast coloration et donc,  $\chi_b(Ch_{paire}^n) \leq 4$ .

Montrons l’inégalité dans l’autre sens, et supposons que 3 couleurs suffisent pour colorier une chenille paire avec aux moins 4 sommets supports. Naturellement la couleur des sommets supports non extrémités de l’épine dorsale est différente de 1 puisque leur degré est supérieur ou égal à 3.

On a  $\pi(x_2^{k_2}) = 1$  car  $\pi(x_2^{k_2}) = 2$  (resp.  $\pi(x_2^{k_2}) = 3$ ) implique  $\pi(x_2^{k_2-1}) = 1$  et  $\pi(x_3) = 3$  (resp.  $\pi(x_3) = 2$  et  $\pi(x_3^1) = 1$ ) et par conséquent le sommet  $x_2^{k_2-2}$  (eventuellement  $x_2$ ) (resp.  $x_3^2$ ) ne peut avoir aucune couleur parmi 1, 2 et 3. Il s’ensuit que  $\pi(x_2^{k_2}) = 1$  et aussi  $\pi(x_3^1) = 1$ .

Comme  $\pi(x_2^1) = \pi(x_2^{k_2}) = 1$ , alors nous devons colorier des chaînes de longueur  $k_2$  qui est paire, avec au maximum 3 couleurs et  $\pi(x_2^1) = \pi(x_2^{k_2}) = 1$ . Ceci est impossible et par suite  $4 \leq \chi_b(Ch_{paire}^n)$ . D'où  $\chi_b(Ch_{paire}^n) = 4$ .

### 3.2.4 Chenille simple

Une *chenille simple* à  $n$  épines, notée  $Ch_{simple}^n$ , est une chenille où chaque sommet épine  $x_i$  est adjacent à exactement un seul sommet pendant  $y_i$ . Le code d'une chenille simple est  $C[Ch_{simple}^n] = [1^n]$ .

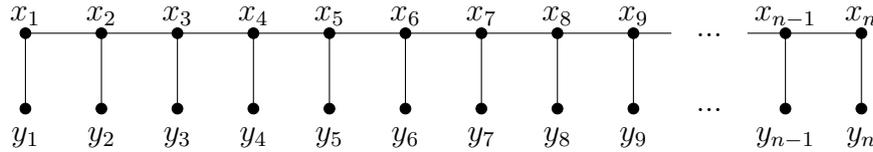


FIG. 3.23 – Chenille simple de longueur  $n$

**Remarque 3.1.** Comme  $Ch_{simple}(n)$  est la couronne d'une chaîne de longueur  $n$ , alors pour tout entier  $n, n \geq 11$ , on a :

$$\chi_b(Ch_{simple}^n) = \chi_b(Cr(P_n)) = 5.$$

Il n'est pas difficile de trouver que  $\chi_b(Ch_{simple}^n) = 3$  pour  $n \in \{2, 3\}$  et  $\chi_b(Ch_{simple}^n) = 4$  pour  $n \in \{4, \dots, 10\}$ .

### 3.2.5 Chenille double

Une *chenille double* à  $n$  épines, notée  $Ch_{double}^n$ , est une chenille où chaque sommet épine  $x_i$  est adjacent à exactement deux sommets pendants  $y_{i,1}, y_{i,2}$ . Le code d'une chenille double est  $C[Ch_{double}^n] = [2^n]$ .

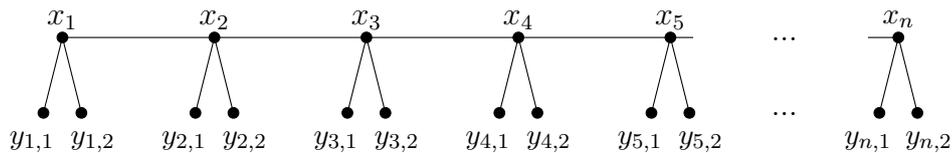


FIG. 3.24 – Chenille double de longueur  $n$

**Proposition 3.6.** *Pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 10$  on a :*

$$\chi_b(Ch_{double}^n) = 6.$$

Il n'est pas difficile de trouver que  $\chi_b(Ch_{double}^2) = 3$ ,  $\chi_b(Ch_{double}^n) = 4$  pour  $n \in \{3, 4\}$  et  $\chi_b(Ch_{double}^n) = 5$  pour  $n \in \{5, \dots, 9\}$ .

**Preuve.** *Considérons la coloration des sommets supports comme suit :*

$$1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 2 \ 5 \ 6 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5 : 1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 2 \ 5 \ 6 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5 : \dots$$

*Les sommets pendants sont coloriés selon la fonction  $\pi$  qui suit :*

*Si  $\pi(x_i) \neq 1$ , alors  $\pi(y_{i1}) = \pi(y_{i2}) = 1$ , et si  $\pi(x_i) = 1$  alors  $\pi(y_{i1}) = 6$  et  $\pi(y_{i2}) = 3$ .*

*Il s'agit bien d'une broadcast coloration, et l'inégalité  $\chi_b(Ch_{double}^n) \leq 6$  en découle.*

*Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, nous supposons que 5 couleurs suffisent pour colorier une chenille double de longueur supérieure ou égale à 11. Pour cela nous distinguons cinq cas suivant le choix de la couleur affectée à  $x_2$ .*

*Cas 1.  $\pi(x_2) = 1$ .*

*Si  $\pi(x_3) = 2$ , alors  $\{\pi(x_1), \pi(y_{21}), \pi(y_{22})\} = \{3, 4, 5\}$  et  $\pi(x_4) = 1$ . Par suite  $\pi(x_5) = \pi(y_{41}) = \pi(y_{42}) = 3$ . Contradiction.*

*Si  $\pi(x_3) = 3$ , alors  $\{\pi(x_1), \pi(y_{21}), \pi(y_{22})\} = \{2, 4, 5\}$  et  $\pi(x_4) \in \{1, 2\}$ . Si  $\pi(x_4) = 1$  (resp.  $\pi(x_4) = 2$ ), on obtient  $\pi(x_5) = \pi(y_{41}) = \pi(y_{42}) = 2$  (resp.  $\pi(x_5) = 1$  et  $\pi(x_6) = \pi(y_{51}) = \pi(y_{52}) = 4$ ). Contradiction.*

*Si  $\pi(x_3) = 4$ , alors  $\{\pi(x_1), \pi(y_{21}), \pi(y_{22})\} = \{3, 4, 5\}$  et  $\pi(x_4) \in \{1, 2\}$ . Dans le cas où  $\pi(x_4) = 1$ , alors  $\{\pi(x_5), \pi(y_{41}), \pi(y_{42})\} \subseteq \{2, 3\}$ . Contradiction. Dans le cas où  $\pi(x_4) = 2$ , alors soit  $\pi(x_5) = 1$  et par suite  $\pi(x_6) = \pi(y_{51}) = \pi(y_{52}) = 3$ , soit  $\pi(x_5) = 3$  et par suite  $\pi(x_6) = 1$  et  $\{\pi(x_7), \pi(y_{61}), \pi(y_{62})\} \subseteq \{2, 5\}$ . Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction.*

*Si  $\pi(x_3) = 5$ , alors  $x_1, y_{21}, y_{22} \in \{2, 3, 4\}$  et  $\pi(x_4) \in \{1, 2\}$ . Dans le cas où  $\pi(x_4) = 1$ , alors  $\{\pi(x_5), \pi(y_{41}), \pi(y_{42})\} \subseteq \{2, 3\}$ . Contradiction. Dans le cas où  $\pi(x_4) = 2$ , alors soit  $\pi(x_5) = 1$  et par suite  $\{\pi(x_6), \pi(y_{51}), \pi(y_{52})\} \subseteq \{2, 4\}$  ce qui est impossible, soit  $\pi(x_5) = 3$  et par suite  $\pi(x_6) \in \{1, 4\}$ . Dans le cas où  $\pi(x_6) = 1$ , alors*

$\{\pi(x_7), \pi(y_{61}), \pi(y_{62})\} \subseteq \{2, 4\}$  et si  $\pi(x_6) = 4$  alors soit  $\pi(x_7) = 1$  et par suite  $\pi(x_8) = \pi(y_{71}) = \pi(y_{72}) = 2$ , soit  $\pi(x_7) = 2$  et donc  $\pi(x_8) = 1$  et  $\pi(x_9) = \pi(y_{81}) = \pi(y_{82}) \in \{3, 5\}$ . Dans les deux cas on aboutit à une contradiction.

