

N° d'ordre : 08 / 2005 – M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées



**MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE
MAGISTER**

En : Mathématiques

Spécialité : probabilités et statistiques

Par : M^{elle} NOURINE MAAMAR Djamilia

Thème

Approximation de solutions transitoires
pour certaines files d'attente

Soutenue publiquement le : 13/03/2005, devant le jury composé de :

M ^r M. DJEDOUR	Professeur	U.S.T.H.B	Président
M ^r T. LARDJANE	Chargé de cours	U.S.T.H.B	Directeur de thèse
M ^r A. AISSANI	Professeur	U.S.T.H.B	Examineur
M ^r K. BOUKHETALA	Professeur	U.S.T.H.B	Examineur
M ^r A.ASTOUATI	Chargé de cours	U.S.T.H.B	Examineur

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire de probabilités et statistiques de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, sous la direction de Monsieur T. LARDJANE, chargé de cours à l'U.S.T.H.B.

Je voudrai le remercier vivement pour la confiance qu'il a bien voulu m'accorder en me proposant ce sujet de thèse; je lui exprime ma gratitude pour son aide scientifique, moral, qu'il m' a prodiguée tout au long de cette étude faite dans des conditions très difficiles .

Je dois toute ma reconnaissance à Monsieur M.DJEDOUR, professeur à l'U.S.T.H.B, d'avoir accepté de présider ce jury.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur A.AISSANI, professeur à l'U.S.T.H.B, d'avoir témoigné de l'intérêt à ce travail et fait partie du jury.

Je remercie Monsieur K.BOUKHETALA, professeur à l'U.S.T.H.B, d'avoir bien voulu être membre de ce jury.

Que Monsieur A .ASTOUATI, chargé de cours à l'U.S.T.H.B, qu'il me permette de lui exprimer mes remerciements les plus sincères pour m'avoir fait l'honneur de jury ce travail.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Tami-Nourine Mustapha pour son aide pour effectuer la partie informatique de ce travail.

Je tiens à exprimer mon immense gratitude à ma famille en particulier ma mère et mon frère M'hammed de m'avoir toujours encouragé à aller de l'avant; ainsi que mon amie Belounisse Amaria d'être toujours à mon aide.

DEDICACES

A ma chère grand mère

A mes chers parents

A ma sœur

A mes frères

TABLE DES MATIERES

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités sur les systèmes de files d'attente.	
I-1 : Description du modèle.....	4
I-2 : Etude de quelques modèles.....	6
I-2-1 : Modèle Markovien.....	6
I- 2-1-1 : La file M/M/1.....	6
I-2-2 : Modèle non markovien.....	7
I-2-2-1 : système M/G/1.....	8
Chapitre II : Approximation par le processus de renouvellement	
II- 1: Processus de renouvellement	15
II-1-1 :Définition	15
II-1-2 : fonction de renouvellement.....	16
II-1-3 : Théorème de renouvellement	16
II-1-4 : Equation de renouvellement	17
II-2-1: Processus de régénération.....	18
II- 2-2 : Processus de renouvellement retardé.....	20
II-3 : Modélisation du problème.....	20
II-4 : Exemple	23
Chapitre III : Inversion de la double transformée de Laplace	
III-1 : Les transformées unidimensionnelle.....	26
III- 1-1 : Définitions	26
III-1-1-a : Transformée de Laplace	26
III-1-1-b : Transformée de Fourier	26
III-1-2 : Inversion d'une intégrale	27
III- 2 : Les transformées bidimensionnelles.....	32

III-2-1: Double transformée de Laplace.....	32
III-2-2: Double transformée de Fourier.....	32
III-2-3: La formule sommatoire de poisson.....	32
III-2-4: Transformation d'Euler.....	35
III-2-5: contrôle d'erreur.....	38
III-3 : La densité du temps d'attente en régime transitoire	39
III- 4 : Conclusion.....	43

Chapitre IV : Approximation de MOL

IV- 1-1 : Système M/M/s/0.....	45
IV- 1-2 : Système M/G/s/0.....	45
IV-1-3 : La file M/G/∞.....	45
IV-2 : Approximation de MOL.....	47
IV-2-1 : Système M _t /PH _t /S/0.....	48
IV-2-2 : La file M _t /PH _t /∞.....	51
IV-2-3 : application de l'approximation de Mol.....	53
IV-3 : Système M _t /M _t /S/0.....	57
IV-4 : la file M/PH/S/0 avec deux phase de service	63
IV-5 : Exemple d'application	65

Annexe.....	76
-------------	----

Bibliographie.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE :

L'un des problèmes fondamentaux qui a mené au développement de la théorie des files d'attente est la modélisation probabiliste du nombre de lignes téléphonique actives. Au départ, ce problème a été traité en 1917 par Erlang [1] où il a posé les notions de base de la théorie des files d'attente et a donné des résultats importants concernant les études du régime stationnaire de ces files. Ces travaux d'Erlang ont été suivis par une multitude d'autres publications [2], [3], [4], [5] et [6] qui ont été consacrées à l'application de ces résultats à différents systèmes où ils ont concentré ces études sur les systèmes stationnaires. Mais en réalité il n'existe pas un état stationnaire total : par ce que ces systèmes ont connu plusieurs problèmes (le taux d'arrivée non homogène, le mécanisme du service non homogène ...etc.) qui conduit à un temps d'attente trop grand. Alors pour résoudre ce problème, il faut contrôler et étudier ces systèmes en leur régime transitoire.

Plusieurs travaux ont été effectués pour l'étude du régime transitoire de certaines files d'attente. Dans la plus part de ces études, les résultats obtenus sont des expressions très compliquées et très difficiles à manipuler. Ces expressions sont données de façon implicite, c'est le cas des transformées de Laplace, la fonction génératrice [Takacs, Benes (1955)], la fonction de Bessel [6], la méthode d'uniformisation [7].

Dans ce travail on se propose de traiter les systèmes qui nous semblent être les plus importants dans la théorie des files d'attente. Il s'agit du système M/G/1 pour les systèmes mono serveur, et le système d'Erlang avec refus (Erlang loss system) M/G/S/0 pour les systèmes multiserveur. Comme il n'existe pas de solutions transitoires exactes pour ces systèmes, on effectue ce travail pour donner des approximations de solutions transitoires.

Nous avons réparti cette thèse en deux parties principales.

La première partie contient trois chapitres. Elle est consacrée à l'approximation de solutions transitoires pour les files mono serveur où l'on se propose d'étudier la file M/G/1 très répandue et largement utilisée dans la théorie de file d'attente.

Au premier chapitre, on donne une description générale et détaillée des systèmes d'attente suivie d'une représentation des principaux modèles étudiés, notamment les systèmes de type M/M/1 et M/G/1 et surtout l'étude du régime transitoire de ces files. On s'intéresse aussi à la distribution du temps d'attente : $F(w, t) = P(U(t) \leq w / U(0) = w_0)$ où $u(t)$ est la tache résiduelle du serveur à l'instant t .

Le deuxième chapitre est consacré au développement d'une nouvelle approche de la probabilité d'état instantanée de la file M/G/1. Cette approximation est basée sur les processus de renouvellement retardés.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à établir un algorithme pour donner une approximation des doubles transformées inverse de Laplace, ce qui a permis de donner sous forme graphique la densité du temps d'attente. Ensuite on teste cet algorithme dans le cas de la file M/M/1.

Dans la deuxième partie de ce travail, on traite les files d'attente multiserveurs. On se propose d'étudier la file M/G/S/0 où on donne une approche de solutions transitoires qui est l'approximation de MOL (Modified-Offered-Load) développée en 1975 par JAGERMMAN [18]. Cette approche a plusieurs applications : elle a été utilisée pour étudier la sensibilité de la distribution du temps de service dans un modèle d'Erlang avec refus non stationnaire [20], elle a été utilisée aussi pour étudier les réseaux de télécommunication [26]. Cette approximation est aussi une motivation pour les travaux de Eick et Massey [21] dans la physique. Donc, dans ce dernier chapitre on se propose d'étudier cette approximation.

CHAPITRE I :

GENERALITE SUR LES SYSTEMES DE FILES D'ATENTTE.

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous présentons les approches de base de la théorie des files d'attente, la raison principale du succès de cette théorie introduite pour la première fois dans l'analyse des systèmes téléphonique [1] et la combinaison de la puissance d'expression et de l'efficacité des solutions qu'elle offre.

Plusieurs études ont été menées sur les files d'attente, une présentation générale et claire est donnée dans le livre de COX et SMITH [2]. Celui de SAKAROVITCH [3] propose une approche beaucoup plus mathématique. Une multitude d'autres publications [4], [5] a été consacrée à l'application des files d'attente à différents systèmes dans le but de modéliser et résoudre des problèmes tels que : construire une ligne téléphonique en minimisant le temps d'attente pour obtenir une communication, un réseau d'ordinateurs,

La théorie des files d'attente donne deux méthodes principales pour la résolution du conflit qui se produit lorsqu'un client arrive dans le système et trouve le (s) serveur (s) occupé (s) : 1) soit, il quitte le système sans être servi, ce qui correspond au «système d'erlang avec refus» (ERLANG LOSS SYSTEME). 2) il peut attendre dans une file d'attente pour être servi dès la libération du serveur, ce qui correspond au système de file d'attente (QUEING SYSTEME) [4], [5].

L'objet de ce chapitre est de donner une description générale et détaillée de systèmes suivi d'une présentation des principaux modèles, notamment les systèmes de type M/M/1, M/G/1 et surtout l'étude de ces files en régime transitoire.

I -1 : description du modèle :

Une file d'attente peut se décrire comme un système où les clients (modélisant les activités qui ont besoin d'accéder aux ressources) arrivent à des instants aléatoires vers une station (modélisant les ressources) pour recevoir un service. A la lumière des exemples précédents, on voit que les clients peuvent être de toutes sortes (central téléphonique, machine,...) de même que la station de service peut prendre un ou plusieurs serveurs, quand ceux-ci sont tous occupés, les clients doivent alors patienter dans un espace d'attente (si celui-ci existe) jusqu'à ce qu'un serveur soit disponible, une présentation graphique d'une file d'attente est donnée par la figure A-1 :



Figure A-1 : description d'une file d'attente.

Terminologie et notation :

Un système de file d'attente est défini par :

1. Un processus générateur d'arrivées caractérisé par une loi statistique déterminant les intervalles des inter arrivées (qui sont des variables aléatoires) sauf indication contraire (cas d'arrivées groupées) les arrivées se font une à une.
2. La file d'attente proprement dite : elle contient les clients en attente le service. Cependant, quand on parle de temps d'attente pure, on considérera le temps passé dans cette file sans être servi, la file est caractérisée par l'ordre dans lequel les clients sont servis.
3. Un ou plusieurs serveurs, caractérisés par une loi statistique déterminant la durée de service (qui est une variable aléatoire.).

Les files d'attentes sont caractérisées aussi par une séquence de six symboles (*la Conférence Internationale sur la Standardisation des Notations dans la Théorie de File d'Attente 1971*):

A/B/S/K/m/Z

Où :

A : distribution d'inter-arrivé.

B : distribution de service.

S : nombre de serveurs.

K : capacité de la file.

m : nombre supérieure du nombre de clients dans le système.

Z : discipline de service.

A et B sont données par :

M : loi exponentielle (markovienne).

D : loi déterministe (constant).

E_K : loi d'Erlang d'ordre k.

G : loi générale.

GI : lois générales indépendantes.

La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service, les disciplines les plus courantes sont :

- *FIFO (First In First Out)* ou *FCFS (First Come First Served)* les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée, notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs, dans la première, le premier arrivé sera le premier à quitter la file, alors que dans la deuxième il sera premier à commencer le service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui, dans un autre serveur termine avant lui.
- *LIFO (Last In First Out)* ou *LCFS (Last Come First Served)* cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrive (posé sur la pile) sera le premier traité (retiré de la pile). Comme pour le cas précédent, les disciplines LIFO et LCFS ne sont pas équivalentes que pour une file mono serveur.
- *RANDOM* (aléatoire) : le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente.

REMARQUE : lorsque les trois symboles de la notation ne sont pas précise, il est sous-entendu que : $K = \infty$, $m = \infty$ et Z : FIFO.

I-2 : ETUDE DE QUELQUES MODELES :**I-2-1 : MODELE MARKOVIENS :**

Les modèles markoviens de files d'attente sont des systèmes où les temps des inter arrivées et les temps de service sont des variables aléatoires exponentiellement distribuées : la propriété sans mémoire (markovienne) de la loi exponentielle rend aisée l'analyse de ce type de modèles.

I-2-1 : LA FILE M/M/1 :

C'est l'exemple le plus simple qui modélise le processus d'attente devant un serveur quand les arrivées sont poissonniennes de taux λ (nombre de clients arrivant pendant une unité de temps) et le service est exponentiel de taux μ (nombre de clients servis pendant une unité de temps) et de temps moyen de service $1/\mu$.

Ces deux processus, qui évaluent le nombre de clients dans la file étant markoviens, le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ "nombre de clients dans le système à l'instant t " est donc markovien.

Dans le régime transitoire, les équations différentielles de Chapman Kolmogorov sont de la forme :

$$\frac{dP_0}{dt} = \mu P_1(t) - (\lambda + \mu) P_0(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

Où : $P_n(t) = P(x(t) = n)$

Et dans le régime stationnaire, lorsque t tend vers l'infini, le système d'équations précédent sera le suivant :

$$\lambda P_n = \mu P_{n+1} \quad [6]$$

Ce qui permet de déduire la solution :

$$P_n = \rho^n P_0$$

Où $p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1 - \rho$ et $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ intensité de trafic (taux de chargement de la file)

Alors l'existence de la solution (la condition d'ergodicité) est liée à la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$, on a donc :

$\lambda < \mu \Leftrightarrow \rho < 1$ La file est stable.

$\lambda > \mu \Leftrightarrow \rho > 1$ La file est instable.

Les paramètres de performance de la file M/M/1 sont :

$\bar{N}_s = \frac{\rho}{1 - \rho}$ Nombre moyen de clients dans le système.

$\bar{N}_q = \lambda \bar{W}_q = \frac{\lambda \rho}{\mu - \lambda}$ Nombre moyen de clients dans la file.

$\bar{W}_s = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{1 - \rho}$ Temps d'attente moyen dans le système.

$\bar{W}_q = \bar{W}_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$ Temps d'attente moyen dans la file.

La file M/M/1 est Largement utilisée dans la modélisation de système pour plusieurs raisons :

Elle est extrêmement simple à traiter avec un ensemble de propriétés facilement exprimables par des formules aisées à manipuler, elle modélise d'une manière générale tout système de type guichet.

Les hypothèses qu'elle utilise (processus markovien en entrée et en sortie) sont classiquement utilisées dans la caractérisation plus précise et justifiée des paramètres.

I-2-2 : MODELE NON MARKOVIEN :

En s'écartant de l'hypothèse d'exponentialité des deux quantités stochastique (temps des Inter arrivées et durée de service) où en introduisant des paramètres supplémentaires au modèles étudié, on sera alors en présence d'un processus non markovien, ceci rend donc l'analyse du modèle très délicate, on se ramène alors à un processus markovien judicieusement choisi grâce à différentes méthodes.

I-2-2-1 : SYSTEME M/G/1 :

L'un des systèmes non markovien qui est très important et largement utilisé dans la théorie des files d'attente est la file M/G/1 qui est caractérisée par un processus d'arrivée poissonnien de taux λ (nombre des arrivées par unité de temps) et avec une distribution générale ou arbitraire de temps de service $B(x)$ de moyenne \bar{x} . Puisque le processus d'arrivée est poissonnien et le nombre de clients dans le système varie par un au plus, alors ceci permet de dire que le taux de probabilité d'arrivée est égale au taux de probabilité de départ à l'état stationnaire [4].

En remarquant que la distribution du temps de service n'est plus exponentielle sauf dans des cas particuliers où la loi de service a un comportement modélisable par un processus markovien (les loi hyper exponentielles), le système perd ses propriétés markoviennes et ne peut plus être résolu par la théorie des processus de naissance et de mort, on est donc réduit à trouver des méthodes de calcul différentes.

L'une de ces méthodes est celle dite «chaîne de Markov incluse» (the embeded Markov Chain)[5] qui ramène l'étude du processus bidimensionnel à un processus unidimensionnel et donne l'équation suivante :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1} & \text{si } X_n > 0 \\ A_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Où :

X_{n+1} : Le nombre de clients dans le système après le n^{ème} départ;

A_{n+1} : Le nombre des arrivées durant le service du (n+1)^{ème} client.

Ceci donne une chaîne de Markov d'espace d'états discret de matrice de transition P.

$$\text{Où } P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & . & . & . \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & . & . & . \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & . & . \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = P(A = i) = \int_0^{\infty} P(A = i / X \leq x) dB(x)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^i e^{-\lambda x}}{i!} dB(x)$$

$B(x)$: la distribution du temps de service.

Les comportements transitoires et stationnaires du système sont obtenus par l'équation (I), alors les résultats les plus connus sont les formules de **POLACZEK-KHINCHIN (P-K)** qui donnent l'expression du temps d'attente moyen en régime stationnaire par :

$$W = \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho)}$$

A partir de cette formule on peut calculer le temps de séjour total d'un client dans le système tel que : $T = \bar{x} + W$ et on trouve facilement la formule de P-K du nombre moyen de clients dans le système qui est :

$$\bar{N} = \rho + \frac{\lambda^2 \bar{x}^2}{2(1-\rho)}$$

Rappelons que la Z- Transformée d'une distribution P_k (la fonction génératrice) est donnée par :

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k P_k$$

Et pour la file correspondante :

$$Q(z) = B^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1-\rho)(1-z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z}$$

où : $B^*(\lambda - \lambda z)$ est la transformée de Laplace de la densité du temps de service évaluée au point $s = \lambda - \lambda z$. Cette équation représente la transformée de P-K du nombre moyen de clients dans le système.

La transformée de Laplace de la densité du temps d'attente est donnée par :

$$w^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}$$

et la transformée de Laplace de la durée de séjour totale est donnée par :

$$S^*(s) = B^*(s) \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}$$

On s'intéresse au calcul du temps d'attente en régime transitoire, pour lequel on introduit un processus stochastique $(U(t))_t$, $U(t)$ représente la tâche résiduelle du serveur, c'est le temps nécessaire pour vider le système à partir de l'instant t , et en supposant qu'il n'y a pas des arrivées après t .

Alors pour un système de discipline FCFS, la tâche résiduelle $U(t)$ représente exactement le temps d'attente d'un client arrive à l'instant t , sa distribution est définie par :

$$F(w, t) = P(U(t) \leq w / U(0) = w_0)$$

L'équation integrodifférentielle de TAKACS donne :

$$\frac{\partial F(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial F(w, t)}{\partial w} - \lambda F(w, t) + \lambda \int_{x=0}^w B(w-x) d_x F(x, t)$$

Cette équation définit la distribution de la tâche résiduelle en régime transitoire, on donne aussi la double transformée de Laplace de $F(w, t)$.

$$\text{où : } F^{**}(r, s) = \frac{(r/\eta) e^{-\eta w_0} - e^{-r w_0}}{\lambda B^*(r) - \lambda + r - s} \quad (\text{équation de TAKACS})$$

$\eta(s)$: la racine unique de l'équation $\lambda B^*(r) - \lambda + r - s = 0$ où $\text{Re}(\eta) > 0$ pour $\text{Re}(s) > 0$.

$w_0 = U(0)$: la tâche résiduelle initiale.

On remarque que cette équation est donnée par une expression implicite, et le problème qui se pose est qu'on ne peut calculer l'inverse de cette fonction pour obtenir la formule explicite de $F(w, t)$. Donc on cherche une méthode pour trouver cette distribution explicitement.

L'attention des spécialistes est actuellement focalisée sur l'étude des méthodes d'approximation parmi lesquelles on peut distinguer :

La méthode d'approximation par les processus de diffusion basée sur le principe d'approximation de la densité de probabilité de $X(t)$ par la densité de probabilité Φ d'une loi normale qui représente une solution de l'équation de diffusion de FOKKER-PLANCK définie par :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -m \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}$$

$$F(w, t) = P(U(t) \leq w / U(0) = w_0)$$

Avec les conditions initiales :

$$F(w, t) = 0 \quad \text{pour } w < 0.$$

$$F(\infty, t) = 1$$

$$F(w, 0) = F_0(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < w_0 \\ 1 & \text{si } w \geq w_0 \end{cases}$$

La résolution de l'équation de F-P donne :

$$F(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(w-w_0-mt)/\sigma\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{-w-w_0-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Φ : la fonction de répartition d'une gaussienne $N(0,1)$.

