N° d'ordre : 01/2011-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En : Mathématiques

Spécialité :Equations Différentielles dans le **C**hamps **C**omplexe

Présentè par :

Aziza-Souâd NOUAR

Sujet

Sur l'Aspect Analytique des Equations Differentielles Singulières

Soutenu publiquement, le 14/09/2011 à 10h00 devant le jury composé de :

Mr.	BETINA	KAMEL	Professeur à	L'U.ST.H.B.	Président.
Mr.	REZAOUI	MED-SALEM	Maître de Conférence à	L'U.S.T.H.B.	Directeur de Mémoire.
Mr	ABBACI	BRAHIM	Maître de Conférence à	L'U.S.T.H.B	Examinateur.
Mme	LAOUDI	AINI	Maître de Conférence à	L'U.S.T.H.B	Examinatrice.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Dieu, ensuite mon Directeur de Thèse Mr Rezaoui Med-Salem pour son aide, son enseignement, sa patience et sa disponibilité, je remercie aussi Mr Betina qui nous a honorer pour présider le jury , ainsi que Mme Laoudi et Mr Abbaci d'avoir bien voulu faire partie du Jury. Je remercie aussi tout ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser cette thèse.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail, à magrand-mère paternelle «Mamia» que Dieu ait son âme, magrand-mère maternelle «Mouima»; mes parents, ma sœur Mahdia, mon fiancé, mes tentes, mes cousins et cousines ainsi que mes amies:
Sara Alioua, Yesmina Hocine et Wahiba Zaater.

Sur l'Aspect Analytique des Équations Différentielles Singulières

RÉSUMÉ

Cette Thèse est formée de trois parties distinctes. Elles traitent toutes de l'aspect analytique de certains systèmes différentiels singuliers.
La première partie sera consacrée au théorème de Sibuya[15]; qui s'intéresse aux systèmes différentiels linéaires et non linéaires et en déduit ensuite, l'analyticité des solutions de certains systèmes de Pfaff non linéaires. On va s'intéresser ensuite, à une classe d'équations différentielles dites méromorphes; qui contiennent un paramètre et on étudiera la convergence de leurs solutions formelles, en utilisant leurs caractères de k-sommabilité et celui de Gevrey.

Dans la deuxième partie, on va étudier la convergence des solutions formelles d'équations différentielles auvoisinage d'une singularité, plus précisément des systèmes de Pfaff avec singularités de la forme:

$$\begin{cases} x^{p+1}\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & E(x,y,u) \\ \\ y^{q+1}\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & F(x,y,u) \end{cases}$$

On commence par le cas non-linéaire et pour cela on va énoncer trois théorèmes , ensuite, on va appliquer ces théorèmes aux systèmes de Pfaff linéaires .

Dans la troisième partie, on étudiera les systèmes différentiels de la forme:
$Du = F\Big(x, u, \theta_1 u, ..., \theta_n u; \theta'_1 u, ..., \theta'_n u\Big) = 0$; on introduira une classe d'EDO non linéaire a singularité régulière on y introduira la notion de bon opérateur, de domination , on énoncera ce qu'on appelle le Théorème de Maillet et on l'appliquera sur un exemple.

Table des matières

Introduction

Dans la première partie de ce travail, on exposera le théorème de Sibuya [15] qui étudie les systèmes de la forme:

$x^{p+1}\dfrac{du}{dx} - A(x).u(x,y) \ = y.E(x,y,u)$,(dans le cas linéaire).....(1)

$x^{p+1}\dfrac{du}{dx} \ = E(x,y,u)$,(dans le cas non linéaire).....(2)
où :
- p entier naturel , $p > 1$.
- y est un paramétre
- $A(x) \in End(\mathbb{C}[x]^N)$ est une matrice carrée $N \times N$ a coefficients séries convergentes.
- E est une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N$ contenant

l'origine $(x,y,u) \ = \ (0, \ 0, \ 0)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^N$.
Sibuya montre à l'aide de la "méthode H.S.W"(méthode due à Harris-Sibuya-Weinberg). utilisée dans [6] et [7] la convergence au voisinage de$(x,y) = (0,0)$, des solutions séries formelles de la forme:
$\Psi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) y^n \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^N$ des systèmes différentiels (1) et (2).
Sibuya donne ensuite, comme conséquence de ce qui précède, des conditions

suffisantes d'existence et d'unicité de solutions convergentes $\Psi(x,y)$ au voisinage de $(x,y) = (0,0)$, vérifiant $\Psi(0,0) = 0$ des système de Pfaff non linéaires complètement intégrables à singularités irrégulières de la forme:

$$\begin{cases} x^{p+1}.\frac{du}{dx} = E(x,y,u) \\ y^{q+1}.\frac{du}{dy} = F(x,y,u) \end{cases}$$

On va ensuite s'interesser à la convergence des solutions formelles d'équations différentielles méromorphes contenant un paramétre. Pour cela on va utiliser le caractère de sommabilité et Gevrey des solutions formelles.

Dans la deuxième partie, nous allons considérer des systèmes de Pfaff analytiques avec singularités de la forme:

$du = \frac{E(x,y,u)}{x^{p+1}}dx + \frac{F(x,y,u)}{y^{q+1}}dy.....(1)$

où :

$-p$ et q sont des entiers positifs ou nuls .

$-u = (u_1, u_2, ..., u_n)$

$-E(x,y,u) = (E_i(x,y;u_1,u_2,...,u_n))_{i=1,2,...,n}$

$-F(x,y;u) = (F_i(x,y;u_1,u_2,...,u_n))_{i=1,2,...,n}$

sont analytiques au voisinage de l'origine.

Nous allons énoncer puis montrer quelques théorèmes d'existence et d'unicité des solutions formelles de (1) et voir que, sous certaines hypothèses, on pourra obtenir la convergence de ces solutions.

En suite on appliquera ces résultats pour des connexions linéaires (mais en fait, on va considérer des systèmes de Pfaff linéaires plutôt que des connexions) avec singularités.

Dans la troisième partie, on va considérer une classe d'EDO non linéaire a singularité régulière ; on définira la notion de "bon opérateur" , de domination , et ceci afin d'étudier les solutions des équations différentielles de forme:

$Du = F(x, u, \theta_1 u, ..., \theta_n u;\ \theta_1' u, ..., \theta_n' u) = 0$
On énoncera ensuite le théorème de Maillet qui affirme le fait que toute solution formelle de l'équation :
$G(x, y, y', ..., y^{(M)}) = 0$ tel que : $G(x, X) = \sum_{1 \leq r+|s|=q \leq R} b_{r,s} x^r X^s$, soit un polynôme de degré R en les indéterminées $x, X_0, X_1, ..., X_M$, est dans une certaine classe de Gevrey ; et on traitera quelques exemples.

Chapitre 1

Etude de certains systèmes differentiels singuliers

Dans ce chapitre , nous exposerons en détail, le théorème de Sibuya [15] concernant la convergence des solutions séries formelles des équations différentielles non linéaires à singularités irrégulières, de la forme :
$x^{p+1}\frac{du}{dx} = E(x, y, u)$ où y est un paramètre et
$E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \rightharpoonup \mathbb{C}^N$ est une fonction a valeurs vectorielles , holomorphe sur un ouvert U contenant l'origine $(x, y, u) = (0, 0, 0)$; Sibuya reprend ici une méthode inspirée de certains travaux de Harris, Sibuya et Weinberg [6] et [7] basée sur le théorème du point fixe dans les espaces normés pour la détermination de l'existence des solutions holomorphes pour les systèmes differentiels linéaires, et de là découlera le cas non linèaire.
Comme application, Sibuya étudie l'existence de solutions analytiques pour

certains systèmes de Pfaff non linéaires complètement intégrables , à singularités irrégulières .
On se penchera ensuite sur certaines équations différentielles ordinaires méromorphes qui contiennent un paramètre; on évoquera la convergence des solutions formelles des systèmes de Pfaff et cela en introduisant la k-sommabilité uniformes des solutions.

1.1 Existence de solutions convergentes pour certains systèmes de Pfaff non linéaires complètement intégrables

Soit $A(x) \in End(\mathbb{C}\{x\}^N)$ une matrice carrée $N \times N$, a coefficients série convergentes, p un entier, $p > 1$et on définit l'opérateur différentiel: $D = x^{\mathrm{p}+1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} - A(x)$ tel que :

Notation 1.1.1 $A(x) = \sum_{m\geq 0} A_m x^m$; $A_m \in End(\mathbb{C}^N)$ *;* $m \geq 0$,*pour* $\delta_0 , \delta \in \mathbb{R}$; $\delta_0 , \delta > 0$ *Notons :*
$D(\delta_0) = \{y; |y| < \delta_0\}$ *et* $D(\delta) = \{x; |x| < \delta\}$,
$\Omega(\delta_0) = \{\varphi : D(\delta_0) -> \mathbb{C}^N ,\varphi \ holomorphe et bornée sur D(\delta_0)\}$
$\forall f = \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m$ *,où* $f_m \in \Omega(\delta_0)$ *on pose* $\|f\|_{\delta_0,\delta} = \sum_{m=0}^{\infty} \|f_m\|_{\delta_0} \delta^m$
$B(\delta_0 , \delta) = \{f = \sum_{m\geq 0} \alpha_m(y) x^m; \ \alpha_m(y) \in \Omega(\delta_0); \|f\|_{\delta_0,\delta} < \infty\}$
$B(\delta_0 , \delta, M) = \{x^M.f; f \in B(\delta_0 , \delta)\}$.

1.1.1 Cas linéaire : Le théorème fondamental

Soit D l'opérateur différentiel définie par:$D = x^{\mathrm{p}+1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} - A(x)$; $p \in \mathbb{N}^*$ et $A(x) \in End\ (\mathbb{C}\{x\}^N)$,Considérons le système différentiel $D(u) = y.E(x, y, y.u)$....(1.1)où $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \rightharpoonup \mathbb{C}^N$, holomorphe sur un ouvert U contenant l'origine $(x, y, u) = (0, 0, 0)$.

Proposition 1.1.1 *supposons que* $A(0) \in Gl(N, \mathbb{C})$,*Alors pour* $\delta_0 > 0$ *suffisamment petit,*$\exists$ *des fonctions vectorielles* $\varphi_m(y) \in \Omega(\delta_0), (m \geq 0)$ *tel que la série formelle :* $\varphi^*(x, y) = \sum_{m\geq 0} \varphi_m(y) x^m \in \Omega(\delta_0)[[x]]$ *soit solution du système différentiel (1.1).*
Preuve. *voir [13].* ∎

Théorème 1.1.1 *Soit D l'opérateur différentiel , donné par :*
$D = x^{p+1}\dfrac{d}{dx} - A(x)$ *; $p \in \mathbb{N}^*$ et $A(x) \in End\ (\mathbb{C}\{x\}^N)$; on considère le système différentiel :*
$D(u) = y.E(x, y, u)$ ....(2.1)
tel que : $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \rightharpoonup \mathbb{C}^N$, holomorphe sur un ouvert U contenant l'origine $(x, y, u) = (0, 0, 0)$; on suppose :
i) $u = \Psi(x\ , y) = \sum_{n\geq 1} \Psi_n(x).y^n \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^n$ soit une solution formelle du système (2.1)
ii) $A(0) \in Gl(N, \mathbb{C})$
Alors Ψ converge au voisinage de $(x, y) = (0, 0)$

Preuve. voir [13]. ∎

1.1.2 Généralisation:[14]

Si D est l'opérateur differentiel:
$D = A(x).\frac{d}{dx} - B(x)$ où $A(x)\ , B(x) \in End(\mathbb{C}\{x\}^N)$ deux matrices carrées $N \times N$ à coefficients holomorphes au voisinage de l'origin $x = 0 \in \mathbb{C}$
avec $A(0) = 0$ et $A(x) = x.\hat{A}(x)$ où $\hat{A}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} A_m\ x^{m+1}$ *telque* $A_m \in End(\mathbb{C}^N)$;

$(m \geq 0)$:
Considèrons le système differentiel:

$D(u) = yE(x, y, u)$....(2.2)

Où: $U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \rightharpoonup \mathbb{C}^N$ est une fonction à valeurs vectorielle, holomorphe

sur un ouvert U contenant l'origine $(x, y, u) = (0, 0, 0) \in \mathbb{C}^{N+2}$
Supposons que:

$i) B(0) \in Gl(N, \mathbb{C})$, et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, tel que: $det(A_p) \neq 0$

$ii) u = \Psi(x\ , y) = \sum_{n\geq 1} \Psi_n(x).y^n \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^n$,est une solution formelle du système (2.2)

Alors Ψ converge dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0)$.