*Cas 2.*  $\pi(x_2) = 2$ .

On peut supposer, sans perte de généralité, que  $\pi(x_i) \neq 1$ , pour  $i \geq 2$ , puisque ce cas se ramène au cas 1.

Si  $\pi(x_3) = 3$ , alors  $\pi(x_4) \in \{4, 5\}$ . L'égalité  $\pi(x_4) = 4$ , implique  $\pi(x_5) \in \{2, 5\}$ . Dans le cas où  $\pi(x_5) = 2$  (resp.  $\pi(x_5) = 5$ ), alors  $\pi(x_6) = 5$ ,  $\pi(x_7) = 3$ ,  $\pi(x_8) = 2$  et  $\pi(x_9) = 4$  (resp.  $\pi(x_6) = 2$  et  $\pi(x_7) = 3$ ) et par conséquent  $\pi(x_{10}) \notin \{2, 3, 4, 5\}$  (resp.  $\pi(x_8) \notin \{2, 3, 4, 5\}$ ), ce qui est impossible. L'égalité  $\pi(x_4) = 5$  implique  $x_5 \in \{2, 4\}$ . Dans le cas où  $\pi(x_5) = 2$ , (resp.  $\pi(x_5) = 4$ ) alors  $\pi(x_6) = 4$ ,  $\pi(x_7) = 3$ ,  $\pi(x_8) = 2$  (resp.  $\pi(x_6) = 3$ ,  $\pi(x_7) = 3$ ) et par conséquent  $\pi(x_9) \notin \{2, 3, 4, 5\}$  (resp.  $\pi(x_8) \notin \{2, 3, 4, 5\}$ ), ce qui est impossible.

Si  $\pi(x_3) = 4$ , alors  $\pi(x_4) \in \{3, 4\}$ . Si  $\pi(x_4) = 3$ , on obtient  $\pi(x_5) \in \{2, 5\}$ . L'égalité  $\pi(x_5) = 2$ , (resp.  $\pi(x_5) = 5$ ), implique  $\pi(x_6) = 5$  (resp.  $\pi(x_6) = 2$ ) et par suite  $\pi(x_7) \notin \{2, 3, 4, 5\}$ , ce qui est impossible. Si  $\pi(x_4) = 5$ , on obtient  $x_5 \in \{2, 3\}$ . L'égalité  $\pi(x_5) = 2$ , (resp.  $\pi(x_5) = 3$ ) implique  $\pi(x_6) = 3$  (resp.  $\pi(x_6) = 2$ ) et par suite  $\pi(x_7) \notin \{2, 3, 4, 5\}$ . Ce qui est impossible.

Si  $\pi(x_3) = 5$  alors soit  $\pi(x_4) = 3$  et donc  $x_5 \in \{2, 4\}$ . Dans le cas où  $\pi(x_5) = 2$  (resp.  $\pi(x_5) = 4$ ) alors  $\pi(x_6) = 4$  (resp.  $\pi(x_6) = 2$ ) et par suite  $\pi(x_7) \notin \{2, 3, 4, 5\}$  (resp.  $\pi(x_7) \notin \{2, 3, 4, 5\}$ ), ce qui est impossible, soit  $\pi(x_4) = 4$  et donc  $x_5 \in \{2, 3\}$ . Dans le cas où  $\pi(x_5) = 2$  (resp.  $\pi(x_5) = 3$ ) alors  $\pi(x_6) = 3$  (resp.  $\pi(x_6) = 2$ ) et par suite  $\pi(x_7) \notin \{2, 3, 4, 5\}$  (resp.  $\pi(x_7) \notin \{2, 3, 4, 5\}$ ), ce qui est impossible.

*Cas 3.*  $\pi(x_2) = 3$ .

On peut supposer, sans perte de généralité, que  $\pi(x_i) \neq 1$  et  $\pi(x_i) \neq 2$ , pour  $i \geq 2$ , puisque ces deux cas se ramènent aux cas 1 et 2.

Si  $\pi(x_3) = 4$  (resp.  $\pi(x_3) = 5$ ), alors  $\pi(x_4) = 5$  (resp.  $\pi(x_4) = 4$ ) et donc  $\pi(x_5) \notin \{3, 4, 5\}$ . Contradiction.

*Cas 4.*  $\pi(x_2) = 4$ .

$\pi(x_2) = 4$  implique  $\pi(x_3) = 5$  et donc  $\pi(x_4) \in \{1, 2, 3\}$ . Ce cas est aussi impossible puisque l'étude de chacune des cas  $\pi(x_4) = 1$ ,  $\pi(x_4) = 2$  et  $\pi(x_4) = 3$  se ramène aux cas 1, Cas 2 ou Cas 3 précédemment étudiés.

Cas 5.  $\pi(x_2) = 5$ .

L'égalité  $\pi(x_2) = 5$  implique  $\pi(x_3) \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Ce cas est aussi impossible puisque l'étude de chacun des cas  $\pi(x_3) = 1$ ,  $\pi(x_3) = 2$ ,  $\pi(x_3) = 3$  et  $\pi(x_3) = 4$  se ramène aux Cas 1, Cas 2, Cas 3 ou Cas 4 précédemment étudiés.

### 3.2.6 Chenille triple

Une chenille triple à  $n$  épines,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , notée  $Ch_{triple}^n$ , est une chenille où chaque sommet épine  $x_i$  est adjacent à exactement trois sommets pendants. Le code d'une chenille triple est  $C[Ch_{triple}^n] = [3^n]$ .

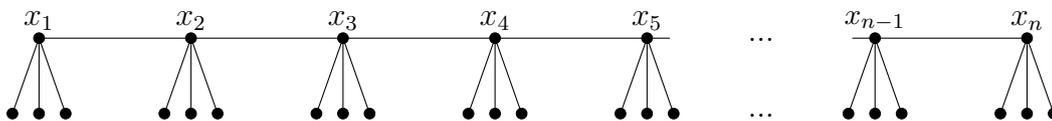


FIG. 3.25 – Chenille triple de longueur  $n$

**Proposition 3.7.** *Pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 10$ , on a :*

$$\chi_b(Ch_{triple}^n) = 6.$$

On peut vérifier que  $\chi_b(Ch_{triple}^2) = 3$ ,  $\chi_b(Ch_{triple}^n) = 4$  pour  $n \in \{3, 4\}$ ,  $\chi_b(Ch_{triple}^n) = 5$  pour  $n \in \{5, \dots, 9\}$  et  $\chi_b(Ch_{triple}^n) = 6$  pour  $n \geq 9$ .

**Preuve.** *Considérons la coloration périodique suivante :*

*Aux sommets supports, nous affectons les couleurs*

1 5 2 3 4 2 6 3 2 5 4 2 3 6 2 4 3 2 5 1 6 2 3 4 2 5 3 2 6 4 2 3 5 2 4 3 2 6 : 1 5 2 3  
4 2 6 3 2 5 4 2 3 6 2 4 3 2 5 1 6 2 3 4 2 5 3 2 6 4 2 3 5 2 4 3 2 6 : ...

*Pour les sommets pendants, on procède comme suit :*

Si  $\pi(x_i) \neq 1$ , alors  $\pi(y_{i1}) = \pi(y_{i2}) = \pi(y_{i3}) = 1$ , et si  $\pi(x_i) = 1$ , alors  $\pi(y_{i1}) = 2$ ,  $\pi(y_{i2}) = 3$  et  $\pi(y_{i3}) = 4$ .

Il s'agit bien d'une broadcast coloration, donc nous obtenons l'inégalité  $\chi_b(Ch_{triple}^n) \leq 6$ . Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, il suffit de remarquer que  $Ch_{double}^n$  est un sous graphe induit de  $Ch_{triple}^n$  pour  $n \geq 10$ . Pour  $n = 9$ , on peut étudier toutes les colorations possibles pour conclure que  $\chi_b(Ch_{triple}^9) = 6$ . D'où le résultat.

### 3.2.7 Chenille quadruple

Une chenille quadruple à  $n$  épines,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , notée  $Ch_{quadruple}^n$ , est une chenille où chaque sommet épine  $x_i$  est adjacent à exactement quatre sommets pendants. Le code d'une chenille quadruple est  $C[Ch_{quadruple}^n] = [4^n]$ .