Cette solution ne satisfait pas la condition où $F(w, t) = 0$ pour $w < 0$ et avec un changement de variable convenable on obtient le résultat suivant qui satisfait les conditions initiales.

$$\text{Donc : } F(w, t) = \Phi\left(\frac{w-w_0-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2mw_0}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-w-w_0-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

On note :

$U_d(t)$: processus de diffusion associé à U

$U(t)$: processus exact.

on pose les conditions initiales :

$$F(w, t) = P(U_d(t) \leq w / U_d(0) = w_0)$$

$$F(w, 0) = \begin{cases} 0 & w < w_0 \\ 1 & w \geq w_0 \end{cases}$$

$$F(w, t) = 0 \quad \text{pour } w < 0.$$

$$F(\infty, t) = 1$$

Et

$$m = \rho - 1$$

$$\sigma^2 = \lambda \bar{x}^2$$

$$\rho = \lambda \bar{x}$$

Ce processus de diffusion doit satisfaire l'équation de F-P

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -m \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}$$

On utilise la technique de la transformée de Laplace pour deux raisons :

- 1) elle donne une approche alternative de la solution.
- 2) On peut la comparer avec la solution exacte.

Et on définit la double transformée de Laplace -stiltjes par :

$$F^{**}(r, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w F(w, t) dt$$

La résolution de l'équation de F-P par l'application de la double transformée donne :

$$F^{**}(r, s) = \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{(r/\eta) e^{-\eta w_0} - e^{-rw_0}}{(r - r_1)(r - r_2)} \right]$$

Où :

$$r_1, r_2 = \frac{m}{\sigma^2} \left[1 \pm \left(1 + \frac{2S\sigma^2}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right];$$

$$\eta = \begin{cases} r_1 & \text{si } \rho > 1 \\ r_2 & \text{si } \rho < 1 \end{cases} \quad \text{(Voir annexe I)}$$

On remarque que cette solution du processus de diffusion est similaire à celle de la solution exacte donnée par :

$$F^{**}(r, s) = \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{(r/\eta) e^{-\eta w_0} - e^{-rw_0}}{(r - r_1)(r - r_2)} \right].$$

On remarque aussi que :

$$F^{**}(r, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} E(e^{-rU(t)}/U(0) = W_0) dt$$

De ce résultat, on peut déduire le temps d'attente moyen du processus de diffusion lorsque $\rho < 1$ i.e., le régime stationnaire qui est :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(U_d(t)) = \frac{\lambda \overline{x^2}}{2(1 - \rho)}$$

Qui est le même résultat que celui de POLLACZEK_KHINCHIN et on peut déduire aussi la transformée de laplace du temps d'attente moyen en régime transitoire par :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} E(U_d(t)/U_d(0)) dt = \frac{m}{s^2} + \frac{w_0}{s} + \frac{e^{-\eta w_0}}{s \eta}$$

Où $\eta = r_1 = \frac{m}{\sigma^2} \left[1 + \left(1 + \frac{2 s \sigma^2}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$ (voir annexe I)

Et par l'inversion de l'équation précédente on obtient le temps d'attente moyen en régime transitoire :

$$E(U_d(t)/U_d(0)) = mt + \frac{m}{\sigma^2} + \exp \text{dirac}(t) - \frac{\frac{2\sigma^2}{m^2} \left(1 + \text{invplace} \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{w_0 m}{\sigma^2} s}}{s}, s, t \right) \right)}{\frac{m}{\sigma^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{w_0 m}{\sigma^2}} \right)}$$

L'approximation par le processus de diffusion est l'une des méthodes d'approximation importante, il y a d'autres méthodes plus puissantes que la diffusion qui sont les méthodes analytiques et a un degré moindre des méthodes par les techniques de simulation. Ces dernières permettront de traiter par programme informatique la suite des événements susceptibles de se produire sur un système réel et de représenter l'évolution dans le temps des variables de ce système. Cette technique a l'avantage d'être infiniment moins limitée que la technique analytique quant aux hypothèses de fonctionnement, mais nécessitent un temps de calcul (et donc un temps de mise au point de programmes) parfois assez fastidieuses.

CHAPITRE II :
APPROXIMATION DE $p(N(U(t))=n)$ PAR LES
PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

INTRODUCTION :

Il y a plusieurs études sur la probabilité du nombre de clients dans une file d'attente en régime transitoire, qui sont des approximations comme on a déjà vu dans l'approximation de diffusion et l'approximation par les fluides [5]. Il existe aussi d'autres approximations pour certains types de files d'attente. Par exemple, il y a une approche de la probabilité de nombre de clients dans une file d'attente de type $M/M/1$ développée par une équipe de *IRISA* (1993) [7]. Cette approche est basée sur les chaînes de Markov uniformisées, mais cette approximation donne une expression très compliquée pour le calcul du nombre moyen de clients. Dans ce chapitre, on présente une nouvelle approximation pour la file $M/G/1$ qui est basée sur le processus de renouvellement retardé et l'on donnera une approximation de $p(N(t)=n)$. On utilisera le temps de service résiduel comme étant une durée de vie résiduelle d'un processus de renouvellement. Pour cela; on rappellera les notions essentielles sur les processus de renouvellement et quelques cas particuliers.

II-1 : Processus de renouvellement :**II-1-1 : Définition :**

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. (X_i) est un intervalle de l'inter-occurrence d'un événement A.

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées représentent les instants d'occurrence de l'événement A tel que : $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée processus de renouvellement.

L'indice n représente le nombre de renouvellements.

Une présentation graphique du processus de renouvellement est donnée par la figure (II-1) :

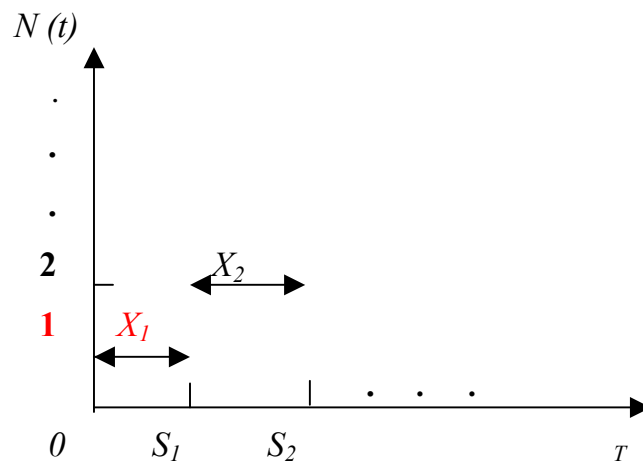


Figure (II-1)

$N(t)$: processus de comptage représente le nombre de renouvellements jusqu'à t .

Donc ; pour un processus de renouvellement $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et pour tout $t > 0$, on appelle :

- Variable aléatoire âge, la variable aléatoire notée par δ_t et définie par :

$$\delta_t = t - S_{N(t)}.$$

- La durée de vie résiduelle, la variable aléatoire notée par γ_t et définie par :

$$\gamma_t = S_{N(t)+1} - t.$$

- La durée de vie totale, la variable aléatoire notée par β_t et définie par :

$$\beta_t = \gamma_t + \delta_t.$$

On représente ces variables par la figure (II-2) suivante :

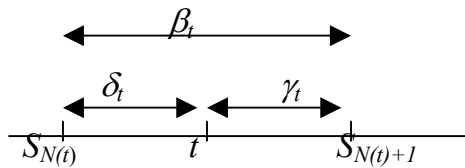


Figure (II-2).

II-1-2 : Fonction de renouvellement :

Définition :

On appelle fonction de renouvellement la fonction $M(\cdot)$ définie pour tout t par :

$$M(t) = E(N(t)).$$

Proposition :

a) $M(t) = \sum_{k \geq 1} F_k(t)$ Où $\forall k F_k(t) = p(S_k \leq t)$.

b) la fonction de renouvellement est bien définie (la série $\sum_{k \leq 1} F_k(t)$ converge, $\forall t$) [8].

II-1-3 : Théorème de renouvellement :

Proposition :

La fonction de renouvellement $M(\cdot)$ vérifie l'équation :

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x) dF(x) \quad \forall t \geq 0.$$

En introduisant la notation de convolution :

$$A * B(t) = \int_0^t A(t-x) dB(x) = \int_0^t B(t-x) dA(x).$$

Alors :

$$M(t) = F(t) + F * M(t)$$

II-1-4 : Equation de renouvellement :**Définition :**

Une équation intégrale de la forme :

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) dF(x) \quad t \geq 0.$$

Est appelée équation de renouvellement, tel que :

$A(\cdot)$ est considérée comme la fonction inconnue, a et F sont des fonctions connues.

Proposition :

Soit a une fonction bornée, il existe une et une seule fonction A bornée sur des intervalles finis et qui satisfait :

$$\text{i) } A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x) dF(x) \quad \text{et } A \text{ est donnée par}$$

$$\text{ii) } A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x) dM(x) \quad , \text{ où } M(t) = \sum_{k \geq 1} F_k(t)$$

Remarque :

La solution de certaines équations de renouvellement est donnée en terme de la fonction de renouvellement d'un certain processus de renouvellement.

II-2 : Cas particuliers :

II-2-1 : Processus de régénération : [9]

Définition :

Soit $Z=(Z_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique à espace d'état E . on suppose qu'à chaque instant d'occurrence d'un certain évènement A, le comportement probabiliste du processus Z après cet instant est le même qu'après l'instant 0.

Les instants d'occurrence de l'évènement sont appelés instant de régénération du processus Z , Z est appelé "*processus régénératif*".

Si on suppose que Z est à espace d'état E discret ;

Alors, Pour $i \in E$; $f(t) = p(z_t = i)$.

Soit S_1 est le premier instant de régénération de Z .

Si on pose :

$$\hat{Z}_\mu = Z_{\mu+S_1}, \text{ Donc la loi de } \hat{Z} \text{ est le même que celle de } Z.$$

Si $s_1 = s < t$; Alors $Z_t = \hat{Z}_{t-s}$.

On retourne à la fonction de probabilité f et on va l'étudier à la lumière du processus de renouvellement on aura donc :

$$\begin{aligned} f(t) = p(Z_t = i) &= \int_0^\infty p(Z_t = i / S_1 = s) dF(s). \\ &= \int_0^t p(Z_t = i / S_1 = s) dF(s) + \int_t^\infty p(Z_t = i / S_1 = s) dF(s). \\ &= \int_0^t p(\hat{Z}_{t-s} = i) dF(s) + p(Z_t = i, S_1 > t). \\ &= \int_0^t f(t-s) dF(s) + p(Z_t = i, S_1 > t). \end{aligned} \quad (\text{II-1})$$

Donc f est une solution de l'équation de renouvellement.

Soit maintenant $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des instants de régénération ;

Pour $A \in E$; on pose $K(t, A) = p(Z_t \in A, S_1 > t)$, $t \geq 0$; (II-2)

$$f(t) = p(Z_t \in A).$$

Donc :

$$p(Z_t \in A / S_1 \leq t) = p(\hat{Z}_{t-s} \in A) = f(t-s)$$

Et d'après les équations (II-1) et (II-2) on obtient :

$$f(t) = K(t, A) + \int_0^t f(t-s) dF(s)$$

Par le processus de renouvellement, la solution de cette équation sera la suivante :

$$\begin{aligned} f(t) &= K(t, A) + \int_0^t K(t-s, A) dM(s) \\ &= R * K(t, A) \end{aligned} \quad \text{(II-3)}$$

$$\text{Où } R = 1 + M, \quad M = \sum_{k \geq 1} F_k$$

II-2-2 : Processus de renouvellement retardé :

Définition :

Soit $\{X_k\}_{k=2}^{+\infty}$ une suite des inter-occurrence qui sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de fonction de distribution commune F , et soit X_1 une variable aléatoire indépendante, de fonction de distribution G différente de F

Alors :

Le processus $\hat{S}_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est appelé "processus de renouvellement retardé".

Définition : Une suite $(\hat{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est appelée processus de renouvellement retardé si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \hat{S}_n - S_1$ (avec S_1 : positive ou nul indépendant de \hat{S}_n) est un processus de renouvellement ordinaire.

Maintenant, on va modéliser le problème de calcul de la probabilité du nombre de clients qui sont trouvés dans un système d'attente à un instant t .

II-3 : Modélisation du problème :

Soit une file d'attente de type $M/G/1$, avec une discipline $FCFS$ et un espace d'attente illimité.

Si on visite le système à un instant quelconque t ; on trouve un certain nombre de clients qui attendent dans une file pour recevoir un service et un client dans le service. Donc ce nombre, à cet instant est égal au nombre de clients qui seront servis à partir de t et dans une durée de temps égale à $U(t)$ (on ne considère pas les clients arrivés après t).

On pose les notations suivantes :

$U(t)$: une variable aléatoire représente la tâche résiduelle à l'instant t , et qui est également le temps nécessaire pour vider le système.

$N(U(t))$: le nombre de clients dans le système à l'instant t , qui est aussi le nombre de clients servis dans une durée de temps égale à $U(t)$.

En utilisant le processus de renouvellement, on trouve :

$$\{N(U(t)) = n\} \Leftrightarrow \{\hat{S}_n \leq U(t) < \hat{S}_{n+1}\}$$

Où $(\hat{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des instants de renouvellement qui représentent ici les instants de fin de service de chaque client.

On note : $X_n = \hat{S}_n - \hat{S}_{n-1}$ la durée de service du $n^{\text{ème}}$ client.

$$\hat{S}_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Tels que :

X_1 : une variable aléatoire indépendante, de fonction de distribution G différent de celle de $(X_i)_{i=2, n}$ et qui représente le temps de service résiduel d'un client qui est en service à l'instant t .

$(X_i)_{i=2}^n$: Une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées représentent la durée du service de chaque client i , de fonction de distribution F commune.

Maintenant, on donne plus de détail pour $p\{N(U(t)) = n\}$.

On a :

$$\{N(U(t)) = n\} \Leftrightarrow \{\hat{S}_n \leq U(t) < \hat{S}_{n+1}\}.$$

Les évènements $\{\hat{S}_n \leq U(t)\}$ sont emboîtés c'est-à-dire que :

$$\{\hat{S}_n \leq U(t)\} \supset \{\hat{S}_{n+1} \leq U(t)\} \supset \{\hat{S}_{n+2} \leq U(t)\} \dots$$

Par conséquent :

$$\{\hat{S}_n \leq U(t) \text{ et } \hat{S}_{n+1} > U(t)\} = \{\hat{S}_n \leq U(t) \text{ et non } \{\hat{S}_{n+1} \leq U(t)\}\} = \{\hat{S}_n \leq U(t)\} - \{\hat{S}_{n+1} \leq U(t)\}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} p(N(U(t)) = n) &= p\{\hat{S}_n \leq U(t)\} - p\{\hat{S}_{n+1} \leq U(t)\}. \\ \Leftrightarrow p(N(U(t)) = n) &= F_{\hat{S}_n}(U(t)) - F_{\hat{S}_{n+1}}(U(t)) \end{aligned}$$

On a aussi :

$$F_{\hat{S}_n}(U(t)) = p(\hat{S}_n \leq U(t)) = \int_0^{+\infty} p(\hat{S}_n \leq u / U(t) = u) f_{U(t)}(u) du.$$

où $f_{U(t)}$ est la fonction de densité de $U(t)$.

Donc :

$$p(N(U(t)) = n) = \int_0^{+\infty} [F_{\hat{S}_n}(u) - F_{\hat{S}_{n+1}}(u)] f_{U(t)}(u) du \quad (\text{II-4})$$

Il reste de trouver les fonctions $F_{\hat{S}_n}$ et $f_{U(t)}$.

On commence par $F_{\hat{S}_n}$

On a : $\hat{S}_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

$$\Leftrightarrow p(\hat{S}_n \leq u) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq u).$$

Comme Les $(X_i)_{i=1,n}$ sont des v a i i d, on trouve :

$$\begin{aligned} f_{\hat{S}_n}(u) &= g_{X_1}(u) * f_{X_2}(u) * \dots * f_{X_n}(u). \\ &= g_{X_1}(u) * [f_{X_2}(u)]_*^{n-1}. \end{aligned}$$

Où $f_{\hat{S}_n}$ est la fonction de densité de \hat{S}_n ;

$[f_{X_2}(u)]_*^{n-1}$ désigne la $(n-1)$ ème convolée de $f_{X_2}(u)$ et * le produit de convolution.

Généralement, la distribution de $(X_i)_{i=2}^n$ est donnée. Par contre la distribution de X_1 est inconnue. Donc, par la suite on va donner une expression explicite de cette distribution.

Premièrement, On remarque que les durées du temps de service ont le même comportement probabiliste, cela conduit à utiliser le processus de régénération en introduisant :

$$\begin{aligned} p(X_1 \rangle y) &= \int_0^{+\infty} p(X_1 \rangle y / S_1 = s) dF(s). \\ &= \int_0^t p(X_1 \rangle y / S_1 = s) dF(s) + p(X_1 \rangle y, S_1 \rangle t). \end{aligned}$$

D 'après (II-2) on a $K(t, A) = p(X_1 \rangle y, S_1 \rangle t)$.

Ici $A = \{X_1 \rangle y\}$.

Donc : $K(t, A) = p(S_1 \rangle t + y) = 1 - F(t + y)$

De (II-3) on trouve que :

$$\begin{aligned} p(X_1 \rangle y) &= K(t, A) + \int_0^t K(t-s, A) dM(s). \\ \Leftrightarrow p(X_1 \rangle y) &= 1 - F(t + y) + \int_0^t [1 - F(t + y - s)] dM(s). \end{aligned}$$

Donc : $G_{X_1}(y) = F(t + y) - \int_0^t [1 - F(t + y - s)] dM(s)$

II-4 Exemple :

Soit une file d'attente de type $M/M/1$, la distribution du temps de service est une exponentielle de taux μ .

On a donc :

$$\mathbf{a)} \quad p(X_1 > y) = 1 - (1 - e^{-\mu(t+y)}) + \int_0^t [1 - (1 - e^{-\mu(t+y-s)})] \mu ds .$$

$$\Rightarrow p(X_1 > y) = e^{-\mu y} .$$

$$\Leftrightarrow G_{X_1}(y) = 1 - e^{-\mu y}$$

Donc, la distribution du temps de service résiduel est une exponentielle de taux μ qui est le même résultat donné par Karlin [8].

b) le calcul de $f_{\hat{S}_n}$:

On a $f_{\hat{S}_n}(u) = g_{X_1}(u) * f_{X_2}(u) * \dots * f_{X_n}(u)$.

$$\Leftrightarrow f_{\hat{S}_n}(u) = \frac{\mu (\mu u)^{n-1} e^{-\mu u}}{\Gamma(n)} .$$

Donc :

$$\hat{S}_n \rightarrow \gamma(\mu, n)$$

Conclusion :

On a trouvé une expression de $P(N(U(t))=n)$ en fonction de $F_{\hat{S}_n}$ et $f_{U(t)}$. Il reste de trouver une expression explicite de la distribution du temps d'attente. Mais on a une expression implicite de cette distribution qui est une double transformée de Laplace- stiltjes (formule de Takacs). Pour obtenir une expression explicite de cette distribution il faut l'inverser, ce problème d'inversion sera l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE III :

L'inverse de la double transformée de Laplace

INTRODUCTION :

Dans la théorie des files d'attente, plusieurs résultats sont donnés de façon implicite. C'est le cas des transformées comme la fonction génératrice dans le cas des variables discrètes, ou par la transformée de Laplace pour les variables continues, ou dans le cas de variables mixte (continue et discrète) on trouve des résultats en fonction d'une mixture entre la transformée de Laplace et la fonction génératrice.

Dans les dernières années, plusieurs méthodes ont été proposées pour inverser ces transformées. Donc, pour le cas des transformées unidimensionnelle, il a été trouvé des approximations informatiques comme l'algorithme de GAVER [10], l'algorithme de POISSON et l'algorithme d'Euler. Ce dernier a été développé en 1991[10] pour inverser la transformée de Laplace unidimensionnelle; ensuite en 1994[11] cet algorithme a été généralisé pour les fonctions multidimensionnelle.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier l'algorithme d'Euler et on va l'appliquer pour trouver une approche de la fonction de densité du temps d'attente.

III-1 : les transformés unidimensionnelles :**III-1-1 : Définitions :****III-1-1-a : Transformée de Fourier :**

Soit $f(t)$ une fonction à valeurs complexe de variable réelle . On appelle transformée de Fourier de f la fonction ϕ définie par :

$$\phi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} f(t) dt$$

Remarque :

Si f est une fonction de densité alors $\phi(u)$ est sa fonction caractéristique.

III-1-1-b : Transformée de Laplace :

Soit $f(t)$ une fonction à valeurs complexe de variable réelle positive t . On appelle transformée de Laplace de $f(t)$ la fonction $\tilde{f}(s)$ de variable complexe définie par :

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Où $\text{Re}(s) > 0$.

