N° d'ordre : 30/2008-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En MATHEMATIQHES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par

Ouarda HADDOUCHE

Sur

UNE GÉNÉRALISATION SUR LES NOMBRES DE STIRLING

Soutenu publiquement, le 17/06/2008, devant le jury composé de :

Mr.	**K BETINA**	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	**B BENZAGHOU**	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	**A KHELLADI**	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	**M.S HACHAICHI**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Ce travail n'a pu être mené jusqu'à son terme que grace à l'aide directe ou indirecte, de plusieurs personnes à qui j'aimerais exprimer ici ma reconnaissance et ma gratitude.

D'abord, mon directeur de thèse monsieur le professeur BENALI BENZAGHOU pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses conseils et ses encouragements durant ces années m'ont beaucoup aidée à progresser.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers, Monsieur le professeur Kamel BETINA qui m'honore en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie aussi messieurs les professeurs A KHALADI, et M.S. HACHAICHI d'avoir accepté de prendre part à ce jury.

Je remercie également le docteur Hacenne BELBACHR, et le professeur BOUROUBI pour leurs commentaires, leurs critiques, leur disponibilité.

Je ne peux terminer sans évoquer aussi ce que je dois à tous ceux qui de prés ou de loin m'ont soutenu pour préparer ce mémoire et sans leur exprimer ma reconnaissance.

Dédicace

Je tiens à dédier ce travail à :

Mon père et ma mère à qui je dois tout

A ma sœur et mes frères, pour la confiance qu'ils ont mise en moi ;

A ma grande mère et mon grande père, mes cousines et mes amis, pour leurs encouragements constants à continuer ;

A tous les autres membres de la famille, qui ont approuvé ma démarche ;

Enfin, à tous les martyrs de la Révolution Algérienne qui, par leur Sacrifice, ont permit que l'Algérie par conséquent l'université Algérienne recouvre sa liberté.

Une généralisation sur les nombres de Stirling

Résumé

Nous dérivons des formules explicites pour des puissances arbitraires des opérateurs différentiels. Ces formules mènent aux généralisations des nombres de Stirling et Bell conventionnelle et donner une généralisation des relations de Dobinski. En passant par le cas classique , puis une première généralisation , finalement une deuxième généralisation . en donnant leurs propriétes dans les trois cas .

Table des matières

Introduction

La formule dite de Stirling, qui donne une évaluation de n! pour les grandes valeurs de n, est au centre des travaux menés au début du $18^{ème}$ siècle sur les problèmes probabilistes de passage à la limite et d'approximations. La découverte des évaluations de n! par De Moivre et Stirling a donné lieu à des travaux concomitants de ces deux mathématiciens avec des échanges de correspondance, des corrections mutuelles autour des années 1730 [21][20].

Ce mémoire porte sur un cadre combinatoire général s'inscrit dans la combinatoire énumératine, plus précisément autour des problèmes d'opérateur de commande normale des puissances et d'exponentiels de l'opérateur de boson entrant dans le cadre d'un problème de mécanique quantique [16][22][1][2][8][9][10][11][14]. La solution adoptée mène vers les nombres de Stirling de Bell.

La relation standard de commutation de boson $[a, a^{\dagger}] = 1$ peut être réalisée par l'identification, formellement, $a = d/dx$ et $a^{\dagger} = x$ donc $\left[\frac{d}{dx}, x\right] = 1$.

Ce travail est organisé comme suit : dans un premier chapitre, nous rappelons et introduisons les nombres de Stirling de deuxième espèce ainsi que les nombres de Bell via le produit de Hurwitz.

Le second chapitre est consacré à la première généralisation de ces nombres, avec leurs propriétés et quelques exemples.

Enfin, le dernier chapitre présente une deuxième généralisation qui prolonge la première, exprimant une interprétation de ces nombres en théorie des graphes.

Chapitre 1

Algèbre de Hurwitz et nombres de Stirling

1.1 Algèbre de Hurwitz

Le but de ce chapitre est de présenter les nombres de Stirling dans le cas classique [17][15], passant par l'algèbre de Hurwitz [4][5]. Soit C un corps commutatif de caractéristique zéro et $u : \mathbb{Z} \to C$ une suite de valeurs dans C .

Notation 1.1.1 *On conviendra de ce qui suit :*

$$
\begin{aligned}
& z(C) = \{u : \mathbb{Z} \to C\} \\
& \text{support}(u) = \{n, u(n) \neq 0\} = supp\,(u) \\
& ord\ u = \inf\ supp\,(u) \quad (\textit{éventuellement}\ \text{-}\infty) \\
& \deg\ u = \sup\ supp\,(u) \quad (\textit{éventuellement}\ +\infty) \\
& s(C) = \{u, ord\ u > \text{-}\infty\} \\
& \mathfrak{s}_0(C) = \{u, \quad ord u \geq 0\} \\
& f(C) = \{u \in \mathfrak{s}_0(C), \quad supp\,(u)\ \text{fini}\} \\
& f_j \in s(C)\ \text{défini par}\ f_j(n) = \delta_{j,n}\ ,\ j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Remarque 1.1.1 *:*

ord u est une valuation sur $s(C)$

Tout élément u de $\mathfrak{s}_0(C)$ s'écrit $u = \sum_{j=0}^{\infty} u(j) f_j$, les f_j forment une base de $\mathfrak{s}_0(C)$ munie de la topologie définie par l'ordre; $\mathfrak{s}_0(C)$ est le complété de $f(C)$ dans cette topologie.

Définition 1.1.1 *:*

Pour $u \in \mathfrak{s}_0(C)$ *; on désigne par :*

$$g_u(x) = \sum_{n \geq 0} u(n) \frac{x^n}{n!} \tag{1.1.1}$$

la série génératrice exponentielle (ou série de Hurwitz) associée à la suite u.

Définition 1.1.2 *:*

Soient u *et* v *dans* $\mathfrak{s}_0(C)$ *, le produit de Hurwitz de* u *et* v *est défini par :*

$$g_{u\omega v}(x) := g_u(x)\, g_v(x) \tag{1.1.2}$$

Ainsi

$$(u\omega v)(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u(k)\, v(n-k) \tag{1.1.3}$$

Définition 1.1.3 *:*

L'ensembre de suite $C^{\mathbb{N}} = \{u : \mathbb{N} \to C\}$ *muni de l'addition et de produit de Hurwitz est une* $C-$*algèbre commutative intègre , munie d'une valuation discrète définie par l'ordre* $u \to ord\ u$ *; qui est l'algèbre de Hurwitz notée par* $A = A(C)$ *.*

Son corps de fraction est le corps de Hurwitz de C *noté* $H = H(C)$

1.2 Composition des suites

Soient u une suite d'ordre strictement positif ($u \in \mathfrak{s}_0(C)$) et v une suite d'ordre quelconque fini ($ordv \geq 1$).

Alors la composé $g_v \circ g_u(x)$ définit une série formelle qui sera notée $g_{v \circ u}$.

De plus

$$ord\,(v \circ u) = ordv.ordu$$

$$(v_1 + v_2) \circ u = (v_1 \circ u) + (v_2 \circ u)$$

Soit $e_k\,(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; k = n, \\ 0 & \text{si } \; k \neq n. \end{cases}$ symbole de Kronecker

alors

$$g_{e_k \circ u}\,(x) = \frac{1}{k!} g_u^k\,(x) \tag{1.2.1}$$

Définition 1.2.1 *:*

Les polynômes de Bell exponentiels partiels sont les polynômes $B_{n,k}\,(u)$ definis par :

$$\begin{aligned} g_{e_k \circ u}\,(x) &= \frac{1}{k!} g_u^k\,(x) && (1.2.2) \\ &= \sum_{n \geq k} B_{n,k}\,(u)\,\frac{x^n}{n!}; k = 0, 1, 2... && (1.2.3) \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *:*

Soit $B_{q,k}\,(u)$ la suite $B_{q,k}\,(u)\,(n) = B_{n,k}\,(u)$ telle que:

$$\frac{1}{k!} g_u^k\,(x) = g_{B_{q,k}(u)}\,(x)$$

ainsi

$$e_k \circ u\,(n) = \frac{u^{\omega k}}{k!} = B_{q,k}\,(u)\,(n)$$

en notant $u^{\omega k}$ la puissance $k^{ème}$ de u dans A.

alors pour toute suite v d'ordre >0, on a

$$\begin{aligned} v \circ u\,(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} v\,(k)\,(e_k \circ u)\,(n) \\ &= \sum_{n \geq k \geq 0} v\,(k)\,B_{n,k}\,(u) \end{aligned}$$

Preuve. :

On a

$$\begin{aligned} g_{v \circ u}(x) &= g_v(g_u(x)) \\ &= \sum_{k \geq 0} v(k) \frac{g_u^k(x)}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} v(k) \sum_{n \geq k} B_{n,k}(u) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{n \geq k \geq 0} v(k) B_{n,k}(u) \right) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

car ce sont des séires formelles

d'où

$$v \circ u(n) = \sum_{n \geq k \geq 0} v(k) B_{n,k}(u) \tag{1.2.4}$$

c'est la formule de Faa di Bruno[17] ■

Proposition 1.2.2 *:[4]*

Soit $\Omega_1 = \{u \in A, ord\ u = 1\}$ *alors* $(v, u) \rightarrow v \circ u$ *définit une loi de groupe sur* Ω_1 *d'élément neutre* e_1*; l'inverse* $\bar{u}$ *de* u *est la suite réciproque de* u*:*

$$u \circ \bar{u} = \bar{u} \circ u = e_1$$

si $y = g_u(x)$ *alors*

$$x = g_{\bar{u}}(y)$$

Exemple 1.2.1 *:*

Soit$g_a(x) = e^x - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!}$, *avec* $a(n) = \begin{cases} 1 & si \ \ n \geq 1 \\ 0 & si \ \ n = 0 \end{cases}$

alors

$$g_{\bar{a}}(x) = \log(1 + x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{x^n}{n!}, \ \ avec \ \ \bar{a}(n) = \begin{cases} (-1)^{n-1} \ \ (n-1)! & si \ \ n \geq 1 \\ 0 & si \ \ n = 0 \end{cases}$$

Exemple 1.2.2 *:*

Soit

$$g_{\alpha}(x) = 1 - e^{-x} \ , \ avec \qquad \alpha(n) = \begin{cases} (-1)^{n-1} & si \ \ n \geq 1 \\ 0 & si \ \ n = 0 \end{cases}$$

alors

$$g_{\overline{\alpha}}(x) = -\log(1-x) \ \ , \ \ avec \quad \overline{\alpha}(n) = \begin{cases} (n-1\ )! & si \ \ n \geq 1 \\ 0 & si \ \ n = 0 \end{cases}$$

Exemple 1.2.3 *:*

Pour $\beta \in C^{*}$, *notons* β^{q} *la suite* $\beta^{q}(n) = \beta^{n}$ *;*

Pour $\beta = 0, \ \beta^{q} = e_{0}$, *avec* $\beta^{n} = e_{0}(n) \ = \begin{cases} 0 & si \ \ n \neq 0 \\ 1 & si \ \ n = 0 \end{cases}$

alors

$$\begin{aligned} g_{\beta^{q} \circ u}(x) &= g_{\beta^{q}}(g_{u}(x)) \\ &= \sum_{n \geq 0} \beta^{n} \frac{g_{u}^{n}(x)}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(\beta g_{u}(x))^{n}}{n!} \\ &= \exp(\beta g_{u}(x)) \end{aligned}$$

or $\beta g_{u}(x) = g_{\beta u}(x)$ *et*

$$\begin{aligned} g_{\beta^{q} \circ u}(x) &= \sum_{n \geq 0} 1^{n} \frac{(\beta g_{u}(x))^{n}}{n!} = g_{1^{q}}(g_{\beta u}(x)) \\ &= g_{1^{q} \circ \beta u}(x) \end{aligned}$$

alors

$$\beta^{q} \circ u = 1^{q} \circ \beta u$$

Définition 1.2.2 *:*

L'opérateur du shift , T , est défini sur $\mathfrak{s}_0(C)$ par

$$(Tu)(n) = u(n+1) \tag{1.2.5}$$

et l'opérateur de dérivation q est défini sur $\mathfrak{s}_0(C)$ par

$$(qu)(n) = nu(n) \tag{1.2.6}$$

de sorte que $g_{Tu}(x) = \dfrac{d}{dx} g_u(x)$ *et* $g_{qu}(x) = x\dfrac{d}{dx} g_u(x)$

***Proposition 1.2.3** :*

Soit $v \in A$, $u \in M$; tel que $M = \{u \in A,\ ordu \geq 1\}$

$$T(v \circ u) = [(Tv) \circ u]\, \omega Tu \tag{1.2.7}$$

$$q(v \circ u) = [(Tv) \circ u]\, \omega qu \tag{1.2.8}$$

Preuve.

