Nř : d'ordre : 37/2012-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie «Houari Boumediene»

Faculté de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Recherche Opérationnelle**

Par

SAIDI Yamina

Thème

Polynômes de Bell et variables aléatoires

Soutenu publiquement le 07/06/2012, devant le jury composé de :

M^{elle}.	BOUCHMAKH Isma	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Présidente.
M.	MIHOUBI Miloud	M.C/A	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de MEMOIRE.
M.	BOUROUBI Sadek	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.
M.	BELBACHIR Hacène	M.C/A	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.

Alà barakati Allah

Remerciements

Je remercie en premier lieu ALLAH, pour la foi, la confiance et la volonté dont il m'a doté.

Je remercie aussi ma chère mère pour son sacrifice et sa présence à coté de moi avec ses prières. Que mon mari Hamid trouve l'expression de ma sincère et profonde gratitude. Je le remercie pour son soutien, sa compréhension, son aide et son encouragement, sans lesquels ce mémoire n'aurait jamais eu lieu.

Je tiens ensuite à exprimer mes sincères remerciements et ma reconnaissance à mon Directeur de Thèse, Monsieur ***Miloud MIHOUBI,*** *Maître de Conférence A à l'U.S.T.H.B, d'avoir su guider mes premiers pas vers la recherche. Je le remercie pour son aide, sa patience, ses précieux conseils tout au long de l'élaboration de ce travail et son effort incessant afin de me permettre d'élaborer au mieux ce mémoire.*

J'exprime mes remerciements chaleureux à Mlle ***Isma BOUCHMAKH****, Professeur à l'U.S.T.H.B, qui m'a honoré en acceptant d'être présidente du jury de ma thèse.*

Je suis aussi très reconnaissante à Monsieur ***Sadek BOUROUBI,*** *Professeur à l'U.S.T.H.B, pour son aide. Je le remercie d'avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.*

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur ***Hacène BELBACHIR,*** *Maître de Conférence A à l'U.S.T.H.B, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

Dédicaces

A mes très chers parents,

A mon mari Hamid et à mes enfants :

Raghda, Mohammed Ramzi et Riham Aicha,

A mes frères, à mes sœurs et à tous les membres de ma famille,

A ma belle mère et à mes belles soeurs,

A toutes mes amies.

Table des matières

Introduction

Les polynômes de Bell sont définis et étudiés par le mathématicien Bell (1927) [6], leur dénomination fût introduite par Riordan qui a observé qu'ils interviennent dans l'expression des dérivées d'ordre n de la composée de deux fonctions, connue par le nom "Formule de Faà di Bruno". Ensuite, ils sont décrits et étudiés dans plusieurs références telles que [16] et [15]. Depuis 1950, plusieurs auteurs ont étudié les polynômes de Bell où de nouvelles identités et relations récurrentes ont été établies. Dans sa thèse de Doctorat d'Etat [28], Mihoubi a étudié ces polynômes en connexion avec les suites binomiales et leurs dérivées successives, des congruences, des formules d'inversions, de suites multinomiales et des nombres de partitions d'un entier où il a établie de nouvelles relations induisant à plusieurs identités.

En effet, les polynômes de Bell sont apparus pour être utiles pour la solution de multiples problèmes mathématiques tels que l'évaluation de quelques integrales, sommes alternées et processus stochastiques en combinatoire. Ils ont aussi d'autres applications dans d'autres domaines tel que les partitions aléatoires de Gibbs [8], pour l'analyse des processus physiques de fragmentation et de coigulation.

Dans notre travail, nous nous intéressons à l'application des polynômes de Bell dans une étude à orientation probabiliste et combinatoire. Les polynômes de Bell sont utilisés pour exprimer des lois de probabilités et quelques paramètres de variables aléatoires discrètes tels que les moments et les cumulants, donner l'expression de la loi et les moments de la somme de variables aléatoires indépendantes et approximer la médiane pour cette somme. Des interprétations probabilistes et combinatoires sont données. Ainsi, notre mémoire comporte cinq chapitres :

Dans le premier chapitre nous citons l'essentiel des définitions, relations réccurentes et identités utiles des polynômes complets et partiels de Bell avec quelques exemples. Nous proposons une interprétation combinatoire liée à des ensembles de partitions coloriés, une interprétation probabiliste et deux nouvelles identités.

Nous passons dans le deuxième chapitre à l'étude des moments et des cumulants d'une variable aléatoire discrète, où nous citons quelques conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite donnée soit une suite de moments ou de cumulants avec des exemples.

Dans le troisième chapitre, nous citons l'expression de la loi et des moments de la somme de variables aléatoires discrètes, indépendantes et identiquement distribuées, ainsi que la loi et les moments factoriels d'une distribution composée.

Dans le quatrième chapitre, comme cas particulier, l'étude d'une loi de Poisson est présentée. Les moments centrés d'une loi de Poisson sont exprimés à l'aide d'une nouvelle généralisation des polynômes de Bell, ainsi que l'interprétation combinatoire des nombres de Stirling généralisés. Des expressions pour des exemples de lois de Poisson composées et ses moments factoriels sont présentées.

Le dernier chapitre comporte deux parties. Dans la première partie, le Théorème Centrale Limite est appliqué pour approximer la médiane de la somme de variables aléatoires indépendantes en utilisant les polynômes de Bell et déduire de nouvelles identités, quelques exemples sont donnés. Dans la deuxième partie, nous citons des résultats, concernant la domination dans les graphes aléatoires, déduits en utilisant les polynômes de Bell.

Généralités

Dans ce chapitre, nous présentons les nombres combinatoires qui serons utilisés dans les chapitres qui suivent. Nous citons leurs fonctions génératrices, interprétations combinatoires ainsi que quelques identités et relations récurrentes.

0.1 Nombres de Stirling

Soit $(t)_n$ le factoriel descendant d'ordre n de t, donné par :

$$(t)_n = t(t-1)\ldots(t-n+1), n \geq 1, (t)_0 = 1. \tag{1}$$

Soit $t^{(n)}$ le factoriel ascendant d'ordre n de t, donné par :

$$t^{(n)} = t(t+1)\ldots(t+n-1). \tag{2}$$

Il est clair que c'est un polynôme de t de degré n. En exécutant les multiplications et en arangants les termes dans l'ordre décroissant des puissances de t, On obtient :

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, t^k, n \geq 0. \tag{3}$$

Inversement, t^n peut être exprimer sous la forme d'un polynômes de factoriels de t et on a :

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(t)_k\,, n \geq 0. \tag{4}$$

On a donc, la définition suivante :

Définition 0.1 *Les coéfficients $s(n,k)$ et $S(n,k)$ des développements (3) et (4) sont appelés nombres de Stirling de première et de deuxième espèce, respectivement.*

Cette définition implique :

$$\begin{aligned} s(n,k) &= S(n,k)=0 \text{ pour } 1\leq n<k. & (5)\\ s(0,0) &= S(0,0)=1 \text{ et } s(0,k)=S(0,k)=0 \text{ pour } k\geq 1. \end{aligned}$$

Et on a :

$$t^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\left|s(n,k)\right|t^{k}, n\geq 0, \tag{6}$$

Où,

$$\left|s(n,k)\right|=(-1)^{n-k}s(n,k). \tag{7}$$

On a donc la définition :

Définition 0.2 *Les coéfficients $|s(n,k)|$ du développement (6) sont appelés nombres de Stirling absolus de première espèce.*

0.1.1 Fonction génératrice

Théorème 0.3 *[16] Les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$ admettent la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n,k\geq 0}s(n,k)\frac{t^{n}}{n!}x^{k}=(1+t)^{x}, \tag{8}$$

ou, d'une manière équivalente

$$\sum_{n\geq k}s(n,k)\frac{t^{n}}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\ln(1+t)\right)^{k}, k\geq 0. \tag{9}$$

Théorème 0.4 *[16] Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ admettent la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n,k\geq 0}S(n,k)\frac{t^{n}}{n!}x^{k}=\exp\left(x\left(e^{t}-1\right)\right), \tag{10}$$

ou, d'une manière équivalente

$$\sum_{n\geq k}S(n,k)\frac{t^{n}}{n!}=\frac{1}{k!}\left(e^{t}-1\right)^{k}, k\geq 0. \tag{11}$$

Théorème 0.5 *[16] Les nombres de Stirling absolus de première espèce $|s(n,k)|$ admettent la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n,k\geq 0}\left|s(n,k)\right|\frac{t^{n}}{n!}=\frac{1}{k!}\left(-\ln(1-t)\right)^{k}, \tag{12}$$

0.1.2 Interprétation combinatoire

Le nombre de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs.

Le nombre de Stirling absolus de première espèce $|s(n,k)|$ est le nombre de permutations de n éléments se décomposant en k cycles disjoints. De manière plus générale, ces nombres sont les valeurs absolues des nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$.

0.1.3 Expression explicite

Théorème 0.6 *[14] Les nombres de Stirling de première et de seconde espèce $s(n,k)$ et $S(n,k)$ sont donnés par la somme :*

$$s(n,k) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!} \left(\frac{1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_2} ... \left(\frac{1}{n}\right) \tag{13}$$

et

$$S(n,k) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2} ... \left(\frac{1}{n!}\right)^{k_2}, \tag{14}$$

respectivement, où la somme porte sur toutes les partitions de n en k parts, c'est-à-dire sur toutes les solutions $k_1, k_2, ...,$ des entiers naturels tels que :

$$k_1 + k_2 + k_3 + ... = k \quad et\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... = n$$

Théorème 0.7 *[16] Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ admettent la formule explicite :*

$$S(n,k) = \sum_{c_1+c_2+...+c_k=n-k} 1^{c_1}2^{c_2}\dots k^{c_k}. \tag{15}$$

D'une autre manière, Le nombre de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ est la somme de tous les produits des $(n-k)$ (pas nécessairement distincts) entiers pris de l'ensemble $\{1,2,\dots,k\}$, (il ya $\binom{n-1}{k-1}$ produits).

On a par exemple : $S(5,2) = 1^3 + 1^2.2 + 1.2^2 + 2^3 = 15$.

Théorème 0.8 *[14] Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$, $k = 0,1,\dots,n$, $n = 0,1,\dots,$ sont donnés par la somme :*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n. \tag{16}$$

Théorème 0.9 *[14] Les nombres de Stirling absolus de première espèce* $|s(n,k)|, k = 0, 1, \ldots, n$*,* $n = 0, 1, \ldots,$ *sont donnés par la somme :*

$$|s(n,k)| = \sum j_1 j_2 ... j_{n-k},$$

où la somme porte sur toutes $(n-k)$*-combinaisons* $\{j_1, j_2, ..., j_{n-k}\}$ *des* $(n-1)$ *entiers positifs* $\{1, 2, ..., n-1\}$.

Théorème 0.10 *[14] Les nombres de Stirling de seconde espèce* $S(n,k), k = 0, 1, \ldots, n$*,* $n = 0, 1, \ldots,$ *sont donnés par la somme :*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n. \tag{17}$$

Théorème 0.11 *[14] Les nombres de Stirling de première espèce* $S(n,k), k = 0, 1, \ldots, n$*,* $n = 0, 1, \ldots,$ *sont donnés par la double somme :*

$$s(n,k) = \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \binom{n+r-1}{k-1} \binom{2n-k}{n-k-r} \frac{j^{n-k+r}}{r!}. \tag{18}$$

0.1.4 Relations récurrentes et identités

Théorème 0.12 *[14] Les nombres de Stirling de première et de seconde espèce* $s(n,k)$ *et* $S(n,k)$ *satisfont les relations :*

$$\sum_{j=k}^{n} s(n,j) S(j,k) = \delta_{n,k}, \sum_{j=k}^{n} S(n,j) s(j,k) = \delta_{n,k}, \tag{19}$$

où $\delta_{n,k} = 1$ *si* $k = n$ *et* $\delta_{n,k} = 0$ *si* $k \neq n$.

Théorème 0.13 *[14] Les nombres de Stirling de première espèce* $s(n,k)$ *sont exprimés en fonction des nombres de Stirling de seconde espèce* $S(n,k)$ *par :*

$$s(n,k) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n+j-1}{k-1} \binom{2n-k}{n-k-j} S(n-k+j, j). \tag{20}$$

Théorème 0.14 *[16] Les nombres de Stirling de première espèce* $s(n,k), k = 0, 1, \ldots, n$*,* $n = 0, 1, \ldots,$ *satisfont la relation récurrente triangulaire :*

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k), \tag{21}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n+1$, $n = 0, 1, \ldots,$ *avec les condition initiales* $s(0,0) = 1; s(n,0) = 0, n > 0; s(n,k) = 0, k > n.$

Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k), k = 0, 1, \ldots, n,$ $n = 0, 1, \ldots,$ *satisfont la relation récurrente triangulaire :*

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) - kS(n,k), \tag{22}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n+1$, $n = 0, 1, \ldots,$ *avec les condition initiales* $S(0,0) = 1; S(n,0) = 0, n > 0; S(n,k) = 0, k > n.$

Théorème 0.15 *[16] Les nombres de Stirling de première espèce* $s(n,k), k = 0, 1, \ldots, n,$ $n = 0, 1, \ldots,$ *avec* $s(0,0) = 1$, *satisfont la relation récurrente vertcale :*

$$s(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} (n)_{n-j}\, s(j,k). \tag{23}$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k), k = 0, 1, \ldots, n,$ $n = 0, 1, \ldots,$ *avec* $S(0,0) = 1$, *satisfont la relation récurrente vertcale :*

$$S(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} S(j,k). \tag{24}$$

Théorème 0.16 *[16] Les nombres de Stirling de première espèce* $s(n,k), k = 0, 1, \ldots, n,$ $n = 0, 1, \ldots,$ *avec* $s(0,0) = 1$, *satisfont la relation récurrente horisontale :*

$$s(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} s(n,j). \tag{25}$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k), k = 0, 1, \ldots, n,$ $n = 0, 1, \ldots,$ *avec* $S(0,0) = 1$, *satisfont la relation récurrente vertcale :*

$$S(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} (j)_{j-k}\, S(n+1,j+1). \tag{26}$$

En utilisant la relation récurrente (21) et les conditions initiales, on peut calculer les premiers nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$:

k/n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	-1	1					
3	0	2	-3	1				
4	0	-6	11	-6	1			
5	0	24	-50	35	-10	1		
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

En utilisant le relation récurrente (22) et les conditions initiales, on peut aussi calculer les premiers nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$:

k/n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

0.2 Nombres de Bell

Définition 0.17 *Les nombres de Bell B_n sont définis par la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \exp\left(e^t - 1\right). \tag{27}$$

Le nombre de Bell B_n est le nombre de toutes les partitions d'un ensemble à n éléments.

Les nombres de Bell B_n vérifient :

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k), \\ B_n &= \sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{n-1}{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}, \\ B_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k^n}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!} \end{aligned}$$

0.3 Nombres de Lah

Définition 0.18 *Les coéfficients $L(n,k)$ du développement*

$$t^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)\,(t)_k\,, n \geq 0, \tag{28}$$

sont appelés nombres de Lah, avec $L(0,0) = 1$ et $L(n,k) = 0$ si $k > n$.

Théorème 0.19 *[14] Les nombres de Lah $L(n,k)$ admettent la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} L(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^k. \tag{29}$$

Le nombre de Lah $L(n,k)$ est le nombre de toutes les partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs où les éléments de chaque bloc sont ordronnés.

On a : $L(n,1) = n!$ et $L(n,n) = 1$.

0.3.1 Relations récurrentes et identités

Les nombres de Lah $L(n,k)$ vérifient :

$$\begin{aligned} L(n,k) &= \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!} = \binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!}, \\ L(n,k+1) &= \frac{n-k}{k(k+1)}L(n,k). \end{aligned}$$

Pour $k = 1,2,\ldots,n; n = 1,2,\ldots$

$$L(n,k) = \sum_j |s(n,j)|\, S(j,k).$$

Voici les premiers nombres de Lah :

k/n	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	6	6	1			
4	24	36	12	1		
5	120	240	120	20	1	
6	720	1800	1200	300	30	1

0.4 Nombres Idempotents

Définition 0.20 *Les nombres Idempotents sont définis par la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} k^{n-k} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{kt} t^k.$$

Voici les premiers nombres Idempotents :

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2		1	6	24	80	240
3			1	12	90	540
4				1	20	240

0.5 Coefficients multinomiaux ordinaires

Les coefficients multinomiaux ordinaires représentent une extension naturelle des coefficients binomiaux.

Définition 0.21 *Soit les entiers, $q \geq 0$ et $L \geq 0$. Pour un entier $a = 0, 1, \ldots, qL$. Le coefficient multinomial ordinaire $\binom{L}{a}_q$ est le coefficient du $a^{\text{ème}}$ terme du developpement :*

$$\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^q\right)^L = \sum_{a \geq 0} \binom{L}{a}_q x^a, \tag{30}$$

avec $\binom{L}{a}_1 = \binom{L}{a}$ (le coefficient binomial usuel) et $\binom{L}{a}_q = 0$ pour $a > qL$.

Les coefficients multinomiaux ordinaires vérifient :

$$\begin{aligned}
\binom{L}{a}_q &= \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_q=a} \binom{L}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{q-1}}{j_q}, \\
\binom{L}{a}_q &= \binom{L}{qL-a}_q, \\
\binom{L}{a}_q &= \sum_{m=0}^{q} \binom{L-1}{a-m}_q, \\
\binom{L}{a}_q &= \sum_{m=0}^{L} \binom{L}{m}\binom{m}{a-m}_{q-1}.
\end{aligned}$$

Voici le triangle des *coefficients trinomiaux* $\binom{L}{k}_2$

L/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1	1								
2	1	2	3	2	1						
3	1	3	6	7	6	3	1				
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1		
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1

Et voici le triangle des *coefficients quadrimiaux* $\binom{L}{k}_3$

L/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	1												
1	1	1	1	1									
2	1	2	3	4	3	2	1						
3	1	3	6	10	12	12	10	6	3	1			
4	1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1

Chapitre 1

Polynômes exponentiels de Bell

Dans ce chapitre, nous citons les définitions élémentaires des polynômes de Bell, leur interprétations combinatoire et probabiliste, les relations récurrentes sont traitées avec des exemples, ainsi que le lien avec les dérivées successives d'une fonction composée. Quelques identités sont présentées.

1.1 Généralités

Définition 1.1 *Les polynômes partiels (exponentiels) de Bell sont des polynômes, notés* $B_{n,k}(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1})$, *de variables* $a_1, a_2, ...,$ *définis par la fonction génératrice (exponentielle) :*

$$\sum_{n,k\geq 0} B_{n,k}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} x^k = \exp\left(x \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!}\right), \tag{1.1}$$

ou, d'une manière équivalente

$$\sum_{n\geq k} B_{n,k}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!}\right)^k. \tag{1.2}$$

pour $k = 0$ *:*

$$B_{0,0}(a_1, a_2, ...) = 1 \text{ et } B_{n,0}(a_1, a_2, ...) = 0, \forall n \geq 1. \tag{1.3}$$

pour $k = 1$ *:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{n,1}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \qquad B_{n,1}(a_1, a_2, ...) = a_n. \tag{1.4}$$

Pour $k = 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} B_{n,2}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{i!}\frac{a_{n-i}}{(n-i)!}\right) t^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i a_{n-i}\right)\frac{t^n}{n!}; \\
B_{n,2}(a_1, a_2, ...) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i} a_i a_{n-i}.
\end{aligned}$$

Pour $k = 3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} B_{n,3}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{3!}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)^3 \\
&= \frac{1}{3!}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!jk!} a_i a_j a_k, \\
B_{n,3}(a_1, a_2, ...) &= \frac{1}{3!}\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!} a_i a_j a_k. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Définition 1.2 *Les polynômes complets (exponentiels) de Bell sont les polynômes* $B_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ *définis par leur fonction génératrice (exponentielle) :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(a_1, a_2, ..., a_n)\frac{t^n}{n!} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right). \qquad (1.6)$$

ou, en d'autre terme, sont définis par

$$B_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1}), \ n \geq 1, \ \text{et} \ B_0(a_1, a_2, \ldots) = 1. \qquad (1.7)$$

Exemples 1.3 $B_{n,k}(1, 1, ..., 1) = S(n, k)$: *Nombres de Stirling de deuxième espèce*

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(e^t - 1\right)^k = \frac{1}{k!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right)^k.$$

$B_n(1, 1, \ldots) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) = B_n$: *Le nombre (de Bell) de partitions d'un ensemble à* n *éléments*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} == \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\exp\left(e^t - 1\right).$$

$B_{n,k}(0!,-1!,2!,-3!,\ldots)=s(n,k)$ *: Nombres de stirling de première espèce*

$$\sum_{n=k}^{\infty}s(n,k)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\ln\left(1+t\right)\right)^k=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{t^n}{n}\right)^k.$$

$B_{n,k}(0!,1!,2!,..)=|s(n,k)|$: *Nombres de stirling absolus de première espèce*

$$\sum_{n=k}^{\infty}|s(n,k)|\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(-\ln\left(1-t\right)\right)^k=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right)^k.$$

$B_n(0!,1!,2!,\ldots)=\sum_{k=0}^{n}|s(n,k)|=n!$: *Le nombre permutations de n éléments*

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right)=\exp\left(-\ln\left(1-t\right)\right)=\exp\left(\ln\frac{1}{1-t}\right)=\frac{1}{1-t}.$$

$B_{n,k}(0,1,1,\ldots)=S_2(n,k)$: *Nombres de stirling 2-associés (sans singletons) de deuxième espèce*

$$\sum_{n=k}^{\infty}S_2(n,k)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(e^t-t-1\right)^k=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)^k.$$

$B_n(0,1,1,\ldots)=\sum_{k=0}^{n}S_2(n,k)=B_n^{(2)}$: *Le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments sans singletons*

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(2)}\frac{t^n}{n!}=\exp\left(e^t-t-1\right)=\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right).$$

$B_{n,k}(0,0,1,1,\ldots)=S_3(n,k)$: *Nombres de stirling 3-associés (à blocks de cardinalités ≥ 3) de deuxième éspèce*

$$\sum_{n=k}^{\infty}S_3(n,k)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(e^t-\frac{t^2}{2!}-t-1\right)^k=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)^k.$$

$B_{n,k}(0,0,..,a_r=1,1,...)=S_r(n,k)$: *Nombres de stirling r-associés (à blocks de cardinalités $\geq r$) de deuxième éspèce*

$$\sum_{n=k}^{\infty}S_r(n,k)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(e^t-\sum_{i=0}^{r-1}\frac{t^i}{i!}\right)^k=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=r}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)^k.$$

$$B_{n,k}(1!, 2!, 3!, ...) = \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!} : \textit{Nombres de Lah}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} L(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)^k.$$

$$B_{n,k}(1, 2, 3, ...) = \binom{n}{k}k^{n-k} : \textit{Nombres idempotents}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}k^{n-k}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}e^{kt}t^k = \frac{1}{k!}\left(\sum_{n=r}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}\right)^k.$$

Théorème 1.4 *[16] Les polynômes partiels de Bell, $B_{n,k}(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1})$, admettent l'expression exacte :*

$$B_{n,k}(a_1, a_2, ...) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!...}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2}..., \tag{1.8}$$

où, la somme porte sur toutes les partitions de n en k parts, c'est-à-dire sur toutes les solutions $k_1, k_2, ...$ des entiers naturels tels que :

$$k_1 + k_2 + k_3 + ... = k \quad \textit{et} \quad k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... = n$$

et

$$B_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+...=n}\frac{n!}{k_1!k_2!...}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2}.... \tag{1.9}$$

Exemple 1.5

$$B_{4,2}(a_1, a_2, a_3) = \sum \frac{4!}{k_1!k_2!k_3!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2}\left(\frac{a_3}{3!}\right)^{k_3}$$

avec

$$k_1 + k_2 + k_3 = 2 \quad \textit{et} \quad k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 4.$$

Ces équations admettent comme solutions (k_1, k_2, k_3) les triplets $(1, 0, 1)$ et $(0, 2, 0)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} B_{4,2}(a_1, a_2, a_3) &= \frac{4!}{1!0!1!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^1\left(\frac{a_2}{2!}\right)^0\left(\frac{a_3}{3!}\right)^1 + \frac{4!}{0!2!0!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^0\left(\frac{a_2}{2!}\right)^2\left(\frac{a_3}{3!}\right)^0 \\ &= 4a_1a_3 + 3a_2^2. \end{aligned}$$

On remarque que pour n ou k assez grands, le calcule de $B_{n,k}(a_1, a_2, ...)$ devient énorme.