1.1.3 Application du cas linéaire: convergence de solutions formelles de certains systèmes différentiels non linéaires en un point singulier irrégulier

Théorème 1.1.2 *Soit* $p \in \mathbb{N}, p > 1$ *et ,* $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \rightharpoonup \mathbb{C}^N$*, holomorphe sur un ouvert* U *contenant l'origine* $(x, y, u) = (0, 0, 0)$
considérons le système différentiel :
$x^{p+1}\frac{du}{dx} = E(x, y, u)...(3.1)$
supposons que $u = \Psi(x \ , y) = \sum_{n\geq 1} \Psi_n(x).y^n \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^n$ *soit une solution formelle du système* (3.1) *et que :*
$i)\Psi_0(0) = 0$
ii) La matrice Jacobienne $\frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0) \in Gl(N, \ \mathbb{C})$ *alors* u *converge au voisinage de* (x, y)*.*

Preuve. *Si on pose* $v = u - \Psi_0 - \Psi_1 y \quad \Rightarrow u = \Psi_0 - \Psi_1 y + v$*, le système* (3.1)*devient:*
$x^{p+1}.\frac{dv}{dx} = E(x, y, \Psi_0 + \Psi_1 y + v) - x^{p+1}.\frac{d}{dx} = (\Psi_0 + \Psi_1 y)$
car : $x^{p+1}.\frac{du}{dx} = x^{p+1}.\frac{dv}{dx} + x^{p+1}.\frac{d}{dx}(\Psi_0 + \Psi_1 y)$
notons $E(x, y, \Psi_0 + \Psi_1 y + v) = F(x, y, v)$
donc on a : $x^{p+1}.\frac{dv}{dx} = F(x, y, u) \ldots .(3.2)$
On pose aussi : $v = y.z$ *alors* (3.2) *devient :*
$y.x^{p+1}.\frac{dz}{dx} = F(x, y, 0) + y.\frac{dF}{dv}(x, y, 0) + H(x, y, y.z)$
En divisant le tout par y ;
$x^{p+1}.\frac{dz}{dx} = 1/yF(x, y, 0) + \frac{dF}{dv}(x, y, 0) + 1/yH(x, y, y.z)$
d'où :
$x^{p+1}.\frac{dz}{dx} - \frac{dF}{dv}(x, 0, 0)z = 1/yF(x, y, 0) + [\frac{dF}{dv}(x, y, 0) - \frac{dF}{dv}(x, 0, 0)]z + 1/yH(x, y, y.z)$
Posons alors :
$D = x^{p+1}\frac{d}{dx} - A(x)$ *avec* $A(x) = \frac{dF}{dv}(x, 0, 0)$ *et*
$\tilde{F}(x, y, u) = 1/y^2 F(x, y, 0) + 1/y.[\frac{dF}{dv}(x, y, 0) - \frac{dF}{dv}(x, 0, 0)].z + 1/y^2 H(x, y, y.z)$ *;alors* (3.2) *devient :* $D(z) = y.\tilde{F}(x, y, u)$ *; soit* $x^{p+1}\frac{dz}{dx} - A(x)z = y\tilde{F}(x, y, z) \ldots .(3.3);$

on a d'autre part de $(3.2)\frac{dF}{dv}\ (x,y,0) = \frac{dE}{du}(x,y,\Psi_0\ +\Psi_1 y)$ *d'où :*
$A(x) = \frac{dF}{dv}(x,0,0) = \frac{dE}{du}[x,0,\Psi_0(0)]$
Or d'après l'hypothèse $(i)\Psi_0(0) = 0$ *d'où :*
$A(0) = \frac{dF}{dv}\ (0,0,0) = \frac{dE}{du}(0,0,0)$
Et comme d'aprés l'hypothèse $(ii)\frac{dE}{du}(0,0,0) \in Gl(N,\mathbb{C})$,
On obtient $A(0) \in Gl(N,\mathbb{C})$,
on conclut alors d'après le théorème fondamental que la solution formelle z du système différentiel (3.3) converge au voisinage de $(x,y) = (0,0)$
Ce qui termine la démonstration du théorème. ■

1.1.4 Généralisation: [14]

On peut généraliser ce théorème aussi, aux systèmes differentiels de la forme:

$A(x)\ .\ \frac{du}{dx} = E(x,y,u)$ ....(1)

tel que : $A(x) \in End(\mathbb{C}\{x\}^N)$ matrice carrée $N \times N$ à coefficients holomorphes au voisinage de l'origin $x = 0 \in \mathbb{C}$ avec $A(0) = 0$ et $A(x) = x.\hat{A}(x)$ ou

$\hat{A}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} A_m\ x^{m+1}$ *telque* $A_m \in End(\mathbb{C}^N)$;(m ≥ 0) et $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \rightharpoonup \mathbb{C}^N$ fonction holomorphe définie sur l'ouvert U contenat l'origine $(x,y,u) = (0,0,0)$.

Supposons que $u = \Psi(x\ ,y) = \sum_{n\geq 1} \Psi_n(x).y^n \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^n$ soit une solution formelle du système (1) et que :

$i)\Psi_0(0) = 0$

$ii)$ $\exists p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tel que $det(A_p) \neq\ 0$

$iii)$ La matrice Jacobienne $\frac{dE}{du}(0,0,0) \in Gl(N,\mathbb{C})$ Alors u converge au voisinage de $(x,y) = (0,0)$.

Exemple d'application:

Considèrons (dans le cas ou N = 2) le système différentiel:

$A(x).\frac{du}{dx} = E(x,y,u)$ avec $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1+x-\exp x \\ 1+x-\exp x & 0 \end{pmatrix}$, et

$E : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y,u) \to E(x,y,u) = (E_1(x,y,u), E_2(x,y,u))$$

$$= E(x,y,(u_1,u_2))$$

$$= (u_2+x.u_2-2y.\exp 2x, u_1+x.u_1-y.\exp 2x)$$

Alors , $A(0) = 0, E(0,0,0)$ et

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y.\exp x \\ 2y.\exp x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^2$$

est une solution (formelle) du système précédent, en effet:

$$A(x).\frac{d\varphi}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1+x-\exp x \\ 1+x-\exp x & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx} \\ \frac{d\varphi_2}{dx} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1+x-\exp x \\ 1+x-\exp x & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2+x.\varphi_2-2y.\exp 2x \\ \varphi_1+x.\varphi_1-y.\exp 2x \end{pmatrix}$$

$$= E(x,y,\ \varphi)$$

et la matrice jacobienne de la fonction E est donnée par :

$$\frac{\partial E}{\partial u}(x,y,u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial u_1} & \frac{\partial E_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial E_2}{\partial u_1} & \frac{\partial E_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+x \\ 1+x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial u}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl(2,\mathbb{C})$$

Par suite , les propriétés (i) , (ii) et (iii) du résultat [14] sont satisfaites et la solution φ est clairement convergente au voisinage de l'origine $(0,0)$ de $\mathbb{C}^2$ et vérifie $\varphi(0,0)=0$

* cet exemple illustre le cas traité par Y.Sibya [15]

1.1.5 Existence de solutions convergentes pour certains systèmes de Pfaff non linéaires complètement intégrables

une conséquence du théorème 1.1.2 est le résultat suivant:

Théorème 1.1.3 *Considérons le système de Pfaff complètement intègrable :*
[ie: $y^{q+1}\frac{\partial E}{\partial y}(x,y,u)+\ \frac{\partial E}{\partial u}(x,y,u).F(x,y,u)=\ x^{p+1}\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,u)\ +\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,u).E(x,y,u)$*]*
Sous la forme :
$$(4.1)......\begin{cases} x^{p+1}.\frac{du}{dx}=E(x,y,u)...(4.2) \\ y^{q+1}.\frac{du}{dy}=F(x,y,u)...(4.3) \end{cases} \quad ou:\ p,\ q\in\mathbb{N}\ ,\ p>1,$$
$q>1$ *et* $E,F:U\subset\mathbb{C}_x\times\mathbb{C}_y\times\mathbb{C}_u^N\rightharpoonup\mathbb{C}^N$ *sont deux fonctions holomorphes définie sur un ouvert U contenant l'origine* $(x,y,u)=(0,0,0)$
et a valeurs dans $\mathbb{C}^N$ *.Supposons que :*
i) $E(0,0,0)=0$; $F(0,0,0)=0$
ii) $\frac{\partial E}{\partial u}(0,0,0)\in Gl(N,\ \mathbb{C})$; $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0,0)\in Gl(N,\ \mathbb{C})$
Alors le système de Pfaff (4.1) posséde une unique solution
$u=\Psi(x,y)$ *vérifiant :*
$a)\Psi(0,0)=0$
$b)\Psi$ *est holomorphe au voisinage de* $(x,y)=(0,0)$

Preuve. *la preuve va être basée sur le théorème et le lemme qui va suivre . voir [13].* ■

Théorème 1.1.4 *(Cf[7];Théorème2.1.2,page 24):Soit* x *une multivariable complexe et* $E[x,u(x)]$*, une fonction définie par:* $E:\mathbb{C}_x^m\times\mathbb{C}_y^n\longmapsto\mathbb{C}^n$ *, analytique dans un voisinage de* $[x,u(x)]=(0,0)\in\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^n$*,supposons que :*

$i)E(0,0) = 0$
$ii)$La marice Jacobienne $\frac{\partial E}{\partial u}(0,0) \in Gl(n, \mathbb{C})$ Alors l'équation $E(x,u) = 0$ possède une unique solution $u(x)$ analytique dans un voisinage de $x = 0 \in \mathbb{C}^m$ et vérifiant $u(0) = 0$.

Preuve. [13] ■

Le système $y^{q+1}\frac{\partial v}{\partial y} - [\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,\Psi)].v = 0$ admet pour solution ,la fonction $v \equiv 0$.