* *La première relation (1.2.7) est donnée comme suit:*

$$\begin{aligned} g_{T(v \circ u)}(x) &= \frac{d}{dx}\ g_{(v \circ u)}(x) \ = \frac{d}{dx} g_v(g_u(x)\ ) \\ &= g_v^{'}(g_u(x)\ )\, g_u^{'}(x) \\ &= g_{Tv}(g_u(x)\ )\, g_{Tu}(x) \\ &= g_{Tv \circ u}(x)\, g_{Tu}(x) \\ &= g_{(Tv \circ u)\omega Tu}(x) \end{aligned}$$

* *Et la deuxième relation (1.2.8) par*

$$\begin{aligned} g_{q(v \circ u)}(x) &= x\frac{d}{dx}\ g_{(v \circ u)}(x) \\ &= x g_{Tv \circ u}(x)\, g_{Tu}(x) \\ &= g_{Tv \circ u}(x)\, (x \cdot g_{Tu}(x)) \\ &= g_{(Tv \circ u)\omega(qu)}(x) \end{aligned}$$

d'où la relation. ∎

Exemple 1.2.4 *:*

Soit $B_{q,k}(u) = e_k \circ u$

En faisant agir l'opérateur T *sur* $B_{q,k}(u)$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} TB_{q,k}(u) &= T(e_k \circ u) \\ &= [(Te_k) \circ u]\,\omega Tu \end{aligned}$$

or $Te_k = e_{k-1}$ *car* $Te_k(n) = e_k(n+1)$ *et* $e_k(n+1) = \begin{cases} 0 & si \ \ k \neq n+1 \\ 1 & si \ \ k = n+1 \end{cases}$

alors

$$\begin{aligned} TB_{q,k}(u)(n) &= (e_{k-1} \circ u)\,\omega Tu(n) \\ &= B_{q,k-1}(u)(n)\,\omega Tu(n) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_{j,k-1}(u)\,Tu(n-j) \end{aligned}$$

$$d'où \quad B_{n+1,k}(u) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_{j,k-1}(u)\,u(n-j+1)$$

Exemple 1.2.5 *:*

Associons à l'exemple précèdent l'opérateur de dérivation

$$\begin{aligned} qB_{q,k}(u)(n) \quad &= q(e_k \circ u)(n) & &= [(e_{k-1}) \circ u]\,\omega qu(n) \\ & & &= (B_{q,k-1}(u)(n)\,\omega qu)(n) \\ & & &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_{j,k-1}(u)(qu)(n-j) \\ d'où \qquad & nB_{n,k}(u) & &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_{j,k-1}(u)(n-j)\,u(n-j) \end{aligned}$$

1.3 Nombres de Stirling

Les nombres de Stirling[1] sont définis de manière combinatoire et algébrique [17] .

[1] Voici la concordance entre les trois principales notations [17]: nombres de première espèce$=s(n,k)$ (*Riodan, cette thèse*)$\equiv S_n^k$ (*Jordan*) $= (-1)^{n-k} S_1(n-1,n-k)$ (Gould , Hagen,..) ; nombres de seconde espèce $=S(n,k) = \sigma_n^k = S_2(k,n-k)$

1.3.1 Nombres de Stirling de deuxième espèce:

Définition 1.3.1 *:*

Le nombre de partitions[(1)] *d'un ensemble à n éléments en k sous-ensembles non vides est appelé nombre de Stirling de seconde espèce, noté $S(n,k)$.*

on a :

$$\begin{cases} S(n,k) > 0 & si\ 1 \leq k \leq n \\ S(n,k) = 0 & si\ 1 \leq n < k \\ S(0,0) = 1\ et\ S(0,k) = 0 & si\ k \geq 1 \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Les nombres de Stirling sont définis algébriquement par leurs fonctions génératrices:

Lemme 1.3.1 *[17]:*

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de seconde espèce:

$$\frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq k} S(n,k) \frac{x^n}{n!}$$

Lemme 1.3.2 *:[4]*

Pour tous entiers n, k on a :

$$B_{q,k}(a) = S(q,k) = \frac{a^{\omega k}}{k!}$$

1.3.2 Nombre de Stirling de première espèce:

Définition 1.3.2 *:*

Le nombre de Stirling de première espèce $s(n,k)$ compte le nombre de manières de répartir n objets dans k-cycles disjoints non vides .

Lemme 1.3.3 *[17]:*

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce est :

$$\frac{(\log(1+x))^k}{k!} = \sum_{n \geq k} s(n,k) \frac{x^n}{n!}$$

[(1)] partitions en k sous-ensembles c'est donc aussi le nombres de relations d'equivalence à k classes sur cet ensemble.

Lemme 1.3.4 *:*

Pour tout entiers n,k on a :

$$\begin{aligned} s(n,k) &= e_k \circ \bar{a} = B_{n,k}(\bar{a}) \\ &= \frac{\bar{a}^{\omega k}}{k!} \qquad \textit{pour } k \geq 1 \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Démonstration. :

D'après l'exemple 1.2.1 , on rappelle que : $g_{\bar{a}}(x) = \log(1+x)$ et pour $\bar{u} = \bar{a}$, alors:

$$\begin{aligned} \frac{g_{\bar{a}}^{k}(x)}{k!} &= g_{e_k \circ \bar{a}}(x) \\ &= \sum_{n \geq k} s(n,k) \frac{x^n}{n!} = g_{s(n,k)}(x) \end{aligned}$$

■

1.3.3 Propriétés de $S(n,k)$ et $s(n,k)$ en utilisant les opérateurs shift et dérivation:

Nous présentons ici quelques propriétés de ces nombres [17].

Lemme 1.3.5 *:*

Les nombres de Stirling vérifient la relation de récurrence suivante:

$$S(n+1,k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j,k-1)$$

Démonstration. :

Par définition :

$$S(n,k) = e_k \circ a(n)$$

$$s(n,k) = e_k \circ \bar{a}(n) \quad \text{pour } k \geq 1$$

Appliquons les opérateurs shift sur $S(n,k)$ on obtient

$$\begin{aligned}
T(e_k \circ a) &= [(Te_k) \circ u]\,\omega Ta \\
TS(q,k)(n) &= S(n+1,k) \\
&= ([e_{k-1} \circ a]\,\omega Ta)(n) \\
&= (S(q,k-1)\,\omega Ta)(n) \\
S(n+1,k) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j,k-1)\,Ta(n-j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j,k-1)\,a(n-j+1)
\end{aligned}$$

or

$$a(n) = 1 pour\ n \geq 1$$

il en résulte

$$S(n+1,k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j,k-1) \tag{1.3.3}$$

ce qu'est le resultat. ■

Lemme 1.3.6 *:*

Les nombres de Stirling vérifient aussi la relation de récurrence suivant:

$$\begin{aligned}
S(n+1,k) &= kS(n,k) + S(n,k-1), \qquad && n,k \geq 1 \\
S(0,k) &= S(n,0) = 0 && sauf\ \ pour\ \ S(0,0) = 1
\end{aligned}$$

Démonstration. :

Soit $a = 1^q - e_0$ c'est à dire $g_a(x) = e^x - 1$ alors $a(n) = 1$ pour $n \geq 1$ et $a(0) = 0$

$$\begin{aligned}
TS(q,k) &= T\frac{a^{\omega k}}{k!} \\
&= \frac{1}{k!}\left(Ta^{\omega k}\right)\omega T1^q \\
&= \frac{1}{k!}\left(ka^{\omega(k-1)}\right)\omega 1^q
\end{aligned}$$

or $\qquad 1^q = a + e_0$

alors

$$\begin{aligned} TS(q,k) &= \frac{1}{(k-1)!}\left(a^{\omega(k-1)}\omega(a+e_0)\right) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\left(a^{\omega k} + a^{\omega(k-1)}\right) \\ &= k\frac{a^{\omega k}}{k!} + \frac{a^{\omega(k-1)}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

$$\text{d'ou} \qquad S(n+1,k) = kS(n,k) + S(n,k-1)$$

ce qu'est le resultat. ∎

Lemme 1.3.7 *:*

Les nombres de Stirling de première espèce sont reliés par la relation de récurrence :

$$s(q+1,k) = s(q,k-1) - q\ s(q,k)$$

Démonstration. :

Pour les nombres de Stirling de première espèce ; $s(n,k) = e_k \circ \bar{a}$ pour $k \geq 1$

$$T(e_k \circ \bar{a}) = \frac{\bar{a}^{\omega(k-1)}}{(k-1)!}\omega T\bar{a}$$

comme l'inverse dans A de $T\bar{a}$ est (e_0+e_1) alors:

$$(e_0+e_1)\,\omega s(q+1,k) = s(q,k-1) \qquad \text{et} \qquad e_1\ \omega s(q+1,k) = qs(q,k)$$

$$\text{d'où} \qquad s(q,k+1) = s(q,k-1) - q\ s(q,k) \tag{1.3.4}$$

∎

Remarque 1.3.1 *:*

On dennera une première défintion des polynômes de Bell

Définition 1.3.3 *:*

Les polynômes de Bell sont donnés par les nombres de Stirling comme :

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,t^n = B_n(t)$$

Lemme 1.3.8 *:*

Pour $q \geq 0$ le polynôme de Pochhammer est :

$$(t)_q = t^q \circ \overline{a} \tag{1.3.5}$$

$$t^q = (t)_q \circ a \tag{1.3.6}$$

Démonstration. :

Calculons : $t^q \circ \bar{a}$, pour $k \geq 0$

$$\begin{aligned} g_{t^q \circ \bar{a}}(x) &= g_{t^q}(g_{\bar{a}}(x)) \\ &= \sum_{k\geq 0} t^k \frac{g_{\bar{a}}^k(x)}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(tg_{\bar{a}}(x))^k}{k!} \\ &= \exp(tg_{\bar{a}}(x)) \\ &= \exp(t\log(1+x)) \\ &= (1+x)^t \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (1+x)^t &= \sum_{n\geq 0} (t)_n \frac{x^n}{n!} \\ &= g_{(t)_q}(x) \end{aligned}$$

tel que $(t)_n = t(t-1)\cdots(t-n+1)$ est le polynôme de Pochhammer .

d'autre part $\bar{a} \circ a = e_0$, on obtient (1.3.6)

alors d'apres la formule de Faa di Bruno et le résultat (1.3.2) on obtient

$$\begin{aligned} t^n &= \left((t)_q \circ a\right)(n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (t)_k B_{n,k}(a) \end{aligned}$$

d'où $$t^n = \sum_{k=0}^{n} (t)_k S(n,k)$$

■

Lemme 1.3.9 *:*

Les fonctions génératrices des nombres de Stirling de 1^{er} et de $2^{ème}$ espèce sont :

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(t)_k \qquad . \ k \geq 1 \tag{1.3.7}$$

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) t^k \tag{1.3.8}$$

Démonstration. :

D'aprés l'equation de Faa di Bruno et le résultat (1.3.2) , on obtient

$$\begin{aligned} t^n &= \left((t)_q \circ a\right)(n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (t)_k B_{n,k}(a) \\ \text{d'où} \qquad t^n &= \sum_{k=0}^{n} (t)_k S(n,k) \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (t)_n &= t^q \circ \bar{a}(n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k B_{n,k}(\bar{a}) \\ \text{d'où} \qquad (t)_n &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k) t^k \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

ce qui achève la démonstration. ∎

Lemme 1.3.10 *:*

Les nombres de Stirling de $2^{ème}$ espèce ont pour valeur:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} j^n (-1)^{k-j}$$

La formule est encore valable si $k > n$ *;* $(S(n,k) = 0)$

Démonstration. :

