

N^o d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
« Houari Boumediene »
Faculté des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En
Mathématiques Appliquées
Option
Méthodes Stochastiques en Recherche Opérationnelle Présenté

Par :

M^{elle} Mecheri Kheira.

Thème

INÉGALITÉS DE STABILITÉ ET MESURE DE

PERFORMANCE DANS UN SYSTÈME DE FILES

D'ATTENTE $G/M/\infty$

Soutenue publiquement le : 02/10/2005

Devant le jury composé de :

Président	K. Boukhetala	Professeur	U. S.T.H.B. Alger.
Rapporteur	D. Aïssani	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
Examineur	K. Khaldi	Maître de conf	U. Boumerdès.
Examineur	M. Aïder	Maître de conf	U.S.T.H.B. Alger.

Table des matières

Introduction	4
1 Systèmes d'attente : Analyse et Simulation	7
1.A. Systèmes de files d'attente	7
1.1 Représentation d'un système de files d'attente	7
1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente	9
1.3 Les caractéristiques d'un système de files d'attente	9
1.4 Quelques systèmes de files d'attente	10
1.4.1 Modèles Markoviens	10
1.4.2 Modèles non Markoviens	13
1.B. Simulation par événements discrets	18
1.5 Modèles de simulation	19
1.6 Simulation par événements discrets	19
1.6.1 Événements	19
1.6.2 Simulateur	19
1.7 Étapes d'une simulation	19
1.8 Génération des variables aléatoires	21
1.8.1 Génération des nombres aléatoires	21
1.9 Méthodes de génération des nombres aléatoires	22
1.9.1 Techniques de génération des variables aléatoires	23
1.9.2 Simulation des systèmes de files d'attente	26
1.10 Test de Student	27
1.10.1 Test de comparaison de deux systèmes de files d'attente	27
1.10.2 Intervalle de confiance pour $\theta_1 - \theta_2$	30
2 Stabilité	31
2.1 Stabilité des systèmes de files d'attente	31
2.1.1 Méthode métrique	31
2.1.2 Méthode de renouvellement	32
2.1.3 Méthode de convergence faible :	32
2.1.4 Méthode des fonctions tests :	32
2.1.5 Méthode de stabilité forte :	32
2.1.6 Méthode de stabilité uniforme :	32

2.2	Méthode de stabilité forte	33
2.2.1	Notations et préliminaires	33
2.2.2	Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov	35
2.2.3	Critère de stabilité forte	36
2.3	Stabilité forte d'une chaîne de Markov	37
2.4	Inégalités de stabilité	37
2.5	Stabilité forte dans un système $G/M/\infty$	38
3	Stabilité forte dans un système de files d'attente $M/M/\infty$	40
3.1	Notations et préliminaires	40
3.1.1	Opérateur de transition	41
3.2	Stabilité forte de la chaîne de Markov X_n	41
3.2.1	Stabilité forte	42
3.3	Inégalités de Stabilité	44
3.3.1	Déviaton de l'opérateur de transition	44
3.3.2	Estimation de stabilité forte	46
4	Stabilité forte dans un système de files d'attente $G/M/\infty$	48
4.1	Notations et préliminaires	48
4.1.1	Opérateur de transition	49
4.2	Stabilité forte	49
4.3	Inégalités de stabilité du système $G/M/\infty$	51
4.3.1	Estimation quantitative de la norme de déviation de l'opérateur de transition dans le système $G/M/\infty$	51
4.3.2	Inégalités de stabilité	53
5	Mesure de Performance de la Méthode de Stabilité Forte	55
5.1	Validation des modèles de simulation	56
5.2	Comparaison des deux systèmes $M/M/m$ et $M/M/\infty$	59
5.2.1	Résultats de simulation	60
	Annexes	67
A	Organigramme de la simulation	68
B	Mesure, Chaînes de Markov et Fonctions génératrices	70
B.1	Notions de mesure	70
B.1.1	Tribus et mesures	70
B.1.2	Variation totale d'une mesure	72
B.1.3	Mesures absolument continues, mesures étrangères	72
B.1.4	Noyau de transition	73
B.2	Rappels sur les chaînes de Markov	73
B.2.1	Processus de Markov	74
B.2.2	Classification des états	75

B.2.3	Propriété sans mémoire	75
B.2.4	Processus de naissance et de mort	76
B.3	Fonction génératrice et transformée de Laplace	77
B.3.1	Fonction génératrice	77
B.3.2	Transformée de Laplace	77
Bibliographie		79

Introduction

Les phénomènes d'attente ont fait l'objet de nombreux travaux dès l'apparition des premiers systèmes téléphoniques. Après la deuxième guerre mondiale, l'étude des problèmes de gestion de stocks et de production ont donné un nouvel élan à la recherche opérationnelle. De plus, la modélisation de la fiabilité des systèmes complexes s'exprime bien en terme de files d'attente [23].

Dès les années soixante, La modélisation des systèmes informatiques et téléinformatiques a conduit au développement considérable des études sur les systèmes de files d'attente, caractérisées par des disciplines de service complexes.

La théorie des phénomènes d'attente a pour objectif d'établir une relation entre le caractère du flux d'arrivées et l'efficacité du service. Pour l'étude de ces phénomènes, on est confronté à plusieurs modèles : modèles Markoviens et modèles non Markoviens.

Les modèles Markoviens sont des modèles élémentaires de la théorie des files d'attente. Ils jouent un rôle crucial dans la plupart des études d'analyse de probabilités des réseaux d'informatiques et télécommunications. Ces systèmes sont caractérisés par la propriété "sans mémoire" qui facilite leurs analyses (processus de naissance et de mort).

Les modèles non Markoviens sont des modèles qui ne possèdent pas la propriété " sans mémoire ". L'absence de cette propriété fait que ces systèmes ne forment plus un processus de Markov, ce qui rend leurs analyse plus délicate. Pour pouvoir les étudier, on a tendance à les ramener à des systèmes Markoviens en utilisant l'une des méthodes citées dans le chapitre 1.

Certes, des résultats analytiques ont pu être obtenus pour certains systèmes particuliers de systèmes à plusieurs serveurs. Cependant, même dans ces cas, la complexité des formules analytiques ne permet pas de les exploiter dans la pratique. C'est le cas de la transformée de Laplace ou de la fonction génératrice qui ne sont pas disponibles sous formes explicites.

C'est pourquoi lors de la conception et de l'étude de systèmes concrets, on est souvent amené à remplacer le système réel (généralement complexe), par un système plus simple et pour lequel il existe des résultats analytiques exploitables. Ce dernier (idéal) est supposé être, dans un certain sens, proche du système réel, d'où l'apparition du problème de stabilité.

L'étude de la stabilité, en théorie de files d'attente, nous permet de déterminer le domaine dans lequel le système réel peut être approximé par le système idéal. Pour mieux définir le concept de stabilité, on décrit un système de files d'attente par une application

$F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, où \mathcal{X} représente l'ensemble des paramètres des entrées (la durée entre les arrivées, la durée de service, la discipline de service,...) et \mathcal{Y} représente l'ensemble des sorties (le nombre moyen de clients, le temps moyen d'attente,...). La notion de stabilité est équivalente à la continuité de l'application F [41].

Un système de files d'attente est dit stable, lorsqu'une petite perturbation dans ses paramètres d'entrées, entraîne une petite perturbation dans ses caractéristiques (sorties). Les premiers résultats sur la stabilité ont été développés par Rosberg [44], Gnedenko [23] et Franken [21]. Par la suite sont apparus les travaux de Kennedy [34], Borovkov [12], Stoyan [48], Kalashnikov et Tsitsiashvili [29], Zolotariev [49], Klebanov [35], Kartashov et D. Aïssani [5], Rachev [41], Ipsen et Meyer [27]. Tous ces travaux ont considéré différentes positions et différentes approches du problème. Parmi ces approches développées dernièrement, citons : la méthode d'approximation exponentielle [11], et la méthode des ordres stochastiques [11] qui permettent d'avoir des estimations quantitatives des caractéristiques des modèles étudiés en terme de monotonie ou de comparabilité, suivant des ordres stochastiques donnés.

La méthode de stabilité forte a été élaborée au début des années 80 [5]. Cette méthode permet d'étudier l'ergodicité uniforme et la stabilité forte des systèmes de files d'attente par rapport à une norme donnée. L'applicabilité de cette méthode a fait l'objet d'un cycle de recherche ayant considéré la perturbation de différents paramètres (flot des arrivées [9], intensité de service [16], l'étude de la structure du système [3]).

Or, ces dernières années, les besoins de la pratique ont orienté les recherches vers la détermination des estimations quantitatives et la mesure de la performance des méthodes de stabilité. Il est parfois possible d'estimer numériquement l'erreur de définition des caractéristiques recherchées pour de petites perturbations des paramètres [9, 16].

Dans cette thèse, nous obtenons pour la première fois les inégalités de stabilité dans un système à plusieurs serveurs. Pour ce faire, nous avons dans un premier temps traité le cas des modèles Markoviens. Après avoir prouvé le fait de la stabilité dans un système de files d'attente $M/M/\infty$, nous avons obtenu les estimations quantitatives avec un calcul exact des constantes.

Dans un deuxième temps, nous avons traité le cas du système $G/M/\infty$. A la différence de [1, 2, 3] où ont été utilisés les concepts, nous utilisons ici le critère de stabilité forte. Ceci nous permet d'obtenir les estimations quantitatives avec un calcul exact des constantes.

Enfin, nous avons mesuré la performance de la méthode de stabilité forte. L'approche que nous proposons dans cette thèse, est celle de la simulation par événements discrets et l'utilisation du test de Student (comparaison des systèmes étudiés). Sous la condition de l'ergodicité géométrique des systèmes de files d'attente, une série de résultats a été obtenue (voir le chapitre 5).

Cette thèse est constituée d'une introduction, de cinq chapitres, d'une conclusion, d'une annexe et d'une bibliographie.

Le premier chapitre est décomposé en deux parties. Dans la première partie, nous rappelons quelques résultats classiques sur les systèmes

de files d'attente. En particulier, nous nous sommes intéressés aux systèmes $M/M/m$, $M/M/\infty$, $G/M/m$ et $G/M/\infty$.

La seconde partie est consacré à la simulation par événements discrets et son utilisation en théorie de files d'attente. Dans cette partie, nous présentons également le test de Student qui nous permettra de construire des intervalles de confiance pour les écarts entre les caractéristiques des deux systèmes de files d'attente simulés.

Le second chapitre est consacré au rappel des différents concepts de la stabilité. Nous avons mis l'accent sur la méthode de stabilité forte.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié la stabilité forte des distributions stationnaires de la chaîne de Markov induite du système $M/M/\infty$. Ainsi, nous avons déterminé les conditions pour lesquelles nous pouvons approximer les caractéristiques du système $M/M/m$ par celles du système $M/M/\infty$. Par la suite, nous obtenons les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

L'intetêt de notre étude consiste à dégager la relation existante entre les systèmes $M/M/m$ et $M/M/\infty$ en tenant plus de précision sur les conditions d'approximation, à l'instar de R. Pedrono et J. M. Helary [25] qui dans leurs approche, a une marge d'erreurs plus importante.

Le quatrième chapitre concerne l'étude de la stabilité forte de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite du système $G/M/\infty$. Pour cela, nous avons choisi une fonction test. Ensuite, nous avons vérifié le critère de stabilité forte. Ainsi, nous précisons les conditions pour lesquelles les caractéristiques du système $G/M/m$ peuvent être approximées par celles du système $G/M/\infty$. Enfin, nous obtenons les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

Dans le cinquième et dernier chapitre, nous mesurons les performances de la méthode de stabilité forte dans le système de files d'attente $G/M/\infty$, après perturbation de la structure du système $G/M/m$. Nous modélisons les durées entre les arrivées consécutives des demandes dans ces deux systèmes par une loi exponentielle (Delphi 6.7).

Dans la conclusion, nous présentons les perspectives de recherche qui découlent de notre travail.

En annexe, nous présentons quelques rappels sur les notions de la théorie de la mesure et des chaînes de Markov, nécessaires à la compréhension des théorèmes fondamentaux d'ergodicité uniforme et de stabilité forte, ainsi que quelques rappels d'analyse mathématique.

Chapitre 1

Systemes d'attente : Analyse et Simulation

1.A. Systemes de files d'attente

La theorie des phenomenes d'attente est apparue vers 1920 a la faveur de l'analyse des systemes telephoniques. L'importance de ces phenomenes a ete marquee au debut des annees soixante grace a la modelisation des systemes informatiques. L'etude des files d'attente a plusieurs serveurs est plus complexe que celle d'un seul serveur.

Dans ce chapitre, nous presentons quelques systemes de files d'attente tels que : $M/M/m$, $M/M/\infty$, $G/M/m$, $G/M/\infty$ et leurs caracteristiques. Nous utilisons l'approche de la chaine de Markov induite. Nous supposons que les temps entre les arrivees (resp. temps de service) de deux clients forment une suite de variables aleatoires identiquement distribuees selon une loi F (resp. H) et que ces deux suites sont mutuellement independantes et leurs taux sont respectivement λ et μ .

1.1 Représentation d'un système de files d'attente

La suite des temps d'arrivees des clients dans la file est $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots$ et nous notons $T_i = t_{i+1} - t_i$ pour $i \geq 1$.

Notons egalement $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots$ la suite des temps de service des clients $1, 2, \dots, i, \dots$

Un systeme de files d'attente est souvent represente selon la notation de Kendall [22] : $A/B/k/N/D_k$ ou

A : La distribution de la duree entre deux arrivees consecutives ;

B : La distribution de la duree de service ;

k : Le nombre de serveurs en parallèle ;

N : La capacité maximale du système ;

D_k : La discipline de service.

En général, les distributions A et B sont spécifiées, par :

- M : distribution exponentielle (Markov) ;
- E_k : distribution d'Erlang d'ordre k ;
- G : distribution Générale ;
- D : cas Déterministe.

Les principales disciplines de service utilisées sont :

- $FIFO$: premier arrivé, premier servi (First In, First Out) ;
- $LIFO$: dernier arrivé, premier servi (Last In, First Out) ;
- $FIRO$: aléatoire (First In, Random Out) ;
- PS : égalitaire (Processor Sharing).

Remarque 1.1.1.

Si la capacité N du système est infinie et la discipline de service est FIFO, alors nous ne les précise pas.

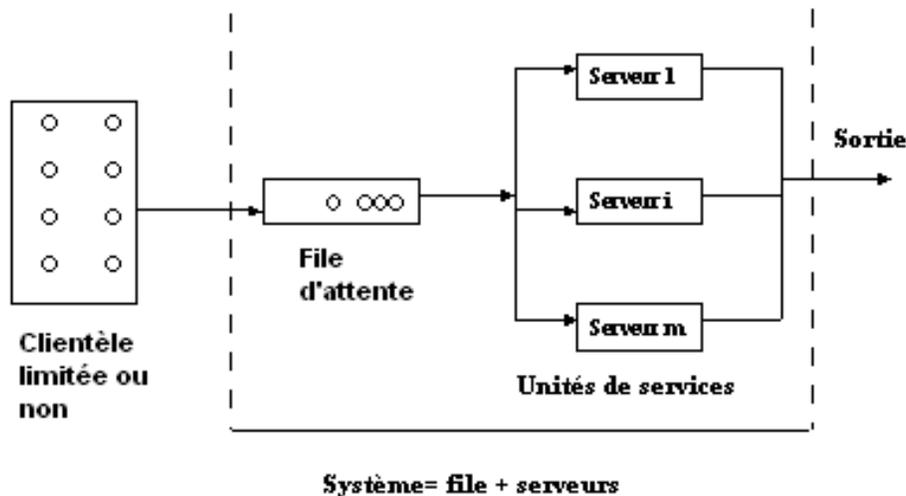


FIG. 1.1 – Système de files à m serveurs

1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait en principe par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée. En premier lieu, nous nous intéressons au nombre $X(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$). Ensuite, nous nous intéressons à la détermination des quantités qui définissent le système, telles que :

- Les probabilités d'état $P_n(t) = P(X(t) = n)$ qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $X(t); t \geq 0$. Il est clair que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.
- Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P(X(\infty) = n), (n = 0, 1, \dots),$$
où π_n est appelée distribution stationnaire de ce processus.

Nous constatons que le calcul explicite du régime transitoire s'avère pénible, voire impossible, pour la plupart des modèles. Alors, nous nous contentons de déterminer le régime stationnaire.

1.3 Les caractéristiques d'un système de files d'attente

A partir de la distribution stationnaire d'un processus, nous pouvons déterminer plusieurs caractéristiques telles que :

- L : nombre moyen de clients dans le système ($L = E(X)$);
- L_q : nombre moyen de clients dans la file;
- W : temps moyen de séjour d'un client dans le système;
- W_q : temps moyen d'attente d'un client dans le système.

Ces caractéristiques sont liées par les formules de Little comme suit :

- $L = \lambda W$;
- $L_q = \lambda W_q$;
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}$;
- $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$.

où, λ est le taux des arrivées et μ est le taux de service.

1.4 Quelques systèmes de files d'attente

1.4.1 Modèles Markoviens

Les modèles Markoviens sont faciles à étudier et ceci est dû à la propriété "sans mémoire" de la loi exponentielle (voir annexe).

a) Le système de files d'attente $M/M/m$

Ce système comprend m serveurs en parallèle, où la durée de service suit une loi exponentielle de paramètre μ et le flux des arrivées est poissonnien de paramètre λ . Les clients forment une seule file d'attente, le premier client sera servi à la première station libre.

Le nombre de clients, $X(t)$ dans le système constitue un processus de naissance et de mort dont les taux sont :

$$\lambda_n = \lambda \text{ pour } n = 0, 1, \dots \text{ et } \mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{Si } 1 \leq n \leq m, \\ m\mu & \text{Si } n \geq m. \end{cases}$$

Les processus de naissance et de mort sont une généralisation du processus de Poisson. L'évolution temporelle des processus de naissance et de mort est complètement déterminée par le processus $(X(t))_{t \geq 0}$, grâce à sa propriété fondamentale "sans mémoire" (voir annexe).

Nous pouvons calculer les probabilités d'états $P_n(t) = P[X(t) = n]$ à partir des équations différentielles de Chapman-Kolmogorov, en connaissant les conditions initiales du processus de cette chaîne.