On appelle $f^*(s)$ transformée de Laplace- stiltjes de F définie par :

$$f^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dF(t) \quad \text{Où } F(t) = \int_0^t f(t) dt$$

III-1-2 : Inverse d'une intégrale : [10]

Soit ϕ la transformée de Fourier de f . Si $|\phi|$ est intégrable alors F est absolument continue et sa densité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} \phi(u) du \quad \forall t \geq 0. \quad (2-1)$$

III-1-3 : Intégration numérique :

L'intégrale numérique permet de calculer l'intégrale précédente, mais bien sûr l'intégration numérique est compliquée pour les intégrales qui sont définies sur des domaines infinis. Dans ce cas on propose approximativement de calculer les intégrales par la formule des trapèzes, qui est la meilleure pour calculer ce type des intégrales pour deux raisons :

- 1) Elle permet de calculer des intégrales définies sur un intervalle infini.
- 2) Elle donne des erreurs faibles et faciles à contrôler.

Formule des trapèzes :

Soit g une fonction définie sur $[a, b]$. Pour obtenir la formule des trapèzes, on divise le domaine de définition sur n sous intervalle, puis on approche le graphe de $g(t)$ d'abord dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ par la droite qui conjoint les points (t_0, g_0) et (t_1, g_1)

Alors :

$$g(t) \approx g_0 + \frac{t - t_0}{h} (g_1 - g_0).$$

$$\text{Où } h = \frac{b - a}{n}, \quad t_i = ih$$

On obtient aussi pour l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t) dt = \frac{h}{2} (g_0 + g_1)$$

En répétant ce procédé pour tous les intervalles en considérations, on trouve la formule des trapèzes :

$$\int_a^b g(t) dt = T_h(g) = h \left(\frac{g(a) + g(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} g(a + kh) \right).$$

Cette formule est aussi valable pour $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Proposition :

Soit $g \in C^2$, alors l'expression exacte et standard de l'erreur correspondant au règle des trapèzes est donnée par :

$$e_d \equiv \left| \int_a^b g(t) dt - T_h(g) \right| = h^2 \frac{(b-a)}{12} |g''(t_0)| \dots (3-1)$$

avec $a < t_0 < b$.

Donc on peut majorer cette erreur par :

$$e_d \leq \frac{h(b-a)}{12} \sup \{ |g''(t)| : a < t < b \}.$$

En plus de ça, on peut appliquer la formule sommatoire de Poisson pour obtenir une représentation convenable de l'erreur de discrétisation associée à la formule des trapèzes, et on peut aussi estimer et majorer cette erreur d'une façon très simple et plus précise que la formule (3-1).

La formule sommatoire de Poisson :

Maintenant, on se concentre sur l'erreur de discrétisation associée à la formule des trapèzes. En 1955 Fettis [12] a remarqué que l'approximation d'une intégrale par la formule des trapèzes peut être analysée et justifiée en utilisant la formule sommatoire de Poisson, et avec cette formule, on peut contrôler l'erreur de discrétisation.

L'idée essentielle de la formule sommatoire de Poisson est d'approcher une fonction donnée par une fonction périodique qui peut être représentée par sa série de Fourier. Cette méthode appelée *la méthode de série de Fourier* ou « *aliasing* ».

On applique cette méthode sur la fonction de densité f .

1. On construit une fonction périodique $f_p(t)$ de période $\frac{2\pi}{h}$.

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(t + \frac{2\pi k}{h}\right) \dots (4-1)$$

2. on cherche une série de Fourier de cette fonction périodique (on suppose que cette série converge).

On a par définition :

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikht}$$

Où c_k est un coefficient de Fourier de f_p .

$$c_k = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} f_p(t) e^{-ikht} dt = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(t + \frac{2\pi k}{h}\right) e^{-ikht} dt$$

Par Fubini on trouve :

$$c_k = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ikh t} dt = \frac{h}{2\pi} \phi(-kh) \dots (4-2).$$

D'après (4-1) et (4-2) on obtient la formule sommatoire de poisson :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(t + \frac{2\pi k}{h}\right) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi(kh) e^{-ikh t} \dots (4-3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) &= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi(kh) e^{-ikh t} - e_d \\ &= \frac{h}{2\pi} + \frac{h}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} [\operatorname{Re}(\phi) \cos kht + \operatorname{Im}(\phi) \sin kht] - e_d \dots (4-4). \end{aligned}$$

Où $e_d \equiv e_d(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} f\left(t + \frac{2\pi k}{h}\right) \dots (4-5).$

On remarque que la somme (4-4) est une approche de l'intégrale (2-1) par la formule des trapèzes, et que l'erreur e_d qui est donnée par la formule (4-5) est une expression explicite de l'erreur de discrétisation associée à la règle des trapèzes. Donc, d'après cette expression, on peut donner une majoration meilleure que celle de l'expression standard.

Pour les densités continues, il est possible de vérifier directement les conditions suffisantes de ϕ (la continuité et l'intégrabilité) d'après [13]. Mais ce ne sont pas toutes les distributions qui ont des densités continues. Par exemple la distribution exponentielle a une densité non continue au point 0 et sa transformée de Fourier qui égale à $\phi(u) = (1 - miu)^{-1}$ où $|\phi(u)| = (1 + m^2 u^2)^{-\frac{1}{2}}$ n'est pas intégrable. Donc la formule (4-4) n'est pas valable.

Pour résoudre ce problème, trois méthodes ont été proposées [10] :

1. la fonction f satisfait des conditions plus fortes pour des conditions de convergence de la série de Fourier.
2. perturber la densité f par la convolution (smoothing convolution) et donner une nouvelle densité satisfaisant les conditions.
3. changer la forme de l'addition de la série de Fourier.

On choisit la troisième méthode car la convergence de la série et l'égalité n'exige pas des conditions fortes.

Proposition 1 : [10]

Soit g une fonction périodique où $|g|$ est intégrable sur un intervalle d'une période.

Si g a des points de discontinuité finis et elle est dérivable à gauche et à droite de chaque point alors :

La série de Fourier de g converge vers $[g(t_+) + g(t_-)]/2$ pour tout t .

Remarques :

- La convergence dans la proposition (1) n'est pas uniforme au voisinage de points de discontinuité.
- La convergence et l'égalité de (4-3) sont possibles avec des conditions faibles si on change la forme de l'addition de la série de Fourier, par exemple si on utilise la convergence de cesaro, la proposition (1) reste valable sans la dérivabilité.

Proposition 2 : [10]

a) Si $\sum_{k=1}^{+\infty} (|\operatorname{Re}(\phi(kh))| + |\operatorname{Im}(\phi(kh))|) < +\infty$ alors :

La série (4-3) est valable et la série de Fourier converge uniformément.

b) Si $\operatorname{Re}(\phi(kh))$ et $\operatorname{Im}(\phi(kh))$ sont éventuellement positive et décroissent vers 0 quand k tend vers ∞ Alors (4-3) est valable et la série de Fourier converge pour toute t .

Pour résoudre le problème d'intégrabilité de $|\phi|$ par le changement de la forme de l'addition de la série, on remplace $f(t)$ par la fonction $f_d(t)$ (damped function) donnée par :

$$f_d(t) = e^{-at} f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}_*^+$$

On prend $h = \frac{\pi}{t}$ et d'après (4-3) on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a(2k+1)t} f((2k+1)t) &= \frac{1}{2t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \phi\left(ia + \frac{k\pi}{t}\right) \\ &= \frac{1}{2t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \tilde{f}\left(a - \frac{ik\pi}{t}\right) \end{aligned}$$

On remarque que le deuxième membre de cette égalité est une approche de l'inverse de la transformée de Laplace.

Soit : $a = \frac{A}{2t}$ donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kA} f((2k+1)t) = \frac{\exp(A/2)}{2t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \tilde{f}\left(\frac{A-i2k\pi}{2t}\right)$$

Comme $\tilde{f}(s) + \tilde{f}(\bar{s}) = 2\operatorname{Re} \tilde{f}(s)$ on aura :

$$f(t) = \frac{\exp(A/2)}{2t} \operatorname{Re}\left(\tilde{f}\left(\frac{A}{2t}\right)\right) + \frac{\exp(A/2)}{t} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \operatorname{Re}\left(\tilde{f}\left(\frac{A+i2k\pi}{2t}\right)\right) - e_d .$$

où e_d est l'erreur de discrétisation

$$e_d \equiv e_d(f, t, A) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kA} f((2k+1)t)$$

Avec cette expression on peut facilement majorer l'erreur.

$$\mathbf{1)} \text{ si } |f(t)| \leq c \text{ donc } |e_d| \leq \frac{ce^{-A}}{1-e^{-A}} \approx ce^{-A} \dots \text{ (a)}$$

Cas particulier :

Si $f(t)$ est une fonction de densité alors $|f(t)| \leq 1$ donc $|e_d| \leq e^{-A}$ qui est indépendante de la distribution.

$$\mathbf{2)} \text{ si } |f(t)| \leq ct \text{ donc } |e_d| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kA} (2k+1)ct \leq ct \frac{(3e^{-A} - e^{-2A})}{(1-e^{-A})^2} \approx 3cte^{-A} .$$

D'après (a) il est clair qu'il faut augmenter la valeur de A pour diminuer la valeur de l'erreur.

On applique ces résultats pour les fonctions bidimensionnelles de deux variables; on rappelle par les définitions suivantes.

III-2 : Les transformées bidimensionnelle :**III-2-1 : Double transformée de Laplace :**

Soit $f(t_1, t_2)$ une fonction à valeurs complexes de variables réelles positives (t_1, t_2) . On appelle double transformée de Laplace de f , la fonction $\tilde{f}(s_1, s_2)$ de variables complexes définie par :

$$\tilde{f}(s_1, s_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

Où $\text{Re}(s_1) > 0$ et $\text{Re}(s_2) > 0$.

III-2-2 : Double transformée de Fourier :

Soit $f(t_1, t_2)$ une fonction à valeurs complexes de variables réelles. On appelle double transformée de Fourier de f , la fonction ϕ définie par :

$$\phi(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(u_1 t_1 + u_2 t_2)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

L'inverse du ϕ est donnée par :

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t_1 u_1 + t_2 u_2)} \phi(u_1, u_2) du_1 du_2$$

III-2-3 : La formule sommatoire de Poisson :

Soit $f(t_1, t_2)$ une fonction périodique de périodes $\frac{2\pi}{h_1}$, $\frac{2\pi}{h_2}$ respectivement, admettant une série de Fourier. La formule sommatoire de Poisson bidimensionnel est donnée par :

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(t_1 + \frac{2\pi j}{h_1}, t_2 + \frac{2\pi k}{h_2}\right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{h_1 h_2}{4\pi^2} \phi(jh_1, kh_2) e^{-i(jh_1 t_1 + kh_2 t_2)}$$

Le membre droit de cette égalité est une approche de l'intégrale numérique de l'inverse de la transformée de Fourier par la formule des trapèzes.

On fait le même procédé que pour les fonctions unidimensionnelles :

On remplace la fonction f par la fonction f_d donnée par :

$$f_d(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{-(a_1 t_1 + a_2 t_2)} f(t_1, t_2) & \text{si } t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Où a_1 et a_2 sont des valeurs réelles positives

Donc :

$$\phi(u_1, u_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-[(a_1 + iu_1)t_1 + (a_2 + iu_2)t_2]} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

$$\Leftrightarrow \phi(u_1, u_2) = \tilde{f}(a_1 - iu_1, a_2 - iu_2)$$

On prend $h_1 = \frac{\pi}{l_1 t_1}$, $h_2 = \frac{\pi}{l_2 t_2}$ où l_1 et l_2 sont des entiers positifs avec $l_1 \geq 1$, $l_2 \geq 1$

On trouve :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-[a_1(1+2jl_1)t_1 + a_2(1+2kl_2)t_2]} f((1+2jl_1)t_1, (1+2kl_2)t_2) =$$

$$\frac{1}{4l_1 l_2 t_1 t_2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\left[\frac{j\pi}{l_1} + \frac{k\pi}{l_2}\right]} \tilde{f}((1+2jl_1)t_1, (1+2kl_2)t_2)$$

Pour simplifier les calculs on pose $A_1 = a_1 l_1 t_1$, $A_2 = a_2 l_2 t_2$.

On obtient :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(A_1 j + A_2 k)} f((1+2jl_1)t_1, (1+2kl_2)t_2) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\left[\frac{A_1}{2l_1} + \frac{A_2}{2l_2}\right]}}{4l_1 l_2 t_1 t_2} \tilde{f}\left(\frac{A_1}{2l_1 t_1} - \frac{ij\pi}{l_1 t_1}, \frac{A_2}{2l_2 t_2} - \frac{ik\pi}{l_2 t_2}\right) e^{-i\left[\frac{j\pi}{l_1} + \frac{k\pi}{l_2}\right]}$$

Et en fin on trouve :

$$f(t_1, t_2) = \tilde{f}(t_1, t_2) - e_d$$

$$\text{Où } e_d = \sum_{\substack{j=-\infty \\ \text{non } j=k=0}}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-[A_1 j + A_2 k]} f((1+2jl_1)t_1, (1+2kl_2)t_2)$$

Pour un nombre positif c satisfaisant l'inégalité suivante :

$$|f(t_1, t_2)| \leq c \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Alors : } |e_d| \leq c \frac{(e^{-A_1} + e^{-A_2} - e^{-(A_1+A_2)})}{(1 - e^{-A_1})(1 - e^{-A_2})} \approx c(e^{-A_1} + e^{-A_2}) \dots \text{ (b)}$$

Dans notre cas f est une fonction de densité donc :

$$|e_d| \leq e^{-A_1} + e^{-A_2}.$$

Maintenant, on va étudier la fonction \bar{f} :

On a :

$$\begin{aligned} \bar{f}(t_1, t_2) = & \frac{\exp(A_1/2l_1)}{2l_1 t_1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ij\pi}{l_1}} \left\{ \frac{\exp(A_2/2l_2)}{2l_2 t_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ik\pi}{l_2}} \right. \\ & \left. \times \tilde{f}\left(\frac{A_1}{2l_1 t_1} - \frac{ij\pi}{l_1 t_1}, \frac{A_2}{2l_2 t_2} - \frac{ik\pi}{l_2 t_2}\right) \right\} \end{aligned}$$

On a trouvé donc une série infinie, cette dernière est difficile à calculer directement, mais on remarque que cette série est une série trigonométrie qui peut être écrite sous forme d'une série alternée sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{f}(t_1, t_2) = & \frac{\exp(A_1/2l_1)}{2l_1 t_1} \sum_{j_1=1}^{l_1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-\frac{ij_1\pi}{l_1}} \left\{ \frac{\exp(A_2/2l_2)}{2l_2 t_2} \sum_{k_1=1}^{l_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{ik_1\pi}{l_2}} \right. \\ & \left. \times \tilde{f}\left(\frac{A_1}{2l_1 t_1} - \frac{ij_1\pi}{l_1 t_1} - \frac{ij\pi}{t_1}, \frac{A_2}{2l_2 t_2} - \frac{ik_1\pi}{l_2 t_2} - \frac{ik\pi}{t_2}\right) \right\} \end{aligned}$$

On a $\tilde{f}(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \tilde{f}(s_1, s_2)$ où \bar{s} est le conjugué de s donc l'équation précédente sera la suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t_1, t_2) = & \frac{\exp\left[\frac{A_1}{2l_1t_1} + \frac{A_2}{2l_2t_2}\right]}{4l_1t_1l_2t_2} \left\{ \tilde{f}\left(\frac{A_1}{2l_1t_1}, \frac{A_2}{2l_2t_2}\right) \right. \\
& + 2 \sum_{k_1=1}^{l_2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \operatorname{Re} \left[e^{-\frac{ik_1\pi}{l_2}} \tilde{f}\left(\frac{A_1}{2l_1t_1}, \frac{A_2}{2l_2t_2} - \frac{ik_1\pi}{l_2t_2} - \frac{ik\pi}{t_2}\right) \right] \\
& + 2 \sum_{j_1=1}^{l_1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \operatorname{Re} \left[\sum_{k_1=1}^{l_2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-\left(\frac{ij_1\pi}{l_1} + \frac{ik_1\pi}{l_2}\right)} \right. \\
& \quad \left. \times \tilde{f}\left(\frac{A_1}{2l_1t_1} - \frac{ij_1\pi}{l_1t_1} - \frac{ij\pi}{t_1}, \frac{A_2}{2l_2t_2} - \frac{ik_1\pi}{l_2t_2} - \frac{ik\pi}{t_2}\right) \right] \\
& + 2 \sum_{j_1=1}^{l_1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \operatorname{Re} \left[e^{-\frac{ij_1\pi}{l_1}} \tilde{f}\left(\frac{A_1}{2l_1t_1} - \frac{ij_1\pi}{l_1t_1} - \frac{ij\pi}{t_1}, \frac{A_2}{2l_2t_2}\right) \right. \\
& \quad + \sum_{k_1=1}^{l_2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-\left[\frac{ij_1\pi}{l_1} + \frac{ik_1\pi}{l_2}\right]} \\
& \quad \left. \left. \times \tilde{f}\left(\frac{A_1}{2l_1t_1} - \frac{ij_1\pi}{l_1t_1} - \frac{ij\pi}{t_1}, \frac{A_2}{2l_2t_2} + \frac{ik_1\pi}{l_2t_2} + \frac{ik\pi}{t_2}\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

On remarque que cette fonction contient des séries alternées infinies de la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$ où $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles.

On ne peut pas calculer la somme de ces séries lorsque k et j tendent vers l'infini, mais on peut calculer un nombre fini des termes de ces séries à condition que l'erreur de troncature sera d'une meilleure précision. Pour trouver le nombre de termes, on applique la transformation d'Euler

III-2-4 : Transformation d'Euler : [10]

Pour les séries infinies alternées, la transformation d'Euler est définie par la moyenne de m sommes partielles avec une distribution de probabilité binomiale de paramètres m et $p = 1/2$.

Si on applique cette méthode sur une m - somme partielle après la $n^{\text{ème}}$ somme, on obtient la définition suivante :

$$E(t, m, n) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^{-m} S_{n+k}(t) \dots \text{(III-2)}$$

Où $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle.

La somme d'Euler peut aussi être décrite comme une moyenne répétée de m sommes après la $n^{\text{ème}}$. On commence avec les m - sommes consécutives $S_n(t)$, $S_{n+1}(t)$, \dots , $S_{n+m-1}(t)$ et on construit $(m-1)$ moyennes de paires adjacentes, on répète le processus, en construisant les $(m-2)$ moyennes de paires adjacentes de ces moyennes, on continue ce procédé jusqu'à ce qu'on obtienne une seule moyenne. Le résultat est donné dans (III-2)

Plus conventionnellement, la somme d'Euler est définie en terme de l'opérateur de la différence Δ définie par :

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Δ^k est la $k^{\text{ème}}$ différence définie par : $\Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1} a_n)$.

On applique cet opérateur sur la somme d'Euler et on obtient une autre forme de cette somme donnée par :

$$E(t, m, n) = S_n(t) + (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k 2^{-(k+1)}$$

Où $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, $a_k \geq a_{k+1} > 0$ pour tout k

Donc : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_\infty$

D'après le critère de Leibniz [14], la série de terme générale $(-1)^n a_n$ est convergente et la

série $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ vérifie, pour tout n de \mathbb{N} , l'encadrement :

$$S_{2n+1} \leq S_\infty \leq S_{2n}.$$

De plus, si $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ est croissante, alors :

$$|S_n - S_\infty| \leq \frac{a_n}{2};$$

Soit $E(m, n)$ être une somme d'Euler associée à $\{a_k\}$;

On a :

$$\begin{aligned} (-1)^m \Delta^m a_{n+k} &= \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} a_{n+k+j} \\ &= 2^m |E(m, n+k-1) - E(m-1, n+k-1)| \end{aligned}$$

Si $(-1)^m \Delta^m a_{n+k}$ est décroissante, $\forall k \geq 1$ alors :

$$|E(m, n) - S| \leq \frac{\Delta^m a_{n+1}}{2^m} = |E(m, n) - E(m-1, n)|$$

Généralement la condition précédente est difficile à vérifier

III-2-5 : Contrôle de l'erreur :

Dans notre algorithme d'inversion, il y a trois types d'erreur : l'erreur de discrétisation, l'erreur de troncature et l'erreur d'arrondie.

1. Erreur de discrétisation :

Cette erreur est donnée par la formule (b) en fonction de A_1 et A_2 , et qui peut être interprétée comme l'erreur de discrétisation associée à la formule des trapèzes et qui est en même temps "the aliasing error" obtenue par la construction des fonctions périodiques. Donc comme souligné précédemment, cette erreur dépend de la valeur de A_1 et A_2 , devenant petite avec l'accroissement de ces dernières.

2. Erreur de troncature :

L'erreur de troncature vient de se rapprocher de chaque série infinie par un nombre fini de termes, on peut réduire l'erreur de la troncature à 10^{-13} ou moins en utilisant la technique de la somme d'Euler avec approximativement 50 termes, de telle sorte qu'on calcule la quantité $|E(m, n) - E(m-1, n)|$ et pour obtenir une erreur d'ordre 10^{-13} on prend $n=39$, $m=11$ et donc $k = m + n = 50$. On prend seulement 50 termes de chaque série.