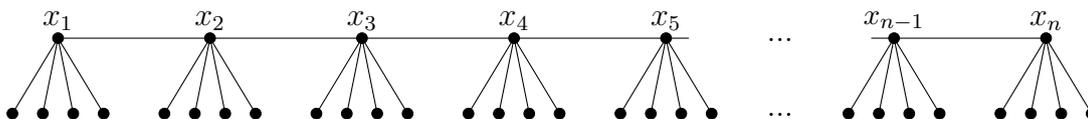


FIG. 3.26 – Chenille quadruple de longueur  $n$

**Proposition 3.8.** Pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 35$ , on a :

$$\chi_b(Ch_{quadruple}^n) = 7.$$

On peut vérifier que  $\chi_b(Ch_{quadruple}^2) = 3$ ,  $\chi_b(Ch_{quadruple}^n) = 4$  pour  $n \in \{3, 4, 5\}$ ,  $\chi_b(Ch_{quadruple}^n) = 5$  pour  $n \in \{6, 7, 8\}$  et  $\chi_b(Ch_{quadruple}^n) = 6$  pour  $n \in \{9, \dots, 34\}$ .

**Preuve.** Considérons la coloration périodique suivante :

Aux sommets supports, nous affectons les couleurs

7 3 2 4 5 2 3 6 2 4 3 2 5 7 2 3 4 2 5 3 2 4 6 2 3 5 2 4 3 2 6 5 2 3 4 2 : 7 3 2 4 5 2  
 3 6 2 4 3 2 5 7 2 3 4 2 5 3 2 4 6 2 3 5 2 4 3 2 6 5 2 3 4 2 : ...

Et aux sommets pendants, nous affectons la couleur 1.

Il s'agit bien d'une broadcast coloration, donc nous obtenons l'inégalité  $\chi_b(Ch_{quadruple}^n) \leq 7$ .

Montrons l'inégalité dans l'autre sens et supposons que 6 couleurs suffisent pour colorier une chenille quadruple de longueur supérieure ou égale à 35. Notons que pour tout  $x_i$ ,  $i \geq 35$ ,  $\pi(x_i) \neq 1$  car sinon les 6 voisins de  $x_i$  auraient 6 couleurs différentes choisies dans  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$  et ceci est impossible.

*Cas 1.*  $\pi(x_2) = 6$  et  $\pi(x_3) = 5$

Ce cas signifie que  $\pi(x_4) \in \{2, 3, 4\}$ . Si  $\pi(x_4) = 2$ , alors  $\{\pi(x_5), \pi(x_6)\} = \{3, 4\}$  et  $\pi(x_7) = 2$ . Si  $\pi(x_4) = 3$ , alors  $\{\pi(x_6), \pi(x_7)\} = \{2, 4\}$  et si  $\pi(x_4) = 4$ , alors  $\{\pi(x_6), \pi(x_7)\} = \{2, 3\}$ . Pour chacun des cas, il est impossible d'avoir une coloration pour le sommet support suivant.

*Cas 2.*  $\pi(x_2) = 6$  et  $\pi(x_3) = 4$

Ce cas signifie que  $\pi(x_4) \in \{2, 3, 5\}$ . Notons par  $C$  la sous chaîne de l'épine dorsale qui commence par  $x_2$ .

Si  $\pi(x_4) = 5$  (resp.  $\pi(x_4) = 3$ ), alors  $\{\pi(x_5), \pi(x_6)\} = \{2, 3\}$  (resp.  $\{\pi(x_5), \pi(x_6)\} = \{2, 5\}$ ) et par suite le sommet support  $x_7$  ne peut être affecté d'aucune couleur.

Si  $\pi(x_4) = 2$ , alors les seules possibilités de coloration pour la chaîne  $C$  sont données par (en respectant l'ordre des sommets supports dans la chaîne) :

**2.1)** 6 4 2 3 5 2 4 3 2 6 5 et on se ramène au Cas 1.

**2.2)** 6 4 2 3 5 2 4 3 6 2 5 3 (resp. 6 4 2 3 5 2 4 3 6 2 5 4) qui implique  $\{\pi(x_{14}), \pi(x_{15})\} = \{2, 4\}$  (resp.  $\{\pi(x_{14}), \pi(x_{15})\} = \{2, 3\}$ ) et donc pas de couleurs possibles pour  $x_{16}$ .

**2.3)** 6 4 2 3 5 2 4 6 3 2 5 4 2 3 6 2 5 et on se ramène à 2.2).

**2.4)** 6 4 2 3 5 2 4 6 2 3 5 2 4 3 2 6 5 et on se ramène au Cas 1.

**2.5)** 6 4 2 3 5 2 4 6 2 3 5 4 2 3 6 2 5 et on se ramène à 2.2).

**2.6)** 6 4 2 3 5 2 4 6 2 3 5 4 2 3 6 2 4 et donc  $\pi(x_{19}) = 3$  ou  $\pi(x_{19}) = 5$  et  $\{\pi(x_{20}), \pi(x_{21})\} = \{2, 5\}$  ou  $\{\pi(x_{20}), \pi(x_{21})\} = \{2, 3\}$  et donc pas de couleurs possibles pour  $x_{22}$ .

*Cas 3.*  $\pi(x_2) = 6$  et  $\pi(x_3) = 3$

Ce cas signifie que  $\pi(x_4) \in \{2, 4, 5\}$ . Si  $\pi(x_4) = 5$ , alors soit  $\pi(x_5) = 2$  et  $\pi(x_6) = 4$  et donc  $\pi(x_7) = 3$ ,  $\pi(x_8) = 2$ ,  $\pi(x_9) = 6$  et  $\pi(x_{10}) = 5$ , et on se ramène au Cas 1, soit  $\pi(x_5) = 4$ ,  $\pi(x_6) = 2$  et  $\pi(x_7) = 3$ , et impossible d'avoir une coloration pour le sommet support  $\pi(x_8)$ . Si  $\pi(x_4) = 2$ , alors les seules possibilités de coloration pour la chaîne  $C$  sont données par (en respectant l'ordre des sommets supports dans la chaîne) :

**3.1)** 6 3 2 5 4 3 2 6 et donc pas de couleur possible pour  $x_{10}$ .

**3.2)** 6 3 2 5 4 2 3 6 2 et donc  $\pi(x_{11}) \in \{4, 5\}$  et on se ramène à 2.2) ou 2.6).

**3.3)** 6 3 2 4 5 3 6 4 et on se ramène au Cas 2.

**3.4)** 6 3 2 4 5 2 3 6 et  $\pi(x_{11}) = 4$  (resp.  $\pi(x_{11}) = 2$  et  $\pi(x_{12}) = 4$ ) et on se ramène au Cas 2 (resp. à 2.6)).

Si  $\pi(x_4) = 4$ , alors soit  $\pi(x_5) = 5$ ,  $\pi(x_6) = 2$  et  $\pi(x_8) = 3$ , soit  $\pi(x_5) = 2$ ,  $\pi(x_6) = 5$ ,  $\pi(x_7) = 3$ ,  $\pi(x_8) = 2$  et donc  $\pi(x_9) \in \{4, 6\}$ . Si  $\pi(x_9) = 6$ , on a  $\pi(x_{10}) = 4$ , alors on se ramène au Cas 2. Si  $\pi(x_9) = 4$ , alors  $\pi(x_{10}) = 6$  et les seules possibilités de coloration pour la chaîne  $C$  données par (en respectant l'ordre des sommets supports dans la chaîne) :

**3.5)** 6 3 4 2 5 3 2 4 6 3 5 2 4 3 2 6 5 et on se ramène au Cas 1).

**3.6)** 6 3 4 2 5 3 2 4 6 2 5 et on se ramène à 2.2).

**3.7)** 6 3 4 2 5 3 2 4 6 3 2 5 4 et donc  $\pi(x_{15}) \in \{2, 3\}$ . Si  $\pi(x_{15}) = 2$ , alors  $\pi(x_{16}) = 3$ ,  $\pi(x_{17}) = 6$ ,  $\pi(x_{18}) = 2$  et  $\pi(x_{19}) \in \{4, 5\}$  et on se ramène à 2.2) ou à 2.6).

**3.8)** 6 3 4 2 5 3 2 4 6 2 3 5 et donc  $\pi(x_{14}) \in \{2, 4\}$ . Si  $\pi(x_{14}) = 2$  alors  $\pi(x_{15}) = 4$ ,  $\pi(x_{16}) = 3$  et  $\pi(x_{17}) \in \{2, 6\}$ .  $\pi(x_{17}) = 2$  implique  $\pi(x_{18}) = 6$  et  $\pi(x_{19}) = 5$  et on se ramène au Cas 1.  $\pi(x_{17}) = 6$  implique  $\pi(x_{18}) = 2$  et  $\pi(x_{19}) = 5$  et on se ramène au cas 2.2). (resp.  $\pi(x_{11}) = 2$  et  $\pi(x_{12}) = 4$ ) et on se ramène au Cas 2 (resp. à 2.6)).