Une nouvelle formule explicite est établie dans la référence [19], pour calculer $B_{n,k}(a_1, a_2, ...)$ pour n et k donnés $(n \geq k+1, k = 2, 3, ..)$:

Théorème 1.6 *[19] Pour $n \geq k+1, k = 1, 2, 3, \ldots,$ les polynômes partiels de Bell, $B_{n,k+1}(a_1, a_2, ...)$, admettent l'expression :*

$$\begin{aligned} & B_{n,k+1}(a_1, a_2, ...) \\ = & \frac{1}{(k+1)!} \underbrace{\sum_{j_1=k}^{n-1} \sum_{j_2=k-1}^{j_1-1} \ldots \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}-1}}_{k} \overbrace{\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \ldots \binom{j_{k-1}}{j_k}}^{k} a_{n-j_1} a_{j_1-j_2} \ldots a_{j_{k-1}-j_k} a_{j_k} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Pour $k = 2, 3, 4$, on retrouve les expressions :

$$\begin{aligned} B_{n,2}(a_1, a_2, ...) &= \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} . a_{n-i} a_i \quad (n \geq 2) \\ B_{n,3}(a_1, a_2, ...) &= \frac{1}{3!} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{j} . a_{n-i} a_{i-j} a_j \quad (n \geq 3) \\ B_{n,4}(a_1, a_2, ...) &= \frac{1}{4!} \sum_{i=3}^{n-1} \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \binom{n}{i} \binom{i}{j} \binom{j}{k} . a_{n-i} a_{i-j} a_{j-k} a_k \quad (n \geq 4) . \end{aligned}$$

Une nouvelle formule explicite est déduite pour les nombres de stirling de deuxième éspèce :

$$S(n, k+1) = \frac{1}{(k+1)!} \underbrace{\sum_{j_1=1}^{n-1} \sum_{j_2=k-1}^{j_1-1} \ldots \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}-1}}_{k} \overbrace{\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \ldots \binom{j_{k-1}}{j_k}}^{k}; \quad (1.11)$$

$$(n \geq k+1, k = 1, 2, \ldots) .$$

En utilisant la formule $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, on peut facilement calculer, pour k donné, les multiples sommes de (1.11). On a comme exemples :

$$\begin{aligned} S(n, 2) &= \frac{1}{2} (2^n - 2) = 2^{n-1} - 1 \\ S(n, 3) &= \frac{1}{6} (3^n - 3.2^n + 3) \\ S(n, 4) &= \frac{1}{24} \left(4^n - 4.3^n + 3.2^{n+1} - 4\right) \end{aligned}$$

1.2 Interprétation combinatoire

Les polynômes partiels de Bell admettent une interprétation combinatoire liée à des ensembles de partitions coloriés. Plus précisément, si $a_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, le polynôme partiel de Bell $B_{n,k}(a_1, a_2, ...)$ est le nombre de colorations des partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs, où :

$$\begin{aligned} &\text{Les blocs de taille 1 possèdent } a_1 \text{ couleurs,} \\ &\text{Les blocs de taille 2 possèdent } a_2 \text{ couleurs,} \\ &\text{Les blocs de taille 3 possèdent } a_3 \text{ couleurs, et ainsi de suite.} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Exemple 1.7 $B_{5,2}(2,2,1,1)$ *est le nombre de colorations des partitions de l'ensemble* $\{1,2,3,4,5\}$ *en* 2 *blocs, où :*

Les blocs de taille 1 *possèdent* 2 *couleurs,* c_1^1 *et* c_1^2*,*

Les blocs de taille 2 *possèdent* 2 *couleurs,* c_2^1 *et* c_2^2*,*

Les blocs de taille 3 *possèdent* 1 *couleur* c_3*,*

Les blocs de taille 4 *possèdent* 1 *couleur* c_4*,*

L'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$ *admet* 5 *partitions en deux blocs de tailles* 1 *et* 4; *et* 10 *partitions en deux blocs de tailles* 2 *et* 3 *:*

$$\begin{aligned} &\{1\} \cup \{2,3,4,5\}, \{2\} \cup \{1,3,4,5\}, \{3\} \cup \{1,2,4,5\}, \{4\} \cup \{1,2,3,5\}, \\ &\{5\} \cup \{1,2,3,4\}, \{1,2\} \cup \{3,4,5\}, \{1,3\} \cup \{2,4,5\}, \{1,4\} \cup \{2,3,5\}, \\ &\{1,5\} \cup \{2,3,4\}, \{2,3\} \cup \{1,4,5\}, \{2,4\} \cup \{1,3,5\}, \{2,5\} \cup \{1,3,4\}, \\ &\{3,4\} \cup \{1,2,5\}, \{3,5\} \cup \{1,2,4\}, \{4,5\} \cup \{1,2,3\}. \end{aligned}$$

Avec cette coloration, on obtient les 30 *partitions :*

$$\begin{aligned} &\{1\}^{c_1^1} \cup \{2,3,4,5\}^{c_4}, \{1\}^{c_1^2} \cup \{2,3,4,5\}^{c_4}, \{2\}^{c_1^1} \cup \{1,3,4,5\}^{c_4}, \{2\}^{c_1^2} \cup \{1,3,4,5\}^{c_4}, \\ &\{3\}^{c_1^1} \cup \{1,2,4,5\}^{c_4}, \{3\}^{c_1^2} \cup \{1,2,4,5\}^{c_4}, \{4\}^{c_1^1} \cup \{1,2,3,5\}^{c_4}, \{4\}^{c_1^2} \cup \{1,2,3,5\}^{c_4}, \\ &\{5\}^{c_1^1} \cup \{1,2,3,4\}^{c_4}, \{5\}^{c_1^2} \cup \{1,2,3,4\}^{c_4}, \{1,2\}^{c_2^1} \cup \{3,4,5\}^{c_3}, \{1,2\}^{c_2^2} \cup \{3,4,5\}^{c_3}, \\ &\{1,3\}^{c_2^1} \cup \{2,4,5\}^{c_3}, \{1,3\}^{c_2^2} \cup \{2,4,5\}^{c_3}, \{1,4\}^{c_2^1} \cup \{2,3,5\}^{c_3}, \{1,4\}^{c_2^2} \cup \{2,3,5\}^{c_3}, \\ &\{1,5\}^{c_2^1} \cup \{2,3,4\}^{c_3}, \{1,5\}^{c_2^2} \cup \{2,3,4\}^{c_3}, \{2,3\}^{c_2^1} \cup \{1,4,5\}^{c_3}, \{2,3\}^{c_2^2} \cup \{1,4,5\}^{c_3}, \\ &\{2,4\}^{c_2^1} \cup \{1,3,5\}^{c_3}, \{2,4\}^{c_2^2} \cup \{1,3,5\}^{c_3}, \{2,5\}^{c_2^1} \cup \{1,3,4\}^{c_3}, \{2,5\}^{c_2^2} \cup \{1,3,4\}^{c_3}, \\ &\{3,4\}^{c_2^1} \cup \{1,2,5\}^{c_3}, \{3,4\}^{c_2^2} \cup \{1,2,5\}^{c_3}, \{3,5\}^{c_2^1} \cup \{1,2,4\}^{c_3}, \{3,5\}^{c_2^2} \cup \{1,2,4\}^{c_3}, \\ &\{4,5\}^{c_2^1} \cup \{1,2,3\}^{c_3}, \{4,5\}^{c_2^2} \cup \{1,2,3\}^{c_3}. \end{aligned}$$

d'où $B_{5,2}(2,2,1,1) = 30.$

On peut donc déduire l'interprétation combinatoire des nombres de stirling associés $S_2(n,k) = B_{n,k}(0,1,1,\ldots)$, c'est le nombre de colorations des partitions d'un ensemlble à n éléments en k blocs, où :

$$\begin{aligned} &\text{Les blocs de taille 1 ne sont pas considérés,} \\ &\text{Les blocs de taille 2 possèdent 1 couleur,} \\ &\text{Les blocs de taille 3 possèdent 1 couleur, et ainsi de suite.} \end{aligned} \tag{1.13}$$

$S_2(n,k)$ représente le nombre de partitions d'un ensemlble à n éléments en k blocs de tailles supérieures ou égales à deux.
D'où $S_r(n,k)$ représente le nombre de partitions d'un ensemlble à n éléments en k blocs de tailles supérieures ou égales à r.

Remarque 1.8 *Les polynômes complets exponentiels de Bell peuvent être interpréter comme étant le nombre de colorations des partitions d'un ensemble à n éléments où*

$$\begin{aligned} &\textit{Les blocs de taille } 1 \textit{ possèdent } a_1 \textit{ couleurs,} \\ &\textit{Les blocs de taille } 2 \textit{ possèdent } a_2 \textit{ couleurs,} \\ &\textit{Les blocs de taille } 3 \textit{ possèdent } a_3 \textit{ couleurs, et ainsi de suite.} \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.3 Interprétation probabiliste

Les polynômes exponentiels de Bell ont une place importante dans l'étude des moments d'une variable aléatoire. Dans les chapitres qui suivent, les polynômes de Bell sont utilisés pour exprimer les moments de certaines variables aléatoires, ce qui montre cette interprétation probabiliste. En effet, dans [34], Il est montré par deux façons différentes que les polynômes exponentiels de Bell $B_n(x_1, x_2, \ldots), n \geq 1$, renvoie l'espace des moments $\mathcal{M}$ à lui même, cette propriété est appelée MP ($\mathcal{M}$-preserving) ; c'est-à-dire, ces derniers envoient les suites de moments vers des suites de moments. Plus précisément, si (x_n) est une suite de moments d'une variable aléatoire X, alors $(B_n(x_1, x_2, \ldots))$ est une suite de moments d'une variable aléatoire Z Pour plus de détails, les deux lemmes suivants montrent cette préservation.

Lemme 1.9 *[34] Si $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$, alors $(pa_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$ pour tout $p \in [0,1]$.*

La variable aléatoire Z peut être obtenue comme limite d'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées :

Lemme 1.10 *[34] Si X est une variable aléatoire avec $E[X^n] = x_n$, alors il existe une variable aléatoire $Z = Z(p)$ telle que $E[(Z_1 + Z_2 + ... + Z_m)^n] \longrightarrow B_n(tx_1, tx_2, ...) = B_n(t)$ qd $m \longrightarrow \infty, p \longrightarrow 0, mp \longrightarrow t$, où $Z_1, Z_2, ...$ sont des copies indépendantes et identiquement distribuées de Z.*

1.4 Relations récurrentes

Propriété 1.11 *[14] On a les propriétés suivantes :*

$$B_{n,k}(xya_1, xy^2a_2, xy^3a_3, \ldots) = x^k y^n B_{n,k}(a_1, a_2, a_3 \ldots). \tag{1.15}$$

$$B_n(xa_1, x^2a_2, \ldots, x^n a_n) = x^n \; B_n(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{1.16}$$

La proposition suivante est connue qu'on propose d'en donner une démonstration combinatoire.

Proposition 1.12 *[14] Pour $k = 0, 1, \ldots$ et pour $n = 0, 1, \ldots,$ on a :*

$$B_{n+1,k+1}(a_1, a_2, ...) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+1}{j+1} a_{j+1} B_{n-j,k}(a_1, a_2, \ldots) \tag{1.17}$$

Preuve. D'après l'interprétation combinatoire, $B_{n+1,k+1}(a_1, a_2, \ldots)$ représente le nombre de colorations des partitions d'un ensemble à $(n+1)$ éléments en $(k+1)$ blocs, où

Les blocs de taille 1 possèdent a_1 couleurs,

Les blocs de taille 2 possèdent a_2 couleurs,

$\vdots$

Les blocs de taille $(j+1)$ possèdent a_{j+1} couleurs,

$\vdots$

Pour partitionner l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ en $(k+1)$ blocks avec cette coloration, en tenant compte de l'ordre des blocks, on a

$$(k+1)!B_{n+1,k+1}(a_1, a_2, \ldots)$$

façons. Ceci peut être prouver ainsi de la manière suivante :
Soit un block de taille $(j+1)$, ce block possède a_{j+1} couleurs. On doit de plus, construire k blocks (en tenant compte de l'ordre des blocks) avec les $(n-j)$ éléments qui restent, en gardant la même coloration, c'est-à-dire, on a $k!B_{n-j,k}(a_1, a_2, \ldots)$ partitions. On a donc $a_{j+1}k!B_{n-j,k}(a_1, a_2, ...)$ partitions. Or on a $\binom{n+1}{j+1}$ façons de choisir un block de taille $(j+1)$ parmi les $(n+1)$ éléments, et chaque block ne peut pas contenir plus de $(n-k+1)$ éléments. D'où, le nombre total des partitions est égal à

$$\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+1}{j+1} a_{j+1} k! B_{n-j,k}(a_1, a_2, \ldots).$$

□

On déduit les càs particuliers :

$$\begin{aligned}
S(n+1,k+1) &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n+1}{j+1}S(n-j,k)\\
|s(n+1,k+1)| &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n+1}{j+1}j!\,|s(n-j,k)|\\
s(n+1,k+1) &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n+1}{j+1}(-1)^j j!s(n-j,k)\\
S_2(n+1,k+1) &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{n-k}\binom{n+1}{j+1}S_2(n-j,k)
\end{aligned}$$

Proposition 1.13 *[14] Les polynômes partiels de Bell vérifient*

$$B_{n+1,k+1}(a_1, a_2, ...) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} a_{j+1} B_{n-j,k}(a_1, a_2, ...) \tag{1.18}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} S(n+1,k+1) &= \sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}S(n-j,k) \\ |s(n+1,k+1)| &= \sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}j!\,|s(n-j,k)| \\ s(n+1,k+1) &= \sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}(-1)^j\,j!s(n-j,k) \\ S_2(n+1,k+1) &= \sum_{j=1}^{n-k}\binom{n}{j}S_2(n-j,k) \end{aligned}$$

Proposition 1.14 *[19] Les polynômes partiels de Bell vérifient aussi*

$$B_{n,k}(a_1,a_2,\ldots)=\frac{1}{a_1}.\frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n-k}\binom{n}{j}\left[(k+1)-\frac{n+1}{j+1}\right]a_{j+1}B_{n-j,k}(a_1,a_2,\ldots) \tag{1.19}$$

On a alors

$$\begin{aligned} S(n,k) &= \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n-k}\binom{n}{j}\left[(k+1)-\frac{n+1}{j+1}\right]S(n-j,k) \\ |s(n,k)| &= \frac{1}{n-k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}\left[(k+1)-\frac{n+1}{j+1}\right]|s(n-j,k)| \\ s(n,k) &= \frac{1}{n-k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}\left[(k+1)-\frac{n+1}{j+1}\right](-1)^j\,j!s(n-j,k) \\ S_2(n,k) &= \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n-k}\binom{n}{j}\left[(k+1)-\frac{n+1}{j+1}\right]S_2(n-j,k) \end{aligned}$$

Proposition 1.15 *[16] On a :*

$$B_{n,k}(a_1,a_2,\ldots)=\frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{k}B_{n-k,k-j}\left(\frac{a_2}{2},\frac{a_3}{3},\ldots\right)\frac{a_1^j}{j!},\ n\geq k\geq 1. \tag{1.20}$$

Proposition 1.16 *[19] On a :*

$$B_{n,k_1+k_2}(a_1,a_2,...)=\frac{k_1!k_2!}{(k_1+k_2)!}\sum_{\alpha=0}^{n}\binom{n}{\alpha}B_{\alpha,k_1}(a_1,a_2,...)\,B_{n-\alpha,k_2}(a_1,a_2,...)\,. \tag{1.21}$$

Proposition 1.17 *[14] Les polynômes complets de Bell admettent la relation récurrente :*

$$B_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_{j+1} B_{n-j}(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{1.22}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_{n-j}, \\ B_n^{(2)} &= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} B_{n-j}, \\ (n+1)! &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j!\,(n-j)! \end{aligned}$$

En faisant un changement de variables dans (1.22), on obtient :

$$nB_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} j a_j B_{n-j}(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{1.23}$$

Soit $B_n(x)$ le $n^{ème}$ polynôme de Bell à une seule variable, défini par la fonction génératrice :

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(x\left(e^t - 1\right)\right). \tag{1.24}$$

Ces polynômes admettent la représentation suivante :

$$B_n(x) = \exp(-x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!} x^i. \tag{1.25}$$

Cette formule est connue sous le nom : formule de Dobinski.

Une réccurence généralisé pour $B_n(x)$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.18 *[28] Si $n = s + r$ alors $B_n(x)$ s'écrit dans la famille $\{x^j B_k(x)\}_{j,k}$ comme suit :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{s} \sum_{j=0}^{r} j^{s-k} S(r, j) \tbinom{s}{k} x^j B_k(x) \tag{1.26}$$

Pour $x = 1$, on déduit la récurrence généralisée de Spivey sur les nombres de Bell [42]

Corollaire 1.19 *[28] Les nombres de Bell satisfont la relation récurrente suivante :*

$$B_{s+r} = \sum_{k=0}^{s} \sum_{j=0}^{r} j^{s-k} S(r, j) \tbinom{s}{k} B_k. \tag{1.27}$$

1.5 Les premiers polynômes de Bell

En utilisant les relations récurrentes, on peut construire la table des polynômes partiels de Bell $B_{n,k}(a_1, a_2, ..., a_n)$. De cette table on peut déduire les polynômes complets de Bell. On donne ci-dessous quelques polynômes de Bell :

$n = 1$:

$B_{1,1}(a_1) = a_1 \Rightarrow B_1(a_1) = a_1.$

$n = 2$:

$$\begin{array}{l} B_{2,1}(a_1, a_2) = a_2, \\ B_{2,2}(a_1) = a_1^2, \end{array} \Rightarrow B_2(a_1, a_2) = a_2 + a_1^2.$$

$n = 3$:

$$\begin{array}{l} B_{3,1}(a_1, a_2, a_3) = a_3, \\ B_{3,2}(a_1, a_2) = 3a_1a_2, \\ B_{3,3}(a_1) = a_1^3, \end{array} \Rightarrow B_3(a_1, a_2, a_3) = a_3 + 3a_1a_2 + a_1^3$$

$n = 4$:

$$\begin{array}{l} B_{4,1}(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_4, \\ B_{4,2}(a_1, a_2, a_3) = 4a_1a_3 + 3a_2^2, \\ B_{4,3}(a_1, a_2) = 6a_1^2a_2, \\ B_{4,4}(a_1) = a_1^4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} B_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \\ a_4 + 4a_1a_3 + 3a_2^2 + 6a_1^2a_2 + a_1^4. \end{array}$$

$n = 5$:

$$\begin{array}{l} B_{5,1}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = a_5, \\ B_{5,2}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 5a_1a_4 + 10a_2a_3, \\ B_{5,3}(a_1, a_2, a_3) = 10a_1^2a_3 + 15a_1a_2, \\ B_{5,4}(a_1, a_2) = 10a_1^3a_2^2, \\ B_{5,5}(a_1) = a_1^5, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} B_5(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = a_5 + 5a_1a_4 + \\ 10a_2a_3 + 10a_1^2a_3 + 15a_1a_2 + 10a_1^3a_2^2 + a_1^5. \end{array}$$

1.6 Quelques identités sur les polynômes de Bell

Plusieurs identités concernant les polynômes de Bell ont été établies dans la littérature. Dans cette section, on cite deux identités générales proposées dans [1] et quelques théorèmes établissant des relations entre les polynômes de Bell et les polynômes binomiaux, introduits dans les références [28], [29], [30].