Preuve. [13] ■

1.2 Convergence de solutions formelles d'équations differentielles méromophes contenant un paramétre

Nous allons rappeler brievement la définition de la k-sommabilité, due a Ramis[10]et [11]

Notation 1.2.1 *Pour $s > 0$, $\mathbb{C}[[x]]_s$ désigne l'éspace (l'anneau) des séries formelles $\widetilde{f}$=$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ qui sont telles que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(n!)^s} t^n$ converge au voisinage de l'origine (par Stirling); il revient au mème de demander que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\Gamma(ns)} t^n$ converge au voisinage de l'origine ; soit d'autre part ; $\widetilde{\mathbb{C}}$ le revêtement universel , $\widetilde{\mathbb{C}} \hookrightarrow^p \mathbb{C}$ l'ensemble obtenu en faisant un "éclatement réel" de $\mathbb{C}$ en 0, explicitement $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), p(r,\theta) = re^{i\theta}$,on pose $S = p^{-1}(0)$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ et on identifie par p : $\widetilde{\mathbb{C}} - S$ à $\mathbb{C}^*$,pour $\theta \in S$, on désine par ν_θ l'ensemble des ouvert $U \subset \mathbb{C}^*$ qui sont traces sur $\mathbb{C}^*$ d'un voisinage ouvert de θ dans $\mathbb{C}^*$, une base de ν_θ est formée par exemple des ouvert: $\{|\arg x - \theta| < \varepsilon; |x| < \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0\}$.*

$\mathbb{C}[[x]]_s$= {$\widetilde{f}$=$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ tels que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(n!)^s} t^n$ converge au voisinage de l'origine}

Définition 1.2.1 *Soit $\widetilde{f} \in \mathbb{C}[[x]]_s$, avec $s > 0$ et $k = 1/s$; si I est un intervalle fermé de S de longeur $\geq \pi/k$, on dit que $\widetilde{f}$ est k-sommable sur I si il existe f $\in \Gamma(I, A_{(s)})$ (section) vérifiant $Tf = \widetilde{f}$.*

tel que :

$T : \Gamma(I, A) \rightharpoonup \mathbb{C}[[x]]$

$f \mapsto \widetilde{f}$ *application "série de Taylor"* $(resp. T : \Gamma(I, A_{(s)}) \rightharpoonup \mathbb{C}[[x]]_s)$

I intervalle fermé de S de longeur $|I|$

A : *le faisceau : pour* $\theta \in S$,

$A_\theta = \{f$ *holomorphe dans* $U \in \nu_\theta$ *et f admet à l'origine:un développement asymptotique:*$\widetilde{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n\}$.

ie: $\forall n \in U,\ \left|f(x) - \sum_0^{n-1} a_m x^m\right| \leq C_n |x|^n$.

(resp. $A_{(s)}$: *le sous faisceau de A:* $A_{(s),\theta} = \{f$ *définie dans* $U \in \nu_\theta, \forall x \in U\}$

$c > 0$,**indépendant de n** ≥ 1,**on a** $\left|f(x) - \sum_0^{n-1} a_m x^m\right| \leq C^n (n!)^s |x|^n)$.

1.2.1 Solutions formelles d'équations differentielles ordinaires méromorphes:

Définition 1.2.2 *Soit le système d'équations differentielles suivant:*

(2.1) $x^{k+1}\frac{dy}{dx} = xf_0(x) + A(x)y + \sum_{|\rho|\geq 2} y^\rho f_\rho(x)$

tel que :

i) y , $f_0(x)$ *et* $f_\rho(x)$ *sont des n-vecteurs* $A(x)$ *matrice* $n\times n$

ii) f_0, f_ρ *et A sont holomorphes dans un disque* $\triangle(r) = \{x,\ |x| < r\}$

iii)La série entiére $\sum_{|\rho|\geq 2} y^\rho f_\rho(x)$ *est uniformément convergente en tout sous ensemble compact du domaine* $|x| < r, |y| < \rho$

si k > 0 entier et si la matrice A(0) est inversible , le système (2.1) admet une unique solution formelle (2.2)...p $= y = \sum_{m=1}^{\infty} x^m \alpha_m$ *ou les coefficients* α_m *sont constants.*

La solution formelle (2.2) est certainement divergente , J.P-Ramis et Sibuya montrent dans[12] que la solution formelle (2.2) est k-sommable dans chaque direction d excepté pour un nombre finie de directions singulières.[15]: Si la série formelle p est k-sommable dans chaque direction d sans aucune direction singulière, donc p est convergente.

1.2.2 Solutions formelles de systèmes de Pfaff:

Maintenant , on considère le système de Pfaff :

$$(3.1)......\begin{cases} x^{k+1}.\frac{dy}{dx}= f_0(x,\xi)+A(x,\xi)y+\sum_{|\rho|\geq 2} y^{\rho}f_{\rho}(x,\xi) \\ y^{h+1}.\frac{dy}{d\xi}= g_0(x,\xi)+B(x,\xi)y+\sum_{|\rho|\geq 2} y^{\rho}g_{\rho}(x,\xi) \end{cases} \quad \text{ou}$$

i) y, $f_0(x,\xi), f_\rho(x,\xi), g_\rho(x,\xi), et\ g_0(x,\xi)$ sont des n-vecteurs et $A(x,\xi), B(x,\xi)$ sont n×n matrices.

ii)Les éléments de $f_0, f_\rho, g_\rho, et\ g_0, A\ et\ B$ sont holomorphes dans $\Delta(r) = \{(x,\xi), |x|+|\xi| < r, |y| < \rho\}$, si les conditions suivantes sont satisfaites:

(1)k et h des entiers > 0.

(2) $f_0(0,0) = 0\ et\ g_0(0,0) = 0$.

(3) Les matrices $A(0,0), B(0,0)$ sont inversibles.

(4) Le système de Pfaff (3.1) est complètement intégrable et donc admet une solution formelle unique $y = p = \sum_{m+l\ \geq 1, m\geq 0, l\geq 0} x^m\xi^l\gamma_{m,l}...(3.2)$; tel que $\gamma_{m,l}$ sont des coefficients n-vecteurs constants.

R.Gérard et Y sibuya prouvent dans [5], que la solution formelle est convergente : ie que $p \in (\mathbb{C}\{x,\xi\})^n$,il y'a une remarquable similitude entre la preuve de Ramis-Sibuya et celle de Gérard-Sibuya de la convergence de la solution formelle (3.2) de (3.1).

Dans le cas de l'EDO (2.1) , ils existent quelques directions singulières pour la sommabilité de la solution formelle (2.2).Tandis que dans le cas système de Pfaff (3.1) les directions singuliéres disparaissent à cause de la complète intégrabilité de (3.1).

La théorie de sommabilité de plusieurs variables n'a pas été développé encore, pour cela on va utiliser le concept de sommabilité uniforme.

1.2.3 k-sommabilité uniforme

Soit le système d'équations differentielles contenants le paramètre ε :

(4.1) $x^{k+1}.\frac{dy}{dx} = f_0(x,\varepsilon) + A(x,\varepsilon)y + \sum_{|\rho|\geq 2} y^\rho f_\rho(x,\varepsilon)$ ou:

i) y , $f_0(x,\varepsilon), f_\rho(x,\varepsilon)$ sont n-vecteurs , ε est un $\mu - vecteur$ et $A(x,\varepsilon)$ est un n×n matrice.

ii) La série $\sum_{|\rho|\geq 2} y^\rho f_\rho(x,\varepsilon)$ est uniformément convergente dans tout sous-ensemble compacte du domaine $|x| + |\varepsilon| < r, |y| < \rho$

Si les conditions suivantes sont vérifiées:

(1) k est entier > 0

(2) $f_0(0,0) = 0$

(3) $A(0,0)$ matrice inversible

Alors l'équation différentielle (4.1) admet une unique solution formelle de la forme:

$y = p = \sum_{m+l\ \geq 1, m\geq 0, l\geq 0} x^m \varepsilon^l \gamma_{m,l}$ tel que $\gamma_{m,l}$ sont des coefficients n-vecteurs constants.

Si on pose $p = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \alpha_m(\varepsilon)$ alors on remarque trés bien ceci:

(I) on a : (4.3) $\alpha_m(\varepsilon) = \sum_{|l|\geq 0} \varepsilon^l \gamma_{m,l}$ (m=0,1,..)
(II) $\exists r_1 > 0$ tel que $\alpha_m(\varepsilon)$ holomorphe dans $D(r_1) = \{\varepsilon, |\varepsilon| < r_1\}$

(III) Rappel:

Une série formelle $\sum_n a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ est dite Gevrey d'ordre k >0, si $\exists c > 0, A > 0$ tel que c, A nombres >0

$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq CA^n (n!)^{1/k}$

La solution p est Gevrey d'ordre 1/k uniformément en $\varepsilon \in D(r_1), \exists K_0 > 0, B_0 > 0$ tel que :

(4.4) $|\alpha_m(\varepsilon)| \leq K_0 B_0^m (m!)^{1/k}, (m = 0, 1, ...) dans\ D(r_1)$.

Remarque 1.2.1 *Les (4.3) et (4.4) ⇒ (4.5)*$|\gamma_{m,\varepsilon}| \leq \frac{K_0}{r_1^{|l|}}(m!)^{1/k} B_0^m$, $(m \geq 0, |l| \geq 0)$

en plus ∃ un ensemble fini $\xi = \{d_1, d_2, .., d_\nu\}$ de direction dans le plan x tel que : si la direction n'est pas dans ξ
⇒ ∃ une unique solution $\eta_d(x, \varepsilon)$ de (4.1) tel que

$(IV - 1)$ $\eta_d(x, \varepsilon)$ holomorphe dans le domaine: $(D) = \{|\arg x - d| \leq \frac{\pi}{2k} + \delta_d, 0 < |x| < r_d, \varepsilon \in D(r_1)\}$ où $\delta_d\ et\ r_d > 0$

$(IV-2)$ $\exists nombre : K_1, B_1 > 0$ tel que : (4.6) $\left|\eta_d(x, \varepsilon) - \sum_{m=0}^{M-1} x^m \alpha_m(\varepsilon)\right| \leq K_1 (M!)^{1/k} B_1^M |x|^M$ (M=0,1,..) dans le domaine (D).

Remarque 1.2.2 *Les propriétes :* $(I), (II), (III), (IV-1), (IV-2)$ *veulent dire que la série (4.3) est k-sommable dans la direction de d pour n'importe quelle valeur fixé de* ε *dans la direction de d.*
Vu que les constantes : $K_0, B_0, \delta_d, r_d, K_1, B_1$ *et la direction d sont independantes de* $\varepsilon \in D(r_1)$*,on peut dire que la série (4.3) est k-sommable dans la direction d uniformément avec* $\varepsilon \in D(r_1)$.

1.2.4 Convergence de la solution formelle p

On écrit p et η_d comme série en ε :

$$(5.1).....\begin{cases} p = \sum_{|l|\geq 0} \varepsilon^l a_l(x) \\ \eta_d(x, \varepsilon) = \sum_{|l|\geq 0} \varepsilon^l \eta_{d,l}(x) \end{cases}$$

on a : $(v-1)-$ (5.2) $a_l(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \gamma_{m,l} \quad (|l| \geq 0)$

$(v-2)-$ Les $\eta_{d,l}(x)$ sont holomorphe dans le domaine D'

$(D\prime) = \{\, |\arg x - d| \leq \frac{\pi}{2k} + \delta_d, 0 < |x| < r_d\}$

$(v-3)-$ (5.3) $\left|\eta_{d,l}(x) - \sum_{m=0}^{M-1} x^m \gamma_{m,l}\right| \leq \frac{K_1}{r_1^{|l|}} (M!)^{1/k} B_1^M \, |x|^M$
$(M \geq 0, |l| \geq 0)$ dans le domaine (D')

Ces propriétés veulent dire que la série (5.2) est k-sommable dans la direction d et que $\eta_{d,l}(x)$ est la k-somme de (5.2) dans la direction d.

Théorème 1.2.1 *Si tout les coefficients $a_l(x)$ de p (ie: série (5.2)) sont des séries convergentes en x ie:*

(6.1) $a_l(x) \in (\mathbb{C}\{x\})^n$, alors p est une série convergente dans (x, ε) ie; $p \in (\mathbb{C}\{x\})^n$
Preuve. On fixe l , puisque la k-somme $\eta_{d,l}$ de la série k-sommable $a_l(x)$ dans

la direction d est unique et puisque $a_l(x)$ est convergente, la fonction $\eta_{d,l}(x)$est continument analytique de la somme $a_l(x)$ comme une série convergente en x.
Les fonctions $\eta_{d,l}(x)$ pour toute direction d $\notin \xi$ définie une fonction $\eta_l(x)$ qui est holomorphe dans le disque $\triangle(r_2) = \{x, |x| < r_2\}$ pour le nombre r$_2 > 0$.
Donc la fonction analytique $\eta_d(x, \varepsilon)$ devient indépendante de la direction d le développement des séries p est convergent. ∎

Chapitre 2

Analyticité des solutions formelles de certains systèmes différentiels singuliers

Dans ce chapitre , nous allons donner un certain nombre de résultats concernant un problème trés ancien : celui de l'étude de la convergence de solutions formelles d'équations différentielles au voisinage d'une singularité .Mais ici il sera surtout question de système de Pfaff avec singularités complètement intègrables ou non.
L'objectif de ce travail était l'étude des connexions linéaires singulières dans

le cas de plusieurs variables et d'une manière naturelle nous avons été conduit à étudier des système de Pfaff singuliers non linéaires. Afin de ne pas alourdir inutilement la présentation des résultats nous allons nous limiter au cas de deux variables.