3. Erreur d'arrondie :

L'erreur d'arrondie (round-off error) est résultée de la multiplication d'une grande quantité

$\exp\left(\left[\frac{A_1}{2l_1t_1} + \frac{A_2}{2l_2t_2}\right] / 4l_1t_1l_2t_2\right)$ par des petites quantités. On remarque que cette erreur

dépend de 4 paramètres l_1 , l_2 , A_1 et A_2 , les valeurs A_1 et A_2 sont fixes quand on a donné l'erreur de discrétisation. Il reste donc à trouver les valeurs de l_1 et l_2 et on remarque que l'augmentation de ces valeurs conduit à un coût de temps d'exécution de l'algorithme. Dans [11], il a été proposé de prendre $l_1 = l_2 = 2$ dans le cas de double inversion pour obtenir 10 ou plus de chiffres d'exactitude.

III-3 : La densité du temps d'attente en régime transitoire :

Maintenant, on applique cet algorithme pour notre double transformée de Laplace-Stieltjes de la distribution du temps d'attente qui est donnée par la formule de Takacs :

$$F^{**}(r, s) = \frac{(r/\eta)e^{-\eta w_0} - e^{-r w_0}}{\lambda B^*(r) - \lambda + r - s} \quad \text{tel que } F^{**}(r, s) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-r w} e^{-s t} d_w F(w, t) dt .$$

On prend la file M/M/1 de taux d'arrivée λ et un taux de service μ . On suppose que la file est vide à l'instant $t = 0$ qui est équivalent à $w_0 = 0$. La formule de Takacs sera :

$$F^{**}(r, s) = \frac{(r/\eta) - 1}{\lambda B^*(r) - \lambda + r - s} .$$

Où : $B^*(r) = \frac{\mu}{r + \mu}$ est la transformée de Laplace de la densité du temps de service;

$$\eta = \frac{-(\mu - \lambda - s) + \sqrt{(\mu - \lambda - s)^2 + 4s\mu}}{2} : \text{La racine positive du dénominateur.}$$

L'exploitation de cet algorithme est comme le suivant :

On fixe la valeur de t et on fait varier le temps d'attente. Donc pour chaque instant t on obtient un graphe qui représente la densité du temps d'attente à cet instant.

Pour assurer que cet algorithme fonctionne bien, on l'applique pour la file M/M/1 qui est en régime stationnaire. Pour cela on prend $\rho=0.1$ tel que $\lambda=1$ et $\mu=10$ et on prend le temps $t=1000$. On obtient donc le graphe suivant qui représente la densité du temps d'attente.

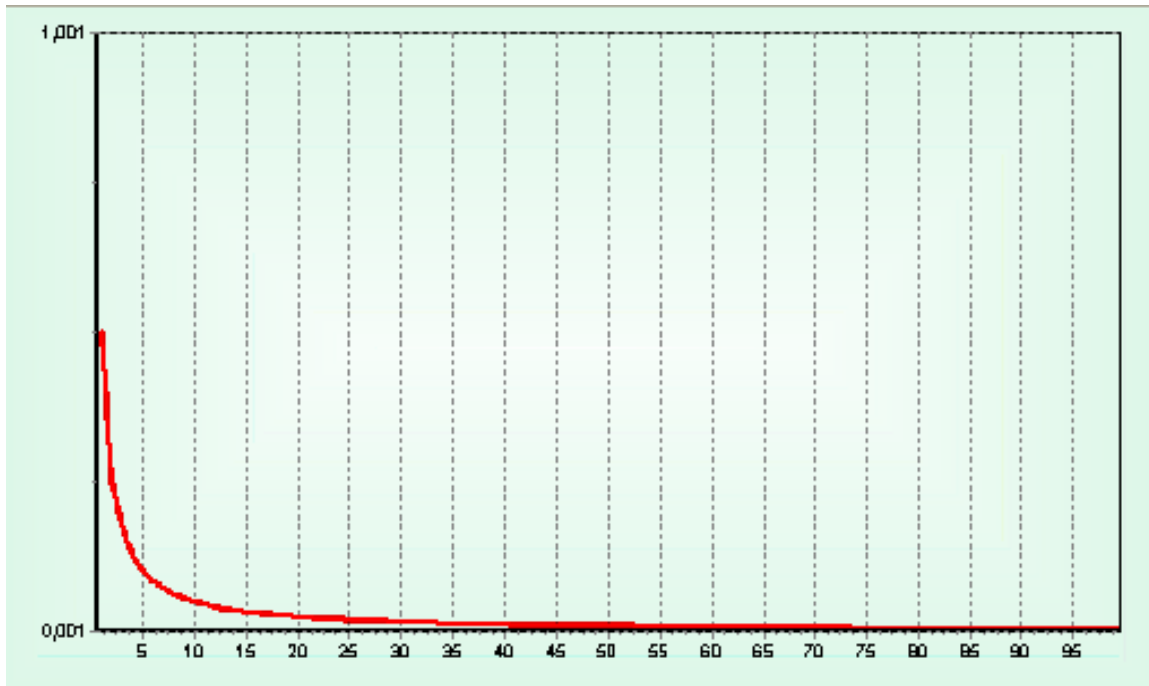


Figure III-1

Si on approche ce graphe par une fonction exponentielle de type $a \exp(-bx)$ et on calcule $p(N(U(t))=n)$ pour des n fixé en utilisant la formule du chapitre (II) qui est donnée

$$\text{par: } p(N(U(t))=n) = \int_0^{+\infty} [F_{\hat{s}_n}(u) - F_{\hat{s}_{n+1}}(u)] f_{U(t)}(u) du$$

ensuit on compare cette valeur par la valeur exacte qui est $\rho^n(1-\rho)$, on trouve donc que cette valeur est très proche de celle de la valeur exacte.

Maintenant, on applique cet algorithme sur le régime transitoire de la file M/M/1.

Dans la figure III-2, on a le graphe de la densité du temps d'attente à l'instant $t=10$ avec $\lambda=1$ et $\mu=10$

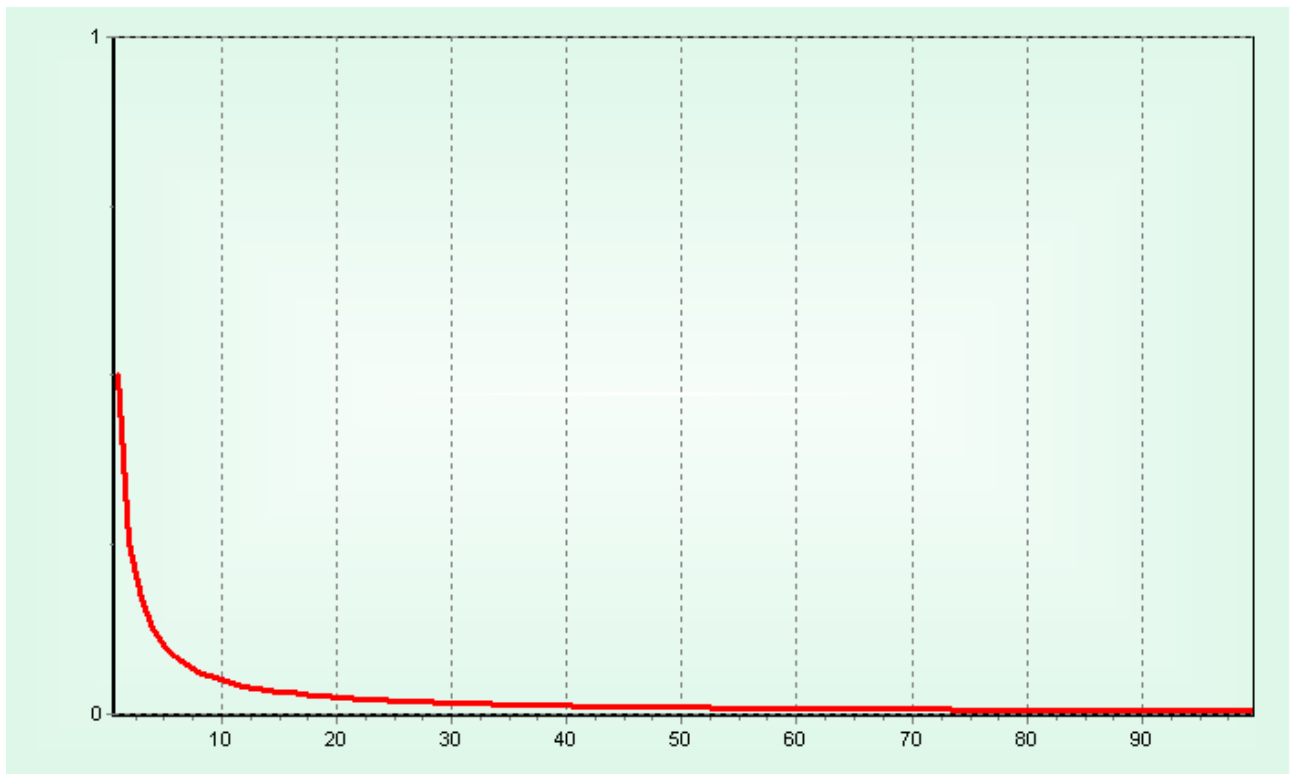


Figure III-2

La figure III-3 donne le graphe de la densité du temps d'attente à l'instant $t=1$ avec $\lambda=5$ et $\mu=10$

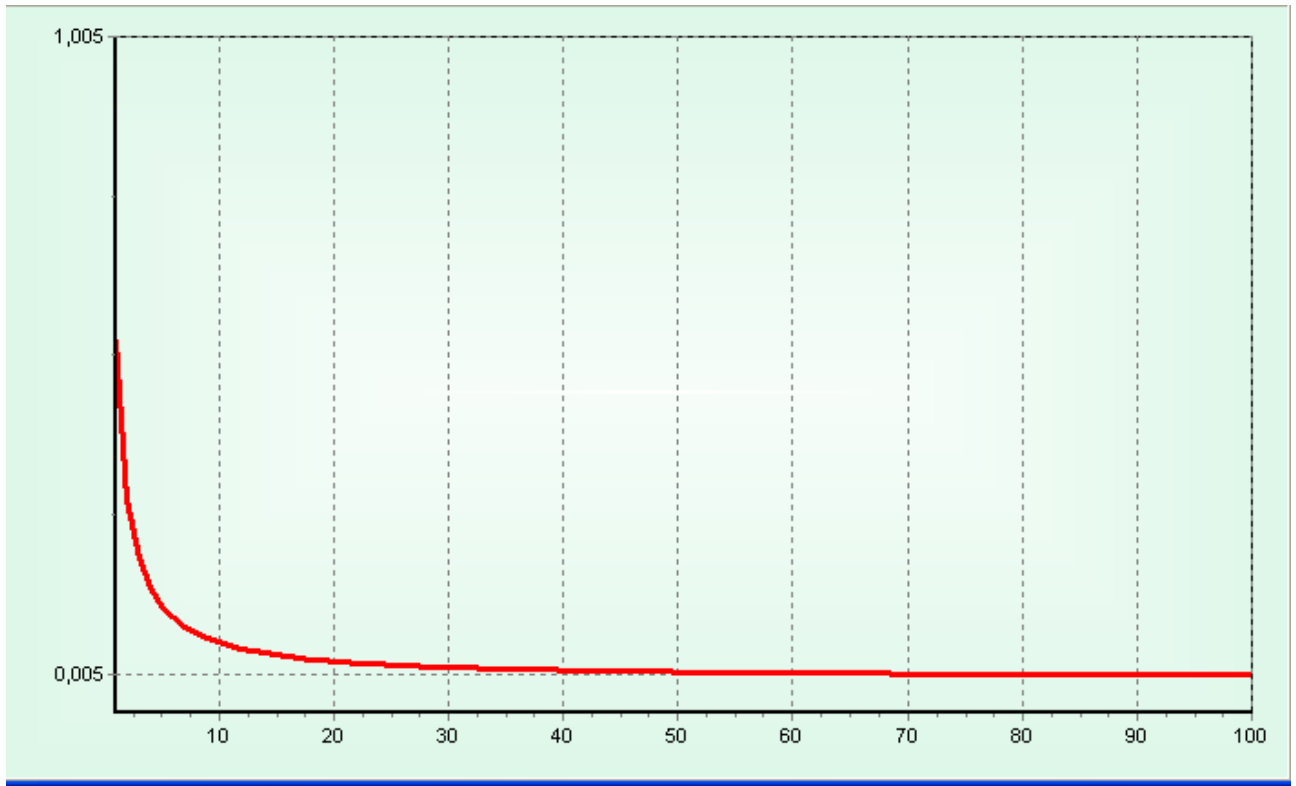


Figure III-3

Pour $t=10$, $\lambda=5$ et $\mu=10$ on obtient la figure III-4 suivante.

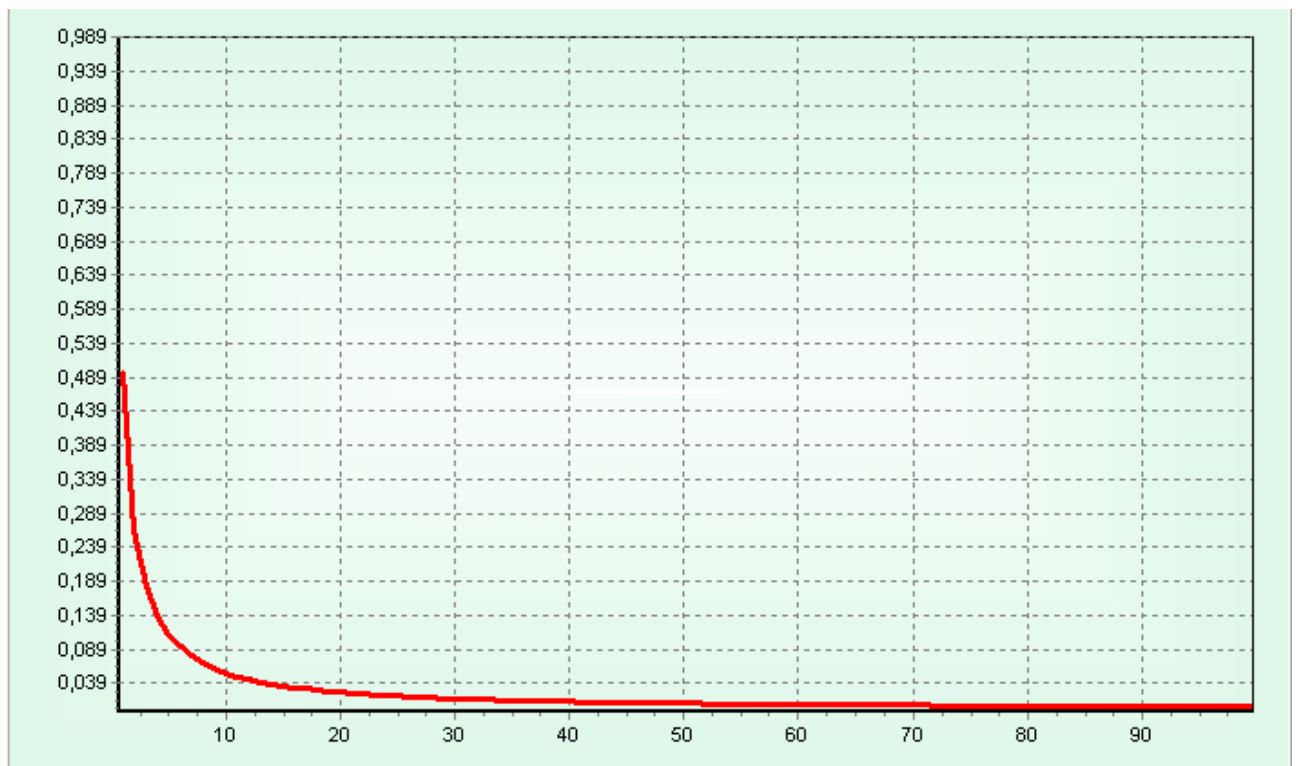


Figure III-4

La figure III-5 représente le graphe de la densité du temps d'attente en régime stationnaire où on prend $t=1000$, $\lambda=5$ et $\mu=10$.

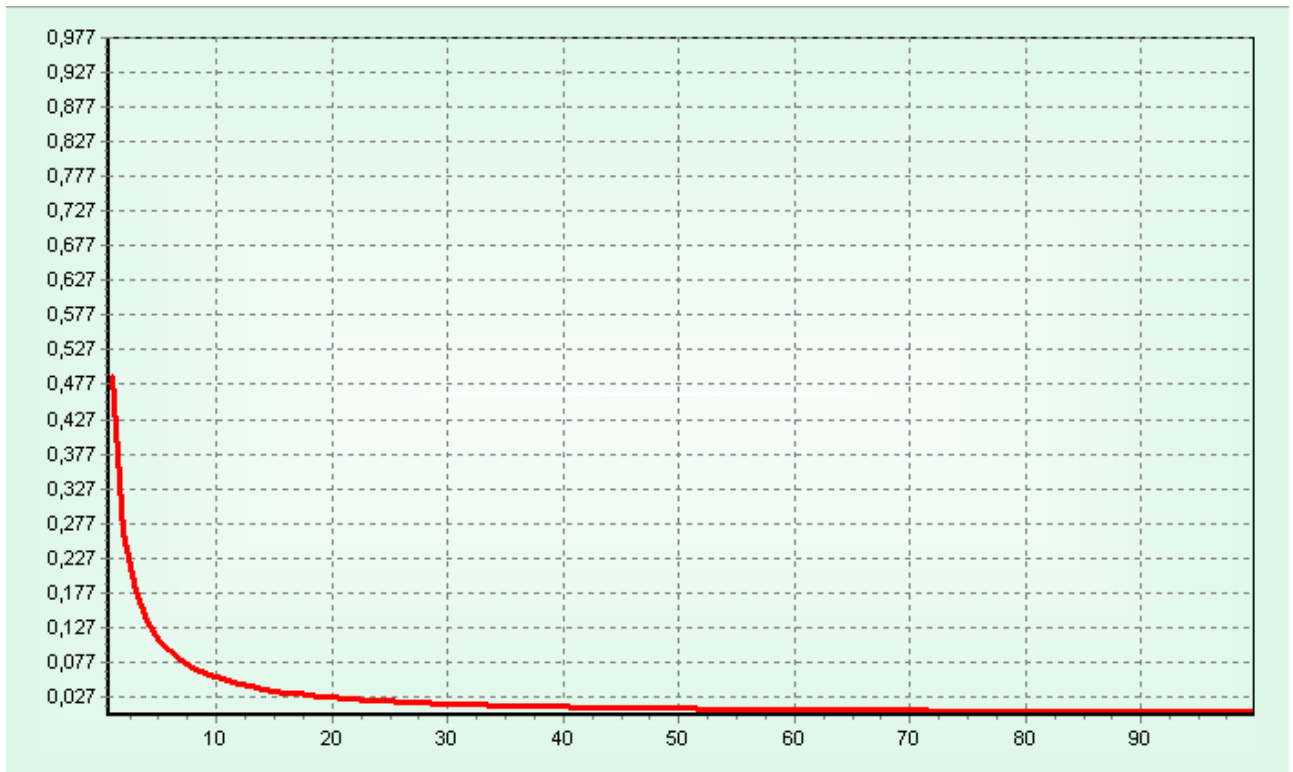


Figure III-5.

III-4 : Conclusion :

Lors de l'application de l'algorithme d'inversion sur la double transformée de Laplace de la densité du temps d'attente correspondant à la file M/M/1 en régime stationnaire, on a essayé d'approcher la fonction de ce graphe par une fonction exponentielle. Ensuite on calcule $P(N(U(t))=n)$ en utilisant la formule :

$$p(N(U(t))=n) = \int_0^{+\infty} [F_{\hat{s}_n}(u) - F_{\hat{s}_{n+1}}(u)] f_{U(t)}(u) du .$$

On a trouvé que cette valeur est très proche de celle de la probabilité exacte qui est donnée par : $p_n = \rho^n(1-\rho)$

CHAPITRE IV :

APPROXIMATION DE MOL

INTRODUCTION :

L'un des problèmes fondamentaux qui a mené au développement de la théorie des files d'attente est la modélisation probabiliste du nombre de lignes téléphonique actives. Tout d'abord, ce problème a été modélisé comme étant un système de type $M/M/s/0$ par Erlang [1], il a donné un résultat exact de la distribution stationnaire connue sous le nom de *la formule d'Erlang*.

IV-1-1 : Le système $M/M/s/0$:

Le système $M/M/s/0$ est un système d'attente appelé système d'Erlang avec refus, « *Erlang loss system* » où le client qui arrive au système trouvant les serveurs occupés, quitte automatiquement le système. Ce dernier contient s serveurs indépendants du temps de service exponentielle de taux μ , et un processus d'arrivée poissonien de taux λ .