Définition 1.20 *Une famille de polynômes* $\{f_n(x)\}_n$ *est dite de type binomial si elle obeit à l'identité binomiale suivante :*

$$f_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y) \quad \text{et } f_1'(0) \neq 0. \tag{1.28}$$

Les principaux liens des suites binomiales et les polynômes partiels de Bell sont donnés par les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.21 *[41] Soit* $\{f_n(x)\}_n$ *suite de polynômes de type binomial. Alors*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(a_1, ..., a_{n-k+1}) x^k, \quad n \geq 1, \ \text{avec } a_n = f_1'(0). \tag{1.29}$$

Théorème 1.22 *[16] Soit* $\{f_n(x)\}_n$ *suite de polynômes de type binomial. Alors*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(b_1, b_2, ..., b_{n-k+1}) (x)_{(k)}, \quad n \geq 1, \quad \text{avec } b_n = f_n(1), \tag{1.30}$$

où $(x)_{(0)} := 1$ *et* $(x)_{(k)} := x(x-1)...(x-k+1)$ *pour* $k \geq 1$.

Voici quelques exemples des suites binomiales :

$f_n(x) = x^n$;

$f_n(x) = (x)_{(n)}$ où $(x)_{(n)} := \begin{cases} x(x-1)...(x-n+1) & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$;

$f_n(x) = (x)^{(n)}$ où $(x)^{(n)} := \begin{cases} x(x+1)...(x+n-1) & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$;

$f_n(x) = B_n(x) := \sum_{j=1}^{n} S(n,j) x^j = \exp(-x) \sum_{j \geq 0} \frac{j^n}{j!} x^j$;

Les fonctions génératrices exponentielles des suites binomiales données ci-dessus sont, respectivement, données par :

$\exp(xt), \quad (1+t)^x, \quad (1-t)^{-x}$ et $\exp(x(e^t - 1))$.

Théorème 1.23 *[1] pour n et $k \in \mathbb{N}^{\star}, k \leq n$, on a*

$$B_{n,k}\left(1^0, 2^1, 3^2, ...\right) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}. \tag{1.31}$$

Soit f une fonction analytique à l'origine telle que $f(0) \neq 0$ et pour n et $m \in \mathbb{N}$ soit

$$f_n(m) = \begin{cases} D^n [f(\omega)]^m |_{\omega=0} & \text{si } n \geq 1 \\ (f(0))^m & \text{si } n = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

où D est l'operateur différentiel $d/d\omega$.

Théorème 1.24 *[1] pour n et $k \in \mathbb{N}^{\star}, k \leq n$, on a*

$$B_{n,k}\left(f_0(1), f_1(2), f_2(3), ...\right) = \binom{n-1}{k-1} f_{n-k}(n). \tag{1.33}$$

Le corollaire suivant présente un càs particulier du théorème précédent, en prenant $f(\omega) = e^{a\omega}$:

Corollaire 1.25 *[1] Soit $a \in \mathbb{R}$, on a pour tout n et $k \in \mathbb{N}^{\star}, k \leq n$,*

$$B_{n,k}\left((1a)^0, (2a)^1, (3a)^2, ...\right) = \binom{n-1}{k-1} (an)^{n-k}. \tag{1.34}$$

On retrouve le théorème 1.23, en posant $a = 1$ dans le corollaire (1.25).

Théorème 1.26 *[1] Soit $\{f_n(x)\}_n$ une suite binomiale définie sur $\mathbb{N} \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$, avec $f_0 \neq 0$, Alors pour tout n et $k \in \mathbb{N}^{\star}, k \leq n$, on a*

$$B_{n,k}\left(f_0(1), 2f_1(1), 3f_2(1), ...\right) = \binom{n}{k} f_{n-k}(k). \tag{1.35}$$

Soit $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) x^k$ où $B_0(x) = 1$ et $B_n(1) = B_n$ (nombres de Bell)

Corollaire 1.27 *[1] On a*

$$B_{n,k}\left(B_0, 2B_1, 3B_2, ...\right) = \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{n-k} S(n-k, j) k^j. \tag{1.36}$$

Une identité concernant les polynômes complets de Bell est établie dans [10], en se basant sur une suite reliée à la fonction génératrice de $p(5n+4)$ où $p(n)$ représente le nombre de partitions de n. Soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n.

Théorème 1.28 *[10] Soit a_n le nombre réel défini par*

$$a_n = \left(1 + \frac{20}{5^{\alpha+1} - 1}\right) \frac{\sigma(n)}{n}, \tag{1.37}$$

où, α représente la puissance de 5 dans la décomposition de n en facteurs premiers. On a alors

$$B_n(1!a_1, 2!a_2, 3!a_3, ...) = \frac{n!}{5} p(5n+4) \tag{1.38}$$

En appliquant la formule d'inversion de Chaou et Al [17] , le corollaire suivant est établi :

Corollaire 1.29 *[10] Pour $n \geq 1$, on a*

$$\sigma(n) = \frac{5^{\alpha+1} - 1}{5^{\alpha+1} + 19} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (j-1)! B_{n,j} \left(\frac{1!}{5} P(9), \frac{2!}{5} P(14), ...\right). \tag{1.39}$$

Plusieurs résultats peuvent être regroupés dans le théorème suivant :

Théorème 1.30 *[28] Soit $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$. Alors, pour a, b des nombres réels et n, k entiers, $n \geq k \geq 1$, on a :*

$$B_{n,k}\left(1, ..., i\frac{bf_{i-1}(a(i-1)+b)}{a(i-1)+b}, ...\right) = \binom{n}{k} \frac{bkf_{n-k}(a(n-k)+bk)}{a(n-k)+bk}. \tag{1.40}$$

Le théorème (1.30) a pour conséquences les idenités suivantes :

$$\begin{aligned}
B_{n,k}\left(1, ..., ib(a(i-1)+b)^{i-2}, ...\right) &= \binom{n}{k} bk(a(n-k)+bk)^{n-k-1}, \\
B_{n,k}\left(1, ..., ib(a(i-1)+b-1)_{(i-2)}, ...\right) &= \binom{n}{k} bk(a(n-k)+bk-1)_{(n-k-1)}, \\
B_{n,k}\left(1, ..., ib(a(i-1)+b+1)^{(i-2)}, ...\right) &= \binom{n}{k} bk(a(n-k)+bk+1)^{(n-k-1)}, \\
B_{n,k}\left(1, ..., i\frac{bB_{i-1}(a(i-1)+b)}{a(i-1)+b}, ...\right) &= \binom{n}{k} \frac{bkB_{n-k}(a(n-k)+bk)}{a(n-k)+bk}, \\
B_{n,k}\left(1, ..., i!\frac{b}{a(i-1)+b}\binom{a(i-1)+b}{i-1}_q, ...\right) &= \frac{n!}{k!} \frac{bk}{a(n-k)+bk} \binom{a(n-k)+bk}{n-k}_q.
\end{aligned}$$

Théorème 1.31 *[28] Soit $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$. Alors, pour a, b $(b \neq 0)$ des nombres réels et n, k des entiers, $n \geq k \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} B_{n,k}\left(\frac{f_1(a+b)}{a+b}, .., \frac{f_i(ai+b)}{ai+b}, ..\right) &= \frac{1}{k!b^{k-1}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{j(-1)^{k-j} f_n(an+bj)}{an+bj}, \quad (1.41) \\ B_{n,k}\left(\frac{f_1(a)}{a}, .., \frac{f_i(ai)}{ai}, ..\right) &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=k}^{n} \frac{(an)^{j-k}}{(j-k)!} \frac{f_n^{(j)}(0)}{j}. \end{aligned}$$

Théorème 1.32 *[28] Soit $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$. Alors, pour a, b des nombres réels, $a \neq 0$, et n un entier naturel on a :*

$$B_n\left(\frac{bf_1(a)}{a}, .., \frac{bf_i(ai)}{ai}, ..., \frac{bf_n(an)}{an}\right) = \frac{bf_n(an+b)}{an+b}. \quad (1.42)$$

Théorème 1.33 *Soit $\{x_n\}$ une suite réelle (ou complexe). Alors, pour n, r entiers, $n, r \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} a_1^k \sum\nolimits_{j=1}^{n} B_{n,j}(y_1, y_2, ...)(k-nr)^{j-1} &= a_1^{nr} \frac{B_{n+k,k}(a_1, a_2, a_3, ...)}{k\binom{n+k}{k}}, \\ \text{avec } y_n &= \frac{1}{nr\binom{(r+1)n}{nr}} B_{(r+1)n,nr}(a_1, a_2, a_3, ...). \end{aligned} \quad (1.43)$$

On propose de contribuer par la proposition suivante :

Proposition 1.34 *On a*

$$\begin{aligned} B_{n,k}\left(1, \frac{1}{3}, ..., \frac{j!}{(2j-1)!}, ...\right) &= (-1)^k 2^{2(n-k)} \frac{n!}{(2n-k)!} S\left(2n-k, k, \frac{k}{2}\right), \quad (1.44) \\ B_{n,k}\left(1, 1, ..., \frac{j!}{(2j-2)!}, ...\right) &= 2^{2n-3k} \frac{n!}{(2n-2k)!} S\left(2n-2k, k, \frac{k}{2}\right), \end{aligned}$$

où $S(n, k, \alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (\alpha - j)^n$.

Preuve. Du développement

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

On a, d'une part

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\left(\sqrt{t}\sin\sqrt{t}\right)^k &= \frac{(-1)^k}{k!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-t)^j}{(2j-1)!}\right)^k \\
&= (-1)^k\sum_{n=k}^{\infty}B_{n,k}\left(1,\frac{1}{3},...,\frac{j!}{(2j-1)!},...\right)\frac{(-t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

et de l'identité

$$\sin x = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i},\quad \text{avec } i^2=-1$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\left(\sqrt{t}\sin\sqrt{t}\right)^k &= \frac{\left(\sqrt{t}\right)^k}{k!\,(2i)^k}\left(\exp\left(i\sqrt{t}\right)-\exp\left(-i\sqrt{t}\right)\right)^k \\
&= \frac{\left(\sqrt{t}\right)^k}{k!\,(2i)^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\exp\left(i\sqrt{t}\,(k-2j)\right) \\
&= \frac{\left(\sqrt{t}\right)^k}{k!\,(2i)^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\left(\cos\left(\sqrt{t}\,(k-2j)\right)+i\sin\left(\sqrt{t}\,(k-2j)\right)\right) \\
&= \begin{cases} \left(\sqrt{t}\right)^k\dfrac{(-1)^{k/2}}{k!2^k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\cos\left(\sqrt{t}\,(k-2j)\right) & ,k\ \text{pair} \\ \left(\sqrt{t}\right)^k\dfrac{(-1)^{(k+1)/2}}{k!2^k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\sin\left(\sqrt{t}\,(k-2j)\right) & ,k\ \text{impair}\end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k/2}}{k!2^k}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+k/2}}{(2n)!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(k-2j)^{2n} & ,k\ \text{pair} \\ \dfrac{(-1)^{(k+1)/2}}{k!2^k}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+(k+1)/2}}{(2n+1)!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(k-2j)^{2n+1} & ,k\ \text{impair}\end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{n=k/2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2(n-k)}t^n}{(2n-k)!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\left(\tfrac{k}{2}-j\right)^{2n-k} & ,k\ \text{pair} \\ \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{n=(k+1)/2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2(n-k)}t^n}{(2n-k)!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\left(\tfrac{k}{2}-j\right)^{2n-k} & ,k\ \text{impair}\end{cases} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!\,(-1)^n\,2^{2(n-k)}}{(2n-k)!}S\left(2n-k,k,\tfrac{k}{2}\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Alors, des deux expressions de $\frac{1}{k!}\left(\sqrt{t}\sin\sqrt{t}\right)^k$, on conclue que

$$B_{n,k}\left(1,\frac{1}{3},...,\frac{j!}{(2j-1)!},...\right) = (-1)^k\,2^{2(n-k)}\frac{n!}{(2n-k)!}S\left(2n-k,k,\frac{k}{2}\right).$$

Du développement

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}x^{2j},$$

On a, d'une part

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\left(t\cos\sqrt{t}\right)^k &= \frac{(-1)^k}{k!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-t)^j}{(2j-2)!}\right)^k \\ &= (-1)^k\sum_{n=k}^{\infty}B_{n,k}\left(1,1,...,\frac{j!}{(2j-2)!},...\right)\frac{(-t)^n}{n!}.\end{aligned}$$

et de l'identité

$$\cos x = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}, \quad \text{avec } i^2=-1,$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\left(t\cos\sqrt{t}\right)^k &= \frac{t^k}{k!2^k}\left(\exp\left(i\sqrt{t}\right)+\exp\left(-i\sqrt{t}\right)\right)^k \\ &= \frac{t^k}{k!2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\exp\left(i\sqrt{t}\,(k-2j)\right) \\ &= \frac{t^k}{k!2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\cos\left(\sqrt{t}\,(k-2j)\right)+i\sin\left(\sqrt{t}\,(k-2j)\right)\right) \\ &= \frac{t^k}{k!2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cos\left(\sqrt{t}\,(k-2j)\right) \\ &= \frac{1}{k!2^k}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+k}}{(2n)!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(k-2j)^{2n} \\ &= \frac{1}{k!2^k}\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{n-k}\frac{2^{2n-3k}t^n}{(2n-2k)!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(k-2j)^{2n-2k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty}2^{2n-3k}\frac{n!\,(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}S\left(2n-2k,k,\tfrac{k}{2}\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Alors, des deux expressions de $\frac{1}{k!}\left(t\cos\sqrt{t}\right)^k$, on conclue que :

$$B_{n,k}\left(1,1,\ldots,\frac{j!}{(2j-2)!},\ldots\right) = 2^{2n-3k}\frac{n!}{(2n-2k)!}S\left(2n-2k,k,\frac{k}{2}\right).$$

□

1.7 Polynômes de Bell ordinaires

Une autre classe des polynômes de Bell, appellée "polynômes de Bell ordinaires", est d'un rôle particulier. Ces polynômes possèdent des propriétés similaires à celles des polynômes (exponentiels) de Bell.

Définition 1.35 *Les polynômes partiels (ordinaires) de Bell* $\widetilde{B}_{n,k}(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ *sont* *définis par :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \widetilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, \ldots) z^n = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m\right)^k \tag{1.45}$$

et les polynômes complets (ordinaires) de Bell $\widetilde{B}_n(a_1, a_2, a_3, ...)$ *sont définis par :*

$$\widetilde{B}_n(a_1, a_2, a_3, \ldots) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, \ldots) \text{ avec } \widetilde{B}_0 = 1, \tag{1.46}$$

ou par leur fonction génératrice

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m t^m\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n(a_1, a_2, \ldots) t^n. \tag{1.47}$$

A partir de la définition, on peut vérifier qu'on a la propriété suivante :

$$\widetilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, a_3, \ldots) = \frac{k!}{n!} B_{n,k}(1!a_1, 2!a_2, 3!a_3, \ldots). \tag{1.48}$$

Comme dans le cas exponentiel, ce type de polynômes admet une expression explicite donnée par :

Théorème 1.36 *[28] Les polynômes partiels (ordinaires) de Bell* $\widetilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, a_3, ...)$ *sont donnés par :*

$$\widetilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, ...) = \sum_{\pi(n,k)} \frac{k!}{c_1!c_2!...} (a_1)^{k_1} (a_2)^{k_2} \ldots \tag{1.49}$$

où, la somme porte sur toutes les partitions de n *en* k *parts, c'est-à-dire sur toutes les solutions* $k_1, k_2, k_3, \ldots,$ *des entiers naturels tels que :*

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots = k \text{ et } k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots = n.$$

1.8 Formule de Faà di Bruno

La formule de Faà di Bruno donne les coefficients de Taylor de la composée de deux fonction :

Théorème 1.37 *[16] (Formule de Faà di Bruno), Soient* f *et* g *deux séries de Taylor avec* $f(t) = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{t^n}{n!}$ *et* $g(t) = \sum_{n\geq 1} g_n \frac{t^n}{n!}$ *et soit* $h = f \circ g$ *définie par* $h(t) =$

$f(g(t)) = \sum_{n\geq 0} h_n \frac{t^n}{n!}$. *Alors les coéfficients* h_n *sont déterminés par :*

$$\begin{cases} h_0 = f_0 \\ h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k B_{n,k}(g_1, g_2, \ldots) \end{cases} \tag{1.50}$$

Théorème 1.38 *[16] On a :*

$$\log\left(1 + \sum_{n\geq 1} g_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 1} L_n \frac{t^n}{n!}, \tag{1.51}$$

avec

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)! B_{n,k}(g_1, g_2, \ldots). \tag{1.52}$$

Corollaire 1.39 *[17] Si* $(a_n; n \geq 1)$ *et* $(b_n; n \geq 1)$ *sont deux suites réelles, alors*

$$b_n = B_n(a_1, a_2, \ldots) \Leftrightarrow a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)! B_{n,k}(b_1, b_2, \ldots). \tag{1.53}$$

Dérivée d'ordre n d'une fonction composée

Théorème 1.40 *[37] Si* f *et* g *sont deux fonctions* n *fois dérivables. Alors, la dérivée d'ordre* n *de la fonction composée* $f \circ g$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} \frac{d^{(n)}}{dt^n} f(g(t)) &= \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!} f^{(k)}(g(t)) \left(\frac{g^{'}(t)}{1!}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(g(t)) B_{n,k}(g^{'}(t), g''(t), \ldots), \end{aligned}$$

où $\pi(n,k)$ *est l'ensemble de toutes les solutions* $(k_1, k_2, \ldots)$ *des entiers naturels tels que* $k_1 + k_2 + \ldots = k$ *et* $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots = n$.

Exemple 1.41 *pour* $n = 4$ *; l'expression de la dérivée d'ordre* 4 *est donnée par la formule :*

$$\begin{aligned} \frac{d^{(4)}}{dt^4} f(g(t)) &= \sum_{k=1}^{4} f^{(k)}(g(t)) B_{4,k}(g^{'}(t), g''(t), ...) \\ &= f'(g(t)) B_{4,1}(g^{'}(t), g''(t), \ldots) + f''(g(t)) B_{4,2}(g^{'}(t), g''(t), ...) \\ &\quad + f'''(g(t)) B_{4,3}(g^{'}(t), g''(t), \ldots) + f^{(4)}(g(t)) B_{4,4}(g^{'}(t), g''(t), \ldots), \end{aligned}$$

et on a vu dans la page 20 *que* $B_{4,1}(a_1,a_2,a_3,a_4) = a_4, B_{4,2}(a_1,a_2,a_3) = 4a_1a_3 + 3a_2^2, B_{4,3}(a_1,a_2) = 6a_1^2a_2$ *et* $B_{4,4}(a_1) = a_1^4$*, donc on a :*

$$\begin{aligned}\frac{d^{(4)}}{dt^4}f(g(t)) &= f'(g(t))g^{(4)}(t) + f''(g(t))\left[4g^{'}(t)g^{'''}(t) + 3\left(g''(t)\right)^2\right] \\ &\quad +6f'''(g(t))\left(g^{'}(t)\right)^2 g''(t) + f^{(4)}(g(t))\left(g^{'}(t)\right)^4.\end{aligned}$$

Chapitre 2

Moments, Cumulants et Polynômes de Bell

Dans la théorie des probabilités, la distribution de probabilité d'une variable aléatoire, peut être exprimée, ou bien par sa fonction de distribution ou bien par sa fonction de probabilité (densité). Une brève description du comportement d'une variable aléatoire peut être donnée par ses moments. Les moments les plus fréquemment utilisés sont l'espérance et la varience. Les polynômes de Bell donnent un outil naturel pour exprimer les moments centrés et non-centrés en terme de cumulants et vice-versa. Dans ce chapitre on cite les définitions de certains types de moments avec quelques propriétés.

2.1 Moments d'une variable aléatoire

Définition 2.1 *Le moment (non-centré) d'ordre n, $n \geq 0$ d'une variable aléatoire discrète X, s'il existe, est le nombre :*

$$\mu_n = E\left[X^n\right] = \sum_x x^n P(X = x), \tag{2.1}$$

où, $\mu_0 = 1$ et le moment d'ordre un, $\mu_1 = E\left[X\right]$ (noté souvent μ) corréspond à l'espérance mathématique.