Cas 4.  $\pi(x_2) = 6$  et  $\pi(x_3) = 2$

Ce cas signifie que  $\pi(x_4) \in \{3, 4, 5\}$ .  $\pi(x_4) = 5$  (resp.  $\pi(x_4) = 4$ ), se ramène à 2.2) (resp. à 2.6)). Si  $\pi(x_4) = 3$ , alors les seules possibilités de coloration pour la chaîne  $C$  sont données par (en respectant l'ordre des sommets supports dans la chaîne) :

- 4.1)**  $6\ 2\ 3\ 5\ 2\ 4\ 3\ 2\ 6\ 5$  (resp.  $6\ 2\ 3\ 5\ 2\ 4\ 3\ 6\ 2\ 5$ ) et on se ramène au Cas 1 (resp. à 2.2)).
- 4.2)**  $6\ 2\ 3\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6\ 2\ 4$  (resp.  $6\ 2\ 3\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6\ 4$ ) et on se ramène à 2.6) (resp. au Cas 2).
- 4.3)**  $6\ 2\ 3\ 4\ 2\ 3\ 6$  qui implique soit  $\pi(x_{10}) = 2$  et  $\pi(x_{11}) = 4$ , qui se ramène à 2.6), soit  $\pi(x_{10}) = 4$ , qui se ramène au Cas 2.
- 4.4)**  $6\ 2\ 3\ 4\ 2\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4$  et on se ramène au Cas 2.
- 4.5)**  $6\ 2\ 3\ 4\ 2\ 5\ 3\ 2\ 4\ 6\ 3$  et on se ramène au Cas 3.
- 4.6)**  $6\ 2\ 3\ 4\ 2\ 5\ 3\ 2\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5\ 4\ 2\ 3\ 6\ 2$  ceci implique  $\pi(x_{20}) \in \{4, 5\}$  et on se ramène à 2.2) ou 2.6).
- 4.7)**  $6\ 2\ 3\ 4\ 2\ 5\ 3\ 2\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5\ 2\ 4\ 3$  ceci implique  $\pi(x_{18}) \in \{2, 6\}$  et on se ramène au Cas 1. ou 2.2).

Cas 5.  $\pi(x_2) = 5$

Ce cas signifie  $\pi(x_3) \in \{2, 3, 4, 6\}$ . Si  $\pi(x_3) = 6$ , alors  $\pi(x_4) \in \{2, 3, 4\}$  et on se ramène au Cas 1, Cas 2 ou Cas 3. Si  $\pi(x_3) = 4$ , alors soit  $\pi(x_4) = 6$  et  $\pi(x_5) \in \{2, 3\}$  et on se ramène au Cas 3 ou 4, soit  $\pi(x_4) = 3$  et  $\{\pi(x_5), \pi(x_6)\} = \{2, 6\}$  et donc pas de couleur possible pour  $x_7$ , soit  $\pi(x_4) = 2$  et  $(\pi(x_5), \pi(x_6), \pi(x_7)) = (3, 6, 2)$  (resp.  $(x_5, x_6) = (6, 3)$ ) et on se ramène au Cas 4 (resp. Cas 3).

Si  $\pi(x_3) = 3$ , alors  $\pi(x_4) \in \{2, 4, 6\}$ . Si  $\pi(x_4) = 6$ , alors  $\pi(x_5) \in \{2, 4\}$  et on se ramène au Cas 2 ou Cas 4. Si  $\pi(x_4) = 4$  (resp.  $\pi(x_4) = 2$ ), alors  $\pi(x_5) \in \{2, 6\}$  (resp.  $\pi(x_5) \in \{4, 6\}$ ).  $\pi(x_5) = 2$  (resp.  $\pi(x_5) = 4$ ) implique  $\pi(x_6) = 6$  et  $\pi(x_7) = 3$  (resp.  $\pi(x_6) = 6$  et  $\pi(x_7) \in \{2, 3\}$ ) et on se ramène au Cas 3 (resp. au Cas 4).  $\pi(x_5) = 6$  implique soit  $\pi(x_6) = 2$  et on se ramène au Cas 4, soit  $\pi(x_6) = 4$  et on se ramène au Cas 2.

Si  $\pi(x_3) = 2$  alors  $\pi(x_4) \in \{3, 4, 6\}$ . Si  $\pi(x_4) = 6$  alors  $\pi(x_5) \in \{3, 4\}$ , et on se ramène au Cas 2 ou Cas 3. Si  $\pi(x_4) = 4$  alors  $\pi(x_5) \in \{3, 6\}$ .  $\pi(x_5) = 6$  implique  $\pi(x_6) \in \{2, 3\}$  qui on se ramène au Cas 3 ou Cas 4, si  $\pi(x_5) = 3$  alors  $\pi(x_6) = 6$  et  $\pi(x_7) = 2$  (resp.  $\pi(x_6) = 2$ ,  $\pi(x_7) = 6$  et  $\pi(x_8) = 5$ ) et on se ramène au Cas 4 (resp. au Cas 1). Si  $\pi(x_4) = 3$  alors  $\pi(x_5) \in \{4, 6\}$ .  $\pi(x_5) = 6$  implique  $\pi(x_6) \in \{2, 4\}$  qui se ramène au Cas 2 ou Cas 4 et  $\pi(x_5) = 4$  implique  $\pi(x_6) = 6$  et  $\pi(x_7) = 2$  (resp.  $\pi(x_6) = 2$ ,  $\pi(x_7) = 6$

et  $\pi(x_8) \in \{3, 5\}$ ) et on se ramène au Cas 4 (resp. au Cas 1 ou au Cas 3).

Cas 6.  $\pi(x_2) = 4$

Ce cas signifie  $\pi(x_3) \in \{2, 3, 5, 6\}$ . L'égalité  $\pi(x_3) = 6$  (resp.  $\pi(x_3) = 5$ ) implique  $\pi(x_4) \in \{2, 3, 5\}$  (resp.  $\pi(x_4) \in \{2, 3, 6\}$ ) qui se ramène au Cas 1, Cas 3 ou Cas 4 (resp. au Cas 5). L'égalité  $\pi(x_3) = 3$  implique soit  $\pi(x_4) = 2$  et  $\pi(x_5) \in \{5, 6\}$  qui se ramène au Cas 1, ..., Cas 5, soit  $\pi(x_4) = 5$  (resp.  $\pi(x_4) = 6$ ) et  $\pi(x_5) \in \{2, 6\}$  (resp.  $\pi(x_5) \in \{2, 5\}$ ). Si  $\pi(x_5) = 2$  (resp.  $\pi(x_5) = 5$ ), alors  $\pi(x_6) = 6$  et  $\pi(x_7) \in \{3, 4\}$  et on se ramène au Cas 2 ou Cas 3 (resp. au Cas 4), et par suite  $\pi(x_5) = 6$  et  $\pi(x_6) = 2$  (resp.  $\pi(x_5) = 5$ ) et on se ramène au Cas 4 (resp. au Cas 1). L'égalité  $\pi(x_3) = 2$  implique soit  $\pi(x_4) = 6$  et  $\pi(x_5) \in \{3, 5\}$  qui se ramène au Cas 1 ou Cas 3, soit  $\pi(x_4) = 5$  et  $\pi(x_5) \in \{3, 6\}$  qui se ramène au Cas 5, soit  $\pi(x_4) = 3$  et  $\pi(x_5) \in \{5, 6\}$ . Si  $\pi(x_5) = 5$  alors  $\pi(x_6) \in \{2, 6\}$  qui se ramène au Cas 5 et si  $\pi(x_5) = 6$  alors  $\pi(x_6) \in \{2, 5\}$  et on se ramène au Cas 1 ou Cas 4.

Cas 7.  $\pi(x_2) = 3$

Ce cas signifie  $\pi(x_3) \in \{2, 4, 5, 6\}$ . Si  $\pi(x_3) = 6$  alors  $\pi(x_4) \in \{2, 4, 5\}$  et on se ramène au Cas 1, Cas 2 ou Cas 4. Si  $\pi(x_3) = 5$  alors  $\pi(x_4) \in \{2, 4, 6\}$  qui se ramène au Cas 5. Si  $\pi(x_3) = 4$  alors  $\pi(x_4) \in \{2, 5, 6\}$  et on se ramène au cas 6. Si  $\pi(x_3) = 2$  alors soit  $\pi(x_4) = 4$  et  $\pi(x_5) \in \{5, 6\}$  et on se ramène au Cas 6, soit  $\pi(x_4) = 5$  et  $\pi(x_5) \in \{4, 6\}$  et on se ramène au Cas 5, soit  $\pi(x_4) = 6$  et  $\pi(x_5) \in \{4, 5\}$  et on se ramène au Cas 2.