Si on pose $Q_s(t)$ le processus d'état du système $M/M/s/0$ à l'instant t , sa probabilité de blocage est donnée par la formule suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(Q_s(t) = s) = \beta_s \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s}{s!} \bigg/ \sum_{j=0}^s \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j}{j!}. \text{ (Formule d'Erlang) [4]}$$

Remarques :

- Le temps d'attente d'un client dans ce système est le temps nécessaire pour compléter le service.
- Cette formule d'Erlang est aussi applicable sur le système $M/G/s/0$ [6] où la distribution du temps de service est générale, cette propriété d'insensibilité signifie que l'hypothèse du service exponentielle est superflue, ceci étend le domaine d'application de la formule d'Erlang.

IV-1-2 : Le système $M/G/s/0$:

Le système $M/G/s/0$ est un système d'Erlang avec refus, avec un processus d'arrivée poissonien homogène de taux λ et un temps de service de distribution générale. On a donc le résultat suivant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(Q_s(t) = k) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \bigg/ \sum_{j=0}^k \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}. \quad [6]$$

Le modèle d'Erlang avec refus a été l'objet de plusieurs applications dans la pratique, néanmoins son adaptation n'a pas été faite dans le cas d'un processus d'arrivée réel qui est non homogène c'est à dire : le taux d'arrivée varie en fonction du temps. Ceci conduit à utiliser le modèle $M_t/G/s/0$ qui est difficile à étudier. Pour cela, en 1943 PALM a étudié des méthodes pour approcher le système $M_t/G/s/0$ [15]. Il a remarqué que le modèle stationnaire avec un taux d'arrivée instantané donne une bonne approximation du $M_t/G/s/0$ si le taux d'arrivée change lentement, cette approche est appelée approximation de *PSA* (*pointwise stationary approximation*). Il y a d'autres approximations qui sont basées sur la substitution du taux d'arrivée d'un modèle d'Erlang stationnaire par le taux d'arrivée maximal : le taux d'arrivée où le système est dans un état d'activité maximale. D'après cette approche, on remarque que le taux d'arrivée est toujours supérieur au taux d'arrivée réel. Cette approximation est bonne si le nombre de serveurs actifs est constant et fini, sinon mauvaise dans le cas où le nombre de serveurs varie [16]. En 1958 Prékopa [17] a trouvé des solutions exactes pour la file $M_t/G/\infty$.

IV-1-3 : La file $M_t/G/\infty$:

La file $M_t/G/\infty$ est une file d'attente ayant une infinité de serveurs indépendants avec une distribution générale du temps de service, et un processus d'arrivée poissonien de taux $\lambda(t)$ dépendant du temps.

Si on pose $Q_\infty(t)$: la longueur de la file $M_t/G/\infty$ à l'instant t , $Q_\infty(t_0) = 0$ pour un certain t_0 , où $t_0 < t$, et $\lambda(s) = 0$ quelque soit $s \leq t_0$.

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N} \quad p(Q_\infty(t) = k) = \frac{m_\infty(t)^k}{k!} \exp(-m_\infty(t)).$$

$$\text{Où } m_{\infty}(t) = E(Q_{\infty}(t)) = E\left[\int_{t-s}^t \lambda(\tau) d\tau\right]$$

Donc $Q_{\infty}(t)$ a une distribution de Poisson.

Comme il existe des résultats exacts pour les systèmes M/G/s/0 et M_l/G/∞, en 1975 *Jagerman [18]* a développé une approximation de $p(Q_s(t) = s)$ du système M_l/G/s/0 appelée l'approximation de MOL (*the Modified Offered Load*). D'après son nom, on déduit que cette approximation est basée sur la modification de la charge du système, dont le principe est résumé de la façon suivante :

On a la probabilité du blocage de M/G/s/0 en régime stationnaire est donnée par :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p(Q_s(t) = s) &= \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \\ &= \frac{(\lambda/\mu)^s}{\sum_{j=0}^s \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}} \\ &= \frac{\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \exp(-(\lambda/\mu))}{\sum_{j=0}^s \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} \exp(-(\lambda/\mu))} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} p(Q_{\infty}(t) = s / Q_{\infty}(t) \leq s) \end{aligned}$$

En régime stationnaire, on trouve que $\lim_{t \rightarrow \infty} p(Q_s(t) = s) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(Q_{\infty}(t) = s / Q_{\infty}(t) \leq s)$, ces probabilités sont en fonction de $\frac{\lambda}{\mu}$. Pour obtenir la probabilité de blocage du système

M/G/s/0 en régime transitoire, on remplace $\frac{\lambda}{\mu}$ par le nombre moyen de clients de la file

M_l/G/∞ en régime transitoire qui est $m_{\infty}(t)$ et on obtient la formule d'Erlang en fonction de $m_{\infty}(t)$.

IV-2 : Définition : [19]

Soit $Q_s(t)$ la longueur aléatoire de la file $M_t/G/s/0$ à l'instant t . On définit l'approximation de MOL de $p(Q_s(t)=s)$ par :

$$p(Q_s(t)=s) \approx \beta_s(m_\infty(t)) = p(Q_\infty(t)=s / Q_\infty(t) \leq s).$$

Dans les travaux de *David et Massey et Whitt* [20], l'approximation de MOL a été utilisée pour étudier la sensibilité de la distribution du temps de service dans un modèle d'Erlang avec refus non stationnaire, cette approximation est aussi une motivation pour les travaux de *Eick et Massey* [21] dans la physique.

L'objet de cette partie est d'examiner l'efficacité de l'approximation de MOL et de déduire les conditions pour lesquelles cette approximation est plus proche de la solution exacte. Pour cela on va étudier quelques cas particuliers de $M_t/G/s/0$ qui sont très utilisables dans le domaine de télécommunication comme les systèmes $M_t/PH_t/s/0$ et $M_t/M_t/s/0$.

IV-2-1 : Le système $M_t/PH_t/s/0$:

Le système $M_t/PH_t/s/0$ est un système d'Erlang avec refus de s serveurs indépendants, Où chaque serveur a un type de phase de service de taux $(\mu_i(t))_{i=1, s}$ tel que ces taux peuvent être différents selon la phase du service, et un processus d'arrivée poissonien non homogène (dépend du temps).

Remarque :

La distribution du temps de service de phase est considérée générale à cause de sa densité dans l'espace de toutes les distributions. Cette hypothèse permet de construire un espace d'état fini sachant que le processus des arrivées est un processus markovien de temps continu.

Soit :

C : un ensemble fini de phases de service. (On suppose qu'il n'est pas variable avec le temps)

S_c : espace d'état du système $M_t/PH_t/s/0$.

Pour obtenir une description générale de ce système, on compte le nombre de clients dans chaque classe.

On a donc :

$$\mathbf{k} = \sum_{\alpha \in C} k_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$$

Où \mathbf{k} : vecteur de $|C|$ composantes qui représente l'état du système c'est-à-dire le nombre de clients dans le système;

$|C|$: nombre de phases;

k_{α} : nombre de serveurs actifs de phase α ;

\mathbf{e}_{α} : vecteur de base correspond à la phase α .

On appelle $S_c(s)$ l'espace d'état correspondant au système $M_t/PH_t/s/0$ défini par :

$$S_c(s) = \{ \mathbf{k} / \mathbf{k} \in S_c \text{ et } |\mathbf{k}| \leq s \}$$

Où $|\mathbf{k}| = \sum_{\alpha \in C} k_{\alpha}$: nombre de serveurs actifs dans le système.

Soit maintenant $\{Q_s(t) / t \geq 0\}$ un processus markovien représentant la longueur de la file $M_t/PH_t/s/0$ d'espace d'état $Sc(s)$.

Son générateur infinitésimal est construit par les paramètres suivants :

$\lambda_\alpha(t)$: taux d'arrivé externe du service de phase α à un instant t .

$\mu_\alpha(t)$: taux de service de phase α .

$P_{\alpha\beta}(t)$: probabilité de commencer le service β sachant que le service de phase α est juste terminé, ou la probabilité de transition du service α vers β .

$q_\alpha(t)$: Probabilité de quitter le système, sachant que le dernier service est α .

On représente le système $M_t/PH_t/s/0$ par la figure suivante :

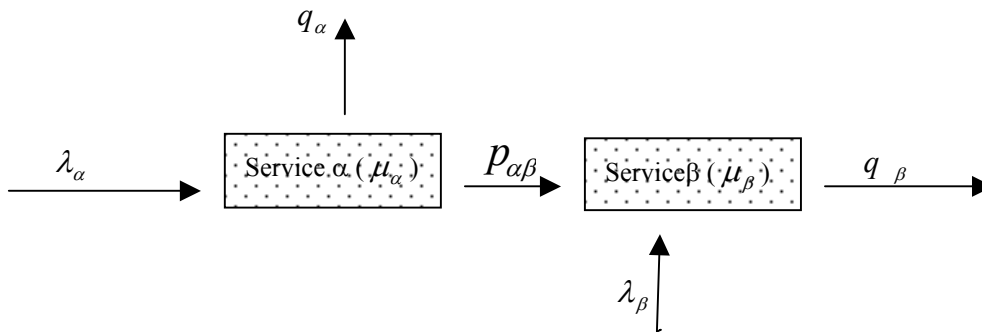


Figure : IV-1

Si on pose $p(\mathbf{k}, t) = p(Q_s(t) = \mathbf{k})$, alors pour toute $|\mathbf{k}| < s$, on a l'équation différentielle de Chapman Kolmogorov suivante :

$$\forall |\mathbf{k}| < s$$

$$p(\mathbf{k}, t + \Delta t) = \sum_{\alpha \in c} [(1 - (\lambda_\alpha(t) + \mu_\alpha(t)k_\alpha)\Delta t)p(\mathbf{k}, t) + \lambda_\alpha(t)\text{sgn}(k_\alpha)\Delta t p(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha, t) + (k_\alpha + 1)\mu_\alpha(t)q_\alpha(t)\Delta t p(\mathbf{k} + \mathbf{e}_\alpha, t) + \sum_{\beta \in c} \mu_\beta(t)(k_\beta + 1)p_{\beta\alpha}(t)\text{sgn}(k_\alpha)p(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta, t)\Delta t] .$$

On prend la limite de $\frac{p(\mathbf{k}, t + \Delta t) - p(\mathbf{k}, t)}{\Delta t}$ quand Δt tend vers 0, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(\mathbf{k}, t) = & \sum_{\alpha \in c} [\lambda_{\alpha}(t) \operatorname{sgn}(k_{\alpha}) p(\mathbf{k} - \mathbf{e}_{\alpha}, t) \\ & + \mu_{\alpha}(t) (k_{\alpha} + 1) q_{\alpha}(t) p(\mathbf{k} + \mathbf{e}_{\alpha}, t) \\ & + \sum_{\beta \in c} \mu_{\beta}(t) (k_{\beta} + 1) p_{\beta\alpha}(t) \operatorname{sgn}(k_{\alpha}) p(\mathbf{k} - \mathbf{e}_{\alpha} + \mathbf{e}_{\beta}, t) \\ & - (\lambda_{\alpha}(t) + \mu_{\alpha}(t) k_{\alpha}) p(\mathbf{k}, t)] \end{aligned}$$

$$\text{Où } \operatorname{sgn}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ 1 & \text{si } k > 0 \end{cases} .$$

Si $|\mathbf{k}| = s$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(\mathbf{k}, t) = & \sum_{\alpha \in c} [\lambda_{\alpha}(t) \operatorname{sgn}(k_{\alpha}) p(\mathbf{k} - \mathbf{e}_{\alpha}, t) \\ & + \sum_{\beta \in c} \mu_{\beta}(t) (k_{\beta} + 1) p_{\beta\alpha}(t) \operatorname{sgn}(k_{\alpha}) p(\mathbf{k} - \mathbf{e}_{\alpha} + \mathbf{e}_{\beta}, t) \\ & - \mu_{\alpha}(t) k_{\alpha} p(\mathbf{k}, t)] . \end{aligned}$$

Posons $L(S_c(s))$: espace vectoriel de fonction de IR dans $S_c(s)$. On peut écrire l'équation précédente sous forme d'opérateur comme suivant :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t) \mathbf{A}(t) \quad \dots \text{ (I)}$$

Où

$\mathbf{A}(t)$: générateur infinitésimal de $\mathbf{Q}_s(t)$ qui est un opérateur linéaire de taux d'arrivée et de taux de service de notre système dans $L(S_c(s))$;

$\mathbf{p}(t)$: vecteur de probabilité :

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in S_c(s)} p(\mathbf{Q}_s(t) = \mathbf{k}) \mathbf{e}_{\mathbf{k}} ;$$

$\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$: Vecteur de base unitaire de $L(S_c(s))$;

L'équation (I) est une équation différentielle ordinaire ayant une solution de la forme :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) \mathbf{E}_{\mathbf{A}}(t).$$

Où

$\mathbf{E}_A(t)$ est une fonction exponentielle dépendant du temps et de générateur infinitésimal $\{\mathbf{A}(\tau) / 0 \leq \tau \leq t\}$. Lorsque \mathbf{A} est une constante, la solution sera de la forme $\exp(t\mathbf{A})$ et en générale $\mathbf{E}_A(t)$ est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{E}_A(t) = \mathbf{E}_A(t) \mathbf{A}(t) \\ \mathbf{E}_A(0) = \mathbf{I} \end{cases}$$

Pour tout $\tau, 0 \leq \tau \leq t$ on définit aussi $\mathbf{E}_A(\tau, t)$ par :

$$\mathbf{E}_A(\tau, t) = \mathbf{E}_A(\tau)^{-1} \mathbf{E}_A(t).$$

L'existence et l'unicité de solution de cette équation sont données dans [22].

Pour donner une approximation de MOL de la distribution de $\mathbf{Q}_s(t)$ du système $M_t/PH_t/s/0$, on a besoin d'étudier la file $M_t/PH_t/\infty$

IV-2-2 : La file $M_t/PH_t/\infty$:

La file $M_t/PH_t/\infty$ est une file d'attente d'un processus d'arrivée markovien, et une infinité de serveurs, chaque serveur a une phase de service.

Soit $\{\mathbf{Q}_\infty(t) / t \geq 0\}$ le processus de la longueur de la file $M_t/PH_t/\infty$, sa probabilité marginale est donnée par : $q(\mathbf{k}, t) = p(\mathbf{Q}_\infty(t) = \mathbf{k})$.

$\forall \mathbf{k} \in S_c$, l'équation différentielle de *Chapman Kolmogorov* est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q(\mathbf{k}, t) = & \sum_{\alpha \in c} [\lambda_\alpha(t) \text{sgn}(k_\alpha) q(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha, t) \\ & + \mu_\alpha(t) (k_\alpha + 1) q_\alpha(t) q(\mathbf{k} + \mathbf{e}_\alpha, t) \\ & + \sum_{\beta \in c} \mu_\beta(t) (k_\beta + 1) p_{\beta\alpha}(t) \text{sgn}(k_\alpha) q(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta, t) \\ & - (\lambda_\alpha(t) + \mu_\alpha(t) k_\alpha) q(\mathbf{k}, t)] \end{aligned}$$

Définition :

Soit \mathbf{x} un élément dans l'espace vectoriel des fonctions réelles à valeurs dans C ; \mathbf{k} un état de S_c , on définit les opérateurs suivantes :

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \prod_{\alpha \in c} x_{\alpha}^{k_{\alpha}} \quad , \quad \mathbf{k}! = \prod_{\alpha \in c} k_{\alpha} ! \quad , \quad |\mathbf{x}| = \sum_{\alpha \in c} |x_{\alpha}| \quad ,$$

Où $x_{\alpha} = \mathbf{x}(\alpha)$ et $\mathbf{x} = \sum_{\alpha \in c} x_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$.

Avec ces notations on a :

$$\sum_{|\mathbf{k}|=s} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} = \frac{|\mathbf{x}|^s}{s!} .$$

D'après le théorème 8-2 de [23], il a été trouvé la solution exacte de la file $M_t/PH_t/\infty$ tel que

$$q(\mathbf{k}, t) = \frac{e^{-m_{\infty}(t)} m_{\infty}(t)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \dots \quad (\mathbf{a})$$

Avec
$$q(\mathbf{k}, 0) = \frac{e^{-m_{\infty}(0)} m_{\infty}(0)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} .$$

Où
$$\mathbf{m}_{\infty}(t) = \sum_{\alpha \in c} m_{\infty}^{\alpha}(t) \mathbf{e}_{\alpha} \quad \text{et} \quad m_{\infty}(t) = |\mathbf{m}_{\infty}(t)| = \sum_{\alpha \in c} m_{\infty}^{\alpha}(t) .$$

$m_{\infty}^{\alpha}(t)$ est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt} m_{\infty}^{\alpha}(t) = \lambda_{\alpha}(t) + \sum_{\beta \in c} \mu_{\beta}(t) m_{\infty}^{\beta}(t) p_{\beta\alpha}(t) - \mu_{\alpha}(t) m_{\infty}^{\alpha}(t), \quad \forall \alpha \in c. \quad (\mathbf{b})$$

IV-2-3 : Application de l'approximation de MOL :

On définit l'approximation de MOL de $p(\mathbf{k}, t)$ par $p^*(\mathbf{k}, t)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Q}_s(t) = \mathbf{k}) &\approx p^*(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{(m_\infty(t))^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \bigg/ \sum_{j=0}^s \frac{(m_\infty(t))^j}{j!} \\ &= p(\mathbf{Q}_\infty(t) = \mathbf{k} / |\mathbf{Q}_\infty(t)| \leq s). \end{aligned}$$

Où les composantes du vecteur $m_\infty(t)$ vérifient l'équation (b)

Maintenant on va faire une comparaison entre la distribution exacte et l'approximation de MOL.

IV-2-3-1 : Théorème : [19]

Soit $\{\mathbf{Q}_s(t) / t \geq 0\}$ le processus markovien de la longueur de la file $M_t/PH_t/s/0$ avec un générateur infinitésimale $\{\mathbf{A}(t) / t \geq 0\}$. $\mathbf{P}(t)$ le vecteur de probabilité de $\mathbf{Q}_s(t)$; $\mathbf{p}^*(t)$ le vecteur de probabilité associée à l'approximation de MOL avec la probabilité initiale

$$\mathbf{p}^*(0) = \mathbf{p}^*(0) = \frac{e^{-m_\infty(0)} (m_\infty(0))^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!}$$

Alors :

$$\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t) = \sum_{|\mathbf{k}|=s_0}^t \int p^*(\mathbf{k}, \tau) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_{\mathbf{k}}) \mathbf{E}_A(\tau, t) dm_\infty(\tau). \quad (\text{IV-2-1})$$

où

$$dm_\infty(\tau) = \left(\sum_{\alpha \in c} (\lambda_\alpha(\tau) - \mu_\alpha(\tau) m_\infty^\alpha(\tau) q_\alpha(\tau)) \right) d\tau.$$

Preuve :

Pour démontrer ce théorème on introduit le lemme suivant.