Définition 2.2 *Le moment centré d'ordre n, $n \geq 0$ d'une variable aléatoire discrète*

X, s'il existe, est le nombre :

$$m_n = E\left[(X - E[X])^n\right] = \sum_x (x-\mu)^n P(X = x), \tag{2.2}$$

où, $m_0 = 1$, $m_1 = 0$ et $m_2 = E(X-\mu)^2 = \sigma^2$ (noté souvent $V(X)$) corréspond à la Variance.

Exemples 2.3

1. ***Loi binomiale*** *: Une variable aléatoire X discrète binomiale de paramètres (n, p) représente le nombre de succès dans n experiences de Bernoulli de probabilité de succès p. Sa loi de probabilité est donnée par :*

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ pour } x \in \{0, 1, \dots n\}. \tag{2.3}$$

Son éspérance mathématique :

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = np.$$

Le moment centré d'ordre 2 est donné par :

$$V(X) = m_2 = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = np(1-p).$$

2. ***Loi de poisson*** *: Une variable aléatoire X discrète Poissonnienne de paramètres $\lambda > 0$ a pour loi de probabilité :*

$$p(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!};\ x \geqslant 0, \tag{2.4}$$

d'éspérance mathématique

$$\mu = E[X] = \sum_{x \geq 0} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x \geq 1} \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda,$$

et de variance

$$V(X) = E\left[(X-\lambda)^2\right] = \sum_{x \geq 0} (x-\lambda)^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda.$$

2.1.1 Formule de détermination récursive des moments

Les moments centrés d'ordre n, peuvent être exprimés en fonction des moments ordinaires d'ordre inferieur ou égal à n, et vice-versa.

Voici quelques exemples :

$$\begin{aligned} m_2 &= \mu_2 - \mu^2, \\ m_3 &= \mu_3 - 3\mu\mu_2 + 2\mu^3, \\ m_4 &= \mu_4 - 4\mu\mu_3 + 6\mu^2\mu_2 - 3\mu^4, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu^2 + m_2, \\ \mu_3 &= m_3 + 3\mu m_2 + \mu^3, \\ \mu_4 &= m_4 + 4\mu m_3 + 6\mu^2 m_2 + \mu^4. \end{aligned}$$

D'une manière générale, on trouve :

Proposition 2.4 *On a*

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mu^k \mu_{n-k} \ \ et \ \ \mu_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu^k m_{n-k}. \tag{2.5}$$

Preuve. En effet, en utilisant la formule du binôme de Newton, on trouve :

$$\begin{aligned} m_n &= E\left[(X-\mu)^n\right] \\ &= \sum_x (x-\mu)^n P(X=x) \\ &= \sum_x \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mu^k x^{n-k} \right) P(X=x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} (-1)^k \mu^k \left(\sum_x x^{n-k} P(X=x) \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mu^k \mu_{n-k}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu_n &= E\left[X^n\right] \\
&= \sum_x x^n P(X=x) \\
&= \sum_x \left((x-\mu)+\mu\right)^n P(X=x) \\
&= \sum_x \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu^k (x-\mu)^{n-k}\right) p(X=x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \mu^k \left(\sum_x (x-\mu)^{n-k} P(X=x)\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu^k m_{n-k}.
\end{aligned}$$

□

2.1.2 Moments factoriels et moments binomiaux

Les moments factoriels peuvent présenter plus d'utilité dans le cas discret. Pour une variable aléatoire discrète X de loi de probabilité $P(X=x)=p_x$, on donne les définitions suivantes :

Définition 2.5 *On appelle moment factoriel d'ordre $n, (n \geq 1)$, de la variable aléatoire discrète X la quantité :*

$$\mu_{(n)} = E\left[X(X-1)\ldots(X-n+1)\right] = \sum_{x \geq n} x(x-1)\ldots(x-n+1) P(X=x). \tag{2.6}$$

Définition 2.6 *On appelle moment binomial d'ordre $n, (n \geq 1)$, d'une variable aléatoire X, la quantité :*

$$b_{(n)} = E\left[\frac{1}{n!} X(X-1)\ldots(X-n+1)\right] = \frac{1}{n!} \sum_{x \geq n} x(x-1)\ldots(x-n+1) P(X=x). \tag{2.7}$$

Notons que le moment binomial d'ordre n n'est que le moment factoriel du même ordre divisé par $n!$:

$$b_{(n)} = \frac{\mu_{(n)}}{n!}. \tag{2.8}$$

Définition 2.7 *Les quantités*

$$\begin{aligned} \mu^{(n)} &= E\left[X(X+1)\ldots(X+n-2)(X+n-1)\right] \qquad (2.9)\\ &= \sum_{x\geq 0} x(x+1)\ldots(x+n-2)(x+n-1)P(X=x); n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b^{(n)} &= E\left[\frac{1}{n!}X(X+1)\ldots(X+n-2)(X+n-1)\right] \qquad (2.10)\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{x\geq 0} x(x+1)\ldots(x+n-2)(x+n-1)P(X=x); n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

sont appelées respectivement, le moment factoriel et binomial ascendant, d'ordre n de la variable aléatoire X.

Exemples 2.8 1. ***Loi de Poisson ;*** *Les moments factoriels et les moments binomiaux d'une distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, sont données par :*

$$\mu_{(n)} = \sum_{x\geq 0}(x)_n e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x\geq n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{(x-n)!} = \lambda^n, \qquad b_{(n)} = \frac{\mu_{(n)}}{n!} = \frac{\lambda^n}{n!}.$$

2. ***Loi Géométrique :*** *Soit X une variable aléatoire suivant une loi Géométrique, c'est le nombre de fois que l'experience de Bernoulli de paramètre p, a été répétée jusqu'au premier succès :*

$$p(X=x) = pq^{x-1}; x=1,2,\ldots; \text{ avec } 0<p<1 \text{ et } q=1-p.$$

ses moments binomiaux et ses moments factoriels, d'ordre n sont donnés par :

$$\mu_{(n)} = n!(q/p)^n = n!b_{(n)}; n=1,2,\ldots$$

On peut exprimer les moments factoriels à l'aide des moments non-centrés comme suit :

$$\mu_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\mu_k, \qquad (2.11)$$

où, les $s(n,k)$ représentent les nombres de Stirling de première éspèce.
En effet, en exprimant le produit factoriel déscendant $(x)_n = x(x-1)...(x-n+1)$ et x^n en fonction de $s(n,k)$ par :

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
\mu_{(n)} &= \sum_x (x)_n P(X=x) \\
&= \sum_x \sum_{k=0}^n s(n,k) x^k P(X=x) \\
&= \sum_{k=0}^n s(n,k) \sum_x x^k P(X=x) \\
&= \sum_{k=0}^n s(n,k) \mu_k.
\end{aligned}$$

Inversement, on a :

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n S(n,k) \mu_{(k)}, \tag{2.12}$$

où, les $S(n,k)$ représentent les nombres de Stirling de deuxième éspèce.
En effet, d'après l'identité :

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n,k)(x)_k,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \sum_x x^n P(X=x) \\
&= \sum_x \sum_{k=0}^n S(n,k)(x)_k P(X=x) \\
&= \sum_{k=0}^n S(n,k) \sum_x (x)_k P(X=x) \\
&= \sum_{k=0}^n S(n,k) \mu_{(k)}.
\end{aligned}$$

Exemples 2.9 *Il est simple de vérifier que*

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mu_{(1)} \\
\mu_2 &= \mu_{(2)} + \mu_{(1)} \\
\mu_3 &= \mu_{(3)} + 3\mu_{(2)} + \mu_{(1)} \\
\mu_4 &= \mu_{(4)} + 6\mu_{(3)} + 7\mu_{[2]} + \mu_{[1]} \\
\mu_5 &= \mu_{(5)} + 10\mu_{(4)} + 25\mu_{(3)} + 15\mu_{(2)} + \mu_{(1)}.
\end{aligned}$$

On déduit que les moments d'une loi de Poisson sont donnés par

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\lambda^k ; n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

De même, on a

$$b_{(n)} = \mu_{(n)}/n! = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\mu_k \text{ et } \mu_n = n!\sum_{k=0}^{n} S(n,k)b_{(k)}. \tag{2.14}$$

2.1.3 Fonctions génératrices

L'étude des distributions des variables aléatoires est facilitée par l'introduction des fonctions génératrices. Cet outil puissant a été introduit en théorie des probabilités par De Moivre et Laplace et le calcul des moments est facilité par l'utilisation d'une fonction génératrice des moments.

Définition 2.10 *On appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire X la fonction G_X définie par :*

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{x\geq 0} t^x P(X=x) = \sum_{x\geq 0} t^x p_x. \tag{2.15}$$

Cette définition, nous permet d'affirmer que

$$G_X^{(k)}(t) = \frac{d^{(k)}}{dt^k} G_X(t) = \sum_{x\geq k} x\,(x-1)\ldots(x-k+1)\,t^{x-k}p_x. \tag{2.16}$$

Ceci revient à dire que

$$p_k = P(X=k) = \frac{1}{k!}G_X^{(k)}(0). \tag{2.17}$$

On trouve aussi

$$G_X^{(k)}(1) = \sum_{x\geq k} x\,(x-1)\ldots(x-k+1)\,p_x = E\left((X)_k\right) = \mu_{(k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Proposition 2.11 *Soit X une variable aléatoire discrète dont la fonction génératrice est $G_X(t)$. On a :*

$$\mu_{(k)} = G_X^{(k)}(1) = \sum_{x\geq k} x\,(x-1)\ldots(x-k+1)\,p_x, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{2.18}$$

Exemples 2.12 1. ***Loi géométrique*** *(de paramètre p) : Sa fonction génératrice et ses moments factoriels sont donnés par :*

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{x\geq 1} t^x p(1-p)^{x-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}, \\ \mu_{(k)} &= G_X^{(k)}(1) = k!\frac{(1-p)^{k-1}}{p^k}, k \geq 1. \end{aligned}$$

le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{1-p}$.

2. ***Loi binomiale*** *(de paramètre p) : Sa fonction génératrice est donnée par :*

$$G_X(t) = (pt+1-p)^n, \quad \mu_{(k)} = G_X^{(k)}(1) = \frac{n!}{(n-k)!}p^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

c'est un polynôme de degré n, donc le rayon de convergence est infini.

3. ***Loi de poisson*** *(de paramètre $\lambda > 0$) : Sa fonction génératrice est une exponentielle :*

$$G_X(t) = \sum_{x\geq 0} t^x e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x\geq 0}\frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{\lambda(t-1)}, \qquad \mu_{(k)} = G_X^{(k)}(1) = \lambda^k.$$

le rayon de convergence est infini.

Définition 2.13 *On appelle fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X, la fonction φ_X définie par :*

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{t^n}{n!} = E[\mathrm{e}^{tX}] = \sum_{x\geq 0} \mathrm{e}^{tx}\, P(X=x). \tag{2.19}$$

Cette fonction, comme son nom l'indique, est utilisée afin de gérer les moments associés à la distribution de probabilités de la variable aléatoire X. Dans une seule expression, le moment d'ordre n est

$$\mu_n = \left.\frac{d^n \varphi_X}{dx^n}\right|_{t=0}. \tag{2.20}$$

Exemples 2.14 *La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ est*

$$\varphi_X(t) = \sum_{x\geqslant 0} \mathrm{e}^{tx}\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} = \sum_{x\geqslant 0}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,(\lambda\,\mathrm{e}^t)^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda e^t} = \mathrm{e}^{\lambda\left(e^t-1\right)}.$$

Définition 2.15 *La fonction génératrice des moments factoriels ou binomiaux est définie par :*

$$B_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{(n)} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{(n)} t^n. \tag{2.21}$$

Proposition 2.16 *Cette fonction génératrice est liée à la fonction génératrice des moments $\varphi_X(t)$ par les relations suivantes :*

$$\varphi_X(t) = B_X(e^t - 1) \quad et \quad B_X(t) = \varphi_X(Log(1+t)). \tag{2.22}$$

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_x \left[(\mathrm{e}^t - 1) + 1\right]^x p(X = x) \\
&= \sum_x p(X = x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} (\mathrm{e}^t - 1)^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_x \binom{x}{n} p(X = x)\right] (\mathrm{e}^t - 1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_{(n)} (\mathrm{e}^t - 1)^n \\
&= B_X(\mathrm{e}^t - 1).
\end{aligned}$$

et

$$\varphi_X(Log(1+t)) = B_X(1 + t - 1) = B_X(t).$$

□

Exemple 2.17 *Pour une variable aléatoire X de loi Géométrique de paramètre p, on trouve :*

$$\begin{aligned}
B_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{(n)} t^n = \frac{1}{1 - (q/p)^t} \quad / \quad |t| < p/q \\
b_{(n)} &= (q/p)^n, \qquad \mu_{(n)} = n! b_{(n)} = n!(q/p)^n.
\end{aligned}$$

2.2 Cumulants

Définition 2.18 *Les cumulants k_n sont les coefficients dans le développement de Taylor de la fonction $K_X(t) = \log(\varphi_X(t))$:*

$$K_X(t) = \log(\varphi_X(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!} \qquad et \qquad k_n = K_X^{(n)}(0). \tag{2.23}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
k_0 &= K_X^{(0)}(0) = 0, \\
k_1 &= K'_X(0) = \left[\frac{d}{dt}\log(\varphi_X(t))\right]_{t=0} = \varphi'_X(0) = \mu, \\
k_2 &= K''_X(0) = \left[\frac{d^{(2)}}{dt^2}\log(\varphi_X(t))\right]_{t=0} = \mu_2 - \mu_1^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

Exemples 2.19 *1. La variable aléatoire $X = \mu$:*

$$\begin{aligned}
K_X(t) &= \log(e^{\mu t}) = \mu t, \\
K'_X(0) &= \mu \text{ et } K_X^{(n)}(t) = 0, n \geq 2.
\end{aligned}$$

ainsi, $k_1 = \mu$ *et* $k_2 = k_3 = k_4 = ... = 0.$

2. Loi de Bernoulli de paramètre, p; $0 < p < 1$:

$$K_X(t) = \log(pe^t + (1-p)),$$
$$k_1 = p, \quad k_2 = p(1-p), \quad k_{n+1} = p(1-p)\frac{dk_n}{dp}\ .$$

3. Loi de Poisson (de paramètre $\lambda > 0$*) :*

$$K_X(t) = \log(\mathrm{e}^{\lambda\left(e^t-1\right)}) = \lambda\left(e^t - 1\right), \qquad k_n = \lambda; n \geq 1.$$

La relation entre les premiers moments et les cumulants obtenus par extraction des coéfficients du développement est comme suit :

$$\begin{aligned}
k_1 &= \mu_1 \\
k_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 \\
k_3 &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 \\
k_4 &= \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= k_1 \\
\mu_2 &= k_2 + k_1^2 \\
\mu_3 &= k_3 + 3k_2k_1 + k_1^3 \\
\mu_4 &= k_4 + 4k_3k_1 + 3k_2^2 + 6k_2k_1^2 + k_1^4.
\end{aligned}$$

D'une manière générale, on a :

Théorème 2.20 *[28] Soit X une variable aléatoire de fonction génératrice des moments φ_X qui existe dans un voisinage de zéro. Posons μ_n, les moments d'ordre n et k_n, les cumulants d'ordre n. On a alors :*

$$\begin{cases} \mu_n = B_n(k_1, k_2, k_3, ...) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(k_1, k_2, k_3, ...) \\ k_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(k-1)!B_{n,k}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, ...) \end{cases} \quad (2.24)$$

et on a

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mu_k k_{n-k} \text{ avec } \mu_0 = 1 \text{ et } k_0 = 0. \quad (2.25)$$

Nous proposons ici une preuve simple du théorème :

Preuve. La fonction génératrice des cumulants est donnée par :

$$K_X(t) = \log\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{t^n}{n!}\right) = \log\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!}.$$

D'aprés le théorème (1.38), en posant $g_n = \mu_n$ et $L_n = k_n$, on déduit :

$$\begin{aligned} \mu_n &= B_n(k_1, k_2, k_3, ...) \\ k_n &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(k-1)!B_{n,k}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, ...) \end{aligned}$$

d'aprés la relation récurrente (1.22), et en faisant le changement de variables

$$j + 1 = n - k \quad \longrightarrow \tbinom{n-1}{j} = \tbinom{n-1}{(n-1)-k} = \tbinom{n-1}{k},$$

on obtient :

$$\mu_n = B_n(k_1, k_2, k_3, ...) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} k_{j+1}\mu_{n-(j+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mu_k k_{n-k}.$$

□

2.3 Suites de moments et de cumulants

Soient $\mathcal{M}$ l'ensemble des suites de moments $\{\mu_n; n \geqslant 1\}$ et $\mathcal{K}$ l'ensemble des cumulants $\{k_n; n \geqslant 1\}$.

L'ensemble $\mathcal{M}$ est fermé dans l'espace des suites réelles muni de la topologie faible. Si on considère l'application définie de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{M}$ par les polynômes complets de Bell par :

$$\mu_n = B_n(k_1, k_2, k_3, ...),$$

on déduit que l'ensemble $\mathcal{K}$ est l'image inverse de l'ensemble $\mathcal{M}$ par cette application.

Définition 2.21 *On dit qu'une suite $\{\mu_n; n \geqslant 0\}$ est une suite de moments de Hamburger si elle admet une représentation de la forme*

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx; n = 0, 1, \ldots, \tag{2.26}$$

où, f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.22 *On dit qu'une suite $\{\mu_n; n \geqslant 0\}$ est une suite de moments de Stieltjes si elle admet une représentation de la forme*

$$\mu_n = \int_{0}^{+\infty} x^n f(x)\, dx; n = 0, 1, \ldots, \tag{2.27}$$

où, f est la densité d'une variable aléatoire à valeurs non-négative sur $[0, +\infty[$.

Définition 2.23 *On dit qu'une suite $\{\mu_n; n \geqslant 0\}$ est une suite de moments de Hausdorff si elle admet une représentation de la forme*

$$\mu_n = \int_{0}^{1} x^n f(x)\, dx; n = 0, 1, \ldots, \tag{2.28}$$

où, f est la densité d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$.

Exemples 2.24 *1. Pour $\alpha \geq 0$, la suite donnée par :*

$$\tau_n = (\alpha)^{\bar{n}} = \begin{cases} 1; si\ n = 0 \\ \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1); si\ n = 1, 2, ..., \end{cases}$$

est une suite de moments de Stieltjes.

Si $\alpha = 0$:

$$\tau_0 = 1 \text{ et } \tau_n = 0; \forall n \geq 1,$$

est une suite de moments de Hausdorff associée à la variable aléatoire constante $X = 0$.

Si $\alpha > 0$: τ *est une suite de moments de Stieltjes associée à la variable aléatoire* X *suivant une loi Gamma de paramètres* $(\alpha, 1)$:

$$X \longrightarrow \Gamma(\alpha, 1) : \quad f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-t}, \quad x > 0.$$

2. *Pour* $\alpha, \beta > 0$, *la suite donnée par :*

$$\mu_n = \frac{\binom{n+\alpha-1}{n}}{\binom{n+\alpha+\beta-1}{n}}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

est une suite de moments de Hausdorff associée à la variable aléatoire X *de loi Béta de paramètres* (α, β) :

$$X \longrightarrow B(\alpha, \beta) : \quad f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad x \in [0, 1].$$

Le théorème suivant nous donne une caractérisation des suites de moments de Humburger et de Stieltjes.

Théorème 2.25 *[7] Soient* $a_1, a_2, \ldots, a_N,\ b_1, b_2, \ldots, b_N$ *des nombres réels tels que* b_j *est positif pour tout* $j = 1, \ldots, N$. *Alors la suite* $\{q_n\}_{n \geq 0}$, *définie par :*

$$\prod_{m=1}^{N} \frac{1}{(1 - a_m t)^{b_m}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b_1 + b_2 + \ldots + b_N + n - 1}{n} q_n t^n \tag{2.29}$$

est une suite de moments de Hamburger. Si de plus , $a_1, a_2, \ldots, a_N$ *sont des nombres non-négatifs, alors* $\{q_n\}_{n \geq 0}$ *est une suite de moments de Stieltjes.*

Le théorème (2.25) admet des applications en combinatoire où plusieurs suites admettent une fonction génératrice du type (2.29).

Exemples 2.26 1. *La suite* $\{c_n\}_{n \geq 0}$ *donnée par les coéfficients trinomiaux centraux satisfait*

$$\frac{1}{\sqrt{(1-3t)(1+t)}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

et le théorème (2.25) garantie que $\{c_n\}_{n \geq 0}$ *est une suite de moments de Hamburger, en prenant :* $N = 2$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 3$ *et* $a_2 = -1$.

2. *Les nombres de Fibonacci satisfont*

$$\frac{t}{1-t-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}F_nt^n.$$

On déduit que

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}t\right)\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}t\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}t^n,$$

et la suite $\left\{\frac{F_{n+1}}{n+1}\right\}_{n\geq 0}$ *est une suite de moments de Hamburger, en prenant, dans le théorème (2.25),* $N=2$, $b_1=b_2=1$, $a_1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $a_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. *La formule d'Euler-Binet :*

$$F_{n+1}=\frac{r_1}{\sqrt{5}}r_1^n+\left(1-\frac{r_1}{\sqrt{5}}\right)r_2^n=E\left[X^n\right];n\geq 0,$$

où, $r_1=(1+\sqrt{5})/2$, $r_2=1-r_1$ *et* X *est une variable aléatoire donnée par*

$$P\left(X=r_1\right)=\frac{r_1}{\sqrt{5}}=1-P\left(X=r_2\right),$$

montre que $\{F_{n+1}\}_{n\geq 0}$ *est une suite de moments de hamburger.*
On a aussi

$$\frac{1}{\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}F_{2n+2}t^n,$$

et la suite $\left\{\frac{F_{2n+2}}{n+1}\right\}_{n\geq 0}$ *est une suite de moments de Stieltjes, car* $a_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ *et* $a_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *sont positifs.*

3. *Nombre de Catalan*

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

forment une suite de moments de Hamburger de la variable aléatoire $4X$ *où* X *a une distribution de Béta*$(1/2,3/2)$.
La suite $\{C_{n+1}\}_{n\geq 0}$ *est aussi une suite de moments de Stieltjes de la variable aléatoire* $4X$ *où* X *a une distribution de Béta*$(3/2,3/2)$.