Ces équations sont données sous la forme suivante :

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ P'_n(t) = -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t), & 1 \leq n \leq m-1; \\ P'_n(t) = -(\lambda + \mu m)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu m P_{n+1}(t), & n \geq m. \end{cases} \quad (1.1)$$

Régime stationnaire

Nous faisons tendre t vers l'infini dans le système d'équations de Kolmogorov (1.1). Nous pouvons montrer que les limites :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) = \pi_n,$$

existent et sont indépendantes de l'état initial du processus et que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P'_n(t) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Ainsi, nous obtenons un système d'équations linéaires et homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu\pi_1 = \lambda\pi_0, \\ \lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} = (\lambda + n\mu)\pi_n, \quad 1 \leq n \leq m-1; \\ \lambda\pi_{n-1} + \mu m\pi_{n+1} = (\lambda + \mu m)\pi_n, \quad n \geq m; \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1 \text{ (condition de normalisation)}. \end{array} \right.$$

En résolvant ces équations, nous obtenons les distributions stationnaires sous la forme :

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \pi_0 & \text{si } n \leq m, \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{m! m^{n-m}} \pi_0 & \text{si } n \geq m, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^m \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{m+1}}{m!(m-\frac{\lambda}{\mu})} \right]^{-1}$ si $\frac{\lambda}{\mu m} = \frac{\rho}{m} < 1$, avec $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Remarque 1.4.1.

Cette file d'attente est uniformément ergodique si $\frac{\rho}{m} < 1$.

Pour $m = 1$, ce résultat est identique à celui du système $M/M/1$.

Les caractéristiques

Les principales caractéristiques dans un système $M/M/m$ sont les suivantes :

- La probabilité d'attente d'un client dans le système est :

$$\begin{aligned} T = P(\text{attente}) = P(X \geq m) &= \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{m! m^{n-m}} \pi_0 = \frac{\rho^m \pi_0}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{n-m} \\ T &= \frac{\rho^m \pi_0}{(m-1)!(m-\rho)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file (en attente) :

$$\begin{aligned} L_q = E(X_q) &= \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m)\pi_n = \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m) \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{m! m^{n-m}} \pi_0 = \frac{\rho^m \pi_0}{m!} \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m) \left(\frac{\rho}{m}\right)^{n-m} \\ L_q &= \frac{\rho^{m+1} \pi_0}{(m-1)!(m-\rho)^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

- Le nombre moyen de clients dans le système :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \rho + \frac{\rho^{m+1}\pi_0}{(m-1)!(m-\rho)^2} \quad (1.5)$$

- Le temps moyen de séjour d'un client dans le système :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[\rho + \frac{\rho^{m+1}\pi_0}{(m-1)!(m-\rho)^2} \right] \quad (1.6)$$

- Le temps moyen d'attente d'un client dans le système :

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} \quad (1.7)$$

b) Le système M/M/ ∞

Ce système contient une infinité de stations de service identiques. Dans ce cas, il est clair qu'il n'y a aucune file d'attente, car chaque client est servi dès son arrivée. Ce système non seulement a un intérêt théorique, mais il permet des études approximatives de phénomènes d'attente de types $M/M/m$ ou $M/M/m/m$ et il possède également la propriété "sans mémoire".

Dans ce système, nous considérons que la distribution de la durée de service est exponentielle de paramètre μ et la distribution de la durée entre deux arrivées consécutives est exponentielle de paramètre λ . De la même manière que pour le système $M/M/m$, nous pouvons calculer ses probabilités d'état $P_n(t) = P[X(t) = n]$ à partir des équations différentielles de Kolmogorov qui sont données par :

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P'_n(t) = -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t), \quad n \geq 1; \end{cases} \quad (1.8)$$

Régime stationnaire

Lorsque nous faisons tendre t vers l'infini, on obtient un système d'équations linéaires et homogènes :

$$\begin{cases} \mu\pi_1 = \lambda\pi_0; \\ \lambda\pi_{n-1} + \mu n\pi_{n+1} = (\lambda + \mu n)\pi_n, \quad n \geq 1; \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1. \end{cases}$$

Après la résolution de ce système d'équations, nous obtenons une solution sous la forme :

$$\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}, \quad (1.9)$$

où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Remarque 1.4.2.

Le nombre de clients dans ce système suit une distribution de Poisson de paramètre ρ et de plus, La distribution stationnaire existe quelle que soient les valeurs de λ et μ .

Les caractéristiques

Les principales caractéristiques du système $M/M/\infty$ sont :

- Le nombre moyen de clients dans le système :

$$L = E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n = \rho e^{-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} = \rho, \quad (1.10)$$

- Le temps moyen de séjour d'un client dans le système :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu}, \quad (1.11)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file d'attente :

$$L_q = L - \rho = 0, \quad (1.12)$$

- Le temps moyen d'attente d'un client :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0. \quad (1.13)$$

1.4.2 Modèles non Markoviens

De nombreuses méthodes ont été développées pour étudier les modèles non Markoviens.

Méthode des étapes [Erlang et Cox]

Le principe de cette méthode est d'approximer toutes les probabilités ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox (qui possède la propriété sans mémoire).

Méthode des variables auxiliaires

Dans cette méthode, nous essayons de compléter l'information $(X(t))_{t \geq 0}$ de sorte que le processus $(X(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_k(t))$ soit un processus de Markov, où $\gamma_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$ sont des variables auxiliaires.

Méthode de résolution de l'équation intégrale de Lindley

Cette méthode est applicable surtout pour le système $G/G/1$, ainsi que pour les systèmes $M/G/1$ et $G/M/1$ (voir [36, 37])

Méthode des événements fictifs

L'idée de la méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformés de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

Méthode de la chaîne de Markov induite [Palm [40] et Kendall [33]]

Le but de cette méthode est de choisir une séquence d'instants $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (déterministes ou aléatoires) pour que le système induit X_n , $n \geq 0$, avec $X_n = X(\theta_n)$, forme une chaîne de Markov induite et homogène.

Simulation des files d'attente

La simulation est un procédé d'imitation artificielle d'un système de files d'attente sur ordinateur. Elle nous permet d'étudier le comportement du système et de mesurer sa performance.

a) Le système $G/M/m$

Considérons un système de files d'attente $G/M/m$ dont la durée des inter-arrivées suit une loi générale H de moyenne $\frac{1}{\lambda}$ et la durée de service qui suit une loi exponentielle E_μ de paramètre μ .

Chaîne de Markov induite

Notons que :

T_n : est le moment d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client,

t : le temps entre les moments de deux arrivées consécutives.

X_n : le nombre de clients dans le système à l'instant juste avant T_n , et nous supposons que les distributions de la durée de service coïncident pour tous les serveurs.

Par conséquent :

$X_{n+1} = X_n + 1 - A_n$, où A_n est le nombre de clients servis pendant le temps t .

Cette chaîne est Markovienne (car l'état X_{n+1} dépend uniquement de l'état X_n).

D'où les probabilités de transition de cette chaîne sont données par :

$$P_m = [P_{ij}(m)]_{i,j \geq 0}.$$

$$P_{ij}(m) = P[X_{n+1} = j / X_n = i] = P[X_n + 1 - A_n = j / X_n = i].$$

D'où,

$$P_{ij}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i + 1; \\ P[A_n = i + 1 - j] & \text{si } j \leq i + 1. \end{cases} \quad (1.14)$$

* 1^{er} cas : $j \leq i + 1 \leq m$, alors :

Si $i + 1 \leq m$; les serveurs sont occupés à l'instant T_n , donc après k départs entre T_n et T_{n+1} , sachant que $T_{n+1} - T_n = t$, la probabilité est : $C_{i+1}^k (1 - e^{-\mu t})^k (e^{-\mu t})^{i+1-k}$

Puisque $1 - e^{-\mu t} = \int_0^t \mu e^{-\mu x} dx$ est la probabilité que l'un des serveurs est occupé termine son service durant le temps t et $e^{-\mu t} = \int_t^\infty \mu e^{-\mu x} dx$ est la probabilité complémentaire. Alors,

$$P_{ij}(m) = \int C_{i+1}^{i+1-j} (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-j\mu t} dH(t).$$

* 2^{ème} cas : $m \leq j \leq i + 1$, puisque les m serveurs sont occupés pendant t , donc le processus est de poisson de taux μm .

$$P_{ij}(m) = \int \frac{(m\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-m\mu t} dH(t)$$

* 3^{ème} cas : $j < m \leq i + 1$, nous considérons w la durée pendant laquelle le système décroît de l'état $(i+1)$ à l'état m durant l'intervalle $[T_n, T_{n_0}]$ (w est la durée nécessaire pour servir les $(i+1-m)$ premier clients).

Durant cette période, le processus des départs est poissonnien de taux $m\mu$, d'où w suit une loi d'Erlang de paramètre $m\mu$ et d'ordre $(i+1-m)$.

Pendant l'intervalle $[T_{n_0}, T_{n+1}]$, de durée $t - w$, il y a $(m-j)$ départs ($(m-j)$ finissent leurs service parmi les m serveurs occupés à l'instant t). Alors,

$$P[(i+1-j) \text{ départs entre } T_n \text{ et } T_{n+1} / T_{n+1} - T_n = t, T_{n_0} - T_n = w] =$$

$$P[(m-j) \text{ départs entre } T_{n_0} \text{ et } T_{n+1} / T_{n+1} - T_n = t, T_{n+1} - T_{n_0} = t - w] = C_m^{m-j} (1 - e^{-(t-w)})^{m-j} e^{-j(t-w)}.$$

Donc, en utilisant la loi des probabilités totales, nous obtenons :

$$P[(i+1-j) \text{ départs entre } T_n \text{ et } T_{n+1} / T_{n+1} - T_n = t] =$$

$$\int_0^t C_m^{m-j} (1 - e^{-\mu(t-w)})^{m-j} e^{-j\mu(t-w)} m\mu \frac{(m\mu w)^{i-m}}{(i-m)!} e^{-m\mu w} dw.$$

D'où ,

$$P_{ij}(m) = \int_0^t \int_0^t C_m^{m-j} (1 - e^{-\mu(t-w)})^{m-j} e^{-j\mu(t-w)} m\mu \frac{(m\mu w)^{i-m}}{(i-m)!} e^{-m\mu w} dw dH(t).$$

Remarque 1.4.3.

X_n est une chaîne irréductible et apériodique. Son noyau de transition est donné par :

$$P_{ij}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i + 1, \\ \int C_{i+1}^{i+1-j} (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-j\mu t} dH(t) & \text{si } j \leq i + 1 \leq m, \\ \int \frac{(m\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-m\mu t} dH(t) & \text{si } m \leq j \leq i + 1, \\ \int_0^t \int_0^t C_m^{m-j} (1 - e^{-\mu(t-w)})^{m-j} e^{-j\mu(t-w)} m\mu \times \\ \frac{(m\mu w)^{i-m}}{(i-m)!} e^{-m\mu w} dw dH(t) & \text{si } j < m \leq i + 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

De plus, cette chaîne est ergodique pour $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$ [20].

Régime stationnaire

La chaîne X_n est une chaîne de Markov irréductible et apériodique, alors elle admet une distribution stationnaire unique π_m , et qui est donnée par :

$$\pi_m = P_m \pi_m \quad [36].$$

$$\pi_m = \begin{cases} C\alpha_j & \text{si } 0 \leq j \leq m - 2; \\ C\sigma^{j-m+1} & \text{si } j \geq m - 1. \end{cases} \quad (1.16)$$

Où, les valeurs de C et α_j sont données par :

$$\begin{cases} \alpha_{m-2} = \frac{1 - \sum_{k=m-1}^{\infty} \sigma^{k-m+1} P_{k,m-1}}{P_{m-2,m-1}}; \\ \alpha_{j-1} = \frac{\alpha_j - \sum_{k=j}^{m-2} \alpha_k P_{k,j} - \sum_{k=m-1}^{\infty} \sigma^{k-m+1}}{P_{j-1,j}} \quad \text{pour } j = m - 2, \dots, 1; \\ C = \left[\sum_{j=0}^{m-2} \alpha_j + \frac{1}{1-\sigma} \right]^{-1}. \end{cases}$$

Et σ est l'unique solution de l'équation

$$\sigma = H^*(m\mu - m\mu\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-m\mu t(1-\sigma)} dH(t) \quad (1.17)$$

H^* étant la transformée de Laplace de la densité de probabilité des temps entre les arrivées des clients. Nous pouvons montrer facilement que $0 < \sigma < 1$.

Caractéristiques

Les principales caractéristiques du système $G/M/m$ sont :

- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$L = E(X) = \frac{\lambda[C\sigma + m(1 - \sigma)^2]}{m\mu(1 - \sigma)^2}. \quad (1.18)$$

- Le temps moyen de séjour d'un client dans le système est :

$$W = \frac{C\sigma + m(1 - \sigma)^2}{m\mu(1 - \sigma)^2}. \quad (1.19)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$L_q = \frac{C\lambda\sigma}{m\mu(1 - \sigma)^2}. \quad (1.20)$$

- Le temps moyen d'attente d'un client dans le système est :

$$W_q = \frac{C\sigma}{m\mu(1 - \sigma)^2}. \quad (1.21)$$

b) Le système $G/M/\infty$

Considérons un système de files d'attente $G/M/\infty$ dont la durée des inter-arrivées suit une loi générale H de moyenne $\frac{1}{\lambda}$ et la durée de service suit une loi exponentielle E_μ de paramètre μ . Ce système contient une infinité de stations de service identiques, son noyau de transition associé $P_\infty = [P_{ij}(\infty)]_{i,j \geq 0}$ est donné par :

$$P_{ij}(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i + 1, \\ \int C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-\mu j t} dH(t) & \text{si } j \leq i + 1. \end{cases} \quad (1.22)$$

Régime stationnaire

Le régime stationnaire du système existe et est identique à l'état stationnaire de la chaîne de Markov induite X_n . Il ne sera généralement pas possible de déterminer la distribution stationnaire π_∞ . Cependant, nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\Pi_\infty(Z)$ [3]. Ceci, en utilisant la définition de la distribution de probabilité discrète

stationnaire par rapport à la matrice stochastique P_∞ :

$$\pi_\infty = \pi_\infty P_\infty.$$

Et par conséquent, on obtient :

$$\Pi_\infty(Z) = \sum_{n \geq 0} \prod_{k=1}^n \frac{h(k\mu)}{1 - h(k\mu)} (Z - 1)^n. \quad (1.23)$$

Où, $h(s) = \int e^{-st} dH(t)$ et la série (1.23) converge pour tout Z .

Remarque 1.4.4.

Pour obtenir la distribution stationnaire du système $G/M/\infty$, il suffit de tendre m vers ∞ de la distribution stationnaire du système $G/M/m$.

Caractéristiques

Nous pouvons obtenir les caractéristiques de ce système en utilisant les caractéristiques de la fonction génératrice.

- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$L = \Pi'_\infty(Z)|_{Z=1} = \frac{h(\mu)}{1 - h(\mu)}. \quad (1.24)$$

Où, $h(\mu) = \int e^{-\mu t} dH(t)$.

Nous déterminerons les autres caractéristiques en utilisant les formules de Little.

1.B. Simulation par événements discrets

La simulation est une technique de modélisation du monde réel. Elle nous permet de représenter le fonctionnement d'un système composé de différents centres d'activité et met en évidence ses caractéristiques. Ainsi, elle décrit le comportement de différents sujets traités par des processus afin d'observer le mouvement du système dans son ensemble et son évolution dans le temps. Il existe plusieurs modèles de simulation. Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude de la simulation par événements discrets.

Par la suite, nous présentons la méthode de comparaison de deux systèmes de files d'attente basée sur le test de Student.

La simulation des systèmes à événements discrets est une modélisation des systèmes dans lesquels le changement d'états s'effectue à des instants discrets de l'axe temporel. Cette méthode nous permet également d'étudier le comportement d'un système, en utilisant un autre système ayant la même structure, mais plus simple à manipuler.

1.5 Modèles de simulation

Nous distinguons plusieurs modèles de simulation selon qu'ils soient statiques ou dynamiques, déterministes ou aléatoires, continus ou discrets.

Un modèle de simulation est dynamique ou statique selon que les valeurs de ses variables se modifient dans le temps ou non. Par exemple, tous les systèmes basés sur les files d'attentes sont dynamiques.

Un modèle de simulation est déterministe s'il ne contient aucune variable aléatoire. Dans le cas contraire, il est aléatoire. Dans le cas d'un système aléatoire, les résultats de la simulation sont eux-même aléatoires et ne donnent qu'une estimation du comportement du système simulé.

Enfin, un modèle de simulation est continu si l'ensemble des instants considérés forme un intervalle compact sur l'axe du temps. Il est discret si celui-ci se compose d'un nombre fini ou dénombrable de valeurs isolées (événements).

1.6 Simulation par événements discrets

1.6.1 Événements

La simulation par événements discrets désigne la modélisation d'un système réel tel qu'il évolue dans le temps, par une représentation dans laquelle les grandeurs caractérisant le système (variables) ne changent qu'en un nombre fini ou dénombrable de points isolés dans le temps [18]. Ces points sont les instants où se passent les événements. Nous appelons événement tout changement d'état du système réel se produisant à un instant donné.

1.6.2 Simulateur

Nous appelons simulateur un programme qui met en oeuvre un modèle de simulation par événements discrets. Il respecte l'ordre chronologique et assure l'exécution de toutes les actions liées à chaque événement.

1.7 Étapes d'une simulation

Les étapes à suivre pour entreprendre une simulation d'un système sont les suivantes :

1. Formulation du problème

Cette étape consiste principalement à identifier et analyser le problème, en déterminant ses composantes, leurs relations et les frontières entre le système et son environnement

2. Elaboration du modèle

Elle consiste à extraire un modèle aussi fidèle que possible du système réel, dans le but d'expliquer et de prédire certains aspects de son comportement.

3. Identification et collecte des données

Cette phase est très délicate et essentielle, car elle dépend des types de données. La collection des données est indispensable pour l'estimation des paramètres du modèle. Ceci requiert une connaissance des méthodes statistiques et des tests d'hypothèses.

4. Validation du modèle

Dans cette partie, nous évaluons les performances du modèle en les comparant à celles du système réel.