Cas 8.  $\pi(x_2) = 2$

Ce cas se ramène aux Cas 1, ..., Cas 7 précédemment étudiés.

### 3.2.8 Chenille infinie

Une chenille infinie à  $n$  épines,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , notée  $Ch_{infinie}^n$ , est une chenille où chaque sommet épine  $x_i$  est adjacent à au moins quatre sommets pendants. Le code d'une chenille quadruple est  $C[Ch_{infinie}^n] = [l_1, \dots, l_n]$  avec  $l_i \geq 4$ .

**Proposition 3.9.** *Pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 35$  on a :*

$$\chi_b(Ch_{infinie}^n) = 7.$$

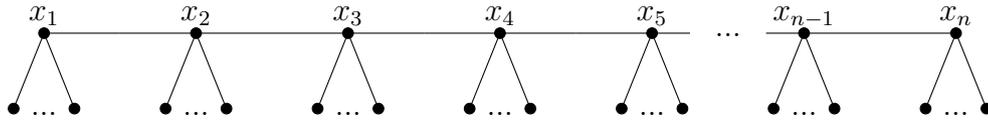


FIG. 3.27 – Chenille infinie de longueur  $n$

On peut vérifier que  $\chi_b(Ch_{infinie}^2) = 3$ ,  $\chi_b(Ch_{infinie}^n) = 4$  pour  $n \in \{3, 4, 5\}$ ,  $\chi_b(Ch_{infinie}^n) = 5$  pour  $n \in \{6, 7, 8\}$  et  $\chi_b(Ch_{infinie}^n) = 6$  pour  $n \in \{9, \dots, 34\}$ .

**Preuve.** *Considérons la coloration périodique suivante :*

*Aux sommets supports, nous affectons les couleurs*

7 3 2 4 5 2 3 6 2 4 3 2 5 7 2 3 4 2 5 3 2 4 6 2 3 5 2 4 3 2 6 5 2 3 4 2 : 7 3 2 4 5 2  
 3 6 2 4 3 2 5 7 2 3 4 2 5 3 2 4 6 2 3 5 2 4 3 2 6 5 2 3 4 2 : ...

*aux sommets pendants, nous affectons la couleur 1.*

*Il s'agit bien d'une broadcast coloration, donc nous obtenons l'inégalité  $\chi_b(Ch_{infinie}^n) \leq 7$ . Pour l'inégalité dans l'autre sens, il suffit de remarquer que  $Ch_{quadruple}^n$  est un sous graphe induit de  $Ch_{infinie}^n$ . Donc  $7 = \chi_b(Ch_{quadruple}^n) \leq \chi_b(Ch_{infinie}^n)$ .*

### 3.2.9 Chenille quelconque

**Théorème 3.1.** *Pour tout chenille  $Ch$ , on a :*

$$\chi_b(Ch) \leq 7.$$

**Preuve.** *Toute chenille  $Ch$  est une sous chenille de la chenille infinie, donc,  $\chi_b(Ch) \leq 7$ .*

# Chapitre 4

## Nombre broadcast chromatique des grilles

Le nombre broadcast chromatique des grilles  $\chi_b(G_{m \times n})$  a été introduit par Goddard et al. en 2008 [14]. Pour des cas particuliers des couples  $(m, n)$ , ils ont déterminé soit des valeurs exactes soit des bornes pour  $\chi_b(G_{m,n})$ . Dans ce chapitre, nous élaborons trois algorithmes qui nous permettent d'améliorer plusieurs bornes supérieures prouvées par ces auteurs et aussi de trouver des valeurs exactes ou des bornes supérieures pour des cas non étudiés dans [14].

### 4.1 Résultats de Goddard et al. sur les grilles

Goddard et al. [14] ont déterminé soit des valeurs exacte de  $\chi_b(G_{m \times n})$  pour  $m \in \{2, \dots, 5\}$  et  $n$  quelconque, soit des bornes supérieures  $\chi_b(G_{m \times n})$  pour  $m = 6$  ou  $m = 7$  et  $n \in \{6, \dots, 16\}$ .

m/n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
2	2	4	4	4	5	...						
3		4	5	5	6	6	6	6	6	6	7	...
4			5	7	7	7	7	7	8	...		
5				7	7	7	8	8	9	...		

TAB. 4.1 – Valeurs exactes de  $\chi_b(G_{m \times n})$  trouvées par Goddard et al. [14]

m/n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6	8	9	9	9	9	9	10	10	10	11	11
7		9	9	10	10	11	11	11	11	12	12

TAB. 4.2 – Bornes supérieures de  $\chi_b(G_{m \times n})$  trouvées par Goddard et al. [14]

**Théorème 4.1.** [14] *Pour toute grille  $G_{m,n}$ ,  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq 23$ .*

## 4.2 Algorithme Valeur Exacte

Nous allons présenter un algorithme qui utilise l’exploration en profondeur pour obtenir une broadcast coloration d’une grille donnée  $G_{m \times n}$  en fixant le nombre de couleur  $k$ . L’algorithme s’arrêtera si une broadcast coloration est trouvée avec  $k$  couleurs. Si ce n’est pas le cas, il continu à explorer toutes les colorations possibles pour montrer que le nombre de couleur  $k$  est insuffisant.

### 4.2.1 Présentation des entrées (données)

$m$  : Nombre de lignes de la grille.

$n$  : Nombre de colonnes de la grille.

$k$  : Le nombre de couleur supposé suffisant pour colorier la grille de taille  $m \times n$ .

### 4.2.2 Présentation des sorties (Résultats)

Si nous arrivons jusqu’au sommet final de la grille avec une broadcast coloration possible alors l’algorithme s’arrête et affiche ” **le nombre  $k$  est suffisant pour colorier toute la grille** ” puis donne la broadcast coloration.

Sinon, il affiche ”**le nombre  $k$  n’est pas suffisant pour colorier toute la grille**”.

### 4.2.3 Enoncé de l’algorithme

Cet algorithme utilise trois fonctions, la fonction ”Test” permet de vérifier si un sommet donné  $(i, j)$  peut prendre la couleur  $k$ , et cela est possible si la boule de centre

$(i, j)$  et de rayon  $k$  ne contient pas la couleur  $k$ , la fonction "Avance" comme l'indique son nom, permet de passer d'un sommet à un autre et la fonction "Reculer" fonctionne dans le sens inverse de la fonction "Avance".

---

**Algorithm 1** Valeur Exacte
 

---

1 : *données* :

- La taille de la grille ;
- Le nombre de couleur  $k$  à tester ;

2 : *Initiation* :

- Se pointer sur le sommet  $(1,1)$  ;
- Affecter la couleur 1 au sommet  $(1,1)$  ;
- couleur :=1 ;

3 : **Tant que** (toute la grille n'est pas entièrement coloriée) **ou**  
 (toutes les colorations ne sont pas encore testées) **faire**

4 :       Tester les conditions de broadcast coloration

5 :       **Tant que** (Test=faux) et (couleur < k) **faire**

6 :             augmenter la couleur du sommet ;

7 :             Refaire le teste ;

**Fin tant que**

8 :       **Si** (Test=vrai) et (couleur < k) **alors**

9 :             Avancer : passer à un autre sommet ;

**Fin si**

10 :       **Si** (Test=faux) et (couleur=k) **alors**

11 :             Effacer la couleur du sommet ;

12 :             Reculer : revenir au sommet précédent ;

**Fin si**

**Fin Tant que**

13 : **Si** (Tous les sommets de la grille sont coloriés) **alors**

14 :       **Afficher** "L'ordre  $k$  est suffisant pour colorier cette grille"

15 :       **Afficher la coloration trouvé**

**Fin si**

16 : **Si** (Toutes les colorations sont testées sans arriver à une broadcast coloration) **alors**

17 :       **Afficher** "Le nombre  $k$  n'est pas suffisant pour colorier cette grille"

**Fin si**

---

les résultats obtenus par cet algorithme et par les algorithmes qui suivent proviennent d'un ordinateur de processeur : Intel(R) Core(TM)2Duo CPU T7250 2.00GHz 2.00Ghz

En exécutant algorithme précédent, nous remarquons que le temps d'exécution croît très rapidement et qu'à partir de  $(m, n) = (7, 10)$ , il nous a été impossible de l'exécuter.