4. *Pour les nombres de Stirling de deuxième éspèce* $S\left(n,k\right)$ *donnés par la fonction génératrice*

$$\frac{1}{(1-t)\left(1-2t\right)\ldots\left(1-Nt\right)}=\sum_{j=0}^{\infty}S\left(N+j,N\right)t^j,$$

le théorème (2.25) montre que la suite $\{q_j\}_{j\geq 0}$ *définie par*

$$q_j = \frac{S(N+j,N)}{\binom{N+j-1}{j}}, \quad j = 0,1,2,\ldots$$

est une suite de moments de Stieltjes, puisque les a_i *sont positifs. En remplaçant* N *par* k *et* $N+j$ *par* n*, on déduit que pour tout entier positif* k *la suite définie par*

$$\frac{S(n,k)}{\binom{n-1}{k-1}}; (n = k, k+1, k+2, \ldots),$$

est une suite de moments de Stieltjes.

2.3.1 Propriétés

Proposition 2.27 *[7] Si* σ *et* τ *sont deux suites de moments du même type (Hamburger, Stieltjes ou Hausdorff), alors la suite* $\{\rho_n\}$ *de leur simple produit*

$$\rho_n = \sigma_n \tau_n; (n = 0,1,2,...), \tag{2.30}$$

l'est aussi. Autrement dit, si X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes avec* $\sigma_n = E[X^n]$ *et* $\tau_n = E[Y^n]$, *alors* $\rho_n = E[(XY)^n]$.

Proposition 2.28 *[7] Si* σ *et* τ *sont deux suites de moments du même type (Hamburger ou Stieltjes), alors leur convolution binomiale,* ρ*, définie par*

$$\rho_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_n \tau_{n-k}, (n = 0,1,2,...) \tag{2.31}$$

l'est aussi. Autrement dit, si X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes avec* $\sigma_n = E[X^n]$ *et* $\tau_n = E[Y^n]$, *alors* $\rho_n = E[(X+Y)^n]$.

Définition 2.29 *(Convolution de Hausdorff) La convolution de Hausdorff de deux suites de moments* σ *et* τ *est définie par*

$$\sum_{k=0}^{n} h_{n,k} \sigma_n \tau_{n-k}, \tag{2.32}$$

où la matrice H *est donnée par :*

$$h_{n,k} = \binom{n}{k} \int_0^1 \theta^k (1-\theta)^{n-k} f(\theta)\, d\theta, (n,k = 0,1,2,...), \tag{2.33}$$

où, f *est la densité d'une variable aléatoire à valeurs dans* $[0,1]$.

Proposition 2.30 *[7] Si σ et τ sont deux suites de moments de Hausdorff, alors leur convolution de Hausdorff ρ_n l'est aussi. Autrement dit, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes avec $\sigma_n = E[X^n]$ et $\tau_n = E[Y^n]$, alors $\rho_n = E[(\theta X + (1-\theta) Y)^n]$.*

Définition 2.31 *On dit qu'une matrice triangulaire inferieure $A = [a_{i,j}]_{i,j=0}^n$ prèserve les suites de moments de Stieltjes si elle transforme les suites de moments de Stieltjes σ en suites de moments de Stieltjes:*

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\sigma_k, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.34}$$

Théorème 2.32 *[7] Soit A une matrice triangulaire inferieure qui prèserve les suites de moments de Stieltjes. Si σ et τ sont deux suites de moments de Stieltjes, alors leur A-convolution*

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\sigma_k\tau_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.35}$$

l'est aussi.

Le théorème précédent est appliqué dans les càs où la matrice A représente le triangle de Pascal, les nombres Stirling $S(n,k)$, $s(n,k)$ ou les nombres d'Euler $E_{n,k}$:

Corollaire 2.33 *[7] Si σ et τ sont deux suites de moments de Stieltjes, alors leur convolution de Stirling de deuxième éspèce*

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,\sigma_n\tau_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.36}$$

l'est aussi.

Corollaire 2.34 *[7] Si σ et τ sont deux suites de moments de Stieltjes, alors leur convolution de Stirling de premère éspèce*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,\sigma_n\tau_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.37}$$

l'est aussi.

Corollaire 2.35 *[7] Si σ et τ sont deux suites de moments de Stieltjes, alors leur convolution Eulerienne*

$$\sum_{k=0}^{n} E_{n,k}\sigma_n\tau_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.38}$$

l'est aussi.

Théorème 2.36 *[7] Si σ est une suite de moments de Hausdorff, alors La suite*

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,\sigma_k, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.39}$$

l'est aussi.

2.3.2 Conditions nécéssaires et suffisantes

En utilisant la solution classique du problème des moments. On peut trouver des conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'une suite donnée $\{\mu_n; n \geqslant 0\}$ ou $\{k_n; n \geqslant 0\}$ soit une suite de moments ou de cumulants, respectivement.

Théorème 2.37 *[22] Une suite $\{\mu_n; n \geqslant 0\}$ est une suite de moments d'une variable aléatoire si et seulement si*

$$\Delta_n = \det\left[\mu_{i+j}\right]_{i,j=0}^{n} \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.40}$$

Théorème 2.38 *[43] Une suite $\{\mu_n; n \geqslant 0\}$ est une suite de moments de Stieltjes d'une variable aléatoire si et seulement si*

$$\Delta_n = \det\left[\mu_{i+j+1}\right]_{i,j=0}^{n} \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.41}$$

Théorème 2.39 *[23] Une suite $\{\mu_n; n \geqslant 0\}$ est une suite de moments de Hausdorff si et seulement si μ_n est totalement monotonne, ie. les différences*

$$\Delta^n\mu_j = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\mu_{j+k} \geq 0, \quad j, n = 0, 1, 2, ... \tag{2.42}$$

Exemples 2.40 *1. Les polynômes de Bell à une seule variable*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,x^k, \tag{2.43}$$

forment une suite de moments de Hamburger pour $x \geq 0$, car il est démentré par Radoux (voir [35]) que

$$\det \left[B_{i+j}(x)\right]_{i,j=0}^{n} = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right) x^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.44}$$

et cette quantité est positives pour tout x positif et fixé.

En particulier, pour $x = 1$, les $B_n(1) = B_n, (n = 0, 1, 2, ...)$ forment une suite de moments de Hamburger d'une variable aléatoire de loi de poisson de paramètre 1.

2. *Il est démontré aussi dans [7] que*

$$\det \left[B_{i+j+1}(x)\right]_{i,j=0}^{n} = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right) x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.45}$$

et donc les polynômes de Bell $B_n(x)$, ($x \geq 0$ et fixé), forment une suite de moments de Stieltjes.

3. *Les Polynômes Euleriens :*

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} E(n,k)\, x^{n-k} = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k \tag{2.46}$$

satisfont (voir [18])

$$\det \left[E_{i+j}(x)\right]_{i,j=0}^{n} = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^{2} x^{\frac{n(n+1)}{2}}; \tag{2.47}$$

et donc les polynômes d'Euler $E_n(x)$, ($x \geq 0$ et fixé), forment une suite de moments de Hamburger.

4. *Les nombre d'Euler E_n vérifient (Voir [35])*

$$\det \left[E_{i+j}\right]_{i,j=0}^{n} = \prod_{k=0}^{n} (2k!)^2; \tag{2.48}$$

ainsi les nombres d'Euler forment une suite de moments de Hamburger.

Théorème 2.41 *[34] Une suite $\{k_n; n \geqslant 0\}$ est une suite de cumulants d'une variable aléatoire si et seulement si*

$$\delta_n = \det \left[B_{i+j}(k_1, k_2, k_3, \ldots)\right]_{i,j=0}^{n} \geqslant 0 \;;\; \textit{pour tout } n \geqslant 0. \tag{2.49}$$

Théorème 2.42 *[34] Si $(k_1, k_2, k_3, ..)$ est une suite de cumulants d'une variable aléatoire X, alors $(k_1 + c, k_2, k_3, ..)$ est une suite des cumulants de $Y = X + c$ pour tout réel c.*

Définition 2.43 *Soit* $\{p_n(x_1, x_2, ...) : n \in \mathbb{N}\}$ *une suite polynomiale. Si* $\delta_n(x_1, x_2, ...) = \det[p_{i+j}]_{i,j=0}^n$ *est indépendant de* x_1*, on dit que la suite* $\{p_n\}$ *est de type Hankel à moyenne-indépendante.*

Théorème 2.44 *[34] On a* $[B_{i+j}(x_1, x_2, ...)] = B^T [B_{i+j}(0, x_2, ...)] B$*, où,* B *est la matrice de* (i, j)*-ème élément est* $b_{i,j} := \binom{i}{j} x_1^{i-j}$ *pour* $i \geq j$ *et* $b_{i,j} = 0$ *pour* $i < j$*,et la suite* $\{B_n(x_1, x_2, ...)\}$ *est de type Hankel à moyernne-indépendante.*

Considérons $\Delta_n(t) = \det[tx_{i+j}]_{i,j=0}^n$ (sauf pour $i = j = 0$, on a $x_0 = 1$) et $\delta_n(t) = \det[B_{i+j}(tx_1, tx_2, ...)]_{i,j=0}^n$, où t est une variable réelle.

On a ici les trois premières valeurs de $\Delta_n(t)$ et $\delta_n(t)$:

$$\begin{aligned}
\Delta_0(t) &= 1, \\
\Delta_1(t) &= tx_2 - t^2 x_1^2, \\
\Delta_2(t) &= t^2\left(x_2 x_4 - x_3^2\right) + t^3\left(2x_1 x_2 x_3 - x_1^2 x_4 - x_2^3\right), \\
\delta_0(t) &= 1, \\
\delta_1(t) &= tx_2, \\
\delta_2(t) &= t^2\left(x_2 x_4 - x_3^2\right) + t^3\left(2x_2^3\right).
\end{aligned}$$

Théorème 2.45 *[34] On a :*

a) *Les coefficients de* t^n *dans* $\Delta_n(t)$ *et* $\delta_n(t)$ *sont égales, et* n *est leur degré minimum.*

b) *Si* $\delta_n(t) \geq 0$ *pour* $t \geq 0$ *alors* $\Delta_n(t) \geq 0$ *pour* $t \geq 0$ *(des voisinages de droite de zéro).*

c) $\Delta_n = 0$ $\forall n \geq 1$ *si et seulement si* $x_n = \lambda^n$ *pour un certain* λ.

d) *Le polynôme* $\delta_n(t)$ *est de degré* $\binom{n+1}{2}$ *en* t *et le coefficient de* $t^{\binom{n+1}{2}}$ *est*

$$x_2^{\binom{n+1}{2}} (1!)(2!)\ldots(n!).$$

e) *Pour* $n \geq 3$ *le coefficient de* $t^{\binom{n+1}{2}-1}$ *est*

$$\frac{(1!)(2!)\ldots(n!)}{12(n-2)}\left(x_2 x_4 - x_3^2\right) x_2^{\binom{n+1}{2}-3}.$$

f) Δ_n *et* $\det[x_{i+j+1}]_{i,j=0}^n$ *sont non-négatives si et seulement si* $[x_{i+j}]_{i,j=0}^n$ *et* $[B_{i+j}(x_1, ..., x_n)]_{i,j=0}^n$ *sont totalement non-négatives.*

Chapitre 3

Variables aléatoires indépendantes

Soit une population ayant un nombre n d'éléments. On assume que le j-ème élément indépendemment des autres éléments génère un nombre aléatoire X_j d'éléments ; $j = 1, 2, ..n$. Alors, $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ est le nombre d'éléments génénérés de la population . Il est raisonable d'accepter que les variables aléatoires X_j; $j = 1, 2, ...n$, sont idépendantes et identiquement distribuées. Si le nombre d'éléments de la population est un nombre aléatoire N, la loi de S_N est appelée *loi composée* ou *distribution généralisée.* Ces termes sont utilisés par Feller [20] et par de nombreux auteurs. Dans ce chapitre, les polynômes de Bell sont utilisés pour exprimer la loi et les moments de S_n et S_N.

3.1 La somme $S_k = X_1 + X_2 + ... + X_k;\ k \in \mathbb{N}^*$

3.1.1 Loi de S_k

Théorème 3.1 *[15] Soit X_j, $j = 1, 2, ..., n$, n variables aléatoires indépendantes à valeurs entières positives de fonctions génératrices $G_{X_j}(t)$; alors la fonction génératrice $G_{S_k}(t)$ de la somme $S_k = X_1 + X_2 + ... + X_k$ est donnée par le produit*

$$G_{S_k}(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)....G_{X_k}(t). \tag{3.1}$$

Si de plus, les variables aléatoires X_j, $j = 1, 2, ..., n$, sont identiquement distribuées avec la même fonction génératrice $G(t)$; alors

$$G_{S_k}(t) = [G(t)]^k\,. \tag{3.2}$$

La loi de la somme S_k est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.2 *[28] Soient $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes discrètes de même loi de probabilité $p_j := P(X=j)$, $j \geq 0$ et $S_k := X_1 + ... + X_k$. Alors,*

$$\begin{aligned} P(S_k = n) &= \frac{k!}{(n+k)!} B_{n+k,k}(1!p_0, ..., m!p_{m-1}, ...) \qquad (3.3) \\ &= \sum_{j=0}^{\min(n,k)} \frac{k!}{n!(k-j)!} B_{n,j}(1!p_1, ..., m!p_m, ...) p_0^{k-j} \\ &= \frac{p_0^k}{n!} \sum_{j=0}^{\min(n,k)} (k)_j B_{n,j}\left(1!p_1 p_0^{-1}, ..., m!p_m p_0^{-1}, ...\right) \\ &= \frac{k}{n!} p_0^{k-nr} \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{n!(k-j)!} B_{n,j}(y_1, y_2, ...)(k-nr)^{j-1}, \end{aligned}$$

où,

$$y_n = \frac{1}{nr} \binom{(r+1)n}{nr}^{-1} B_{(r+1)n,j}(1!p_0, ..., m!p_{m-1}, ...), \text{ pour } n, r \text{ entiers, } n, r \geq 1.$$

La dernière identité est déduite en appliquant le théorème 1.33.

Des càs particuliers du Théorème précédent sont donnés par le corollaire suivant :

Corollaire 3.3 *[28] Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes discrètes de même loi de probabilité $P(X=j) = \frac{p_j}{j!}$, $(j \geq 0)$ ou des moments $\mu_j = \mathrm{E}\left(X_1^j\right)$. Pour n, k, r entiers, $n \geq k \geq 1$, $r \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} &B_{n,k}\left(B_{r,r}(x_1, x_2, ...), ..., m\binom{m+r-1}{r}^{-1} B_{m+r-1,r}(x_1, x_2, ...), ...\right) = \\ &\binom{n}{k}\binom{n+(r-1)k}{kr}^{-1} B_{n+(r-1)k,kr}(x_1, x_2, ...), \end{aligned} \qquad (3.4)$$

avec $x_n = np_{n-1}$ ou $x_n = n\mu_{n-1}$.

Exemples 3.4 *1. Supposons que X suit une loi Binomiale de paramètres (n, p) :*

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

La loi de la somme de k variables aléatoires indépendantes de même loi Binomiale est donnée par

$$\begin{aligned}
P\left(S_k=m\right) &= \frac{q^{nk}}{m!}\sum_{j=0}^{m}(k)_j\,B_{m,j}\left(\frac{p}{q}(n)_1,\left(\frac{p}{q}\right)^2(n)_2,...,\left(\frac{p}{q}\right)^i(n)_i,...\right)\\
&= \frac{q^{nk}}{m!}\left(\frac{p}{q}\right)^m\sum_{j=0}^{m}B_{m,j}\left((n)_1,(n)_2,...,(n)_i,...\right)(k)_j\\
&= \frac{1}{m!}q^{nk-m}p^m f_m(k);\\
&= \binom{nk}{m}p^m q^{nk-m},\ \ m=0,1,\dots,nk.
\end{aligned}$$

avec $f_m(x)=(nx)_m$ une suite de type binomial, donnée par :

$$f_m(x)=\sum_{j=0}^{m}B_{m,j}(f_1(1),f_2(1),\dots)(x)_j\,. \tag{3.5}$$

Ainsi, la somme de k variables aléatoires indépendantes de même loi Binomiale est une binomiale de paramètres nk et p.

2. *(Problème de Montmort-Moivre) On considère une urne contenant n balles numérotées de 0 à $n-1$. Supposons que k balles sont tirées aléatoirement, l'une aprés l'autre, avec remise. Soit X_j le nombre sur la balle tirée au j-ème tirage, $j=1,2,...,k$. Trouver la loi de probabilité de la somme $S_k=X_1+X_2+....+X_k$. Le tirage avec remise implique que les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées avec la même loi de distribution (Uniforme sur $\{0,1,..,n-1\}$) :*

$$P(X_1=j)=\frac{1}{n},\quad j=0,1,...,n-1, \tag{3.6}$$

avec

$$G(t)=\frac{1}{n}\sum_{x=0}^{n-1}t^x=\frac{1-t^n}{n(1-t)}. \tag{3.7}$$

D'après le théorème précédent, la fonction génératrice de la somme $S_k=X_1+X_2+....+X_k$, est donnée par

$$G_{S_k}(t)=[G(t)]^n=\frac{(1-t^n)^k}{n^k(1-t)^k}, \tag{3.8}$$

En la développant suivant les puissances de t*, on obtient*

$$\begin{aligned} G_{S_k}(t) &= \frac{1}{n^k}\left[\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}t^{nr}\right]\left[\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i-1}{k-1}t\right] \qquad (3.9)\\ &= \sum_{s=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{r=0}^{[s/n]}(-1)^r\binom{k}{r}\binom{k+s-nr-1}{k-1}\right\}t^s \end{aligned}$$

ainsi, la loi de probabilité de la somme S_k*, de variables aléatoires uniformes :*

$$p(S_k = s) = \frac{1}{n^k}\sum_{r=0}^{[s/n]}(-1)^r\binom{k}{r}\binom{k+s-nr-1}{k-1}, \quad s = 0, 1, ..., (n-1)k. \qquad (3.10)$$

On peut retrouver la loi de S_k *en appliquant le lemme (3.2) sur la loi uniforme :*

$$\begin{aligned} P(S_k = s) &= \frac{k!}{(s+k)!}B_{s+k,k}(1!p_0, ..., n!p_{n-1}, 0, ...) \qquad (3.11)\\ &= \frac{k!}{(s+k)!}B_{s+k,k}\left(1!\frac{1}{n}, ..., n!\frac{1}{n}, 0, ...\right)\\ &= \frac{1}{n^k}\frac{k!}{(s+k)!}B_{s+k,k}(1!, ..., n!, 0, ...) \end{aligned}$$

Le théorème suivant nous donne une autre expression pour la loi de la somme S_k *:*

Théorème 3.5 *[4] Soient* $\{X_n\}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes discrètes de même loi uniforme sur* $\{0, 1, .., n-1\}$ *et* $S_k := X_1 + ... + X_k$*. Alors,*

$$P(S_k = s) = \frac{1}{n^k}\binom{k}{s}_n$$

où, $\binom{k}{s}_n$ *est le coéfficient multinomial ordinaire.*

3.1.2 Moments de S_k

Théorème 3.6 *[28] Soit* $\{X_n; n \geq 1\}$ *une suite de variable aléatoire indépendantes, de mêmes moments* $\{\mu_n; n \geq 1\}$ *avec* $\mu_0 = 1$ *et de mêmes cumulants* $\kappa_n; n \geq 1$ *avec* $\kappa_0 = 0$*. On a*

$$\mathrm{E}(S_k^n) = \sum_{i=1}^{n}B_{n,i}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, ...)\,t^i = \sum_{i=1}^{n}B_{n,i}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, ...)\,(t)_i\,. \qquad (3.12)$$

Lemme 3.7 *[28] Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité* X *avec les moments,* $\mu_n = E[X^n]$*. Alors si on pose* $S_k := X_1 + ... + X_k$*, on aura :*

$$\begin{aligned} E[S_k^n] &= \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k,k}(1, 2\mu_1, ..., m\mu_{m-1}, ...) \qquad (3.13) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{(k-j)!} B_{n,j}(\mu_1, \mu_{2,}..., ...) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (k)_j B_{n,j}(\mu_1, \mu_{2,}..., ...) \\ &= k \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{n!(k-j)!} B_{n,j}(y_1, y_{2,}....)(k-nr)^{j-1}, \end{aligned}$$

où

$$y_n = \frac{1}{nr}\binom{(r+1)n}{nr}^{-1} B_{(r+1)n,j}(1, 2\mu_1, ..., m\mu_{m-1}, ...)\,, \text{ pour } n, r \text{ entiers, } n, r \geq 1.$$

Exemple 3.8 *[28] Si* X *suit la loi de Bernoulli de paramètre* $p \in \{0, 1\}$*, la somme* S_k *suit une loi Binomiale de paramètres* (k, p)*. En utilisant l'Identité (3.13), on obtient :*

$$E(S_k^n) = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!} S(n, j) p^j,$$

et

$$E(S_k^n) = \sum_{j=0}^{k} j^n \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j},$$

Ceci prouve que

$$\sum_{j=0}^{k} j^n \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!} S(n, j) p^j, \text{ pour tout } p \in \{0, 1\}. \qquad (3.14)$$

En particulier, pour $p = 1$ *on déduit l'identité :*

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!} S(n, j) = k^n. \qquad (3.15)$$

Corollaire 3.9 *[28] Soit* $\{X_n\}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité uniforme sur* $[0, 1]$*. Alors les moments d'ordre* n *de* S_k *sont* *donnés par :*

$$\mathrm{E}\left(S_k^n\right)=\frac{S\left(n+k,k\right)}{\binom{n+k}{k}} \quad et\ S\left(n,k\right)=\frac{1}{k!}\sum_{r_1+\ldots+r_k=n,\quad r_1,\ldots,r_k\geq 1}\frac{n!}{r_1!\ldots r_k!}, \tag{3.16}$$

où les $S\left(n,k\right)$ sont les nombres de Stirling de deuxiéme éspèce.