5. Exécution de la simulation

Il s'agit d'effectuer plusieurs exécutions afin de mettre à l'épreuve le modèle en agissant sur les paramètres qui le configure et de pouvoir recueillir les résultats obtenus.

6. Analyse et interprétation des résultats

Une fois les résultats obtenus, le concepteur passe à l'analyse et à l'interprétation de ces résultats pour donner des propositions.

7. Conclusion et exploitation des résultats

Elle consiste à évaluer les perspectives d'exploitation du modèle pour d'autres préoccupations.

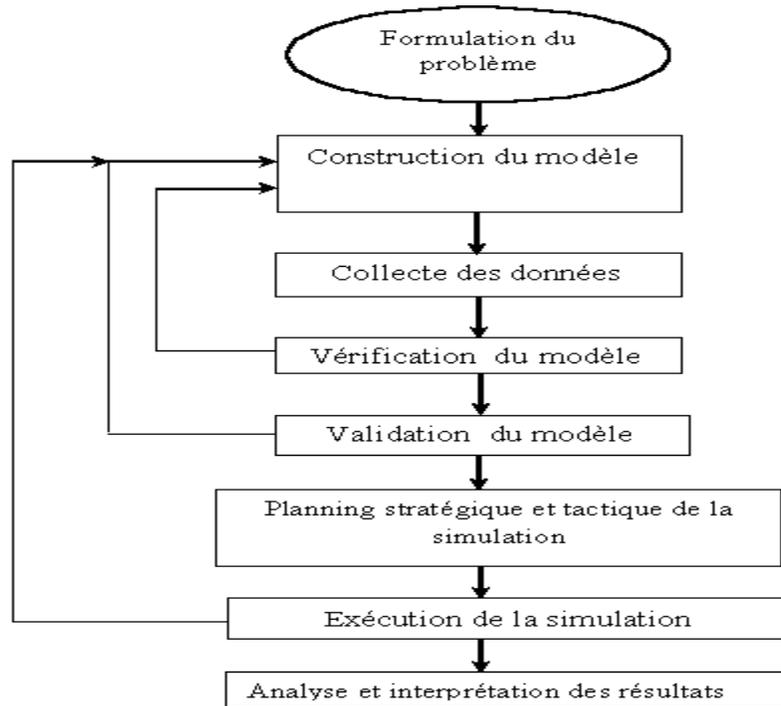


FIG. 1.2 – Étapes de la simulation

1.8 Génération des variables aléatoires

1.8.1 Génération des nombres aléatoires

La génération de nombres aléatoires est primordiale, elle fournira des échantillons artificiels d'entrée au simulateur. Ces échantillons doivent suivre la même loi de probabilité que l'échantillon construit d'observations faites sur le phénomène réel. La génération des nombres aléatoires permet de produire une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$. Il existe plusieurs méthodes de génération de nombres aléatoires [6, 18]. Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés à celles qui possèdent une grande capacité de générer un grand nombre de nombres aléatoires. La plupart des langages de programmation possèdent des générateurs de suites aléatoires uniformes sur $[0, 1]$. Par exemple RANDOM en TURBO PASCAL, RND en FORTRAN, RAND en BASIC,...

1.9 Méthodes de génération des nombres aléatoires

Toute suite de nombres aléatoires doit être uniforme et indépendante.

1. Méthode d'inversion

Cette méthode est basée sur le principe suivant : Étant donné une variable aléatoire X de fonction de répartition F , la variable aléatoire U définie par $U = F(x) = P(X \leq x)$ est uniformément distribuée sur $[0, 1]$ [42]. Ainsi, si nous disposons d'une suite U_i issue d'une loi uniforme $U[0, 1]$, la séquence x_i (réalisations de la variable aléatoire X) peut être déterminée à l'aide de la relation $x_i = F^{-1}(U_i)$. La technique d'inversion peut être utilisée pour les lois Exponentielle, Weibull, Uniforme, discrètes,... Avec l'environnement de programmation MATLAB 5.2, les commandes `EXPRND` et `WEIBRND` servent à générer des variables aléatoires suivant des lois Exponentielle et de Weibull en utilisant cette méthode. Bien que cette dernière est simple en théorie, elle s'avère complexe, voire impossible pour certaines lois de probabilités telle que la loi Normale. Nous utilisons alors d'autres méthodes faisant intervenir les propriétés spécifiques de la loi générée [6].

2. Méthode de convolution

La distribution de la somme de plusieurs variables aléatoires indépendantes est appelée convolution des distributions initiales. Cette méthode consiste à sommer deux variables aléatoires (ou plus) pour obtenir une variable aléatoire distribuée selon la loi de probabilité désirée. Elle peut être utilisée pour la loi d'Erlang et la loi Binomiale [18]. Pour générer une loi d'Erlang (MATLAB 5.2), nous utilisons la commande `GAMRND`.

3. Méthode de composition

On utilise cette méthode dans le cas d'un mélange de densités de probabilités. Elle est utilisée pour la génération des lois de Cox (un mélange de lois d'Erlang), mélange de lois Exponentielles,...

4. Méthode congruentielle multiplicative

Cette méthode est l'une des procédures la plus utilisée dans la pratique pour générer des nombres pseudo-aléatoires. Elle a été introduite par Lehmer en 1951 :

$$U_k = aU_{k-1}(\text{mod } m), \quad k = 1, 2, \dots$$

Il est clair que cette dernière génère des nombres entre 1 et $m - 1$. Pour générer

des nombres entre 0 et 1 il suffit de diviser U_k par m , où m est un nombre entier de grande taille. En général, il est une puissance de 2 pour des machines binaires.

5. Méthode congruentielle additive (suite de Fibonacci)

Elle est de forme suivante :

$$U_k = aU_{k-1} + U_{k-2} \pmod{m}.$$

1.9.1 Techniques de génération des variables aléatoires

Dans ce paragraphe, nous présentons la technique de transformation inverse, utilisée pour générer des variables aléatoires de lois de probabilité exponentielle, uniforme, de Weibull et des distributions empiriques.

Loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ . Sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \leq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.25)$$

Et sa fonction de répartition,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \leq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.26)$$

Son espérance est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et sa variance est $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Pour générer les variables X_1, X_2, X_3, \dots suivant une distribution exponentielle, nous utilisons la technique de la transformation inverse pour la distribution $F(x)$.

Les étapes

1. On pose $F(x) = N$, où N est un nombre aléatoire distribué uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. Résoudre l'équation $F(x) = N$

$$1 - e^{-\lambda x} = N.$$

Ce qui implique

$$x = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - N). \quad (1.27)$$

x est appelé un générateur aléatoire pour la distribution exponentielle.

3. Générer des nombres aléatoires N_1, N_2, N_3, \dots et calculer $x_i = F^{-1}(N_i)$

L'équation (5.3) peut être remplacée par $x_i = \frac{-1}{\lambda} \ln(N_i)$, car N_i et $(1 - N_i)$ sont uniformément distribués sur l'intervalle $[0, 1]$.

Loi Uniforme sur $[a, b]$

Soit X une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[a, b]$. Sa densité est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{sur } [a, b]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.28)$$

Et sa fonction de répartition,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b]; \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases} \quad (1.29)$$

La résolution de l'équation $F(x) = N$, nous donne $x = a + (b - a)N$.

Loi de Weibull

Soit X une variable aléatoire distribuée suivant une loi de Weibull. Sa densité est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta} & \text{si } x \geq \nu; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.30)$$

Où ν ($-\infty < \nu < +\infty$), est le paramètre de position ; α ($\alpha > 0$) est le paramètre d'échelle ; et β ($\beta > 0$) est le paramètre de forme.

Sa fonction de répartition,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta} & \text{si } x \geq \nu; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.31)$$

La moyenne et la variance de la loi de Weibull sont données par :

$$E(X) = \nu + \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right); \quad (1.32)$$

et

$$V(X) = \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right]. \quad (1.33)$$

Où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma, définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (1.34)$$

Pour générer une variable aléatoire de Weibull, nous suivons les mêmes étapes précédentes et nous obtenons que

$$x = \alpha[-\ln(1 - N)]^{\frac{1}{\beta}} + \nu. \quad (1.35)$$

Remarque 1.9.1.

Si $\nu = 0$, alors X^β est une variable exponentielle de moyenne α^β et si Y est une variable exponentielle de moyenne $\frac{1}{\lambda}$, alors $Y^{\frac{1}{\beta}}$ est une variable de Weibull, où β est son paramètre de forme et son paramètre d'échelle est $\alpha = [\frac{1}{\lambda}]^{\frac{1}{\beta}}$.

Loi d'Erlang

La variable aléatoire X est distribuée suivant une Loi d'Erlang de paramètre β , sa densité de probabilité est de forme :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta(\beta x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta x} & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.36)$$

Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \int_x^{+\infty} \frac{\beta(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta t} dt & \text{si } t \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.37)$$

L'espérance de X est

$$E(X) = \frac{n}{\beta}; \quad (1.38)$$

et sa variance est

$$V(X) = \frac{n}{\beta^2}; \quad (1.39)$$

Remarque 1.9.2.

Pour le cas $n = 1$, la loi d'Erlang devient une loi exponentielle de paramètre β .

Loi de Cox

La loi de Cox est une généralisation de la loi d'Erlang. Soit n un entier positif non nul. La loi de Cox à n phases (Cox- n) est un mélange ou (composition) de n lois d'Erlang (pas nécessairement de mêmes paramètres). La densité de probabilité f est appelée mélange des densités f_1, f_2, \dots, f_n si $f(x) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(x)$ où $\{p_i\}_{0 \leq i \leq n}$ est la densité de probabilité d'une

variable aléatoire N à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}^2$. Si $n = 1$, la loi de Cox se réduit donc à une loi d'Erlang.

Loi de Cox 2

Nous dirons qu'une variable aléatoire positive X est distribuée suivant une loi de Cox 2, si sa densité est de la forme suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p\beta_1(\beta_1 x)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} e^{-\beta_1 x} + \frac{(1-p)\beta_2(\beta_2 x)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} e^{-\beta_2 x} & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.40)$$

Nous pouvons facilement vérifier que l'espérance de X est

$$E(X) = p \frac{n_1}{\beta_1} + (1-p) \frac{n_2}{\beta_2}; \quad (1.41)$$

et sa variance est

$$V(X) = p \frac{n_1(n_1-1)}{\beta_1^2} + (1-p) \frac{n_2(n_2-1)}{\beta_2^2} - [p \frac{n_1}{\beta_1} + (1-p) \frac{n_2}{\beta_2}]^2. \quad (1.42)$$

1.9.2 Simulation des systèmes de files d'attente

Généralement, un système de files d'attente est décrit par le flot des arrivées, les temps de service, les capacités du système, de la population des clients et la discipline de service. Avant d'introduire la méthode de simulation des systèmes de files d'attente, il est nécessaire de comprendre les différents concepts d'états du système, d'événements et d'horloge.

L'état du système est caractérisé par le nombre de clients dans le système et l'état de serveur (libre ou occupé). Un événement est l'ensemble de circonstances produisant un changement instantané dans l'état du système.

Dans un système de files d'attente à plusieurs serveurs, il y a que deux événements possibles peuvent influencer sur l'état du système. Il s'agit de l'entrée du client dans le système (événement arrivée) ou l'achèvement du service d'un client ou plus (événement départ).

Dans la plupart des cas, la simulation des systèmes de files d'attente exige un compteur (horloge) qui indique les instants d'occurrences des différents événements dans le système. A l'instant d'arrivée d'un client, alors il trouve soit l'un des serveurs est libre ou tous les serveurs sont occupés. Ces événements se réalisent généralement d'une manière aléatoire. Le caractère aléatoire n'est qu'une imitation de la réalité. Dans un système de files d'attente nous nous intéressons à la durée séparant deux arrivées consécutives (variable aléatoire

distribuée selon une loi de probabilité H) et la durée de service d'un client (variable aléatoire distribuée selon une loi F).

Pour déterminer l'instant d'occurrence d'un événement, il suffit de générer une variable aléatoire suivant les lois de probabilités H (s'il s'agit d'une arrivée) ou F (dans le cas d'un départ).

Pour calculer les caractéristiques du système, nous utilisons les formules de Little opérationnelles. La simulation s'arrête dès que l'horloge indique un temps supérieur au temps fixé pour la simulation.

1.10 Test de Student

Soit une variable aléatoire U suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et une variable aléatoire X suivant une loi \mathcal{X}_n^2 indépendamment de U . On définit alors la variable de Student T_n à n degrés de liberté par :

$$T_n = \frac{U}{\sqrt{\frac{X}{n}}}.$$

1.10.1 Test de comparaison de deux systèmes de files d'attente

Étant donné deux échantillons de taille n_1 et n_2 . Peut-on admettre qu'ils ont été prélevés de la même population ? Après plusieurs exécutions des deux programmes de simulation $G/M/m$ et $G/M/\infty$ sont-ils comparables ?

Mathématiquement, nous pouvons formaliser le problème comme suit : nous observons sur le premier échantillon les réalisations d'une variable aléatoire X_1 , de fonction de répartition F_1 et sur le deuxième échantillon les réalisations d'une variable aléatoire X_2 , de fonction de répartition F_2 . Nous allons tester

$$\begin{cases} H_0 : F_1(x) = F_2(x); \\ H_1 : F_1(x) \neq F_2(x). \end{cases}$$

Dans la pratique, nous nous contenterons de vérifier l'égalité des espérances et des variances de X_1 et X_2 .

Cas de deux échantillons gaussiens

$X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$.

Les hypothèses deviennent alors,

$$H_0 : m_1 = m_2 \text{ et } \sigma_1 = \sigma_2$$

contre

$$H_1 : m_1 \neq m_2 \text{ ou } \sigma_1 \neq \sigma_2$$

Le test consiste à tester d'abord les variances et si elles ne sont pas significativement différentes, à tester les espérances en admettant $\sigma_1 = \sigma_2$.

a. Test des variances de Fisher-Snedecor

Les moyennes empiriques des deux échantillons sont :

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} X_{k_i}; \quad k = 1, \dots, n_i, \quad i = 1, 2.$$

$$E(\bar{X}_1) = m_1, \quad E(\bar{X}_2) = m_2 \quad \text{et} \quad V(\bar{X}_1) = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \quad V(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

Les variances empiriques des échantillons sont :

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} (X_{k_1} - \bar{X}_1)^2 \quad i = 1, 2.$$

Nous avons

$$\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi_{n_1-1}^2, \quad \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi_{n_2-1}^2.$$

Sous l'hypothèse H_0 , la statistique de Fisher est

$$F(n_1 - 1; n_2 - 1) = \frac{\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2}} \rightsquigarrow f(n_1 - 1; n_2 - 1),$$

et la région critique est de la forme $F > f(n_1 - 1; n_2 - 1)$. Si le test de Fisher-Snedecor abouti à la conclusion $\sigma_1 = \sigma_2$, nous testons les espérances.

b. Test des espérances de Student

Supposons $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_1 - 1)S_1^2/\sigma^2 \rightsquigarrow \mathcal{X}_{n_1-1}^2; \\ \bar{X}_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}). \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} (n_2 - 1)S_2^2/\sigma^2 \rightsquigarrow \mathcal{X}_{n_2-1}^2; \\ \bar{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_2, \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}). \end{array} \right.$$

D'où

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \mathcal{X}_{n_1+n_2-2}^2;$$

et

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1 - m_2, \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}).$$

Remarque 1.10.1.

$S_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{k=1}^{n_i} (X_{k_i} - \bar{X}_i)^2$, $i = 1, 2$ sont des estimateurs sans biais de σ_i^2 .

σ étant inconnu, nous utilisons la loi de Student :

$$T_{n_1+n_2-2} = \frac{\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (m_1 - m_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{\sigma^2(n_1+n_2-2)}}}.$$

En simplifiant σ :

$$T_{n_1+n_2-2} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})((n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2)}} \sqrt{n_1 + n_2 - 2}.$$

Les hypothèses du test étant simples, étant donné un niveau α , sous H_0 , la région critique est de la forme : $|T| > t_{(\alpha/2; \nu)}$, où $\nu = n_1 + n_2 - 2$ est le degré de liberté.

Cas d'échantillons non gaussiens

Dans ce cas, le test Fisher-Snedecor n'est plus valable, mais nous avons le résultat capital suivant qui permet de tester $m_1 = m_2$ (basé sur le théorème central limite).

Pour $n_1 = n_2 = n$ assez grand (quelque vingtaine d'observations), nous pouvons quand même comparer les moyennes m_1 et m_2 en appliquant la formule de Student que σ_1 soit différent ou non de σ_2 , car le test de Student est robuste et résiste bien à un changement de la loi de X_1 et de X_2 .

1.10.2 Intervalle de confiance pour $\theta_1 - \theta_2$

Pour comparer les caractéristiques de deux systèmes de files d'attente S_1 et S_2 , nous appliquons le test de Student. Supposons que le nombre de simulations $n_1 = n_2 = n$ est assez grand et notons par θ_i une caractéristique du système S_i .

L'estimateur de $\theta_1 - \theta_2$ est

$$\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 = \bar{X}_1 - \bar{X}_2. \quad (1.43)$$

Posons dans la statistique de Student

$$S^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{2}; \quad (1.44)$$

$S^2 \rightsquigarrow \mathcal{X}_\nu^2$, où $\nu = 2(n - 1)$ est un estimateur sans biais de σ^2 .

L'estimateur de l'écart type $\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}$, noté $\sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ est donné par

$$\sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = S\sqrt{\frac{2}{n}}. \quad (1.45)$$

L'intervalle de confiance pour $\theta_1 - \theta_2$ est donné par

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{(\alpha/2;\nu)}\sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{(\alpha/2;\nu)}\sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_2). \quad (1.46)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés dans un premier temps à l'analyse des systèmes de files d'attente. Un intérêt particulier a été accordé aux systèmes de files d'attente à un grand nombre de serveurs, tels que $M/M/m$, $G/M/m$, $M/M/\infty$ et $G/M/\infty$.

Dans un deuxième temps, nous avons introduit la méthode de simulation par événements discrets et le test de Student pour comparer deux systèmes de files d'attente, pour pouvoir les utiliser pour mesurer la performance de la méthode de stabilité forte.