Soit $a = 1^q - e_0$; $\quad g_a(x) = e^x - 1$

$$S(q,k) = e_k \circ a = \frac{a^{\omega k}}{k!} \quad \text{et} \quad S(0,k) = e_0$$

alors

$$\begin{aligned} S(q,k) &= \frac{1}{k!}\left(1^q - e_0\right)^k \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(1^q\right)^{\omega j}\left(-e_0\right)^{\omega(k-j)} \end{aligned}$$

Montrons que $\left(1^q\right)^{\omega j} = j^q$, resulte de $(a+b)^q = a^q\omega\ b^q$ (formule du binôme):

$$S(q,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} j^q\left(-1\right)^{k-j} \tag{1.3.11}$$

alors

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n}\binom{k}{j} j^n\left(-1\right)^{k-j} \tag{1.3.12}$$

■

1.4 Nombres de Bell

Définition 1.4.1 *:*

Le $n^{ième}$ nombre de Bell noté $B(n)$ est le nombre de partition(1) *d'un ensemble à n éléments en sous ensembles non vides, où le nombre exponentiel*(2) *vaut:*

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\ ;\ n \geq 1 \tag{1.4.1}$$

Lemme 1.4.1 *:*

Les nombres de Bell ont pour fonction génératrice exponentielle:

$$\sum_{n\geq 0} B(n)\frac{t^n}{n!} = \exp\left(e^t - 1\right) \tag{1.4.2}$$

(1) c'est aussi le nombre de relations d'équivalence sur un ensemle à n éléments

(2) [Becker , Riodan ,1948] , [Touchard ,1956]

Démonstration. :

On a :

$$t^q \circ a(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, t^n = B_n(t) \tag{1.4.3}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} B_n(t) \frac{t^n}{n!} &= g_{t^q \circ a}(x) \\ &= \exp\left(e^t - 1\right) \end{aligned}$$

■

Lemme 1.4.2 *:*

Les polynômes de Bell vérifient :

$$B_{n+1}(t) = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_n(j) \quad si \;\; n \geq 0$$

et la relation de récurrence[1] *:*

$$B(n+1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B(j)$$

Démonstration. :

Comme $B_q(t) = t^q \circ a$, pour $t \in C^*$; par la dérivation

On a

$$TB_q(t) = tB_q(t)\, \omega 1^q$$

et

$$qB_q(t) = tB_q(t)\, \omega q a$$

d'où

$$B_{n+1}(t) = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j \tag{1.4.4}$$

$$nB_n(t) = t \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} B_{n-j}(t) \tag{1.4.5}$$

alors pour $t = 1$ on obtient la relation. ■

(1) [Aitken, 1933]

Lemme 1.4.3 *:*

Les nombres de Bell sont représentés par la série convergente[1] *:*

$$B(n) = \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^n}{j!} \qquad , n \geq 1$$

Démonstration. :

En identifiant les coefficients de $\frac{t^n}{n!}$ dans le premier membre et le dernier membre de l'équation

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} B(n)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{e}\exp\left(e^t\right) \\ &= \frac{1}{e}\sum_{j\geq 0}\frac{e^{jt}}{j!} \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{e}\sum_{j\geq 0}\frac{j^n}{j!}\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

■

1.5 Produit de Cauchy

Dans ce paragraphe, on présente un rappel sur le produit de cauchy[5]. On gardera les même notations et les hypothèses de ce chapitre.

Soient C un corps commutatif de caractéristique zéro ,$Z(C)$ désigne le C- espace vectoriel des séries de Laurent formelles $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$ à coefficients dans C . $z(C)$ le C- espace vectoriel des s suites $u : \mathbb{Z} \to C$.Et $s(C) = \{u \in z(C), ord\ u > -\infty\}$.

Soit l'isomorphisme de C- espace vectoriel :

$$\begin{aligned} z(C) &\to Z(C) \\ u &\to f_u(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n \end{aligned}$$

l'image de $s(C)$ est $S(C)$, et on pose $ord\ f_u(X) = ord\ u$.

(1) [Dobinski,1877]

Définition 1.5.1 *:*

Le produit de Cauchy de deux séries formelles de $S(C)$ définit une suite $u*v$ par

$$f_{u*v}(X) = f_u(X)\, f_v(X)$$

et

$$u*v(n) = \sum_{i+j=n} u(i)\, v(j)$$

1.6 Formule de Leibniz

Les séries formelles utilisées sont des séries de $Taylor$ formelles. Par définition [17, tome 1], une telle série f s'écrit [(1)] :

$$\begin{aligned} f &= f(t) = f(t_1, t_2, ..., t_k) = \sum_{x\in\hat{k}} f_x \frac{t^x}{x!} \\ &= \sum_{x_1.x_2,...x_k\geq 0} f_{x_1\cdot x_2\cdots x_k} \frac{t^{x_1}}{x_1!}\frac{t^{x_2}}{x_2!}\cdots\frac{t^{x_k}}{x_k!} \end{aligned}$$

Les f_x s'appellent coefficients de $Taylor$ de f .

Théorème 1.6.1 (***Formule de Leibniz***) *:[17, tome 1]*

Soient f et g deux séries formelles , de coefficients de Taylor f_x et g_λ , x ,$\lambda \in \hat{k}$, et h la série formelle produit , $h = fg$. Alors , les $coefficients$ de $Taylor$ h_μ de h ont pour expression :

$$\begin{aligned} h_\mu &= h_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} \\ &= \sum \frac{\mu_1!\mu_2!...\mu_k!}{x_1!\lambda_1!...x_k!\lambda_k!} f_{x_1\cdot x_2\cdots x_k} g_{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_k} \end{aligned}$$

la sommation ayant lieu sur tous les systèmes d'entiers $x_1, x_2, ..., x_k$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ tels que $x_1 + \lambda_1 = \mu_1$, ...$x_k + \lambda_k = \mu_k$ .En d'autre termes :

$$h_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} = \sum_{x_1.x_2,...x_k} \binom{\mu_1}{x_1}\cdots\binom{\mu_k}{x_k} f_{x_1\cdot x_2\cdots x_k} g_{\mu_1-x_1\cdots\mu_k-x_k}$$

(1) Les notations x , $\hat{k}$ signifient : $\hat{k} := \mathbb{N}^{[k]}$, où $[k] := \{1, 2, ..., k\}$, $x \in \hat{k}$ signifie que $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, où les $x_i \in \mathbb{N}$

Théorème 1.6.2 *:[17, tome 1]*

Soient deux fonctions F *et* G *de classe* C^{∞} *en* a $\left(\in \mathbf{R}^k\right)$ *et* $H := F.G$ *. Entre les trois séries formelles :* $f := \tau_a(F), g := \tau_a(G), h := \tau_a(H)$ *tel que* $f := \tau_a(F) = \sum\limits_{x \in \hat{k}} f_x \frac{t^x}{x!}$ *et* $f_x := \left. \dfrac{\partial^{x_1+\ldots+x_k}}{\partial x_1^{x_1} \ldots \partial x_k^{x_k}} F(x_1, \ldots, x_k) \right|_{(x_1,\ldots,x_k)=(a_1,\ldots,a_k)}$ *et* $f_{(0)} = f_{0,\ldots 0} := F(a_1, \ldots, a_k)$.

c'est nombre d'écrire

$$h = fg$$

au sens du produit des séries formelles [1]

Corollaire 1.6.1 *:*

Pour le produit $H(x) := F(x).G(x)$ *de deux fonctions d'une seul variable, la formule de Leibniz ordinaire :*

$$h_m = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} f_l g_{m-l} \tag{1.6.1}$$

où

$$f_l := \left. \frac{d^l F(x)}{dx^l} \right|_{x=a} \quad , \; f_0 = f(a)$$

[1] voir L Comtet tome 1 page 49

Chapitre 2

Une première généralisation des nombres de Stirling

Dans ce chapitre l'intérêt premier est de voir le développement des nombres de Stirling de deuxième espèce dans le contexe des opérateurs différentiels; nous avons choisi de commencer par l'étude de la notion opérateur [18], puis d'introduire ces nombres par ces opérateurs [6], et finalement, donner une première généralisation de tout ce qui a été étudié dans le premier chapitre [22][1][2][8][9][10][11].

Définition 2.0.1 *:*

a\ *On appelle dérivation d'un anneau $\mathcal{R}$, tout application ∂ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ telle que, pour tous r_1 et r_2 dans $\mathcal{R}$ on ait*

$$\partial (r_1 + r_2) = \partial r_1 + \partial r_2$$
$$\partial (r_1 r_2) = r_1 (\partial r_2) + (\partial r_1) r_2$$

b\ *On appelle anneau différentiel, tout couple $(\mathcal{R}, \partial)$,où $\mathcal{R}$ est un anneau et ∂ une dérivation de $\mathcal{R}$*

c\ *On appelle morphisme d'anneaux différentiels de l'anneau différentiel $(\mathcal{R}_1, \partial_1)$ dans l'anneau différentiel $(\mathcal{R}_2, \partial_2)$, un morphisme f de l'anneau $\mathcal{R}_1$ dans l'anneau $\mathcal{R}_2$ tel que*

$$f \circ \partial_1 = \partial_2 \circ f$$

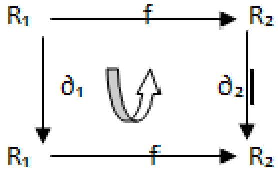


Figure 2.0.1 : Diagramme commutatif

2.1 Opérateur différentiel et nombres de Stirling

Les nombres de Stirling de second espèce peuvent être introduits par des opérateurs différentiels .

Notation 2.1.1 *:*

Notons

✓ $D = \dfrac{d}{dX}$; *l'opérateur de dérivation ordinaire appliqué au polynôme à l'indéterminé* X.

✓ $\partial = XD$ *l'opérateur différentiel opérant sur* $p = C\left[X\right]$ *ou* C *est un corps commutatif de caractéristique zéro.*

✓ *Pour* $l \geqslant 0$ *; tel que* $r = s + l$, $\lambda = \left[X^r D^s\right]^n$

Dans le calcul ombral, (*algèbre de Hurwitz*), *le dual* $\mathcal{P}'$ *de* $\mathcal{P}$ *est identifié à l'algèbre de Hurwitz,* $A = A(C)$ *des suites à valeurs dans* C.

Pour : $\lambda : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $\lambda^* : A \to A$, *son opérateur adjoint:*

1. *si* $m_x.x^n = x^{n+1}$ *est l'opérateur de multiplication par x; son adjoint* m_x^* *associe à une fonction* $v(n)$*, la fonction* $v(n+1)$ *alors* $m_x^* = T$ *l'opérateur "shift" "ou opérateur de décalage" de* A.

2. $\partial x^n = n\, x^n$ *d'où son adjoint* $\left(\partial^* v\right)(n) = n\, v\,(n)$ *qui est l'opérateur* $\partial^* = q$ *de dérivation*

Proposition 2.1.1 *:*

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\left(\partial\right)_n = \partial\left(\partial - 1\right) \ldots \left(\partial - n + 1\right) = X^n D^n \tag{2.1.1}$$

avec $(\partial)_n$ *est le polynôme de Pochhammer assosié à l'opérateur* ∂

$$\partial^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) X^k D^k \tag{2.1.2}$$

où les $S(n,k)$ *sont les nombres de Stirling de* $2^{ème}$ *espèce.*

Preuve. :

$(X^n)_{n\geq 0}$ est une base du $C-espace$ vectoriel $C[X]$.