Soient $b_{(r)}$ le moment binomial d'ordre r de la variable aléatoire X et $b_{(S_k)}(r)$ le moment binomial d'ordre r de la variable aléatoire S_k tels que

$$b_{(S_k)}(r)=E\left[\binom{S_k}{r}\right]=\sum_{m=r}^{\infty}\binom{m}{r}P(S_k=m);r\geq 1. \tag{3.17}$$

Les moments $b_{(S_k)}(r)$ sont exprimés par les polynômes de Bell dans la proposition suivante :

Proposition 3.10 *Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité $p_j:=P\left(X=j\right),j\geq 0$, Alors si on pose $S_k:=X_1+\ldots+X_k$,, on aura*

$$\begin{aligned} b_{(S_k)}(r) &= \frac{k!}{(n+k)!}B_{r+k,k}\left(1!b_{(0)},2!b_{(1)},\ldots,m!b_{(m-1)},\ldots\right) \\ &= \frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{r}\left(k\right)_j B_{r,j}\left(1!b_{(1)},2!b_{(2)},\ldots,m!b_{(m)},\ldots\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Preuve. Soient $\varphi_{S_k}(t)$ et $B_{S_k}(t)$ les fonctions génératrices des moments ordinaires et binomiaux associées à la variable aléatoire S_k, respectivement , et $\varphi_X(t)$ et $B_X(t)$ les fonctions génératrices des moments ordinaires et binomiaux associées à la variable aléatoire X, respectivement. On a d'une part, par la définition de la fonction génératrice des moments binomiaux

$$t^k B_{S_k}(t)=t^k\sum_{r\geq 0}b_{(S_k)}(r)t^r=\sum_{r\geq 0}b_{(S_k)}(r)t^{r+k}, \tag{3.19}$$

et d'autre part, par la relation entre les fonctions génératrices des moments binomiaux et ordinaires, on a

$$\begin{aligned}
t^k B_{S_k}(t) &= t^k \varphi_{S_k}(\log(1+t)) \\
&= t^k E\left[e^{\log(1+t)S_k}\right] \\
&= t^k E\left[(1+t)^{S_k}\right] \\
&= \left(tE\left[(1+t)^X\right]\right)^k \\
&= \left(tE\left[e^{\log(1+t)X}\right]\right)^k \\
&= (tB_X(t))^k \\
&= \left(t\sum_{m\geq 0} b_{(m)}t^m\right)^k \\
&= \left(\sum_{m\geq 1} m!b_{(m-1)}\frac{t^m}{m!}\right)^k \\
&= k!\sum_{n\geq k} B_{n,k}\left(1!b_{(0)}, 2!b_{(1)}, ..., m!b_{(m-1)}, ...\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= k!\sum_{r\geq 0} B_{r+k,k}\left(1!b_{(0)}, 2!b_{(1)}, ..., m!b_{(m-1)}, ...\right)\frac{t^{r+k}}{(r+k)!}.
\end{aligned}$$

D'où, la première identité découle par identification des deux expressions. Sachant que $b_{(0)} = 1$, en appliquant la proposition (1.20) à la première identité, on déduit la deuxième. $\square$

Soient $\mu_{(r)}$ le moment factoriel d'ordre r de la variable aléatoire X et $\mu_{(S_k)}(r)$ le moment factoriel d'ordre r de la variable aléatoire S_k, tels que

$$\mu_{(S_k)}(r) = E\left[(S_k)_r\right] = \sum_{m=r}^{\infty} (m)_r\, P(S_k = m); r = 0, 1, ... \tag{3.20}$$

Les moments factoriels $\mu_{(S_k)}(r)$ sont exprimés par les polynomes de Bell dans la proposition suivante :

Proposition 3.11 *Soit* $\{X_n\}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité* $p_j := P(X = j), j \in \mathbb{N}$. *Alors si on pose* $S_k := X_1 + ... +$

X_k,*on aura :*

$$\begin{aligned} \mu_{(S_k)}(r) &= \binom{r+k}{k}^{-1} B_{r+k,k}\left(1\mu_{(0)}, 2\mu_{(1)}, ..., m\mu_{(m-1)}, ...\right) \quad (3.21) \\ &= \sum_{j=0}^{\min(r,k)} \frac{k!}{(k-j)!} B_{r,j}\left(1\mu_{(0)}, 2\mu_{(1)}, ..., m\mu_{(m-1)}, ...\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\min(r,k)} (k)_j\, B_{r,j}\left(1\mu_{(0)}, 2\mu_{(1)}, ..., m\mu_{(m-1)}, ...\right). \end{aligned}$$

Remarque 3.12 *On peut trouver les moments factoriels en fonction des moments binomiaux, puisqu'on a :*

$$\begin{aligned} \mu_{(S_k)}(r) &= r!b_{(S_k)}(r) \\ &= \binom{r+k}{k}^{-1} B_{r+k,k}\left(1!b_{(0)}, 2!b_{(1)}, ..., m!b_{(m-1)}, ...\right) \\ &= \binom{r+k}{k}^{-1} B_{r+k,k}\left(1\mu_{(0)}, 2\mu_{(1)}, ..., m\mu_{(m-1)}, ...\right). \end{aligned}$$

3.2 La somme $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$; où N est une variable aléatoire discrète

Supposons qu'on a des balles à distribuer aléatoirements (simultanément ou sequentiellement) dans N urnes distinguables. On assume que le nombre N est une variable aléatoire avec la loi de probabilité

$$P(N = n) = c_n, n \geq 1. \quad (3.22)$$

Soit X_j le nombre de balles distribuées dans la j-ème urne, $j \geq 1$. Les variables X_j sont supposées indépendantes et identiquement distribuées avec une loi de probabilité connue

$$P(X = x) = q_x, n \geq 1. \quad (3.23)$$

Soit $S_N = \sum_{j=0}^{N} X_j$, le nombre total de balles distribuées dans les urnes, avec

$$P(S_N = n) = p_n, n \geq 1. \quad (3.24)$$

Le théorème suivant nous donne la fonction génératrice de S_N

Théorème 3.13 *[15] Soit $\{X_j\}, j \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes discrètes de même loi de probabilité $q_x = P(X = x), x \geq 0$ et de même fonction génératrice $G_X(t)$ et soit N une variable aléatoire discrète positive indépendante des X_j, $j = 1, 2, ...$et de fonction génératrice $G_N(t)$; alors, la somme $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ est appelée distribution composée et sa fonction génératrice $G_{S_N}(t)$ est donnée par la fonction composée*

$$G_{S_N}(t) = G_N(G_X(t)). \tag{3.25}$$

3.2.1 Loi de S_N

Théorème 3.14 *[15] Soit $\{X_j\}, j \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes discrètes de même loi de probabilité $q_x = P(X = x), x \geq 0$ et de même fonction génératrice $G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} q_x t^x$ et soit N une variable aléatoire discrète positive indépendante des $X_j, j \geq 1$, alors la loi de la distribution composée $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ est donnée par :*

$$P(S_N = m) = \begin{cases} \frac{1}{m!}\mathfrak{f}(q_0) \sum_{k=0}^{m} k! b_{(k)}(q_0) B_{m,k}(1! q_0^{-1} q_1, 2! q_0^{-1} q_2, .., m! q_0^{-1} q_m, \ldots), & si\ q_0 > 0 \\ \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} k! c_k B_{m,k}(1! q_1, 2! q_2, .., m! q_m, \ldots), & si\ q_0 = 0, \end{cases} \tag{3.26}$$

où

$$\mathfrak{f}(q_0) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j q_0^j \quad et \quad b_{(k)}(q_0) = [\mathfrak{f}(q_0)]^{-1} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} c_n q_0^n. \tag{3.27}$$

Nous détaillons ici la preuve du théorème :

Preuve. La loi de probabilité de la variable aléatoire S_N est donnée par

$$P(S_N = m) = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{dt^m} G_{S_N}(t)\right]_{t=0},$$

si on pose

$$\begin{aligned} q_x &= p(X = x), \quad g(t) = G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} q_x t^x, \\ c_k &= p(N = k), \quad f(u) = G_N(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k, \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} g_r &= \left[\frac{d^r}{dt^r} G_X(t)\right]_{t=0} = r! q_r, r = 1, 2, ..., g_0 = g(0) = q_0 \quad (3.28) \\ f_k &= \left[\frac{d^k}{dt^k} G_{_N}(u)\right]_{u=G_X(0)=q_0} = \sum_{j=k}^{\infty} (j)_k c_j q_0^{j-k}, k \geq 1. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Faà di Bruno, qui nous donne les dérivées successives de $G_{S_N}(t)$, la composée de $G_X(t)$ et $G_{_N}(t)$, on déduit l'expression suivante

$$P(S_N = m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} f_k B_{m,k}(1! q_1, 2! q_2, .., m! q_m, \ldots). \quad (3.29)$$

Si $q_0 > 0$

$$\begin{aligned} P(S_N = m) &= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \left[\sum_{j=k}^{\infty} (j)_k c_j q_0^j\right] B_{m,k}(1! q_0^{-1} q_1, 2! q_0^{-1} q_2, .., m! q_0^{-1} q_m, \ldots) \\ &= \frac{1}{m!} \mathfrak{f}(q_0) \sum_{k=0}^{m} k! b_{(k)}(q_0) B_{m,k}(1! q_0^{-1} q_1, 2! q_0^{-1} q_2, .., m! q_0^{-1} q_m, \ldots), \end{aligned}$$

□

3.2.2 Moments de S_N

Le théorème suivant nous donne l'expression des moments factoriels d'ordre n de la distribution composée S_N

$$M_{(n)} = \sum_{j=n}^{\infty} (j)_n p(S_N = j) = \sum_{j=n}^{\infty} (j)_n p_j; n \geq 0. \quad (3.30)$$

en fonction des moments binomiaux $b_{(r)}$ de la variable aléatoire N et les moments factoriels $\mu_{(r)}$ de la variable aléatoire X :

Théorème 3.15 *[15] Soit $\{X_j\}, j \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes discrètes de même loi de probabilité $q_x = P(X = x), x \geq 0$ et de même fonction génératrice $G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} q_x t^x$ et soit N une variable aléatoire discrète positive indépendante des $X_j, j \geq 1$, alors les moments factoriels de la distribution composée $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ sont donnés par :*

$$E[(S_N)_n] = \sum_{k=0}^{n} k! b_{(k)} B_{n,k}(\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, \ldots, \mu_{(n)}). \quad (3.31)$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
M_{(n)} &= \left[\frac{d^n}{dt^n} G_{S_N}(t)\right]_{t=1} ; n = 0, 1, ... \\
\mu_{(r)} &= \left[\frac{d^r}{dt^r} G_X(t)\right]_{t=1} ; r = 1, 2, ..., g_0 = g(1) = 1 \\
m_{(k)} &= \left[\frac{d^k}{dt^k} G_{_N}(u)\right]_{u=G_X(1)=1} ; k = 0, 1, ...
\end{aligned}
$$

En appliquant la formule de Faà di Bruno, on trouve

$$
\begin{aligned}
E\left[(S_N)_n\right] &= \sum_{k=0}^{n} m_{(k)} B_{n,k}(\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, .., \mu_{(n)}) \qquad (3.32) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{\infty} (j)_k c_j\right] B_{n,k}(\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, .., \mu_{(n)}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k! b_{(k)} B_{n,k}(\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, .., \mu_{(n)}). \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

Chapitre 4

Application à une loi de Poisson

4.1 Moments d'une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Les moments non-centrés μ_n de X sont en connection avec les polynômes de Bell à une seule variable $B_n(\lambda)$:

La fonction génératrice des moments de X vérifie :

$$\varphi_X(t) = E[\mathrm{e}^{tX}] = \sum_{x\geq 0} \mathrm{e}^{tx}\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\lambda)\frac{t^n}{n!}. \tag{4.1}$$

Ainsi, les moments non-centrés d'une loi de Poisson de paramètre λ coinsident avec les polynômes de Bell $B_n(\lambda)$, c'est-à-dire :

$$\mu_n = E[X^n] = B_n(\lambda), \tag{4.2}$$

avec

$$B_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\lambda^k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Et en particulier, si $\lambda = 1$, les moments non-centrés d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, coinsident avec les nombres de Bell d'ordre n, puisque on a

$$B_n(1) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = B_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

On déduit donc que le moment non-centré d'ordre n d'une loi de poisson de paramètre $\lambda = 1$ est le nombre de toutes les partitions d'un ensemble à n éléments.

4.1.1 Polynômes de Bell généralisés

Les moments centrés m_n de X sont en connection avec les polynômes de Bell généralisés $(B_n(y,\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$, introduits dans la référence [6] :

Définition 4.1 *Soit $(B_n(y,a))_{n\in\mathbb{N}}$ qui dénote la famille des polynômes définis par leur fonction génératrice*

$$\mathrm{e}^{ty-a(e^t-t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y,a)\frac{t^n}{n!}, \quad a, y, t \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Il est clair que de (4.3) et (4.5), la définition de $B_n(y,\lambda)$ généralise celle des polynômes $B_n(\lambda)$ car

$$B_n(\lambda) = B_n(\lambda, -\lambda). \tag{4.6}$$

Quand $\lambda > 0$ la relation (4.5) peut être écrite

$$\mathrm{e}^{ty} E_\lambda[(\mathrm{e}^{t(X-\lambda)}] = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y,-\lambda)\frac{t^n}{n!}, \quad y, t \in \mathbb{R}, \tag{4.7}$$

car

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ty} E_\lambda[(\mathrm{e}^{t(X-\lambda)}] &= \mathrm{e}^{ty}\sum_x \mathrm{e}^{t(x-\lambda)}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \mathrm{e}^{ty+\lambda(-t-1)}\sum_x \frac{(\lambda\,\mathrm{e}^t)^x}{x!} \\
&= \mathrm{e}^{ty+\lambda(\mathrm{e}^t-t-1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y,-\lambda)\frac{t^n}{n!},
\end{aligned}$$

ce qui conduit à la relation

$$B_n(y,-\lambda) = E_\lambda[(X+y-\lambda)^n], y \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

et puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(y,-\lambda)\frac{t^n}{n!} = E_\lambda[(\mathrm{e}^{t(X+y-\lambda)}] = \sum_{n=0}^{\infty} E_\lambda[(X+y-\lambda)^n]\frac{t^n}{n!},$$

l'identité (4.8) implique

$$B_n(0,-\lambda) = E_\lambda[(X-\lambda)^n], y \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Ainsi les moments centrés d'ordre n d'une loi de Poisson de paramètre λ coinsident avec les polynômes de Bell généralisés $B_n(0,-\lambda)$.

La relation (4.8) est analogue à (4.1) et montre la proposition suivante :

Proposition 4.2 *[31] Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$B_n(y,-\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y-\lambda)^{n-k} \sum_{i=1}^{k} S(k,i)\lambda^k, \lambda, y \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Le lemme suivant est utilisé dans la référence [31], pour exprimer les moments centrés d'une loi de Poisson en utilisant les nombres $S_2(n,k)$.

Lemme 4.3 *[31] Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On a :*

$$B_n(0,-\lambda) = E_\lambda[(X-\lambda)^n] = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)\lambda^k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Nous proposons ici une autre approche pour démontrer le lemme précédent :

L'expression des moments centrés d'une loi de Poisson peut être déduite de leur relation avec les moments ordinaires, on a :

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \lambda^k \mu_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \lambda^k \left\{ \sum_{j=1}^{n-k} S(n-k,j)\lambda^j \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^k \binom{n}{k} \lambda^{k+j} S(n-k,j). \end{aligned}$$

En développant par rapport aux puissance de λ, on trouve

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} \lambda^k S(n-j,k-j) \right\} \lambda^k,$$

d'où

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)\lambda^k. \tag{4.12}$$

où $S_2(n,k)$ sont définis par leur fonction génératrice

$$\sum_{n=2k}^{\infty} S_2(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t-1-t)^k}{k!}, \quad k = 0,1,... \tag{4.13}$$

et $S_2(n,k)$ détermine le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k sous ensembles de tailles au moins égales à 2.

En particulier, si $\lambda = 1$, (4.11) montre que

$$B_n(0,-1) = E_\lambda[(X-1)^n] = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

Ainsi les moments centrés d'ordre n d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ coinsident avec les polynômes de Bell généralisés $B_n(0,-1)$: c'est le nombre de toutes les partitions d'un ensemble à n éléments en sous ensembles de tailles au moins égales à 2.

4.1.2 Polynômes de Touchard généralisés

Définition 4.4 *Les polynômes de Touchard $(T_n(x)\,; n \geq 0)$ sont définis par leur fonction génératrice donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left\{x\left(e^t + e^{-t} - 2\right)\right\}. \tag{4.15}$$

A partir de la définition des polynômes de Touchard, il s'en suit que

$$T_n(x) = B_n(0, 2x, 0, 2x, 0, ...). \tag{4.16}$$

Exemples 4.5 *Voici quelques exemples de polynômes de Touchard :*

1. Il est clair que, par construction des polynômes exponentiels de Bell,

$$T_n\left(\frac{1}{2}\right) = B_n(0,1,0,1,0,...), \tag{4.17}$$

appelés nombres de Touchard semi-réduits, qui representent le nombre de manières de partitionner un ensemble à n éléments en blocks de cardinalités paires.

2. Comme il est impossible de partitionner un ensemble de cardinalité impaire en sous-blocks de cardinalités paires, on a donc

$$T_{2p+1}(x) = 0. \tag{4.18}$$

3. On peut voir aussi que :

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1, \\
T_2(x) &= B_2(0, 2x) = 2x, \\
T_4(x) &= B_4(0, 2x, 0, 2x) = 2x + 12x^2.
\end{aligned}$$

Soient maintenant deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ et soit $Z = \frac{1}{2}(Y - X)$. Si $T = 2Z$, alors

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(Y - X = k) \\ &= \sum_{i=\max(0,-k)}^{\infty} P(X = i) P(Y = i + k) \\ &= \exp(-2\lambda) \sum_{i=\max(0,-k)}^{\infty} \frac{\lambda^{2i+k}}{i!(i+k)!}, \end{aligned}$$

et ceci donne la fonction génératrice des moments de T

$$\begin{aligned} \varphi_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} P(T = k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} \exp(-2\lambda) \sum_{i=\max(0,-k)}^{\infty} \frac{\lambda^{2i+k}}{i!(i+k)!} \\ &= \exp(-2\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \sum_{k=-i}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^{i+k}}{(i+k)!} \\ &= \exp(-2\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ti} \frac{\lambda^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} e^{tj} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \exp\left\{\lambda\left(e^t + e^{-t} - 2\right)\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

et on a

$$E[T^n] = T_n(\lambda) = B_n(0, 2\lambda, 0, 2\lambda, 0, ...). \tag{4.20}$$

On déduit donc que les moments d'ordre n de la variable aléatoire T coincident avec les polynômes $B_n(0, 2\lambda, 0, 2\lambda, 0, ...)$. ainsi Les moments d'ordre $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$de la variable aléatoire T valent respectivement :

$$1, 0, 2\lambda, 0, 2\lambda + 12\lambda^2, 0, 2\lambda + 60\lambda^2 + 120\lambda^3, \ldots$$

On remarque que les moments d'ordre impaire sont nuls.