Il est évident que l'algorithme est de complexité exponentielle, puisqu'au pire des cas, il explore toutes les colorations possibles pour dire que le nombre  $k$  est insuffisant pour colorier une grille de taille  $m \times n$  en respectant les conditions d'une broadcast coloration. Nous avons  $m \times n$  sommets et chaque sommet peut prendre  $k$  couleurs c.à.d. nous aurons  $k^{m \times n}$  cas possibles. Ainsi nous le déroulons que pour des petites valeurs de  $m$  et  $n$ .

Commençons par donner la valeur exacte du nombre broadcast chromatique des grilles  $G_{m,n}$  pour  $m \leq 5$  et  $n$  quelconque, et pour quelques couples où  $m \in \{6, 7\}$ .

**Proposition 4.1.** *On a :*

$$\chi_b(G_{m \times n}) = \begin{cases} 5 & \text{si } m = 2 \text{ et } n \geq 6 ; \\ 7 & \text{si } m = 3 \text{ et } n \geq 12 ; \\ 8 & \text{si } m = 4 \text{ et } n \geq 10 ; \\ 9 & \text{si } m = 5 \text{ et } n \geq 10 ; \end{cases}$$

Le tableau TAB 4.1 regroupe les résultats établis dans la Proposition 4.1 complété par les autres valeurs exactes de  $\chi_b(G_{m \times n})$  en utilisant l'Algorithme Valeur Exacte.

**Preuve.** *Déterminons une borne supérieure pour  $\chi_b(G_{m \times n})$  lorsque  $m \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Considérons les broadcasts colorations périodiques suivantes pour  $m = 2$  et  $n \geq 6$ ,  $m = 3$  et  $n \geq 12$ ,  $m = 4$  et  $n \geq 10$  et pour  $m = 5$  et  $n \geq 10$ .*

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
2	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	...
3		4	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	...
4			5	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	...
5				7	7	7	8	8	9	9	9	9	9	9	...
6					9	9	9	9	9						
7						9	9								

TAB. 4.3 – Valeurs exactes de  $\chi_b(G_{m \times n})$

1	2	1	3	1	5	1	2	1	3	1	5	...
3	1	4	1	2	1	3	1	4	1	2	1	...

FIG. 4.1 – Broadcast coloration de  $G_{2 \times n}$

1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	...	
4	1	5	1	6	1	4	1	5	1	7	1	4	1	5	1	7	...
1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	...	

FIG. 4.2 – Broadcast coloration de  $G_{3 \times n}$

1	3	1	2	1	3	1	2	1	7	1	3	1	2	1	7	...
2	1	5	1	6	1	4	1	3	1	2	1	5	1	6	1	...
1	4	1	3	1	2	1	5	1	8	1	4	1	3	1	8	...
3	1	2	1	7	1	3	1	2	1	3	1	2	1	7	1	...

FIG. 4.3 – Broadcast coloration de  $G_{4 \times n}$

1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	...
4	1	6	1	5	1	8	1	4	1	6	1	5	1	9	1	...
1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	...
5	1	7	1	4	1	9	1	5	1	7	1	4	1	8	1	...
1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	...

FIG. 4.4 – Broadcast coloration de  $G_{5 \times n}$

A partir des colorations ci-dessus nous déduisons les bornes supérieures suivantes :

$$\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 5 & \text{si } m = 2 \text{ et } n \geq 6; \\ 7 & \text{si } m = 3 \text{ et } n \geq 12; \\ 8 & \text{si } m = 4 \text{ et } n \geq 10; \\ 9 & \text{si } m = 5 \text{ et } n \geq 10. \end{cases}$$

En exécutant l'Algorithme Valeur Exacte pour  $m = 2$ ,  $n = 6$  et  $k = 4$ , il affiche "le nombre "4" est insuffisant pour colorier la grille  $G_{2,6}$ " et donc  $5 \leq \chi_b(G_{2,6})$ . Comme  $G_{2,6}$  est un sous graphe induit de  $G_{2,n}$ ,  $n \geq 6$ , on obtient  $5 \leq \chi_b(G_{2,n})$ . D'où le résultat. Le même raisonnement est valable pour prouver que  $\chi_b(G_{3,n}) = 7$ ,  $\chi_b(G_{4,n}) = 8$  et  $\chi_b(G_{5,n}) = 9$ .

### 4.3 Algorithme Borne Sup 1

Toutes les colorations optimales déjà obtenues, utilisent la couleur 1 alternativement, donc nous avons pensé à réduire le nombre d'exécutions de l'algorithme précédent en commençant par colorier les sommets de la grille avec la couleur 1 lorsque cela est possible, donc on pose :

$$\begin{cases} \pi(i, j) = 1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont de même parité,} \\ \pi(i, j) \neq 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ce nouvel algorithme explore  $(k - 1)^{\lfloor \frac{m \times n}{2} \rfloor}$  cas au lieu de  $k^{m \times n}$ . C'est aussi un algorithme exponentiel, mais nous ne pouvons pas dire qu'il donne le nombre broadcast chromatique. Ainsi, les résultats obtenus sont considérés comme des bornes supérieures qui nous paraissent bonnes vues qu'elles sont les mêmes que celles obtenus par l'algorithme Valeur Exacte.

#### 4.3.1 Principe de l'algorithme

Nous avons modifié l'algorithme **valeur exacte** en commençant par fixer la couleur des sommets  $(i, j)$  tel que  $i$  et  $j$  sont de même parité (nous affectons pour ces sommets

la couleur 1) puis en explorant en profondeur les autres sommets de la grille sans passer par les sommets de couleur 1. Soit nous arrivons à une broadcast coloration possible soit nous explorons toutes les colorations possibles pour montrer que le nombre de couleur est insuffisant.

### 4.3.2 Enoncé de l'algorithme

---

**Algorithm 2** Borne Sup 1

---

1 : *données* :

- La taille de la grille ;
- Le nombre de couleur  $k$  à tester ;

2 : *Initiation* :

- **Pour**  $i=1$  à  $m$  **faire**

- pour**  $j=1$  à  $n$  **faire**

- si** ( $i$  et  $j$  sont de même parité) **alors**

- $\pi(i, j) = 1$  ;

- fin** **si**

- fin** **pour**

- fin** **pour**

- Affecter la couleur 2 au sommet (2,1) ;

- couleur :=2 ;

3 : **Tant que** (toute la grille n'est pas entièrement coloriée) **ou**

(toutes les colorations ne sont pas encore testées) **faire**

4 : Tester les conditions de broadcast coloration

5 : **Tant que** (Test=faux) et (couleur < k) **faire**

6 :     augmenter la couleur du sommet ;

7 :     Refaire le test ;

**Fin tant que**

8 : **Si** (Test=vrai) et (couleur < k) **alors**

9 :     Avancer : passer à un autre sommet ;

**Fin si**

10 : **Si** (Test=faux) et (couleur=k) **alors**

11 :     Effacer la couleur du sommet ;

12 :     Reculer : revenir au sommet précédent ;

**Fin si**

**Fin Tant que**

13 : **Si** (Tous les sommets de la grille sont coloriés) **alors**14 :     **Afficher** "L'ordre  $k$  est suffisant pour colorier cette grille"15 :     **Afficher la coloration trouvé**

**Fin si**

16 : **Si** (Toutes les colorations sont testées sans arriver à une broadcast coloration) **alors**17 :     **Afficher** "Le nombre  $k$  n'est pas suffisant pour colorier cette grille"

**Fin si**

---

**Proposition 4.2.** *On a :*

$$\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 10 & \text{pour } m = 6 \text{ et } n \geq 12; \\ 11 & \text{pour } m = 7 \text{ et } 15 \leq n \leq 28; \\ 12 & \text{pour } m = 7 \text{ et } n \geq 29; \\ 12 & \text{pour } m = 8 \text{ et } n \geq 28. \end{cases}$$

Le Tableau TAB 4.2 regroupe les résultats établis dans la Proposition 4.2 complété par les autres valeurs de  $\chi_b(G_{m \times n})$  trouvées en utilisant l’Algorithme Borne Sup 1.

m \ n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...	27	28	29	...
6	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10*	10*	<u>10</u>	...	<u>10</u>	<u>10</u>	<u>10</u>	...
7		9	9	10	10	10*	10*	10*	10*	11*	11*	<u>11</u>	...	<u>11</u>	<u>12</u>	<u>12</u>	...
8			<u>9</u>	<u>10</u>	<u>10</u>	<u>10</u>	<u>11</u>	<u>11</u>	<u>11</u>	<u>11</u>	<u>11</u>	<u>11</u>	...	<u>11</u>	<u>12</u>	<u>12</u>	...
9				<u>10</u>	<u>11</u>	<u>11</u>	<u>11</u>	<u>11</u>	<u>11</u>								
10					<u>11</u>	<u>11</u>	<u>11</u>										

TAB. 4.4 – Bornes supérieures de  $\chi_b(G_{m \times n})$  obtenues par l’Algorithme Borne Sup 1

Les valeurs pour lesquelles une étoile est mise ne exposant sont des bornes meilleures que les bornes trouvées par Goddard et Al. [14] et les valeurs soulignées sont de nouvelles bornes.