2.1 Etude de convergence de la solution formelle de certains systèmes de Pfaff

On considère les systèmes de Pfaff de la forme:
$du = \frac{E(x,y,u)}{x^{p+1}} dx + \frac{F(x,y,u)}{y^{q+1}} dy$.....(1)
où :

−p et q sont des entiers positifs ou nuls .

$-u = (u_1, u_2, ..., u_n)$

$-E(x, y, u) = (E_i(x, y; u_1, u_2, ..., u_n))_{i=1,2,...,n}$
$-F(x, y; u) = (F_i(x, y; u_1, u_2, ..., u_n))_{i=1,2,...,n}$
sont analytiques au voisinage de l'origine .Nous avons donc

$E(x, y; u) = E_0(x, y) + A(x, y)u + E_1(x, y; u)$
$F(x, y; u) = F_0(x, y) + B(x, y)u + F_1(x, y; u)$
où A et B sont des matrices carrées d'ordre n holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$

et E_1,F_1des applications holomorphes d'ordre supérieur ou égal à deux en u .Le système (1) peut s'écrire sour la forme :

$$(1')\begin{cases} x^{p+1}.\frac{du}{dx} = E(x, y; u) \\ y^{q+1}.\frac{du}{dy} = F(x, y; u) \end{cases}$$
On supposera dans la suite que

$E(0, 0, 0) = E_0(0, 0) = 0$
$F(0, 0, 0) = F_0(0, 0) = 0$
Soit les résultats dont on se proposera de donner une idée de la démonstration

Théorème 2.1.1 *Si $p = q = 0$ alors toute solution formelle de (1) est convergente.*

Complément:

Si une des matrices $A(0,0)$ où $B(0,0)$ n'a pas de valeur propre entière positive ou nulle alors le système (1) admet une solution formelle et une seule.

Théorème 2.1.2 *$p = 0$ et $q > 0$. Si $A(0,0)$ n'a pas de valeur propre entière*

positive ou nulle , le système (1) admet une solution holomorphe et une seule nulle à l'origine.

Théorème 2.1.3 *$p > 0$ et $q > 0$. Si les deux matrices $A(0,0)$ et $B(0,0)$ sont inversibles, alors le système de Pfaff (1) admet une solution et une seule holomorphe à l'origine et nulle à l'origine.*

Idée de la preuve du théorème1

Considérons un système differentiel de la forme

$(1).....x\frac{dy}{dx}= E(x, y, u)$

$y = (y_1, y_2, ..., y_n), u = (u_1, u_2, ..., u_p), (paramètres)$

f étant holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$.

Les preuves des théorèmes 1 et 2 sont basées sur le

Lemme 2.1.1 *Toute solution formelle de (1) de la forme $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(u)x^m$ où ,*
(1) pour tout m , a_m est holomorphe dans $\|u\| < \delta$
(2) $a_0(0) = 0$.
est convergente.

La preuve de ce lemme est assez technique et procède de la manière très classique en utilisant l'équation intègrale associée au
système (1)

Remarque 2.1.1 *Si les coefficients a_m ne sont pas holomorphes c'est-à-dire si les a_m sont seulement des séries formelles alors ce lemme n'est plus vrai, voici un exemple:*
Soit $\frac{dy}{dx} = (1+u)y$ *, qui a pour solution* $y = C(u)exp(1+\ u)y$ *, ou C(u) est arbitraire et pourrait donc en particulier etre une série divergente en u.*

On a alors le lemme suivant:

Lemme 2.1.2 *Si le système (1) admet une solution formelle de la forme* $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(u)x^m$ *ou les a_m sont des séries formelles et si de plus $a_0(0) = 0$, alors le sytème (1) admet une solution convergente de la forme:*$\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(u)x^m$ *ou les coefficients b_m sont des séries convergentes.*

La preuve de ce lemme utilise le théorème d'Artin

Complément: Théorème d'Artin[1]

Soit K un corps valué (non nécessairement complet) de caractéristique 0 et considèrons un système d'équations analytiques :
(1) $f(x,y) = 0$ avec $f(x,y) = (f_1(x,y),...,f_m(x,y))$ ou les$f_i(x,y)$ sont des sèries convergentes (c-à-d: de rayon de convergence non nul) à coefficients dans K , et $x = (x_1,...,x_n)$ et $y = (y_1,....,y_N)$.
Soient c un entier ≥ 0 et $\bar{y}(x) = (\bar{y}_1(x),....,\bar{y}_N(x))$ des séries formelles à coefficients dans K, sans terme constant, telle que $f(x,\bar{y}(x)) = 0$.Alors il existe des

séries convergentes à coefficients dans K.
$y(x) = (y_1(x), ..., y_N(x))$ telle que $f(x, y(x)) = 0$ et telles que les coefficients de $y(x)$ et de $\bar{y}(x)$ de degré ≤ 0 , coïncident.
La dernière condition signifie encore que $y(x) \equiv \bar{y}(x)$ modulo $\hat{m}^c$ ou $\hat{m}$ est idéal maximal de l'anneau local des séries formelle K$[[x]]$.
Autrement dit : pour toutt entier c ≥ 0 ,et toute solution formelle $\bar{y}(x)$ de (1) ; il existe une solution convergente $y(x)$ de (1) telle que $y(x) \equiv \bar{y}(x)$ mod $\hat{m}^c$.

Considérons un système de Pfaff :

$$(1)\begin{cases} x.\frac{du}{dx} = E(x, y; u) \\ y.\frac{du}{dy} = F(x, y; u) \end{cases}$$

On le suppose pas forcément complètement intègrable.

Soit $\hat{\varphi} = \sum_{p+q>0} \varphi_{pq} x^p y^q$ une solution formelle de (1) posons $\hat{\varphi_p}(y) = \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_{pq} y^q$ alors $\hat{\varphi} = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(y) x^p$ comme $\hat{\varphi}$ est une solution formelle de (1) nous avons formellement y.$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} = F(x, y, \hat{\varphi})$ donc $y[\sum_{p=0}^{\infty} (\frac{d}{dy} \varphi_p(y)) x^p] =$ F$(x, y, \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi_p(y) x^p)$
ie : y $\frac{d\varphi_0(y)}{dy} = F(0, y, \varphi_0(y))$.
D'après le lemme 1 , la série formelle a$_0(y)$ est convergente dans un voisinage de l'origine.
On pose $z = u + a_0(y)$ donc :

(2) $y \frac{\partial u}{\partial y} = h(x, y, u) = h_0(x, y) + C(x, y)u + O(u^2)$ et la série formelles $u = \sum_{p=1}^{+\infty} \varphi_p(y) x^p$ est une solution formelle du système (2), on identifie on obtient pour $\forall p = 1, 2, ...$
$y.\frac{d\varphi_p}{dy} = C(0, y)\varphi_p(y) + Q_p(y)$
ou Q_p est connu dés que on connait φ_m pour tout $m < p$ .Par réccurence ceci permet de prouver que toute les séries formelles $\varphi_p(y)$ sont convergentes dans un voisinage de l'origine mais ce voisinage peut dépendre de p.

Lemme 2.1.3 *Toute solution formelles d'un système linéaire de la forme :* $x\frac{du}{dx} = a(x) + b(x)$ *ou a et b sont holomorphes dans un voisinage de l'origine, converge dans le domaine commun de convergence de a et b .*

Ce lemme entraine l'existence d'un disque D centré à l'origine du plan de la variable y tel que pour tout p, $\varphi_p(y)$ converge dans ce disque.Donc la série $\hat{u} = \sum_{p=1}^{+\infty} \varphi_p(y)x^p$ a des coefficients φ_p qui sont des sèrie

convergentes dans D, comme de plus $\varphi_0(0) = 0$, la série formelle $\hat{u}$=$\sum_{p=1}^{+\infty} \varphi_p(y)x^p$ qui est solution formelle de $(2)\ y\frac{du}{dy} = h(x, y, u)$ est convergente d'aprés le lemme.1.Ce qui prouve le théorème1■

Idée de la preuve du théorème 2:

Si $E(x, y, u) = E_0(x, y) + A(x, y)u + E_1(x, y, z)$
et $F(x, y, u) = F_0(x, y) + B(x, y)u + F_1(x, y, u)$

On montre facilement par identification que si le système (1)est complètement intégrable et si $A(0, 0)$ où $B(0, 0)$ n'a pas de valeurs propres entières positives ou nulles alors le système

$$(1)\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x} = E(x, y, u) \\ y\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, z) \end{cases}$$

admet une solution formelle et une seule.cette solution sera donc convergente.

Considèrons maintenant un système de la forme

$$(1)\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x} = E(x, y, u) \\ y^{q+1}\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u) \end{cases}$$

que nous ne supposerons pas nécessairement complètement intégrable.Notons:
$\mathrm{CI}(x, y, u) = y^{q+1}\frac{\partial E}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial u}.F - (x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}.E)$

où
$(\mathrm{CI})_i(x, y, u) = y^{q+1}\frac{\partial E_i}{\partial y} + \frac{\partial E_i}{\partial u}.F - (x\frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial u}.E)$ avec $\frac{\partial E_i}{\partial u}.F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E_i}{\partial u_k}.F_k$

et $\frac{\partial F_i}{\partial u}.E = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial u_k}.E_k$
Avec la condition $(\mathrm{CI})(x, y, u) \equiv 0$ exprime que le système considéré est complètement intégrable.
Par Solution formelle du système (1) nous obtenons une série formelle
$\hat{\varphi} = \sum_{p+q>0} \varphi_{pq} x^p y^q$
telle que formellement
$x\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}= E(x, y,\hat{\varphi})$
$y^{q+1}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y}= F(x, y,\hat{\varphi})$
On a alors $(\mathrm{CI})(x, y,\hat{\varphi}) = 0$
Soit donc $\hat{\varphi} = \sum_{p+q>0} \varphi_{pq} x^p y^q$ une solution formelle de (1) que nous écrivons sous la forme:
$\hat{\varphi} = \sum_{p=0}^{+\infty} \hat{\varphi_p}(y) x^p$ avec $\hat{\varphi_p}(y) = \sum_{q=0}^{+\infty} \varphi_{p,q} y^q$
Nous avons formellement
$x =\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}= E(x, y,\hat{\varphi})$
ou encore
$x =\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}= E_0(x, y) + A(x, y)\hat{\varphi}+O((\hat{\varphi})^2)$
Et pour déterminer les coefficients $\hat{\varphi_p}(y)$ le système infini d'équations:

$E(0, y,\hat{\varphi}_0(y)) = 0$
$(\frac{\partial E}{\partial u}(0, y,\hat{\varphi}_0(y)) - I)\hat{\varphi}_1(y) = H_1(y)$
$(\frac{\partial E}{\partial u}(0, y,\hat{\varphi}_0(y)) - 2I)\hat{\varphi}_2(y) = H_2(y)$
$- -$
$(\frac{\partial E}{\partial u}(0, y,\hat{\varphi}_0(y)) - pI)\hat{\varphi}_p(y) = H_p(y)$
$- -$

ou $\mathrm{H}_p(y)$ est déterminé dés que l'on connait $\hat{\varphi}_r(y)$ pour tout r < p.
Supposons que $A(0, 0)$ n'a pas de valeurs propres entières positives ou nulles.