En particulier, si $\lambda = 1$

$$E[T^n] = T_n(1) = T_n \text{ (les nombres de Touchard),} \tag{4.21}$$

et Les moments d'ordre $0, 1, 2, 3, \ldots$de la variable aléatoire T vallent respectivement :

$$1, 0, 2, 0, 14, 0, 182, \ldots$$

Par La fonction génératrice de la variable aléatoire Z

$$\varphi_Z(t) = \mathrm{E}(\exp(tZ)) = \mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{2}T\right)\right) = \exp\{\lambda(\cosh t - 1)\}. \tag{4.22}$$

ainsi, pour $\lambda = 1$

$$E[Z^n] = T_n\left(\frac{1}{2}\right) = B_n(0,1,0,1,0,...),$$

c'est le nombre partitions d'un ensemble à n éléments en blocs de cardinalités paires. Les moments de la variable aléatoire Z prènnent les valeurs :

$$1, 0, 1, 0, 4, 0, 31, \ldots$$

En généralisant les techniques précédentes, des suites polynômiales à support $r \bmod s$ sont construites :

Définition 4.6 *Les polynômes de Touchard généralisés* $(T_{n,s,r}(x); n \geq 0)$ *sont définis par :*

$$\begin{aligned} T_{n,s,r}(x) &= B_n(xx_1, xx_2, ...), \qquad (4.23)\\ \textit{avec } x_i &= \begin{cases} 1 & \textit{si } i = r \bmod s \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

A partir de la définition des polynômes de Touchard généralisés, on obtient une suite polynomiales $(T_{n,s,r}(x); n \geq 0)$ de fonctions génératrices

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_{n,s,r}(x)\frac{t^n}{n!} = \exp\left\{\frac{x}{s}\left(\sum_{j=1}^{s}\exp\left(\xi^j t\right) - 1\right)\right\}. \tag{4.24}$$

Ces polynômes généralisent les polynômes de Touchard et on a :

$$T_n(x) = T_{n,2,0}(2x) = B_n(0, 2x, 0, 2x, 0, ...). \tag{4.25}$$

Si $r = 0 \bmod s$, on obtient le processus circulaire d'ordre s à partir de s variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ :

$$Z = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\xi^j X_j \text{ avec } \xi = \exp\left(\frac{2\pi i}{s}\right). \tag{4.26}$$

La fonction génératrice des moments de Z est donnée par le théorème suivant

Théorème 4.7 *[34] Si $X_1, ..., X_s$ sont s variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ et $Z = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\xi^j X_j$ avec $\xi = \exp\left(\frac{2\pi i}{s}\right)$. Alors*

$$\varphi_Z(t) = \exp\left\{\frac{\lambda}{s}\left(\sum_{j=1}^{s}\exp\left(\xi^j t\right) - 1\right)\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\lambda x_1, \lambda x_2, ...)\frac{t^n}{n!},$$
$$\text{où } x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } s \text{ dévise } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.27}$$

On peut vérifier facilement que $B_n(x_1, x_2, ...) = 0$ lorsque s ne dévise pas n.

On a

$$\varphi_Z(t) = \exp\left\{\frac{\lambda}{s}\left(\sum_{j=1}^{s}\exp\left(\xi^j t\right) - 1\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n,s,0}(\lambda)\frac{t^n}{n!}. \tag{4.28}$$

Ainsi, les moments non-centrés d'ordre n de Z coinsident avec les polynômes de Touchard $T_{n,s,0}(\lambda)$, c'est-à-dire

$$E[Z^n] = T_{n,s,0}(\lambda) = B_n(\lambda x_1, \lambda x_2, ...), \quad n \geq 0,$$

où

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } s \text{ dévise } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, si $\lambda = 1$

$$E[Z^n] = T_{n,s,0}(1) = B_n(x_1, x_2, ...). \tag{4.29}$$

Exemple 4.8 *pour $s = 3$, En se basant sur la construction des polynômes de Bell, on peut déduire les moments de la variable aléatoire Z,*

$$E[Z^n] = T_{n,3,0}(\lambda) = B_n(0, 0, \lambda, 0, 0, \lambda, ...).$$

qui prènnent les valeurs

$$1, 0, 0, \lambda, 0, 0, \lambda + 10\lambda^2, 0, 0, \lambda + 84\lambda^2 + 280\lambda^3, \ldots$$

4.1.3 Nombres de Stirling généralisés

Similaire au nombre de Stirling du deuxième espèce $S(n,k)$, le coefficient de x^k dans le polynôme de Bell $B_n(x)$, sont définis les nombres de Stirling généralisés de deuxième espèce $S_{s,r}(n,k)$.

On a

$$S(n,k) = B_{n,k}(1,1,1,...), \tag{4.30}$$

et on définit

$$S_{s,r}(n,k) = B_{n,k}(x_1, x_2, ...) \quad \text{avec } x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = r \bmod s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{4.31}$$

$S_{s,r}(n,k)$ est alors le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocks de sous-ensembles non-vides de cardinalités congruent $r \,(\bmod s)$. Si on pose

$$g_{s,r}(t) = \begin{cases} \frac{1}{s}\left(e^{\xi t} + ... + e^{\xi^s t}\right) - 1 & \text{si } r = 0 \bmod s \\ \frac{1}{s}\left(\xi^{-r} e^{\xi t} + ... + \xi^{-rs} e^{\xi^s t}\right) & \text{si } \ r \neq 0 \bmod s \end{cases} \tag{4.32}$$

on obtient

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_{s,r}(n,k) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(g_{s,r}(t)\right)^k \tag{4.33}$$

Exemples 4.9 *1.* $S_{1,0}(n,k) = S(n,k) = B_{n,k}(1,1,1,...)$.

2. $S_{2,0}(n,k) = B_{n,k}(1,0,1,0,...)$ *: Le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocks de tailles paires.*

3. $S_{2,1}(n,k) = B_{n,k}(0,1,0,1,...)$ *: Le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocks de tailles impaires.*

Soit maintenant

$$B_{s,r}(n) = \sum_{k=1}^{n} S_{s,r}(n,k), \tag{4.34}$$

le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en blocks de sous-ensembles non-vides de cardinalités congruent r $(\bmod s)$, on a alors :

$$\begin{aligned} B_{s,r}(n) &= B_n(x_1, x_2, ...) = T_{n,s,r}(1) && (4.35) \\ B_{s,r}(0) &= 1. \end{aligned}$$

et de fonction génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{s,r}(n) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(g_{s,r}(t)\right). \tag{4.36}$$

Exemples 4.10 *1.* $B_{1,0}(n) = B_n$, *2.* $B_{2,0}(1) = B_n(1,0,1,0,...) = T_n\left(\frac{1}{2}\right)$ *: Les nombres de Touchard semi-réduits.*

Théorème 4.11 *[34] Pour k fixe, il existe des constantes* $b_1, ..., b_d$ *telles que*

$$S_{s,r}(n,k) + \sum_{j=1}^{d} b_j S_{s,r}(n-j,k) = 0. \tag{4.37}$$

Théorème 4.12 *[34] Soit* p *un nombre premier avec* $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, s)$. *Alors*

$$S_{s,r}(n+p,k) \equiv \begin{cases} S_{s,r}(n+1,k) \pmod{p} & si\ r \neq 1 \,(\mathrm{mod}\, s) \\ S_{s,1}(n+1,k) + S_{s,1}(n,k-p) \pmod{p} & si\ r \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, s) \end{cases} \tag{4.38}$$

Corollaire 4.13 *[34] Soit* p *un nombre premier avec* $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, s)$. *Alors*

$$B_{s,r}(n+p) \equiv \begin{cases} B_{s,r}(n+1) \pmod{p} & si\ r \neq 1 \,(\mathrm{mod}\, s) \\ B_{s,1}(n+1) + B_{s,1}(n) \pmod{p} & si\ r \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, s) \end{cases} \tag{4.39}$$

4.2 Lois de Poisson composée

Soit X une variable aléatoire discrète de loi de probabilité $q_x = P(X = x), x \geq 0$ et de fonction génératrice $G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} q_x t^x$, et soit N une variable aléatoire discrète positive indépendant de X, de loi de probabilité de Poisson de paramètre λ et de fonction génératrice

$$G_N(t) = \sum_{x=0}^{\infty} c_x t^x = e^{-\lambda(1-t)} \tag{4.40}$$

Définition 4.14 *Soient* $X_1, X_2, ...$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. La variable aléatoire* S_N *définie par* $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$*, est appelée Loi de Poisson composée (Compound Poisson) et sa fonction génératrice est donnée par la fonction composée*

$$G_{S_N}(t) = \exp(-\lambda(1 - G_X(t))) \tag{4.41}$$

Théorème 4.15 *[34] Soient* $X_1, X_2, ...$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que* X*, avec* $\mathrm{E}(X^n) = x_n$*, alors les moments d'ordre* n *de la loi de Poisson composée* S_N *sont donnés par :*

$$\mathrm{E}[S_N^n] = B_n(\lambda x_1, ..., \lambda x_n).$$

Les moments binomiaux d'ordre k de la loi de Poisson N

$$b_{(k)} = \frac{\lambda^k}{k!}, \tag{4.42}$$

Et on a

$$\mathfrak{f}(q_0) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j q_0^j = e^{-\lambda(1-q_0)}; b_{(k)}(q_0) = \frac{(\lambda q_0)^k}{k!}. \tag{4.43}$$

Ainsi, des identités (3.26) et (3.31), la loi et les moments factoriels d'ordre n de la distribution de Poisson composée S_N sont donnés par :

$$P(S_N = m) = \frac{1}{m!} e^{-\lambda(1-q_0)} \sum_{k=0}^{m} \lambda^k B_{m,k}(1!q_1, 2!q_2, \ldots), \tag{4.44}$$

$$E\left[(S_N)_n\right] = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k B_{n,k}(\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, \ldots). \tag{4.45}$$

Exemples 4.16 *En fixant la loi de X, on obtient plusieurs lois de Poisson composées :*

1. *Si X suit une loi de Poisson de paramètre θ : $q_0 = e^{-\theta}; q_m = e^{-\theta}\dfrac{\theta^m}{m!}$ et $\mu_{(n)} = \theta^n$:*

$$\begin{aligned} P(S_N = m) &= \frac{1}{m!} e^{-\lambda\left(1-e^{-\theta}\right)} \sum_{k=0}^{m} \lambda^k B_{m,k}(1!q_1, 2!q_2, \ldots) \\ &= \frac{1}{m!} \lambda^m e^{-\lambda\left(1-e^{-\theta}\right)} \sum_{k=0}^{m} \left(\lambda e^{-\theta}\right)^k S(m,k) \\ &= \frac{1}{m!} \lambda^m e^{-\lambda\left(1-e^{-\theta}\right)} B_m\left(\lambda e^{-\theta}\right), \end{aligned}$$

et

$$E\left[(S_N)_n\right] = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k B_{n,k}(\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, \ldots) = \theta^n \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\lambda^k = \theta^n B_n(\lambda).$$

2. *Supposons que X suit une loi Binomiale de paramètres s et p; la distribution de S_N est appelée distribution d'Hermite généralisée. On a, $q_m = \dbinom{s}{m} p^m q^{s-m}; q_0 =$*

q^s *et* $\mu_{(n)} = (s)_n p^n$:

$$\begin{aligned} P(S_N = m) &= \frac{1}{m!} e^{-\lambda(1-q^s)} \sum_{k=0}^{m} \lambda^k B_{m,k}(1!q_1, 2!q_2, .., i!q_i, \ldots) \\ &= \frac{1}{m!} \left(\frac{p}{q}\right)^m e^{-\lambda(1-q^s)} \sum_{k=0}^{m} B_{m,k}((s)_1, (s)_2, \ldots) (\lambda q^s)^k \\ &= \frac{1}{m!} \left(\frac{p}{q}\right)^m e^{-\lambda(1-q^s)} f_m(\lambda q^s) \\ &= \frac{1}{m!} \left(\frac{p}{q}\right)^m e^{-\lambda(1-2q^s)} (s)_m , \end{aligned}$$

avec $f_m(x) = (s)_m e^x$ *une suite de potentiel, donnée par :*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} B_{m,k}(f_1'(0), f_2'(0), \ldots) x^k. \tag{4.46}$$

Les moments factoriels de S_N

$$\begin{aligned} E[(S_N)_n] &= \sum_{k=0}^{n} \lambda^k B_{n,k}((s)_1 p^1, (s)_2 p^2, ...) \\ &= p^n \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}((s)_1, (s)_2, ...) \lambda^k \\ &= p^n f_m(\lambda) \\ &= p^n e^{\lambda} (s)_m . \end{aligned}$$

4.3 Partitions et moments de variables aléatoires

On a vu que la suite des nombres de Bell $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de moments d'une variable aléatoire X de Poisson de paramètre 1, et on a

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{j\geq 0} \frac{j^n}{j!} = E[X^n]. \tag{4.47}$$

On a comme conséquence de (4.47)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{n!} t^n = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n \right) = e^{t+e^t-1} = E\left[e^{t(1+x)}\right]. \tag{4.48}$$

d'où $\{B_{n+1}\}_{n\geq 0}$ est une suite de moments de la variable aléatoire $1 + X$.

Une généralisation des B_n est établie dans la référence [24] avec son interprétation probabiliste :

Soit maintenant, un ensemble Ω.

Une partition de Ω est une collection de sous ensembles de Ω disjoints deux à deux dont l'union est Ω. Puisque les partitions de Ω sont aussi des ensembles, on peut considérer leurs partitions. Ces partitions de partitions de Ω sont appelées partitions de Ω de niveau 2. Plus généralement, pour $m = 1, 2, \ldots$, sont définie inductivement, les partitions de Ω de niveau m (ou m-partitions de Ω), comme les partitions de $(m-1)$-partitions de Ω.

Ω est la seul 0-partitions de Ω. Les éléments d'une m-partition sont appelés m-blocs et ce sont des ensembles de $(m-1)$-blocks. Les 0-blocks étant les éléments de Ω.

Et donc, $B_n^{\langle m\rangle}$ est le nombre de toutes les m-partitions d'un ensemble à n éléments et en particulier, $B_n^{\langle 1\rangle} = B_n$.

Soit $\eta_1(.), \eta_2(.), \ldots$, une suite de processus de Poisson standards et indépendants, définis sur le même éspace de probabilité ; et soit $\{\tau_m\}_{m\geq 0}$ la suite de variables aléatoires (à valeurs entières positives) définies récurcivement par

$$\begin{cases} \tau_0 = 1, \\ \tau_m = \eta_m(\tau_{m-1})\,; m \geq 1. \end{cases} \tag{4.49}$$

La fonction génératrice exponentielle de $\left\{B_n^{\langle m\rangle}\right\}_{n\geq 0}$ et la fonction génératrice des moments de τ_m sont notées, respectivement, $\mathcal{B}^{\langle m\rangle}(t)$ et $\mathcal{M}^{\langle m\rangle}(t)$, et $e^{\langle m\rangle} = e \circ \ldots \circ e$ (m-composition de la fonction e définie par $e(t) = e^t - 1$).

Sous les hypothèses précédentes, le théorème qui suit montre que la suite $\left\{B_n^{\langle m\rangle}\right\}_{n\geq 0}$ est une suite de moments de la variable aléatoire τ_m et en même temps une suite de moments factoriels de la variable aléatoire τ_{m+1} :

Théorème 4.17 *[24] On a :*

(*a*) *Pour* $m \geq 0$,

$$\mathcal{B}^{\langle m\rangle}(t) = e^{e^{\langle m\rangle}(t)} = \mathcal{M}^{\langle m\rangle}(t)\,; t \in \mathbb{R}. \tag{4.50}$$

(*b*) *Pour* $m, n \geq 0$,

$$B_n^{\langle m\rangle} = E[\tau_m^n] = E[(\tau_{m+1})_n]. \tag{4.51}$$

Pour conséquence du théorème précédent, l'interprétation probabiliste des nombres $B_{n+1}^{\langle m\rangle}$ est déduite :

Corollaire 4.18 *[24] On a :*

(a) *Pour* $m \geq 0$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}^{\langle m\rangle}}{n!} t^n = \exp\left(\sum_{n=0}^{m} e^{\langle i\rangle}(t)\right); t \in \mathbb{R}. \tag{4.52}$$

(b) *Pour* $m, n \geq 0$,

$$B_{n+1}^{\langle m\rangle} = E\left[\sum_{n=0}^{m} \tau_i'\right]^n = E\left[\sum_{n=0}^{m} \tau_{i+1}'\right]_n, \tag{4.53}$$

où $\tau_0', \tau_1', \tau_2', \ldots,$ *sont des variables aléatoires indépendentes telles que pour tout* i, τ_i' *a la même distribution que* τ_i.

Ainsi, la suite $\left\{B_{n+1}^{\langle m\rangle}\right\}_{n\geq 0}$ est une suite de moments de la somme $\sum_{n=0}^{m} \tau_i'$ des variables aléatoires indépendantes τ_i', où τ_i' a la même distribution que τ_i et en même temps une suite de moments factoriels de la somme des τ_{i+1}'.

Chapitre 5

Théorème central-limite, graphes aléatoires et polynômes de Bell

5.1 Relation entre le théorème central limite et les polynômes de Bell

Le théorème central limite dit que si l'on fait la somme de k variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors pour k assez grand, cette somme suit une loi Normale quelle que soit la loi de départ. Dans ce chapitre, puisque la loi de la somme de variables aléatoires discrètes peut être exprimer en utilisant les polynômes de Bell, on peut établir quelques limites en prenant des exemples de variables aléatoires discrètes. On essaye d'approximer la médiane pour la somme de quelques variables aléatoires.

Théorème 5.1 *(Théorème Central Limite (TCL)) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même distribution de moyenne μ et de variance σ^2. Posons : $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$; alors*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_k - k\mu}{\sigma\sqrt{k}} \longrightarrow N(0,1) \tag{5.1}$$

et ona

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\frac{S_k - k\mu}{\sigma\sqrt{k}} \le c\right) = \Phi(c) = \int_{-\infty}^{c} \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx. \tag{5.2}$$

On a d'une part, d'après le lemme (3.2)

$$P\left(S_k \leq n\right) = \sum_{j=0}^{n} P\left(S_k = j\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{(j+k)!} B_{j+k,k}\left(1!p_0, ..., m!p_{m-1}, ...\right), \tag{5.3}$$

Et d'autre part, d'après le théorème (TCL) (5.1)

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} P\left(S_k \leq n\right) &= \lim_{k\to\infty} P\left(\frac{S_k - k\mu}{\sigma\sqrt{k}} \leq \frac{n-k\mu}{\sigma\sqrt{k}}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \Phi\left(\frac{n}{\sigma\sqrt{k}} - \frac{\mu\sqrt{k}}{\sigma}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \Phi\left(-\infty\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où, on déduit

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{(j+k)!} B_{j+k,k}\left(1!p_0, ..., m!p_{m-1}, ...\right) = 0. \tag{5.4}$$

Exemples 5.2 *1.* $p_j = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\frac{1}{(j+1)!}; \mu = \sum_j j \frac{1}{\mathrm{e}-1}\frac{1}{(j+1)!} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$

La limite (5.4) nous donne

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{(j+k)!} B_{j+k,k}\left(1!\tfrac{1}{\mathrm{e}-1}\tfrac{1}{(0+1)!}, 2!\tfrac{1}{\mathrm{e}-1}\tfrac{1}{(1+1)!} ..., m!\tfrac{1}{\mathrm{e}-1}\tfrac{1}{m!}, ...\right) = 0 \tag{5.5}$$

d'où On a

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{(j+k)!} \frac{S(j+k,k)}{(\mathrm{e}-1)^k} = 0 \tag{5.6}$$

2. $p_j = \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{j!}; \mu = \sum_j j \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{j!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_j \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{(j-1)!} = 1$

La limite (5.4) nous donne

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{(j+k)!} B_{j+k,k}\left(1!\tfrac{1}{\mathrm{e}}\tfrac{1}{0!}, 2!\tfrac{1}{\mathrm{e}}\tfrac{1}{1!} ..., m!\tfrac{1}{\mathrm{e}}\tfrac{1}{(m-1)!}, ...\right) = 0 \tag{5.7}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{(j+k)!} \frac{1}{\mathrm{e}^k} B_{j+k,k}\left(1, 2, ..., m, ...\right) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{k!}{(j+k)!} \frac{1}{\mathrm{e}^k} \binom{j+k}{k} k^j = 0$$

D'où on déduit

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{k^j}{j!} \mathrm{e}^{-k} = 0 \tag{5.8}$$

5.1.1 Approximation de la médiane d'une somme de variables aléatoires

Pour chacune des distributions de probabilités sur la ligne des nombres réels avec une fonction de distribution cumulative, F, peu importe s'il s'agit d'une distribution continue de probabilités ou d'une distribution discrète de probabilités, une médiane me satisfait l'égalité

$$P(X \leq me) = P(X \geq me) = \int_{-\infty}^{me} dF(x). \tag{5.9}$$

Pour une disribution de probabilités discrète X

$$P(X \leq me) = P(X \geq me) = \sum_{j=0}^{me} P(X = j) = \frac{1}{2}. \tag{5.10}$$

Pour la somme S_k :

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} P\left(\frac{S_k}{k} \leq x\right) &= \lim_{k\to\infty} P(S_k \leq kx) \qquad (5.11)\\
&= \lim_{k\to\infty} P\left(\left(\frac{S_k - k\mu}{\sigma\sqrt{k}}\right) \leq \frac{kx - k\mu}{\sigma\sqrt{k}}\right)\\
&= \lim_{k\to\infty} \Phi\left(\frac{(x-\mu)\sqrt{k}}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Et de l'identité (5.3) on déduit

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{[kx]} \frac{k!}{(j+k)!} B_{j+k,k}(1!p_0, ..., m!p_{m-1}, ...) = \begin{cases} \Phi(+\infty) = 1; \text{ si } x > \mu, \\ \Phi(-\infty) = 0; \text{ si } x < \mu, \\ \Phi(0) = \frac{1}{2}; \text{ si } x = \mu. \end{cases} \tag{5.12}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} P(S_k \leq n + kx) &= \lim_{k\to\infty} P\left(\left(\frac{S_k - k\mu}{\sigma\sqrt{k}}\right) \leq \frac{n + kx - k\mu}{\sigma\sqrt{k}}\right) \qquad (5.13)\\
&= \lim_{k\to\infty} \Phi\left(\frac{n}{\sigma\sqrt{k}} + \frac{(x-\mu)\sqrt{k}}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Et donc, on déduit