Lemme :

Si $\mathbf{x} = \sum_{\alpha \in c} x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ et si on définit $\pi(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ par $\pi(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \bigg/ \sum_{j=0}^s \frac{|\mathbf{x}|^j}{j!}$ donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \pi(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \pi(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x}) \text{sgn}(k_\alpha) - \pi(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \left(1 - \sum_{|j|=s} \pi(j, \mathbf{x}) \right)$$

et $\pi(\mathbf{k}, \mathbf{x}) x_\alpha = \pi(\mathbf{k} + \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x}) (k_\alpha + 1)$

On remarque que $p^*(\mathbf{k}, t) = \pi(\mathbf{k}, \mathbf{m}_\infty(t))$

$$\beta_s(m_\infty(t)) = \sum_{|\mathbf{k}|=s} \pi(\mathbf{k}, \mathbf{m}_\infty(t)).$$

D'après le lemme on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p^*(\mathbf{k}, t) &= \sum_{\alpha \in c} \left[p^*(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha, t) \operatorname{sgn}(k_\alpha) - p^*(\mathbf{k}, t) (1 - \beta_s(m_\infty(t))) \right] \frac{d}{dt} m_\infty^\alpha(t) \\ &= \sum_{\alpha \in c} \left[p^*(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha, t) \operatorname{sgn}(k_\alpha) \frac{d}{dt} m_\infty^\alpha(t) - p^*(\mathbf{k}, t) (1 - \beta_s(m_\infty(t))) \frac{d}{dt} m_\infty^\alpha(t) \right] \\ &= \sum_{\alpha \in c} \left[p^*(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha, t) \operatorname{sgn}(k_\alpha) \left(\lambda_\alpha(t) + \sum_{\beta \in c} \mu_\beta(t) p_{\beta\alpha}(t) m_\infty^\beta(t) - \mu_\alpha(t) m_\infty^\alpha(t) \right) \right] \\ &\quad - p^*(\mathbf{k}, t) \left(\sum_{\alpha \in c} \lambda_\alpha(t) - \mu_\alpha(t) q_\alpha(t) m_\infty^\alpha(t) \right) + p^*(\mathbf{k}, t) \beta_s(m_\infty(t)) \frac{d}{dt} m_\infty(t). \\ &= \sum_{\alpha \in c} \left[\lambda_\alpha(t) \operatorname{sgn}(k_\alpha) p^*(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha, t) + \mu_\alpha(t) (k_\alpha + 1) q_\alpha(t) p^*(\mathbf{k} + \mathbf{e}_\alpha, t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta \in c} \mu_\beta(t) (k_\beta + 1) p_{\beta\alpha}(t) \operatorname{sgn}(k_\alpha) p^*(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta, t) \right. \\ &\quad \left. - \mu_\alpha(t) k_\alpha p^*(\mathbf{k}, t) - \lambda_\alpha(t) p^*(\mathbf{k}, t) \right] \\ &\quad + p^*(\mathbf{k}, t) \beta_s(m_\infty(t)) \frac{d}{dt} m_\infty(t). \\ &= \sum_{\alpha \in c} \left[\lambda_\alpha(t) \operatorname{sgn}(k_\alpha) p^*(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha, t) + \mu_\alpha(t) (k_\alpha + 1) p^*(\mathbf{k} + \mathbf{e}_\alpha, t) q_\alpha(t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta \in c} \mu_\beta(t) (k_\beta + 1) p_{\beta\alpha}(t) \operatorname{sgn}(k_\alpha) p^*(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta, t) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda_\alpha(t) + \mu_\alpha(t) k_\alpha) p^*(\mathbf{k}, t) \right] \\ &\quad + p^*(\mathbf{k}, t) \beta_s(m_\infty(t)) \frac{d}{dt} m_\infty(t). \\ &= \sum_{\alpha \in c} \left[\lambda_\alpha(t) \operatorname{sgn}(k_\alpha) p^*(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha, t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta \in c} \mu_\beta(t) (k_\beta + 1) p_{\beta\alpha}(t) \operatorname{sgn}(k_\alpha) p^*(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta, t) - \mu_\alpha(t) k_\alpha p^*(\mathbf{k}, t) \right] \\ &\quad - p^*(\mathbf{k}, t) (1 - \beta_s(m_\infty(t))) \frac{d}{dt} m_\infty(t). \end{aligned}$$

Ce résultat est équivalent à

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^*(t) = \mathbf{p}^*(t) \mathbf{A}(t) + \frac{d}{dt} m_\infty(t) \sum_{|\mathbf{k}|=s} p^*(\mathbf{k}, t) (\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{e}_k).$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire non homogène est la suivante :

$$\mathbf{p}^*(t) = \mathbf{p}^*(0) \mathbf{E}_A(t) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} m_\infty(\tau) \sum_{|\mathbf{k}|=s} p^*(\mathbf{k}, \tau) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_k) \mathbf{E}_A(\tau, t) d\tau.$$

On a aussi $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) \mathbf{E}_A(t)$.

Donc :

$$\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t) = \sum_{|\mathbf{k}|=s} \int_0^t p^*(\mathbf{k}, \tau) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_k) \mathbf{E}_A(\tau, t) dm_\infty(\tau) \blacksquare$$

Maintenant on va examiner la quantité $\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t)$ et trouver les conditions pour lesquelles l'approximation de MOL est proche de la distribution exacte de $\mathcal{Q}_s(t)$.

On remarque d'abord que $\forall \tau \in [0, t]$, $|\mathbf{E}_A(\tau, t)| \leq 1$

Cela implique que $|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t)| \leq \sum_{|\mathbf{k}|=s} \int_0^t p^*(\mathbf{k}, \tau) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_k) |dm_\infty|(\tau)$

et la mesure $|dm_\infty(\tau)|$ est définie par :

$$|dm_\infty(\tau)| = \left| \frac{dm_\infty}{d\tau}(\tau) \right| d\tau$$

Et $|\mathbf{x}|$: la norme L_1 , $|\mathbf{x}| = \sum_{\alpha \in c} x_\alpha$

IV-2-3-1-1 Corollaire :

D'après le théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| &\leq 2 \sum_{|\mathbf{k}|=s} \int_0^t p^*(\mathbf{k}, \tau) (1 - p^*(\mathbf{k}, \tau)) |dm_\infty|(\tau) \\ &\leq 2 \int_0^t \beta_s(m_\infty(\tau)) \left(1 - \frac{\beta_s(m_\infty(\tau))}{\binom{s+|c|-1}{s}} \right) |dm_\infty|(\tau) \\ &\leq 2 \int_0^t \beta_s(m_\infty(\tau)) |dm_\infty|(\tau) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}\beta_s(m_\infty(t)) &= \sum_{|\mathbf{k}|=s} p(\mathbf{Q}_\infty(t) = \mathbf{k} / |\mathbf{Q}_\infty(t)| \leq s) \\ &= \sum_{|\mathbf{k}|=s} p^*(\mathbf{k}, t).\end{aligned}$$

Preuve :

D'après le théorème (IV-2-3-1) on a :

$$\mathbf{i): } \mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t) = \sum_{|\mathbf{k}|=s} \int_0^t p^*(\mathbf{k}, \tau) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_\mathbf{k}) \mathbf{E}_A(\tau, t) dm_\infty(\tau).$$

Et on a aussi $|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{e}_s| = 2(1 - p^*(\mathbf{k}, t))$ et $|\mathbf{E}_A(\tau, t)| \leq 1 \quad \forall \tau \in [0, t]$

Donc

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \leq 2 \sum_{|\mathbf{k}|=s} \int_0^t p^*(\mathbf{k}, \tau) (1 - p^*(\mathbf{k}, \tau)) |dm_\infty|(\tau)$$

ii): pour montrer la deuxième inégalité, on remarque que la fonction $p^*(\mathbf{k}, t)(1 - p^*(\mathbf{k}, t))$ est une fonction concave et d'après l'inégalité de *Jensen* on trouve que :

$$\begin{aligned}\sum_{|\mathbf{k}|=s} \int_0^t p^*(\mathbf{k}, \tau) (1 - p^*(\mathbf{k}, \tau)) |dm_\infty|(\tau) &\leq \int_0^t \sum_{|\mathbf{k}|=s} p^*(\mathbf{k}, \tau) \left(1 - \sum_{|\mathbf{k}|=s} p^*(\mathbf{k}, \tau) \right) |dm_\infty|(\tau) \\ \Leftrightarrow \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| &\leq 2 \int_0^t \beta_s(m_\infty(\tau)) (1 - \beta_s(m_\infty(\tau))) |dm_\infty|(\tau).\end{aligned}$$

On a aussi le nombre d'états possibles de la file égale à

$$C_{s+|c|-1}^s$$

$$\text{Donc} \quad \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \leq 2 \int_0^t \beta_s(m_\infty(\tau)) \left(1 - \frac{\beta_s(m_\infty(\tau))}{C_{s+|c|-1}^s} \right) |dm_\infty|(\tau)$$

Maintenant, on donne quelques résultats de cette approximation :

1) : Pour le système plus simple et qui est $M_t/M_t/s/0$, $|c|=1$ on trouve :

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \leq 2 \int_0^t \beta_s(m_\infty(\tau)) (1 - \beta_s(m_\infty(\tau))) |dm_\infty|(\tau)$$

Le système $M_t/M_t/s/0$ sera étudié en détail dans la prochaine section.

2) : Si $|c| \geq 2$, on a donc le système $M_t/G_t/s/0$ le plus générale, dans ce cas on trouve :

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \leq 2 \int_0^t \beta_s(m_\infty(\tau)) |dm_\infty(\tau)|$$

On a deux cas :

2-i) : Si $m_\infty(t)$ est une fonction bornée

$$\text{Alors } \lim_{s \rightarrow \infty} \beta_s(m_\infty(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

Donc l'approximation de Mol est asymptotiquement proche à la distribution exacte de $Q_s(t)$

2-ii) : Si $\mu(t)$ est constant, et $\lambda(t)$ varie lentement sur $[0, t]$

$$\text{alors } \frac{dm_\infty}{dt} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \leq 2 \int_0^t \beta_s(m_\infty(\tau)) \left| \frac{dm_\infty}{d\tau} \right| d\tau$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \rightarrow 0$$

Dans ce cas $\mathbf{p}^*(t)$ est aussi proche de $\mathbf{p}(t)$, cela implique que l'approximation de Mol est aussi bonne pour le système $M_t/G_t/s/0$ lorsque $\lambda(t)$ varie lentement.

IV-3 : Le système $M_t/M_t/s/0$:

Le système $M_t/M_t/s/0$ est un cas particulier du système $M_t/PH_t/s/0$ lorsque $|c|=1$ Avec l'espace d'état $S_c(s) = \{0, 1, \dots, s\}$. L'égalité (III-2-1) sera la suivante :

$$\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t) = \int_0^t \beta(m_\infty(\tau)) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_s) \mathbf{E}_A(\tau, t) dm_\infty(\tau).$$

Par la suite, on va donner une comparaison stochastique entre la distribution exacte et son approximation de MOL, pour cela en introduisant la définition suivante.

Définition : [24]

On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F est stochastiquement inférieure (ou bien inférieur en distribution) à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , et on note $F \leq_{st} G$ lorsque $F(x) \leq G(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

On écrit aussi : $X \leq_{st} Y$ (st est aussi noté par d).

Dans les cas où X et Y sont des variables aléatoires discret prenant des valeurs dans Z (l'ensemble des entiers relatifs), et en notant par :

$$p_i^{(1)} = \{X = i\} \text{ Et } p_i^{(2)} = \{Y = i\} \text{ pour } i \in Z$$

$$\text{Alors : } X \leq_{st} Y \text{ ssi } \sum_{j=-\infty}^i p_j^{(1)} \geq_{st} \sum_{j=-\infty}^i p_j^{(2)} \quad i \in Z.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=i}^{+\infty} p_j^{(1)} \leq \sum_{j=i}^{+\infty} p_j^{(2)} \quad i \in Z.$$

Proposition:

Soit $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ deux vecteurs de probabilité, on dit que \mathbf{p}_1 est dominée par \mathbf{p}_2 et on écrit :

$$\mathbf{p}_1 \leq_{st} \mathbf{p}_2 \text{ si } \forall k = 0, 1, \dots, s \quad \sum_{j=k}^s p_1(j) \leq_{st} \sum_{j=k}^s p_2(j).$$

$$\text{En terme matriciel : } \mathbf{p}_1 \leq_{st} \mathbf{p}_2 \Leftrightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{K} \leq_{st} \mathbf{p}_2 \mathbf{K} \quad \forall \mathbf{K} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}$$

Où \mathbf{I} : la matrice identique;

\mathbf{L} : la matrice triangulaire inférieure;

$$\text{Et } \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

IV-3-1 : Théorème : [19]

Pour le système $M_t/M_t/s /0$, si $m_\infty(0) \leq \frac{\lambda(0)}{\mu(0)}$ et $\frac{\lambda}{\mu}$ une fonction croissante sur $[0, t]$, alors

l'approximation de MOL est dominée par la distribution exacte de \mathcal{Q}_s :

$$\mathbf{p}^*(\tau) \leq_{st} \mathbf{p}(\tau), \quad \forall 0 \leq \tau \leq t$$

Lemme :

Si $m_\infty(0) \leq \frac{\lambda(0)}{\mu(0)}$ et $\frac{\lambda}{\mu}$ une fonction continue et croissante sur $[0, t]$, donc m_∞ est une fonction croissante sur $[0, t]$.

Preuve :

On a $|c|=1 \Rightarrow \frac{dm_\infty}{dt}(t) = \lambda(t) - \mu(t)m_\infty(t)$

Cette équation est une équation différentielle ordinaire non homogène de solution suivante :

$$m_\infty(t) = m_\infty(0) \exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \lambda(\tau) \exp\left(-\int_\tau^t \mu(\nu) d\nu\right) d\tau\right)$$

Soit $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ une fonction continue et croissante sur $[0, t]$; on a :

$$\frac{1}{\mu(t)} \frac{d}{dt} m_\infty(t) = (\rho(0) - m_\infty(0)) \exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau\right) + \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \mu(\nu) d\nu\right) d\rho(\tau)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\mu(t)} \frac{d}{dt} m_\infty(t) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{dm_\infty(t)}{dt} \geq 0$$

Alors la fonction $m_\infty(t)$ est une fonction croissante.

Preuve du théorème :

Pour un système $M_t/M_t/s /0$, on a :

$$\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t) = \int_0^t \mathcal{L}_s(m_\infty(\tau)) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_s) \mathbf{E}_A(\tau, t) dm_\infty(\tau). \quad (1)$$

Où :

\mathbf{e}_s : Vecteur de base correspondant à l'état s , et qui représente la probabilité maximale.

Donc $\mathbf{p}^*(t) \leq_{st} \mathbf{e}_s$;

$A(t)$: le générateur infinitésimal du processus de naissance et de mort qui est stochastiquement monotone.

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^*(t) \mathbf{E}_A(\tau, t) &\leq_{st} \mathbf{e}_s \mathbf{E}_A(\tau, t) \\ \Leftrightarrow (\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{e}_s) \mathbf{E}_A(\tau, t) &\leq 0 \end{aligned} \quad (2).$$

Et d'après le lemme précédent on a trouvé que

$$dm_\infty \geq 0 \quad (3)$$

en substituant (2) et (3) en (1), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t) &\leq_{st} 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{p}^*(\tau) &\leq_{st} \mathbf{p}(\tau), \quad \forall \tau \in [0, t]. \end{aligned}$$

Pour donner une meilleure majoration d'erreur, on focalise notre étude sur la norme L_1 de la fonction de distribution où :

Pour tous vecteur \mathbf{x} dans $\{0, 1, \dots, s\}$, on définit :

$$|\mathbf{x}|_{\mathbf{K}} = |\mathbf{x}\mathbf{K}|, \text{ Où } |\cdot| \text{ est La norme } L_1.$$

IV-3-2 : Théorème : [19]

Soit $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^*(0)$, pour tout $t \geq 0$ on a :

$$|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t)|_{\mathbf{K}} \leq \int_0^t \mathcal{B}_s(m_\infty(\tau))(s - m_\infty(\tau)(1 - \mathcal{B}_s(m_\infty(\tau)))) \times \exp\left(-\int_\tau^t \mu(r) dr\right) dm_\infty(\tau).$$

La preuve est donnée dans [19].

IV-3-2-1 : Corollaire :

D'après le théorème précédent, si λ est une fonction bornée sur $[0, t]$ et μ est une fonction constante

Alors :

$$\sup_{t \geq 0} |\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t)|_{\mathbf{K}} \leq \frac{s}{\mu} \max(2|\lambda|_\infty, |\lambda|_\infty + \mu m_\infty(0)) \mathcal{B}_s\left(\max\left(\frac{|\lambda|_\infty}{\mu}, m_\infty(0)\right)\right)$$

si λ est différentiable et sa dérivée λ' bornée sur $[0, \infty[$

$$\text{Alors : } \sup_{t \geq 0} |\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t)|_{\mathbf{K}} \leq \frac{s}{\mu} \max\left(|\lambda(0) - \mu m_\infty(0)|, \frac{|\lambda'|_\infty}{\mu}\right) \times \mathcal{B}_s\left(\max\left(\frac{|\lambda|_\infty}{\mu}, m_\infty(0)\right)\right)$$

Preuve :

Pour le système $M_t/M_t/s/0$, on a $|c| = 1$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_\infty(t) &= \lambda(t) - \mu(t)m_\infty(t) \dots \text{(a)} \\ \Leftrightarrow m_\infty(t) &= m_\infty(0) \exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau\right) + \int_0^t \lambda(\tau) \exp\left(-\int_\tau^t \mu(\vartheta) d\vartheta\right) d\tau \quad \text{(a)} \end{aligned}$$

μ est constant donc :

$$\begin{aligned} m_\infty(t) &= m_\infty(0)e^{-\mu t} + \int_0^t \lambda(t-\tau)e^{-\mu\tau} d\tau \\ &= \int_t^\infty \mu m_\infty(0)e^{-\mu\tau} d\tau + \int_0^t \lambda(t-\tau)e^{-\mu\tau} d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \max(|\lambda|_\infty, \mu m_\infty(0)) e^{-\mu\tau} d\tau \\ &\leq \max\left(\frac{|\lambda|_\infty}{\mu}, m_\infty(0)\right) \end{aligned}$$

On a aussi, si λ est une fonction bornée

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} m_\infty \right|_\infty &\leq |\lambda|_\infty + \mu |m_\infty(t)|_\infty \\ &\leq |\lambda|_\infty + \max(|\lambda|_\infty, \mu m_\infty(0)) \\ &\leq \max(2|\lambda|_\infty, |\lambda|_\infty + \mu m_\infty(0)) \end{aligned}$$

On applique ces résultats sur le théorème précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t) &\leq \int_0^t \beta_s(m_\infty(\tau))(s - m_\infty(\tau)(1 - \beta_s(m_\infty(\tau)))) \exp\left(-\int_\tau^t \mu(r) dr\right) dm_\infty(\tau) \\ \Leftrightarrow \sup_{t \geq 0} |\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t)| &\leq \int_0^t s \beta_s(m_\infty(\tau)) \exp\left(-\int_\tau^t \mu(r) dr\right) |dm_\infty(\tau)| \\ &\leq \int_0^t s \beta_s\left(\max\left(\frac{|\lambda|_\infty}{\mu}, m_\infty(0)\right)\right) \exp\left(-\mu \int_\tau^t dr\right) |dm_\infty(\tau)| \\ &\leq s \beta_s\left(\max\left(\frac{|\lambda|_\infty}{\mu}, m_\infty(0)\right)\right) \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} |dm_\infty(\tau)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq s\beta_s \left(\max \left(\frac{|\lambda|_\infty}{\mu}, m_\infty(0) \right) \right) \max(2|\lambda|_\infty, |\lambda|_\infty + \mu m_\infty(0)) \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} d\tau \\ &\leq \frac{s}{\mu} \max(2|\lambda|_\infty, |\lambda|_\infty + \mu m_\infty(0)) \beta_s \left(\max \left(\frac{|\lambda|_\infty}{\mu}, m_\infty(0) \right) \right) \end{aligned}$$

Lorsque λ' existe et bornée, on obtient aussi

$$(a) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu(t)} \frac{dm_\infty}{dt} = (\rho(0) - m_\infty(0)) \exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau\right) + \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \mu(\vartheta) d\vartheta\right) d\rho(\tau)$$

Où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ continue et a variation bornée

Donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{dm_\infty(t)}{dt} \right|_\infty &= \left| (\lambda(0) - \mu m_\infty(0)) e^{-\mu t} + \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \lambda'(t-\tau) d\tau \right|_\infty \\ &\leq |\lambda(0) - \mu m_\infty(0)|_\infty e^{-\mu t} + \frac{|\lambda'|_\infty}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \\ &\leq \max \left(|\lambda(0)|_\infty - \mu m_\infty(0), \frac{|\lambda'|_\infty}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{t \geq 0} |\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}(t)|_{\mathbf{K}} \leq \frac{s}{\mu} \max \left(|\lambda(0)| - \mu m_\infty(0), \frac{|\lambda'|_\infty}{\mu} \right) \beta_s \left(\max \left(\frac{|\lambda|_\infty}{\mu}, m_\infty(0) \right) \right)$$

IV-4 : le système $M/PH/s/0$ avec deux phases de services :

Supposons qu'on ait une file d'attente de type d'Erlang avec refus de s serveurs décomposée sur deux groupes, l'un de phase α et l'autre de phase β avec des taux de service μ_α et μ_β (respectivement) où $\mu_\alpha \neq \mu_\beta$, l'état de ce système est donné par un vecteur $\mathbf{k} = (k_\alpha, k_\beta)$ où k_α, k_β est le nombre de clients dans le service α, β (respectivement) et $|\mathbf{k}| = k_\alpha + k_\beta$ avec $|\mathbf{k}| \leq s$.

Pour donner des résultats concrets de l'efficacité de l'approximation de MOL, on va étudier l'erreur entre la distribution exacte et son approximation de MOL.