Donc en particulier $A(0,0)$ est inversible et le théorème des fonctions implicites nous donne $\hat{\varphi_0}(y)$ comme série convergente, notée $\varphi_0(y)$.
D'autre part, l'hypothèse faite sur la matrice $A(0,0)$ entraîne l'existence d'un disque D centré à l'origine du plan de la variable y tel que pour tout p >0 la matrice $\frac{\partial E}{\partial u}(0, y, \hat{\varphi_0}(y)) - pI$
soit inversible dans D.
Il en résulte par réccurence l'existence d'un disque D centré à l'origine du plan de la variable y dans lequel toutes les séries formelles $\hat{\varphi_p}(y)$ sont convergentes
.
Le lemme 1 entraîne alors la convergence de la solution formelle $\hat{\varphi}$.Ce qui prouve le théorème 2.■

Idée de la preuve du théorème 3:

Cette preuve est cette fois assez différente des deux autres.

Tout d'abord on va supposer que le système de Pfaff est complètement intégrable et que les deux matrices $A(0,0)$ et $B(0,0)$ sont inversibles.
On commence par introduire quelques rappels sur la notion de développement asymptotique et celle de secteur propre

1.Développement Asymptotique:

1.1.Notations:

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$, les corps des nombres complexes, réelles, rationelles et l'anneau des entiers, $\mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}^+$ l'ensemble des éléments non négatives de $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$, pour tout p $\in (\mathbb{Z}^n)$,
r $\in \mathbb{R}^n$,s $\in \mathbb{R}^n, e \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{C}^n$ on écrit : p! pour $p_1!p_2!....p_n!$; $|p|$ pour $p_1+p_2+.....+p_n$
$r \leq s$ Si $\forall i = 1, ..., n$; r$_i \leq s_i$
$r < s$ Si $\forall i = 1, ..., n$;r$_i \leq s_i$
$r \leq \arg x \leq s$ Si $\forall i = 1, ..., n$; $r_i \leq \arg x \leq s_i$
$r < \arg x <$ s Si $\forall i = 1, ..., n$; $r_i < \arg x < s_i$

$|x| < e$ si $\forall i = 1, ..., n \quad |x_i| \leq e_i$
$\|x\|_m = [\,\sum_{i=1}^{n} |x_i|^m\,]^{1/m}$
$x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} .....x_n^{p_n}$ une série formelle convergente centré à l'origine s'écrira : $\sum_{|p|=0}^{\infty} C_p x^p$ à la place de $\sum_{p_i \geq 0} C_{p_1} ....C_{p_n} .x_1^{p_1} ....x_n^{p_n}$

1.2.Rappels et définitions:

On définit un secteurs (resp. secteur ouvert) de $\mathbb{C}^n$ de sommet l'origine est par définition une partie S de $\mathbb{C}^n$ définit par $S = \left\{x \in \mathbb{C}^n / \theta_1 \leq \arg x \leq \theta_2, 0 < |x| < r\right\}$ $(resp.S = \{x \in \mathbb{C}^n / \theta_1 < \arg x < \theta_2, 0 < |x| < r\}, r = (r_1, ...r_n)$ est le rayon du secteur $\theta_2 - \theta_1 = (\theta_2^1 - \theta_1^1, ..., \theta_2^n - \theta_1^n)$ est l'ouverture du secteur.
Un secteur est dit strict si son ouverture est $< 2\pi$

Définition :
La série formelle $\sum_{|p|=0}^{\infty} a_p x^p$ représente asymptotiquement dans un secteur S une fonction f a valeurs complexe définie dans S Si:
$\forall m \in \mathbb{Z}^+, \left| f(x) - \sum_{|p|=0}^{\infty} a_p x^p \right| \leq C_m \|x\|_{m+1}^{m+1}$, dans S , on note : $f \underset{S}{\sim} \sum_{|p|=0}^{\infty} a_p x^p$.
Re*marque* :
$(f \underset{S}{\sim} \sum_{|p|=0}^{\infty} a_p x^p) \Leftrightarrow (Lim_{x \mapsto 0, x \in S} f(x) = a_0)$

Une série formelle $\sum a_p x^p$ reprèsente asymptotique une fonction f dans un secteur ouvert S si elle reprèsente f dans tout sous secteur S' de S.
Corollaire :
Si f est une fonction holomorphe dans un secteur S $= \left\{x \in \mathbb{C}^n / 0 \leq |x| \leq r\right\}$, alors dans S on a , $f(x) = \sum_{|p|=0}^{\infty} a_p x^p$ et $f \underset{S}{\sim} \sum_{|p|=0}^{\infty} a_p x^p$.

2.Secteur Propre:

Soit F une fonction $F(x) = \int_{X_0}^{X} f(\tau) d\tau$ qui est polynôme en ξ ou $\xi^\rho = X, \rho$ entier > 0.
Un secteur fermé D du plans de la variable x est dit propre pour F si il esxiste une constante positive , γ telle que on peut determiner arg F(x) comme fonction continue de x vérifiant $|\arg F(x)| \leq \frac{3\pi}{2} - \gamma$ dans D pour $|x|$ grand.

Notons

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de $A(0,0)$

$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ les valeurs propres de $B(0,0)$

$U(resp.V)$ un disque centré à l'origine du plan de la variable x (resp.y), w est un polydisque centré à l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Supposons que F et G sont holomorphes dans $U \times V \times W$.

Il existe un recouvrement $S_1, S_2, ..., S_N$ de U-$\{0\}$ par des secteurs propres pour la famille de fonctions$\{-\lambda_i \frac{1}{x^p}\}_{i=1,2,...,N}$ d'ouverture plus grande que $\frac{\pi}{p}$.

Considérons alors l'équation différentielle

$x^{p+1}\frac{du}{dx} = E(x, y, u)$

y étant considéré comme paramétre.

D'aprés certains résultats de Y.Sibuya, il existe pour tout h = 1,2,...,N, une solution $\varphi_h(x, y)$ de cette équation holomorphe dans $S_h \times V$ qui admet un développement asymptotique en x dans S_h uniforme en y dans V.

$\varphi_h(x, y) \underset{U.V}{\sim}^{S_h} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_{hk}(y)x^k$ et $\varphi_{h,0}(0) = 0$.

Montrons maintenant que

$y^{q+1}\frac{\partial \varphi_h}{\partial y} = F(x, y, \varphi_h(x, y))$ sur $S_h \times U$

La condition de complète intégrabilité est

$y^{q+1}\frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial y}F = x^{p+1}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}.E$

identiquement sur $U \times V \times W$.Ecrivons:

$x^{p+1}\frac{\partial}{\partial x}(y^{q+1}\frac{\partial \varphi_h}{\partial y}) = y^{q+1}\frac{\partial}{\partial y}(x^{p+1}\frac{\partial \varphi_h}{\partial x})$

$= y^{q+1}\frac{\partial}{\partial y}(E(x, y, \varphi_h))$

$= y^{q+1}\frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}.y^{q+1}\frac{\partial \varphi_h}{\partial y}$.

et en utilisant la condition de complète intégrabilité on obtient:

$x^{p+1}\frac{\partial}{\partial x}[y^{q+1}\frac{\partial \varphi_h}{\partial y} - F(x, y, \varphi_h)] = \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, \varphi_h)[y^{q+1}\frac{\partial \varphi_h}{\partial y} - F(x, y, \varphi_h)]$

La fonction $v(x, y) = y^{q+1}\frac{\partial \varphi_h}{\partial y} - F(x, y, \varphi_h)$ est une solution du système linéaire

(1) $x^{p+1}\frac{du}{dx} = [\frac{\partial E}{\partial u}(x, y, \varphi_h(x, y)]u$ sur $S_h \times V$

Mais

$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \varphi_h(x, y)) = A(x, y) + O(\varphi_h)$ *ou* $A(0, 0)$ est inversible.

La fonction v admet un développement asymptotique en x uniforme en y

dans $S_h \times U$ elle est donc bornée à l'origine .
Or vu l'hypothése sur A(0,0) le système linéaire (1) n'a pas d'autre solution bornée dans des secteurs d'ouverture plus grande que π/p que la solution 0.
Nous avons donc:
$y^{q+1}\frac{\partial\varphi_h}{\partial y} = F(x,y,\varphi_h)$ sur $S_h \times V.$
C'est-à-dire que φ_h est une solution de notre système de Pfaff sur $S_h \times V$
De la même manière il existe un recouvrement $\sum_1, \sum_2, ..., \sum_M$ de V-{0} par des secteurs propres pour la famille de fonction $\{-\mu_i \frac{1}{y^q}\}_{i=1,..,M}$ d'ouverture plus grande que π/q
En considérant maintenant l'équation différentielle $y^{q+1}\frac{dz}{dy} = F(x,y,z)$ ou x est

considéré comme paramètre, on montre que pour tout k = 1,2,...,M il existe une solution $\Psi_k(x,y)$ du système de Pfaff qui est holomorphe dans $U\times\sum_k$.
On a pour tous h et k d'aprés [17]
$\varphi_h(x,y) = \Psi_k(x,y)$ sur $S_h \times \sum_k$
En particulier pour tout k
$\varphi_1(x,y) = \Psi_k(x,y)$ sur $S_1 \times \sum_k$
Comme Ψ_k est holomorphe sur $U \times \sum_k$ elle donne un prolongement analytique de φ_1 à $U \times \sum_k$.Ceci étant vrai pour tout k, nous avons
$\Psi_k = \Psi_h$ sur $U\times \sum_k \cap \sum_h$
C'est-à-dire qu'il existe une fonction Ψ holomorphe sur $U \times V - \{0\}$ telle que:
$\Psi/U \times \sum_k = \Psi_k$ pour tout k.
Mais comme pour tout k,Ψ_k admet un développement asymptotique dans $U \times \sum_k$ uniforme en x, la fonction Ψ_k est bornée à l'origine il en est donc de même de Ψ qui se prolonge holomorphiquement à $U \times V$ et donne une solution holomorphe de notre système de Pfaff. La construction qui a été faite à l'aide des Ψ_k peut être faite à l'aide des φ_h et donne une autre solution holomorphe φ,il est clair que $\varphi = \Psi$.
La preuve du théorème3 est alors pratiquement terminée, car si $\varphi = \sum_{p+q>0} \varphi_{pq} x^p y^q$ est une solution formelle de (1) elle est convergente car les hypothèses faites sur $A(0,0)$ et $B(0,0)$ entraînent l'existence et l'unicité d'une série formelle so-

lution qui ne peut donc que coincider avec le développement en série de la solution holomorphe trouvée ci-dessus.■

2.2 Application aux systèmes de Pfaff linéaires

Pour ne pas alourdir inutilement la présentation des résultats nous utiliserons le language des systèmes de Pfaff linéaires plutôt que celui des connexions.

Soit donc un système de Pfaff complètement intégrables de la forme :

$$(1)\begin{cases} x^{p+1}.\frac{du}{dx} = A(x,y)u \\ y^{q+1}.\frac{du}{dy} = B(x,y)u \end{cases}$$

Si A(0,0) et B(0,0) sont inversible l'unique solution holomorphe passant par l'origine est la solution u = 0 ; c'est une application du théorème 3 mais de loin pas la plus importante.

Lemme de réduction formel:

Si A(0,0) $= \begin{pmatrix} A^1(0,0) & 0 \\ 0 & A^2(0,0) \end{pmatrix}$ et B(0,0) $= \begin{pmatrix} B^1(0,0) & 0 \\ 0 & B^2(0,0) \end{pmatrix}$ ou l'un des couples $(A^1(0,0), A^2(0,0)), (B^1(0,0), B^2(0,0))$ est sans valeur propre commune, il existe une transformation formelle unique T de la forme T $= \begin{pmatrix} I & T^{12} \\ T^{21} & I \end{pmatrix}$ qui transforme le système donné en le système :

$$(1')\begin{cases} x^{p+1}.\frac{du}{dx} = \begin{pmatrix} A^{11} & 0 \\ 0 & A^{22} \end{pmatrix} u \\ y^{q+1}.\frac{du}{dy} = \begin{pmatrix} B^{11} & 0 \\ 0 & B^{22} \end{pmatrix} u \end{cases}$$

Avec $A^{ii}(0,0) = A^i(0,0), i = 1,2.$

$B^{ii}(0,0) = B^i(0,0), i = 1,2.$

La preuve de ce résultat est classique.