Chapitre 2

Stabilité

Dans ce chapitre, nous présentons les différents concepts de convergence, d'apériodicité et de stabilité des chaînes de Markov à valeur dans un ensemble dénombrable. L'utilisation de ces critères nous permet d'étudier les différentes approches pour obtenir de meilleures approximations. Après avoir cité les méthodes de stabilité des systèmes de files d'attente existantes, nous développerons en détail l'approche de stabilité forte. Enfin, nous présentons les résultats de stabilité obtenus sur le système d'attente $G/M/\infty$ [2, 3].

2.1 Stabilité des systèmes de files d'attente

Les méthodes de stabilité nous permettent de remplacer les caractéristiques du système réel, qui sont généralement complexes, par les caractéristiques du système idéal, plus simple et pour lesquelles il existe des résultats analytiques exploitables.

2.1.1 Méthode métrique

Cette méthode considère le problème de stabilité comme étant un problème de continuité entre les espaces métriques des suites dirigeantes du système à étudier et l'espace de ses caractéristiques. La généralisation de la méthode métrique est difficile, voire impossible, car elle fait appel à des mesures qui varient suivant les espaces considérés. Une synthèse des résultats de cette méthode a été réalisée par S. T. Rachev [41].

2.1.2 Méthode de renouvellement

A. A. Borovkov a proposé la méthode de renouvellement. Son intérêt vient du fait qu'elle permet avec une même position, d'obtenir les théorèmes d'ergodicité et de stabilité (ils sont étroitement liés) pour tous les principaux types de système de files d'attente [12]. Pour les systèmes simples, cette méthode permet d'obtenir les théorèmes d'ergodicité et de stabilité pour des hypothèses minimales. Elle permet également d'obtenir l'estimation de la vitesse de convergence pour les principaux types de système de files d'attente [13].

2.1.3 Méthode de convergence faible :

Cette méthode est utilisée pour étudier la stabilité des processus Markoviens homogènes, et est basée sur des méthodes d'analyse fonctionnelle [49].

2.1.4 Méthode des fonctions tests :

Cette méthode est déduite de la méthode de Lyapunov pour l'étude de la stabilité des équations différentielles. Elle est basée sur la construction d'une fonction test qui vérifie certaines propriétés et qui permet de comparer le système réel et le système idéal. Cette étude a été réalisée par Kalashnikov et Tsitsiashvili [29]. Par la suite, d'autres résultats imposant des conditions très restrictives ont été apportés par Tweedie et Meyn. La difficulté majeure de cette méthode réside dans le choix de la fonction test .

2.1.5 Méthode de stabilité forte :

La méthode de stabilité forte a été élaborée au début des années 80 [5]. Connue également sous le nom de "méthode des opérateurs de la théorie de stabilité", elle impose que la perturbation du noyau de transition soit petite par rapport à une certaine norme. Elle permet d'obtenir de meilleures approximations en ce qui concerne les distributions stationnaires perturbées. De plus, cette méthode est applicable pour tous les systèmes complexes pouvant être décrit par des chaînes de Markov.

2.1.6 Méthode de stabilité uniforme :

Cette Méthode a été élaborée en 1994 [27]. Elle permet d'analyser la sensibilité des distributions stationnaires après perturbation des noyaux de transition des chaînes de Markov finies et irréductible. Cette analyse permet de montrer que toutes les distributions stationnaires dans une chaîne irréductible réagissent d'une manière uniforme aux perturbations de

leurs distributions de transition. Cette méthode ne pose aucune contrainte sur l'importance de la perturbation.

2.2 Méthode de stabilité forte

Contrairement aux méthodes classiques citées précédemment, la méthode de stabilité forte nous permet d'obtenir la décomposition asymptotique exacte pour les caractéristiques du système perturbé. Précisons ici que les conditions imposées sont beaucoup plus strictes que les conditions habituelles.

2.2.1 Notations et préliminaires

Considérons une chaîne de Markov homogène $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans un espace mesurable (E, ε) , où ε est une σ -algèbre dénombrablement engendrée, définie par un noyau de transition régulier $P(x, A)$, $x \in E$, $A \in \varepsilon$ et ayant une probabilité stationnaire unique π .

Notons par : $m\varepsilon$ ($m\varepsilon^+$) : l'espace des mesures finies (non négatives) sur ε et $f\varepsilon$ ($f\varepsilon^+$) : l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives) sur E . On associe à chaque noyau de transition $P(x, A)$ les applications :

$L_P : m\varepsilon \longrightarrow m\varepsilon$ et $L_P^* : f\varepsilon \rightarrow f\varepsilon$ définies en $\mu \in m\varepsilon$ et en $f \in f\varepsilon$ par :

$$\mu P(A) = L_P(A) = \int_E \mu(dx) P(x, A), \forall A \in \varepsilon; \quad (2.1)$$

$$Pf(x) = L_P^*(f)(x) = \int_E P(x, dy) f(y), \forall x \in E. \quad (2.2)$$

Supposons que l'espace $m\varepsilon$ est de Banach, \mathcal{M} de norme $\|\cdot\|$ compatible avec l'ordre structurel dans $m\varepsilon$, c'est à dire :

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\| \quad \text{pour } \mu_i \in \mathcal{M}^+, i = 1, 2; \quad (2.3)$$

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \text{pour } \mu_i \in \mathcal{M}^+, i = 1, 2 \text{ et } \mu_1 \perp \mu_2; \quad (2.4)$$

$$|\mu|(E) \leq K \|\mu\| \quad \text{pour } \mu \in \mathcal{M}; \quad (2.5)$$

où $|\mu|$ est la variation de la mesure μ , K une constante positive finie et $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap (m\varepsilon^+)$. Ces conditions sont satisfaites pour la norme suivante :

$$\|\mu\|_v = \int_E v(x) |\mu|(dx), \quad (2.6)$$

où v est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive (pas nécessairement finie) sur E .

De plus, nous supposons que l'opérateur linéaire $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est borné,

i.e. $\|P\| < \infty$.

Notons par $\Pi = \mathbf{1} \circ \pi$ le projecteur stationnaire du noyau P , où $\mathbf{1} \in f\varepsilon$ est la fonction identiquement égale à l'unité, et par I l'opérateur identité dans \mathcal{M} .

Remarque 2.2.1.

- Les normes (2.6) définies sur l'espace $f\varepsilon$ et \mathcal{M} auront les formes suivantes :

$$\|f\|_v = \sup\{|\mu f|_v, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} (v(x))^{-1} |f(x)|. \quad (2.7)$$

$$\|P\|_v = \sup\{\|\mu P\|_v, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} (v(x))^{-1} \int_E |P(x, dy)| v(y), \quad (2.8)$$

- Pour des normes sur $m\varepsilon$ non équivalentes, les normes induites associées aux opérateurs linéaires ne sont généralement pas compatibles.
- Nous avons utilisé la même notation que ce soit pour le noyau de transition ou l'opérateur linéaire correspondant sans pour autant qu'il y ait une quelconque ambiguïté. Cependant, signalons que lorsque l'opérateur s'écrit à l'intérieur du signe $\|\cdot\|$, il est indispensable de savoir que c'est la norme de l'opérateur linéaire associé et non celle de la mesure.
- De la condition (2.5), on a :

$$|\mu \mathbf{1}| = |\mu(E)| \leq k \|\mu\|, \forall \mu \in \mathcal{M},$$

d'où : $\|\mathbf{1}\| \leq k \leq \infty$.

Notons enfin que $P(t) = t^{-1} \sum_{s=0}^{t-1} P^s$, $t \geq 1$, est l'opérateur de Césaro.

2.2.2 Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov

Introduisons les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov.

Définition 2.2.1.

On dit qu'une chaîne de Markov X est uniformément ergodique par rapport à une norme $\|\cdot\|$, si elle admet une mesure stationnaire unique π et qui vérifie la condition suivante :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|P^{(t)} - \Pi\| = 0$$

Définition 2.2.2.

La chaîne de Markov X est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$, si, pour chaque noyau stochastique Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$, elle admet une probabilité invariante unique ν et :

$$\|\nu - \pi\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|Q - P\| \longrightarrow 0.$$

Théorème 2.2.1. [5]

La chaîne de Markov X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$, si et seulement si $\|(I - P - \Pi)^{-1}\| < \infty$ (l'opérateur $(I - P - \Pi)$ admet un opérateur inverse et borné).

Théorème 2.2.2. [5]

La chaîne de Markov X , d'opérateur de transition P est fortement stable par rapport à la même norme, si et seulement si :

1. $\|P\| < \infty$,
2. $\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty$.

Remarque 2.2.2.

Toute chaîne de Markov uniformément ergodique ou fortement stable par rapport à une norme peut ne pas l'être pour une autre (si ces normes ne sont pas équivalentes).

Théorème 2.2.3. [5]

Toute chaîne de Markov uniformément ergodique ou fortement stable par rapport une norme $\|\cdot\|$, l'est aussi pour chaque noyau stochastique Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$ par rapport à la même norme.

Théorème 2.2.4. [5]

Si la chaîne de Markov X est fortement stable (uniformément ergodique) par rapport à la norme $\|\cdot\|$, alors pour tout noyau Q au voisinage de P , on a :

$$\begin{aligned} \|\nu - \pi\| &\leq C\|Q - P\|, \\ \sup_t \|Q^t - P^t\| &\leq C\|Q - P\|, \end{aligned}$$

où ν est la mesure invariante de Q et $C = C(P)$ est une constante finie.

Définition 2.2.3.

Une chaîne de Markov $X = \{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ est dite récurrente au sens de Harris, s'il existe une mesure invariante π σ -positive, telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ avec $P(A) > 0$, on a :

$$P_x\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(X_n) = \infty\right\} = 1, \forall x \in E,$$

où $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice sur A .

Remarque 2.2.3.

Toute chaîne de Harris est une chaîne irréductible et toute chaîne irréductible, discrète et récurrente, est de Harris.

2.2.3 Critère de stabilité forte

Les hypothèses du critère de stabilité sont liées à la condition de perturbation et à celle du retour des états lointains

Théorème 2.2.5. [5]

Une chaîne de Markov X , récurrente au sens de Harris, est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ et apériodique, si et seulement s'il existe une mesure $\alpha \in \mathcal{M}^+$, une fonction mesurable $h \in f\varepsilon^+$ et un entier $n \geq 1$, satisfaisant aux conditions :

- a) $\pi h > 0, \alpha \mathbf{1} = 1, \alpha h > 0$,
- b) Le noyau $T = P^n - h \circ \alpha$ est non négatif,
- c) $\|T^m\| \leq \rho$ pour un certain entier $m \geq 1$ et $0 < \rho < 1$.

De plus, si elle est uniformément ergodique et apériodique, alors la condition c) est satisfaite pour tout n , α et h , vérifiant a) et b).

Remarque 2.2.4.

D'après ce théorème, on déduit que l'hypothèse de récurrence au sens de Harris n'est pas nécessaire pour démontrer l'ergodicité uniforme de X sous les conditions $a)$, $b)$ et $c)$, car les conditions $a)$ et $b)$ sont toujours vérifiées pour toute chaîne récurrente au sens de Harris.

2.3 Stabilité forte d'une chaîne de Markov

On dit qu'une chaîne est fortement v -stable, si elle est fortement stable par rapport à une norme $\|\cdot\|_v$, définie comme suit :

$$\|\mu\|_v = \int_{x \in E} v(x) |\mu|(dx), \quad (2.9)$$

où " v " est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive, pas nécessairement finie sur E , $\mu \in m\varepsilon$ et $|\mu|$ est la variation de la mesure μ .

Remarque 2.3.1.

Toute intégrale sans précision du domaine d'intégration signifie que l'on intègre sur E . Dans le cas où E est discret, l'intégrale se transforme en une somme discrète.

Corollaire 2.3.1.

Une chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris, sera fortement v -stable si elle vérifie les conditions suivantes :

- a) $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+, \exists h \in f\varepsilon^+$ telles que :
 $\pi h > 0, \alpha \mathbf{1} = 1, \alpha h > 0,$
- b) Le noyau $T = P - h \circ \alpha$ est non négatif,
- c) $\exists \rho < 1$ tel que, $Tv(x) \leq \rho v(x), \forall x \in E.$

Remarque 2.3.2.

Le choix de la fonction test v , de h et α constituent la difficulté majeure dans l'étude de la v -stabilité forte, puisqu'elles dépendent essentiellement du noyau de transition de la chaîne étudiée X .

2.4 Inégalités de stabilité

Ces inégalités nous permettent d'estimer l'écart de la déviation de la mesure stationnaire de la chaîne de Markov considérée, en fonction de la déviation du noyau de transition après perturbation.

Théorème 2.4.1. (Kartashov [31])

Considérons la chaîne de Markov X de noyau de transition P et de mesure invariante π qui vérifie les conditions du théorème (2.3.5).

Alors, pour tout noyau stochastique Q , de mesure invariante ν et pour toutes normes $\|Q - P\|_v$ suffisamment petites, on obtient l'égalité suivante :

$$\nu = \pi[I - \Delta R_0(I - \Pi)]^{-1} = \pi + \sum_{k=0}^{\infty} \pi[\Delta R_0(I - \Pi)]^k, \quad (2.10)$$

où, $\Delta = P - Q$ et $R_0 = (1 - T)^{-1}$

Corollaire 2.4.1.

Sous les mêmes conditions que le théorème (2.3.5), on a :

$$\nu = \pi + \pi[\Delta R_0(I - \Pi)] + o(\|\Delta\|_v^2), \quad (2.11)$$

pour $\|\Delta\|_v \rightarrow 0$

Corollaire 2.4.2.

Pour les mêmes conditions du théorème (2.3.5) et pour tout , $\|\Delta\| < \frac{1-\rho}{C}$, on a :

$$\|\nu - \pi\|_v \leq \|\Delta\|_v \|\pi\|_v C(1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (2.12)$$

où $C = m\|P\|_v^{m-1}(1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi\|_v)$,

et $\|\pi\|_v \leq (\alpha v)(1 - \rho)^{-1}(\pi h) m\|P\|_v^{m-1}$.

2.5 Stabilité forte dans un système $G/M/\infty$

Dans [2, 3], D. Aïssani a prouvé le fait de stabilité en utilisant les concepts d'ergodicité uniforme et de la stabilité forte (Théorème 2.2.1 et Théorème 2.2.4), pour les normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mu\|_0 &= \sup_{|Z| \leq 1} \left\{ \frac{|\mu(Z) - \mu(1)|}{|Z - 1|} + |\mu(1)| \right\}, \\ \|\mu\|_1 &= \sum_n (n + 1) |\mu_n|, \\ \|\mu\|_v &= \sum_n v(n) |\mu_n|, \end{aligned}$$

où $\mu(Z)$ est la fonction génératrice de μ .

Théorème 2.5.1. [2]

Soit P_∞ l'opérateur de transition de la chaîne X_n dans un système $G/M/\infty$, $\|\cdot\| = \|\mu\|_v$ et supposons vérifiée la condition $\int_0^\infty \frac{1}{t} dH(t) \leq \infty$. Alors la chaîne de Markov X_n est uniformément ergodique et fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$.

Après une série de recherches intermédiaires, il obtient l'estimation de stabilité suivante :

Théorème 2.5.2. [3]

Soit P_∞ l'opérateur de transition de la chaîne X_n dans un système $G/M/\infty$ et π_∞ la mesure invariante de l'opérateur P_∞ . Supposons vérifiée la condition $\int_0^\infty \frac{1}{t} dH(t) \leq \infty$. Alors la chaîne de Markov \bar{X}_n dans un système $G/M/m$ admet une distribution stationnaire π_m et

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v = \sum_{i \geq 0} v(i) |\pi_i(m) - \pi_i(\infty)| \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow \infty.$$

Conclusion

L'étude de l'ergodicité uniforme et de la stabilité forte des chaînes de Markov par rapport aux normes données dans un espace mesurable, revient à la construction d'une fonction mesurable, bornée, non-négative h , d'une mesure finie non-négative α et d'une norme vérifiant les conditions (2.3), (2.4) et (2.5).

Dans le cas de la stabilité forte, le choix de la norme appropriée est lié au choix de la fonction test v . Cette dernière doit être mesurable, bornée inférieurement par une constante finie positive, non nulle et pas nécessairement finie. Cependant, le choix de la fonction test v , de h et de α s'avèrent très difficile, car elles dépendent essentiellement du noyau de transition P de la chaîne étudiée X .

Les résultats sur la stabilité dans un système d'attente $G/M/\infty$ présentés dans le paragraphe 2.5 ont été obtenus en appliquant les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte (Théorèmes 2.2.1, ..., 2.2.4).

Chapitre 3

Stabilité forte dans un système de files d'attente $M/M/\infty$

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité forte de la chaîne de Markov induite dans le système de files d'attente $M/M/\infty$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$ définie dans (2.6). Nous appliquons le critère de stabilité. Ainsi, nous déterminons les conditions pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système perturbé $M/M/m$ par celles correspondant au système $M/M/\infty$. Enfin, nous donnons les estimations des écarts entre les opérateurs de transition P_m et P_∞ , puis les estimations de l'écart entre les distributions stationnaires π_m et π_∞ des deux chaînes de Markov induites \bar{X}_n et X_n .

3.1 Notations et préliminaires

Considérons un système de files d'attente $M/M/m$ (*FIFO*, ∞), où la distribution de la durée entre deux arrivées consécutives est exponentielle de paramètre λ et la distribution de la durée de service est exponentielle de paramètre μ .

Soit \bar{X}_n : le nombre de clients juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée dans le système. Au chapitre 1, nous avons montré que cette chaîne est de Markov, d'opérateur de transition

$$P_m = [P_{ij}(m)]_{i,j \geq 0}.$$

Considérons en même temps un système de files d'attente $M/M/\infty$ ayant la même distribution que le système précédent et une infinité de serveurs.

Soit X_n : le nombre de clients juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée dans le système. Ce processus forme aussi une chaîne de Markov d'opérateur de transition $P_\infty = [P_{ij}(\infty)]_{i,j \geq 0}$

3.1.1 Opérateur de transition

Régime transitoire

Considérons un système de files d'attente $M/M/\infty$ dont la durée des inter-arrivées suit une loi exponentielle E_λ de moyenne $\frac{1}{\lambda}$ et la durée de service suit une loi exponentielle E_μ de paramètre μ .

