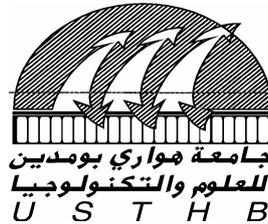


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique

N° d'ordre : 11 / 2006-M / MT



Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des Mathématiques

MEMOIRE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Magister

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : Souad SLIMANI

Sujet

Distance Hérédité dans les Graphes et Quelques Extensions

Soutenu le 01 Octobre 2006, devant le jury composant :

A. BERRACHEDI	Professeur	USTHB	Président.
M. AIDER	Professeur	USTHB	Directeur de thèse.
I. BOUCHEMAKH	Maître de Conférence	USTHB	Examinatrice
R. OUAFI	Maître de Conférence	USTHB	Examineur.

Remerciements

A Mr M. Aïder, Professeur à la faculté des mathématiques USTHB, J'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance pour la patience et la générosité avec lesquelles il a su me guider durant les travaux de recherches. Je le remercie vivement pour son aide, son assistance et sa sympathie dont il a fait preuve.

Je remercie également Mr A. Berrachedi, Professeur à la faculté des mathématiques USTHB, qui a bien voulu me rendre honneur en acceptant de prendre en charge la présidence du jury.

Mes sincères remerciements vont aussi à Mme I. Bouchemakhi, Mr R. Ouafi, maîtres de conférence pour leur gratitude et leur dévouement qui ont permis d'honorer le jury.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ceux qui m'ont donnée la vie et que je leur témoigne mon amour et ma reconnaissance : MAMAN et PAPA,

A mes chers sœurs Karima, Razika et Naouel, et à mes frères.

A mon beau frère, A mes nièces 'Sarah et samia', et a mon neveu Amine

A mon oncle Moussa et à sa femme Djamila et à leurs enfants ' Abed Hamid, cherif et Yasmine' , A Chafika

Je n'oublierai pas de remercier les autres membres de la famille, ainsi que tous mes amis qui m'ont soutenu et aidé tout au long de mon travail.

Enfin, je tiens à remercier toutes personnes qui ont contribué directement ou indirectement à l'aboutissement de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Table des Matières	1
Résumé	3
Introduction générale	4
1. Définitions et Notations	7
1.1. Introduction.....	7
1.2. Graphes et sous-graphes	8
1.2.1. Définitions et préliminaires sur les graphes	8
1.2.2. Sous-graphes	9
1.3 Chaînes, Cycles et connexités.....	10
1.3.1. Chaînes	10
1.3.2. Cycles	10
1.3.3. Connexités	11
1.4. Distance et Intervalle	13
1.4.1. Distance et décomposition en couches	13
1.4.2. Intervalle	14
1.5. Opérations dans les graphes	15
1.6. Complexité Algorithmique	17
2. Les Graphes Distance-héréditaire	20
2.1. Introduction.....	20
2.2. Graphes distance-héréditaire	21
2.3. Caractérisation métrique des graphes distance-héréditaire	22
2.4. Construction des graphes distance-héréditaire..	24
2.5. Sous-classes des graphes distance-héréditaire	25
2.5.1. Cographes	25
2.5.2. Graphes Ptolémaïques	26
2.5.3. Graphes Blocs	27
2.5.4. Graphes distance-bipartis	28

2.6.	Extension des graphes DH	29
2.6.1.	Graphes de Parité29
2.6.2.	Graphes k - Steiner distance-héréditaire	31
2.6.3	Les graphes presque distance-héréditaire32
2.6.4.	Les graphes à distance induite bornée $BID(s)$	34
2.6.5.	Les graphes (s, d) - distance-héréditaire34
3.	Graphes Presque Distance-Héréditaire Bipartis	36
	Introduction.	36
	Définitions et résultats préliminaires	37
	Caractérisation des graphes presque distance-héréditaire bipartis	38
3.4.	Problème de reconnaissance des graphes PDH Bipartis	39
3.5.	Propriétés métriques des graphes PDH Bipartis.....	44
4.	Graphes k-Distance-Héréditaire Bipartis	52
	Introduction.....	52
	Graphes k -distance-héréditaire.....	53
4.2.1.	Définitions et résultats préliminaires	53
4.2.2.	Caractérisations des graphes DH $(k,+)$	53
4.2.3.	Les configurations interdites des graphes DH $(k,+)$	55
	Graphes k -Distance-Héréditaire Bipartis	57
	Conclusion générale	63
	Bibliographie	65

Résumé

Dans notre travail, nous nous intéressons en premier lieu à la classe des graphes presque distance-héréditaire bipartis définie par Aïder [3] comme suit : toute $\{u, v\}$ -chaîne induite est de longueur au plus égale $d(u, v) + 2$, i.e. la longueur de toute $\{u, v\}$ -chaîne induite est soit égale à $d(u, v)$, soit à $d(u, v) + 2$. Ce dernier avait proposé une caractérisation en termes de sous-graphes induits. En suivant cette caractérisation, nous développons deux algorithmes polynomiaux pour résoudre le problème de reconnaissance de ces graphes. Enfin nous établissons une condition métrique suffisante pour qu'un graphe connexe biparti soit presque distance-héréditaire biparti.

En second lieu, et dans le cadre d'une généralisation de la classe précédente nous étudions les graphes k -distance-héréditaire bipartis notés $\mathcal{B}(k, +)$, dans lesquels toute $\{u, v\}$ -chaîne induite est de longueur au plus égale à $d(u, v) + 2.k$. Nous terminons par une étude de cette classe en donnant une caractérisation en termes de configurations interdites pour $k \geq 2$.

Introduction

Générale

La recherche opérationnelle est l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles d'analyse et de synthèses des phénomènes d'organisation utilisables pour élaborer de meilleures décisions, elle s'occupe principalement de la résolution des problèmes d'optimisation au moyen de techniques souvent conjuguées à un formalisme précis du problème. En effet, c'est bien à son application aux opérations militaires qu'elle doit son nom.

La théorie des graphes est l'une des branches de la Recherche Opérationnelle qui débute éventuellement avec les travaux du mathématicien Suisse *Léonard Euler* au dix-huitième siècle et trouve son origine dans certains problèmes de type distractions, tels que celui des sept ponts de Königsberg : *“les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même pont et de revenir à leur point de départ”*, la marche du cavalier sur l'échiquier et le problème de coloriage de cartes.

Neanmoins, le recours à la théorie des graphes remonte aussi loin que l'homme a eu besoin de formuler une situation donnée par un dessin pour mettre en pratique l'idée *« un bon dessin vaut mieux qu'un long discours »*. Il s'agit donc du langage des graphes, où on utilise les points pour représenter les objets reliés par des lignes qui traduisent les différentes relations qui existent entre-eux.

La théorie des graphes s'est développée dans diverses disciplines telles que la chimie (modélisation de structure), les sciences sociales (modélisation des relations), l'informatique, les réseaux de communication, l'optimisation, le transport et l'architecture,....

Cependant, les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'en revêt l'aspect algorithmique.

Depuis le début du vingtième siècle, la théorie des graphes s'est imposée en une branche entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős.

En 1969, Harary [33] avait introduit la notion de distance dans les graphes définie comme étant la longueur de la plus courte chaîne reliant deux sommets d'un graphe. Notons que tout graphe muni de sa fonction distance est un espace métrique. Il est donc naturel que certaines classes de graphes soient caractérisées uniquement en termes métriques.

Notre travail de recherche traite principalement de la notion de distance dans les graphes.

Nous nous intéressons particulièrement aux graphes distance-héréditaire introduits par Howorka [35], dans lesquels la distance entre toute paire de sommets non adjacents est préservée dans chaque sous-graphe induit connexe qui la contient.

Howorka [35] avait établi quelques propriétés et donné la première caractérisation de ces graphes en termes de sous-graphes interdits. D'autres caractérisations, notamment métriques, ont été établies par Bandelt et Mulder [6]. D'une part en termes de sous-graphes isométriques interdites et d'autre part basées sur la comparaison des trois sommes de distances suivantes : $d(u, x) + d(v, w)$; $d(u, v) + d(w, x)$; $d(u, w) + d(v, x)$ pour tout quadruplets de sommets $\{u, v, w, x\}$. Ils ont pu montrer que ces graphes sont exactement les graphes qui satisfont « *la condition faible des quatre points* », i.e. au moins deux des trois sommes ci-dessus sont égales.

En généralisant la notion de graphes distance-héréditaire, et en s'intéressant aux graphes bipartis, Aïder [3] avait introduit la classe des graphes presque distance-héréditaire bipartis, dans lesquels toute $\{u, v\}$ -chaîne induite est de longueur au plus égale à $d(u, v) + 2$.

Les graphes dans lesquels cette longueur est au plus égale à $d(u, v) + 2k$ sont les graphes k -distance-héréditaire biparti constituant la classe notée $\mathcal{B}(k, +)$.

Nous nous intéressons aux deux dernières classes de graphes mentionnées ci-dessus, et le présent document, structuré en quatre chapitres se présenter comme suit :

Le premier chapitre s'adresse principalement au lecteur non familier avec la nomenclature de la théorie des graphes, en général et la notion de distance dans les graphes, en particulier.

Nous rappelons les définitions et la terminologie adoptée en théorie des graphes, et quelques notions de base sur l'optimisation combinatoire.

Dans le deuxième chapitre, nous nous focalisons sur la classe des graphes distance-héréditaire, en donnant certaines sous-classes contenues dans la classe des graphes distance-héréditaire, et rappelons quelques classes constituant une extension de ces graphes.

Le troisième chapitre est consacré principalement à une adaptation de la notion distance-hérédité aux graphes bipartis. Nous aborderons d'abord, la classe des graphes presque distance-héréditaire bipartis introduits par Aïder [3], qui en avait donné une caractérisation en termes de sous-graphes interdits. Suivant cette caractérisation, nous proposons deux algorithmes combinatoires opérant en temps polynomial pour résoudre le problème de reconnaissance de ces graphes. Nous clôturons ce chapitre, en établissant une condition métrique suffisante utilisant la condition des quatre points pour qu'un graphe connexe biparti soit un graphe presque distance-héréditaire biparti.

Au quatrième chapitre, nous rappelons en premier lieu, les définitions nécessaires et les différents résultats relatifs à la classe des graphes distance-héréditaire d'ordre k , notée

$DH(k, +)$, introduite et caractérisée par Cicerone et Di Stefano [20]. Nous évoquons aussi les caractérisations de cette classe en termes de sous-graphes interdits donnés par Meslem [33].

Au cours de la deuxième partie, et dans le cadre d'une généralisation des notions relatives à la classe précédente et en étendant les résultats concernant les graphes $DH(k, +)$, nous nous intéressons à la classe de graphes k -distance-héréditaire bipartis, notée $\mathcal{B}(k, +)$, et les caractérisations en termes de sous-graphes interdits.

Nous clôturons notre travail en posant quelques problèmes non résolus dans ces différentes classes de graphes que nous avons considérées dans les deux derniers chapitres et proposons quelques perspectives de recherche.

Chapitre 0 1

Définitions et Notations

1.1. Introduction.

Ce chapitre est destiné essentiellement aux lecteurs non familiers avec la théorie des graphes, en général, et la notion de la distance dans les graphes en particulier. Nous décrivons les définitions et les résultats nécessaires dont nous aurons besoin le long de ce mémoire, ainsi que quelques notions de base de l'optimisation combinatoire. La terminologie que nous avons adoptée est inspirée des ouvrages de Buckley et Harary [12] [33] et de Berge [7].

De nouvelles notions seront évoquées en nous référant aux articles [2], [3], [18], [20].

1.2. Graphes, Sous-graphes

1.2.1. Définitions préliminaires sur les graphes

Définitions 1.1. Un graphe $G = (V, E)$ est le couple constitué :

1. par un ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de n éléments appelés les sommets ;
2. par la famille $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de m paires de sommets distincts de V appelées arêtes de G , et $e = \{x, y\}$ sera noter xy .

Le nombre de sommets du graphe G est appelé l'ordre de G , noté $|V| = n$, et le nombre d'arêtes du graphe G représente la taille de G qu'on note $|E| = m$.

Une représentation d'un graphe s'effectue à l'aide d'une figure géométrique dans laquelle les sommets sont des points et toute arête $e = xy$ est une ligne joignant les deux sommets x et y , parfois représentée par une ligne pointillé « », où x et y sont les deux extrémités de 'e'.

On dit alors que 'e' est incidente à x et à y , ou encore x et y sont adjacents ou sont voisins.

Si deux arêtes ont une extrémité commune, elles sont dites arêtes adjacentes. Dans le cas contraire, elles sont dites disjointes.

Définition 1.2 Toute arête dont les extrémités sont confondues est appelée boucle.

Si plusieurs arêtes relient la même paire de sommets distincts, elles sont dites arêtes parallèles. Un graphe simple est un graphe sans boucles, et sans arêtes parallèles.

Dans tout ce qui suit, nous nous intéresserons uniquement aux graphes simples.

Définition 1.3. L'ensemble des voisins d'un sommet x , est noté $N_G(x)$ [ou $N(x)$] et est appelé voisinage de x . Le degré du sommet x dans G , noté $d_G(x)$ [ou $d(x)$], est le nombre d'arêtes incidentes à x ou encore le nombre de voisin de x .

Dans un graphe simple $G = (V, E)$, nous avons : $d_G(x) = |N_G(x)|$.

On appelle voisinage fermé de x , noté $N[x]$, l'ensemble des voisins de x union $\{x\}$.

i.e. $N[x] = N(x) \cup \{x\}$.

Un sommet x de G est dit sommet isolé s'il n'a pas de voisins dans G (i.e. $N(x) = \emptyset$).

Un sommet x de G est dit pendant, s'il possède un seul voisin dans G (i.e. $|N(x)| = 1$).

Si deux sommets u et v ont les mêmes voisins, alors ils sont appelés jumeaux (vrais jumeaux s'ils sont eux-mêmes adjacents et faux jumeaux s'ils ne le sont pas).

Remarque 1.1. Un graphe G est entièrement défini à partir de la donnée de la paire d'ensembles V et E . Cependant, on peut observer que la représentation d'un même graphe peut se faire de différentes manières.

Définition 1.4. Soient $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes et $f: V_1 \rightarrow V_2$ une fonction.

- f est un homomorphisme de G_1 dans G_2 si : $(u, v) \in E_1$ alors $(f(u), f(v)) \in E_2$.

- f est un isomorphisme de G_1 dans G_2 si f est bijective et f et f^{-1} sont des homomorphismes.

S'il existe un isomorphisme de G_1 dans G_2 alors G_1 et G_2 sont dits isomorphes et nous notons $G_1 \cong G_2$.

Définition 1.5. Le graphe complémentaire de $G = (V, E)$, noté \overline{G} est un graphe ayant l'ensemble de sommets V et tel que deux sommets dans \overline{G} sont adjacents si et seulement s'ils ne le sont pas dans G .

1.2.2. Sous-graphe

Définitions 1.6. Un sous-graphe $H = (W, F)$ de $G = (V, E)$ est un graphe ayant tous ses sommets et ses arêtes dans G .

Si H a le même ensemble de sommets que G , alors le sous-graphe H est dit partiel.

Pour tout ensemble S ($S \subseteq V$) le sous-graphe induit (ou engendré) par S , noté $G(S)$ ou $\langle S \rangle$, est le sous-graphe de G qui contient toutes les arêtes de G reliant des sommets de S .