Comme application du théorème 3 nous allons déduire que T est en fait convergente.
Un calcul facile montre que les matrices T^{12} et T^{21} sont données par des systèmes de Pfaff complètement intégrables.
Par exemple T^{12} est donnée par:

$$x^{p+1}\frac{\partial T^{12}}{\partial x} = A^{12}+A^{11}T^{12}-T^{12}A^{22}-T^{12}A^{21}T^{12}$$

$$y^{q+1}\frac{\partial T^{12}}{\partial y} = B^{12}+B^{11}T^{12}-T^{12}B^{22}-T^{12}B^{21}T^{12}$$

ou : $A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B^{11} & B^{12} \\ B^{21} & B^{22} \end{pmatrix}$.

Posons : $\varsigma = \begin{pmatrix} T_1^{12} \\ T_2^{12} \\ . \\ . \\ T_n^{12} \end{pmatrix}$ ou T_i^{12} est la $i^{iém}$ colonne de la matrice T^{12}.

La matrice colonne à $n^2 lignes \varsigma$ est alors une solution formelle d'un système de Pfaff de la forme:

$$x^{p+1}\frac{\partial u}{\partial x} = E(x,y,u)$$
$$y^{q+1}\frac{\partial u}{\partial y} = F(x,y,u)$$

qui est encore complètement intégrable.

Alors si les deux couples $(A^1(0,0), A^2(0,0)), (B^1(0,0), B^2(0,0))$, n'ont pas de valeurs propres communes on vérifie aisément que:

$\frac{\partial E}{\partial u}(0,0,0)$ et $\frac{\partial F}{\partial u}(0,0,0)$ sont inversibles.

Ceci entraine que la solution formelle ς est convergente et sous l'hypothèse ci dessus on a un lemme de réduction dans le cas convergent.

Ceci permet de résoudre explicitement tout système de Pfaff complétement intégrable de la forme:

$$\begin{cases} x^{p+1}\frac{\partial u}{\partial x} = A(x,y)u \\ y^{q+1}\frac{\partial u}{\partial y} = B(x,y)u \end{cases}$$

ou $A(0,0)$ *et* $B(0,0)$ ont les deux des valeurs propres distinctes.

En effet cette hypothèse entraîne l'existence d'une transformation T holomorphe inversible telle que u $=$ T(x,y) u transforme le système donné en un système diagonal :

$$\begin{cases} x^{p+1}.\frac{du_i}{dx} = a_{ii}(x,y)u_i \\ y^{q+1}.\frac{du_i}{dy} = b_{ii}(x,y)u_i \end{cases} \qquad \text{i} = 1,2,...,\text{n}$$

ou chacun des système scalaires est complètement intégrable.

Or il est possible d'intègrer complètement chacun des systèmes scalaires.

En combinant tous ces résultats on trouve pour le système de Pfaff

$$\begin{cases} x^{p+1}.\frac{du}{dx} = A(x,y)u \\ y^{q+1}.\frac{du}{dy} = B(x,y)u \end{cases}$$

une matrice fondamentale de solutions de la forme:

$U(x,y)x^{\lambda}y^{\Gamma}\exp P(1/x)\exp Q(1/y)$.

ou : U est une matrice carrée holomorphe à l'origine.

-λ et Γ sont des matrices diagonales constantes.

- P(resp.Q) un polynôme en $1/x(resp.1/y)$ à coefficients matriciels.

Chapitre 3

Une classe d'EDO non-linéaires à singularité régulière

Dans ce chapitre, on introduira une classe d'équations différentiel non linéaires à singularité régulière. Un opérateur D:$\mathbb{C}[[x]] \rightarrow \hat{m}$ est dit a singularité régulière , si pour tout f $\in$ m (idéal maximal de $\mathbb{C}\{x\}$) toute solution formelle de Du = F(x) est convergente, où $F(x, x_0, x_1, ..., x_n)$ est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$ et $\theta_0 = id, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ une suite d'opérateurs linéaires.
$\theta_i :\ \mathbb{C}[[x]] \rightarrow \hat{m}$, le théorème 1 donne des conditions suffisantes sur la suite

$\{\theta_0, \theta_1, ..., \theta_n\}$ pour que l'opérateur $Du = F(x, u, \theta_1 u, ..., \theta_n u)$ soit a singularité regulière, ensuite on va donner les versions d'équations differentielles du théorème 1 ,et aprés nous entamerons le théorème de Maillet.

3.1 Notations-Définitions-Exemples

- $\mathbb{C}[[x]]$: l'anneau des séries formelles à une indéterminé et a coefficient complexe.
- $\hat{m}$ son idéal maximal.

- $\mathbb{C}\{x\}$ anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}$ ou

encore l'anneau des séries convergentes centré à l'origine de $\mathbb{C}$.
- m son idéal maximal.

- $\hat{L}_0 = \{P : \mathbb{C}[[x]] \rightarrow \hat{m} lin\acute{e}aire\}$ espace vectoriel sur $\mathbb{C}$

- $L_0 = \{P : \mathbb{C}\{x\} \rightarrow m\ lin\acute{e}aire\}$

- On dit que $P \in \hat{L}_0$est $\hat{L}_0 - analytique$ si :

1°)$\exists n \in \mathbb{N}$ et $F : \mathbb{C}^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe en $(x, X_0, X_1, ..., X_n) = (0, 0, ..., 0)$

tele que $F(0, 0, ..., 0) = 0$
2°)$\exists\ \theta_0, ..., \theta_n \in \hat{L}_0$ tq $\forall u \in \hat{m}$ on a $P(u) = F(x, u, \theta_1 u, ..., \theta_n u)$
On notera $D(L_0) = \{$l'opérateur L-analytiques$\}$ ou $L = \hat{L}_0 ou\ L = L_0$

Définition 3.1.1 *(P est singulier)* $\Leftrightarrow P(\mathbb{C}[[x]]) \subset \hat{m}$ *(cas ou* $L = \hat{L}_0$

$\Leftrightarrow P(\mathbb{C}\{x\}) \subset m$ (cas ou $L = L_0$)

Définition 3.1.2 *(P est singulier régulier)*$\Leftrightarrow\ \forall\ f \in \mathbb{C}\{x\}\ , \forall \hat{u} \in \mathbb{C}[[x]]$ *solution de l'équation différentielle* $P(u\hat{}) = f(x)$ *alors* $\hat{u}$ *est convergent.*

Définition 3.1.3 *(P est singulier irrégulier)*$\Leftrightarrow\ \exists\ f \in \mathbb{C}\{x\}$ *et une série formelle* $\hat{u}$ *non convergente tq:* $D\hat{u} = f(x)$

-$\forall P \in D(L_0)$ peut s'écrire: Du $= \sum_{\beta+|\alpha|\geq 1} a_{\beta,\alpha}.x^{\beta}.u^{\alpha_0}(\theta_1 u)^{\alpha_1}......(\theta_n u)^{\alpha_n}$,
$\alpha_i \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$; $a_{\beta,\alpha} \in \mathbb{C}$.
La partie affine de D est par définition l'opérateur:

$D_1 u = \sum_{\beta+|\alpha|=1} a_{\beta,\alpha}.x^{\beta}.u^{\alpha_0}(\theta_1 u)^{\alpha_1}......(\theta_n u)^{\alpha_n}$

Un opérateur L-analytique est dit affine s'il se réduit a sa partie affine, ce

n'est pas un opérateur $\mathbb{C}-$linéaire mais on lui associe l'opérateur linéaire:
$D_1^0 u = \sum_{\beta+|\alpha|\geq 1} a_{0,\alpha}.u^{\alpha_0}(\theta_1 u)^{\alpha_1}......(\theta_n u)^{\alpha_n}$ qu'on appelle la linéarisé de D.

Exemple 3.1.1 1°) *Soit l'opérateur* $\theta : \mathbb{C}\{x\} \to m$
$u \quad \to x.\frac{du}{dx}$ *, est linéaire, singulier et même singulier régulier*

2°)*L'opérateur :* $Du = \sum_{i=0}^{n} a_i(\theta)^{n-i} u$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ *est linéaire singulier régulier*

3°)*Soit* $Du = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)(\theta)^{n-i} u$ *,on sait que D est à singularité réguliére si et seulement si* $a_0(0) \neq 0$.

Soit $F(x, X_0, X_1, ..., X_n) = \sum_{\beta+|\alpha|\geq 1} a_{\beta,\alpha} x^{\beta}.X_0^{\alpha_0}......X_n^{\alpha_n}$ *une fonction holomorphe dans un polydisque centré à l'origine de* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$ *et considérons:*
$Du = F(x, u, \theta_1 u, ..., \theta_n u)$ *ou* $\theta = x.\frac{d}{dx}$
Nous verrons que : si le linéarisé de D: $D_1^0 u = \sum_{|\alpha|=1} a_{0,\alpha}.u^{\alpha_0}(\theta_1 u)^{\alpha_1}......(\theta_n u)^{\alpha_n}$ *est a singularité réguliére, il en est de même de D.*

3.2 Les bons opérateurs

Soit $\wp$ *le sous espace vectoriel de* $\hat{L}_0$ formé des opérateurs $\varphi : \hat{m} \to m$ de la forme:

$\varphi(\sum_{m\geq 1} u_m x^m) = \sum_{m=1}(\sum_{0\leq k\leq m} \varphi_k(m-k)u_{m-k})x^m$ où $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur $\mathbb{N}$.

Exemple 3.2.1 1)*L'identité : id :* $\sum_{m\geq 1} u_m x^m \to \sum_{m\geq 1} u_m x^m$, $(id)_k = 0$

pour $k \neq 0$ *et* $(id)_0(m) = 1$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}$.
2)*Soit* $a \in \mathbb{C}[[x]]$, $a = \sum_{m\geq 0} a_m x_m$,*et* φ *définie par:*
$\varphi : \hat{m} \to m$

$$u \mapsto a.u = \sum_{m\geq 1}(\sum_{0\leq k\leq m} a_k u_{m-k})x^m$$

$\varphi_k(m-k) = a_k$, Si $a \in \mathbb{C}\{x\}$,alors φ est définie sur m et a valeur dans m
3)Soit $a \in m$,alors $\varphi : m \to m$

$$u \mapsto aou \to \text{ici } \varphi \text{ n'}\textit{est pas dans la classe}\ \wp$$

Définition 3.2.1 *On dit que* φ *est un bon opérateur si pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et tout k,* $0 \leq k \leq m$ $|\varphi_k(m-k)| \leq C_k\varphi_0(m-k)$ *ou la suite* $\{C_k\}_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^+$ *et telle qu'il existe* $\rho > 0$ *telles que* $c(\rho) = \sum_{k\geq 0} C_k\rho^k < +\infty$

1°)L'identité de $\hat{m}$ est un bon opérateur , on prend $C_k = 0$,$k \neq 0$,et $c_0 = 1$ alors $c(\rho) < \infty$.

Définition 3.2.2 2°) *Pour tout opérateur* $\varphi \in$■ *tels que* $\varphi_k = 0, k \neq 0$,*est un bon opérateur* $c(\rho) = 1$.

3°)Si on multiplie un opérateur par une série $a \in \mathbb{C}\{x\}$ est un bon opérateur: $\varphi(u) = a.u = \sum_{m\geq 1} \sum_{0\leq k\leq m}(a_k.u_{m-k})x \, |\varphi_k(m-k)| = |a_k| \leq C_k \, |a_0|$, Si $a_0 = 1$,on peut prendre $C_k = |a_k|$.