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{[n+kx]}\frac{k!}{(j+k)!}B_{j+k,k}\left(1!p_0,...,m!p_{m-1},...\right)=\begin{cases}1 & \text{si } x>\mu,\\ 0 & \text{si } x<\mu,\\ \frac{1}{2} & \text{si } x=\mu.\end{cases} \tag{5.14}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}P\left(S_k\leq kg\left(k\right)\right) &= \lim_{k\to\infty}P\left(\left(\frac{S_k-k\mu}{\sigma\sqrt{k}}\right)\leq\frac{kg\left(k\right)-k\mu}{\sigma\sqrt{k}}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\Phi\left(\frac{\left(g\left(k\right)-\mu\right)\sqrt{k}}{\sigma}\right)\end{aligned} \tag{5.15}$$

Et on a

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{[kg(k)]}\frac{k!}{(j+k)!}B_{j+k,k}\left(1!p_0,...,m!p_{m-1},...\right)=\begin{cases}1 & \text{si } g\left(k\right)>\mu,\\ 0 & \text{si } g\left(k\right)<\mu,\\ \frac{1}{2} & \text{si } g\left(k\right)=\mu.\end{cases} \tag{5.16}$$

Et si on prend $p_j = \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{j!}; \quad \mu=1:$

– l'identité (5.16) devient

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{[kg(k)]}\frac{k^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-k}=\begin{cases}1 & \text{si } g\left(k\right)>1\\ 0 & \text{si } g\left(k\right)<1\\ \frac{1}{2} & \text{si } g\left(k\right)=1\end{cases} \tag{5.17}$$

Et particulièrement,

(a) pour $g\left(k\right)=1$, On déduit la limite

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{k^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-k}=\frac{1}{2}, \tag{5.18}$$

ainsi, une approximation de la somme $\sum_{j=0}^{k}\frac{k^j}{j!}$ est donnée par

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{k^j}{j!}\simeq\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{k}\ \text{ qand } k\to\infty. \tag{5.19}$$

(b) pour $g(k) = 2$, on déduit la limite

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{[2k]}\frac{k^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-k} = 1, \tag{5.20}$$

ainsi, une approximation de la somme $\sum_{j=0}^{k}\frac{k^j}{j!}$ est donnée par

$$\sum_{j=0}^{[2k]}\frac{k^j}{j!} \simeq \mathrm{e}^k \text{ qand } k\to\infty. \tag{5.21}$$

(c) Et de manière générale pour $g(k) = \alpha$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{[\alpha k]}\frac{k^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > 1, \\ 0 & \text{si } \alpha < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \tag{5.22}$$

Si la loi de X est donnée par $p_j = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\frac{1}{(j+1)!}, \quad \mu = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$:

– l'identité (5.16) devient

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{[kg(k)]}\frac{k!}{(j+k)!}\frac{S(j+k,k)}{(\mathrm{e}-1)^k} = \begin{cases} 1 & \text{si } g(k) > \frac{1}{\mathrm{e}-1}, \\ 0 & \text{si } g(k) < \frac{1}{\mathrm{e}-1}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } g(k) = \frac{1}{\mathrm{e}-1}. \end{cases} \tag{5.23}$$

(a) Pour $g(k) = 1$, On déduit la limite

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(j+k)!}\frac{S(j+k,k)}{(\mathrm{e}-1)^k} = 1, \tag{5.24}$$

pour $g(k) = \alpha \geq 1$, On déduit la limite

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{\alpha k}\frac{k!}{(j+k)!}\frac{S(j+k,k)}{(\mathrm{e}-1)^k} = 1.$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme discrète $\mathcal{U}_q$ définie sur $\{0,1,...,q\}$ par

$$P(\mathcal{U}_q = j) = \frac{1}{q+1}, \text{ pour } j = 0,1,...,q\,; \text{ avec } \mu = \frac{q}{2}. \tag{5.25}$$

Pour $q, k \in \mathbb{N}$, Notons par $\mathcal{U}_q^{*k}$ le $k^{ème}$ produit de convolution de la loi uniforme, c'est-à-dire la somme de k variables aléatoires indépéndentes identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}_q$.

En combinant le lemme (3.2) et l'identité établie dans le théorème suivant

Théorème 5.3 *[4] On a*

$$B_{n,k}\left(1!, 2!, ..., (q+1)!, 0, ...\right) = \frac{n!}{k!}\binom{k}{n-k}_q. \tag{5.26}$$

La loi de $\mathcal{U}_q^{*k}$ sera donnée pour tout $n = 0, 1, ..., q, ..., kq$

$$\begin{aligned} P\left(\mathcal{U}_q^{*k} = n\right) &= \frac{k!}{(n+k)!} B_{n+k,k}\left(1!\tfrac{1}{q+1}, ..., (q+1)!\tfrac{1}{q+1}, 0, ...\right) \\ &= \frac{k!}{(n+k)!}\frac{1}{(q+1)^k} B_{n+k,k}\left(1!, ..., (q+1)!, 0, ...\right) \\ &= \frac{1}{(q+1)^k}\binom{k}{n}_q. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Théorème 5.4 *[4] On a*

$$P\left(\mathcal{U}_q^{*k} \leq kg(k)\right) = \sum_{j=0}^{[kg(k)]} \frac{1}{(q+1)^k}\binom{k}{n}_q. \tag{5.28}$$

l'identité (5.16) devient

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{[kg(k)]} \frac{1}{(q+1)^k}\binom{k}{n}_q = \begin{cases} 1 & \text{si } g(k) > \dfrac{q}{2} \\ 0 & \text{si } g(k) < \dfrac{q}{2} \text{ avec } g(k) \leq q \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } g(k) = \dfrac{q}{2} \end{cases} \tag{5.29}$$

et particulièrement

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{[\alpha k]} \frac{1}{(q+1)^k}\binom{k}{n}_q = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \dfrac{q}{2} < \alpha < q, \\ 0 & \text{si} \quad 0 < \alpha < \dfrac{q}{2}, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad \alpha = \dfrac{q}{2}. \end{cases} \tag{5.30}$$

Les moments d'ordre n de la loi uniforme sont donnés par :

$$E\left[\mathcal{U}_q^n\right] = \frac{1}{q+1}\sum_{j=0}^{q} j^n. \tag{5.31}$$

Le moment d'ordre 2

$$E\left[\mathcal{U}_q^2\right] = \frac{1}{q+1}\sum_{j=0}^{q} j^2 \frac{q(2q+1)}{6}. \tag{5.32}$$

Les moments d'ordre n de la somme $\mathcal{U}_q^{*k}$ sont donnés par le lemme (3.7)

$$\begin{aligned} E\left[\left(\mathcal{U}_q^{*k}\right)^n\right] &= \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k,k}\left(1, \frac{2}{q+1}\sum_{j=0}^{q} j, ..., \frac{m}{q+1}\sum_{j=0}^{q} j^{m-1}, ...\right) \quad (5.33) \\ &= \binom{n+k}{k}^{-1} \frac{1}{(q+1)^k} B_{n+k,k}\left(1, 2\sum_{j=0}^{q} j, ..., m\sum_{j=0}^{q} j^{m-1}, ...\right) \end{aligned}$$

Et en particulier l'espérance de la somme $\mathcal{U}_q^{*k}$

$$E\left[\mathcal{U}_q^{*k}\right] = \frac{1}{k+1}\frac{1}{(q+1)^k} B_{k+1,k}\left(1, 2\sum_{j=0}^{q} j, ..., m\sum_{j=0}^{q} j^{m-1}, ...\right). \tag{5.34}$$

Or, d'après le corollaire (7), dans ([4])

$$E\left[\mathcal{U}_q^{*k}\right] = \frac{1}{(q+1)^k}\sum_{j=0}^{qk} j\binom{k}{j}_q = \frac{qk}{2}, \tag{5.35}$$

Par identification des deux expressions précédentes, on déduit

$$\begin{aligned} B_{k+1,k}\left(1, 2\sum_{j=0}^{q} j, ..., m\sum_{j=0}^{q} j^{m-1}, ...\right) &= (k+1)\sum_{j=0}^{qk} j\binom{k}{j}_q \\ &= (k+1)(q+1)^k \frac{qk}{2}. \quad (5.36) \end{aligned}$$

5.2 La domination dans les graphes aléatoires via les polynômes de Bell

Comme application des polynômes partiels de Bell, une connection au graphes aléatoires, concernant la k-domination, est présentée dans la référence [25].

Soit $Q(x)$ un polynôme de type binomial défini par :

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\left(x^k - 1\right)^i ; 0 \leq m \leq n, k \geq 1, \tag{5.37}$$

et considérons

$$Q^{(j)}(1) = \left.\frac{d^j Q(x)}{dx^j}\right|_{x=1} ; 0 \leq j \leq m. \tag{5.38}$$

Lemme 5.5 *[25] Soit $(k)_l = k(k+1)\dots(k-l+1)$ le factoriel descendant de k. Alors, Pour i, j, k, des entiers positifs. On a :*

$$\left(\left(x^k-1\right)^i\right)^{(j)}(1) = \begin{cases} i!B_{j,i}\left((k)_1,(k)_2,\dots\right), j \geq i, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad j < i. \end{cases} \tag{5.39}$$

Lemme 5.6 *[25] On a :*

$$Q^{(j)}(1) = (nk)_j, \tag{5.40}$$

pour $1 \leq j \leq m \leq n, k \geq 1$.

Théorème 5.7 *[25] L'identité combinatoire*

$$\sum_{i=1}^{j} (n)_i B_{j,i}\left((k)_1,(k)_2,\dots\right) = (nk)_j \tag{5.41}$$

est vraie pour i, j, k, des entiers positifs.

Soient X et Y deux variables aléatoires.

Définition 5.8 *On dit que X est stochastiquement plus large que Y (X domine Y), on écrit $X \succ Y$, si*

$$P(X > a) \geq P(Y > a); \text{ pour tout } a. \tag{5.42}$$

et on écrit $F \succ G$, où F et G sont les distributions de probabilités de X et Y, respectivement.

Théorème 5.9 *[25] Soit X et Y deux variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres (nk, p) et $\left(n, 1-(1-p)^k\right)$, respectivement. Alors $X \succ Y$. On écrit*

$$b(nk, p) \succ b\left(n, 1-(1-p)^k\right), \tag{5.43}$$

pout tout entiers positifs n, k et $0 \leq p \leq 1$.

Soit un ensemble $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$.

Définition 5.10 *Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles, un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arêtes E. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v), notée $e = xy$, où x et y sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que x et y sont adjacents et que e est incidente 'à x et à y.*

Définition 5.11 *Un graphe est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes V_1 et V_2 de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents, on le note $G = (V_1 \cup V_2, E)$.*

Définition 5.12 *Le graphe aléatoire $G[V, p]$ défini sur l'ensemble de sommets $V = \{v_1, \ldots, v_N\}$ est un graphe où chacune des $\binom{N}{2}$ arêtes est présente avec probabilité p, absente avec probabilité $1 - p$, cela indépendamment du statut des autres arêtes. Le nombre d'arêtes de $G[V, p]$ suit la loi binomiale $b\left(\binom{N}{2}, p\right)$.*

Soient V_1 et V_2 deux sous ensembles disjoints et non-vides de V, tels que $|V_1| = n$,$|V_2| = k$ et $n + k \leq N$.

Définition 5.13 *Le graphe aléatoire biparti $G[V, V_1, V_2, p]$ est construit en plaçant des arêtes entre les nk paires de sommets de V_1 et V_2 avec une probabilité p.*

Deux variables aléatoires X et Y sont associées au graphe $G[V, V_1, V_2, p]$ telles que :

X : Représente le nombre d'arêtes entre V_1 et V_2. X suit une loi binomiale $b(nk, p)$.

Y : Représente le nombre de sommets de V_1 adjacents à au moins un sommet de V_2. Y suit une loi binomiale $b\left(n, 1 - (1 - p)^k\right)$.

Définition 5.14 *Une chaîne C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ telle que pour tout entier i, $1 \leq i \leq k - 1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k - 1$ représente la longueur de C et les sommets v_1 et v_k sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale de la chaîne C.*

Définition 5.15 *La distance entre deux sommets x et y d'un graphe $G = (V, E)$, notée $d(x, y)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant x et y.*

Définition 5.16 *Un sous-ensemble de sommets D de V est un dominant de G si tout sommet de $V \backslash D$ est adjacent à au moins un sommet de D.*

Définition 5.17 *Un ensemble dominant D d'un graphe G est minimal si aucun sous ensemble propre de D ne domine $V(G)$.*

Définition 5.18 *Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G est appelé nombre de domination, et est noté par $\gamma(G)$. Le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G est appelé nombre de domination supérieur, et est noté par $\Gamma(G)$.*

Définition 5.19 *Un sous-ensemble de sommets D de V est un k-dominant de G si tout sommet de $V \backslash D$ est de distance au plus $k, k \in \mathbb{N}^*$, d'au moins un sommet de D.*

Théorème 5.20 *[25] Considérons $G[V,p]$ défini sur l'ensemble de sommets $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Pour $x \in V$, soient $\Gamma_k(x) = \{y \in V / d(x,y) = k\}$ et $N_k(x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Gamma_i(x) \subsetneq V$. Soient $Z = (|\Gamma_k(x)|, |N_k(x)|)$, $Y = |\Gamma_{k+1}(x)|$ et $G(a) = G_{Y/Z}(a/Z) = P(Y \leq a/Z)$ la distribution conditionnelle. Alors, on a la domination*

$$\begin{aligned} & b(|\Gamma_k(x)|(n - |N_k(x)|), p) \succ G_{|\Gamma_{k+1}(x)|/(|\Gamma_k(x)|,|N_k(x)|)} \\ & = b\left(n - |N_k(x)|, 1 - (1-p)^{|\Gamma_k(x)|}\right) \end{aligned} \tag{5.44}$$

pour $0 \leq k < n, 0 \leq p \leq 1$.

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié les variables aléatoires en connexion avec les polynômes de Bell.

Nous avons donné l'interprétation combinatoire et probabiliste des polynômes de Bell et nous avons déduit des interprétations combinatoires et probabilistes pour les nombres de Stirling associés, nombre de Stirling et nombres de Touchard, généralisés.

Les polynômes de Bell sont utilisés pour exprimer ou interpréter combinatoirement les moments de certaines lois telles que la loi de poisson, la loi de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Nous avons donné une approximation de la médiane pour la somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Au cours de ce mémoire nous avons constaté que les polynômes de Bell représentent un outil trés important dans l'étude des probailités. Pour approfondir cette étude, il serait intéressant de :

– Déterminer la loi et les moments de la somme de vecteurs aléatoires indépendants.
– Déterminer la loi et les moments de la somme de variables aléatoires continues, indépendantes et identiquement distribuées.
– Déterminer la loi et les moments de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires continues, indépendantes et identiquement distribuées.
– Donner une condition nécésaire et suffisante simple qui caractérise une suite de cumulants.

Bibliographie

[1] M. Abbas and S. Bouroubi, *On new identities for Bell's polynomials*, Discrete Mathematics 293 (2005), pp. 5–10.

[2] M. Aigner, *Combinatorial Theory.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1979), pp. 99-116.

[3] H. Belbachir and M. Mihoubi. *A generalized recurrence for Bell polynomials*, European Journal of Combinatorics 30 (2009), pp. 1254-1256.

[4] H. Belbachir, S. Bouroubi et A. Khelladi, *Connection between ordinary multinomials, generalized Fibonacci numbers, partial Bell partition polynomials and convolution powers of discrete uniform distribution*, arXiv : 0708.2195v1[math.CO]16 Aug (2007).

[5] H. Belbachir, F. Bencherif, *Linear recurrent sequences and powers of a square matrix*, Integers 6 (2006), A12, 17pp.

[6] E. T. Bell, *Exponential polynomials*, Annals of Mathematics 35, (1934), pp. 258–277.

[7] G.Bennett, *Hausdorff means and moment sequences*, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland 2010, DOI 10.1007/s11117-009-0039-y.

[8] N. Berestycki & J. Pitman. *Gibbs distributions for random partitions generated by a fragmentation process*, arXiv :math.PR/0512378 v2 14 Nov (2006).

[9] S. Bouroubi & M. Mihoubi. *Sur quelques relations relatives aux nombres de partitions d'un entier*. Maghreb Math. Rev., Vol. 11, No1, June (2002), pp. 14–19.

[10] S. Bouroubi & N. Benyahia Tani. *A new identity for complete Bell polynomials based on formula of ramanujan. Journal of Integer Sequences, Vol.12(2009)*, Article 09.3.5.

[11] L. Carlitz, Some congruences for the Bell polynomials, Pacific J. Math. 11 (1961), pp. 1215–1222.

[12] C. Cassisa and P. E. Ricci, Orthogonal invariants and the Bell polynomials, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 20, Roma, (2000), pp. 293–303.

[13] Cerasoli, Mauro, *Two identities between Bell polynomials and Fibonacci numbers.* Boll.Un. Mat. Ital. A (5) 18 (1981), no. 3, pp. 387–394.

[14] C.A.Charalambides, *Enumerative Combinatorics*, Chapman et Hall/CRC, 2002.

[15] C.A.Charalambides, *Combinatorial Methods in Discrete distributions*, John Wiley et Sons, INC, 2005.

[16] L. Comtet, *Advanced Combinatorics.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, (1974).

[17] W.S. Chaou, Leetsch C. Hsu, Peter J. S. Shiue, Application of Faà di Bruno's formula in characterization of inverse relations. Journal of Computational and Applied Mathematics 190 (2006), pp. 151–169.

[18] W. Chu, *Finite differences and determinant identities.* Linear Alg. Appl. 430, 215–228 (2009).

[19] D.Cvijović, *New Identities for the Partial Bell Polynomials*, Applied Mathematics Letters(2011), doi : 20.1016/j.aml.2011.03.043.

[20] W. Feller. *An introduction To Probability Theory and Its Applications,* 3rd ed. John Willy and Sons, Inc., (1968).

[21] A. Gertsch & A. Robert, *Some Congruences concerning the Bell Numbers*, Bull. BeIg. math. soc. 3 (1996), pp. 467–475.

[22] H Hamburger, *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems* I–III, Math. Ann. 81 (1920), 235–319, 82 (1921), 120–164, 82 (1921), 168–187.

[23] F. Hausdorff, *Momentprobleme für ein endliches Intervall*, Math. Z. 16 (1923), 220-248.

[24] Jesús de la Cal & Javier Cárcamo, *Set partitions and moments of random variables.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 378 (2011) 16–22.

[25] A. Korzeniowski, *Binomial Tails Domination for Random Graphs via Bell Polynomials,* Journal of Probability and Statistical Science, 4(1), 99-105, Fev. 2006.

[26] L. Lovàsz, *Combinatorial problems and exercices,* Akadémiai Kiado, Budabest, (1979).

[27] M. Mihoubi, *Congruences and partial Bell Polynomials.* Article soumis dans "Journal of Integer Sequences".

[28] M. Mihoubi, *Polynômes multivariés de Bell et polynômes de type binomial*, Thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques, USTHB, Alger,(2008). N° d'ordre : 09 /2008-E/MT, Décembre (2008).

[29] M. Mihoubi, *Bell polynomials and binomial type sequences.* Discrete Mathematics, 308 (2008), pp. 2450–2459.

[30] M. Mihoubi, *The role of binomial type sequences in determination identities for Bell polynomials*, arXiv :0806.3468v1 [math.CO] 20 Jun (2008).

[31] N. Pivault, *Generalised Bell Polynomials and the Combinatorics of Poisson Central Moments*, The Electronic Journal of Combinatorics,18 (2011), #P54.

[32] J. Pitman, *Combinatorial stochastic processes,* volume (1875) of Lecture Notes in Mathemat-ics. Springer-Verlag, Berlin, (2006). Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July (2002), pp. 7–24, With a foreword by Jean Picard.

[33] D. Port, *A Characterization of Exponential and Ordinary Generating Functions.* Journal of Combinatorial Theory, Series A 98 (2002), pp. 219–234.

[34] D.Port, *Polynmial maps with application to combinatorics and probability theory,* Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université de California, Fevrier (1994).

[35] Radoux,C, *The Hankel determinant of exponential polynomials : a very short proof and a new result concerning Euler numbers.* American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 3 (Mar., 2002), pp. 277-278.

[36] J. Riordan, *Combinatorial Identities.* Huntington, New York, (1979).

[37] J Riordan, *Derivatives of composite functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pp. 664–667.

[38] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis,* John Wiley & Sons, New York, (1958) ; Princeton University Press, Princeton, NJ, (1980).

[39] J. Riordan, *Combinatorial Identities,* Wiley, New York, (1968).

[40] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis,* J. Wiley & Sons, Chichester, (1953).

[41] S. Roman, *The Umbral Calculus*. Academic Press, 1984.

[42] M. Z. Spivey, *A generalized recurrence for Bell numbers*. Journal of integer sequences, Vol. 11, Art. 08.2.5. (2008).

[43] T.J. Stieltjes, *Oeuvres complètes/Collected papers*. Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 1993, Reprint of theb 1914–1918 edition.

[44] W. Wang & T. Wang, *Matrices related to the Bell polynomials*. Linear Algebra and its Applications 422 (2007) 139–154.

[45] J. Zeng, *Multinomial Convolution Polynomials*, Discrete Mathematics 160 (1996), pp. 219–228.