On note $G - X$ (où $X \subseteq V$), le sous-graphe de G induit par $V - X$,

i.e. $G - X = G(V - X) = \langle V - X \rangle$. Lorsque $X = \{x\}$, $G - \{x\}$ est noté $G - x$.

Un ensemble S ($S \subseteq V$) est dit stable ou indépendant de G si le sous-graphe $G(S)$ ne contient aucune arête de G . Autrement dit, un stable est un ensemble des sommets qui sont deux à deux non adjacents.

Un ensemble K ($K \subseteq V$) est dit clique d'un graphe G , si tous les sommets sont deux à deux adjacents et est maximale pour cette propriété. Autrement dit, une clique K de G est un sous-graphe complet maximal de G .

1.3. Chaînes, Cycles et Connexité

1.3.1. Chaîne

Définitions 1.7. Une séquence de sommets distincts $P = (x \equiv u_0, u_1, \dots, u_k \equiv y)$, telle que pour tout $i=0, 1, \dots, k-1$, les sommets consécutifs u_i et u_{i+1} sont adjacents, est appelée $\{x, y\}$ -chaîne de longueur k et d'ordre $k+1$ (notée $P(x, y)$ ou P_{k+1}).

La chaîne $P(x, y)$ relie les sommets x et y en passant par les sommets u_1, u_2, \dots, u_{k-1} .

Une sous-chaîne $\{u_r, u_{r+1}, \dots, u_s\}$ de P , où $0 \leq r \leq s \leq k$, est une chaîne dont les sommets et les arêtes sont dans P .

Une plus courte (u, v) -chaîne est une (u, v) -chaîne de longueur minimum, elle est également appelée (u, v) -géodésique.

Remarque 1.2. Si G est simple, une chaîne est parfaitement déterminée par la suite de ses sommets, et en général, on la note $P_{k+1} = 0, 1, 2, \dots, k$, si elle est de longueur k .

1.3.2. Cycles.

Définitions 1.8. Une séquence de sommets distincts $C = (x, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, x)$, telle que pour tout $i = 1, \dots, k-1$, les sommets consécutifs u_i et u_{i+1} sont adjacents est appelée cycle de longueur $k+1$ (notée C_{k+1}).

Un cycle est dit pair (resp. impair) si sa longueur est paire (resp. impaire).

Une corde d'un cycle C (resp. chaîne P) est une arête reliant deux sommets non consécutifs de C (resp. de P).

Une chaîne P (resp. cycle C) est dit (e) induit (e) si P (resp. cycle C) est sans cordes.

Deux cordes distinctes d'un cycle C sont dites concourantes, si elles ont une extrémité commune. Sinon elles sont disjointes.

Deux cordes disjointes d'un cycle C se croisent, si dans le parcours des sommets du cycle, leurs extrémités sont rencontrées alternativement.

Définition 1.9 [20] La distance de corde d'un cycle C , notée $cd(C)$, est le nombre minimum de sommets consécutifs dans C tels que chaque corde de C est incidente à l'un de ces sommets.

Le cycle induit H_n à une distance de corde nulle ($cd(H_n) = 0$)

Exemple 1.1.

La $1C_n$ -configuration est soit un cycle induit, soit un cycle C_n dont toutes les cordes sont Concourantes, donc $cd(1C_n\text{-configuration}) \in \{0, 1\}$

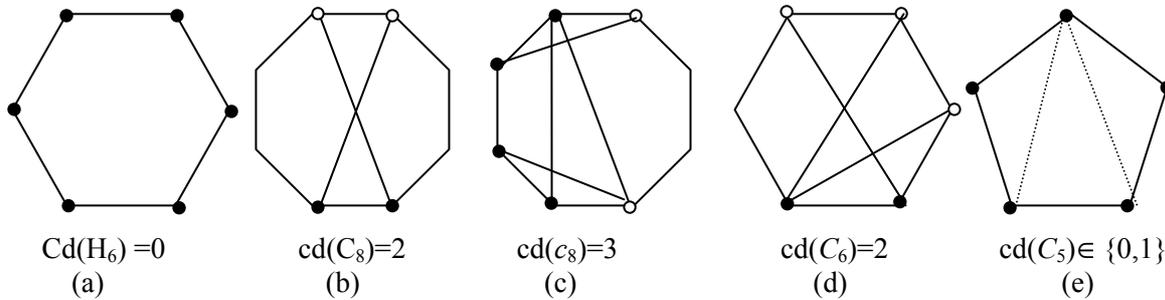


Figure 1.1.

1.3.3 Connexité

Définition 1.10. Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe, si pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ de V , il existe une chaîne reliant u à v .

Notons que la relation de connexité ($x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x \equiv y$ ou \exists une (x, y) -chaîne dans G) est une relation d'équivalence dont les classes constituent une partition de G en sous-graphes connexes appelés composantes connexes. Si le nombre de composantes connexes de G est supérieur à 1, alors G est dit non connexe. De ce fait, nous précisons que les graphes dont nous traiterons sont des graphes connexes.

Définition 1.11. Un point d'articulation d'un graphe G est un sommet v de G dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes autrement dit, le nombre de composantes connexe de $G-v$ est supérieur à celui de G .

Un isthme ' e ' est une arête de G dont la suppression a le même effet.

Un graphe G est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être subdivisé en deux sous ensembles disjoints V_1 et V_2 tels que toute arête de G relie un sommet de V_1 à un sommet de V_2 . Autrement dit, V_1 et V_2 sont des stables.

Si G contient toutes les arêtes possibles reliant tout sommet de V_1 à tout sommet de V_2 , alors le graphe G est biparti-complet.

Dans ce cas, si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors G est noté $K_{p, q}$.

Définitions 1.12. Si $G = (V, E)$ un graphe simple, d'ordre n , la connectivité $k(G)$ de G est le nombre minimum de sommets dont l'élimination déconnecte le graphe G ou réduit celui-ci à un sommet isolé.

Un graphe G est dit h -connexe si sa connectivité $k(G)$ est $\geq h$.

Un graphe G est 2-connexe si et seulement s'il est connexe, d'ordre $n \geq 3$, et n'admet pas de point d'articulation.

Exemple 1.2.

Parmi les graphes connexes les plus remarquables, nous pouvons citer la chaîne P_n de longueur n , le cycle induit H_n de longueur n , le graphe complet K_n [graphe d'ordre n où toute paire de sommets distincts est une arête] et l'arbre [un graphe connexe et sans cycle induit].

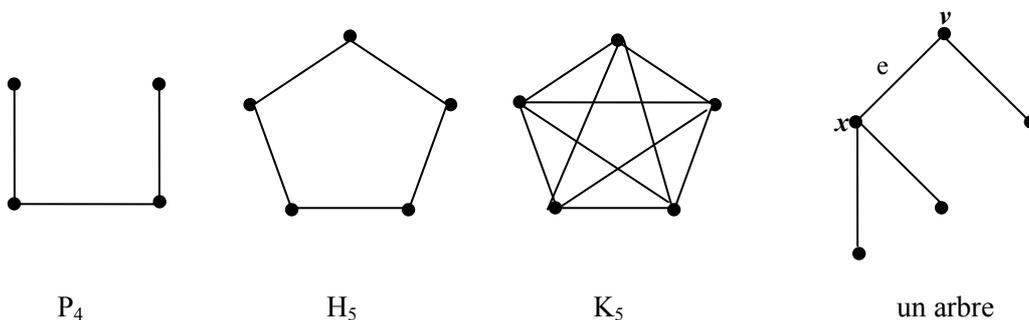


Figure 1.2.

Le sommet x et l'arête e de l'arbre de la figure 1.2. sont respectivement un point d'articulation et un isthme.

Définition 1.13. Un bloc d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets A ($A \subseteq V$) qui engendre un sous-graphe connexe, sans point d'articulation et maximal pour cette propriété.

Un tel sous-graphe $G(A)$ est alors soit 2-connexe (si $|A| \geq 3$), soit un isthme (si $|A| = 2$), soit un point isolé (si $|A| = 1$).

Un graphe bloc est un graphe connexe dans lequel chaque bloc engendre un sous-graphe complet.

Exemple 1.3.

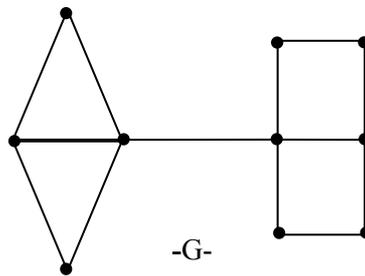


Figure 1.3.

Les blocs du graphe G de la figure 1.3. sont les graphes B_1, B_2, B_3, B_4 .

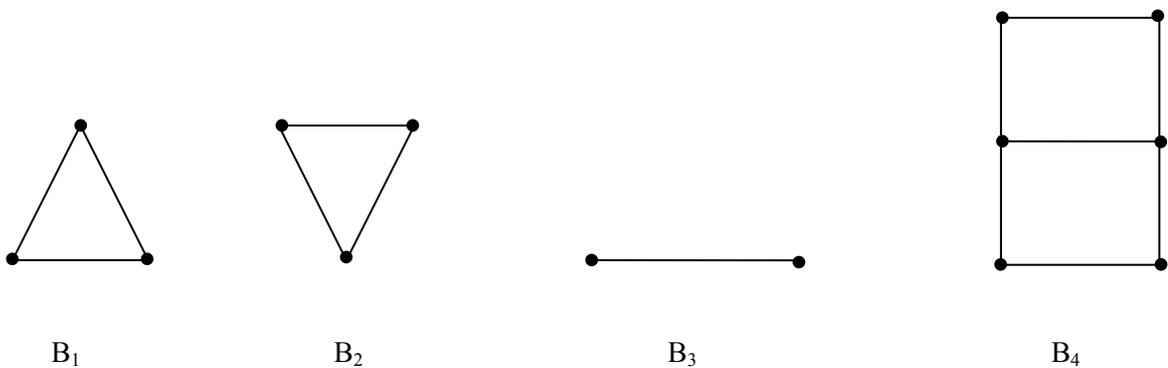


Figure 1.4.

1.4. Distance et Intervalle.

1.4.1. Distance et décomposition en couches.

Définition 1.14. La distance entre deux sommets u et v de $G = (V, E)$ est la longueur d'une plus courte $\{u, v\}$ -chaîne. On définit alors la fonction d_G par :

$$d_G : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(u, v) \mapsto d_G(u, v).$$

L'ensemble de sommets V muni de cette fonction est un espace métrique fini (au sens topologique).

En effet ; d_G satisfait les trois axiomes de la distance : $\forall u, v, w \in V(G)$:

- a. $d_G(u, v) \geq 0$; et si $d_G(u, v) = 0$ alors $u = v$.
- b. $d_G(u, v) = d_G(v, u)$.
- c. $d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v)$.

Le troisième axiome est connu sous le nom de l'inégalité triangulaire

Définition 1.15. Le diamètre de graphe $G = (V, E)$ est la plus grande des distances entre deux sommets quelconques de G , on note $diam(G) = \max \{d_G(u, v) \mid u, v \in V\}$.

Le maximum de toutes les distances entre un sommet u et tous les autres définit l'*excentricité* du sommet u , notée $e(u) = \max \{d(u, v) \mid v \in V\}$.

Pour un sommet u de G , $N_i(u)$ désigne l'ensemble des sommets à distance i de u , $1 < i < e(u) - 1$

Une décomposition en couches (niveaux) des sommets de G relativement au sommet u est une partition des sommets de $V(G)$ en $p = e(u)$ parties disjointes $N_0(u) = \{u\}, N_1(u), \dots, N_p(u)$. $N_i(u)$ est appelé le $i^{\text{ième}}$ niveau dans G , $i = 1, 2, \dots, p$, relativement à u .

Exemple 1.4

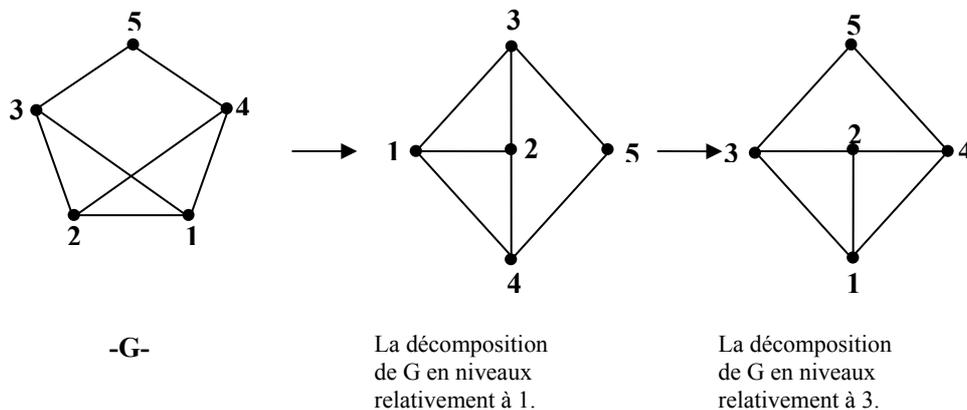


Figure 1.5.

Définition 1.16. Un sous-graphe H de G est dit isométrique si pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ de H , on a $d_G(x, y) = d_H(x, y)$.

1.4.2. Intervalle

Définition 1.17. Soient u et v deux sommets d'un graphe $G = (V, E)$, l'intervalle $I_G(u, v)$ (ou $I(u, v)$ s'il n'y a pas de confusion) est l'ensemble de sommets de G appartenant aux plus courtes (u, v) -chaînes.

Ainsi, un sommet $w \in I(u, v)$ si et seulement si $d(u, v) = d(u, w) + d(w, v)$.

$$(u, v) \mapsto I_G(u, v).$$

Proposition 1.1. [32]. Soit G un graphe connexe de fonction intervalle I . Alors pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ de G , on a :

1. $u, v \in I(u, v)$.
2. $I(u, v) = I(v, u)$.
3. si $x \in I(u, v)$ alors $I(u, x) \subset I(u, v)$.
4. si $x \in I(u, v)$ alors $I(u, x) \cap I(x, v) = \{x\}$.
5. si $x \in I(u, v)$ et $y \in I(u, x)$ alors $x \in I(y, v)$.

1.5. Opérations sur les graphes.

Définition 1.18. Pour toute paire de graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, le graphe joint est le graphe $G_1 + G_2$ où $V_1 \cup V_2$ est l'ensemble de sommets, et dans lequel deux sommets u et v sont adjacents s'ils vérifient l'une des conditions suivantes :

- $uv \in E_1$.
- $uv \in E_2$.
- $u \in V_1$ et $v \in V_2$.
- $v \in V_1$ et $u \in V_2$.

Exemple 1.5.

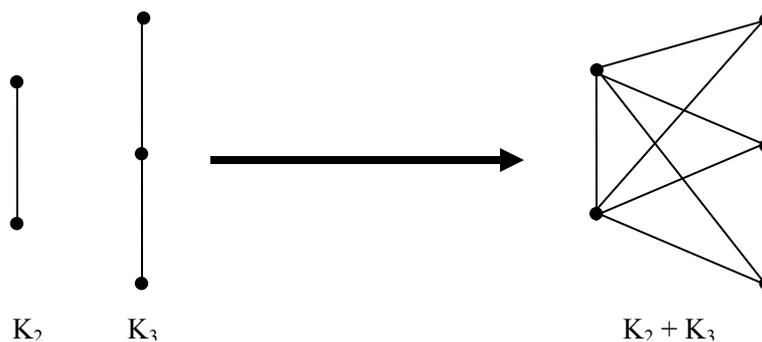


Figure 1.6

Le graphe $K_2 + P_3$ est le graphe joint de K_2 et P_3

Définitions 1.19. Pour tout sommet v de G , nous pouvons effectuer une extension au graphe G à l'aide des opérations $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ comme suit :

- $\alpha(G, v)$ est le graphe obtenu à partir de G en ajoutant un sommet pendant v' adjacent à v .
- $\beta(G, v)$ (resp. $\gamma(G, v)$) est le graphe résultant suite à l'ajout d'un vrai (resp. faux) jumeau v' de v .