La domination:

Soit φ $\in$■ , $\Psi \in \wp$*nous disons que* φ domine Ψ,si pour tout m et tout k$\in [0, 1, ..., m]$,il existe d$_k \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$|\Psi_k(m-k)| \leq d_k \, |\varphi_0(m-k)|$,et il existe $\rho > 0$ tel que $\sum_{k\geq 0} d_k \rho^k < \infty$.

$\Longrightarrow$ Notons qu'un bon opérateur est donc un opérateur qui se domine.

Remarque 3.2.1 *Si* φ *est un opérateur qui domine les opérateurs* $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n$

;alors pour tout m et tout k$\in [0, 1, ..., m]$;*il existe* $C_k \in \mathbb{R}^+$ *tels que pour tout* j = *1,2,...,n* $|\ \Psi_{j,k}(m-k)| \leq C_k \, |\varphi_0(m-k)|$

$|\ \Psi_k(m-k)| \leq C_k \, |\varphi_0(m-k)|$

Avec $\sum_{k\geq 0} C_k \rho^k < \infty$ *pour* $\rho \in \mathbb{R}^+$.

Définition 3.2.3 *Nous dirons qu'un opérateur* $\varphi \in \wp$*domine strictement un opérateur*

$\wp$*si* :

1°) φ domine Ψ

2°)$Lim_{m\mapsto\infty} \frac{\Psi_0(m)}{\varphi_0(m)} = 0$

3.3 Une classe d'opérateurs a singularité régulière

Soit $F(x, X_0, X_1, ..., X_n, X\prime_1, ..., X\prime_N)$ une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$ et tq $F(0, 0, 0) = 0$

$F(x, X, X\prime) \ = \sum_{\beta+|\alpha|+|\alpha'|\geq 1} a_{\beta.\alpha.\alpha'}.x^{\beta}X^{\alpha}X'^{\alpha'};$

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \quad ; \quad \alpha' = (\alpha'_0, ..., \alpha'_N)$

$F(x, X, X\prime) \ = \ \sum_{p\geq 1} = F_p(x, X, X')$ ou $F_p(x, X, X') = \sum_{\beta+|\alpha|+|\alpha'|=p} a_{\beta,\alpha,\alpha'}x^{\beta}X^{\alpha}X'^{\alpha'}$

Soit $\theta_0 = Id., \theta_1, ..., \theta_n; \theta'_1, ..., \theta'_N$ une suite d'opérateurs de P . ie: si φ_j est un élément de cette suite , on a pour tout u $\in \hat{m}$

$\varphi_j(u) = \sum_{m\geq 1} (\sum_{0\leq k\leq m-1} \varphi_{j,k}(m-k)u_{m-k})x^m$

On considère dans la suite l'opérateur P-analytique :

$D : \hat{m} \to \hat{m}$

$Du = F(x \ , \theta_0 u, ..., \theta_n u; \theta'_1 u, ..., \theta'_N u)$,soit q tels que $F_q \equiv 0$ pour tout $p < q$ et$F_q \neq 0$ de plus on suppose : $F_q(x, X, X^{'})$ ne contient pas $X\prime$, ie:

$F_p(x, X, X') = \sum_{\beta+|\alpha|=q} a_{\beta,\alpha}x^{\beta}X^{\alpha}$, ou $a_{\beta,\alpha} = a_{\beta,\alpha,0}$

A l'opérateur D associons les n+2 polynômes:

$C_q(D)(X) = \sum_{\beta+|\alpha|=q} \ a_{\beta\alpha}(\theta_{0,0}(1))^{\alpha_0}......(\theta_{1,0}(1))^{\alpha_n}X^{|\alpha|}$ et pour j = 0,1,...,n

$C_{q,j}(D)(X) = \sum_{\beta+|\alpha|=q} \ a_{\beta\alpha}\alpha_j(\theta_{0,0}(1))^{\alpha_0}......(\theta_{j,0}(1))^{\alpha_{j-1}}, ..., (\theta_{n,0}(1))^{\alpha_n}X^{|\alpha|-1}$

Les hypothèses (H)

1°) Parmis les opérateurs $\theta_0 = Id., \theta_1, ..., \theta_n$ il y'a un bon opérateur qui domine strictement les autres, notons le θ_{j_0}

2°) L'opérateur θ_{j_0} domine tous les opérateurs $\theta'_1, ..., \theta'_N$

3°) Les polynômes $C_q(D)(X)$ et $C_{q,j_0}(D)(X) \neq 0$ n'ont pas de racine commune.

Remarque 3.3.1 *La condition :*$C_{q,j_0}(D)(X) \neq 0$ *, exprime que* θ_{j_0} *figure explicitement dans* $F_q(x, u, \theta_1 u, ..., \theta_n u)$.

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses (H) toute solution formelle de l'équation* $Du = F(x, u,\ \theta_1 u, ..., \theta_n u; \theta'_1 u, ..., \theta'_N u) = 0$ *est convergente.*

$-$ >La démonstration de ce théorème est détaillé clairement dans [3]; elle se fait en 2 parties:

1°) Existence d'une solution formelle;

2°)Convergence des solutions formelles.

Corollaire 3.3.1 *Si parmis les opérateurs* $\theta_0 = Id., \theta_1, ..., \theta_n$ *, il y'a un bon opérateur* θ_{j_0} *qui domine strictement tout les autres et tel que* $C_q(D)(X)$ *et* $C_{q,j_0}(D)(X)$ *soient sans racine commune; l'opérateur:* $D_q(u) = \sum_{\beta+|\alpha|=q;|\alpha|\neq 0} a_{\beta\alpha} x^{\beta} u^{\alpha_0}(\theta$ *à singularitè régulière.*

Remarque 3.3.2 *Pour toute racine* u_1 *de* $C_q(D)(X) = 0$ *vérifiant* $F_{q,m}(u_1) \neq 0$ *pour tout* m *, l'équation* $Du = 0$ *admet une solution formelle de premier terme* $u_1 x$ *si de plus* $c_{q,j_0}(D)(u_1) \neq 0$ *cette solution formelle est convergente.*

Exemple 3.3.1 *Soit* $\theta_1 = x.\frac{d}{dx}$ *et pour tout* $j = 2, 3, ..., n;\ \theta_j = (\theta_1)^j$*.Considérons l'opérateur*

$Du = \sum_{|\alpha|=1} \ a_\alpha(x)u^{\alpha_0}(\theta_1 u)^{\alpha_1}...(\theta_n u)^{\alpha_n}$, $a_\alpha \in \mathbb{C}\{x\}$,que l'on peut écrire sous la forme :

$Du = \sum_{i=0}^{n} \ b_i(x)u(\theta_1)^i$,ou $\forall i, b_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$

$=\sum_{i=0}^{n} \ b_i(0)u(\theta_1)^i + R_2(x, u, \theta_1 u, ..., \theta_1^n u)$

L'opérateur $(\theta_1)^n$ est bon et domine strictement $(\theta_1)^q$ pour tout q < n ainsi que l'identité : $\mathrm{C}_1(D)(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i(0)X$, $\mathrm{C}_{1,n}(D)(X) = b_n(0)$

Si $b_n(0) \neq 0$,l'opérateur D est à singularité régulière, on trouve ainsi le critère classique de L.Fuchs.

3.4 Applications aux équations différentielles

Considèrons le bon opérateur : $\theta : \mathbb{C}\{x\} \to$ m , u= $\sum_{m\geq 1} u_m x^m, u = x.\frac{du}{dx} = \sum_{m\geq 1} m.u_m x^m$, et un opérateur $\mathrm{L}_0 - analytique$:

$Du = F(x, u, \theta u, ..., \theta^n u) \ ou \ F(x, X_0, ..., X_n) = \sum_{p>1} \ F_p(x, X_0, ..., X_n)$

et $\quad F_p(x, X_0, ..., X_n) = \sum_{\beta+|\alpha|=p} a_{\beta,\alpha} x^\beta X_0^{\alpha_0} .....X_n^{\alpha_n}$

Soit q (entier) tel que $F_p \equiv \ 0$ pour $p < q$ et $F_q \equiv 0$.

Comme pour $\forall j \in \{0, 1, ...n\}, \theta^j u = \sum_{m\geq 1} m^j.u_m.x^m$, on sait que θ^n domine strictement tout les autres opérateurs θ^j.

Introduisons $C(D)(X) = \sum_{\beta+|\alpha|=q} \ a_{\beta\alpha}.X^{|\alpha|}; C_n(D)(X) = \sum_{\beta+|\alpha|=q} \ a_{\beta\alpha}.\alpha_n.X^{|\alpha|-1}$.

$F_{q,m}(X) = \sum_{\beta+|\alpha|=q} a_{\beta\alpha} \sum_{j=0}^{n} .\alpha_j.m^j.X^{|\alpha|-1}$.

Le théorème 1 nous donne alors:

Théorème 3.4.1 *Pour toute racine* u_1 *de* $C(D)(X)$ *vérifiant* $C_n(D)(u_1) \neq 0$ *et pour tout* $m \in \mathbb{N}, F_{m,q}(u_1) \neq 0$,*il existe une solution holomorphe :* $u = \sum_{m\geq 1} u_m.x^m$ *de* $Du = 0$.

Théorème 3.4.2 *Si C(D)(X) et* $C_n(D)(X)$ $\neq 0$,*sont sans racine commune, les opérateurs :* $D_q u = F_q(x, u, \theta u, ..., \theta^n u)$ *et* $Du = F(x, u, \theta u, ..., \theta^n u)$ *sont à singularitè réguliere.*

3.5 Théorème de Maillet

Soit t $\in \mathbb{C}$,on note par : $\mathbb{C}[[t]]$,l'anneau des séries formelles en t ;et par $\mathbb{C}\{t\}$ le sous anneau de $\mathbb{C}[[t]]$ des séries convergentes en t.Soit s ≥ 1, si la série formelle u $= \sum_{i\geq 0} a_i t^i \in \mathbb{C}[[t]]$;satisfait $\sum_{i\geq 0} \frac{a_i t^i}{i!^{s-1}} \in \mathbb{C}\{t\}$,on dit que u est dans la classe formelle de Gevrey$\mathbb{C}\{t\}_s$.

3.5.1 La généralisation du théorème 3.4.1 de la section 3.4

Soit : 1°) $F(x, X_0, ..., X_M) = \sum_{1\leq r+|s|=q\leq R} a_{r,s}.x^r.X^s$
ou $s = (s_0, ..., s_M)$; $|s| = s_0 + s_1 + ... + s_M$,$X^s = (X_0)^{s_0}(X_1)^{s_1}....(X_M)^{s_M}$

un polynôme sans terme constant.

2°) Une suite d'opérateurs diagonaux $\theta_0 = Id.\theta_1, \theta_2, ...\theta_M$,agissant sur l'idéal maximal de l'anneau des séries formelles de la manière suivante :

$\theta_j(\sum_{m\geq 1} u_m x^m) = \sum_{m\geq 1} \theta_{j,0}(m) u_m x^m$

Considérons l'équation opérateur,

(1)....$F(x, y, \theta_1 y, \theta_2 y, ...\theta_M y) = 0$ et supposons que parmis les opérateurs $\theta_j (0 \leq j \leq M)$ qui sont tous bons car diagonaux il y' en a un , disons θ_n qui domine strictement les opérateurs θ_j pour $0 \leq j < n$.