Pour la relation (2.1.1) faisons agir l'opérateur $X^n D^n$ sur la base $(X^n)_{n\geq 0}$ on obtient ainsi pour $k \geq n$

$$\begin{aligned} X^n D^n \left(X^k\right) &= X^n \left(k(k-1)...(k-n+1) X^{k-n}\right) \\ &= k(k-1)...(k-n+1) X^k \end{aligned}$$

et

$$\partial^n X^k = k(k-1)...(k-n+1) X^k$$

d'où (2.1.1)

Comme $C[\partial]$ est isomorphe à $C[X]$

$$\partial^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) (\partial)_k$$

d'où (2.1.2) ∎

Proposition 2.1.2 *:*

Pour tous entiers $n \geq 0$, $l \geq 0$ *:*

L'opérateur adjoint de

$$\lambda = X^{nl} (\partial)_s (\partial + l)_s ... (\partial + (n-1) l)_s \tag{2.1.3}$$

tel que: $(\partial)_s = (\partial)(\partial - id(1))...(\partial + id(s-1))$, *avec id est l'application identique.*

est donné par :

$$\lambda^* = \left[(q)_s T^l\right]^n = (q)_s (q+l)_s ... (q+(n-1) l)_s T^{n\, l}$$

Preuve. *:*

A partir de $Tq = (q+1) T$ *et* $T^l (q)_s = (q+l)_s T^l$ *on obtient le résultat .* ∎

2.2 Généralisation des nombres de Stirling de deuxième espèce:

Soient n, r, s, l des entiers positifs tel que $l = r - s$. Considerons l'opérateur $[X^r D^s]^n$ défini dans l'équation(2.1.3) :

Posons :

$$p(X) = (X)_s (X+l)_s \dots (X+(n-1)\,l)_s = \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k)\,(X)_k \tag{2.2.1}$$

Définition 2.2.1 *:*

Les nombres entiers positifs $S_{r,s}(n,k)$ apparaissant comme coefficients du polynôme $p(X)$, sont dits nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés (première généralistion).

Proposition 2.2.1 *:*

Pour tout entier $r = s + l$, $l \geq 0$

$$[X^r D^s]^n = X^{nl} \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k) X^k D^k \tag{2.2.2}$$

Avec:

$$\begin{aligned}
&S_{r,s}(0,0) = 1 \\
&S_{r,s}(n,k) = 0 \ \textit{pour}\ k > ns \\
&S_{r,s}(n,k) = 0 \ \textit{pour}\ \ k < s \ \textit{ et } n > 0
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Preuve. :

La relation (2.1.3) et la définition 2.2.1 donnent:

$$(X)_s (X+l)_s \dots (X+(n-1)\,l)_s = \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k)\,(X)_k$$

appliquées à l'opérateur (∂) on obtient :

$$\begin{aligned}
\lambda &= X^{nl} (\partial)_s (\partial+l)_s \dots (\partial+(n-1)\,l)_s \\
&= X^{nl} \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k) X^k D^k
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.1 *:*

Pour les entiers $n, r, s \geq 0$ et $r \geq s$:
Les nombres $S_{r,s}(n,k)$ qui satisfont la convention : $S_{r,s}(n,0) = \delta_{n,0}$ (symbole de Kronecker), sont donnés par une somme finie :

$$S_{r,s}(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=s}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \prod_{j=1}^{n} \left(p + (j-1)(r-s)\right)_s \tag{2.2.4}$$

Autrement écrit:

$$S_{r,s}(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \left(x^r \frac{d^s}{dx^s} \right)^n \left[(1-x)^k - \sum_{p=0}^{s-1} \binom{k}{p} (-x)^p \right] \right\}_{x=1}$$

avec $(x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1)$, polynôme de Pochammer .

Preuve. :

Considérons le polynôme suivant :

$$\begin{aligned} p(n,s,l,X) &= (X)_s (X+l)_s \ldots (X+(n-1)l)_s \\ &= \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k)(X)_k \end{aligned}$$

dans ce cas les $(x)_j$, $j \in \mathbb{N}$ forment une base dans l'anneau $C[X]$, avec $p(X)$ de degré ns. Le dévelopement de Mahler de ce polynôme est :

$$p(X) = \sum_{j=0}^{k} j! S_{r,s}(n,j) \binom{X}{j}$$

ainsi

$$p(k) = \sum_{j=0}^{k} j! S_{r,s}(n,j) \binom{k}{j}$$

posons $u(j) = j! S_{r,s}(n,j)$ et $v(q) = 1^q$, $\partial = q!$
d'où

$$p(k) = \left[1^q \omega \; \partial S_{r,s}(n,q)\right](k)$$

d'autre part $(-1)^q \omega (1)^q = e_0$, (élément neutre)

$$\begin{aligned} ((-1)^q \omega p(q))(k) &= [(-1)^q \omega 1^q \omega \ \partial S_{r,s}(n,q)](k) \\ &= k! S_{r,s}(n,k) \end{aligned}$$

d'où

$$k! S_{r,s}(n,k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} p(\ j)$$

En remplaçant $p(\ j)$ par sa valeur , est déduite l'équation:

$$S_{r,s}(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (\ j)_s (\ j+l)_s ... (\ j+(n-1)\,l)_s$$

avec $S_{r,s}(n,k)$ non nuls pour $1 \leq k \leq ns$ ■

Exemple 2.2.1 *:*

Pour $r = s = 1$, la formule classique des nombres de Stirling de $2^{\text{ème}}$ espèce est :

$$S_{1,1}(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} p^n$$

Exemple 2.2.2 *:*

Pour $r = 2, s = 1$:

$$S_{2,1}(n,k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}, 1 \leq k \leq n$$

dits nombres de Lah

Exemple 2.2.3 *:*

Pour $r = s$:

$$\begin{aligned} S_{r,r}(n,k) &= \sum_{p=0}^{k-r} (-1)^p \frac{\left[\frac{(k-p)!}{(k-p-r)!}\right]^n}{(k-p)!p!} ; r \leq k \leq nr \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=r}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} [p(p-1)...(p-r+1)]^n \qquad (2.2.5) \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=r}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} [(p)_r]^n \end{aligned}$$

Exemple 2.2.4 *:*

La valeur explicite de $S_{r,1}(n,k)$:

$$S_{r,1}(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \prod_{j=1}^{n} (p + (j-1)(r-1)) \tag{2.2.6}$$

2.2.1 Propriétés des nombres de Stirling de $2^{ème}$ espèce généralisés:

Les nombres de Stirling $S_{r,s}(n,k)$ sont considérés comme une extension naturelle des $S_{1,1}(n,k) = S(n,k)$. Voici quelques propriétés :

1. La première propriété a été donnée; rappelons la :

$$(X)_s (X+l)_s \dots (X+(n-1)l)_s = \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k) (X)_k$$

Cette relation peut s'écrire d'une autre manière

$$\prod_{j=1}^{n} (X + (j-1)(r-s))_s = \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k) (X)_k \tag{2.2.7}$$

1.1 La relation des $S_{r,s}(n,k)$ devient particulière pour $r = s$: l'équation (2.2.4) peut être reformulée comme suit:

$$\begin{aligned} S_{r,r}(n,k) &= \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=r}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} [p(p-1)\dots(p-r+1)]^n \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=r}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} [(p)_r]^n \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

1.2 Pour $r = s = 1$ alors $l = 0$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) (x)_k$$

1.3 Pour $r = s$ la relation (2.2.7) donne une interpretaion particulière des $S_{r,r}(n,k)$:

$$[(x)_r]^n = \sum_{k=r}^{nr} S_{r,r}(n,k) (x)_k$$

2 Pour $r > s$: la formule de récurrence pour les $S_{r,s}(n,k)$ est donnée sous forme de théorème

Théorème 2.2.2 *:*

Pour tout entier $r > s$ la relation de récurrence généralisée :

$$S_{r,s}(n+1,k) = \sum_{p=0}^{s} \binom{s}{p} (n(r-s)+k-s+p)_p \, S_{r,s}(n,k-s+p)$$

Preuve. :

Rappelons les conditions (2.2.3) on peut écrire

$$[X^r D^s]^n = X^{nl} \sum_{k\geq 0} S_{r,s}(n,k) X^k D^k$$

on a alors

$$\begin{aligned}
[X^r D^s]^{n+1} &= [X^r D^s] [X^r D^s]^n \\
&= [X^r D^s] X^{nl} \sum_{k\geq 0} S_{r,s}(n,k) X^k D^k \\
&= X^r \sum_{k\geq 0} D^s \left(S_{r,s}(n,k) X^{n(r-s)+k} D^k \right)
\end{aligned}$$

Or

$$D^s (U.V) = \sum_{p=0}^{s} \binom{s}{p} D^p (U) \, D^{s-p} (V)$$

avec $U = S_{r,s}(n,k)X^{n(r-s)+k}$ et $V = D^k$

de maniére générale

$$D^q \left(X^N \right) = N(N-1)...(N-q+1) X^{N-q} = (N)_q X^{N-q}$$

ainsi

$$[X^r D^s]^{n+1} = X^r \sum_{k\geq 0} D^s (U.V)$$

Après le calcul et le changement de variable suivant $k = K - s + p$, on obtient :

$$[X^r D^s]^{n+1} = X^{(n+1)(r-s)} \sum_{K\geq 0} \sum_{p=0}^{s} \binom{s}{p} (n(r-s)+K-s+p)_p \, S_{r,s}(n, K-s+p) X^K D^K \tag{2.2.9}$$

avec

$$S_{r,s}(n, K-s+p) = 0 \text{ pour } K > (n+1)s$$

$$S_{r,s}(n, K-s+p) = 0 \text{ pour } K < s$$

or

$$[X^r D^s]^{n+1} = X^{(n+1)(r-s)} \sum_{k=s}^{(n+1)s} S_{r,s}(n+1,k) X^k D^k \tag{2.2.10}$$

En identifiant les relations (2.2.9) et (2.2.10) , on obtient :

$$S_{r,s}(n+1,k) = \sum_{p=0}^{s} \binom{s}{p} (n(r-s)+k-s+p)_p \, S_{r,s}(n,k-s+p)$$

■

2.1 pour $r = s$ la formule de récurrence pour les $S_{r,r}(n,k)$ est donnée comme:

$$S_{r,r}(n+1,k) = \sum_{p=0}^{r} \binom{k+p-r}{p} (r)_p \, S_{r,r}(n,k+p-r) \text{ avec } r \leq k \leq nr, n > 1 \tag{2.2.11}$$

et

$$S_{r,r}(1,r) = 1$$
$$S_{r,r}(n,k) = 0 \text{ pour } k < r \text{ et } nr \leq k \leq (n+1)\,r$$

Avec $(r)_0 := 1$.

2.1.1 Pour $r = s = 1$, on obtient la relation de récurrence classique.

$$S_{1,1}(n+1,k) = kS_{1,1}(n,k) + S_{1,1}(n,k-1)$$

avec les conditions initiales.

2.2 Pour $s = 1$ la relation de récurrence devient

$$S_{r,1}(n+1,k) = (n(r-1)+k-r+1)S_{r,1}(n,k) + S_{r,1}(n,k-1) \tag{2.2.12}$$

avec les conditions (2.2.3)

2.2.1 On déduit de (2.2.7) :

$$\prod_{j=1}^{n} (x+(j-1)(r-1)) = \sum_{k=1}^{n} S_{r,1}(n,k) \, (X)_k$$

2.2.2 Les fonctions génératrices exponentielles

Rappelons que les nombres de Stirling sont aussi définis par leurs fonctions génératrices exponentielles, commençons par le cas $r = s = 1, 2, ...$ La fonctions génératrice exponentielle de $S_{r,r}(n, k)$ est donnée par :

Proposition 2.2.2 *:*

Pour $r = s = 1, 2, ...$

$$\sum_{n=\lceil \frac{k}{r} \rceil} \frac{x^n}{n!} S_{r,r}(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=r}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \left(e^{xp(p-1)...(p-r+1)} - 1 \right) \tag{2.2.13}$$

$\lceil y \rceil$ *est la partie entière supérieure de* y *.*

Preuve. :

D'aprés l'équation (2.2.11) on : $r \leq k \leq nr$,$n > 1$ alors $n \geq \frac{k}{r}$ or $n \leq \frac{k}{r} \leq n+1$ d'où $n = \lceil \frac{k}{r} \rceil$

En utilisant l'équation (2.2.5) alors :

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=r}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \sum_{n=\lceil \frac{k}{r} \rceil \geq 1} [p(p-1)...(p-r+1)]^n \frac{x^n}{n!} \\ = & \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=r}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \left(e^{xp(p-1)...(p-r+1)} - 1 \right) \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 2.2.3 *:*

La fonction génératrice exponentielle dans le cas $r > 1$ *,* $s = 1$ *:*

$$\sum_{n=\lceil \frac{k}{r} \rceil}^{\infty} \frac{x^n}{n!} S_{r,1}(n,k) = \frac{1}{k!} \left[(1 - (r-1)x)^{-\frac{1}{r-1}} - 1 \right]^k$$

2.2.3 Une première généralisation des nombres de Bell

Dans toute cette partie on concédera n, r, s des entiers positives tels que : $r \geq s$.