La duplication du sommet v consiste à appliquer l'une des opérations β ou γ au sommet v .

- Un prolongement du graphe G par un graphe biparti $B = (V_1 \cup V_2, E(B))$ est l'opération ϕ qui consiste à créer un nouveau graphe à partir de G en identifiant certains sommets de V_1 avec un ensemble de faux jumeaux $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de G éventuellement réduit à un seul sommet ($p = 1$). Ce graphe est noté :

$\phi(G, B(v_1, v_2, \dots, v_p))$ (voir la figure 1.7.).

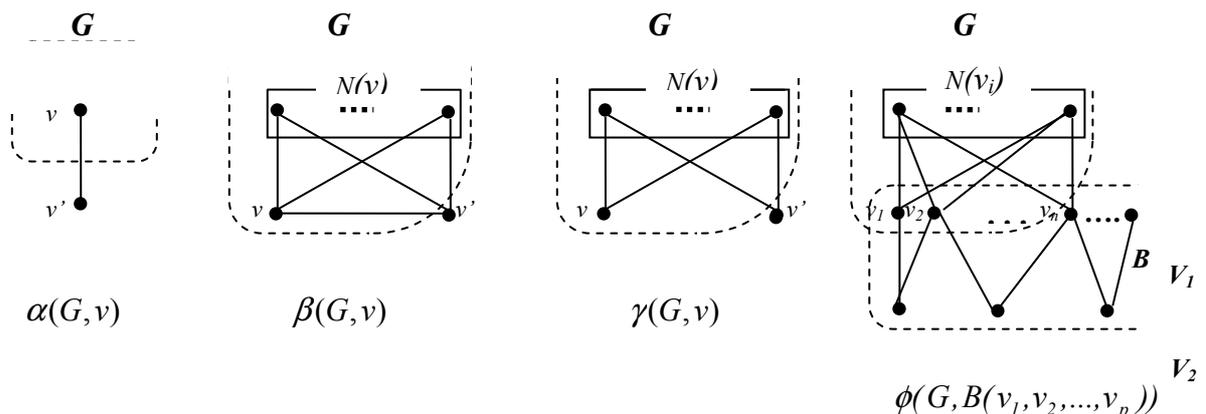


Figure1.7. L'extension du graphe G suivant les opérations $\alpha, \beta, \gamma, \phi$.

Définition 1.20. Pour toute paire de graphes $G_1 = (V_1 \cup m_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2 \cup m_2, E_2)$, la split composition de G_1 et G_2 est le graphe $G = G_1 * G_2 = (V, E)$ avec :

$$V = V_1 \cup V_2;$$

$$E = E_1' \cup E_2' \cup \{xy / x \in N_{G_1}(m_1) ; y \in N_{G_2}(m_2)\}, \quad E_i' = \{xy \in E_i / x, y \in V_i\} \quad i = 1, 2.$$

m_1 et m_2 sont appelés sommets marqués de la split composition.

En suivant la représentation de Bouchet [9], les sommets marqués de la composition sont des points en gras reliés à l'aide d'une épaisse ligne. Voir figure 1.7. (a)).

Dans $G_1 * G_2$, le sous-graphe engendré par $N_{G_1}(m_1) \cup N_{G_2}(m_2)$ est un graphe biparti complet.

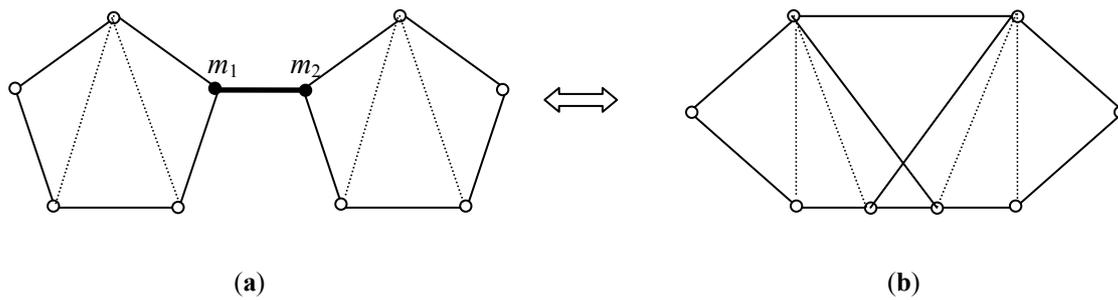


Figure 1.8. La split composition de deux $1C_5$ configurations.

1.6. Complexité Algorithmique.

Avant d'entamer les différentes définitions qui nous seront utiles, rappelons à notre lecteur que l'optimisation combinatoire consiste à trouver le meilleur élément parmi un ensemble fini de choix. Autrement dit, minimiser une fonction avec contraintes sur un ensemble fini.

Définition 1.21. Une instance appelée parfois (cas donnée, ...) d'un problème d'optimisation combinatoire est définie par la donnée d'un ensemble fini S et d'une application $f: S \rightarrow R$.

Il s'agit de déterminer un élément s^* dans S , tel que $f(s^*) \leq f(s)$, pour tout élément s de S (problème de minimisation).

Définition 1.22. Un problème « d'optimisation combinatoire » est composé de l'ensemble de toutes les instances de ce problème.

Définition 1.23. On associe à toute instance I d'un problème (P), un nombre $Z(I)$ qui mesure la longueur des données de cette instance, appelée « la taille de l'instance I », et qui représente la quantité de mémoire pour la stocker.

Définition 1.24. Un algorithme de résolution d'un problème (P) donné est une procédure, décomposable en opérations élémentaires, transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quelle instance du problème (P) en une chaîne de caractères représentant les résultats de cette instance.

Pour mesurer l'efficacité d'un algorithme A , on préfère en pratique compter "le nombre d'opérations élémentaires" de cet algorithme. Ce nombre ne dépend ni de la machine, ni du langage, et peut s'évaluer sur le papier. On l'appelle "complexité de l'algorithme".

Il s'agit d'un terme technique n'ayant rien à voir avec la complexité de la structure ou la difficulté de la programmation.

Définition 1.25. 'La complexité d'un algorithme A ' de résolution d'un problème d'optimisation combinatoire (P) est une fonction $C_A(N)$, donnant le nombre d'opérations nécessaires à A pour résoudre la pire des instances de (P) de taille N .

Une classification reconnue distingue les algorithmes 'polynomiaux' (bons) des autres dits 'exponentiels' (mauvais). Les fondateurs de la théorie de la complexité *Stephen Cook* [21] et *Richard Karp* [37] reconnaissent à *Jack Edmonds* [29] la première idée de la caractérisation des algorithmes polynomiaux.

Définition 1.26. Un algorithme A de résolution d'un problème (P) est dit 'polynomial' si pour toute instance I de taille N de ce problème, il existe un polynôme Q tel que $C_A(N) \leq Q(N)$.

Un algorithme est considéré comme 'efficace' ou 'bon' si, et seulement si, il est polynomial.

Définition 1.27. 'Un problème de reconnaissance (P_R) consiste à chercher dans un ensemble fini S s'il existe un élément s vérifiant une certaine propriété P . Il peut être formulé par un énoncé et une question dont la réponse ne peut être que 'oui' ou 'non'.

Définition 1.28. 'Un algorithme non déterministe' est un algorithme contenant une instance « choix » qui, opérant sur un ensemble fini, choisit un élément, sans spécifier comment ce choix est effectué. Il est caractérisé par le fait que s'il existe une manière (au moins)

d'effectuer le choix qui conduise à la réponse oui, c'est suivant cette manière que le choix est fait.

Les algorithmes non déterministes permettent de définir la classe NP .

Définition 1.29. Un problème d'optimisation combinatoire est dit appartenir à 'la classe NP ', s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe.

Comme tout problème de la classe P possède un algorithme polynomial pour sa résolution, on en déduit que $P \subset NP$.

Définition 1.30. Un problème de reconnaissance (P_1) se ‘réduit polynomialement’ à un autre (P_2), s’il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Définition 1.31. Un problème « NP-Complet » est un problème de NP en lequel se réduit polynomialement tout autre problème de NP .

La question cruciale de la théorie de la complexité est de savoir si les problèmes *NP-Complets* peuvent être résolus polynomialement, auquel cas $P = NP$, ou bien si on ne leur trouve jamais d’algorithmes polynomiaux, auquel cas $P \neq NP$. Cette question n’est pas définitivement tranchée.

Nous avons quelques problèmes d’optimisations combinatoires connus et qui sont NP-Complets. Le problème du Stable, Le problème de la Clique, Le problème du Recouvrement (couverture, transversal), Le problème du cycle Hamiltonien et Le problème du voyageur de commerce.

Définition 1.32. CO-NP-Complet est la classe des problèmes dont le complément est dans la classe NP-Complet.

Chapitre 02

Les Graphes

Distance Héritaire

2.1. Introduction.

Un graphe distance héréditaire est un graphe dont la distance entre toute paire de sommets d'un sous-graphe connexe est préservé. Autrement dit ; toute chaîne induite est isométrique. Ces graphes ont été introduits par Howorka [34], qui avait établi quelques propriétés et donné certaines caractérisations en termes de sous-graphe interdits.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons principalement à cette classe de graphes. Au cours de la première partie, nous évoquons les différentes caractérisations et les divers résultats connus relatifs à cette classe. En seconde partie, nous localisons la classe de graphes distance héréditaire dans l'ensemble des graphes \mathcal{G} . Ainsi, nous citons quelques sous-classes particulières et ses différentes caractérisations, et les diverses classes constituant une extension de ces graphes.

2.2. Graphes distance héréditaire

Définition 2.1. Un graphe connexe $G = (V, E)$ est dit distance héréditaire, si tout sous-graphe induit connexe H de G "hérite" la fonction distance, i.e. $d_H(u, v) = d_G(u, v)$ pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de H . On dit $G \in dh$.

Dans un graphe "dh", toute chaîne induite est isométrique.

Howorka [34] avait introduit les graphes dh, et avait aboutit aux premières caractérisations associées :

Théorème 2.1. [34] Soit G un graphe connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est distance héréditaire.
2. chaque chaîne induite est isométrique.
3. chaque cycle de longueur au moins 5 possède au moins deux cordes et chaque cycle C_5 a une paire de cordes qui se croisent.
4. chaque cycle de longueur au moins 5 a une paire de cordes qui se croisent.

Egalement, Aïder [1] est arrivé à donner une autre caractérisation de ces graphes, en se basant sur la notion de corde dans les graphes.

Théorème 2.2. [1]. Pour un graphe connexe G , les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) G est distance héréditaire.
- b) Tout cycle de longueur au moins 5 de G possède deux cordes croisées.
- c) Tout cycle de longueur au moins 5 de G possède deux cordes disjointes.
- d) Tout cycle de longueur au moins 5 de G possède deux cordes non concurrentes.

Ces graphes ont été étudiés également par Hammer et Maffray [32], en utilisant un autre concept que celui de l'isométrie pour les définir. Si on fait recours aux fonctions booléennes, ces graphes sont appelés "les graphes complètement séparables".

Propriété 2.1. [32]. G est un graphe "dh" si, et seulement si G ne contient ni de cycle de longueur supérieure ou égale à 5, ni les graphes de la figure 2.1 comme sous-graphe induits.

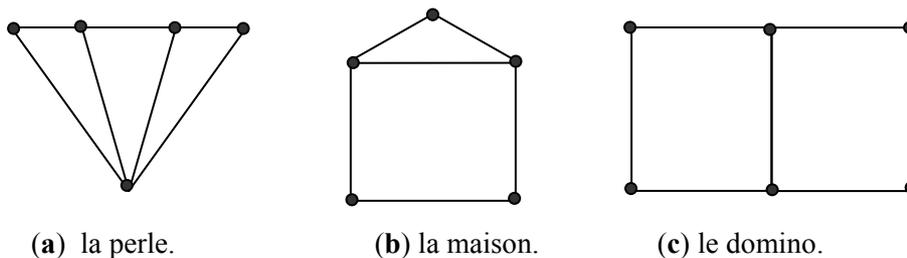


Figure 2.1.

2.3. Caractérisation métrique des graphes distance héréditaire

Définition 2.2. Un graphe G vérifie ‘la condition faible des quatre points’ si pour tout quadruplet $\{u, v, w, x\}$ de sommets quelconques de G , au moins deux des sommes de distances : $d(u, v) + d(w, x)$, $d(u, w) + d(v, x)$, $d(u, x) + d(v, w)$ sont égales.

Bandelt et Mulder [4] ont montré que les graphes ‘dh’ sont exactement les graphes qui satisfont cette condition.

Le théorème suivant donne quelques caractérisations métriques en termes de sous-graphes induits interdits de ces graphes [4, 24, 32]:

Théorème 2.3. [4]. Soient G un graphe connexe muni de sa fonction distance ‘ d ’ et de sa fonction intervalle ‘ I ’. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) G est distance héréditaire.
- b) pour paire $\{u, v\}$ de sommets de G avec $d_G(u, v) = 2$, il n'existe pas de $\{u, v\}$ -chaîne induite de longueur > 2 .
- c) Les graphes de la Figure 2.1 et les cycles induits H_n , $n \geq 5$, ne sont pas des sous-graphes induits de G .
- d) Les graphes de la Figure 2.1 et les cycles induits H_n , $n \geq 5$, ne sont pas des sous-graphes isométriques de G [24, 32].
- e) Les graphes de la Figure 2.1 ne sont pas des sous-graphes induits (isométriques) de G et $I(u, v) \cap I(v, w) = \{v\}$ implique $d(u, w) \geq d(u, v) + d(v, w) - 1$.
- f) Le graphe de la figure 2.1 (a) n'est pas un sous-graphe induit de G et pour tout triplet $\{u, v, w\}$ de sommets du graphe G , au moins deux des inclusions suivantes sont vérifiées :

$$I(u, v) \subseteq I(u, w) \cup I(v, w),$$

$$I(u, w) \subseteq I(u, v) \cup I(v, w),$$

$$I(v, w) \subseteq I(u, v) \cup I(v, x).$$

- g) Pour tout quadruplet $\{u, v, w, x\}$ de sommets quelconques, au moins deux des sommes de distances : $d(u, v) + d(w, x)$, $d(u, w) + d(v, x)$, $d(u, x) + d(v, w)$ sont égales.
- h) G satisfait la condition g) et si dans g) les plus petites sommes de distances sont égales, la plus grande somme les dépasse d'au plus deux unités.

Dans [4], nous trouvons également la caractérisation suivante:

Théorème 2.4. [4] *Soit G un graphe fini avec au moins deux sommets. Alors G est distance héréditaire si et seulement si G est obtenu à partir de K_2 par une séquence d'opérations : ajout de sommets pendants, et duplication de sommets.*

Le résultat suivant est l'une des conséquences de cette composition (décompositions) :

Corollaire 2.1. [4]. *Chaque graphe distance héréditaire ayant au moins quatre sommets possède soit deux paires disjointes de jumeaux, soit une paire de jumeaux et un sommet pendant, où bien deux sommets pendants.*

Les graphes distance héréditaire peuvent être construits " bloc par bloc ". Ces derniers sont les niveaux obtenus après la décomposition du graphe G en couches.