**Preuve.** *Les inégalités se déduisent directement des colorations suivantes :*

1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1	10	...
2	1	4	1	8	1	5	1	9	1	4	1	3	1	...
1	7	1	3	1	2	1	3	1	2	1	6	1	5	...
3	1	2	1	6	1	4	1	7	1	3	1	2	1	...
1	9	1	5	1	3	1	2	1	5	1	8	1	4	...
2	1	3	1	2	1	10	1	3	1	2	1	3	1	...

FIG. 4.5 – Broadcast coloration de  $G_{6 \times n}$

*Vue la densité du tableau, nous enlevons les sommets de couleur 1 dans la représentation des colorations dans la grille.*

2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	...		
12	4	5	6	11	4	7	10	4	5	7	8	5	4	7	5	4	6	5	8	7	9	4	5	7	6	...
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	...
5	7	8	4	9	5	12	8	6	9	11	4	6	12	9	8	10	7	11	4	6	5	10	8	4	9	...
2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	...
4	6	10	5	7	6	4	5	7	4	5	10	7	5	4	6	5	4	9	5	12	4	7	6	5	11	...
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	...

FIG. 4.6 – Broadcast coloration de  $G_{7 \times n}$ 

7	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	...													
3	2	8	5	4	9	6	7	5	4	6	3	2	8	5	4	9	6	7	5	4	6	3	2	8	5	4	6	...										
12	4	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	5	12	4	3	2	3	2	3	2	3	2	5	12	4	3	2	5	...									
2	3	2	6	7	5	8	4	10	11	3	2	3	2	6	7	5	8	4	10	11	3	2	3	2	6	7	5	8	4	10	11	3	...					
9	5	10	3	2	3	2	3	2	7	4	9	5	10	3	2	3	2	3	2	7	4	9	5	10	3	2	3	2	7	4	...							
3	2	3	2	11	4	12	5	6	3	2	3	2	3	2	11	4	12	5	6	3	2	3	2	3	2	3	2	11	4	12	5	6	3	2	...			
6	7	4	5	3	2	3	9	4	5	8	6	7	4	5	3	2	3	9	4	5	8	6	7	4	5	3	2	3	9	4	5	8	6	7	4	5	8	...
2	3	2	3	2	6	7	2	3	2	3	2	3	2	3	2	6	7	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	6	7	2	3	2	3	2	3	...	

FIG. 4.7 – Broadcast coloration de  $G_{8 \times n}$ 

Nous remarquons que le temps d'exécution croit très rapidement à cause de la complexité exponentielle de cet algorithme, donc à partir de  $m = 11$ , nous n'avons pas pu obtenir des résultats.

Maintenant nous donnons quelques bornes supérieures des grilles avec  $m \in \{9, 10, \dots, 23\}$ .

## 4.4 Algorithme Borne Sup 1,2,3

Pour obtenir des bornes supérieures de  $\chi_b(G_{m,n})$ , impossible à avoir avec l'Algorithme Borne Sup 1, nous avons pensé à élaborer un algorithme de complexité moindre. Nous commençons par colorier une partie des sommets de  $G_{m,n}$  avec les couleurs 1, 2 et 3 de la manière suivante :

$$\pi(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont de même parité} \\ 2 & \text{si } (i \equiv 1[4] \text{ et } j \equiv 2[4]) \text{ ou } (i \equiv 3[4] \text{ et } j \equiv 0[4]) \\ 3 & \text{si } (i \equiv 1[4] \text{ et } j \equiv 0[4]) \text{ ou } (i \equiv 3[4] \text{ et } j \equiv 2[4]) \end{cases}$$

Ce nouvel algorithme explore  $(k-3)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \times \lceil \frac{n}{2} \rceil}$  cas au lieu de  $(k-1)^{\lfloor \frac{m \times n}{2} \rfloor}$ . C'est aussi un algorithme exponentiel, mais il nous a permis d'obtenir des bornes supérieures.

#### 4.4.1 Principe de l'algorithme

L'algorithme Borne Sup 1,2,3 commence par affecter les couleurs 1, 2 et 3 d'une façon bien définie puis il explore en profondeur les autres sommets de la grille sans passer par les sommets de couleurs 1, 2 et 3. Ainsi, soit il arrive à une broadcast coloration soit il continue à explorer toutes les colorations possibles pour montrer que le nombre de couleur est insuffisant.

#### 4.4.2 Enoncé de l'algorithme

---

**Algorithm 3** Borne sup 1,2,3

---

1 : *lire* :

- La taille de la grille ;
- Le nombre de couleur  $k$  à tester ;

2 : *Initiation* :- **Pour**  $i=1$  à  $m$  **faire**    **pour**  $j=1$  à  $n$  **faire**        **si** ( $i$  et  $j$  sont de même parité) **alors**             $\pi(i, j) = 1$  ;        **finsi**        **si** ( $i \equiv 1[4]$  et  $j \equiv 2[4]$ ) ou ( $i \equiv 3[4]$  et  $j \equiv 0[4]$ ) **alors**             $\pi(i, j) = 2$  ;        **finsi**        **si** ( $i \equiv 1[4]$  et  $j \equiv 0[4]$ ) ou ( $i \equiv 3[4]$  et  $j \equiv 2[4]$ ) **alors**             $\pi(i, j) = 3$  ;        **finsi**    **finpour**  **finpour**

- Affecter la couleur 4 au sommet (2,1) ;
- couleur :=4 ;

3 : **Tant que** (toute la grille n'est pas entièrement coloriée) **ou**(toutes les colorations ne sont pas encore testées) **faire**    Execution des instructions de 4 à 17 de l'Algorithme Valeur Exacte.

---

D'autres nouvelles bornes de  $\chi_b(G_{m \times n})$  sont obtenues avec l'Algorithme Borne Sup 1,2,3. Ils s'énoncent comme suit :

- Si  $m = 9$ , alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 10 & \text{pour } n = 9 \\ 11 & \text{pour } n \in \{10, \dots, 14\} \\ 12 & \text{pour } n \in \{15, 16\} \\ 13 & \text{pour } n \geq 17 \end{cases}$
- Si  $m = 10$ , alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 11 & \text{pour } n \in \{10, 11, 12\} \\ 13 & \text{pour } n \in \{13, 14\} \\ 14 & \text{pour } n \in \{15, \dots, 42\} \\ 15 & \text{pour } n \geq 43 \end{cases}$
- Si  $m = 11$ , alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 13 & \text{pour } n \in \{11, \dots, 14\} \\ 14 & \text{pour } n \in \{15, \dots, 42\} \\ 15 & \text{pour } n \geq 43 \end{cases}$
- Si  $m \in \{12, 13\}$  alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 13 & \text{pour } n \in \{12, 13\} \\ 14 & \text{pour } n \in \{14, \dots, 23\} \\ 15 & \text{pour } n \in \{24, 65\} \\ 16 & \text{pour } n \geq 66 \end{cases}$
- Si  $m \in \{14, 15\}$  alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 14 & \text{pour } n \in \{14, 15\} \\ 15 & \text{pour } n \in \{16, \dots, 25\} \\ 16 & \text{pour } n \in \{26, \dots, 195\} \\ 17 & \text{pour } n \geq 196 \end{cases}$
- Si  $m \in \{16, 17\}$  alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 15 & \text{pour } n \in \{16, \dots, 21\} \\ 16 & \text{pour } n \in \{22, \dots, 41\} \\ 17 & \text{pour } n \geq 42 \end{cases}$
- Si  $m \in \{18, 19\}$  alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 16 & \text{pour } n \in \{18, \dots, 23\} \\ 17 & \text{pour } n \geq 24 \end{cases}$
- Si  $m \in \{20, 21\}$  alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 16 & \text{pour } n \in \{20, 21\} \\ 17 & \text{pour } n \in \{22, \dots, 31\} \\ 18 & \text{pour } n \geq 32 \end{cases}$

- Si  $m \in \{22, 23\}$  alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 17 & \text{pour } n \in \{22, 23\} \\ 18 & \text{pour } n \in \{24, \dots, 60\} \\ 20 & \text{pour } n \geq 60 \end{cases}$
- Si  $m \in \{24, 25\}$ , alors  $\chi_b(G_{m \times n}) \leq \begin{cases} 18 & \text{pour } n \in \{24, 25\} \\ 19 & \text{pour } n \in \{26, \dots, 36\} \\ 22 & \text{pour } n \in \{36, \dots, 76\} \end{cases}$

Notons que pour  $m \geq 24$  et  $n \geq 24$ , Goddard et al. [14] ont proposé 23 comme borne supérieure pour  $\chi_b(G_{m \times n})$ .