Notons que :

T_n : est le moment d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client,

t : le temps entre les moments de deux arrivées consécutives.

X_n : le nombre de clients dans le système à l'instant juste avant T_n , et supposons que les distributions de la durée de service coïncident pour tous les serveurs.

D'après la formule (1.22), nous déduisons que les probabilités de transition de la chaîne X_n sont données par :

$$P_{ij}(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i + 1; \\ \int \lambda C_{i+1}^{i+1-j} (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-(\mu j + \lambda)t} dt & \text{si } j \leq i + 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2 Stabilité forte de la chaîne de Markov X_n

Soit $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ l'espace des mesures finies sur \mathbb{N} (la σ -algèbre sur \mathbb{N} est engendrée par les singletons de \mathbb{N}) et $\eta = \{f(i)\}$ l'espace des fonctions mesurables bornées sur \mathbb{N} .

L'opérateur de transition P_{ij} forme une application linéaire définie par :

$$P_{ij} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$(\mu P)_k(j) = \sum_{i \geq 0} \mu_i P_{ik}(j). \quad (3.2)$$

Le symbole Pf , pour $f \in \eta$ désignera la fonction

$$Pf(k) = \sum_{i \geq 0} f(i) P_{ki}. \quad (3.3)$$

et l'action de la mesure μ sur la fonction f sera notée par μf .

Nous introduisons sur \mathcal{M} une classe spéciale de norme :

$$\|\mu\|_v = \sum_{j \geq 0} v(j) |\mu_j|, \quad (3.4)$$

vérifiant les propriétés (2.3), (2.4) et (2.5) données précédemment dans le chapitre 2, et v est une fonction mesurable et bornée inférieurement par une constante strictement positive (pas nécessairement finie).

Cette norme induit dans l'espace η la norme

$$\|f\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{|f(k)|}{v(k)}. \quad (3.5)$$

Considérons enfin l'espace \mathcal{B} des opérateurs linéaires bornés, de norme

$$\|P\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |P_{kj}|. \quad (3.6)$$

Remarque 3.2.1.

Toute intégrale sans spécification du domaine d'intégration, signifie que l'on intègre de δ à ∞ , où $\delta > 0$.

3.2.1 Stabilité forte

Définition 3.2.1.

La chaîne de Markov X_n , d'opérateur de transition P_∞ , et de mesure invariante π_∞ est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$, si $\|P_\infty\|_v < \infty$, chaque noyau de transition sur l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{N}))$ d'un certain voisinage $\{P_m : \|P_m - P_\infty\|_v \leq \epsilon\}$ admet une mesure invariante unique $\pi_m = \pi_m P_m$ et s'il existe une constante $C = C(P_\infty)$ telle que :

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v \leq C \|P_m - P_\infty\|_v. \quad (3.7)$$

D'après le corollaire (2.4.1) du chapitre 2, pour que la chaîne de Markov induite du système $M/M/\infty$ soit stable, il suffit de trouver une mesure α et une fonction mesurable h sur \mathbb{N} , telles que :

1. $\pi_\infty h_i > 0, h_i \circ \alpha_j > 0$ et $\alpha_j \mathbf{1} = 1$,
2. L'opérateur $T_{ij} = P_{ij} - h_i \circ \alpha_j$ est non négatif,
3. $\exists \theta < 1$ tel que $Tv(k) \leq \theta v(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,
4. $\|P_\infty\|_v < \infty$.

Pour cela, choisissons la fonction v comme suit :

$$\begin{aligned} v : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ n &\rightarrow v(n) = \beta^n. \end{aligned}$$

et $\beta > 1$ Dans le premier chapitre, nous avons démontré que le système $M/M/\infty$ est ergodique pour tous λ et μ . Vérifions les conditions du critère de stabilité.

$$\bullet h_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 1, \\ 1 & \text{si } i=0, \end{cases}$$

$$\bullet \alpha_j = P_{0j}(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > 1, \\ \int \lambda(1 - e^{-\mu t})^{1-j} e^{-(\mu j + \lambda)t} dt & \text{si } j \leq 1. \end{cases}$$

Vérifions les quatre conditions :

$$1. \pi_\infty h_i = \pi_0(\infty) > 0, \alpha_j \mathbf{1} = 1 \text{ et } \alpha_j h_i = \alpha_0 = P_{00}(\infty) > 0.$$

$$2. T_{ij} = P_{ij}(\infty) - h_i \circ \alpha_j = \begin{cases} P_{ij}(\infty) - P_{0j}(\infty) \times 1 = 0 & \text{si } i=0, \\ P_{ij}(\infty) - P_{0j}(\infty) \times 0 = P_{ij}(\infty) = P_\infty & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

D'où,

$$T_{ij} \geq 0, \forall i, j \geq 0.$$

3. D'après (3.3), on a :

$$\begin{aligned} Tv(k) &= \sum_{j \geq 0} \beta^j T_{kj} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta^j P_{kj} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \beta^j \int \lambda C_{k+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{k+1-j} e^{-\mu j t} e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \beta^j e^{-\mu j t} (1 - e^{-\mu t})^{k+1-j} e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int [1 - e^{-\mu t} + \beta e^{-\mu t}]^{k+1} e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int [1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}]^{k+1} e^{-\lambda t} dt \\ &\leq \beta^{k+1} \lambda \int e^{-\lambda t} dt \text{ (car } e^{-\mu t} < 1, \forall t > 0 \text{ et } \forall \mu > 0) \\ &\leq \beta^{k+1} e^{-\lambda \delta} \\ &\leq \beta^k [\beta e^{-\lambda \delta}] \end{aligned}$$

Il suffit de prendre

$$\theta = \beta e^{-\lambda\delta} \quad (3.8)$$

En effet $\theta < 1$ pour tout $\beta < e^{\lambda\delta}$

4. $T = P_\infty - h \circ \alpha \Rightarrow P_\infty = T + h \circ \alpha$ et $\|P_\infty\|_v = \|T + h \circ \alpha\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\alpha\|_v$.

Or, d'après l'équation (3.6) :

$$\begin{aligned} \|T\|_v &= \sup_{i \geq 0} \beta^{-i} \sum_{j \geq 0} \beta^{-j} |T_{kj}| \\ &\leq \sup_{i \geq 0} \beta^{-i} \theta \beta^i \\ &\leq \theta < 1 \end{aligned}$$

Et d'après les équations (3.5), (3.6), nous avons

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_v &= \sum_{j \geq 0} |\alpha_j| \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j \int \lambda (1 - e^{-\mu t})^{1-j} e^{-(\mu j + \lambda)t} dt \\ &= \theta < \infty . \end{aligned}$$

Et $\|h\|_v = \sup_{i \geq 0} \beta^{-i} = 1$. D'où $\|P_\infty\|_v < \infty$.

Les conditions du critère de stabilité forte étant vérifiées (corollaire 2.4.1), nous pouvons formuler le résultat suivant :

Théorème 3.2.1.

Supposons que dans un système $M/M/\infty$, la condition géométrique soit vérifiée pour tous λ et μ . Alors, $\forall \beta$ tel que $1 < \beta < e^{\lambda\delta}$, la chaîne de Markov X_n est fortement v -stable pour une fonction $v(n) = \beta^n$.

Le théorème 3.2.1, nous permet de conclure qu'il est possible d'approximer les caractéristiques du système $M/M/m$ par celles du système $M/M/\infty$

3.3 Inégalités de Stabilité

3.3.1 Déviation de l'opérateur de transition

Afin d'estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov (\bar{X}_n) et (X_n) , nous devons estimer au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition P_m par rapport à l'opérateur P_∞ .

Théorème 3.3.1.

Soient P_m et P_∞ les noyaux de transition des chaînes de Markov incluses dans les systèmes $M/M/m$ et $M/M/\infty$ respectivement. Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < e^{\lambda\delta}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|P_m - P_\infty\|_v \leq 3\theta + \frac{\lambda\beta}{\lambda + m\mu} \quad (3.9)$$

Preuve 3.3.1.

De (3.6) nous avons :

$$\begin{aligned} \|P_m - P_\infty\|_v &= \sup_{i \geq 0} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j \geq 0} \beta^j |P_m - P_\infty| \right\} \\ &= \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\} + \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=0}^{m-1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} A_1(m) = \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\}, \\ A_2(m) = \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=0}^{m-1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\}. \end{cases}$$

D'après (3.1) et (1.17), on a :

$$\begin{aligned} 1) A_1(m) &= \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j \left[\int \lambda C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-\mu j t} e^{-\lambda t} dt - \int \lambda \frac{(m\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-(m\mu+\lambda)t} dt \right] \right\} \\ &= \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j \left[\int \lambda C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-\mu j t} e^{-\lambda t} dt - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\lambda(m\mu)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \int t^{i+1-j} e^{-(m\mu+\lambda)t} dt \right] \right\} \\ &\leq \sup_{i \geq m-1} \left\{ \lambda \beta^{-i} \int [1 - e^{-\mu t} + \beta e^{-\mu t}]^{i+1} e^{-\lambda t} dt + \sum_{j=m}^{i+1} \frac{\lambda \beta^2 (m\mu)^{i+1-j}}{[\beta(\lambda+m\mu)]^{i+2-j}} \right\} \\ &\leq \sup_{i \geq m-1} \left\{ \lambda \beta^{-i} \int [1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}]^{i+1} e^{-\lambda t} dt + \frac{\lambda \beta}{(\lambda+m\mu)} \sum_{j=m}^{i+1} \left[\frac{m\mu}{\beta(\lambda+m\mu)} \right]^{i+1-j} \right\} \\ &\leq \sup_{i \geq m-1} \left\{ \lambda \beta \int e^{-\lambda t} dt + \frac{\lambda \beta}{\lambda+m\mu} \frac{1 - \left[\frac{m\mu}{\beta(\lambda+m\mu)} \right]^{i+2-m}}{1 - \frac{m\mu}{\beta(\lambda+m\mu)}} \right\} \quad (\text{car } e^{-\mu t} < 1, \forall t > 0 \text{ et } \forall \mu > 0) \\ &\leq \theta + \frac{\lambda \beta}{\lambda+m\mu} \frac{1 - \frac{m\mu}{\beta(\lambda+m\mu)}}{1 - \frac{m\mu}{\beta(\lambda+m\mu)}} \\ &\leq \theta + \frac{\lambda \beta}{\lambda+m\mu}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)A_2(m) &= \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=0}^{m-1} \beta^j \left[\int \lambda C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-\mu j t} e^{-\lambda t} dt - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\lambda(\mu m)^{i-m+1}}{(i-m)!} \int \int_0^{\mu_0} C_m^j w^{i-m} e^{-\mu m w} [1 - e^{-\mu(\mu_0-w)}]^{m-j} e^{-\mu j(\mu_0-w)} e^{-\lambda \mu_0} dw d\mu_0 \right] \right\} \\
&\leq \sup_{i \geq m-1} \left\{ \lambda \beta^{-i} \int [1 - e^{-\mu t} + \beta e^{-\mu t}]^{i+1} e^{-\lambda t} dt + \frac{\lambda(\mu m)^{i-m+1} \beta^{-i}}{(i-m)!} \int \int_0^{\mu_0} w^{i-m} e^{-\mu m w} [1 + \right. \\
&\quad \left. (\beta - 1)e^{-\mu(\mu_0-w)}]^{m-j} e^{-\lambda \mu_0} dw d\mu_0 \right\} \\
&\leq \rho + \sup_{i \geq m-1} \left\{ \frac{\lambda \beta^{-i} (\mu m)^{i-m+1}}{(i-m)!} \int \int_0^{\mu_0} w^{i-m} e^{-\mu m w} [1 + (\beta - 1)e^{-\mu(\mu_0-w)}]^{m-j} e^{-\lambda \mu_0} dw d\mu_0 \right\} \\
&\leq \theta + \sup_{i \geq m-1} \left\{ \frac{\lambda \beta^{m-i} (\mu m)^{i-m+1}}{(i-m)!} \int e^{-\lambda \mu_0} \int_0^{\mu_0} w^{i-m} e^{-\mu m w} dw d\mu_0 \right\} \\
&\leq \theta + \sup_{i \geq m-1} \left\{ \frac{\lambda (\mu m)^{i-m+1}}{\beta^{i-m} (i-m)!} \int e^{-\lambda \mu_0} \frac{(i-m)!}{(\mu m)^{i-m+1}} (1 - e^{-\mu m \mu_0}) d\mu_0 \right\} \\
&\leq \theta + \beta \lambda \int e^{-\lambda t} dt \\
&\leq 2\theta
\end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\|P_m - P_\infty\|_v = A_1(m) + A_2(m)$$

$$\leq \left(\theta + \frac{\lambda \beta}{\lambda + m \mu} \right) + 2\theta$$

$$\leq 3\theta + \frac{\lambda \beta}{\lambda + m \mu}$$

D'où le résultat.

3.3.2 Estimation de stabilité forte

Pour pouvoir utiliser le théorème 2.5.1, estimons d'abord $\|\pi_\infty\|_v$ et $\|\mathbf{1}\|_v$ où $\mathbf{1} \in \eta$ est la fonction identiquement égale à l'unité.

Lemme 3.3.1.

Soit π_∞ la distribution stationnaire de la chaîne incluse du système $M/M/\infty$. Alors,

pour tout $1 < \beta < e^{\lambda \delta}$, nous avons

$$\|\pi_\infty\|_v \leq e^{(\beta-1)\frac{\lambda}{\mu}} \text{ et } C = 1 + e^{\frac{(\beta-1)\lambda}{\mu}}$$

Preuve 3.3.2.

Par définition,

$$\|\pi_\infty\|_v = \sum_{j \geq 0} \beta^j \pi_j(\infty) = \sum_{j \geq 0} \frac{(\frac{\beta\lambda}{\mu})^j}{j!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

D'où,

$$\|\pi_\infty\|_v = e^{(\beta-1)\frac{\lambda}{\mu}} \quad (3.10)$$

De la définition de $\|\cdot\|_v$ dans η nous avons, $\|\mathbb{I}\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} = 1$.

Nous savons que $C = 1 + \|\mathbb{I}\|_v \|\pi_\infty\|_v$.

D'où $C = 1 + \|\pi_\infty\|_v = 1 + e^{\frac{(\beta-1)\lambda}{\mu}}$.

Théorème 3.3.2.

Soit π_m et π_∞ les distributions stationnaires des chaînes de Markov des systèmes $M/M/m$ et $M/M/\infty$, respectivement et $1 < \beta < e^{\lambda\delta}$. Alors,

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v \leq \left(3\theta + \frac{\lambda\beta}{\lambda + m\mu}\right) \left(1 + e^{\frac{(\beta-1)\lambda}{\mu}}\right) e^{\frac{(\beta-1)\lambda}{\mu}} \left[1 - \theta - \left(1 + e^{\frac{(\beta-1)\lambda}{\mu}}\right) \left(3\theta + \frac{\lambda\beta}{\lambda + m\mu}\right)\right]^{-1}. \quad (3.11)$$

Preuve 3.3.3.

Nous savons que, $\|\Delta\|_v = \|P_m - P_\infty\|_v$

Et d'après la relation (3.9), nous avons :

$$\|\Delta\|_v \leq 3\theta + \frac{\lambda\beta}{\lambda + m\mu}$$

Utilisons la conséquence 2.5.2

Pour tout Δ tel que $\|\Delta\|_v < \frac{1-\theta}{C}$, on a l'estimation :

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi\|_v (1 - \theta - C \|\Delta\|_v)^{-1}$$

où $\Delta = P_m - P_\infty$ et $C = 1 + \|\mathbb{I}\|_v \|\pi_\infty\|_v$.

Et par conséquent, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v \leq \left(3\theta + \frac{\lambda\beta}{\lambda + m\mu}\right) \left(1 + e^{\frac{(\beta-1)\lambda}{\mu}}\right) e^{\frac{(\beta-1)\lambda}{\mu}} \left[1 - \theta - \left(1 + e^{\frac{(\beta-1)\lambda}{\mu}}\right) \left(3\theta + \frac{\lambda\beta}{\lambda + m\mu}\right)\right]^{-1}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé les conditions pour lesquelles la chaîne de Markov induite du système $M/M/\infty$ est fortement v stable. Les résultats nous permettent d'approximer les caractéristiques du système de files d'attente $M/M/m$ par celles du système de files d'attente $M/M/\infty$ avec une précision qui dépend de la perturbation.

Chapitre 4

Stabilité forte dans un système de files d'attente $G/M/\infty$

Le but de ce chapitre est d'obtenir les inégalités de stabilité dans le système de files d'attente $G/M/\infty$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$ défini dans (2.6). Contrairement à ce qui a été réalisé dans [2, 3], nous appliquons ici le critère de stabilité forte. Ainsi, nous déterminons les conditions pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système perturbé $G/M/m$ par celles qui correspondent au système $G/M/\infty$. Enfin, nous donnons les estimations des écarts entre les opérateurs de transition P_m et P_∞ , puis les estimations de l'écart entre les distributions stationnaires π_m et π_∞ des deux chaînes de Markov induites \bar{X}_n et X_n .

4.1 Notations et préliminaires

Considérons un système de files d'attente $G/M/m$ ($FIFO, \infty$), où la distribution de la durée entre deux arrivées consécutives est quelconque H de paramètre λ et la distribution de la durée de service est exponentielle de paramètre μ .

Soit \bar{X}_n : le nombre de clients juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée dans le système.

Dans le chapitre 1, nous avons montré que cette chaîne est de Markov d'opérateur de transition $P_m = [P_{ij}(m)]_{i,j \geq 0}$.

Considérons en même temps un système de files d'attente $G/M/\infty$ ayant la même distribution que le système précédent et d'une infinité de serveurs.

Soit X_n : le nombre de clients juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée dans le système. Ce processus forme aussi une chaîne de Markov d'opérateur de transition $P_\infty = [P_{ij}(\infty)]_{i,j \geq 0}$.

4.1.1 Opérateur de transition

L'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite de la file d'attente $G/M/\infty$ est défini par :

$$P_{ij}(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i+1; \\ \int C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-\mu j t} dH(t) & \text{si } j \leq i+1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Remarque 4.1.1.

Dans ce chapitre, nous utilisons les mêmes notations que le chapitre précédent.