Définition 2.3. Etant une mise en couches d'un graphe $G=(V, E)$ relativement à u ,

$$N_k(u) = \{x \in V / d(u, x) = k\}.$$

Pour un intervalle $I(u, v)$, on note $N_k(u, v)$ son $k^{\text{ième}}$ niveau, et il est défini comme suit :

$$N_k(u, v) = N_k(u) \cup I(u, v).$$

Lemme 2.1. [5] *Soit G un graphe distance héréditaire. Alors pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets du graphe G , et pour tout entier ' i ' avec $0 \leq i \leq d(u, v)$, chaque sommet de $N_i(u, v)$ est adjacent à tous les sommets de $N_{i+1}(u, v)$.*

Théorème 2.5. [5] *Soit G un graphe connexe, et soit u un sommet de G . Alors G est distance héréditaire si, et seulement si G satisfait les cinq conditions suivantes, pour tout entier $i \geq 1$:*

1. *Si v et w sont deux sommets appartenant au même niveau $N_k(u)$
Alors: $N(v) \cap N_{k-1}(u) = N(w) \cap N_{k-1}(u)$.*
2. *Il n'existe pas de chaîne induite de longueur 3 dans $N_k(u)$.*
3. *Si un sommet v de $N_k(u)$ a deux voisins x et y dans deux composantes connexes distinctes X et Y de $N_{k-1}(u)$, alors v est adjacent à tous les sommets de X et Y et
 $N(x) \cap N_{k-2}(u) = N(y) \cap N_{k-2}(u)$.*
4. *Si v, w sont deux sommets dans deux composantes connexes différentes de $N_k(u)$,
Alors: $N(v) \cap N_{k-1}(u)$ et $N(w) \cap N_{k-1}(u)$ sont soit disjoints, soit un contient l'autre.*
5. *Si un sommet v de $N_k(u)$ est adjacent à deux sommets x et y qui sont dans la même composante connexe de $N_{k-1}(u)$, alors les sommets de cette composante connexe qui ne sont pas adjacents à v sont soit adjacents à x et y simultanément, soit ne sont adjacents ni à x ni à y .*

Définition 2.4. Soient G un graphe et v un sommet de G . ‘La complémentation locale’ du graphe G associée au sommet v est l’opération qui consiste à transformer uniquement le sous-graphe induit par les sommets de $N(v)$ en son complémentaire.

Exemple 2.1.

Le graphe G' de la Figure 2.2 est obtenu à partir de G par la complémentation locale associée au sommet v . G' est obtenu à partir de G par la même opération.

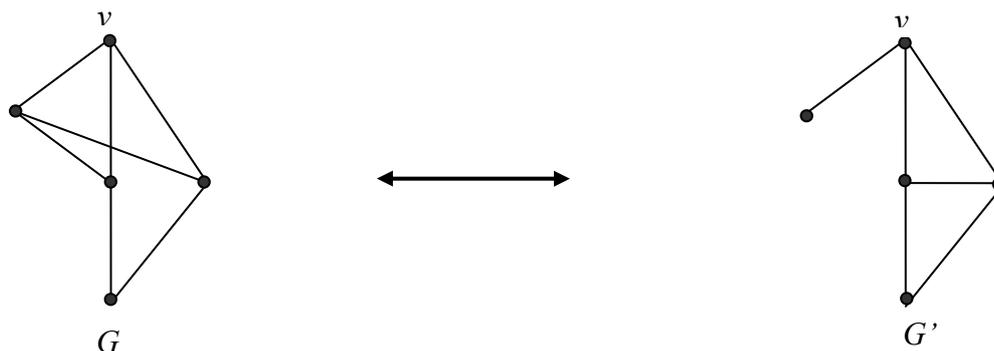


Figure 2.2. La complémentation locale

L’opération inverse de la complémentation locale est toujours la complémentation locale.

Bandelt et Mulder [4] ont établi une autre caractérisation des graphes distance-héritaire en utilisant les opérations constructives du graphe.

Théorème 2.6. [4] *Soit G un graphe. G est distance héréditaire si et seulement si G est obtenu à partir d’un ensemble de sommets indépendants par la complémentation locale et les opérations suivantes : duplication de sommets ; ajout de sommets pendants.*

2.4. Construction des graphes distance héréditaire

Plusieurs caractérisations intéressantes des graphes distance héréditaire en termes d’existence de sommets particuliers (niveaux, jumeaux), en sens métrique, les propriétés de voisinages et les configurations interdites ont été prouvées par Bandelt et Mulder [4]. Quelques aspects algorithmiques sont considérés dans [24, 29, 32].

Les recherches menées dans ce thème sont motivée en traitant des problèmes en général difficiles, ont abouti à des résultats importants pour cette classe. De plus, de nombreux algorithmes ont été proposés pour résoudre des problèmes généralement durs, d’ailleurs ces graphes sont distingués par l’efficacité des algorithmes trouvés.

Définition 2.4. Un ensemble dominant D d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets $D \subseteq V$, tel que chaque sommet de V est soit dans D ou bien soit adjacent à tous les sommets de D .

Définition 2.5. Soient $r = (r(v_1), \dots, r(v_n))$ une suite d'entiers non négatifs.

Un ensemble $D \subseteq V$ est dit r -dominant de G si, et seulement si pour tout $v \in V$, il existe $u \in D$ tel que $d_G(u, v) \leq r(v)$.

La plupart des algorithmes proposés sont basés sur la propriété structurelle et combinatoire des graphes distance héréditaire et qui sont consacrés à des problèmes d'optimisation classiques.

Nous avons le résultat suivant étudié par D'Arti et Moscarini [23] :

Théorème 2.7. [23] *G est DH si et seulement si pour chaque sommet x de G et chaque paire $\{u, v\}$ de sommets dans $N_i(x)$, $i \geq 1$ tels que u et v sont adjacents dans $G(V \setminus N_{i-1})$, nous avons: $N_{i-1}(x) \cap N(u) = N_{i-1}(x) \cap N(v)$.*

Ce résultat, très important, a permis de résoudre en temps linéaire le problème de la r -domination connexe dans les graphes dh.

De nombreux problèmes d'optimisation combinatoire ont été résolus linéairement dans les graphes distance héréditaire, par exemple le problème de l'arbre de Steiner de poids minimum [10, 15, 47], le problème de la chaîne hamiltonienne [41], le problème d'isomorphisme [24, 17], le problème de la clique (le stable) de poids maximum [15,23, 25,29] et le problème de la r -domination connexe [10,12, 27, 42].

Dans [10], nous trouvons un algorithme linéaire pour résoudre le problème de la r -domination connexe et le problème de l'arbre de Steiner. Cet algorithme généralise celui de D'Arti et Moscarini [23].

2.5. Sous-classes des graphes distance héréditaire

2.5.1. Les Cographe

Définition 2.6. Un cographe est un graphe dans lequel la longueur de toutes les chaînes induites est au plus deux.

Il est clair que les Cographes sont des graphes distance héréditaire puisqu'ils sont

HHGD-free (H : cycle induit ; H : maison ; G : perle ; D : domino).

Les Cographes sont également appelés les "2-parité graphes" dans [13], "graphes Dacey héréditaires" dans [45], ou "compléments de graphes réductibles" dans [22].

Dans la suite, nous rappelons quelques propriétés caractéristiques établis de cographes:

Proposition 2.1. [22] *Pour un graphe fini G , les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. G ne contient pas de chaîne de longueur 3.
2. G est l'union disjointe de graphes distance héréditaire de diamètre au plus 2 [4].
3. G peut être obtenu à partir d'une séquence de duplication de sommets.
4. G peut être obtenu à partir d'une séquence d'opérations suivantes: l'union jointe et disjointe de graphe.

Dans [31], un algorithme simple linéaire pour résoudre le problème de reconnaissance de ces graphes a été décrit.

2.5.2. Les graphes Ptolémaïques

Définition 2.7. Un graphe connexe G est dit ptolémaïque si pour tout quadruplet

$\{u, v, w, x\}$ de sommets de G , nous avons: $d(u, v).d(w, x) \leq d(u, w).d(v, x) + d(u, x).d(v, w)$.

Dans l'espace métrique associé, cette inégalité est appelée "inégalité ptolémaïque".

Ces graphes ont été introduits par Kay et Chartrand [38] et complètement caractérisés par Howorka [36]. Ce dernier a démontré que ces graphes sont exactement les graphes triangulés qui ne contiennent pas le graphe de la Figure 2.1. (a) comme sous-graphe induit.

Autrement dit, les graphes ptolémaïques sont les graphes distance héréditaire triangulés.

Définition 2.8. Un graphe G est dit triangulé si tout cycle de longueur au moins 4 contient une corde.

En parallèle, Bandelt et Mulder [4] ont caractérisé métriquement les graphes ptolémaïques :

Corollaire 2.2. [4] *Pour un graphe connexe G , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i. *G est ptolémaïque ;*
- ii. *G est distance héréditaire et triangulé;*
- iii. *G ne contient ni le cycle induit H_n , $n \geq 5$, ni le graphe de la figure 2.1. (a) comme sous-graphe isométrique;*
- iv. *Pour tout quadruple $\{u, v, w, x\}$ de sommets de G , au moins deux des sommes de distances : $d(u, v) + d(w, x)$, $d(u, w) + d(v, x)$, $d(u, x) + d(v, w)$ sont égales et si les plus petites sommes sont égales, la plus grande somme les excède d'au plus une unité.*

Par conséquent, la construction de ces graphes s'effectue de la manière suivante :

Corollaire 2.3. [4] *Un graphe fini G est dit ptolémaïque si et seulement si G est obtenu à partir de K_1 par une séquence d'opérations de type (α) , (β) et (γ) , ou les opérations (γ) sont appliquées uniquement aux sommets ayant des voisinages (non vides) qui induisent des sous graphes complets.*

2.5.3. Les graphes blocs.

Définition 2.9. Un graphe G est dit graphe bloc, si G est connexe et tout sous-graphe 2-connexe maximal est complet.

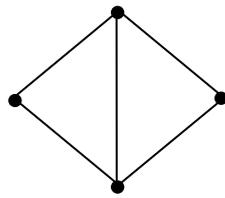
Plusieurs caractérisations de graphes bloc ont été établies. Quelques unes sont données par Howorka [35], qui a observé que ces graphes sont exactement les graphes vérifiant la condition des quatre points, définie ci-après :

Définition 2.10 On dit qu'un graphe G satisfait "la condition des quatre points" si pour tout quadruplet $\{u, v, w, x\}$ de sommets de G , les deux plus grandes sommes suivantes sont égales : $d(u, v) + d(w, x)$, $d(u, w) + d(v, x)$, $d(u, x) + d(v, w)$.

La proposition suivante est une caractérisation au sens métrique des graphes blocs en terme de sous- graphes interdits.

Proposition 2.2. [4] *Soit G un graphe connexe muni d'une fonction distance 'd'. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- a) G est un graphe bloc ;
- b) G satisfait la condition des quatre points ;
- c) G ne contient ni de K_4-e (figure 2.3), ni de cycle induit H_n ($n \geq 4$) comme sous-graphe isométrique.



$K_4 - \{e\}$

Figure 2.3.

Les graphes blocs constituent exactement une sous classe des graphes ptolémaïques.

Définition 2.11. Un graphe G est dit faiblement géodésique si pour paire de sommets distincts à distance deux, il existe un unique voisin commun de ces sommets.

Théorème 2.8. [35] *Un graphe G est un graphe bloc si et seulement si G est faiblement géodésique et ptolémaïque.*

Les graphes blocs peuvent être construits à partir des arbres en remplaçant chaque arête par une clique de taille arbitraire, ces cliques ont au plus un sommet en commun. D'autre part, les graphes blocs sont connus sous le nom de "arbres Husimi complets"

Remarque 2.1. Les graphes ptolémaïques bipartis sont exactement les graphes blocs bipartis.

2.5.4. Les graphes distance héritaire bipartis

Définition 2.12. Un graphe G est (6,2)-corde biparti si G est biparti et tout cycle de longueur au moins 6 possède au moins deux cordes croisées.

Moscarini et D'arti [23] ont montré que les graphes (6, 2)-cordes bipartis sont exactement les graphes distance-héritaire bipartis. D'autres propriétés ont été établies par Bandelt et Mulder [4]:

Corollaire 2.4. [4] *Pour un graphe connexe G , les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. G est biparti et distance héréditaire,
2. G est sans triangle (K_3) et ne contient ni le cycle induit H_n ($n \geq 5$), ni le graphe de la Figure 2.1. (a) comme sous-graphe isométrique,
3. Pour tout quadruplet $\{u, v, w, x\}$ de sommets de G avec $I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w) \neq \emptyset$, au moins deux des unions suivantes sont égales :
 $I(u, v) \cup I(u, w)$, $I(u, v) \cup I(v, w)$, $I(u, w) \cup I(v, w)$.

Remarque 2.2. Un graphe sans K_3 ne contient pas de vrais jumeaux, et il en est de même pour un graphe distance héréditaire biparti. La construction de ces graphes s'effectue de la manière suivante :

Corollaire 2.5. [4] *Un graphe fini G avec au moins deux sommets est distance héréditaire biparti si et seulement si G est obtenu à partir de K_2 en appliquant une séquence d'opérations de type (α) , (β) et (γ) . D'autre manière, on dit ajout de sommets pendants, des vrais et faux jumeaux [voir la définition 1.19].*

Par conséquent, un résultat important de cette classe est donné par le corollaire suivant :

Corollaire 2.6. [4] *Soit G un graphe connexe, et soit u un sommet de G . Alors G est distance héréditaire biparti si et seulement si tous les niveaux $N_k(u)$ sont sans arêtes internes, et pour toute paire $\{v, w\}$ de sommets de $N_k(u)$ et les voisins x et y de v dans $N_{k-1}(u)$, les ensembles $N(x) \cap N_{k-2}(u) = N(y) \cap N_{k-2}(u)$, $N(v) \cap N_{k-1}(u)$ et $N(w) \cap N_{k-1}(u)$ sont soit disjoints, soit un contient l'autre.*

Remarque 2.3. Tout graphe distance héréditaire G peut se transformer en un graphe biparti G^* , comme suit : choisir un sommet v de G , puis déterminer tous les niveaux $N_k(v)$, $k \geq 1$.

Par la suite, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 2.7. [4] *Soit G un graphe distance héréditaire. Pour tout sommet v de G , la partie horizontale de G suivant le sommet v est un cografte et la partie verticale de G suivant le sommet v est un graphe distance héréditaire biparti.*

Remarque 2.4. Les dernières classes de graphes sont classées par ordre d'inclusion de la manière suivante :

Graphe bloc \rightarrow Graphe ptolémaïque \rightarrow Graphe distance-héritaire biparti.

2.6. Extension des graphes distance héritaire

2.6.1. Les graphes de parité

Définition 2.13. Un graphe de parité est un graphe tel que toutes les chaînes induites reliant la même paire de sommets distincts sont de même parité.

La classe des graphes de parité constitue une extension des graphes distance héritaire, puisque la condition d'isométrie de ces graphes est imposée uniquement dans Z_2 .

Ces graphes sont introduits et caractérisés par Burlet et Uhrlet [13], ils ont été caractérisés par analogie à la première caractérisation des graphes distance-héritaire donnée par Howorka [34] [voir théorème 2.1.(4)] en utilisant la version parité :

Théorème 2.9. [13] *Un graphe G est de parité si, et seulement si tout cycle impair de longueur au moins 5 de G possède deux cordes croisées.*

Par conséquent, la construction de tels graphes s'effectue de la manière suivante :

Théorème 2.10. [13] *Tout graphe $G = (V, E)$ de parité s'obtient à partir d'un sommet unique par les opérations suivantes :*

γ : création d'un faux jumeau.