## 4.5 Comparaisons et commentaires sur les trois algorithmes

- L'Algorithme Valeur Exacte sur de petits exemples donne la valeur exacte tant que l'espace d'exploration reste petit. Par exemple, pour trouver le résultat d'une grille de taille  $6 \times 6$ , nous avons pu montrer que le nombre broadcast chromatique vaut 8, car il explore ( $7^{36}$ ) en 24 heures mais pour une grille de taille  $7 \times 9$  nous avons attendu plus que 48 heures pour montrer le résultat mais en vain.
- L'Algorithme Borne Sup 1 nous a permis d'améliorer les bornes trouvées par Goddard et al.[14] et même de trouver des bornes pour des grilles de tailles moyennes allant jusqu'à la taille ( $11 \times 12$ ). Il explore ( $11^{66}$ ) en un temps de 24 heures. Pour une grille de taille  $12 \times 12$ , nous avons attendu plus de 48 heures pour montrer le résultat mais en vain.
- L'Algorithme Borne Sup 1 2 3, nous a permis d'obtenir des bornes supérieures pour des grilles très importantes (par exemple :  $\chi_b(G_{25 \times 76}) = 22$ ,  $\chi_b(G_{25 \times 25}) = 18$ ). Ces bornes restent toujours inférieures à la borne donnée par celle de Goddard dans [14]. Malheureusement, nous ne sommes pas encore arrivés à généraliser cette borne et cela à cause de la non périodicité des colorations trouvées.

# Conclusion

Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéressés principalement à l'étude du problème de broadcast coloration.

Dans un premier temps, nous avons déterminé des valeurs exactes du nombre broadcast chromatique pour les couronnes des chaînes et des cycles ainsi que pour quelques classes de chenilles. Ensuite, nous avons proposé une borne supérieure de  $\chi_b(G)$  lorsque  $G$  est une chenille quelconque.

En dernier lieu, nous avons élaboré trois algorithmes pour déterminer soit des valeurs exactes, soit des bornes supérieures du nombre broadcast chromatique pour les grilles. Les résultats de ces algorithmes, nous ont permis d'almémorer plusieurs bornes supérieures prouvées par Goddard et al. [14] et d'en obtenir d'autres pour d'autres valeurs de  $m$  et  $n$ .

En conclusion, il serait intéressant de poursuivre et compléter des travaux de recherche sur le problème de broadcast coloration. Comme perspectives à notre travail, nous proposons :

- Trouver d'autres bornes de  $\chi_b(G)$  en fonction du diamètre de  $G$ .
- Etude complète de  $\chi_b(P_m \square P_n)$  et de  $\chi_b(Q_d)$ .
- Déterminer soit des valeurs exactes soit des bornes de  $\chi_b(G)$ , lorsque  $G$  est un tore ou un cylindre.
- Déterminer des valeurs exactes et des bornes de  $\chi_b(G)$  pour d'autres classes de graphes (Graphes triangulés, graphes scindés, arbres, ...)

- Trouver d'autres caractérisations des graphes vérifiant  $\chi_b(G) = 3$ .

# Bibliographie

- [1] N. Alon and J. H. Spencer. The probabilistic Method . John Wiley and Sons. Inc. 1992.
- [2] V. M. Arnaudov. Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of the vertices. (Russian) Prikl. Math. Vyp. 11 :3-8, 126, 1974.
- [3] C. Berge, Graphs and Hypergraphs. (North Holland, Amsterdam, 1973).
- [4] C. Berge, Theory of Graphs and its Applications, Collection Universitaire de Mathématiques, vol. 2, Dunod, Paris, 1958.
- [5] M.Chellali. Etude de quelques invariants de graphes. Thèse de doctorat, USTHB. Fev 2005.
- [6] E.J. Cockayne, S. Herke, C.M. Mynhardt, Broadcasts and domination in trees, Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria, Discrete Mathematics (2009).
- [7] S. A. Cook, "the complexity of theorem proving procedures"; Proc.3rd ACM Symp. on Theory of computing, pp. 151-158, 1971.
- [8] J.E.Dunbar, D.J.Erwin, T.W.Haynes, S.M.Hedetniemi, and S.T.Hedetniemi, Broadcasts in graphs, Discrete Appl. Math. 154 :59-75, 2006 .
- [9] E1-Zahar, M. Parck, C. M. Domination number of products of graphs, Ars Combin. ,31 :223-227, 1991.
- [10] S. Erfang, S. Liang and K. Liying, Somme results on domination number of products of graphs. Appl. Math. JCU 13B, 103-108, 1998.
- [11] D. Erwin, Dominating broadcasts in graphs, Bull. Inst. Combin. Appl. 42 :89-105, 2004.

- [12] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability. A Guid to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Co., 1978.
- [13] J. R. Griggs and R. K. Yeh, The  $L(2, 1)$ -labeling problem on graphs, *SIAM J. Discrete Math.*, 9 309-316, 1996.
- [14] Wayne Goddard, Sandra M. Hedetniemi, Stephen T. Hedetniemi. Broadcast Chromatic Numbers of Graphs, *Ars Comb.* 86, 2008.
- [15] E.O. Hare, Algorithms for grids and grid-like graphs, Ph.D. dissertation, Clemson University, 1989.
- [16] P.Heggernes and D.Lokshtanov, Optimal broadcast domination of arbitrary graphs in polynomial time, *Discrete Mathematics* 306 :3267-3280, 2006.
- [17] S. Herke, Dominating broadcasts in graphs, Master's dissertation, University of Victoria, 2009.
- [18] S. Herke, C.M. Mynhardt, Radial trees, *Discrete Math.* 309 :5950-5962, 2009.
- [19] Olivier Hudry, « Machines de Turing et complexité algorithmique », Université de Paris 1.
- [20] M.S. Jacobson and L.F. Kinch, On the domination number of products of graphs I : *Ars Combin.*, 18 :33-44, 1983.
- [21] M. S. Jacobson and L. F. Kinch. On the domination of the products of graphs II : Trees. *J. Graph Theory.* 10 :97-106, 1986.
- [22] Nasreen Khan, Anita Palz and Madhumangal Paly. Edge Colouring of Cactus Graphs. *Advanced Modeling and Optimization*, Volume 11, Numbe 4, 2009.
- [23] C.L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, NewYork, NY, 1968.
- [24] D. Maquin, *Elément de théorie des graphes*. Institut national polytechnique de Lorraine, ENSEM, 2003.
- [25] B.Omoomi, R.Javadi. On the b-coloring of cartesian product of graphs.to appear in *Ars Combinatoria*.
- [26] O. Ore. *Theory of Graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, 38 ( American. Mathematical Society Publications. AMS, Providence, 1962.

- 
- [27] C. H. Papadimitriou. Computational complexity. Addison - wesly publishing company. 1994,
  - [28] L. Rahma. Contribution à l'étude de la  $\gamma_L$ -excellence et la  $\gamma_L$ -unicité dans les graphes. Mémoire de magister, USTB, 2007.
  - [29] R. Sahbi, Nombre de broadcast domination dans les arbres. Mémoire de magister, USTHB. 2009.
  - [30] M. Sakarovitch, Optimisation Combinatoire. Universit scientifique et médicale, institut national polytechnique de Grenoble, ENSIMAG, 1983.
  - [31] S.M. Seager, Dominating broadcasts of caterpillars, Ars Combin. 88 :307-319, 2008.
  - [32] Christian Sloper. Broadcast-coloring of trees, Reports in informatics ISSN 0333-3590, 2002.