On a d'après le corollaire (IV-2-3-1) :

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \leq 2 \int_0^t \beta_s(m_\infty(\tau)) |dm_\infty(\tau)|.$$

Où
$$|dm_\infty(\tau)| = \left| \frac{dm_\infty(\tau)}{d\tau} \right| d\tau.$$

On commence par $m_\infty^\alpha(t)$ et $m_\infty^\beta(t)$:

On a :

$$\frac{dm_\infty^\alpha(t)}{dt} = \lambda_\alpha(t) + \mu_\beta(t)m_\infty^\beta(t)p_{\beta\alpha}(t) - \mu_\alpha(t)m_\infty^\alpha(t).$$

La solution de cette équation différentielle non homogène est la suivante :

$$m_\infty^\alpha(t) = m_\infty^\alpha(0)e^{-\int_0^t \mu_\alpha(\tau) d\tau} + \int_0^t (\lambda_\alpha(\tau) + \mu_\beta(\tau)m_\infty^\beta(\tau)p_{\beta\alpha}(\tau)) e^{-\int_\tau^t \mu_\alpha(r) dr} d\tau \dots (I).$$

Sous la condition suivante :

$$\mu_\beta(t)m_\infty^\beta(t)p_{\beta\alpha}(t) \leq \lambda_\beta(t). \quad (II)$$

On remplace (II) dans (I) on obtient :

$$m_\infty^\alpha(t) \leq m_\infty^\alpha(0)e^{-\int_0^t \mu_\alpha(\tau) d\tau} + \int_0^t (\lambda_\alpha(\tau) + \lambda_\beta(\tau)) e^{-\int_\tau^t \mu_\alpha(r) dr} d\tau.$$

Maintenant on suppose que $\mu_\alpha(t)$ et $\mu_\beta(t)$ sont des constantes, alors :

$$m_\infty^\alpha(t) \leq m_\infty^\alpha(0)e^{-\mu_\alpha t} + \int_0^t (\lambda_\alpha(\tau) + \lambda_\beta(\tau)) e^{-\mu_\alpha(t-\tau)} d\tau.$$

$$\Leftrightarrow m_{\infty}^{\alpha}(t) \leq m_{\infty}^{\alpha}(0)e^{-\mu_{\alpha}t} + \int_0^t (\lambda_{\alpha}(t-\tau) + \lambda_{\beta}(t-\tau))e^{-\mu_{\alpha}\tau} d\tau.$$

$$\Leftrightarrow m_{\infty}^{\alpha}(t) \leq \int_t^{+\infty} \mu_{\alpha} m_{\infty}^{\alpha}(0)e^{-\mu_{\alpha}\tau} d\tau + \int_0^t (\lambda_{\alpha}(t-\tau) + \lambda_{\beta}(t-\tau))e^{-\mu_{\alpha}\tau} d\tau.$$

$$\Leftrightarrow m_{\infty}^{\alpha}(t) \leq \int_0^{+\infty} \max(\mu_{\alpha} m_{\infty}^{\alpha}(0), |\lambda_{\alpha} + \lambda_{\beta}|_{\infty}) e^{-\mu_{\alpha}\tau} d\tau.$$

$$\Leftrightarrow m_{\infty}^{\alpha}(t) \leq \max\left(m_{\infty}^{\alpha}(0), \frac{|\lambda_{\alpha} + \lambda_{\beta}|_{\infty}}{\mu_{\alpha}}\right)$$

$$\Leftrightarrow m_{\infty}^{\alpha}(t) \leq \max\left(m_{\infty}^{\alpha}(0), \frac{|\lambda_{\alpha}|_{\infty} + |\lambda_{\beta}|_{\infty}}{\mu_{\alpha}}\right) \dots (A)$$

de même façon on trouve :

$$m_{\infty}^{\beta}(t) \leq \max\left(m_{\infty}^{\beta}(0), \frac{|\lambda_{\alpha}|_{\infty} + |\lambda_{\beta}|_{\infty}}{\mu_{\beta}}\right) \dots (B)$$

D'après le corollaire (III-2-2), on a :

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \leq 2 \int_0^t \beta_s(m_{\infty}(\tau)) |dm_{\infty}(\tau)|$$

La probabilité de blocage est donnée par :

$$\beta_s(m_{\infty}(t)) = \frac{|m_{\infty}(t)|^s}{s!} \bigg/ \sum_{j=0}^s \frac{m_{\infty}(t)^j}{j!} ;$$

$$m_{\infty}(t) = m_{\infty}^{\alpha}(t) + m_{\infty}^{\beta}(t), \quad m_{\infty}^{\alpha}(t) \text{ et } m_{\infty}^{\beta}(t) \text{ satisfont les inégalités (A) et (B).}$$

Après intégration on trouve :

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| \leq 2 \left(m_{\infty}(t) - m_{\infty}(0) - \ln \left(\frac{\sum_{n=0}^s \frac{m_{\infty}(t)^n}{n!}}{\sum_{n=0}^s \frac{m_{\infty}(0)^n}{n!}} \right) \right)$$

Remarque :

Si $m_{\infty}^{\alpha}(t)$ et $m_{\infty}^{\beta}(t)$ sont des fonctions décroissantes alors

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{p}(\tau)| = 0.$$

IV-5 : Exemple d'application :

Par la suite, on se propose de donner un exemple d'application de l'approximation de Mol qui est très important dans le domaine des télécommunications. C'est la probabilité du blocage des appels dans un réseau de télécommunication mobile, cette dernière qui a connue une croissance rapide du service, mais cette croissance conduit à la dégradation du service à cause du blocage et l'interruption des appels, ce problème est un conséquence de la capacité limité du réseau.

Un réseau de communication cellulaire de mobile se compose par un certain nombre de stations de base qui fournissent les connexions sans files par des limites mobiles. Ces stations contiennent des canaux déterminés par un certain spectre de fréquence, tel que ces stations peuvent utiliser le même canal en même temps, ce qui mène à la situation d'interférence des appels, et on ne peut pas avoir une communication de bonne qualité. La région autour de la station est considérée une cellule.

L'aspect important du réseau cellulaire est le mouvement des abonnés entre les cellules. Donc on est obligé de connaître le mode de déplacement des appels dans le réseau. Premièrement on peut décomposer les appels en deux classes :

- 1) les appels extérieurs qui représentent les nouveaux appels (*fresh call*).
- 2) les appels intérieurs qui représentent les handovers qui sont des appels provenant de cellules et dus au mouvement de l'utilisateur. Dans ce cas la cellule originale ne peut pas compléter la communication. Donc elle crée un appel de cette cellule originale vers la cellule destinataire et le transfère. Ici on a deux cas : soit la cellule destinataire peut fournir l'appel par un canal, ou elle ne peut pas et on arrive donc à une situation de blocage ; dans ce cas et lorsque les abonnés trouvent le handover bloqué, ils essayeront de rétablir leur connexion, donc il faut changer cette cellule bloquée par une autre voisine libre, cela donne des arrivés additionnels à cette cellule voisine avec un taux appelé « redial rate ». [25]

Les études actuelles sont consacrées sur la probabilité du blocage associée à un réseau de communication mobile avec un redial rate et des paramètres dépendant du temps (taux d'arrivé, temps de service). Les standards courants utilisent les réseaux de **GSM**

(Global System for Mobile communication) qui peut être modélisé comme étant un réseau de files d'Erlang avec refus, tel que chaque cellule peut être représentée comme étant une file d'Erlang s et la capacité limitée est représentée par le nombre fini de serveurs s .

L'étude du comportement de ce réseau en régime transitoire est difficile et l'on ne peut donner des expressions explicites de la probabilité de blocage sauf la possibilité d'avoir un système d'équations différentielles de Chapman Kolmogorov de dimension égale au nombre de files disponibles, mais on ne peut le résoudre, donc on cherche un autre réseau proche à celui ci et ayant des résultats concrets en régime transitoire.

Si on pose :

$X_s(t)$: chaîne de Markov associée à une file d'Erlang avec refus de capacité s .

$X_\infty(t)$: chaîne de Markov associée à une file d'une infinité de serveurs.

Et $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ la charge de la file en régime stationnaire.

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p(X(t) = n) &= \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1}{\sum_{j=0}^s \frac{\rho^j}{j!}}. && \text{(La formule d'Erlang).} \\ &= \frac{\rho^n e^{-\rho}}{n!} \cdot \frac{1}{\sum_{j=0}^s \frac{\rho^j}{j!} e^{-\rho}} \dots \text{(a).} \end{aligned}$$

Cette expression est une distribution de Poisson qui est la même de la file $M/G/\infty$ où $\{X_\infty(t) \leq s\}$.

Alors :

$$(a) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p(X_\infty(t) = n / X_\infty(t) \leq s).$$

On trouve donc une relation entre la file d'Erlang s et la file infinie, où cette dernière a des expressions explicite en régime transitoire.

Soit donc :

$\lambda(t)$: Taux d'arrivée correspond à la file infini à l'instant t .

$\mu(t)$: Taux de service à l'instant t .

$$\rho(0) = 0$$

On a :

$$p(X_{\infty}(t) = n) = \frac{\rho(t)^n}{n!} e^{-\rho(t)}, t \geq 0.$$

Où $\rho(t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \lambda(t) - \mu(t)\rho(t).$$

Donc on peut approcher $p(X_s(t) = n)$ par $p(X_{\infty}(t) = n / X_{\infty}(t) \leq s)$ qui est exactement l'approximation de MOL.

On applique ce résultat pour un nombre fini des files et on trouve un réseau de files d'Erlang qui peut être approché par un réseau de files infinie.

Modélisation probabiliste d'un réseau de communication sans files : [26]

On considère un réseau constitué de N cellules représente une partie d'un réseau de communication sans file, l'état de ce réseau est donné par un vecteur $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ où les n_i , $i = 1, N$ est le nombre d'appels dans la cellule i ;

Donc l'espace d'état correspond est :

$$S_s = \{ \mathbf{n} / \mathbf{A}\mathbf{n} \leq \mathbf{s} \}.$$

Où

\mathbf{n} : vecteur de N composantes;

\mathbf{A} : matrice de $d \times n$ composant;

\mathbf{s} : vecteur de d composantes;

le nombre d représente les contraintes.

On suppose que les nouveaux appels qui arrivent à la cellule i forment un processus de poisson non homogène de taux $\lambda_i(t)$ à l'instant t , ces appels sont acceptés s'il y a des canaux libres Sinon l'appel sera rejeté et quitte le réseau.

Maintenant, on suppose qu'un appel accepté par la cellule i a un temps de service exponentielle de taux $\mu_i(t)$ à l'instant t . si la cellule i ne peut pas compléter le service de cet appel, alors elle le transfère vers la cellule k pour la complétion du service avec une probabilité $p_{ik}(t)$, mais si l'appel termine son service il quitte le réseau avec une probabilité

$$p_{i0}(t) = 1 - \sum_{k=1}^N p_{ik}(t) .$$

Quand le réseau est à l'état n , la réalisation d'un handover de cellule i vers k implique que $\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \in S_s$. On dit que le handover est bloqué s'il ne peut pas trouver un canal dans la cellule k , dans ce cas l'appel doit quitter le réseau ce qui donne un nouvel état, c'est $\mathbf{n} - \mathbf{e}_i$. Les abonnés trouvant le handover bloqué vont essayer d'obtenir leur connexion dans une autre cellule voisine et libre, par exemple la cellule j . cela donne des arrivés additionnelles vers cette cellule de taux $r_{kj}(t)$ qui ne sont pas vraiment des nouveaux appels, donc pour la cellule j il y a deux types des arrivés ; les nouveaux appels plus les handovers.

On peut modéliser ce réseau cellulaire par une chaîne de Markov de temps continu $X_r = (X_r(t) / t \geq 0)$.

Soit donc :

X_r : représente le nombre des appels aux cellules.

$S_s = \{\mathbf{n} / \mathbf{A}\mathbf{n} \leq \mathbf{s}\}$: L'espace d'état correspond à cette chaîne.

Les taux de transitions sont donnés par $Q_r(t) = (q_r(\mathbf{n}, \mathbf{n}', t), \mathbf{n}, \mathbf{n}' \in S_s)$.

$$q_r(\mathbf{n}, \mathbf{n}', t) = \begin{cases} \lambda_i(t) & \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_i \\ n_i \mu_i(t) p_{i0}(t) & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i \\ n_i \mu_i(t) p_{ik}(t) & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \\ n_i \mu_i(t) p_{ik}(t) & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \notin S_s \\ r_{kj}(t) & \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_j \in S_s, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin S_s \end{cases}$$

Où toujours $r_{kj}(t)$ est le taux redial quand la cellule k est bloquée,

L'indice r représente le nombre des arrivés additionnel.

Et on note :

$$\begin{cases} p_r(\mathbf{n}, t) = p(\mathbf{X}_r(t) = \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in S_s, t \geq 0. \\ p_{r,0}(\mathbf{n}) = p(\mathbf{X}_r(0) = \mathbf{n}). \end{cases}$$

Comme le réseau a une capacité limitée, alors ces probabilités sont des solutions uniques de l'équation différentielle de Chapman Kolmogorov suivante :

Pour $\mathbf{n} \in S_s, t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_r(\mathbf{n}, t)}{dt} = & - \sum_{i=1}^N \left[\left(\lambda_i(t) + \sum_{k=1}^N r_{ki}(t) \mathbf{1}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin S_s) \right) \mathbf{1}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i \in S_s) + \mu_i(t) n_i(t) \right] p_r(\mathbf{n}, t) \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\lambda_i(t) + \sum_{k=1}^N r_{ki}(t) \mathbf{1}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \notin S_s) \right] p_r(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, t) \mathbf{1}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i \in S_s) \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mu_k(t) (n_k + 1) p_{ki}(t) p_r(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k, t) \mathbf{1}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \in S_s) \\ & + \sum_{i=1}^N \mu_i(t) (n_i + 1) \left[p_{i0}(t) + \sum_{k=1}^N p_{ik}(t) \mathbf{1}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin S_s) \right] p_r(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i, t) \mathbf{1}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i \in S_s) \end{aligned}$$

Où $\mathbf{1}(E)$: la fonction indicatrice de l'événement E .

On peut écrire cette équation sous forme d'opérateur, on trouve donc :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}_r(t)}{dt} = \mathbf{p}_r(t)\mathbf{Q}_r(t) & \forall t \geq 0 \\ \mathbf{p}_r(0) = \mathbf{p}_{r,0} \end{cases}$$

Sa solution est donnée par : $\mathbf{p}_r(t) = \mathbf{p}_{r,0}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_r}(t)$, $t \geq 0$

Maintenant on va étudier le réseau de communication de capacité illimitée d'espace d'état S donné par :

$$S = \{\mathbf{n} / n_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Soit $\mathbf{X}_\infty = \{\mathbf{X}_\infty(t); t \geq 0\}$ est la chaîne de Markov correspondante avec les taux de transition suivants :

$$q_\infty(\mathbf{n}, \mathbf{n}', t) = \begin{cases} \lambda_i(t) & \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_i & \text{nouveau appel} \\ \mu_i(t)n_i p_{i0}(t) & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i & \text{completion} \\ n_i \mu_i(t) p_{ik}(t) & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k & \text{handover} \end{cases}$$

La distribution de $\mathbf{X}_\infty(t)$ est une Poisson multidimensionnel, donc :

$$p(\mathbf{X}_\infty(t) = \mathbf{n}) = \prod_{i=1}^N \frac{c_i(t)^{n_i}}{n_i!} e^{-c_i(t)} ;$$

Où $\{c_i(t), i = 1, N\}$ résoudre l'équation suivante :

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^N c_k(t) \mu_k(t) p_{ki}(t) - \mu_i(t) c_i(t) \quad , t > 0, i = 1, N \quad (\text{b}).$$

Probabilité de blocage : [26]

On remarque qu'on peut exprimer la probabilité de blocage par la probabilité d'état $p_r(\mathbf{n}, t)$.

On pose $B_{r,i}(t)$: probabilité du blocage d'un appel généré à la cellule i à l'instant t ,

Tel que
$$B_{r,i}(t) = \sum_{\mathbf{n} \in T_i} p_r(\mathbf{n}, t).$$

$$T_i = \{\mathbf{n} / \mathbf{n} \in S_s, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i \notin S_s\}.$$

L'approximation de MOL de $B_{r,i}(t)$ est équivalente à celle de $p_r(\mathbf{n}, t)$, donc l'approximation de Mol de $p_r(\mathbf{n}, t)$ donnée par $p^*(\mathbf{n}, t)$ est la suivante :

$$p^*(\mathbf{n}, t) = \frac{\prod_{i=1}^N \frac{c_i(t)^{n_i}}{n_i!}}{\sum_{\mathbf{n} \in S_s} \prod_{j=1}^N \frac{c_j(t)^{n_j}}{n_j!}} = p(\mathbf{X}_\infty(t) = \mathbf{n} / \mathbf{X}_\infty(t) \in S_s).$$

$$\Leftrightarrow B_i^*(t) = \sum_{\mathbf{n} \in T_i} p^*(\mathbf{n}, t) = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in T_i} \prod_{i=1}^N \frac{c_i(t)^{n_i}}{n_i!}}{\sum_{\mathbf{n} \in S_s} \prod_{j=1}^N \frac{c_j(t)^{n_j}}{n_j!}} \dots (1).$$

Et l'approximation de Mol de la probabilité du blocage d'un handover transféré d'une cellule i vers k à l'instant t est donnés par :

$$B_{ik}^*(t) = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in S_s} n_i \mu_i(t) p_{ik}(t) 1(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \notin S_s) p^*(\mathbf{n}, t)}{\sum_{\mathbf{n} \in S_s} n_i \mu_i(t) p_{ik}(t) p^*(\mathbf{n}, t)}.$$

$$= \frac{\sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} \prod_{i=1}^N \frac{c_i(t)^{n_i}}{n_i!}}{\sum_{\mathbf{n} \in U_i} \prod_{j=1}^N \frac{c_j(t)^{n_j}}{n_j!}}, t \geq 0 \dots (2).$$

Où $T_{ik} = \{\mathbf{n} / \mathbf{n} \in S_s, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i \in S_s, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin S_s\}$.

$U_i = \{\mathbf{n} / \mathbf{n} \in S_s, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i \in S_s\}$.

Les expressions (1) et (2) sont obtenues par [27] pour un réseau de communication avec la condition que le taux redial est maximal, donc on déduit que l'approximation de MOL est valable pour la probabilité de blocage associée à un réseau où le processus d'arrivé est un poisson non homogène (dépend de temps).

Théorème :

Soit $\mathbf{p}_r(t)$ un vecteur de probabilité d'état associé à $\mathbf{X}_s(t)$ et $\mathbf{p}^*(t)$ son vecteur de l'approximation de Mol, où $\{c_i(t) / i=1, N\}$ est donnée par (b), $\mathbf{p}_0^* = \mathbf{p}_{r,0}$;

Alors :

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbf{p}_r(t) - \mathbf{p}^*(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{dc_i(\tau)}{d\tau} \sum_{\mathbf{n} \in T_i} p^*(\mathbf{n}, \tau) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_n) \mathbf{E}_Q(\tau, t) d\tau$$

$$- \int_0^t \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (c_k(\tau) \mu_k(\tau) p_{ki}(\tau) - r_{ki}(\tau)) \sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} p^*(\mathbf{n}, \tau) (\mathbf{e}_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} - \mathbf{e}_n) \mathbf{E}_Q(\tau, t) d\tau$$

Preuve :

La preuve est la même du théorème (IV-2-3-1) avec quelques modifications :

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad p^*(\mathbf{n}, t) &= \frac{\prod_{i=1}^N \frac{c_i(t)^{n_i}}{n_i!}}{\sum_{\mathbf{n} \in S_s} \prod_{j=1}^N \frac{c_j(t)^{n_j}}{n_j!}} . \\ \Rightarrow \frac{dp^*(\mathbf{n}, t)}{dt} &= \sum_{i=1}^N [p^*(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, t) \mathbf{1}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i \in S_s) - p^*(\mathbf{n}, t) (1 - B_i^*(t))] \frac{dc_i(t)}{dt} . \end{aligned}$$

$$\text{Et} \quad c_k(t) p^*(\mathbf{n}, t) = (n_k + 1) p^*(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k, t).$$

On remplace $\frac{dc_i(t)}{dt}$ par son expression et on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}^*(t)}{dt} &= - \sum_{i=1}^N \left[\left(\lambda_i(t) + \sum_{k=1}^N r_{ki}(t) \mathbf{1}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin S_s) \right) \mathbf{1}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i \in S_s + \mu_i(t) n_i) \right] p^*(\mathbf{n}, t) \\ &+ \sum_{i=1}^N \left[\lambda_i(t) + \sum_{k=1}^N r_{ki}(t) \mathbf{1}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \notin S_s) \right] p^*(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, t) \mathbf{1}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i \in S_s) \\ &+ \sum_{k=1}^N \mu_k(t) (n_k + 1) p_{ki}(t) p^*(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k, t) \mathbf{1}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \in S_s) \\ &+ \sum_{i=1}^N \mu_i(t) (n_i + 1) \left[p_{i0}(t) + \sum_{k=1}^n p_{ki}(t) \mathbf{1}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin S_s) \right] p^*(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i, t) \mathbf{1}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i \in S_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k,i=1}^N [c_k(t)\mu_k(t)p_{ki}(t) - r_{ki}(t)] l(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \notin S_s) p^*(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, t) \\
& + \sum_{i=1}^N p^*(\mathbf{n}, t) B_i^*(t) \frac{dc_i(t)}{dt} \\
& - \sum_{i=1}^N \frac{dc_i(t)}{dt} p^*(\mathbf{n}, t) l(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i \notin S_s) \\
& - \sum_{k,i=1}^N [c_k(t)\mu_k(t)p_{ki}(t) - r_{ki}(t)] l(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin S_s) p^*(\mathbf{n}, t) l(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i \in S_s) \\
\Leftrightarrow & \frac{d\mathbf{P}^*(t)}{dt} = \mathbf{P}^*(t) \mathbf{Q}_r(t) \\
& - \sum_{i=1}^N \frac{dc_i(t)}{dt} \sum_{\mathbf{n} \in T_i} p^*(\mathbf{n}, t) (\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{e}_n) \\
& + \sum_{i,k=1}^N [c_k(t)\mu_k(t)p_{ki}(t) - r_{ki}(t)] \sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} p^*(\mathbf{n}, t) (\mathbf{e}_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} - \mathbf{e}_n)
\end{aligned}$$

La solution de cette équation différentielle non homogène est la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^*(t) = & \mathbf{P}_0^* \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_r}(t) - \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{dc_i(\tau)}{d\tau} \sum_{\mathbf{n} \in T_i} p^*(\mathbf{n}, \tau) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_n) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_r}(\tau, t) d\tau \\
& + \int_0^t \sum_{i,k=1}^N [c_k(\tau)\mu_k(\tau)p_{ki}(\tau) - r_{ki}(\tau)] \sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} p^*(\mathbf{n}, \tau) (\mathbf{e}_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} - \mathbf{e}_n) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_r}(\tau, t) d\tau.
\end{aligned}$$

Finalement on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}^*(t) = & (\mathbf{P}_{r,0} - \mathbf{P}_0^*) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_r}(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{dc_i(\tau)}{d\tau} \sum_{\mathbf{n} \in T_i} p^*(\mathbf{n}, \tau) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_n) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_r}(\tau, t) d\tau \\
& - \int_0^t \sum_{i,k=1}^N [c_k(\tau)\mu_k(\tau)p_{ki}(\tau) - r_{ki}(\tau)] \sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} p^*(\mathbf{n}, \tau) (\mathbf{e}_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} - \mathbf{e}_n) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_r}(\tau, t) d\tau.
\end{aligned}$$

Et $\mathbf{P}_{r,0} = \mathbf{P}_0^*$.