β : création d'un vrai jumeau.

φ : prolongement de G par un graphe biparti.

appliquées successivement suivant un ordre quelconque.

Ce résultat confirme que la classe de ces graphes est constituée des graphes bipartis

et les cographes [13]. Cicerone et Di Stefano [16] ont élaboré des algorithmes polynomiaux pour résoudre de problèmes classiques d'optimisations en utilisant la stabilité de la Split composition dans les graphes de parité. Ainsi, une caractérisation de ces graphes en termes de sous-graphes interdits à été donnée par Burlet et Uhry [13].

Notons C_n^* : tout cycle C_n ayant une corde courte.

C_5^{**} : le cycle C_5 qui possède deux cordes concourantes.

Nous représentons toute chaîne éventuelle qui peut être réduite à un seul sommet par une ligne axial « ».

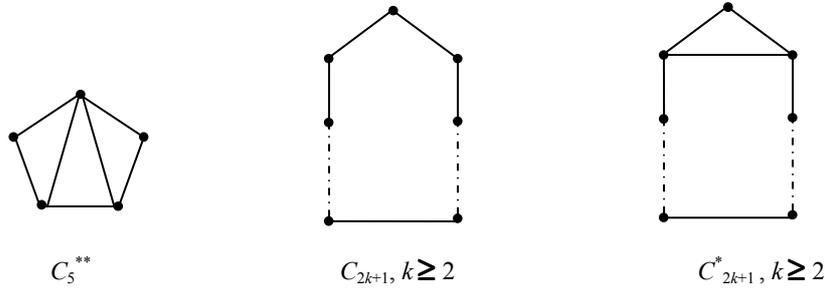


Figure 2.4. Les configurations interdites d'un graphe de parité.

Théorème 2.11. [6] Pour tout graphe G connexe, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est un graphe de parité.
2. Pour tout quadruple $\{u, v, w, x\}$ de sommets de G soit les trois sommes $d(u,v)+d(w,x)$, $d(u,w)+d(v,x)$, $d(u,x)+d(v,w)$ sont de même parité soit deux d'entre elles sont égales.
3. Si $d(u, v)+d(w, x) \leq d(u,w)+d(v,x) \leq d(u,x)+d(v,w)$ telle que la somme $d(u,w)+d(v,x)$ est impaire, alors $d(u,v)+d(w,x)$ ou $d(u, x)+d(v,w)$ est impaire.
4. G ne contient pas C_{2k+1} ($k \geq 2$), C_{2k+1}^* ($k \geq 2$), ou C_5^{**} comme sous-graphe isométrique induit.
5. Pour toute arête (w, x) et toute paire de sommets $\{u, v\}$ telles que :
$$d(u, w) = d(u, x) = d(u,v) + 1$$
 v est adjacent à w si et seulement si v est adjacent à x .

2.6.2. Les graphes k-Steiner distance héréditaire.

Définition 2.14. Soient G un graphe et S un sous-ensemble de sommets de $V(G)$. On appelle un arbre de Steiner de S le plus petit sous-graphe connexe de G contenant S .

Définition 2.15. Soient G un graphe connexe et $S \subseteq V(G)$. La distance Steiner de S dans G , notée $d_G(S)$, est la taille d'un arbre de Steiner de S .

Remarque 2.4. Dans un graphe distance héréditaire, pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets distincts et tout sous-graphe connexe H de G contenant u et v , nous avons :

$$d_H(S) = d_H(u, v) = d_G(S), \text{ où } S = \{u, v\}.$$

Définition 2.16. Un graphe connexe $G = (V, E)$ est dit k -Steiner distance héréditaire ($k \geq 2$) si pour tout sous-graphe connexe H de G d'ordre au moins k et tout sous-ensemble S de k sommets de H : $d_H(S) = d_G(S)$.

Un tel graphe est noté ' k -Sdh'

Un graphe 2-Steiner distance héréditaire est un graphe distance héréditaire.

Day, Oellermann et Swart [25] ont caractérisé les graphes 3-Steiner distance héréditaire et ont généralisé cette caractérisation pour tout $k \geq 3$ [26].

Théorème 2.11. [26] *Un graphe G est 3-Steiner distance héréditaire si et seulement si G est 2-Steiner et G vérifie l'une des conditions suivantes :*

- 1) *Chaque cycle $C = (v_1, v_2, \dots, v_t, v_1)$ de longueur $t \geq 6$ alors :*
 - a. *C possède au moins deux cordes qui se croisent ou bien si $t = 6$ alors :
 (v_1, v_3, v_5, v_1) ou (v_2, v_4, v_6, v_2) est un cycle dans $\langle V(G) \rangle$.*
 - b. *Et C ne possède pas deux sommets adjacents et qui soient incidents aux deux cordes.*
- 2) *G ne contient aucune des configurations de la figure 2.5 comme sous-graphe induit.*

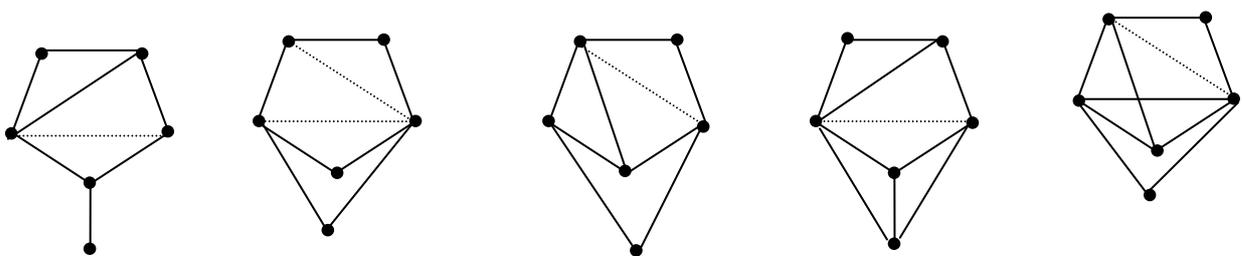


Figure 2.5.

Théorème 2.12. [26] *Si G est 2-Steiner distance héréditaire, alors G est k -Steiner distance héréditaire pour $k \geq 3$.*

Remarque 2.5. Pour $k \geq 3$, nous avons: tous les cycles C_{k+2} sont $(k+2)$, $(k+1)$ et k -Steiner distance héréditaire, mais ne sont pas $(k-1)$ -Steiner distance héréditaire, ce qui prouve que l'inverse du Théorème 2.12 est faux.

2.6.3. Les graphes presque distance héréditaire.

Aïder [2] a introduit une nouvelle classe de graphes appelés « graphes presque distance-héréditaire » à partir des graphes distance héréditaire en se basant sur la relation entre toute chaîne induite et sa géodésique.

Définition 2.17. Soit G un graphe connexe. G est presque distance héréditaire (noté pdh) si, et seulement si pour tout sous-graphe connexe induit H de G et toute paire de sommets $\{u, v\}$ de H : $d_H(u, v) \leq d_G(u, v) + 1$.

Définitions 2.18. Une $2C_5$ -configuration de type (a) (resp. de type (b)) est le graphe de la Figure 2.7. (a) (resp. Figure 2.6. (b)).

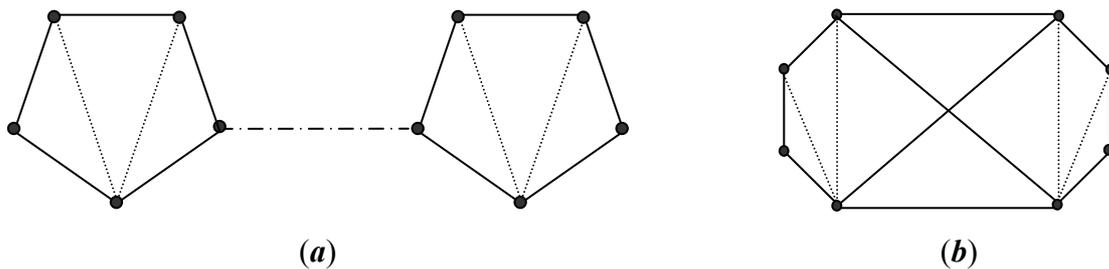


Figure 2.6. $2C_5$ configuration.

Théorème 2.12. [2] Un graphe connexe $G = (V, E)$ est pdh si et seulement si G ne contient ni de $2C_5$ configuration, ni de C_n configuration ($n \geq 6$) comme sous-graphe induit.

Bandelt et Mulder [4] ont montré que si G est un graphe distance héréditaire alors G contient soit deux sommets pendants, soit une paire de jumeaux et pour les graphes pdh nous avons nécessairement le résultat suivant :

Proposition 2.1. [2] Soit G un graphe pdh avec au moins deux sommets. Alors G contient :

- Soit deux sommets pendants.
- Soit une paire de jumeaux.
- Soit une C_5 configuration induite.

Proposition 2.2. [2] Soit G un graphe ne contenant pas de C_n configuration ($n \geq 6$) comme sous-graphe induit, tel que pour tout quadruplet $\{u, v, w, x\}$ de sommets, la différence entre deux des sommes de distances : $d(u, v) + d(w, x)$, $d(u, x) + d(v, w)$ et $d(u, w) + d(v, x)$ est au moins égale à 2. Alors G est pdh.

Remarque 2.6. L'inverse de cette proposition est faux.

Définition 2.19. Soit k un entier positif. Un graphe connexe $G = (V, E)$ est dit presque distance-héritaire d'ordre k (on note $G \in \text{DH}(k, +)$), si pour tout sous-graphe connexe induit H de G et toute paire $\{u, v\}$ de sommets de H : $d_H(u, v) \leq d_G(u, v) + k$.

Une caractérisation des graphes $\text{DH}(2, +)$ en termes de configurations interdites minimales a été établie dans [8], et un peu plus tard, ce résultat a été trouvé indépendamment par Rautenbach [44]. En se basant sur la condition portant sur la distance de corde, Cicerone et Di Stefano [20] caractérisent les graphes $\text{DH}(k, +)$. Ce même résultat a été obtenu par Meslem [39].

3.6.4. Les graphes à distance induite bornée.

Définition 2.20. Soit α ($\alpha \geq 1$) un nombre réel. Un graphe G est dit à distance induite bornée d'ordre α (on note $G \in \text{BID}(\alpha)$) si chaque sous-graphe induit connexe H de G vérifie :

$$d_H(x, y) \leq \alpha \cdot d_G(x, y), \text{ pour toute paire de sommets } \{x, y\} \text{ de } H.$$

Cette classe qui est une généralisation des graphes distance héritaire, a été introduite et complètement caractérisée par Cicerone et Di Stefano [18].

3.6.5. Les graphes (s, d)-distance héritaire

Définition 2.21. Soient $s \geq 1$ un nombre rationnel et $d \geq 0$ un nombre entier.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit (s, d) -distance héritaire, si pour tout sous-graphe induit connexe H de G et toute paire de sommets (x, y) de H : $d_H(x, y) \leq s \cdot d_G(x, y) + d$.

Un tel graphe est noté (s, d) -dh.

Cette classe est introduite par Cicerone et Di Stefano [20].

Remarque 2.7. Si $\alpha = 1$, la classe BID (1) est celle des graphes distance héréditaire et nous avons : $BID(1) \cong dh \cong dh(0, +) \cong (1,0)$ -dh.

Les graphes de parité et les graphes presque distance héréditaire sont deux extensions divergentes des graphes distance héréditaire puisque leur intersection est exactement la classe des graphes distance héréditaire. Enfin, nous clôturons ce chapitre par le diagramme suivant qui représente la relation entre la classe des graphes distance héréditaire et ses sous-classes [resp. sub-classes] en terme d'inclusion, dont la flèche allant de A vers B signifie que $A \subseteq B$.

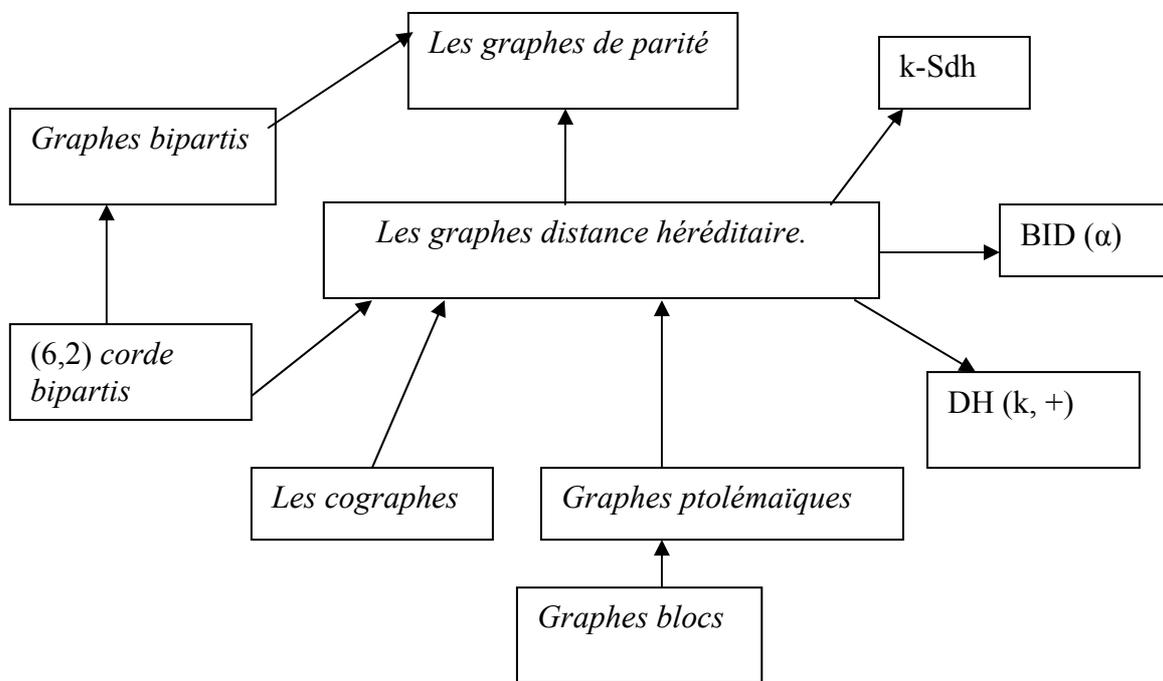


Figure 2.7. Les sous-classes et les sub-classes des graphes ‘dh’

Remarque 2.8 Les graphes distance-héréditaire ont été caractériser également en utilisant l’ordre d’élimination parfait, l’ordre d’élimination 2-simpliciale [41]

Chapitre 03

Graphes Presque Distance- Héréditaire Bipartis

4.1. Introduction

Dans le cadre de l'étude d'une extension des graphes distance-héréditaire, Aïder [3] avait introduit la classe des graphes presque distance-héréditaire dont la distance entre toute paire de sommets d'un sous-graphe connexe est au plus augmentée d'une unité. Il avait aussi établi quelques propriétés et donné certaines caractérisations en termes de sous-graphes interdits. D'autres caractérisations faisant intervenir la fonction distance sont également donnée par Bessedik [8].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons d'abord aux graphes presque distance-héréditaire bipartis introduits par Aïder [3], où la variation de la distance est paire et au plus égale à 2. Nous donnons les différentes définitions et les résultats principaux concernant ces graphes, et une caractérisation en terme de sous-graphes interdits donnée par Aïder [3]. Suivant cette caractérisation, nous proposons deux algorithmes polynomiaux pour résoudre le problème de reconnaissance de cette classe.