L'équation peut se mettre sous la forme:

$F_p(x, y, \theta_1 y, ..., \theta_n y) = R_{p+1}(x, y, \theta_1 y, ..., \theta_N y)$

où

$F_p(x, X_0, ..., X_n) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} x^r (X_0)^{s_0} .....(X_n)^{s_n}$

et $R_{p+1}(x, X_0, X_1, ..., X_N) = \sum_{p<q<R} \sum_{r+|s|=q} a_{r,s} x^r (X_0)^{s_0} ....(X_N)^{s_N}$

Le cas ou θ_n, dominant strictement les operateurs θ_1 pour $0 \leq$ j $<$ n domine également les opérateurs θ_j pour n $\leq j \leq N$ a été étudié précedement.

Remarque 3.5.1 *Nous avons supposé ci-dessus que le polynôme* $F(x, X_0, X_1, ..., X_M) = \sum_{1\leq r+|s|=q\leq R} a_{r,s}.x^r.X^s$ *,était sans terme constant.Si ce n'est pas le cas et si l'équation (1) admet une solution formelle on peut toujours par translation se ramener à une équation polynômiale sans terme constant.*

$-$Le théorème que nous allons voir reste encore vrai lorsque

$F(x, X_0, X_1, ..., X_M) = \sum_{1\leq|s|\leq R} a_{r,s}(x).X^s$ ou $a_{r,s}(x)$ sont holomorphe dans un disque centré à l'origine du plan complexe.

En plus des hypothèses faites ci-dessus sur les opérateurs θ_j , supposons réalisé la condition (H) suivante:

$\forall m \geq 1$, $\forall q(p < q \leq R)$ tout $(r, s_0, ..., s_N)$ avec $r + |s| = q$,toute suite:

$m_0^1, m_0^2, ..., m_0^{s_0}; m_1^1, m_1^2, ..., m_1^{s_1}; ......; m_N^1, ..., m_N^{s_n}$ tels que :

$r + m_0 + m_1 + ... + m_N = m + p - 1$ ou

$m_0^1, m_0^2, ..., m_0^{s_0} = m_0; m_1^1, m_1^2, ..., m_1^{s_1} = m_1; .....; m_N^1 + ... + m_N^{s_N} = m_N$

$G_n(m) = 1/ |\theta_{n,0}(m)| \{ \prod_{1 \leq k \leq s_0} \left|\theta_{0,0}(m_0^k)\right| \times \prod_{1 \leq k \leq s_1} \left|\theta_{1,0}(m_1^k)\right| \times ..... \times \prod_{1 \leq k \leq s_N} \left|\theta_{N,0}(m_N^k)\right| \} \leq h$ (constante)

On normalise θ_n on peut supposer que h = 1, par la suite.On convient que si $m_j^k = 0, \theta_{j,0}(m_j^k)$.n'y figurent pas explicitement.

Théorème 3.5.1 *Sous les hypothèses indiqués ci-dessus , toute racine y_1 du polynôme:*

C(D)(X) $= \sum_{r+|s|=q} a_{r,s}(\theta_{0,0}(1))^{s_0}(\theta_{1,0}(1))^{s_1}, ..., (\theta_{n,0}(1))^{s_n} X^{|s|}$ *vérifiant:*

$C_n(D)(X) = \sum_{r+|s|=q} a_{r,s} s_n (\theta_{n,0}(1))^{s_n - 1} \prod_{n \neq 1} (\theta_{1,0}(1))^{s_1} |y_1|^{|s|-1} \neq 0$

et $F_{p,m}(y_1) \neq 0$ *ou* $F_{p,m}(y_1) = \sum_{r+|s|=p,|s|\neq 0} a_{r,s} \sum_{0 \leq j \leq n} s_j \theta_{j,0}(m)(\theta_{i,0}(1))^{s_j - 1} \prod_{j \neq 1} (\theta_{1,0}(1))^{s_1} y$ *donne une solution holomorphe* $\sum_{m \geq 1} y_m x^m$ *de l'équation (1).*

De plus si notre équation admet une solution formelle $\sum_{m \geq 1} y_m x^m$ *même si* $F_{p,m}(y_1) = 0,$ *celle ci converge.*

—————————————————————————————————

Preuve:(est basé sur la méthode des séries majorantes due à Cauchy)[4]

3.5.2 Application: Théorème de Maillet:[4]

Soit $G(x\ ,X)=\sum_{1\leq r+|s|=q\leq R} b_{r,s}x^r X^s$ un polynôme de degré R en les indéterminées $x, X_0, X_1, ..., X_M$.Considèrons l'équation differentielle algèbrique:

$(1)G(x, y, y', ..., y^{(M)}) = 0$

par multiplication par une puissance de x convenable, on aura :

$$(1')\quad F(x, y, \theta y, \theta^2 y, ..., \theta^M y) = \sum_{1\leq r+|s|=q\leq R} a_{r,s}x^r y^{s_0}(\theta y)^{s_1}.....(\theta^M y)^{s_M} = 0$$

ou

$\theta = x.\frac{d}{dx}$.Ce que l'on peut écrire :

$F_p(x, y,\ \theta y, ..., \theta^n y) = R_{p+1}(x, y, \theta y, ..., \theta^N y)$

où

$$F_p(x, X_0, ..., X_n) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s}x^r(X_0)^{s_0}....(X_n)^{s_n},$$

$$R_{p+1}(x, X_0, ..., X_N) = \sum_{p<q\leq R}\sum_{r+|s|=q} a_{r,s}x^r(X_0)^{s_0}....(X_N)^{s_N}$$

Dans [3], le cas n $\geq$N a été bien étudié comme application de ces deux théorème1,2.

On considère le cas n $<$ N. On sait que l'opérateur θ^n domine strictement tous les opérateurs θ^j pour $0\leq j \leq n$.

Supposons que les deux polynômes $F_p(1, X, X, ..., X)$ et $\frac{\partial}{\partial X_n}(F_p)(1, X, ..., X)$ n'ont pas de racine commune (c'est une hypothèse supplémentaire lorsque p > 1). Cette condition est vérifiée si p = 1 puisque θ^n figure explicitement dans $F_1(x, y, \theta y, ..., \theta^n y)$.

Exemple 3.5.1 *Si on prend l'équation d'Euler:*
$x^2 y\prime - y = -x$ *,qui s'écrit :* $x\theta y - y = -x$
donc :$F(x, X) = -X_0 + x$ *et* $R_2(x, X) = x.X_1$

Théorème de Maillet[4]

Toute solution formelle de (1) est dans une certaine classe de Gevrey.

Explication:

Ce théorème veut dire que si $\sum_{m\geq 1} y_m x_m$ est une solution formelle de (1) , il existe ,deux constantes c et γ tels que :
$|y_m| \leq c(m!)^{\gamma}$.L'existence d'une solution formelle pour l'équation (1) entraine l'éxistence d'une solution formelle pour (1').

Preuve. [4] ∎

Exemple 3.5.2 *Revenons à l'équation d'Euler :*

$x^2 y\prime - y = -x$,qui s'écrit : $x\theta y - y = -x$

On determine le nombre α qui determine la classe de Gevrey de la solution formelle, nous avons $F_1(x,X) = \ -X_0 + x\ et\ R_2(x,X) = x.X_1$

donc p = 1, R = 2 , n = 0 et N = 1.
On voit facilement que:

$Sup_{1\leq q\leq 2}\{Sup_{r+|s|=q=2}((s_0 + s_1 - 0)/((q-p) = 1))\} = 1$

On peut donc prendre $\alpha = 1$.Par un cacul direct sur l'équation d'Euler , on

voit qu'elle admet une solution formelle unique :
$y = \sum_{m\geq 1}(m-1)!.x^m$ divergente . La borne inferieure

$Sup_{p<q\leq R}\{Sup_{r+|s|=q}(((\sum_{0\leq j\leq N} js_j)\ -\ n)/(q-p))\}$que nous avons mise en évidence ci-dessus pour le nombre αest donc assez bonne.

Remarque 3.5.2 *Ce théorème reste encore vrai si l'on suppose que l'équation differentielle est un polynôme en y, y', ...,*$y^{(n)}$ *dont les coefficients sont des fonctions analytiques dans un voisinage de l'origine du plan complexe.*

Conclusion

La recherche de solutions formelles pour les systèmes différentiels est une méthode très classique, elle consiste à identifier les coefficients des puissances successives de la série formelle en question. Dans le cas singulier régulier, l'analyticité de ces solutions formelles est aisée et bien connue. **D**ans le cas singulier irrégulier, la convergence des solutions formelles est moins évidente à établir, il faut pour cela des conditions suffisantes, exigeantes, comme le montre le Théorème de Sibuya.
Toutefois, lorsque l'on ne peut pas aboutir à la convergence des solutions formelles, la technique de sommabilité et de multi-sommabilité, donnent un sens aux solutions de systèmes différentiels (linéaires et non linéaires).

Bibliographie

[1] **M.Artin** : On the solutions of analytic equations Inventiones Mathematicae , 1968.

[2] **R.Gérard**: Solutions formelles et convergentes de certains systèmes de Pfaff analytiques avec singularités-Séminaire de François Norguet .Lectures Notes in Mathematics. Vol 670.

[3] **R.Gérard**:Une classe d'équations differentielles non linéaires a singularités régulières.Funkcialaj Ekvacioj,29(1986).

[4] **R.Gérard**: Sur le théorème de Maillet -Funkcialaj Ekvacioj,34(1991)117-125, IRMA Strasbourg,France.

[5] **R.Gérard & Y.Sibuya:** Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champs complexe , Lectures Notes in Mathématics -1979 , Volume 712 p.131-288.

[6] **Einar Hille:**Ordinary Differential Equations in the Complex Domain

[7] **L.Hormander:** An introduction to complex analysis in serval variable,North-Holland Publishing company, 1973.

[8] **W.A.Harris,J.R ,Y.Sibuya, et,L.Weinberg** : holomorphic solutions of linear differential equations at singular points;archiv.for.Rational Mech.Anal , 35,(1969) ,245-248 .

[9] **W.A.Harris,J.R , Y.Sibuya, et,L.Weinberg** : holomorphic solutions of linear differential equations at singular points;Advanced in differential and integral equations SIAM:Studies inapplied Math.;N°5 (1969) ,184-185.

[10] **E.Maillet**, Sur les séries divergentes et les équations differentielles , Ann.Ecole Normale,(3), 20 , 487-518.

[11] **Bernard Malgange & Jean-Pierre Ramis**,Fonction multisommables, ann.Inst.Fourier,Grenoble 42. 1-2(1992). 354-355.

[12] **J.P.Ramis**, Dévissage Gevrey ,Astérisque, 59-60 (1978), 173,204

[13] **J.P.Ramis**, les séries k-sommables et leurs applications, Aanalysis Microlocal calculus and Relativistic Quantum theory,Proceedings"Les Houches" 1979,Springer Lecture Notes in Physics, 126 (1980), 178-199.

[14] **J.P.Ramis & Y.Sibuya**, Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type, asymp.Anal.,2(1989). 39-94

[15] **Med-Salem Rezaoui :** Solutions polynômials de certains systèmes différentiels singuliers,Thèse de Magister, Université d'Alger(USTHB),1994.

[16] **Med-Salem Rezaoui:** Convergence of formal solutions of some non linear differential systems at an irregular singularity, Asymptotic Analysis, Vol 46 (2) , IOS Press, (2006),93-122.

[17] **Y.Sibuya**,Convergence of formal power series solutions of a system of non linear differntial equations at an irregular singular point, Lecture Notes in Math.810, Springer ,1980, 135-142.

[18] **Y.Sibuya**, Convergence of formal solution of meromorphic differential equations containing parameters-Funkcialaj Ekvacioj,37(1994) 395-400

[19] **Y.Sibuya,**Simplication of a system of linear ordinary differential equations about a singular point.F.E.4(1962)p.29-56 et 11(1968)p.235-246

[20] **Georges Valiron,** Cours d'analyse mathématiques,Equations fonctionnelles, Applications-Masson(1950)

[21] **Wolfgang Wasow**,Asymptotic expansions for ordinary differential equations ,Roberte.Krieger Publiching Company Huntington,New York 1976 .