On remarque que $P^*(\mathbf{n}, t)$ dépend seulement de $c_i(t)$ et cette dernière ne dépend pas de taux $r_{kj}(t)$; donc la distribution de Mol est la même pour toutes les valeurs de $r_{kj}(t)$, par contre l'expression de l'erreur dépend fortement de cette quantité, d'ici on peut donner des résultats plus exacts en examinant la quantité suivante :

$$\int_0^t \sum_{i,k=1}^N [c_k(\tau)\mu_k(\tau)p_{ki}(\tau) - r_{ki}(\tau)] \sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} p^*(\mathbf{n}, \tau) (\mathbf{e}_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} - \mathbf{e}_n) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_r}(\tau, t) d\tau$$

On a :

$$1) c_k(t) \mu_k(t) p_{ki}(t) \geq r_{ki}(t) \text{ car, } \max_{t \geq 0} (r_{kj}(t)) = c_k(t) \mu_k(t) p_{kj}(t) \quad \forall t \geq 0 .$$

$$2) \text{ il reste d'examiner la quantité } \sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} p^*(\mathbf{n}, t) (\mathbf{e}_{\mathbf{n}+e_i} - \mathbf{e}_{\mathbf{n}})$$

On prend l'état suivant du réseau \mathbf{n}' , on trouve donc :

$$\left(\sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} p^*(\mathbf{n}, t) (\mathbf{e}_{\mathbf{n}+e_i} - \mathbf{e}_{\mathbf{n}}) \right)_{\mathbf{n}'} \begin{cases} = 0 & \text{si } \mathbf{n}' \notin T_{ik} \\ < 0 & \text{si } \mathbf{n}' \in T_{ik} \text{ et } n'_i < c_i(t) \\ \geq 0 & \text{si } \mathbf{n}' \in T_{ik} \text{ et } n'_i \geq c_i(t) \end{cases}$$

Et comme le réseau de communication fonctionne avec des petites charges alors :

$$\sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} p^*(\mathbf{n}, t) (\mathbf{e}_{\mathbf{n}+e_i} - \mathbf{e}_{\mathbf{n}}) < 0, \text{ et on a } \mathbf{E}_{Q_r}(\tau, t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\text{Donc } \int_0^t \sum_{i,k=1}^N [c_k(\tau) \mu_k(\tau) p_{ki}(\tau) - r_{ki}(\tau)] \sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} p^*(\mathbf{n}, \tau) (\mathbf{e}_{\mathbf{n}+e_i} - \mathbf{e}_{\mathbf{n}}) \mathbf{E}_{Q_r}(\tau, t) d\tau < 0.$$

On déduit donc que l'erreur est minimale si $r_{ki}(t)$ prend sa valeur maximale, ceci est juste intuitivement, donc on obtient des résultats justes en pratique.

En plus de ça et par l'analogie avec le corollaire du théorème (IV-2-3-1) on trouve les bornes de cette erreur en énonçant le corollaire :

Corollaire :

Soit $\mathbf{p}(t)$ un vecteur de probabilité d'état correspond à $\mathbf{X}_s(t)$, $\mathbf{p}^*(t)$ est un vecteur de l'approximation de MOL, d'après le théorème 1 on a :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{P}(\tau) - \mathbf{P}^*(\tau)| &\leq 2 \int_0^t \sum_{i=1}^N \left| \frac{dc_i(\tau)}{d\tau} \right| \sum_{\mathbf{n} \in T_i} P^*(\mathbf{n}, \tau) (1 - P^*(\mathbf{n}, \tau)) d\tau \\ &\quad + 2 \int_0^t \sum_{k,i=1}^N (c_k(\tau) \mu_k(\tau) P_{ki}(\tau) - r_{ki}(\tau)) \sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} P^*(\mathbf{n}, \tau) d\tau . \\ &\leq 2 \int_0^t \sum_{i=1}^N \left| \frac{dc_i(\tau)}{d\tau} \right| B_i^*(\tau) (1 - B_i^*(\tau) / |T_i|) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^t \sum_{k,i=1}^N [c_k(\tau) \mu_k(\tau) p_{ki}(\tau) - r_{ki}(\tau)] B_{ik}^*(\tau) (1 - B_i^*(\tau)) d\tau. \\
& \leq 2 \int_0^t \sum_{i=1}^N B_i^*(\tau) \left\{ \left| \frac{dc_i(\tau)}{d\tau} \right| + \sum_{k=1}^N [c_k(\tau) \mu_k(\tau) p_{ki}(\tau) - r_{ki}(\tau)] \right\} d\tau.
\end{aligned}$$

Où on a utilisé $|\mathbf{x}| = \sum_j |x_j|$, la norme L_1 appliquée sur un vecteur \mathbf{x}

$$\text{et } |\mathbf{P}^*(t) - \mathbf{e}_n| = 2(1 - p^*(\mathbf{n}, t)), \quad |E_{Q_r}(\tau, t)| = 1 \quad \text{et } |\mathbf{e}_{n+e_i} - \mathbf{e}_n| = 2.$$

Et on fait la même démarche que la preuve du corollaire du théorème (IV-2-3-1) avec la remarque que la dernière inégalité est obtenue par :

$$T_{ik} \subset T_k \text{ et } B_{ik}^*(t)(1 - B_i^*(t)) \leq B_k^*(t).$$

On remarque que toutes les bornes sont minimisées pour $r_{kj}(t) = c_k(t) \mu_k(t) p_{kj}(t)$ qui est la valeur maximale de $r_{kj}(t)$, si on a un réseau à l'état équilibre où $\frac{dc_i(t)}{dt} = 0$, l'erreur est déterminée seulement par la deuxième membre de l'erreur, donc pour le taux $r_{kj}(t)$ maximale l'erreur sera nul, cela implique que la distribution $p_r(\mathbf{n})$ en régime stationnaire est bien approchée par l'approximation de MOL $P^*(\mathbf{n})$.

On applique ces résultats sur un réseau où le nombre de canaux disponible égale à s , mais chaque canal peut être utilisé par une seule cellule à un instant t , l'espace d'états de ce réseau est $\mathcal{S}_s = \{ \mathbf{n} / |\mathbf{n}| \leq s \}$.

On remarque que ce réseau est une file d'attente de type $M/PH/s/0$ étudié précédemment.

Dans ce réseau il n'y a pas de handover et pas des arrivés additionnel, donc :

$$T_{ik} = \phi, \quad \forall i, k = 1, N$$

$$\text{Et } T_i = \{ \mathbf{n} / |\mathbf{n}| = s \}; \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

$$\text{Et on a } \mathbf{p}_0(t) - \mathbf{p}^*(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{dc_i(\tau)}{d\tau} \sum_{\mathbf{n}: |\mathbf{n}|=s} p^*(\mathbf{n}, \tau) (\mathbf{p}^*(\tau) - \mathbf{e}_n) \mathbf{E}_Q(\tau, t) d\tau$$

$$\text{Avec } \sum_{i=1}^N \frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N [\lambda_i(t) - c_i(t) \mu_i(t) p_{i0}(t)]$$

Qui est le même résultat du théorème (IV-2-3-1).

ANNEXE

La résolution de l'équation de FOKKER-PLANCK :

On a l'équation de FOKKER-PLANCK

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -m \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}$$

La double transformée de Laplace est définie par :

$$F^{**}(r, s) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{-rw} d_w F(w, t) dt$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation de FOKKER-PLANCK

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^{**}(r, s) = -m \left(\frac{\partial F}{\partial w} \right)^{**}(r, s) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial w^2} \right)^{**}(r, s) \dots \dots (A)$$

On a par définition :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^{**}(r, s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-rw} \int_0^{+\infty} e^{-st} d_w \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) dt \quad (\text{Par Fubini}) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) dt \right\} \quad (\text{Car } e^{-st} \text{ ne dépend pas de } W) \end{aligned}$$

En intégrant par partie, on obtient :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^{**}(r, s) = sF^{**}(r, s) - \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w F(w, 0) \dots (1)$$

$$\text{et } \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w F(w, 0) = e^{-rw} F(r, 0) \Big|_0^{+\infty} + r \int_0^{+\infty} e^{-rw} F(w, 0) dw$$

$$\text{D'après les conditions initiales on a : } F(w, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < w_0 \\ 1 & \text{si } w \geq w_0 \end{cases}$$

$$w_0 \neq 0 \Rightarrow F(0, 0) = 0 \text{ et } F(w, 0) = 1 \text{ si } w \geq w_0$$

$$\text{Donc : } \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w F(w, 0) = e^{-rw_0} \dots \dots (2)$$

En remplaçant (2) dans (1), on aura :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^{**}(r, s) = sF^{**}(r, s) - e^{-rw_0} \dots \dots \dots (I)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial w} \right)^{**}(r, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w \left(\frac{\partial F}{\partial w} \right) dt$$

En intégrant par partie :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^{\bullet\bullet}(r,s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left\{ e^{-rw} \frac{\partial F}{\partial w} \right\}_0^{+\infty} + r \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w F(w,t) dt \\ &= r \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w F(w,t) dt - \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\partial F}{\partial t}(0,t) dt \\ &= rF^{\bullet\bullet}(r,s) + c \text{ Où } c : \text{ constante} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^{\bullet\bullet}(r,s) = rF^{\bullet\bullet}(r,s) + c \dots\dots\dots \text{II}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}\right)^{\bullet\bullet}(r,s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w \left(\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}\right) dt \\ &= r \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^{\bullet\bullet}(r,s) + c' \\ &= r(rF^{\bullet\bullet}(r,s) + c) + c' \text{ Où } c' : \text{ constante} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \left(\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}\right)^{\bullet\bullet}(r,s) = r^2 F^{\bullet\bullet}(r,s) + cr + c' \dots\dots\dots \text{III}$$

En remplaçant les équations (I), (II) et (III) dans (A) on trouve :

$$F^{\bullet\bullet}(r,s) = \frac{2}{\sigma^2} \left\{ \frac{c_1 + c_2 r - e^{-rw_0}}{r^2 - \frac{2m}{\sigma^2} r - \frac{2s}{r^2}} \right\} . c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont deux constantes.}$$

$$\Leftrightarrow F^{\bullet\bullet}(r,s) = \frac{2}{\sigma^2} \left\{ \frac{c_1 + c_2 r - e^{-rw_0}}{(r - r_1)(r - r_2)} \right\}$$

Où r_1 et r_2 sont des racines du dénominateur

$$r_1, r_2 = \frac{m}{\sigma^2} \left\{ 1 \pm \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

On définit η tel que : $\eta > 0$ pour $\rho > 0$ et $\eta = r_1, r_2$.

$$1) \eta = r_1 = \frac{m}{\sigma^2} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{(\rho-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} > 0 \text{ où } m = \rho - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho-1}{\sigma^2} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{(\rho-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} > 0$$

$$\Rightarrow \rho - 1 > 0 \Leftrightarrow \rho > 1$$

$$2) \eta = r_2 = \frac{m}{\sigma^2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{(\rho-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho-1}{\sigma^2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{(\rho-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} > 0$$

$$\Rightarrow \rho - 1 < 0 \Leftrightarrow \rho < 1$$

Donc on définit η par $\eta = \begin{cases} r_1 & \text{si } \rho > 1 \\ r_2 & \text{si } \rho < 1 \end{cases}$

$$\text{Tel que : } r_1 = \frac{m}{\sigma^2} \left[1 + \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{(\rho-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right], r_2 = \frac{m}{\sigma^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{(\rho-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Détermination de c_1, c_2 :

$$\text{On a } F^{**}(r, s) = \frac{2}{\sigma^2} \left\{ \frac{c_1 + c_2 r - e^{-rw_0}}{(r - r_1)(r - r_2)} \right\}$$

$$\Leftrightarrow c_1 + c_2 r - e^{-rw_0} = \frac{\sigma^2}{2} F^{**}(r, s)(r - r_1)(r - r_2)$$

Si $\eta = r \Leftrightarrow (r = r_1)$ où $(r = r_2)$ alors :

$$c_1 + c_2 \eta - e^{-\eta w_0} = 0 \Rightarrow c_1 = e^{-\eta w_0} - c_2 \eta \dots \dots (a)$$

On a :

$$F^{**}(r, s) = \frac{2}{\sigma^2} \left\{ \frac{c_1 + c_2 r - e^{-rw_0}}{(r - r_1)(r - r_2)} \right\}$$

$$\text{et } sF^{**}(0, s) = \frac{2s}{\sigma^2} \left[\frac{c_1 - 1}{-\frac{2s}{\sigma^2}} \right] = c_1 + 1 \dots \dots (i)$$

D'après la double transformée de Laplace :

$$sF^{**}(r, s) = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w F(w, t) dt$$

$$r = 0 \Rightarrow F^{**}(0, s) = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} d_w F(w, t) dt = 1 \dots \dots \dots (ii)$$

$$(i) = (ii) \Leftrightarrow -c_1 + 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0$$

Remplaçons la valeur de c_1 dans l'équation (a)

$$0 = e^{-\eta w_0} - c_2 \eta \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\eta} e^{-\eta w_0}$$

$$\text{Donc : } F^{**}(r, s) = \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{\left(\frac{r}{\eta} \right) e^{-\eta w_0} - e^{-r w_0}}{(r - r_1)(r - r_2)} \right]$$

$$\text{Où : } \eta = \begin{cases} r_1 = \frac{m}{\sigma^2} \left[1 + \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{(\rho - 1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] & \text{si } \rho > 1 \\ r_2 = \frac{m}{\sigma^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{(\rho - 1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] & \text{si } \rho < 1 \end{cases}$$

Le calcul de $E(U_d(t)/U_d(0))$:

Pour obtenir cette expression, on regarde sa transformée de Laplace

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} E(U_d(t)/U_d(0) = w_0) dt$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } F^{**}(r, s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} e^{-rw} d_w F(w, t) dt \\ - \frac{\partial F^{**}(r, s)}{\partial r} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} w e^{-rw} d_w F(w, t) dt \\ \Rightarrow - \frac{\partial F^{**}(r, s)}{\partial r} \Big|_{r=0} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} E(U_d(t)/U_d(0) = w_0) dt \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} F^{**}(r, s) &= \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{\left(\frac{r}{\eta} \right) e^{-\eta w_0} - e^{-r w_0}}{(r - r_1)(r - r_2)} \right] \\ \Rightarrow - \frac{\partial F^{**}(r, s)}{\partial r} \Big|_{r=0} &= \frac{m}{s^2} + \frac{w_0}{s} + \frac{e^{-\eta w_0}}{\eta s} \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} E(U_d(t)/U_d(0) = w_0) dt = \frac{m}{s^2} + \frac{w_0}{s} + \frac{e^{-\eta w_0}}{\eta s}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **A.K.ERLANG** (1918). Solutions of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. Post Office Electrical Engineering Journal 179-189.
- [2] **D.R.COX, W.L.SMITI** (1961). Queues. Methuen's monographs on applied probability and statistics.
- [3] **M.SAKAROVITCH** (1978). Processus Aléatoires. Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [4] **L.KLIENROCK** (1975). Queuing systems. Tome 1. Wiley. New York.
- [5] **L.KLIENROCK** (1976). Queuing systems. Tome 2. Wiley. New York.
- [6] **D.GROSS, G.M.HARRIS** (1974). Fundamentals of queuing theory .Wiley. New York.
- [7] **P.LEGUESDRON, J.PELLAMAIL** et al (avril 1993). Transient Analysis of the M/M/1 Queue. IRISA (publication interne) No 720.
- [8] **S.KARLIN, H.M.TAYLOR** (1975). A First course in stochastic processes. Academic Press. New York.
- [9] **E.ÇINLAR** (1975). Introduction To Stochastic Processes. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [10] **J.ABATE, W.WHITT** (1992). The Fourier series method for inverting transforms of probability distributions. Queuing systems 10, 5-88.
- [11] **G.L.CHOUDHURY, D.M.LUCANTONI** et **W.WHITT** (1994). Multidimensional transform inversion with applications to the transient M/G/1 queue. Ann, Appl, Prob. 4,719-740.
- [12] **H.E.FETTIS** (1955). Numerical calculation of certain definite integrals by Poisson's summation formula. Math. Tables and other aids to computation 9, 85-92.
- [13] **W.FELLER** (1971). An introduction to probability theory and its applications. Volume II. Second edition Wiley. New York.
- [14] **A.POMMELLET** (1994). Agrégation de mathématique. Grand écoles médecines. Paris.

- [15] **C.PALM** (1943). Intensity variation in telephone traffic. *Erisson Technics* 44, 1-189(German).
- [16] **L.D.JUNNIE, W.A.MASSEY, W.WHITT** (1995). Sensitivity to the service time distribution in the nonstationary Erlang loss model. *Management Science*. Volume 41. NO 6.
- [17] **A.PREKOPA** (1958). On secondary processes generated by a random point distribution Poisson type. *Ann.univ.sci.Budapest Eötvösnom sectio Math* 1. 153-170.
- [18] **D.L.JAGERMAN** (1975). Nonstationary blocking in telephone traffic. *Bell.syst.tech.j*, 625-661.
- [19] **W.A.MASSEY, W.WHITT** (1994). An analysis of the modified offered load approximation for the nonstationary Erlang loss model. *Annals applied probability*. 1145-1160.
- [20] **L.DAVIS.JIMMIE, W.A.MASSEY, W.WHITT** (1995). Sensitivity to the service-time distribution in the nonstationary Erlang loss Model. *Management Science*. Vol 41, No.6, 1107-1115.
- [21] **S.EICK, W.A.MASSEY, & W.WHITT** (1993). The physics of the $M_t/G/\infty$ queue. *Oper Res*.41 731-742.
- [22] **J.D.DOLARD, C.N.FREIDMAN** (1979). Product integration with application differential equations. *Encyclopaedia math.apl*.10 Addison .Wesley.
- [23] **S.KARLIN, J.L.MCGREGOR** (1957). The differential equations of a simple birth and death process and the stieltjes moment problem. *trans. Amer. Math. Soc*.85 321-369.
- [24] **M.BOUALEME** (2003). Thèse de magistère. USTHB. Alger
- [25] **W.A.MASSEY, W.WHITT** (1994). A stochastic model to capture space and time dynamic in wireless communication systems. *Probab in the engineering and informational sciences* 8 541-569.
- [26] **N.ABDALLAH, RJ.BOUCHERI** (2001). Blocking probabilities in mobile communication networks with times varying rate and redialling subscribers. University of twente. the Netherland .