Enfin, nous établissons quelques propriétés métriques de ces graphes.

3.2. Définitions et résultats préliminaires

Définition 3.1. Un graphe connexe biparti $G = (V, E)$ est presque distance héréditaire biparti si pour tout sous graphe connexe induit H de G :

$$d_H(u, v) \leq d_G(u, v) + 2, \text{ pour toute paire de sommets } u \text{ et } v \text{ de } H.$$

En d'autres termes, un graphe connexe biparti $G = (V, E)$ est presque distance héréditaire biparti si toute (u, v) -chaîne induite de G est soit de longueur égale à $d_G(u, v)$ [dans ce cas, elle est géodésique] soit de longueur $d_G(u, v) + 2$.

Remarque 3.1. Un graphe biparti presque distance-héréditaire est distance-héréditaire.

Notons que le cycle C_{2q} est de longueur $2q$ et n'est pas presque distance héréditaire biparti si $2q \geq 8$, car C_{2q} est l'union de deux chaînes induites disjointes, la première est de longueur 2, et la deuxième est de longueur $2q - 2$. Cette remarque est toujours vraie pour les cycles qui contiennent les cordes paires (les cordes qui joignent des sommets à distance paire d'un cycle) et toutes ces cordes sont incidentes à un seul sommet [voir Figure 3.1.]

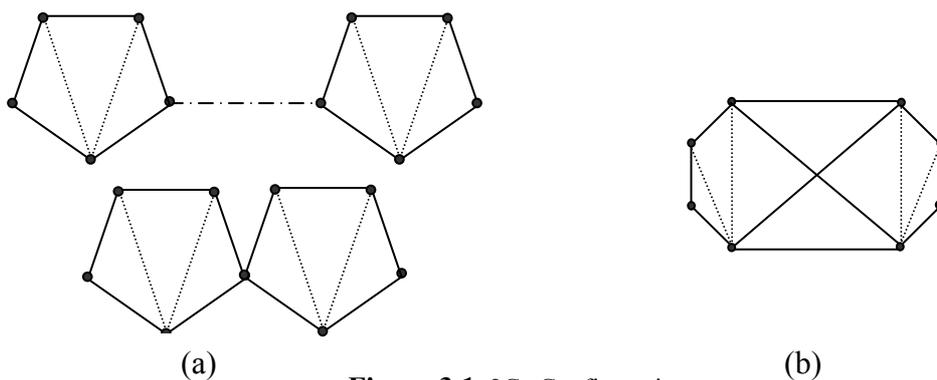


Figure 3.1. $2C_5$ -Configurations

Définition 3.2. Appelons C_6 -biconfiguration, chacun des graphes de la Figure 3.2., qui représente les plus petits graphes bipartis qui ne sont pas des graphes distance héréditaire bipartis.

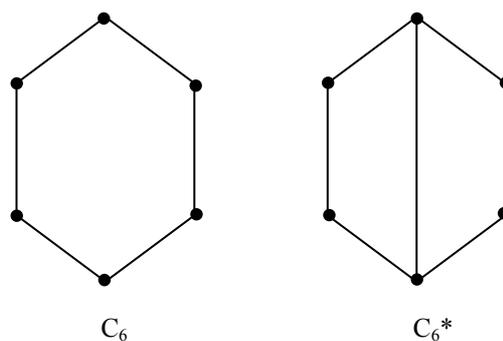


Figure 3.2. C_6 -biconfigurations

Plus généralement, une C_q -biconfiguration désignera un cycle de longueur q (q : pair) n'ayant pas de corde ou ayant toutes ses cordes concourantes et induisant un graphe biparti.

Une $2C_6$ -biconfiguration de type (a) est le graphe obtenu par composition de deux C_6 -biconfigurations en reliant deux sommets de degré local 2 par une chaîne (voir Figure 3.3. (a)). Le graphe représenté dans la Figure 3.3. (b) sera appelé $2C_6$ -biconfiguration de type (b).

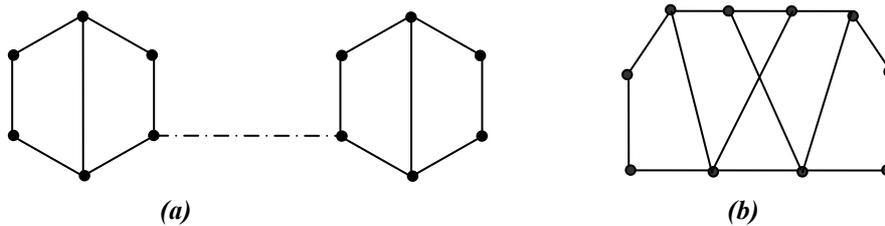


Figure 3.3. $2C_6$ -biconfigurations

3.3. Caractérisation des graphes presque distance héréditaire bipartis

Remarquons que les seuls cycles autorisés dans les graphes presque distance héréditaire bipartis et interdits pour les graphes distance héréditaire bipartis [3] sont ceux de longueur 6.

Une caractérisation des graphes presque distance héréditaire bipartis en termes de sous-graphes interdits induits avait été établie par Aïder [3] est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.1. [3] *Une condition nécessaire pour qu'un graphe G soit presque distance héréditaire biparti est que G ne contient ni de $2C_6$ -biconfiguration, ni de cycle de longueur supérieure ou égale à 8 comme sous-graphes induits.*

En faisant appel à la notion des cordes dans les graphes, nous avons la caractérisation suivante :

Théorème 3.1. [3] *Soit G un graphe connexe biparti. Alors G est presque distance héréditaire biparti si et seulement si G ne contient ni de $2C_6$ -biconfiguration, ni de C_{2q} -biconfiguration comme sous graphe induit.*

Dans [3], on trouve aussi une autre caractérisation de ces graphes, obtenu uniquement en termes de sous-graphes interdits.

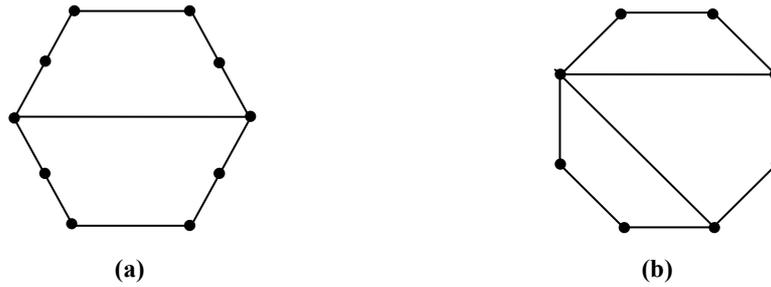


Figure 3.4.

Théorème 3.3. [3] Soit G un graphe biparti connexe. Alors G est presque distance héréditaire biparti si et seulement si G ne contient aucune des configurations suivantes comme sous graphe induit :

- a. Les cycles induits de longueur supérieur ou égale à 8.
- b. Les $2C_6$ -biconfigurations.
- c. Les graphes de la figure 3.4.

3.4. Problème de reconnaissance des graphes pdh bipartis

D'abord, nous rappelons les résultats obtenus par Cicerone et Di Stefano [20] pour résoudre le problème de reconnaissance des graphes presque distance-héréditaire.

Ces derniers avaient montré qu'un graphe $G = (V, E)$ appartient à la classe $DH(1, +)$ si,

et seulement si G appartient à la classe $BID(\frac{3}{2})$ et ne contient pas comme sous-graphe induit une $2C_5$ -configuration de type (a) (voir la figure 3.1.(a)).

Cicerone et Di Stefano [19] ont donné un algorithme en un temps $O(n^{3i+2})$ polynomial pour la reconnaissance des graphes $BID(2 - \frac{1}{i})$ pour $i \geq 1$.

Théorème 3.3 [19] Pour tout entier $i \geq 1$, le problème de reconnaissance des graphes $BID(2 - \frac{1}{i})$ est polynomial.

En particulier, la reconnaissance des graphes $BID(\frac{3}{2})$ est polynomial et s'effectue en $O(n^{18})$ [19].

Cicerone et Di Stefano [19] ont également proposé un algorithme en $O(n^{10})$ polynomial pour tester si un graphe connexe $G = (V, E)$ contient une $2C_5$ -configuration de type (a).

Théorème 3.4. [20] : *Le problème de reconnaissance des graphes DH (1, +) est polynomial.*

Suivant la caractérisation des graphes presque distance-héréditaire bipartis donnée au théorème 3.2. [3], nous implémentons deux algorithmes polynomiaux pour résoudre le problème de reconnaissance de ces graphes :

Proposition 3.1. *Il existe un algorithme polynomial pour vérifier si un graphe connexe biparti G contient un cycle C_n $n \geq 8$ avec $cd(C_n) \leq 2$.*

Preuve

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe biparti.

Dans G , il existe un cycle C_n $n \geq 8$ avec $cd(C_n) \leq 2$ si, et seulement si il existe dans G

Une paire de sommets $\{x, y\}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- a) Il existe une paire de sommets $\{u, v\}$ tels que $p_G(x, y) = (x, u, v, y)$.
- b) Il existe une $\{x, y\}$ -chaîne induite $P_G(x, y)$ telle que $|P_G(x, y)| \geq 5$.
- c) Toutes les cordes (s'il y en a) du cycle C_n induit par $p_G(x, y) \cup P_G(x, y)$ sont incidentes aux sommets u et v (i.e. $cd(C_n) \leq 2$).

Notons M l'ensemble des sommets –excepté x et y - qui appartiennent à la plus courte $\{x, y\}$ -chaîne $p_G(x, y)$.

De plus, si $d_{G-M}(x, y) \geq 5$, posons $X = I_{G-M}(x, y) \cap N(x)$ et $Y = I_{G-M}(x, y) \cap N(y)$.

Si la chaîne $P_G(x, y)$ existe dans G alors, elle est nécessairement de la forme de l'une des chaînes suivantes :

P_1 : $\{x, y\}$ -chaîne induite ne contenant ni les sommets de X , ni les sommets de Y .

P_2 : $\{x, y\}$ -chaîne induite ne contenant pas les sommets de X et contenant un sommet de Y .

P_3 : $\{x, y\}$ -chaîne induite contenant un sommet de X et ne contenant pas les sommets de Y .

P_4 : $\{x, y\}$ -chaîne induite qui contient un sommet de X et un sommet de Y .

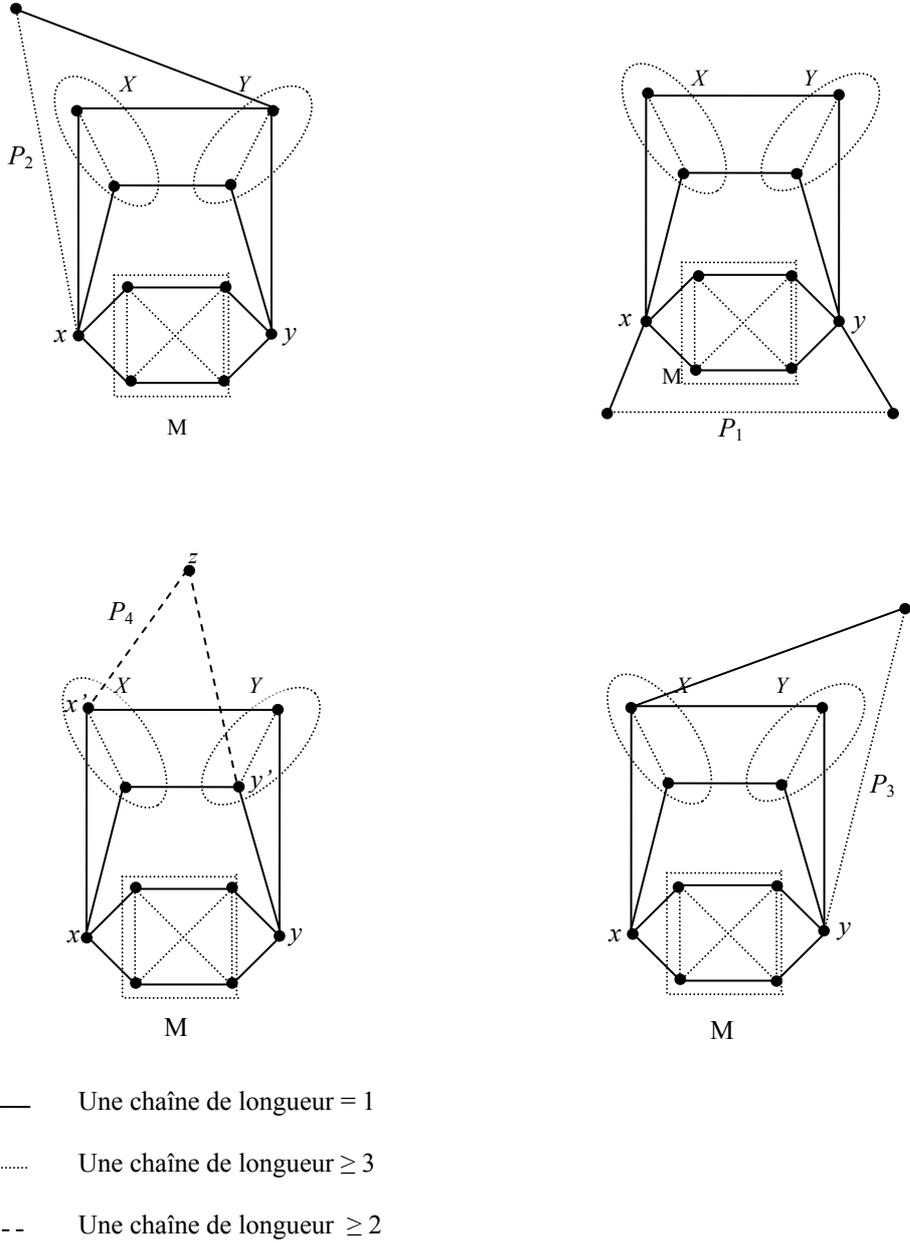


Figure 3.5. P_1, P_2, P_3, P_4 sont les quatre types de $\{x, y\}$ - chaîne induite

Procédure 'Test'

- **Donnée** : Un graphe connexe biparti $G = (V, E)$

- **Sortie** : Vraie si et seulement s'il existe un cycle C_n , $n \geq 8$ avec $cd(C_n) \leq 2$

1. Pour chaque $\{x, y\} \in G$ tel que $d_G(x, y) = 3$
2. Déterminer M
3. Si x et y sont reliés dans $G - M$, alors
4. Si $d_{G-M}(x, y) > 4$
5. Donc, retourner (vrai) {il existe P_1 , X et Y sont vides}
6. De plus, si $\{X$ et Y ne sont pas vides}
7. Déterminer $X = I_{G-M}(x, y) \cap N(x)$
 $Y = I_{G-M}(x, y) \cap N(y)$
8. Si x et y sont reliés dans $G - (M \cup X)$
9. Retourner (vrai), il existe P_2
10. Si non, P_1 et P_2 n'existent pas
11. Si x et y sont reliés dans $G - (M \cup Y)$
12. Retourner (vrai), il existe P_3
13. Si non, P_1 , P_2 et P_3 n'existent pas
14. Pour toutes paire de sommets $\{x', y'\}$ tel que $x' \in X$, $y' \in Y$ et $(x', y') \notin E$
15. Si x' et y' sont reliés dans le sous- graphe $G - [M \cup (X \setminus \{x'\}) \cup (Y \setminus \{y'\})]$
16. Retourner (vrai), il existe P_4 .
17. Fin Pour.
18. Fin Si.
19. Fin Si.
20. Fin Si.
21. Fin De plus.
22. Fin Si.
23. Fin Pour.
24. Retourner (faux).