4.2 Stabilité forte

Pour pouvoir démontrer que le système de la chaîne de Markov induite X_n est fortement stable, nous allons appliquer le corollaire (2.4.1) du chapitre 2. Il est suffisant de trouver une mesure α et une fonction mesurable h sur \mathbb{N} , telles que :

1. $\pi_\infty h_i > 0, h_i \circ \alpha_j > 0$ et $\alpha_j \mathbf{1} = 1$,
2. L'opérateur $T_{ij} = P_{ij} - h_i \circ \alpha_j$ est non négatif,
3. $\exists \theta < 1$ tel que $Tv(k) \leq \theta v(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,
4. $\|P_\infty\|_v < \infty$.

Pour cela, choisissons :

$$v(k) = \beta^k \text{ où } \beta > 1,$$

$$\bullet h_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 1, \\ 1 & \text{si } i=0, \end{cases}$$

$$\bullet \alpha_j = P_{0j}(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > 1, \\ \int (1 - e^{-\mu t})^{1-j} e^{-\mu j t} dH(t) & \text{si } j \leq 1. \end{cases}$$

Montrons les quatre conditions :

1. $\pi_\infty h_i = \pi_0(\infty) > 0, \alpha_j \mathbf{1} = 1$ et $\alpha_j h_i = \alpha_0 = P_{00}(\infty) > 0$.

$$2. T_{ij} = P_{ij}(\infty) - h_i \circ \alpha_j = \begin{cases} P_{ij}(\infty) - P_{0j}(\infty) \times 1 = 0 & \text{si } i=0, \\ P_{ij}(\infty) - P_{0j}(\infty) \times 0 = P_{ij}(\infty) = P_\infty & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

D'où, $T_{ij} \geq 0, \forall i, j \geq 0$.

3. D'après (3.3), on a :

$$\begin{aligned}
Tv(k) &= \sum_{j \geq 0} \beta^j T_{kj} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta^j P_{kj} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \beta^j \int C_{k+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{k+1-j} e^{-\mu j t} dH(t) \\
&= \int \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \beta^j e^{-\mu j t} (1 - e^{-\mu t})^{k+1-j} dH(t) \\
&= \int [1 - e^{-\mu t} + \beta e^{-\mu t}]^{k+1} dH(t) \\
&= \int [1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}]^{k+1} dH(t) \\
&\leq \beta^{k+1} \int dH(t) \\
&\leq \beta^{k+1} [1 - H(\delta)].
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\theta = \beta[1 - H(\delta)]$

Nous avons $\theta < 1$ pour tout β tel que $\beta < [1 - H(\delta)]^{-1}$.

4. $T = P_\infty - h \circ \alpha \Rightarrow P_\infty = T + h \circ \alpha$ et $\|P_\infty\|_v = \|T + h \circ \alpha\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\alpha\|_v$.

Or, d'après l'équation (3.6) :

$$\begin{aligned}
\|T\|_v &= \sup_{i \geq 0} \beta^{-i} \sum_{j \geq 0} \beta^{-j} |T_{kj}| \\
&\leq \sup_{i \geq 0} \beta^{-i} \theta \beta^i \\
&\leq \theta < 1
\end{aligned}$$

Et d'après les équations (3.5), (3.6), nous avons

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|_v &= \sum_{j \geq 0} |\alpha_j| \\
&= \sum_{j \geq 0} \beta^j \int (1 - e^{-\mu t})^{1-j} e^{-\mu j t} dH(t) \\
&= \theta < \infty .
\end{aligned}$$

Et $\|h\|_v = \sup_{i \geq 0} \beta^{-i} = 1$.

D'où $\|P_\infty\|_v < \infty$.

Les conditions du critère de stabilité forte étant vérifiées (corollaire 2.4.1), nous pouvons formuler le résultat suivant :

Théorème 4.2.1.

Supposons que dans un système $G/M/\infty$, la condition géométrique soit vérifiée pour tous λ et μ . Alors, $\forall \beta$ tel que $1 < \beta < [1 - H(\delta)]^{-1}$, la chaîne de Markov X_n est fortement v -stable pour une fonction $v(n) = \beta^n$.

Le théorème 4.2.1, nous permet de conclure qu'il est possible d'approximer les caractéristiques du système $G/M/m$ par celles du système $G/M/\infty$

4.3 Inégalités de stabilité du système $G/M/\infty$

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov X_n et \bar{X}_n , estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition P_m , voir la formule (1.22) (resp. P_∞ , voir la formule (4.1)) de la chaîne induite du système $G/M/m$ (resp. $G/M/\infty$).

4.3.1 Estimation quantitative de la norme de déviation de l'opérateur de transition dans le système $G/M/\infty$ **Lemme 4.3.1.**

Soit P_m et P_∞ les noyaux de transition des chaînes de Markov incluses des systèmes $G/M/m$ et $G/M/\infty$ respectivement, pour $\mathcal{W} = \int \frac{1}{t} dH(t) \leq \infty$ et pour tous β tel que $1 < \beta < [1 - H(\delta)]^{-1}$. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée,

$$B_1(m) = \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\} \leq \theta + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m}. \quad (4.2)$$

Preuve 4.3.1.

$$\begin{aligned} B_1(m) &= \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\} \\ &= \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j \left[\int C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-(\mu t j)} dH(t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int \frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu t} dH(t) \right] \right\} \\ &\leq \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j \left[\int C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-(\mu t j)} dH(t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int \frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu t} dH(t) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{i \geq m-1} \left\{ \int \beta^{-i} [1 + \beta e^{-\mu t} - e^{-\mu t}]^{i+1} dH(t) + \beta \int \sum_{j=m}^{i+1} \frac{[\frac{\mu m t}{\beta}]^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu m t} dH(t) \right\} \\
&\leq \sup_{i \geq m-1} \left\{ \int \beta^{-i} [1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}]^{i+1} dH(t) + \beta \int \sum_{j=m}^{i+1} \frac{[\frac{\mu m t}{\beta}]^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu m t} dH(t) \right\}
\end{aligned}$$

Nous savons que pour tout $\beta > 1$, nous avons :

$$\sum_{j=m}^{i+1} \frac{[\frac{\mu m t}{\beta}]^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\frac{\mu m t}{\beta}]^{i+1-j}}{(i+1-j)!} = e^{\frac{\mu m t}{\beta}}.$$

Ce qui implique,

$$B_1(m) \leq \beta \int dH(t) + \beta \int e^{\frac{\mu m t}{\beta}} e^{-\mu m t} dH(t)$$

$$\leq \theta + \beta \int e^{-\frac{\beta-1}{\beta} \mu m t} dH(t)$$

$$\leq \theta + \int \frac{\beta^2}{(\beta-1)\mu m t} dH(t), \text{ (car } e^{-\frac{\beta-1}{\beta} \mu m t} < \frac{\beta}{(\beta-1)\mu m t}, \text{ pour tout } \beta > 1)$$

$$\leq \theta + \frac{\beta^2}{(\beta-1)\mu m} \int \frac{1}{t} dH(t)$$

$$\leq \theta + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta-1)\mu m}.$$

Lemme 4.3.2.

Sous les mêmes conditions que le lemme précédent, alors

$$B_2(m) = \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j \leq m-1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\} \leq 2\theta. \quad (4.3)$$

Preuve 4.3.2.

$$\begin{aligned}
B_2(m) &= \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j \leq m-1} \beta^j \left[\int C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-(\mu t)j} dt - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{(\mu m)^{i-m+1}}{(i-m)!} \int_0^t C_m^j w^{i-m} e^{-\mu m w} e^{-\mu(t-w)j} [1 - e^{-\mu(t-w)}]^{m-j} dw dH(t) \right] \right\} \\
&\leq \sup_{i \geq m-1} \left\{ \int \beta^{-i} [1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}]^{i+1} dH(t) + \frac{(\mu m)^{i-m+1} \beta^{-i}}{(i-m)!} \int_0^t w^{i-m} e^{-\mu m w} [1 + \beta e^{-\mu(t-w)} - \right. \\
&\quad \left. e^{-\mu(t-w)}]^m dw dH(t) \right\} \\
&\leq \theta + \sup_{i \geq m-1} \left\{ \frac{(\mu m)^{i-m+1}}{(i-m)!} \beta^{-i} \int_0^t w^{i-m} e^{-\mu m w} [1 + (\beta - 1)e^{-\mu(t-w)}]^m dw dH(t) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \theta + \sup_{i \geq m-1} \left\{ \frac{(\mu m)^{i-m+1}}{(i-m)!} \beta^{m-i} \int_0^t \int_0^w w^{i-m} e^{-\mu w} dw dH(t) \right\} \quad (\text{car } e^{-\mu(t-w)} < 1, \\
&\forall (t-w) > 0) \\
&\leq \theta + \beta \int (1 - e^{-\mu t}) dH(t) \\
&\leq \theta + \beta \int dH(t) \quad (\text{car } (1 - e^{-\mu t}) < 1, \forall t > 0) \\
&\leq 2\theta.
\end{aligned}$$

Théorème 4.3.1.

Soit P_m et P_∞ les noyaux de transition des chaînes de Markov incluses des système $G/M/m$ et $G/M/\infty$ respectivement. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée,

$$\|P_m - P_\infty\|_v \leq 3\theta + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m}. \quad (4.4)$$

Preuve 4.3.3.

D'après (3.6), nous avons :

$$\|P_m - P_\infty\|_v = \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\} + \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j \leq m-1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\}.$$

Et d'après les lemmes précédents nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
\|P_m - P_\infty\|_v &= B_1(m) + B_2(m) \\
&\leq \left(\theta + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m} \right) + 2\theta \\
&\leq 3\theta + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

4.3.2 Inégalités de stabilité**Théorème 4.3.2.**

Soit π_m et π_∞ les distributions stationnaires des chaînes de Markov des systèmes $G/M/m$ et $G/M/\infty$.

Pour $\mathcal{W} = \int \frac{1}{t} dH(t) \leq \infty$ et pour tous β tel que $1 < \beta < [1 - H(\delta)]^{-1}$, nous avons,

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v \leq \left(3\theta + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m} \right) (1 + \Pi_\infty(\beta)) [1 - \theta - (1 + \Pi_\infty(\beta)) \left(3\theta + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m} \right)]^{-1}. \quad (4.5)$$

Preuve 4.3.4.

Nous savons que, $\|\Delta\|_v = \|P_m - P_\infty\|_v$.

Et par conséquent :

$$\|\Delta\|_v = 3\rho + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m}. \quad (4.6)$$

Estimons $\|\pi_\infty\|_v$ et $\|\mathbf{I}\|_v$ où \mathbf{I} est une fonction identiquement égale à l'unité.

$$\|\pi_\infty\|_v = \Pi_\infty(\beta) = \sum_{n \geq 0} \prod_{k=1}^n \frac{h(k\mu)}{1 - h(k\mu)} (\beta - 1)^n, \quad (4.7)$$

où, $h(s) = \int e^{-st} dH(t)$

$$\|\mathbf{I}\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} = 1.$$

D'où,

$$C = 1 + \|\mathbf{I}\|_v \|\pi_\infty\|_v = 1 + \Pi_\infty(\beta). \quad (4.8)$$

Utilisons la conséquence 2.5.2.

Pour tout Δ tel que $\|\Delta\| < \frac{1-\rho}{C}$, nous avons l'estimation :

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi\|_v (1 - \theta - C \|\Delta\|_v)^{-1}.$$

Alors, nous avons :

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v \leq \left(3\theta + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta-1)\mu m}\right) (1 + \Pi_\infty(\beta)) \left[1 - \theta - (1 + \Pi_\infty(\beta)) \left(3\theta + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta-1)\mu m}\right)\right]^{-1}.$$

Conclusion

La chaîne X_n étant fortement stable, alors d'après la définition (3.2.1), elle peut approcher une autre chaîne de Markov dont le noyau de transition est au voisinage du noyau de transition P_∞ . En introduisant une petite perturbation au niveau du nombre de serveurs, nous aurons un système $G/M/m$ dont la chaîne de Markov correspondante est \tilde{X}_n de noyau de transition P_m . Les caractéristiques de la chaîne \tilde{X}_n peuvent-être approximées par celles de X_n avec une précision qui dépend de la perturbation.

L'utilisation du critère de stabilité forte permet donc d'obtenir les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

Chapitre 5

Mesure de Performance de la Méthode de Stabilité Forte

La première partie de notre travail a concerné l'étude théorique de stabilité forte dans les systèmes de files d'attente $M/M/\infty$ et $G/M/\infty$. Nous avons prouvé que sous certaines conditions, les caractéristiques stationnaires et non stationnaires des systèmes de files d'attentes $M/M/m$ et $G/M/m$ peuvent être approximées par celles correspondantes des systèmes $M/M/\infty$ et $G/M/\infty$ respectivement. Par ailleurs, nous avons pu obtenir les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'aspect pratique du problème. En effet, nous observons deux systèmes de files d'attente de type $M/M/m$ et $M/M/\infty$. Nous calculons les écarts entre les caractéristiques correspondantes des deux systèmes. Ainsi, nous obtenons la précision de l'approximation des caractéristiques du système $M/M/m$ par celles correspondantes du système $M/M/\infty$.

Pour réaliser cette observation, nous utilisons une technique de simulation par événements discrets des systèmes de files d'attente $M/M/m$ et $M/M/\infty$ (chapitre 1.B). Cette technique, nous permet de calculer les caractéristiques des deux systèmes et de les comparer (nous réalisons plusieurs observations et nous calculons les caractéristiques pour chacun d'eux). Nous procédons ensuite à un test statistique (test de Student) pour tester les caractéristiques correspondantes (voir chapitre 1.B). Afin d'être le plus proche de la réalité, nous choisissons des lois générales des distributions de probabilités les plus rencontrées dans la pratique (voir chapitre 1.B). Pour la programmation, nous utilisons le logiciel Delphi6.

Nous représentons les durées de service et les durées entre les arrivées des demandes dans les deux systèmes par une suite de variables aléatoires distribuées selon une loi exponentielle (avec des paramètres différents).

Avant d'estimer les intervalles de confiance pour les écarts entre les caractéristiques correspondantes des deux systèmes, nous allons d'abord valider les modèles de simulation des deux systèmes de files d'attente $M/M/m$ et $M/M/\infty$.

5.1 Validation des modèles de simulation

Pour valider un modèle de simulation d'un système de files d'attente, il suffit de simuler R fois et de comparer les résultats obtenus (par exemple, le nombre moyen de clients dans le système, le temps moyen de séjour, ...) avec les résultats théoriques correspondants. Notons par m_1 une caractéristique moyenne donnée par le simulateur et m_0 sa valeur théorique.

Le problème revient donc à tester

$$"H_0 : m_1 = m_0" \text{ contre } "H_1 : m_1 \neq m_0".$$

A la $r^{\text{ème}}$ simulation, nous obtenons un estimateur X_r de m . Soit \bar{X} et S^2 sa moyenne et sa variance empiriques.

La validation du modèle se base sur le test (bilatéral) de statistique

$$T_{R-1} = \frac{\bar{X} - m_0}{S} \sqrt{R-1}$$

suivant une loi de Student de degré de liberté $\nu = R - 1$. Au seuil α (risque de première espèce¹) donné, la région critique du test est : $|T| > t_{(\alpha/2; \nu)}$.

Dans ce qui suit, nous fixons le temps de simulation à $x = 1000$ (unités de temps) et le nombre de simulation est $R = 100$. Le degré de liberté est alors $\nu = 99$.

Au seuil $\alpha = 0.05$ donné, la statistique de Student tabulée est $t_{(0.025; 99)} = 1.98$.

Et par conséquent, nous obtenons les résultats suivants :

Premier cas

Les paramètres d'entrée choisis du système de files d'attente sont les suivants :

Le paramètre de la loi exponentielle d'inter-arrivées : $\lambda = 3$.

Le paramètre de la loi exponentielle de la durée de service : $\mu = 4$.

Après simulation, les résultats obtenus sont les suivants :

¹Le risque de première espèce étant la probabilité de rejeté H_0 à tort.

m	caractéristiques	Valeur après simulation	Valeur théorique	Statistique de Student
3	L_1	0.751	0.764	0.596
	L_{q1}	0.012	0.014	0.594
	W_1	0.245	0.246	0.582
	W_{q1}	0.004	0.004	0.634
6	L_1	0.759	0.750	0.745
	L_{q1}	0	1.906×10^{-5}	0.117
	W_1	0.256	0.250	1.004
	W_{q1}	0	6.351×10^{-6}	0.6490
20	L_1	0.755	0.750	0.305
	L_{q1}	0	0	0
	W_1	0.256	0.250	0.102
	W_{q1}	0	0	0
∞	L_2	0.742	0.750	0.612
	L_{q2}	0	0	0
	W_2	0.247	0.250	0.310
	W_{q2}	0	0	0

TAB. 5.1 – Résultats de validation du simulateur du système $M/M/m$

Nous constatons que la statistique de Student calculée pour chaque caractéristique est inférieure à la statistique tabulée (1.98). Donc, nous ne rejetons pas H_0 au seuil $\alpha = 0.05$. Et pour d'autres valeurs de m , nous trouvons à chaque fois que l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée. D'où, nous concluons que les résultats donnés par simulation sont très proches des résultats théoriques.

Deuxième cas

Les paramètres d'entrée choisis du système de files d'attente sont les suivants :

Le paramètre de la loi exponentielle d'inter-arrivées : $\lambda = 8$.

Le paramètre de la loi exponentielle de la durée de service : $\mu = 5$.

Après simulation, les résultats obtenus sont les suivants :

m	caractéristiques	Valeur théorique	Valeur après simulation	Statistique de Student
6	L_1	1.598	1.602	0.145
	L_{q1}	0.001	0.002	0.280
	W_1	0.199	0.200	0.888
	W_{q1}	2.264×10^{-4}	2.208×10^{-4}	1.226
10	L_1	1.602	1.600	0.670
	L_{q1}	0	1.383×10^{-7}	0.850
	W_1	0.201	0.200	0.231
	W_{q1}	0	1.733×10^{-7}	0.386
30	L_1	1.568	1.6	0.561
	L_{q1}	0	0	0
	W_1	0.197	0.2	0.072
	W_{q1}	0	0	0
∞	L_2	1.608	1.600	0.2
	L_{q2}	0	0	0
	W_2	0.203	0.200	0.188
	W_{q2}	0	0	0

TAB. 5.2 – Résultats de validation du simulateur du système $M/M/m$

Nous remarquons que toutes les statistiques de Student calculées sont inférieures à $t_{(0.025; 99)} = 1.98$ et pour d'autres valeurs de m , nous avons constaté la même chose. Nous concluons donc que nous ne rejetons pas H_0 au seuil $\alpha = 0.05$. Les résultats de la simulation sont très proches des résultats théoriques.