Définition 2.2.2 *:*

On introduit la généralisation des nombres de Stirling de 2^{eme} *espèce ; cette dernière définit des nombres de Bell généralisés:*

$$B_{r,s}(n) = \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k) \tag{2.2.14}$$

avec

$$B_{1,1}(n) = B(n)$$

Définition 2.2.3 *:*

Soit x *indéterminé, on definit le polynôme de Bell généralisé par :*

$$B_{r,s}(n,x) = \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k)x^k \tag{2.2.15}$$

Définition 2.2.4 *:*

La fonction génératrice exponentielle associée à $B_{r,s}(n,x)$ *est:*

$$G_{r,s}(\lambda,x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{r,s}(n,x)\frac{\lambda^n}{n!} \tag{2.2.16}$$

Proposition 2.2.4 *:*

Pour tout entiers positifs n, r, s *on a :*

$$B_{r,s}(n,x) = x^{-n(r-s)} e^{-x} \left(x^r D^s\right)^n e^x$$

Démonstration. :

En utilisant la correspondance des opérateurs différentiels. On obtient une équation opérationnelle de l'équation (2.2.15) donnée par :

$$\begin{aligned} B_{r,s}(n,x) &= x^{-n(r-s)} e^{-x} \left(x^r D^s\right)^n e^x \\ &= x^{-n(r-s)} e^{-x} x^{n(r-s)} \sum_{k=s}^{ns} S_{s,r}(n,k) x^k D^k e^x \\ &= \sum_{k=s}^{ns} S_{s,r}(n,k) x^k \end{aligned}$$

■

2.2.4 Généralisation de la formule de type – Dobiński:

Soit la relation suivante :

$$\partial^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) X^k D^k$$

Définition 2.2.5 *:*

L'expression de la forme – fermée pour $B(n)$ peut être trouvée en considérant l'action de l'opérateur ∂^n sur une fonction ayant un développement de Taylor au voisinage de zéro $(x=0)$ ie : $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$; d'où

$$\partial^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k^n x^n$$

Plus spécialement pour une fonction $f(x) = e^x$ qui admet un développement de Taylor au voisinage de zéro : $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ alors

$$\partial^n e^x = \sum_{j=0}^{\infty} j^n \frac{x^j}{j!} = \left(\sum_{k=1}^{n} S(n,k) x^k \right) e^x$$

en posant $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) x^k$ (Polynôme de Bell)

D'où :

$$B_n(x) = \frac{1}{e^x} \sum_{j=0}^{\infty} j^n \frac{x^j}{j!} \tag{2.2.17}$$

Prenant $C = \mathbb{C}$; (corps commutatif de caractéristique zéro) , et $B_n(1) = B_n$

La relation (2.2.17) est dite "formule de Dobinski", elle nous a permis d'écrire les nombres de Bell comme une série infinie.

Par généralisation :

$$\begin{aligned}(\partial)_s (\partial + l)_s \dots (\partial + (n-1)l)_s e^x &= \sum_{j=0}^{\infty} (j)_s (j+l)_s \dots (j + (n-1)l)_s \frac{x^j}{j!} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} S_{r,s}(n,k) x^k \right) e^x\end{aligned}$$

d'apres la relation (2.2.15) on obtient le resultat suivant :

$$B_{r,s}(n,x) = e^{-x} \sum_{j=1}^{n} \prod_{t=0}^{n-1} (j+tl)_s \frac{x^j}{j!} \tag{2.2.18}$$

qui est le polymôme de Bell généralisé ; avec $l = r - s$, et $n = 1, 2 \dots$

Alors pour $r, s \geq 1$, *et* $x = 1$:on obtient la relation de Dobinski généralisé .

Définition 2.2.6 *:*

Nous présentons une prolongation d'Eq.(2.2.17) avec $x = 1$ et définissons la famille des nombres de type de Bell (où bien la famille de Dobinski-type)[13] comme suit :

$$\mathcal{B}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[P(k)]^n}{D(k)} \tag{2.2.19}$$

où $P(k)$ et $D(k)$ des fonctions quelconques de $k = 0, 1, 2, ...$, avec $D(k) \neq 0$, et on suppose que la somme converge.

Remarque 2.2.1 *:*

Les nombres de Bell Conventionnels sont obtenus pour $P(k) = k$ et $D(k) = ek!$

La forme spécifique d'Eq.(2.2.19) simplifie le calcul des fonctions génératrices :

2.2.5 Fonctions génératrices exponentielles :

Prenant la fonction génératrice exponentielle d'Eq.(2.2.19) comme :

$$\mathcal{G}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}(n) \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda P(k)}}{D(k)}$$

L'évaluation de cette série dépend du choix particulier des fonctions $P(k)$et $D(k)$, et en général la série peut être divergente.

De la même manière on peut généralisés l'Eq(2.2.17) et définir :

$$\mathcal{B}(n, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[P(k, x)]^n}{D(k, x)} \tag{2.2.20}$$

Pour un cas particulier la relation (2.2.20) $D(k, x) = k!e^x x^{-x}$ et $P(k, x) = P(k)$ un polynôme en k. Par conséquent nous définissons la famille des nombres de type de Bell polynomiaux comme

$$\mathcal{B}(n, x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[P(k)]^n}{k!} x^k \tag{2.2.21}$$

La fonction génératrice exponentielle dans ce cas

$$\mathcal{G}(\lambda, x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda P(k)}}{k!} x^k$$

Remarque 2.2.2 *:*

L'introduction des nombres et des polynômes de type Bell généralisés par Eqs.(2.2.19) et (2.2.21) n'est pas simplement une définition mathématique mais elle est d'origine de la physique.

2.2.6 Propriétés des nombres de Bell généralisés :

On donnera quelques propriétés de ces nombres qui sont des conséquences de la relation (2.2.18) :

1. Pour $r \geq s$ et $x = 1$ dans l'équation(2.2.18) on obtient une équivalence pour les nombres de Bell généralisés $B_{r,s}(n), n = 1, 2 \ldots$

   Proposition 2.2.5 *:*

   Pour $r > s$

$$\begin{aligned} B_{r,s}(n) &= B_{r,s}(n,1) \\ &= \frac{1}{e}\sum_{k=s}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{n-1}(k+(j-1)l)_s \\ &= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(k+jr-(j-1)s)!}{(k+j(r-s))!} \\ &= \frac{(r-s)^{s(n-1)}}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\prod_{j=1}^{s}\frac{\Gamma\left(n+\frac{k+j}{r-s}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k+j}{r-s}\right)}\right] \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

   avec: $B_{r,s}(0) = 1$ *par convention; et* $\Gamma(y)$ *est la fontion gamma d'Euler .*

   Preuve. :

   On a :

$$\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(k+jr-(j-1)s)!}{(k+j(r-s))!} = (r-s)^{s(n-1)}\prod_{j=1}^{s}\frac{\Gamma\left(n+\frac{k+j}{r-s}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k+j}{r-s}\right)}$$

Explicitons le second membre .

on $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ donc $\Gamma(n+\alpha) = (n+\alpha-1)...(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)$

doù :

$$\frac{\Gamma(n+\alpha_j)}{\Gamma(1+\alpha_j)} = \prod_{l=1}^{n-1}(l+\alpha_j)$$

donc

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{s}\frac{\Gamma\left(n+\frac{k+j}{r-s}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k+j}{r-s}\right)} &= \prod_{j=1}^{s}\prod_{l=1}^{n-1}\left(l+\frac{k+j}{r-s}\right)\\
&= \prod_{l=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{k+j+l\left(r-s\right)}{r-s}\right)\\
&= \prod_{l=1}^{n-1}\frac{1}{\left(r-s\right)^{s}}\left(k+1+lr-ls\right)...\left(k+s+lr-ls\right)\\
&= \frac{1}{\left(r-s\right)^{s(n-1)}}\prod_{l=1}^{n-1}\frac{\left(k+lr-\left(l-1\right)s\right)!}{\left(k+l\left(r-s\right)\right)!}
\end{aligned}$$

■

3. Pour $r=s$ et $x=1$:

$$B_{r,r}\left(n\right)=B_{r,r}\left(n,1\right)=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{\left(k+r\right)!}{k!}\right]^{n-1} \tag{2.2.23}$$

   La relation (2.2.23) représente les nombres de Bell $B_{r,s}\left(n\right)$ comme une série infinie, qui est la généralisation de formule Dobiński.

4. Pour $s=1$, la formule de Dobiński est donnée par

$$B_{r,1}\left(n\right)=e^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{n}\left[k+\left(j-1\right)\left(r-1\right)\right]$$

5. Les nombres de Bell généralisés ‹non -diagonaux› $B_{r,s}\left(n\right)$ peuvent toujours être exprimés en tant que valeurs spéciales des fonctions hypergéométriques généralisés ${}_pF_q$. La manipulation algébrique des équations (2.2.22) et (2.2.23) rapporte les exemples suivants mais avant de les traiter, rappellons quelques définitions :

Dans la V^e Conférence de Chicago : La théorie des fonctions et géométrie, Klien dit : ‹‹ Aprés les fonctions transcendantes élémentaires on regarde habituellement les fonctions elliptiques comme les plus importantes. Il existe cependant une autre classe de fonctions pour lesquelles on peut réclamer une importance au moins égale à cause de leurs nombreuses applications en astronomie et en physique-mathématique. Ce sont *les fonctions hypergéométriques*....›› .En effet voila leurs definitions :

Definition:

Soient k uples de nombre complexe $(a_1, ..., a_k)$ *et l uples de nombre complexe* $(b_1, ..., b_l)$ *tels qu'aucun* b_i *ne soit un nombre entier négatif ou zéro; la série entière formelle avec des coefficients complexes* $h(a_1, ..., a_k; b_1, ..., b_l; x) \in \mathbb{C}[[x]]$ *[7], est définie comme :*

$$h(a_1, ..., a_k; b_1, ..., b_l; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_k)_n}{(b_1)_n \dots (b_l)_n} \frac{x^n}{n!}$$

avec les $(a_i)_n$ et $(b_i)_n$ sont les polynôme de Pochhammer .

5.1. Pour $r > 1, s = 1$: $B_{r,1}(n)$ est une combinaison de fonction hypergéométrique de $(r-1)$ different de type ${}_1F_{r-1}(...; x)$ chacun d'eux a évalué au même argument de valeur $x = (r-1)^{1-r}$; voici quelques exemples:

5.2.

$$B_{2,1}(n) = \frac{n!}{e} {}_1F_1(n+1; 2; 1) = (n-1)! L_{n-1}^{(1)}(-1) \tag{2.2.24}$$

d'où : $B_{2,1}(n) = 1, 3, 13, 73, 501, 4051...$, dans $L_m^{(\alpha)}(y)$ est le polynôme de Laguerre.

5.3.

$$B_{3,1}(n) = \frac{2^{n-1}}{e} \left(\frac{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_1F_2\left(n+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) + n!\,{}_1F_2\left(n+1; \frac{3}{2}, 2; \frac{1}{4}\right)\right) \tag{2.2.25}$$

d'où : $B_{3,1}(n) = 1, 4, 25, 211, 2236, 28471, ...$

5.4.

$$B_{4,1}(n) = \frac{3^{n-1}}{2e} \left(\frac{3^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)}{\pi} {}_1F_3\left(n+\frac{1}{3}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{1}{27}\right) + \right. \tag{2.2.26}$$

$$\left. \frac{3\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} {}_1F_3\left(n+\frac{2}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{1}{27}\right) + n!\,{}_1F_3\left(n+1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2; \frac{1}{27}\right)\right)$$

d'où : $B_{4,1}(n) = 1, 5, 41, 465, 6721, 117941...$

Dans ce cas-ci la fonction génératrice exponentielle d'Eq.(2.2.16) converge pour le cas $r > 1$ *et* $s = 1$:

$$G_{r,1}(\lambda, x) = e^{x\left(\frac{1}{\sqrt[r-1]{1-(r-1)\lambda}} - 1\right)}$$

5.5. De même la série $B_{2r,r}(n)$ peut être notée sous une forme compacte en utilisant la fonction hypergéométrique confluente de Kummer:

$$B_{2r,r}(n) = \frac{(rn)!}{e.r!}\ {}_1F_1\left(rn+1, r+1; 1\right) \tag{2.2.27}$$

5.6. Une famille plus générale des suites d'ordres résultant d'Eqs(2.2.22) .et (2.2.23) à la forme $(p, r = 1, 2...)$:

$$B_{pr+p,pr}(n) = \frac{1}{e}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{(p(n-1)+j)!}{(pj)!}\right].$$

$${}_rF_r\left(pn+1, , ..., pn+1+p(r-1); 1+p, 1+2p..., 1+rp; 1\right)$$

La fonction génératrice éxponentielle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} G_{r,s}(\lambda, x) &= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(k+(i-1)(r-s)\right)_s\right]\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^J}{j!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(k+(i-1)(r-s)\right)_s\right]\frac{\lambda^n}{n!} \end{aligned}$$

Remarque 2.2.3 *:*

Pour $s > 1$ la série est purement formelle (non analytique autour de $\lambda = 0$).