Procédure « TEST » analyse toutes les paires de sommets $\{x, y\}$ à distance 3 dans G , pour vérifier l'existence d'une chaîne de type P_i $1 \leq i \leq 4$ entre x et y dans G .

Il reste à vérifier que cette procédure est polynomiale en temps.

Etape 1 : la détermination de toutes les paires de sommets à distance 3 s'effectue en $O(n^2)$

où n représente le nombre de sommets de G .

Etape 2 : est exécutée en $O(m)$, où m représente le nombre d'arêtes de G .

Etape 7 : cette étape est exécutée en $O(m) + O(m) = O(2m)$.

Etape 8,11 et 15 : sont effectuées en $O(m)$

Etape 14 : exécutée en $O(n^2)$

De ce fait, la recherche d'un cycle C_n , $n \geq 8$ avec $cd(C_n) \leq 2$ dans un graphe connexe biparti s'effectue en $O(n^2)$.

Proposition 3.2. *Il existe un algorithme polynomial pour vérifier si un graphe connexe biparti G contient comme sous graphe induit une $2C_6$ -biconfiguration de type (a).*

Algorithme : Chercher une $2C_6$ -biconfiguration de type (a)

-Donnée : Un graphe $G = (V, E)$ connexe et biparti avec $|V| \geq 12$ et $|E| \geq 14$.

-Sortie : Une $2C_6$ -biconfiguration de type (a)

1. Pour tout $A = C_6$ et $B = C_6'$ deux sous-graphes induits distincts de G
2. Si $cd(A) \leq 1$, $cd(B) \leq 1$, et $\langle A \cup B \rangle$ n'est pas connexe. Alors
3. Pour tout $x \in A$, $y \in B$ tels que $deg_A(x) = deg_B(y) = 2$
4. $G_{xy} := G - \{N[A-x] \cup N[B-y]\}$
5. Si x et y sont reliés dans G_{xy} , alors
6. Terminer, il existe une $2C_6$ -biconfiguration de type (a)
7. Fin Si
8. Fin Pour
9. Fin Si
10. Fin Pour
11. Retourner, faux.

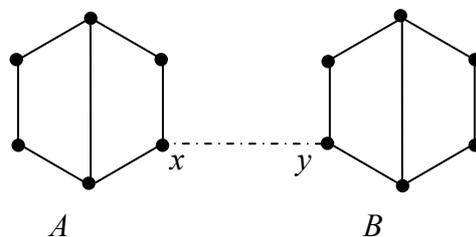


Figure 3.6. $2C_6$ -biconfiguration de type (a)

Cet algorithme considère toutes les paires possibles de cycles A et B de 6 sommets qui sont des sous graphes induits de G .

Si $A \cup B$ induit un sous graphe connexe S , alors soit S n'est pas une $2C_6$ -biconfiguration de type (a), soit S est une $2C_6$ -biconfiguration de type (a) avec $x \equiv y$.

Si $cd(A) \leq 1$ et $cd(B) \leq 1$ et S non connexe (ligne 2), alors A et B induisent une $2C_6$ -biconfiguration de type (a). En effet, l'algorithme sélectionne proprement deux sommets x et y tels que $x \in A$ et $y \in B$ (ligne 3) et après, il faut trouver une chaîne P reliant x et y .

Cherchons la chaîne P dans le sous graphe G_{xy} obtenu à partir de G en supprimant les sommets de $N[(A-x) \cup (B-y)]$.

Si x et y restent toujours connectés dans G_{xy} , nous avons la chaîne cherchée P .

Notons que les cycles obtenus à la ligne 1 sont exécutés en $O(n^2)$, et le reste de l'algorithme est polynomial. \square

3.5. Propriétés métriques des graphes presque distance-héréditaire bipartis

Rappelons d'abord quelques caractérisations métriques des graphes distance-héréditaire bipartis dues au Bandelt et Mulder [6], et celles des graphes presque distance-héréditaire donnée par Aïder [1].

Théorème 3.5. [6] *Pour un graphe connexe $G = (V, E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) G est biparti et distance-héréditaire.
- 2) G est sans triangle et ne contient ni C_n ($n \geq 5$), ni le domino (la figure 2.1 (a)) comme sous-graphe isométrique.
- 3) Pour tout triplet de sommets $\{u, v, w\}$ de G , on a : $d(u, v) \cap d(u, w) \cap d(v, w) \neq \emptyset$, et au moins deux des unions suivantes sont égales :
 $d(u, v) \cup d(u, w)$, $d(u, v) \cup d(v, w)$, $d(u, w) \cup d(v, w)$.

Le théorème suivant donne une caractérisation métrique des graphes presque distance-héréditaire établie par Aïder [1], qui utilise la propriété des quatre points :

Théorème 3.6. [1] *Soit G un graphe connexe sans C_6 -configuration comme sous-graphe induit, tel que pour tout quadruple de sommets $\{u, v, w, x\}$ de G , les trois sommes $d(u, v) + d(w, x)$, $d(u, w) + d(v, x)$, $d(u, x) + d(v, w)$ diffèrent deux à deux d'au plus deux unités. Alors G est presque distance-héréditaire.*

Dans ce qui suit, nous établissons une condition métrique suffisante, en utilisant également

la propriété des quatre points, pour qu'un graphe connexe biparti soit presque distance-héréditaire biparti :

Théorème 3.7. *Soit G un graphe connexe biparti ne contenant ni $1C_6$ -biconfiguration ni le graphe de la figure 3.6. comme sous-graphe induit, tel que pour tout quadruple de sommets $\{u,v,w,x\}$ de G , les trois sommes $d(u,v)+d(w,x)$, $d(u,w)+d(v,x)$, $d(u,x)+d(v,w)$ diffèrent deux à deux d'au plus quatre unités.*

Alors G est presque distance-héréditaire biparti.

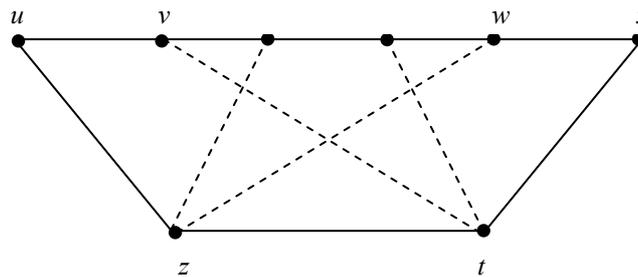


Figure 3.7.

Preuve

Soit G un graphe connexe biparti, ne contenant ni $1C_6$ -biconfiguration, ni le graphe de la figure 3.6. comme sous-graphe induit, tel que pour tout quadruple de sommets $\{u,v,w,x\}$ de G , les trois sommes $S_1 = d(u,v)+d(w,x)$, $S_2 = d(u,w)+d(v,x)$, $S_3 = d(u,x)+d(v,w)$ diffèrent deux à deux d'au plus quatre unités. Notons (*) cette propriété.

Il s'agit de montrer que la longueur de toute $\{u,x\}$ -chaîne induite de G est soit égale à $d(u,x)$ soit à $d(u,x) + 2$.

Nous allons procéder par récurrence sur la longueur des chaînes induites de G .

Soit P une $\{u, x\}$ -chaîne induite de G .

Si la longueur de P est égale à 2 ou 3, alors il n'y a rien à montrer (voir figure 3.8)

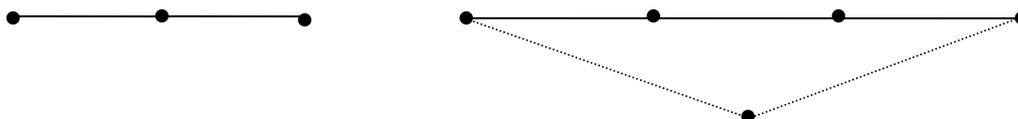


Figure. 3.8.

Supposons maintenant que toutes les chaînes induites de G , de longueur q inférieure ou égale à k ($q \leq k$), sont telles que $q = d(u,x)$ ou $d(u,x) + 2$.

Soit $P = \{u, v, \dots, w, x\}$ une $\{u, x\}$ -chaîne induite de G de longueur $k+2 \geq 3$.

On doit montrer que $d(u, x) = k$ ou $k+2$.

Posons $S_1 = d(u, v) + d(w, x)$, $S_2 = d(u, w) + d(v, x)$, $S_3 = d(u, x) + d(v, w)$.

On a, $S_1 = 2$ d'après le choix de P , $2k - 2 \leq S_2 \leq 2k + 2$, et $k - 2 \leq d(w, v) \leq k$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Notons enfin que $k - 2 \leq d(u, x) \leq k + 2$, car si $d(u, x) \leq k - 3$, on aurait une $\{u, w\}$ -chaîne (resp. $\{v, x\}$ -chaîne) induite de G de longueur inférieure ou égale à $k - 2$, or $k - 1 \leq d(u, w) \leq k + 1$ (resp. $k - 1 \leq d(v, x) \leq k + 1$) d'après l'hypothèse de récurrence.

Il y'a deux cas à étudier.

Cas 1 : $d(u, x) = k - 2$.

Sous cas 1.1. $d(w, v) = k - 2$, donc $S_3 = 2k - 4$. On distingue alors trois cas :

- a) $S_2 = 2k + 2$ (resp. $2k + 1$), ce cas est impossible puisque S_2 et S_3 diffèrent de 6 (resp. 5) unités, constituant une contradiction avec (*).
- b) $S_2 = 2k$ (resp. $2k - 1$), En vertu de la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 2k = 6$ ou 4 (resp. 5 ou 3) et donc $k = 3$ ou 2.
 - $k = 3$. $S_2 = 6$ (resp. 5) et $S_3 = 2$. Alors $d(u, x) = 1 = d(v, w)$. Une contradiction car P est une chaîne induite.
 - $k = 2$. $S_2 = 4$ (resp. 3) et $S_3 = 0$. Alors $d(u, x) = d(v, w) = 0$. Ce qui est impossible.
- c) $S_2 = 2k - 2$, Puisque G vérifie la propriété (*) et $S_1 = 2$, on doit avoir immédiatement $S_2 = 6$ ou 4 ou 2. Donc $k = 4$ ou 3 ou 2.
 - $k = 4$. $S_2 = 6$, $S_3 = 4$. Donc $d(u, x) = d(v, w) = 2$.
Soit z le sommet interne d'une plus courte $\{u, x\}$ -chaîne, alors $P(u, x) \cup \{z\}$ induit une $1C_6$ -biconfiguration. Ce qui constitue une contradiction avec nos hypothèses de départ.
 - $k = 3$. $S_2 = 4$ et $S_3 = 2$. Donc $d(u, x) = d(v, w) = 1$. Une contradiction avec le fait que P est chaîne induite.
 - $k = 2$. $S_2 = 2$ et $S_3 = 0$. Donc $d(u, x) = d(v, w) = 0$, ce qui est impossible.

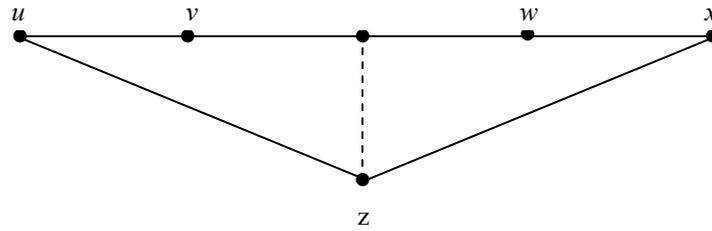


Figure. 3.9.

Sous cas 1.2. $d(w,v) = k - 1$, donc $S_3 = 2k - 3$. On distingue alors quatre cas :

- a) $S_2 = 2k + 2$. Ce cas est impossible car S_2 et S_3 diffèrent de 5 unités, une contradiction avec la propriété (*).
- b) $S_2 = 2k + 1$. En vertu de la propriété (*), on a nécessairement $S_2 = 5$ et donc $k = 2$. Alors $S_3 = 1$, $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 1$, Ce qui est impossible.
- c) $S_2 = 2k$ (resp. $2k - 1$). A cause de la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 (resp. 5 ou 3), donc $k = 3$ ou 2.
 - $k = 3$. $S_2 = 6$ (resp. 5) et $S_3 = 3$. Donc $d(u,x) = 1$, $d(v,w) = 2$ et P serait de longueur 4, mais $|P(u,x)| = k + 2 = 5$, ce qui contredit le fait que P est une chaîne induite.
 - $k = 2$. $S_2 = 4$ (resp. 3) et $S_3 = 1$. Alors $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 1$. Ce qui est impossible.
- d) $S_2 = 2k - 2$. Puisque G vérifie la propriété (*) et $S_1 = 2$, on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 ou 2 et donc $k = 4$ ou 3 ou 2.
 - $k = 4$. $S_2 = 6$ et $S_3 = 5$. Alors $d(u,x) = 2$ et $d(v,w) = 3$. Soit z le sommet interne d'une $\{u,x\}$ -chaîne, alors $P(u,x) \cup \{z\}$ induit un cycle de longueur 7. Une contradiction avec le fait que G est biparti.
 - $k = 3$. $S_2 = 4$ et $S_3 = 3$. Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 2$ et P serait de longueur 4, mais $|P(u,x)| = k + 2 = 5$. Ce qui contredit le fait que P est une chaîne induite.
 - $k = 2$. $S_2 = 2$ et $S_3 = 1$. Alors $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 1$. Ce qui est impossible.

Sous cas 1.3. $d(w,v) = k$, donc $S_3 = 2k-2$. On distingue trois cas :

- a) $S_2 = 2k+2$ (resp. $2k+1$). En vertu de (*), on doit avoir $S_2 = 6$ (resp. 5), donc $k= 2$ et $S_3 = 2$. Alors $d(u,x)=0$ et $d(v,w) = 2$. Ce qui est impossible.
- b) $S_2 = 2k$ (resp. $2k- 1$). De la propriété (*), on a nécessairement $S_2 = 6$ ou 4 (resp. 5 ou 3), donc $k= 3$ ou 2.
- $k=3$. $S_2=6$ (resp. 5), $S_3=4$. Alors $d(u,x)=1$ et $d(v,w)=3$. donc, $P(u,x) \cup (u,x)$ induit une $1C_6$ -biconfiguration. Une contradiction.
 - $k=2$. $S_2=4$ (resp. 3), $S_3=2$. Alors $d(u,x)=0$ et $d(v,w)=2$. Ce qui est impossible.
- c) $S_2 = 2k-2$. Puisque G vérifie la propriété (*), on doit avoir $S_2 = S_3 = 6$ ou 4 ou 2, donc $k= 4$ ou 3 ou 2
- $k=4$. $S_2 = S_3 = 6$. Alors $d(u,x)=2$ et $d(v,w)= 4$. Soit z le sommet interne d'une plus courte $\{u,x\}$ -chaîne. Alors $P(u,x) \cup \{z\}$ induit un graphe isomorphe au graphe de la figure 3.7. Une contradiction avec nos hypothèses de départ.
 - $k=3$. $S_2 = S_3 = 4$. Alors $d(u,x)=1$ et $d(v,w)=3$. Donc $P(u, x) \cup (u, x)$ induit une $1C_6$ -biconfiguration. Ce qui constitue une contradiction.
 - $k=2$. $S_2 = S_3 = 2$. Alors $d(u,x)=0$ et $d(v,w)=2$. Ce qui est impossible.

Cas 2 : $d(u,x) = k-1$.