Troisième cas

Les paramètres d'entrée choisis du système de files d'attente sont les suivants :

Le paramètre de la loi exponentielle d'inter-arrivées : $\lambda = 3$.

Le paramètre de la loi exponentielle de la durée de service : $\mu = 3$.

Après simulation, les résultats obtenus sont les suivants :

m	caractéristiques	Valeur après simulation	Valeur théorique	Statistique de Student
2	L_1	1.362	1.333	0.218
	L_{q1}	0.346	0.333	0.080
	W_1	0.467	0.444	0.159
	W_{q1}	0.126	0.111	0.040
8	L_1	1.025	1	1.220
	L_{q1}	1.278×10^{-4}	1.419×10^{-5}	0.751
	W_1	0.346	0.333	0.674
	W_{q1}	1.085×10^{-5}	4.730×10^{-6}	0.677
25	L_1	1.031	0.999	0.857
	L_{q1}	0	0	0
	W_1	0.337	0.333	0.269
	W_{q1}	0	0	0
∞	L_2	0.989	1	0.007
	L_{q2}	0	0	0
	W_2	0.334	0.333	0.025
	W_{q2}	0	0	0

TAB. 5.3 – Résultats de validation du simulateur du système $M/M/m$

Nous remarquons que toutes les statistiques de Student calculées sont inférieures à $t_{(0.025; 99)} = 1.98$ et pour d'autres valeurs de m , nous avons constaté la même chose. Nous concluons donc que nous ne rejetons pas H_0 au seuil $\alpha = 0.05$. Les résultats de la simulation sont très proches des résultats théoriques.

Remarque 5.1.1.

Nous constatons de ce qui précède que plus nous augmentons la valeur de m , plus les résultats obtenus pour les caractéristiques du système $M/M/m$ s'approche de ceux du système $M/M/\infty$.

5.2 Comparaison des deux systèmes $M/M/m$ et $M/M/\infty$

Considérons deux systèmes de files d'attente, l'un de type $M/M/m$ et l'autre de type $M/M/\infty$. Nous choisissons les durées de service et les durées entre les arrivées des demandes dans les deux systèmes par une suite de variables aléatoires distribuées selon une loi exponentielle (avec des paramètres différents).

Nous nous intéressons aux écarts entre les caractéristiques des deux systèmes de files

d'attente à l'état stationnaire. Le problème revient à tester

$$H_0 : L_1 = L_2, W_1 = W_2, L_{q1} = L_{q2}, W_{q1} = W_{q2}$$

contre

$$H_1 : L_1 \neq L_2, W_1 \neq W_2, L_{q1} \neq L_{q2}, W_{q1} \neq W_{q2}.$$

Où,

- L_i , le nombre moyen de clients dans le système i , $i = 1$ (Système $M/M/m$), $i = 2$ (Système $M/M/\infty$).
- W_i , le temps de réponse (temps moyen de séjour d'un client dans le système i , $i = 1, 2$).
- L_{qi} , le nombre moyen de clients dans la file du système i , $i = 1, 2$.
- W_{qi} , le temps moyen d'attente d'un clien dans le système i , $i = 1, 2$.

Pour cela, nous fixons le temps de simulation à $x = 1000$ (unités de temps) pour les deux systèmes et le nombre de simulation à $R = 100$. Nous appliquons ensuite le test de Student pour comparer les deux échantillons correspondants. Le nombre de degrés de liberté est alors $\nu = 198$ et le seuil du test sera fixé à $\alpha = 0.05$. Donc, $t_{(\alpha/2; \nu)} = 1.96$ (d'après la table de distribution de loi de Student [6]).

Le but de notre travail est de "mesurer" les performances de la méthode de stabilité forte appliquée au système de files d'attente $M/M/m$, après perturbation de la structure du système. Nous suggérons de comparer ces résultats par la méthode réalisée dans [16] (l'approche proposée est basée sur une méthode d'approximation classique (voir [25]) et nécessite l'estimation de la fonction densité (voir [14])). Il est à noter que l'approche basée sur la simulation par événements discrets et le test de Student est plus générale. Elle permet de considérer tout type de systèmes de files d'attente et de prendre en considération tous les paramètres et caractéristiques du système, quelle que soit leur complexité.

5.2.1 Résultats de simulation

Nous observons les différents cas :

Premier cas

Le paramètre de la loi exponentielle des inter-arrivées : $\lambda = 0.5$.

Le paramètre de la loi exponentielle de la durée de service : $\mu = 3$

Nous obtenons les résultats suivants :

m	Caractéristiques	Borne inférieure de l'intervalle	Borne supérieure de l'intervalle
2	$L_1 - L_2$	-1.165×10^{-4}	-1.137×10^{-4}
	$L_{q1} - L_{q2}$	-1.165×10^{-4}	-1.115×10^{-4}
	$W_1 - W_2$	-2.331×10^{-4}	-2.155×10^{-4}
	$W_{q1} - W_{q2}$	-0.205	-0.002
5	$L_1 - L_2$	-6.471	-0.006
	$L_{q1} - L_{q2}$	0	0
	$W_1 - W_2$	-3.235	-0.002
	$W_{q1} - W_{q2}$	0	0
10	$L_1 - L_2$	-0.057	-0.002
	$L_{q1} - L_{q2}$	0	0
	$W_1 - W_2$	-1.116	0.005
	$W_{q1} - W_{q2}$	0	0
25	$L_1 - L_2$	-1.034	0.006
	$L_{q1} - L_{q2}$	0	0
	$W_1 - W_2$	-1.583	0.009
	$W_{q1} - W_{q2}$	0	0

TAB. 5.4 – Résultats de la première situation

- Pour $m = 2$, nous rejetons toutes les hypothèses au seuil $\alpha = 0.05$. Ceci signifie que le risque de rejeter à tort ces hypothèses est de 5%. Et par conséquent, les caractéristiques correspondantes des deux systèmes de files d'attente considérés sont significativement différentes.
- Nous constatons que pour $m = 5$ (au seuil $\alpha = 0.05$) :
 Nous rejetons " $H_0 : L_1 = L_2, W_1 = W_2$ ".
 Nous ne rejetons pas " $H_0 : L_{q1} = L_{q2}, W_{q1} = W_{q2}$ ".
 L'acceptation de cette dernière hypothèse est prévisible car à partir de $R = 105$, nous acceptons toutes les hypothèses ce qui signifie que les deux systèmes sont relativement proche.
- Pour le cas $m = 10$, nous remarquons qu'avec un seuil $\alpha = 0.05$:
 Nous rejetons " $H_0 : L_1 = L_2$ ". Par ailleurs, l'intervalle de confiance n'est pas très éloigné de l'origine. En effet, avec un seuil $\alpha = 0.01$, ces mêmes hypothèses (dans les mêmes conditions) ne sont pas rejetées.
- Pour $m = 25$, tous les intervalles contiennent zéro. Donc avec un seuil $\alpha = 0.05$, nous ne rejetons aucune hypothèse. En plus, nous remarquons que les intervalles

de confiance sont très étroits, ce qui nous donne une idée sur la précision de cette approximation.

Deuxième cas

Le paramètre de la loi exponentielle des inter-arrivées : $\lambda = 10$.

Le paramètre de la loi exponentielle de la durée de service : $\mu = 4$

Nous obtenons les résultats suivants :

m	Caractéristiques	Borne inférieure de l'intervalle	Borne supérieure de l'intervalle
3	$L_1 - L_2$	-3.517	-3.355
	$L_{q1} - L_{q2}$	-3.511	-3.366
	$W_1 - W_2$	-0.357	-0.335
	$W_{q1} - W_{q2}$	-5.636	-0.335
10	$L_1 - L_2$	-9.587	0.005
	$L_{q1} - L_{q2}$	-9.581	-5.627
	$W_1 - W_2$	-9.525	2.415×10^{-4}
	$W_{q1} - W_{q2}$	-8.647×10^{-4}	-4.267×10^{-4}
20	$L_1 - L_2$	-5.405×10^{-4}	0.007
	$L_{q1} - L_{q2}$	0	0
	$W_1 - W_2$	-5.405	9.666×10^{-4}
	$W_{q1} - W_{q2}$	0	0
30	$L_1 - L_2$	-0.006	0.009
	$L_{q1} - L_{q2}$	0	0
	$W_1 - W_2$	-6.278×10^{-4}	0.001
	$W_{q1} - W_{q2}$	0	0

TAB. 5.5 – Résultats de la Deuxième situation

- Pour $m = 3$, nous rejetons toutes les hypothèses au seuil $\alpha = 0.05$. Ceci signifie que le risque de rejeter à tort ces hypothèses est de 5%. Et par conséquent, les caractéristiques correspondantes des deux systèmes de files d'attente considérés sont significativement différentes.
- Nous constatons que pour $m = 10$ (au seuil $\alpha = 0.05$) :
 Nous rejetons " $H_0 : L_{q1} = L_{q2}, W_{q1} = W_{q2}$ ".
 Nous ne rejetons pas " $H_0 : L_1 = L_2, W_1 = W_2$ ".
 L'acceptation de cette dernière hypothèse est prévisible car à partir de $R = 115$, nous acceptons toutes les hypothèses, ce qui signifie que les deux systèmes sont relativement proche.

- À partir de $m = 20$, tous les intervalles contiennent zéro. Donc, avec un seuil $\alpha = 0.05$, nous ne rejetons aucune hypothèse. En plus, nous remarquons que les intervalles de confiance sont très étroits, ce qui nous donne une idée sur la précision de cette approximation.

Troisième cas

Le paramètre de la loi exponentielle des inter-arrivées : $\lambda = 8$.

Le paramètre de la loi exponentielle de la durée de service : $\mu = 8$

Nous obtenons les résultats suivants :

m	Caractéristiques	Borne inférieure de l'intervalle	Borne supérieure de l'intervalle
2	$L_1 - L_2$	-0.333	-0.328
	$L_{q1} - L_{q2}$	-0.334	-0.319
	$W_1 - W_2$	-0.047	-0.042
	$W_{q1} - W_{q2}$	-0.408	-0.047
10	$L_1 - L_2$	-1.257	-0.003
	$L_{q1} - L_{q2}$	0	0
	$W_1 - W_2$	-1.564	-0.006
	$W_{q1} - W_{q2}$	0	0
20	$L_1 - L_2$	-9.295	0.004
	$L_{q1} - L_{q2}$	0	0
	$W_1 - W_2$	-1.167	4.363×10^{-4}
	$W_{q1} - W_{q2}$	0	0
30	$L_1 - L_2$	-5.185	0.002
	$L_{q1} - L_{q2}$	0	0
	$W_1 - W_2$	-6.488	4.608×10^{-4}
	$W_{q1} - W_{q2}$	0	0

TAB. 5.6 – Résultats de la Troisième situation

- Pour $m = 2$, nous rejetons toutes les hypothèses au seuil $\alpha = 0.05$. Ceci signifie que le risque de rejeter à tort ces hypothèses est de 5%. Et par conséquent, les caractéristiques correspondantes des deux systèmes de files d'attente considérés sont significativement différentes.
- Nous constatons que pour $m = 10$ (au seuil $\alpha = 0.05$) :
 Nous rejetons " $H_0 : L_1 = L_2, W_1 = W_2$ ".
 On ne rejette pas " $H_0 : L_{q1} = L_{q2}, W_{q1} = W_{q2}$ ".

L'acceptation de cette dernière hypothèse est prévisible car à partir de $R = 105$, nous acceptons toutes les hypothèses, ce qui signifie que les deux systèmes sont relativement proche.

- À partir de $m = 20$, tous les intervalles contiennent zéro. Donc, avec un seuil $\alpha = 0.05$, nous ne rejetons aucune hypothèse. En plus, nous remarquons que les intervalles de confiance sont très étroits, ce qui nous donne une idée sur la précision de cette approximation.

Conclusion

Lors de l'étude théorique, nous avons montré (voir chapitre 3 et 4) qu'en augmentant m , les deux opérateurs de transitions P_m et P_∞ se rapprochent et par la suite les distributions stationnaires sont proches. La pratique le confirme bien dans ce présent chapitre. Les caractéristiques du système $M/M/m$ peuvent donc être approximées par celles du système $M/M/\infty$. La précision obtenue dans ce chapitre permet de confirmer que la méthode de stabilité forte est très efficace en pratique et donne de bons résultats.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons pour la première fois obtenu les inégalités de stabilité dans les systèmes de files d'attente à une infinité de serveurs.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilité forte dans les systèmes de files d'attente $M/M/\infty$ et $G/M/\infty$, après perturbation de la structure de chaque système. Nous avons clarifié les conditions pour lesquelles les caractéristiques des chaînes de Markov induites associées aux systèmes $M/M/m$ et $G/M/m$ peuvent être approximées par celles correspondantes aux systèmes $M/M/\infty$ et $G/M/\infty$ respectivement. Alors que dans [2, 3], il avait été appliqué les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte, nous appliquons ici le critère de stabilité. Ceci nous permet également d'obtenir les estimations quantitatives de stabilité des caractéristiques étudiées avec un calcul exact des constantes.

Dans un deuxième temps, nous avons quantifié l'erreur commise. Nous avons remarqué que plus la charge du système $M/M/m$ est petite, plus le domaine de stabilité est important (c'est à dire que le nombre de serveurs est supérieur au nombre de clients). Contrairement à l'approche proposée par L. Bouallouche [16], qui est basée sur la méthode d'approximation classique (voir [25]) et qui nécessite l'estimation de la fonction densité (voir [14]), nous utilisons ici la méthode de simulation et le test statistique de Student. Les résultats obtenus par cette méthode confirment que la méthode de stabilité forte est efficace pour résoudre les problèmes pratiques.

Un système réel comprenant un grand nombre de dispositifs de service (par exemple, les lignes d'une centrale téléphonique) peut être modélisé comme un système $G/M/\infty$.

Mais, lorsqu'un abonné au service téléphonique lance un appel, il n'obtient pas toujours le service qu'il demande. Il peut se tromper dans la succession des manoeuvres aux quelles il procède, le réseau peut être défaillant ou bloqué par manque de ressources. Dès lors, il est amené à renouveler son appel une ou plusieurs fois jusqu'à ce qu'il obtienne son correspondant, à moins qu'il abandonne complètement. Cette situation peut être modélisé

par un système $G/M/m$ avec rappel ou un système $G/M/\infty$ avec rappel,...

Par conséquent, il serait judicieux d'élargir le champs d'application de la méthode de stabilité forte à d'autres systèmes de files d'attente à une infinité de serveurs tels que, $M/G/\infty$, $G/M/m$ avec rappel, $G/M/\infty$ avec rappel, $M/G/\infty$ avec rappel,...

Enfin, il faudra appliquer l'approche simulation et test de Student pour les systèmes $G/M/m$ et $G/M/\infty$ et comparer les résultats avec ceux que l'on obtient en utilisant la méthode proposée dans [16], après estimation de la fonction densité [14].

ANNEXES

Annexe A

Organigramme de la simulation

Dans cette annexe, nous présentons l'organigramme des étapes de la simulation du système de files d'attente $G/M/m$.

Voici la légende des notation utilisées :

λ : paramètre de la loi exponentielle des inter-arrivées.

μ : paramètre de la loi exponentielle de la durée de service.

x : temps de simulation.

t_1, t_2 : sont les instants d'occurrence des événements possibles (arrivée primaire et départ respectivement).

time (ou horloge) : compteur qui sert à situer les événements dans le temps.

d : nombre de départs.

m : nombre de serveurs.

s : nombre de serveurs occupés.

n : nombre de clients dans la file.

re

Annexe B

Mesure, Chaînes de Markov et Fonctions génératrices

Dans cette annexe, nous rappelons quelques notions sur la théorie de la mesure, les chaînes de Markov et les fonctions génératrices nécessaires pour comprendre les démonstrations des théorèmes fondamentaux pour l'ergodicité uniforme et la stabilité forte.

B.1 Notions de mesure

B.1.1 Tribus et mesures

Définition 1

Soit Ω un ensemble non vide. On dit que \mathcal{A} est une algèbre de Boole de parties de Ω si elle contient \emptyset , Ω et si elle est stable pour la complémentation et la réunion finie (alternativement pour la complémentation et l'intersection finie).

Soit \mathcal{C} une classe arbitraire de parties de Ω . Il existe une plus petite algèbre de Boole \mathcal{A} de parties de Ω contenant \mathcal{C} (par exemple $\mathcal{P}(\Omega)$). L'algèbre de Boole ainsi définie est dite engendrée par \mathcal{C} .

Définition 2

Une σ -algèbre de Boole (ou tribu) \mathcal{A} de parties de Ω contenant \emptyset , Ω et est stable pour les opérations de complémentation, de réunion dénombrable et d'intersection dénombrable. (Ω, \mathcal{A}) est appelé espace mesurable.

Étant donné une suite monotone croissante (resp. décroissante) $\{\mathcal{A}_n, n \geq 1\}$. On pose $\lim_n \uparrow \mathcal{A}_n = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ (resp. $\lim_n \downarrow \mathcal{A}_n = \bigcap_n \mathcal{A}_n$).

Définition 3

Une classe \mathcal{C} de parties de Ω est dite monotone si elle est stable pour les opérations $\lim_n \uparrow$ et $\lim_n \downarrow$.

Proposition 1

Pour une algèbre de Boole \mathcal{A} soit une σ -algèbre, il faut et il suffit qu'elle soit aussi une classe monotone.

Définition 4

Une σ -algèbre de Boole \mathcal{A} de parties d'un ensemble Ω est dit de type dénombrable (ou séparable) s'il existe une famille dénombrable d'ensembles de Ω engendrant \mathcal{A} .

Remarque 1

1. La plupart des σ -algèbres que l'on considère dans les applications sont de type dénombrables.
2. La σ -algèbre engendrée par une partition dénombrable $(\mathcal{A}_i, i \in I)$ de Ω est formée de toutes les sommes (\cup) de sous familles de la partition. On se gardera de croire que toute σ -algèbre de type dénombrable peut-être engendrée par une partition dénombrable de l'espace.