Un exemple est la série $B_{3,2}(n)$:

$$B_{3,2}(n) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!\,(n+k+1)!}{k!\,(k+1)!\,(k+2)!}$$

Sa fonction génératrice hypergéométrique $\widetilde{G}_{3,2}(\lambda)$ est la suivante:

$$\widetilde{G}_{3,2}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{B_{3,2}(n)}{n!}\right]\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}\ {}_2F_1\left(k+2, k+1; 1; \lambda\right)$$

De même pour $G_{4,2}(\lambda)$ on obtient :

$$\widetilde{G}_{4,2}(\lambda) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}\ {}_2F_1\left(\frac{k+2}{2}, \frac{k}{2}+1; 1; 4\lambda\right)$$

L'équation (2.2.27) implique plus généralement:

$$\widetilde{G}_{2r,r}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{B_{2r,r}(n)}{(n!)^{r-1}}\right]\frac{\lambda^n}{n!} \tag{2.2.28}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1!e}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\ {}_2F_1\left(\frac{k+1}{2}, \frac{k}{2}+1; 1; 4\lambda\right) & , r = 2 \\ \frac{1}{2!e}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}\ {}_3F_2\left(\frac{k+1}{3}, \frac{k+2}{3}, \frac{k+3}{3}; 1, 1; 27\lambda\right) & , r = 3 \\ \frac{1}{3!e}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+3)!}\ {}_4F_3\left(\frac{k+1}{4}, ..., \frac{k+4}{4}; 1, 1, 1; 256\lambda\right) & , r = 4...etc \end{cases} \tag{2.2.29}$$

voir [9][10] pour d'autres exemples où ce type de fonctions génératrices hypergéométriques apparait.

5.7. En revanche, la " diagonale " numérote $B_{r,r}(n)$ d'Eq.(2.2.23) qui peut également être réécrite comme:

$$B_{r,r}(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r-1)!} \left[k\,(k+1)\ldots(k+r-1)\right]^n, \ n = 1, 2, \ldots$$

cette relation ne peut pas être exprimée par des fonctions hypergéométriques. Cependant, les $B_{r,r}(n)$ peuvent être toujours exprimés en termes de nombres de Bell conventionnels avec r - nomial (binomial, trinôme...) coefficients. Par exemples:

$$B_{2,2}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_{1,1}(n+k)$$

Relation de récurrence pour les nombres de Bell

Nous avons obtenu des relations de récurrence pour les $B_{r,s}(n)$ pour certaines valeurs de r, s, incluons le cas $r > 1, s = 1$:

$$B_{r,1}(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\prod_{j=0}^{n-k} (r + (j-1)(r-1))\right] B_{r,1}(k)$$

ce qui pour $r = 2, s = 1$ peut être écrit explicitement comme :

$$B_{2,1}(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k+1)! B_{2,1}(k)$$

et pour $r = s = 1$ réduit à la relation connue [17], ce qui est le binomial transformé :

$$B_{1,1}(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{1,1}(k)$$

2.3 Exemple

Nous finissons ce chapitre en notant quelques triangles de Stirling généralisés et nombres de Bell, comme définis par les Eqts.(2.2.4) et (2.2.15) .

Exemple 2.3.1 *:*

Pour $r = 1, s = 1$ $\quad S_{1,1}(n,k)$, $\; 1 \leq k \leq n \quad B_{1,1}(n)$

$n=1$	1					1
$n=2$	1	1				2
$n=3$	1	3	1			5
$n=4$	1	7	6	1		15
$n=5$	1	15	25	10	1	52
$n=6$	1	31	90	65	151	203

Exemple 2.3.2 *:*

Pour $r = 2, s = 1$ $\quad S_{2,1}(n,k)$, $1 \leq k \leq n \quad B_{2,1}(n)$

$n=1$	1					1
$n=2$	2	1				3
$n=3$	6	6	1			13
$n=4$	24	36	12	1		73
$n=5$	120	240	120	20	1	501
$n=6$	720	1800	1200	300	301	4051

Exemple 2.3.3 *:*

Pour $r = 2, s = 2$ $\quad S_{2,2}(n,k)$, $\quad 2 \leq k \leq 2n \qquad B_{2,2}(n)$

$n=1$	1											1
$n=2$	2	4	1									7
$n=3$	4	32	38	12	1							87
$n=4$	8	208	652	576	188	24	1					1657
$n=5$	16	1250	9080	16944	12052	3840	580	40	1			43833
$n=6$	32	7744	116656	412800	540080	322848	98292	16000	1390	60	1	1515903

Remarque 2.3.1 *:*

Pour éviter tous ces tableaux, on se ramène à faire un petit programme en utilisant le ***MAPLE:***

```
> d:= proc(n,k,r,s);
> (-1)^k/factorial(k)*Sum((-1)^p*binomial(k, p)*product(product(p+(j-1)*(r-s)-t,t=0..s-1),
  j=1..n), p=s..k);
> end proc;
>
```

$d := \mathbf{proc}(n, k, r, s)$

$((-1)^{\wedge}k*(Sum((-1)^{\wedge}p*\mathrm{binomial}(k, p)*(product(product(p + (j - 1)*(r - s) - t, t = 0 .. s - 1), j = 1 .. n)), p = s .. k)))/(\mathrm{factorial}(k))$

end proc;

```
>
> c:=d(5,6,3,3);
>
```

$$c := \frac{1}{720} \sum_{p=3}^{6} (-1)^p \, \mathrm{binomial}(6, p) \, p^5 \, (p-1)^5 \, (p-2)^5$$

```
> evalf(c);
```

$$2.824567200\ 10^7$$

```
>
>
```

Chapitre 3

Une deuxième généralisation des Stirling

Dans ce chapitre, on donnera une deuxième généralisation qui prolonge celle du deuxiéme chapitre, en citant les propriétés de ces nombres " Stirling et Bell pour la deuxiéme généralisation" [19][12] .

3.1 Généralisation des nombres de Stirling

Soient deux n-uples d'entiers positifs $r = (r_1, r_2, ...r_n)$, *et* $s = (s_1, s_2, ...s_n)$. On définit l'opérateur :

$$H_{r,s} = X^{r_n} D^{s_n} X^{r_{n-1}} D^{s_{n-1}} ... X^{r_1} D^{s_1} \tag{3.1.1}$$

Définition 3.1.1 *:*

Les nombres entiers positifs $S_{r,s}(k)$ apparaissant dans le développement:

$$H_{r,s} = X^{d_n} \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+...+s_n} S_{r,s}(k) X^k D^k \tag{3.1.2}$$

dits nombres de Stirling de deuxième espèce constituent une deuxième généralisation de ces nombres. Avec: $d_n = \sum_{i=1}^{n} (r_i - s_i)$ non négatifs ($d_n \geq 0$).

Remarque 3.1.1 *:*

Pour le cas négatif ($d_n < 0$) , les nombres de Stirling de deuxième espèce existent ils sont dits nombres anti-Stirling de deuxième espèce, et notés $\widetilde{S}_{r,s}(k)$ [(1)] .

Théorème 3.1.1 *:*

La formule explicite des nombres de Stirling de deuxième espèce pour la deuxième généralisation notés $S_{r,s}(k)$ est donné par :

$$S_{r,s}(k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\prod_{m=1}^{n}(d_{m-1}+j)_{s_m}$$

Les nombres $S_{r,s}(k)$ sont définis pour $s_1 \le k \le s_1 + s_2 + ... + s_n$, tous les termes sont des entiers positifs, et le dernier égal à un $S_{r,s}(s_1 + s_2 + ... + s_n) = 1$. Et de plus pour la convenance nous appliquons la convention :

$$S_{r,s}(k) = 0 \text{ , pour } k < s_1 \text{ où } k > s_1 + s_2 + ... + s_n$$

Avant de traiter la preuve de théorème 3.1.1 , énonçons les definitions et les lemmes suivants :

Posons : $r_i = s_i + l_i$, et $d_i = \sum_{j=i}^{i}(r_j - s_j)$

La formule (3.1.1) s'écrit autrement comme :

$$H_{r,s} = X^{l_n}(X^{s_n}D^{s_n})X^{l_{n-1}}(X^{s_{n-1}}D^{s_{n-1}})...X^{l_1}(X^{s_1}D^{s_1}) \tag{3.1.3}$$

De même le travail qui a été réalisé dans le deuxième chapitre, prenant dans ce cas $X^* = T$, et $(X^sD^s)^* = (q)_s$ les opérateurs adjoints de X et X^sD^s rèspectivement .

Alors l'opérateur adjoint de $H_{r,s}$ est $H^*_{r,s}$ définit par :

$$H^*_{r,s} = (q)_{s_1}T^{l_1}(q)_{s_2}T^{l_2}...(q)_{s_n}T^{l_n}$$

Rappelons que :

$$T^l(q)_s = (q+l)_s T^l$$

d'où

$$H^*_{r,s} = (q)_{s_1}(q+l_1)_{s_2}...(q+l_1+...l_{n-2}+l_{n-1})_{s_n}T^{\sum_{i=1}^{n}l_i}$$

[(1)] Cette notation est donnée par P Blasiak et

$$\begin{aligned} H_{r,s} &= X^{\sum\limits_{i=1}^{n} l_i} \left(\delta + l_1 + ...l_{n-2} + l_{n-1}\right)_{s_n} ... \left(\delta + l_1\right)_{s_2} \left(\delta\right)_{s_1} \\ &= X^{d_n} \prod_{m=1}^{n} \left(d_{m-1} + \delta\right)_{s_m} \end{aligned}$$

Considérons le polynôme :

$$P\left(d, s, X\right) = \left(X\right)_{s_1} \left(X + l_1\right)_{s_2} ... \left(X + l_1 + ...l_{n-2} + l_{n-1}\right)_{s_n}$$

Comme les $\left(X\right)_j$, $j \in \mathbb{N}$, forment une base de $C\left[X\right]$ et que P est un polynôme de degré $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i$

$$\left(X\right)_{s_1} \left(X + l_1\right)_{s_2} ... \left(X + l_1 + ...l_{n-2} + l_{n-1}\right)_{s_n} = \sum_{j=1}^{s_1+s_2+...+s_n} S_{r,s}(k) \left(X\right)_j \tag{3.1.4}$$

Exemple 3.1.1 *:*

Pour les nombres de Stirling de la première généralisation :

$$\begin{gathered} s_1 = s_2 = ... = s_n = s \ , \ r_1 = r_2 = ... = r_n = r \\ d_n = nl \\ l = r - s \end{gathered}$$

alors la relation (3.1.4) devient

$$\left(X\right)_s \left(X + l\right)_s ... \left(X + \left(n-1\right) l_{n-1}\right)_s = \sum_{j=1}^{ns} S_{r,s}(k) \left(X\right)_j$$

Définition 3.1.2 *:*

Pour tout n-uples positifs r, s , les polynômes de Bell généralisés sont donnés par :

$$B_{r,s}\left(X\right) = \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+...+s_n} S_{r,s}(k) X^k$$

De l'équation :

$$X^{r_n} D^{s_n} X^{r_{n-1}} D^{s_{n-1}} ... X^{r_1} D^{s_1} = X^{d_n} \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+...+s_n} S_{r,s}(k) X^k D^k$$

Appliquons les deux membres de cette équation à la fonction e^x , nous obtenons l'identité

$$X^{r_n} D^{s_n} X^{r_{n-1}} D^{s_{n-1}} ... X^{r_1} D^{s_1} e^X = X^{d_n} e^X B_{r,s}\left(X\right) \tag{3.1.5}$$

Corollaire 3.1.1 *:*

D'autre part on a la relation suivante :

$$X^{d_n} \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} S_{r,s}(k) X^k D^k e^X = \sum_{k=s_1}^{\infty} \left[\prod_{m=1}^{n} (d_{m-1}+X)_{s_m} \right] \frac{X^{d_n+k}}{k!} \tag{3.1.6}$$

tel que $(l)_n$ *sont les polynômes de Pochhamer généralisés .*

Corollaire 3.1.2 *:*

Les relations (3.1.5) et (3.1.6) donnent la relation de type –Dobinski pour les polynômes de Bell généralisés:

$$B_{r,s}(X) = e^{-X} \sum_{k=s_1}^{\infty} \left[\prod_{m=1}^{n} (d_{m-1}+X)_{s_m} \right] \frac{X^k}{k!} \tag{3.1.7}$$

Démonstration. :

Le critère de d'Alembert assure la convergence de la série (3.1.7) .

Rappelons le Critère de d'Alembert : si on a une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$; cette série converge si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

alors dans ce cas posons : $a_k = \dfrac{\prod_{m=1}^{n} (d_{m-1}+X)_{s_m}}{k!}$

on obtient $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{1}{(k+1)!}\right| < 1$ ∎

Preuve. du théorème 3.1.1 :

Par la multiplication directe des séries dans l'équation (3.1.7) et la règle de produit de Cauchy [17] [5] on obtient le résultat.

En effet : prenons $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-x)^j}{j!}$ et $g(x) = \sum_{k=s_1}^{\infty} \left[\prod_{m=1}^{n} (d_{m-1}+X)_{s_m} \right] \frac{x^k}{k!}$

alors la règle de produit de Cauchy donne :

$$B_{r,s}(x) = f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \prod_{m=1}^{n} (d_{m-1}+X)_{s_m} x^k$$

∎

Corollaire 3.1.3 *:*

La généralisation des nombres de Bell est la somme suivante :

$$B_{r,s} = B_{r,s}(1) = \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} S_{r,s}(k) \tag{3.1.8}$$

Exemple 3.1.2 *:*

La première généralisation des nombres de Stirling dans l'équation :

$$[X^r D^s]^n = X^{nl} \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k) X^k D^k$$

Correspond au cas uniforme pour $r = (r, r, ..., r)$ *;* n *fois , et* $s = (s, s, ..., s)$*;* n *fois pour cette généralisation .*

3.1.1 Fonctions génératrices exponentielles :

Ces nombres sont aussi définis par leur séries génératrices

Proposition 3.1.1 *:*

La série génératrice exponentielle des nombres de Bell est :

$$G_{r,s}(X,\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} B_{r,s}(X) \frac{\lambda^n}{n!} \tag{3.1.9}$$

Proposition 3.1.2 *:*

La série génératrice exponentielle des nombres de Stirling de $2^{\text{ème}}$ *espèce est la suivante :*

$$Q_{r,s}(X,\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} S_{r,s}(X) \frac{\lambda^n}{n!}$$

Preuve. :

En remplaçant la valeur de $B_{r,s}(X)$ dans la relation (3.1.9) on obtient

$$\begin{aligned}
G_{r,s}(X,\lambda) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{-X} \sum_{k=s_1}^{\infty} \left[\prod_{m=1}^{n} (d_{m-1}+X)_{s_m} \right] \frac{X^k}{k!} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-X} \sum_{k=s_1}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[\prod_{m=1}^{n} (d_{m-1}+X)_{s_m} \right] \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^j}{j!} \sum_{k=s_1}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[\prod_{m=1}^{n} (d_{m-1}+X)_{s_m} \right] \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^j}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[\prod_{m=1}^{n} (d_{m-1}+X)_{s_m} \right] \frac{\lambda^n}{n!}
\end{aligned}$$

En comparant avec :

$$\begin{aligned}
G_{r,s}(X,\lambda) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+...+s_n} S_{r,s}(k) X^j \right) \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+...+s_n} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} S_{r,s}(k) \frac{\lambda^n}{n!} \right) X^j
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} S_{r,s}(k)\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}\left[\prod_{m=1}^{n}(d_{m-1}+X)_{s_m}\right]\right)\frac{\lambda^n}{n!}$$

d'où le résultat . ■

3.1.2 Propriétés des nombres de Stirling et Bell généralisés:

Dans ce cas voici quelques propriétés de ces nombres généralisés :

Lemme 3.1.1 *:*

Le polynôme de Pochhammer généralisé et les nombres de Stirling généralisés sont donnés par:

$$\prod_{m=1}^{n}(d_{m-1}+l)_{s_m} = \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} S_{r,s}(k)\,(l)_k \tag{3.1.10}$$

Démonstration. :

Associons l'équation (3.1.2) sur le monôme X^l on obtient

$$X^{l+d_n}\sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} S_{r,s}(k)\,(l)_k$$

D'autre part on obtient

$$\prod_{m=1}^{n}(d_{m-1}+l)_{s_m}$$

■

Corollaire 3.1.4 *:*

En rappelant le fait que le seul polynôme avec des nombres infinis de zéro est le polynôme zéro nous justifions la généralisation

$$\prod_{m=1}^{n}(d_{m-1}+X)_{s_m} = \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} S_{r,s}(k)\,(X)_k$$

Cette égalité interprète les nombres de Stirling comme coefficients de développement du polynôme $\left\{\prod_{m=1}^{n}(d_{m-1}+X)_{s_m}\right\}$ *dans la base* $\{(X)_k\}_{k=0}^{\infty}$

3.1.3 La relation de récurrence généralisée:

Soient deux n-uples $r = (r_1, r_2, ...r_n)$, *et* $s = (s_1, s_2, ...s_n)$ d'entiers positifs . On introduit les notations $r \uplus r_{n+1} = (r_1, ..., r_n, r_{n+1})$, $s \uplus s_{n+1} = (s_1, ..., s_n, s_{n+1})$. La relation de récurrence satisfait par les nombres de Stirling généralisés est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.1.2 *:*

Quelque que soit n un entier positif, et r , s des n-uples positifs. La relation de récurrence généralisé est donnée par

$$S_{r\uplus r_{n+1}, s\uplus s_{n+1}}(k) = \sum_{j=0}^{s_{n+1}} \binom{s_{n+1}}{j} (d_n + k - j)_{s_{n+1-j}} S_{r,s}(k - j) \tag{3.1.11}$$

avec $(l)_p = l(l-1)\dots(l-p+1)$ *polynôme de Pochheamer*

Preuve. :

Rappelons la relation (1.6.1) pour les fonctions dérivée [17, tome 1] :

$$D^k X^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (l)_p X^{l-p} D^{k-p} \tag{3.1.12}$$

On peut donner la dérivation de Eq.(3.1.11) par induction en utilisant la conséquence suivante d'équation :

$$X^{d_{n+1}} \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\dots+s_n} S_{r\uplus r_{n+1}, s\uplus s_{n+1}}(k) X^k D^k \overset{3.1.1}{=} H_{r\uplus r_{n+1}, s\uplus s_{n+1}}$$

$$\overset{3.1.2}{=} X^{r_{n+1},} D^{r_{n+1},} X^{d_n} \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\dots+s_n} S_{r,s}(k) X^k D^k$$

$$\overset{3.1.12}{=} X^{r_{n+1},} \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\dots+s_n} S_{r,s}(k) \sum_{j=0}^{s_{n+1}} \binom{s_{n+1}}{j} (d_n + k)_j X^{d_n+k-j} D^{s_{n+1}+k-j}$$

$$= X^{d_{n+1},} \sum_{j=0}^{s_{n+1}} \binom{s_{n+1}}{j} \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\dots+s_n} S_{r,s}(k) (d_n + k - s_{n+1} + j)_j X^k D^k$$

$$= X^{d_{n+1},} \sum_{j=0}^{s_{n+1}} \sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\dots+s_n} \binom{s_{n+1}}{j} S_{r,s}(k - s_{n+1} + j) (d_n + k - s_{n+1} + j)_j X^k D^k$$

■

Corollaire 3.1.5 *:*

La formule de récurrence généralisée de Bell est la suivante :

$$B_{r\uplus r_{n+1}, s\uplus s_{n+1}}(k) = X^{s_{n+1}-d_{n,}} (D + I)^{s_{n+1}} X^{d_{n,}} B_{r,s}(x) \tag{3.1.13}$$

Preuve. :

Utilisant la règle de commutation (la règle de l'équivalence de Leibniz) :

$$D^n e^x f(x) = e^x (D+I)^n f(x)$$

sur

$$X^{d_{n+1},} e^x B_{r \uplus r_{n+1}, s \uplus s_{n+1}}(k) = X^{r_{n+1}} D^{s_{n+1}} e^x x^{d_{n},} B_{r,s}(x)$$

qui induit de l'équation (3.1.5) ■

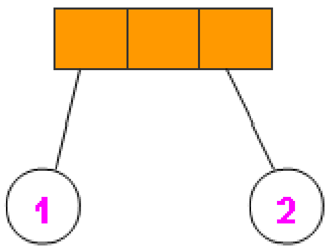
3.2 L'interprétation combinatoire des nombres de Stirling :

Nous procéderons maintenant à une interprétation combinatoire des résultats ci-dessus. L'essence des paragraphes suivants sera une description du problème axw dans la théorie des graphes . Nous définissons les structures (graphiques) qui sont comptées par les nombres généralisés de Bell et de Stirling et donnons alors une dérivation combinatoire complète des relations de récurrence,la formule de type- Dobinski et d'autre résultats[19][12].

Nous présentons maintenant un certain nombre d'outils pour décrire le problème dans la théorie des graphes.

Définition 3.2.1 *:*

Un bogue de type (r, s) *se compose d'un corps et de* s *jambes. Le corps est constitué par* r *cellules vides linéairement commandées. Chaque pied des* s *jambes est marqué avec un nombre entier du segment :* $(m, m+s] := \{m+1, m+2, ..., m+s\}$ *; voir fig .*



un bogue de type (3,2)

Considérons un ensemble de n bogues, le premier de type (r_1, s_1) et son pied est marqué avec des étiquettes qui prennent ces valeur dans le segment $(0, s_1]$, le second du type (r_2, s_2) avec des étiquettes dans $(s_1, s_1 + s_2]$,et ainsi de suite .

Définition 3.2.2 *:*

Une colonie est une des manières possibles d'organiser les bogues en utilisant le procédé suivant. Le premier bogue doit se tenir au-dessus de la terre. Une fois que $(j-1)^{ième}$ bogue est placé ; le $j^{ième}$ bogue est placé par la mise de certains (ou aucun) de ses pieds dans la terre et le reste est placé dans une des cellules vides des bogues précédents.

Remarque 3.2.1 *:*

Le couple des séries d'entiers (r, s) , avec $r = (r_1, r_2, ...r_n)$, et $s = (s_1, s_2, ...s_n)$ diffusant les informations sur les types des bogues s'appellent le type de la colonie.

Remarque 3.2.2 *:*

Les jambes de la colonie se tenant sur la terre s'appellent jambes libres.