Définition 5

Une mesure μ sur une σ -algèbre \mathcal{A} de parties d'un ensemble Ω est une application de \mathcal{A} dans $] -\infty, +\infty]$, telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et que μ est σ -additive :

$$\mu\left(\sum_I \mathcal{A}_i\right) = \sum_I \mu(\mathcal{A}_i).$$

Une mesure μ est dite positive si $\mu(A) \geq 0$ ($A \in \mathcal{A}$).

Une mesure μ est dite Bornée si $\sup\{|\mu(A)|, A \in \mathcal{A}\} < +\infty$

Remarque 2

Une mesure positive, telle que $\mu(\Omega) = 1$ (donc bornée), est une probabilité.

Proposition 2(Jordan Hahn)

Si μ est une mesure sur (Ω, \mathcal{A}) , les formules suivantes :

$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B), B \subset A\}$ et $\mu^-(A) = \sup\{-\mu(B), B \subset A\}$ définissent deux mesures positives sur (Ω, \mathcal{A}) . La mesure μ^- est de plus bornée et on a $\mu = \mu^+ - \mu^-$

B.1.2 Variation totale d'une mesure

Soit μ une mesure définie sur la σ -algèbre \mathcal{A} de parties de l'ensemble non vide Ω , à valeurs dans F .

F sera, soit $\mathbb{R} \cap \{+\infty\}$, soit un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Nous désignons par $\|y\|$, la norme de y si F est un espace de Banach quelconque, ou $|y|$ la valeur absolue de y si $F = \mathbb{R} \cap \{+\infty\}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{i=0}^{+\infty} |\mu(X_i)|,$$

la borne supérieure étant prise pour toutes les familles dénombrables $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ d'éléments deux à deux disjoints de \mathcal{A} tels que :

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} X_i = A.$$

$|\mu|$ est une mesure positive, appelée variation totale de la mesure μ .

Pour tout $A \in \mathcal{A}$: $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$. Si μ est une mesure positive telle que : $\forall A \in \mathcal{A} : |\mu(A)| \leq \mu(A)$ alors $|\mu|(A) \leq \mu(A)$.

B.1.3 Mesures absolument continues, mesures étrangères

Soient μ et ν deux mesures définies sur \mathcal{A} , à valeurs dans F_1 et F_2 (qui sont soit des espaces de Banach sur le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , soit $\mathbb{R} \cap \{\infty\}$).

Définition 6

On dit que ν est absolument continue par rapport à μ ($\nu \ll \mu$) si pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $|\mu|(A) = 0$, on a $|\nu|(A) = 0$

Définition 7

Les deux mesures μ et ν sont dites étrangères ($\mu \perp \nu$) s'il existe une partition de E , $(A_\mu, A_\nu) : A_\mu \cap A_\nu = \emptyset$ et $A_\mu \cup A_\nu = E$, tel que pour tout $X \in \mathcal{A} : X \cap A_\mu$ et $X \cap A_\nu$ soient dans \mathcal{A} et vérifient $\mu(X \cap A_\mu) = 0$ et $\nu(X \cap A_\nu) = 0$

Définition 8

Soient (Ω, \mathcal{A}) et (F, \mathcal{B}) deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega \rightarrow F$ est dite mesurable si $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

B.1.4 Noyau de transition

Définition 9

Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. Un noyau sur E est une application N de $E \times \mathcal{A}$ dans $] -\infty, +\infty[$, tel que :

- i) Pour tout x dans E , l'application $A \mapsto N(x, A)$ est une mesure sur \mathcal{A} notée $N(x, \cdot)$.
- ii) Pour tout A dans \mathcal{A} , l'application $x \mapsto N(x, A)$ est une fonction mesurable par rapport à la σ -algèbre \mathcal{A} , notée $N(\cdot, A)$.

Propriété

- Le noyau N est dit positif s'il prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$;
- Il est dit σ -fini, si toutes les mesures $N(x, \cdot)$ sont σ -finies;
- Il est dit propre, si E est la réunion d'une séquence croissante $\{E_n\}_{n \geq 1}$ de sous ensembles de E tel que les fonctions $N(\cdot, E_n)$ sont bornées,
- Le noyau N est dit borné s'il existe un nombre M tel que $|N(x, A)| \leq M < +\infty$, pour tout $x \in E$ et $A \in \mathcal{A}$.

B.2 Rappels sur les chaînes de Markov

De nombreux systèmes, dont l'évolution dans le temps est déterministe, ne peuvent être abordés qu'en leur associant un processus aléatoire en raison de la multiplicité des causes dont ils dépendent. Dans cette section, on présentera quelques généralités sur la théorie des processus stochastiques.

Les processus stochastiques et en particulier les chaînes de Markov, sont aujourd'hui de plus en plus utilisés comme modèles mathématiques de systèmes divers.

Définition 10

On appelle processus stochastique une famille de variables aléatoires $\{\xi_t, t \in T\}$ où t est un paramètre parcourant T .

Lorsque T est discret et dénombrable, les $(\xi_t)_t$ forment une suite stochastique.

Lorsque T est un intervalle, fini ou non, les $(\xi_t)_t$ forment un processus continu (ou permanent).

Remarque 3

Le plus souvent, t représente une date de T soit une suite discrète soit un intervalle de temps.

On appelle espace des états l'ensemble S où les variables $(\xi_t)_t$, prennent leur valeurs. S peut être discret ou continu. On distingue quatre types de processus :

- Suite stochastique à espace d'états discret.
- Suite stochastique à espace d'états continu.
- Processus permanent à espace d'états discret.
- Processus permanent à espace d'états continu.

B.2.1 Processus de Markov

Un processus de Markov est un processus dans lequel le comportement futur ne dépend que du passé récent. Les suites Markoviennes sont appelées chaînes de Markov. On distingue donc les chaînes de Markov à espace d'états discret et celles à espace d'états continu.

Soit (X_t) une suite stochastique à espace d'états discret $S = \{1, 2, \dots, k, \dots\}$ tel que $|S| = r$ et T discret.

Les probabilités de transitions P_{ij} sont définies par :

$$P_{ij} = Pr(X_{n+1} = j / X_n = i) \quad \forall i, j \in S$$

Dans le cas discret, on a :

$$\mathbb{P}r(X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_1 = i_1) = \mathbb{P}r(X_{n+1} = j / X_n = i).$$

Parmi les processus stochastiques à temps continu, le processus de Poisson occupe une place privilégiée. Il est utilisé pour décrire la réalisation dans le temps d'événements aléatoires d'un type donné, comme par exemple :

- L'arrivée de clients vers un guichet.
- Le nombre de panne durant une durée de temps donnée.

Un processus de comptage qui est homogène dans le temps :

$Pr(X(t+s) - X(s) = k) = Pr(X(t) = k)$, à accroissement indépendant :

$$Pr(X(t+s) - X(s) = k, X(s) = j) = Pr(X(t) = k)Pr(X(s) = j)$$

et tel que

$$Pr(X(t) = k) = \exp -\lambda t \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

où λ est le taux du processus, est un processus de Poisson de paramètre λ .

Définition 11

On appelle matrice stochastique une matrice carrée P , telle que

$$\sum_{j=1}^{j=r} P_{ij} = 1$$

c'est-à-dire, la somme d'une ligne est égale à 1.

B.2.2 Classification des états

- État transitoire : Le système partant de l'état i , peut ne pas repasser par i .
- État récurrent : Le système partant de i repassera à coup sûr par i au cours de son évolution.
- État récurrent non nul : Partant de i , le système, repassera par i au bout d'un temps fini.

Théorème de Foster

- Une chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ à temps discret, irréductible et apériodique, est ergodique si et seulement s'il existe une probabilité stationnaire.
- Une chaîne $(X_t)_{t \geq 0}$ à temps continu, irréductible, est ergodique si et seulement s'il existe un vecteur $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$, solution stationnaire des équations de Chapman-Kolmogorov suivantes :

$$\begin{cases} \pi p'(0) = 0, \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1, \quad \pi_i \geq 0. \end{cases}$$

B.2.3 Propriété sans mémoire

X est une variable aléatoire "sans mémoire" si :

$$P[X < t + t_0 / t > t_0] = P[X < t],$$

i.e. la probabilité, sachant que le phénomène que mesure X ne s'est toujours pas produit au temps t_0 , pour qu'il se produise avant t unités de temps supplémentaires, est égale à la probabilité qu'il se soit produit pendant les t premiers instants du phénomène.

Remarque 4

La loi exponentielle est la seule variable aléatoire continue à posséder la propriété de "sans mémoire".

B.2.4 Processus de naissance et de mort

Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continu et à états discrets $n = 1, 2, \dots$. Ils sont caractérisés par deux propriétés importantes :

- Ils sont "sans mémoire".
- A partir d'un état donné n , les transitions ne sont possibles que vers l'un des états voisins $n + 1$ et $n - 1$ (si $n \geq 1$).

Remarque 5

Les processus de Poisson sont des exemples simples de processus de naissance et de mort.

Définition 12

Soit un processus stochastique $(X(t))_{t \geq 0}$, à états discrets $t = 0, 1, 2, \dots$ et homogène dans le temps (i. e. la probabilité $P[X(t + s) = j / X(s) = i] = p_{ij}(t)$, $s \geq 0, t \geq 0$ ne dépend pas de s), alors $(X(t))_{t \geq 0}$ est un processus de naissance et de mort s'il satisfait les postulats suivants :

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\Delta t) &= \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) & (i \geq 0), \\ p_{i,i-1}(\Delta t) &= \mu_i \Delta t + o(\Delta t) & (i \geq 1), \\ p_{i,i}(\Delta t) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t) & (i \geq 0). \end{aligned}$$

où λ_i et μ_i sont les taux de transition dit généralement taux de naissance et taux de mort.

B.3 Fonction génératrice et transformée de Laplace

B.3.1 Fonction génératrice

Définition 13

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulle. La fonction génératrice de X est alors définie par :

$P(Z) = \sum_{k \geq 0} Z^k P_k$, où $P_k = Pr(X = k)$, $k = 0, 1, \dots$ et Z est une variable aléatoire complexe.

Il est souvent plus facile de déterminer la fonction génératrice d'une distribution de probabilité inconnue que de calculer la distribution elle-même.

Propriétés

- $P_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ ($k = 0, 1, \dots$)
- $P^{(k)}(0) = \left[\frac{d^k}{dZ^k} (P(Z)) \right]_{Z=0}$
- $E(X) = P'(1)$ et $E(X^2) = P''(1) + P'(1)$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières non négatives, la fonction génératrice de $X + Y$ est le produit des fonctions génératrices de X et de Y .

B.3.2 Transformée de Laplace

Définition 14

Soit une variable aléatoire continue positive. Sa distribution peut être caractérisée par sa transformée de Laplace de la densité f .

$$L[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = E(e^{-sx}), \text{ où } s \text{ est une variable complexe.}$$

Propriétés

- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la transformée de Laplace de $X + Y$ est le produit des transformées de X et de Y .
- $L[f''(x)] = s^2L[f(x)] - sf(0) - f'(0)$
- $L[\int_0^{\infty} f(x)dx] = \frac{L[f(x)]}{s}$

Bibliographie

- [1] D. Aïssani. Application of the operator methods to obtain inequalities of stability in the $G/M/\infty$ system. *Proceedings of the C.M.M.N.I.2, Rabat*, 2 :106–111, 1989.
- [2] D. Aïssani. Estimation of the strong stability in an $G/M/\infty$ system. *International Journal " Technologies Avancées"*, 2(2) :29–33, 1992.
- [3] D. Aïssani. Strong stability of an imbedded markov chain in an $G/M/\infty$ system. *International Journal " Technologies Avancées"*, 2(1) :33–38, 1992.
- [4] D. Aïssani. Strong stability of stochastic models. *Seminar on Stochastics Processes and their applications. F.N.R.S - University of Brussels (Belgium)*, pages x–x, 1993.
- [5] D. Aïssani and N.V. Katsashov. Ergodicity and stability of markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U.S.S.R*, (ser.A,11) :3–5, 1983.
- [6] J. Banks, J.S. Carson and B.L. Nelson. *Discrete-Event System Simulation*. Prentice-Hall (New Jersey), second edition, 1996.
- [7] U.L. Bath and S.S. Rao. Statistical analysis of queueing systems. *Queueing system*, 1 :217–247, 1987.
- [8] B. Baynat and Y. B. Dallery. A Unified View of Product-form Approximation Techniques for General Closed Queueing Networks. Technical Report 90.48, Institut Blaise Pascal, Paris, Octobre 1990.
- [9] M. Benaouicha and D. Aïssani. *Estimate of the Strong Stability in the $G/M/1$ Queueing System*. In the Book "Applied Stochastic Models and Data Analysis", G. Govaert, J. Janssen, and N. Limnios, Editors, Compiègne 2001, Vol. I, pp 172-177.
- [10] L. Berdjoudj and D. Aïssani. Strong Stability in Retrieval Queues, *International Journal. Theory of Probability and Mathematical Statistic*, (68) :11–17, 2003.
- [11] J. L. Bon. *Fiabilité des systèmes (Méthodes Mathématiques)*. Edition Masson, 1995.
- [12] A.A. Borovkov. *Processus probabilistes de la théorie des files d'attente*. Navka, Moscou, 1972.

- [13] A.A. Borovkov. *Méthodes asymptotiques en théorie des files d'attente*. Navka, Moscou, 1980.
- [14] D. Bosq and J.P. Lecoutre. *Théorie de l'estimation fonctionnelle*. Economica édition, 1987.
- [15] L. Bouallouche and D. Aissani. Performance evaluation of an SW Communication Protocol (Send and Wait). *Proceedings of the MCQT'02 (First Madrid International Conference on Queueing Theory)*, Madrid (Spain), 2002.
- [16] L. Bouallouche and D. Aissani. Estimate of the strong stability in an M/M/1 queueing systems. *Proceedings of the XX International Seminar on Stability Problems for Stochastics Models, Lublin (Poland)*, page 14 and others, September 1999.
- [17] J.H. Dshalalow. *Advances in Queueing (Theory, Methods and Open Problems)*. CRC Press, 1995.
- [18] P.J. Erard and P. Déguénon. *Simulation par événements discrets*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996.
- [19] A.K. Erlang. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. *Elektroteknikerer*, 13 :5–13, 1917.
- [20] F. G. Foster. On the stochastic matrices associated with certain queueing processes. *Ann. Math. Stat*, 24 :355–360, 1953.
- [21] P. Franken. Ein stetigkeitssatz für Verlustsysteme. *Operations-forschung und Math. Stat.*, 11 :1–23, 1970.
- [22] E. Gelenbe and G. Pujolle. *Introduction aux réseaux de files d'attente*. Editions Eyrolle, 1985.
- [23] B.V. Gnedenko. Sur certains problèmes non résolus de la théorie des files d'attente. *Six International Telegrafic Congress, Munich*, 1970.
- [24] I. Guikhman and R. Skorokhod. *Introduction à la théorie des processus aléatoires*. Mir Moscou, 1986.
- [25] J.M Helary and R. Pedrono. Recherche opérationnelle. *Hermann*, 1983.
- [26] W. Henderson. Alternativ approches to the analysis of the M/G/1 and G/M/1 queues. *Operations Research Soc. of Japan*, 15(2) :92–101, Juin 1972.
- [27] I.C.F Ipsen and C.D. Meyer. Uniform stability of markov chains. *SIAM J.Matrix Anal. Appl*, 15(4) :1061–1074, 1994.
- [28] V.V Kalashnikov. *Quantitative estimates in queueing*. CRC Press, Inc, 1995.

- [29] V.V. Kalashnikov and G.S. Tsitsiashvili. On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution function s. *Queueing theory and reliability*, pages 211–217, mai 1971.
- [30] S. Karlin. A first cours on stochastic process. *Academic Press*, 1966.
- [31] N.V. Kartashov. stbilité forte des chaînes de markov. *Problèmes de stabilité des modèles stochastiques "VNISSI"*, pages 54–59, 1981.
- [32] N.V. Kartashov. Strong stable markov chains. *VSP.Utrecht.Tbime Scientific Publishers*, 1996.
- [33] D.G. Kendall. Stochastic processes occuring in theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain. *Ann. Math. Statist*, 24 :338–354, 1953.
- [34] D. Kennedy. The continuity of the single server queue. *J. App. Prob*, 9 :370–381, 1972.
- [35] L.B. Klebanov. Quelques résultats liés à la caractérisation de la distribution exponentielle. *Journal Theory of probability and their applications*, 25(3) :628–633, 1980.
- [36] L. Kleinrock. Queueing systems. *Wiley-Interscience*, 1,2, 1975.
- [37] D.V Lindley. The theory of queues with a single server. *Proc. Cambridge Philosophical Society*, 48 :277–289, 1952.
- [38] C. Marle. Mesures et probabilités. *Hermann*, 1974.
- [39] J. Neveu. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson, Paris, 1964.
- [40] C. Palm. Intensitatschwankungen im fernsprechverkehr. *Ericsson Technics*, 6 :1–189, 1943.
- [41] S.T. Rachev. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems*, pages 287–318, 1989.
- [42] R. H. Randles and D. A. Wolfe. Intoduction to the theroy of nonparametric statistic. *John Wiley and Sons, New, York*, 1979.
- [43] D. Revuz. *Markov Chains*, volume II. North- Holland N.Y., 1984.
- [44] H. J. Rossberg. Über die verteilung von wartereiten. *Mathematische Nachrichten*, 30(1/2) :1–16, 1965.
- [45] A. Rüegg. *Processus stochastique*. Presses Polytechniques Romandes edition, 1988.
- [46] T.L . Saaty. *Elements of queueing theory with applications*. McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [47] G. Saporta. *Probabilités, Analyse des données et Statistique*. Editions Technip, 1990.

- [48] D. Stoyan. Ein stetigkeitssatz für einlinige Wartemodelle der Bedienungstheorie. *Math. Operations forschu. Statist.*, N° 2 :103–111, 1977.
- [49] V.M. Zolotariev. Sur la continuité des suites stochastiques engendrées par des procédures récurrentes. *Journal Theory of Probability and Applications*, T.20, (4) :834–847, 1975.