Exemple 3.2.1 *:*

Soit une colonie de type (3, 2, 1,3 ; 2, 2, 2,3) et 5 jambes libres . Apres avoir construit les bogues (3,2),(2,2),(1,2),(3,3) .Organisant les bogues en suivant les étapes de la définition 3.2.2

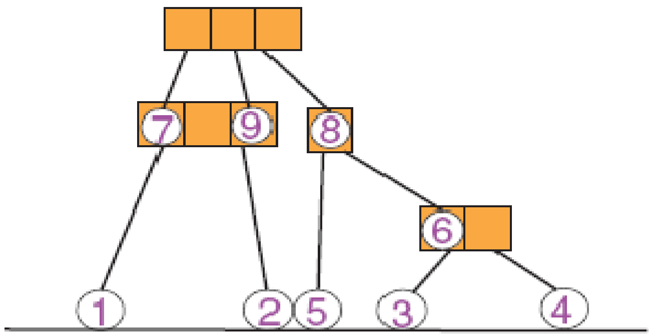


Figure 3.2.1 : un colonie de type (3, 2,1, 3 ; 2, 2, 2,3) avec 5jambes libres

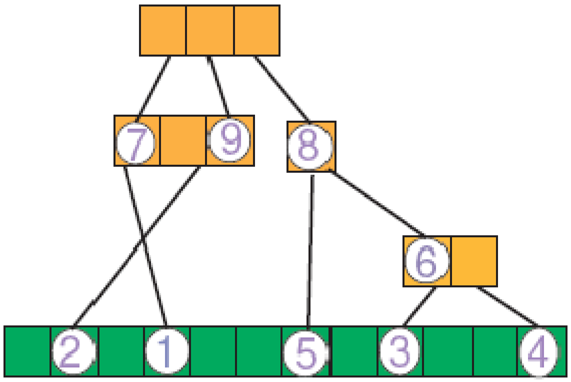
Supposez maintenant qu'il y a un ensemble de m cellules vides dans la terre.

Définition 3.2.3 *:*

Un $m-$règlement est une colonie dont chacun des pieds correspondant aux jambes libres est placé dans une cellule de la terre.

Définition 3.2.4 *:*

Un règlement surjectif est un règlement où toutes les cellules au sol sont occupées. Le type du règlement est défini pour être le type de la colonie .



Le 12-règlement de la colonie de type $(3, 2, 1, 3; 2, 2, 2, 3)$ avec 5-jembes libres

Théorème 3.2.1 *:*

Le nombre de Stirling compte le nombre des colonies du type (r, s) ayant exactement k jambes libres.

Le nombre de Bell $B_{r,s}$ compte le nombre des colonies du type (r, s).

Avant de le prouver, nous énonçons :

Lemme 3.2.1 *:*

Une colonie de type (r, s) et avec k jambes libres a exactement $(d_n + k)$ cellules vides.

Preuve. :

Le nombre total de cellules de la colonie est égal à $\sum_{i=1}^{n} r_i$ .Le nombre des cellules occupées est égal au nombre total de jambes moins le nombre de jambes libres $\left(\sum_{i=1}^{n} s_i - k\right)$. ■

Donnons maintenant la preuve du théorème 3.2.1

Preuve. 3.2.1 :

Notons par $C_{r,s}(k)$ le nombre de colonies du type (r, s) avec exactement k jambes libres.

L'égaliré $C_{1,1}(k) = s_{r_1,s_1}(k) = \delta(s_1, k)$ est suffisante pour montrer que les nombres $C_{r,s}(k)$ satisfont la même récursion que les nombres de Stirling généralisés d'équation (3.1.11)

$$C_{r \uplus r_{n+1}, s \uplus s_{n+1}}(k) = \sum_{j=1}^{s_{n+1}} \binom{s_{n+1}}{j} (d_n + k - j)_{s_{n+1}-j} \, C_{r,s}(k-j)$$

Le $C_{r \uplus r_{n+1}, s \uplus s_{n+1}}(k)$ est le nombre de colonies du type $(r \uplus r_{n+1}, s \uplus s_{n+1})$ ayant exactement k jambes libères.

Nous montrons que le côté droit de l'expression

$$\binom{s_{n+1}}{j} (d_n + k - j)_{s_{n+1}-j} \, C_{r,s}(k-j)$$

donne le nombre de telles colonies où le $n^{ième}$ $+1$ bogue a exactement j jambes libres. Évidemment, ceci prouverait l'identité.

Montrons le maintenant . Afin d'obtenir une colonie avec k jambes libres , le $n^{ième}$ $+1$ bogue doit être placé dans une colonie du type (r, s) et $(k - j)$ jambes libres.

$C_{r,s}(k-j)$ est le nombre de telles colonies.Nous choisissons les jambes libres du $n^{ième}$ $+1$ bogue avec $\binom{s_{n+1}}{j}$ manière . Puisque par le lemme 3.2.1 il y a $d_n + k - j$ cellules vides dans le $n^{ième}$ bogue colonie, $(d_n + k - j)_{s_{n+1}-j}$ donne le nombre de manières de distribuer le reste des pieds du $n^{ième}$ $+1$ bogue dans les cellules vides. ■

Nous compterons maintenant le nombre de m - règlements qui fourniront le lien avec Eqs(3.1.7) vu de la perspective combinatoire.

Théorème 3.2.2 *:*

Soit $p(m, r, s)$ le nombre de m - règlements du type (r, s) nous avons:

$$p(m, r, s) = \prod_{j=1}^{n} (m + d_{j-1})_{s_j}$$

Preuve. :

Il y a $(m)_{s_i}$manière de placer les pieds du premier bogue dans les m -cellules au sol. Après le placement du $\left(j^{ième}-1\right)$ bogue il y'a $(m+d_{j-1})$ cellules vides disponibles (précédemment les bogues placés ont fourni $\sum\limits_{i=1}^{j-1} r_i$ cellules vides et $\sum\limits_{i=1}^{j-1} s_i$cellules occupés).Puis, il y a $(m+d_{j-1})_{s_j}$manière de placer s_j pieds du $j^{ième}$ bogue. ■

Corollaire 3.2.1 *:*

Nous avons l'identité du polynôme :

$$\prod_{j=1}^{n}\left(x+d_{j-1}\right)_{s_j}=\sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} S_{r,s}\left(k\right)\left(x\right)_k \tag{3.2.1}$$

Preuve. :

Par le théorème précédent, pour une valeur de nombre entier de x le nombre qui se trouve à gauche compte le nombre de x- règlements du type (r,s) .$S_{r,s}\left(k\right)\left(x\right)_k$ compte le nombre de manières d'arranger une colonie de type (r , s) avec les k jambes libres en x cellules au sol .La relation(3.2.1) est une autre manière de compter le nombre de x-règlement. ■

Définition 3.2.5 *:*

La fonction génératrice exponentielle des règlements surjectifs est égale aux polynômes :

$$B_{r,s}\left(x\right)=\sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} S_{r,s}\left(k\right)x^k=\sum_{k=s_1}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} S_{r,s}\left(k\right)k!\frac{x^k}{k!}$$

Corollaire 3.2.2 *: (Relations d'extension de type- Dobinski)*

Nous avons l'identité

$$B_{r,s}\left(x\right)e^x=\sum_{k=s_1}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}\left(m+d_{j-1}\right)_{s_j}\right]\frac{x^m}{m!}$$

Preuve. :

Prise du coefficient de $\frac{x^m}{m!}$du côté gauche de l'équation nous obtenons:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}S_{r,s}\left(k\right)k!=\sum_{k=0}^{\infty}S_{r,s}\left(k\right)\left(m\right)_k$$

Par le corollaire précédent 3.2.1 il est égal au coefficient de $\frac{x^m}{m!}$dans le côté droit. ■

Conclusion générale

En parlant des nombres de Stirling et Bell dans les domaines mathématiques (combinatoires) et physiques, on se trouve dans un grand espace de résultats, ce qui montre que ces nombres ont une grande importance. Dans ce travail je me suis intéressé à une généralisation parmi plusieurs.

♣ Cette généralisation portait sur une extension des nombres de Stirling généralisée par l'exploitation des opérateurs $[X^r D^s]^n$, qui nous mènent à une généralisation des nombres de Bell.

♣ Les nombres de Bell généralisés peuvent être présentés comme séries infinies ces dernières sont de type de Dobinski.

♣ Le $B_{2,1}(n, x)$ est le polynôme de Languerre généralisé.

♣ Cette généralisation a une interprétation combinatoire et graphique.

Finalement, peut-on appliquer ces résultats à d'autres types d'opérateurs, pour quoi pas aux les congruences.?

Bibliographie

[1] **Karol A Penson and Allan I.Solomon** Coherent state measures and the extended Dobinski relations arXiv:quant-ph/0211061 v1 11 Nov 2002

[2] **Karol A Penson and Allan I.Solomon** Combinatorics of Boson Normal Ordering: the Dobinski Formula Revisited arXiv:quant-ph/0211028 v1 6 Nov 2002

[3] **K A Penson , P Blasiak , G Duchamp A Horzela and A I Solomon** Hierarchical Dobinski - type relations via substitution and the moment problem 26 Dec 2003

[4] **Benali BENZAGHOU** . Algèbre de Hurwitz . Fact -Math -USTHB-2002

[5] **Benali BENZAGHOU** . La transformation de Mellin-Barsky formelle . Fact -Math -USTHB

[6] **Benali BENZAGHOU** . Seminaire d'algèbre et théorie des nombres sur l'opérateur $(X^r D^s)^n$ 2004

[7] **Héctor Blandin and Rafael Diaz** On the combinatorics of hypergeometric functions arXiv:math.CO/0606346 v1 14 Jun 2006

[8] **Pawel Blasiak , Karol A Penson and Allan I Solomon** Combinatorial coherent states via normal ordoring of boson 6 NOV 2003

[9] **P. Blasiak, K.A. Penson and A.I. Solomon** Boson Normal Ordering Problem and Generalized Bell Numbers arXiv:quant-ph/0212072 v1 11 Dec 2002

[10] **P. Blasiak, K.A. Penson and A.I. Solomon,** The Boson Normal Ordering Problem and Generalized Bell Numbers, Ann. Comb. **7** (2003) 127

[11] **P Blasiak , K A Penson and A I Solomon** Dobinski-type relations and the Log-normal distribution ;arXiv:quant-ph/0303030 v1 6 Mar 2003

[12] **Pawel Blasiak** Combinatorics of boson normal ordering and some applications arXiv:quant-ph/0507206 v2 22 Jul 2005

[13] **P Blasiaka, A Horzelaa, K A Pensonb and A I Solomon** Dobinski-type relations: Some properties and physical applications ; arXiv:quant-ph/0511157 v1 16 Nov 2005

[14] **P. Blasiak and A. Horzela , K. A. Penson , A. I. Solomon , G. H. E. Duchamp** Combinatorics and Boson normal ordering : A gentle introduction . arXiv 0704.3116v1 [quant-ph] 24 Apr 2007

[15] **DAVID BRANSON**,University of Essex **;** Stirling numbers and Bell numbers: Theire role in combinatorics and probability .Math.Scientist **25**,1-31 (2000) Printed in England

[16] **Christain Kassel** Cours sur les groupes quantique , $1^{ière}$ partie , publication de l'unstitut de recherche mathématique avancée , n°492, 1992

[17] **Louis Comtet** Analyse combinatoire, tome premier et deux , Collection Sup "Le Mathématicien", 4, Presses Universitaires de France, 108 , Boulevard saint-Germain, Paris, 1970.

[18] **Mériem HERAOUA** Cogèbre binomiale et calcul ombral des opérateurs différentiels (Thèse doctorat de l'université de Limoges; FACULT´E des sciences et techniques)2004

[19] **M A Méndez, P Blasiak , and K A Penson** Combinatorial approach to generalized Bell and Stirling numbers and boson normal ordering problem arXiv:quant-ph/0505180 v1 24 May 2005

[20] **Denis LANIER , Didier TROTOUX** LA FORMULE DE STIRLING .IREM de Basse-Normandie

[21] **LANIER, Denis et TROTOUX, Didier,** 1996. La loi des grands nombres, le théorème de Moivre-Laplace. In Actes de l'Université d'Eté 95 : Epistémologie et Histoire des Mathématiques. IREM de Besançon.

[22] **J M Sideniers , K A Penson and Allan I.Solomon** Extended Bell and Stirling from hypergeometric exponentiation , journal of integer sequences vol 4 (2001) ,Articl 01.1.4

[23] **Allan I. Solomon, Pawel Blasiak , Gerard Duchamp , Andrzej Horzela and Karol A. Penson ,** Combinatorial Physics, Normal Order and Model Feynman Graphs arXiv:quant-ph/0310174 v1 29 Oct 2003.

[24] **H.S. Wilf.** Generatingfunctionology. Academic Press, New York, 1994