Sous cas 2.1. $d(w,v) = k -2$, donc $S_3 = 2k-3$. On distingue alors quatre cas :

- a) $S_2 = 2k +2$. Ce cas est impossible car S_2 et S_3 différent de 5 unités, une contradiction avec la propriété (*).
- b) $S_2 = 2k+1$. A cause de propriété (*), on doit avoir $S_2 = 5$, donc $k= 2$ et $S_3 = 1$. Alors $d(u,x)=1$ et $d(v,w) = 0$. Ce qui est impossible car $|P(u,x)| = k+2 = 4$.
- c) $S_2 = 2k$ (resp. $2k -1$). Puisque G vérifie la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 (resp. 5 ou 3), donc $k= 3$ ou 2.

- $k=3$. $S_2=6$ (resp.5) et $S_3=3$. Alors $d(u,x)=2$ et $d(v,w)=1$ et P serait de longueur 3. Or $|P(u,x)|=k+2=5$. Ce qui contredit le fait que P est une chaîne induite.
 - $k=2$. $S_2=4$ (resp.3) et $S_3=1$. Alors $d(u,x)=1$ et $d(v,w)=0$, ce qui est impossible.
- d) $S_2=2k-2$.** Puisque G vérifie la propriété (*), on doit avoir $S_2=6$ ou 4 ou 2, donc $k=4$ ou 3 ou 2.
- $k=4$. $S_2=6$ et $S_3=5$. Alors $d(u,x)=3$, $d(v,w)=2$. Soient $\{z,t\}$ les deux sommets interne d'une plus courte $\{u,x\}$ -chaîne. Alors $P(u,x) \cup \{z,t\}$ induit un cycle de longueur 7, ce qui constitue une contradiction.
 - $k=3$. $S_2=4$ et $S_3=3$. Alors $d(u,x)=2$, $d(v,w)=1$, et P serait de longueur 3. Or $|P(u,x)|=k+2=5$. Une contradiction.
 - $k=2$. $S_1=2$, $S_2=2$ et $S_3=1$. Alors $d(u,x)=1$ et $d(v,w)=0$, ce qui est impossible car $|P(u,x)|=k+2=4$.

Sous cas 2.2. $d(w,v) = k - 1$, donc $S_3 = 2k - 2$. On distingue alors trois cas :

- a) $S_2 = 2k + 2$ (resp. $2k + 1$).** Puisque G vérifie la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 (resp.5 ou 3), donc $k = 2$ ou 1.
- $k=2$. $S_2=6$ (resp. 5) et $S_3=2$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 1$. une contradiction car P est une chaîne induite.
 - $k=1$. $S_2=4$ (resp.3) et $S_3=0$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 0$, ce qui est impossible.
- b) $S_2 = 2k$ (resp. $2k - 1$).** De la propriété (*), on a nécessairement $S_2 = 6$ ou 4 ou 2 (resp. 5 ou 3 ou 1), donc $k = 3$ ou 2 ou 1.
- $k=3$. $S_2=6$ (resp. 5) et $S_3=4$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 2$. Soit z le sommet interne d'une plus courte $\{u,x\}$ -chaîne, $P(u,x) \cup \{z\}$ induit une $1C_6$ -biconfiguration. Une contradiction.
 - $k=2$. $S_2=4$ (resp.3) et $S_3=2$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 1$ et P serait de longueur 3. Or $|P(u,x)|=k+2=4$, ce qui constitue une contradiction avec le fait que P est induite.
 - $k=1$. $S_2=2$ (resp.1) et $S_3=0$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 0$, ce qui est impossible.

- c) $S_2 = 2k-2$. En vertu de la propriété (*), on a immédiatement $S_2 = 6$ ou 4 ou 2 ou 1 , donc $k = 4$ ou 3 ou 2 ou 1 .
- $k=4$. $S_2 = S_3 = 6$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 3$.
Soit $\{z,t\}$ les deux sommets internes d'une plus courte $\{u,x\}$ -chaîne, alors $P(u,x) \cup \{z,t\}$ induit un graphe isomorphe au graphe de la figure 3.7.
Une contradiction avec nos hypothèses de départ.
 - $k=3$. $S_2 = S_3 = 4$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 2$.
Soit z le sommet interne d'une plus courte $\{u,x\}$ -chaîne, alors $P(u,x) \cup \{z\}$ induit une $1C_6$ -biconfiguration, ce qui constitue une contradiction .
 - $k=2$. $S_2 = S_3 = 2$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 1$, ce qui contredit le fait que P est une chaîne induite.
 - $k=1$. $S_2 = S_3 = 0$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 0$, ce qui est impossible.

Sous cas 2.3. $d(w,v) = k$, donc $S_3 = 2k-1$. On distingue alors deux cas :

- a) $S_2 = 2k + 2$ (resp. $2k+1$). Puisque G vérifie la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 (resp. 5 ou 3), donc $k = 2$ ou 1 .
- $k=2$. $S_2 = 6$ (resp. 5) et $S_3 = 3$. Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 2$.
Ce cas est impossible car P est une chaîne induite.
 - $k=1$. $S_2 = 4$ (resp. 3) et $S_3 = 1$. Alors $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 1$, ce qui est impossible.
- b) $S_2 = 2k$ (resp. $2k - 1$)(resp. $2k - 2$). En vertu de la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 ou 2 (resp. 5 ou 3 ou 1)(resp. 4 ou 2 ou 0), donc $k = 3$ ou 2 ou 1 .
- $k=3$. $S_2 = 6$ (resp. 5) (resp. 4) et $S_3 = 5$. Alors $d(u,x) = 2$ et $d(v,w) = 3$.
Soit z le sommet interne d'une plus courte $\{u,x\}$ -chaîne, alors $P(u,x) \cup \{z\}$ induit un cycle de longueur 7 , ce qui constitue une contradiction avec le fait que G est un graphe biparti.
 - $k=2$. $S_2 = 4$ (resp. 3) (resp. 2) et $S_3 = 3$. Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 2$. Ce qui est impossible car P est une chaîne induite.

-
- $k=1$. $S_2=2$ (resp.1) (resp.0) et $S_3=1$. Alors $d(u,x)=0$ et $d(v,w)=1$, ce qui est impossible. \square

Enfin, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.8. *Le problème de reconnaissance des graphes presque distance-héritaire bipartis est polynomial.*

Chapitre 04

Graphes k -Distance

Héréditaire Bipartis

4.1. Introduction

En généralisant la classe des graphes presque distance-héréditaire bipartis, nous obtenons la classe des graphes k -distance-héréditaire bipartis, notée $\mathcal{B}(k, +)$, pour lesquels la longueur de toute (u, v) -chaîne induite est au plus égale à $d(u, v) + 2k$.

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions nécessaires et différents résultats relatifs à la classe de graphes k -distance-héréditaire, notée $\text{DH}(k, +)$, dont la longueur de toute (x, y) -chaîne induite connexe est au plus $d(x, y) + k$.

Ensuite, nous donnons une caractérisation des graphes k -distance-héréditaire bipartis, en proposant quelques configurations interdites.

4.2. Les graphes k -distance-héritaire.

4.2.1. Définitions et résultats préliminaires.

Définition 4.1. Soit k un nombre réel. Un graphe connexe G est dit distance héritaire d'ordre k (on note $G \in DH(k, +)$) si pour tout sous-graphe induit connexe H de G :

$$d_H(x, y) \leq d_G(x, y) + k, \text{ pour toute paire } \{x, y\} \text{ de sommets de } H.$$

Autrement dit, la distance entre deux sommets quelconques dans un sous-graphe connexe qui les contient peut augmenter d'au plus k unités par rapport à la distance entre ces mêmes sommets dans G .

Lemme 4.1 [20] *La classe des graphes $DH(k, +)$ est fermée par rapport aux sous-graphes induits.*

Définition 4.2. Soient G un graphe, et $\{x, y\}$ une paire de sommets distincts de G . Alors :

1. La dilatation de la paire $\{x, y\}$, noté $\delta(x, y)$ est donnée par:
 $\delta(x, y) = D_G(x, y) - d_G(x, y)$; où $d_G(x, y)$ [resp. $D_G(x, y)$] est la longueur d'une plus courte [resp. longue] $\{x, y\}$ -chaîne induite dans le graphe G .
2. La dilatation $\delta(G)$ de G ; est le maximum des dilatations de toutes les paires possibles de sommets distincts de G , i.e. $\delta(G) = \max_{\{x, y\}} \delta(x, y)$.
3. $\mathcal{D}(G)$ est l'ensemble des paires de sommets dont la dilatation est égale à $\delta(G)$.
i.e. $\mathcal{D}(G) = \{ (u, v) / \delta(u, v) = \delta(G) \}$.

Lemme 4.2. [20] $DH(k_1, +) \subseteq DH(k_2, +)$, pour toute paire d'entiers positifs k_1, k_2 telle que $k_1 \leq k_2$.

4.2.2. Caractérisations des graphes $DH(k, +)$.

Dans [20], on trouve deux caractérisations de graphes $DH(k, +)$, la première est basée sur la dilatation de graphe et la seconde s'appuie sur la notion de distance de corde dans le graphe jumeau de G :

Théorème 4.1. [20] *Soit G un graphe. Pour tout entier positif k , $G \in DH(k, +)$ si et seulement si $\delta(G) \leq k$.*

Définition 4.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe jumeau de G est le graphe $G^* = (V^*, E^*)$ tel que $V^* = V^1 \cup V^2$ et $E^* = E^1 \cup E^2 \cup E^3$, avec:

$$V^1 = \{v^1 / v \in V\}, \quad V^2 = \{v^2 / v \in V\}.$$

$$E^1 = \{(u^1, v^1) / (u, v) \in E\}, \quad E^2 = \{(u^2, v^2) / (u, v) \in E\}, \quad E^3 = \{(u^1, v^2), (v^1, u^2) / (u, v) \in E\}.$$

Les sous-graphes de G^* donnés par (V^1, E^1) et (V^2, E^2) sont notés : G^1 et G^2 respectivement.

Remarque 4.1. De la définition précédente, on a : $|V^*| = 2 |V|$ et $|E^*| = 4 |E|$.

Le graphe G^* est obtenu à partir de G en appliquant l'opération \mathcal{Y} (i.e. ajout de faux jumeaux) à chaque sommet x de G . En effet, chaque paire $\{v^1, v^2\}$ de G^* ($v^1 \in V^1, v^2 \in V^2$) est une paire de faux jumeaux dans G^* .

Exemple 4.1.

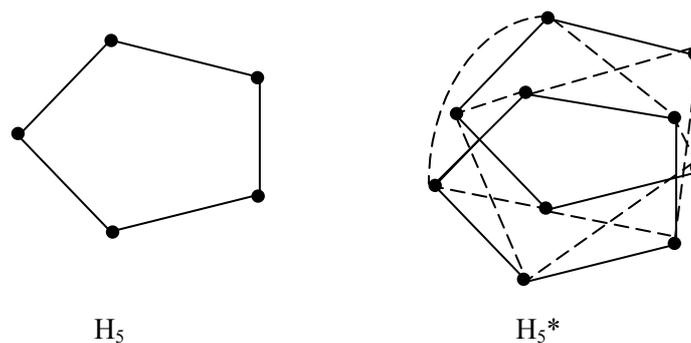


Figure 4.1. Le trou H_5 et son graphe jumeau H_5^* où chaque ligne pointillée représente une arête de E^3 .

Lemme 4.2. [20] Pour tout $k \geq 0$, $G \in DH(k, +)$ si et seulement si $G^* \in DH(k, +)$.

Définition 4.4. Une paire de sommets $\{x, y\}$ est dite paire-cycle s'il existe une plus courte et une plus longue $\{x, y\}$ -chaîne P et Q respectivement, disjointes. Autrement dit, $P \cup Q$ induit un cycle noté $C_n\{x, y\}$ et $P \cap Q = \{x, y\}$.

Lemme 4.3. [20] Soit G un graphe tel que $\delta(G) > 0$. Alors, $\mathcal{D}(G^*)$ contient une paire-cycle dans G^* .

Théorème 4.2. [20] Soient G un graphe et un entier k tel que $k > 0$. Alors, $G \in DH(k, +)$ si et seulement si $cd(C_n) \geq \frac{n-k}{2} - 1$, pour tout cycle C_n ($n > k+4$) dans G^* .

Si on fixe $k=0$, alors le problème de reconnaissance de la classe $DH(k, +)$ peut être résolu en temps polynomial [30]. Si k n'est pas fixé, donc le problème de reconnaissance de cette classe est donné par le résultat suivant :

Corollaire 4.1. [20] Si k n'est pas fixé, le problème de reconnaissance des graphes $DH(k, +)$ est *CO-NP Complet*.

4.2.3. Les configurations interdites des graphes $DH(k, +)$

Les graphes $DH(k, +)$ ont été caractérisés par les configurations interdites uniquement pour des valeurs particuliers de k : $k=0$ (les graphes dh) [4], $k=1$ (les graphes presque dh) [2] et $k=2$ (les graphes $DH(2, +)$) [8] [44]. Par la suite, il a été généralisé pour tout entier positif k [16, 39]. Au cours de cette partie, nous donnons les différents résultats et les caractérisations de ces graphes en terme de sous-graphes interdits.

Remarque 4.2 Nous désignons, dans la suite, par « $(k+1)$ - dh » la classe de graphes distance héritable d'ordre k .

Exemple 4.2.

1- dh est la classe des graphes distance-héritable.

2- dh est la classe des graphes presque distance-héritable.

Définition 4.5. Une k -configuration désigne toute configuration interdite (en tant que sous-graphe induit) dans un graphe k - dh .

Une k -configuration est dite stricte si elle est permise dans un graphe $(k+1)$ - dh comme sous-graphe induit.

Exemple 4.3.

Les 1-configurations strictes sont les cycles à 5 sommets ayant une distance de corde au plus 1.

Définition 4.6. Soient C et C' deux configurations et soient v_1 et v_2 deux sommets de C et C' respectivement de degré égal à 2.

- $C \varphi_r C'$: est le graphe obtenu en reliant les deux configurations C et C' à l'aide d'une chaîne $C(v_1, v_2)$ de longueur ' r ' dans le graphe résultant où ' r ' est un entier positif.
- $C \varphi_{-1} C'$: est la Split composition des configurations C et C' (i.e. $C * C'$) suivant les sommets marqués v_1 et v_2 .

Définition 4.7. Une k -configuration interdite minimale est une configuration non permise dans un graphe k -dh et est minimale par rapport à l'inclusion sous cette propriété.

Une k -configuration stricte de type (a) est le graphe obtenu en attachant « m »- $1C_{4+k_i}$ configurations à l'aide d'une chaîne (s) reliant des sommets de degré local égal à 2 tel que :
 $2 \leq m \leq k$, $1 \leq k_i < k$ $i=1 \dots m$, $\sum_{i=1}^{i=m} k_i = k$.

Nous appelons une k -configuration stricte de type (b) tout cycle C_n induit par $P \cup Q$ où P est une plus courte $\{u, v\}$ -chaîne et Q est la plus longue $\{u, v\}$ -chaîne induite de longueur $d(u,v) + k$ ne contenant pas de $1C_q$ configuration ($q \geq 4 + k$) comme sous-graphe induit.

Une k -configuration stricte de type $\sigma(a, b)$ où $\sigma(a, b)$ est une permutation sur $\{a, b\}$, est le graphe obtenu en attachant des configurations strictes d'ordre k_i de type (a) avec des configurations strictes d'ordre k_j de type (b) tel que $\sum k_i + \sum k_j = k$.

Une k -configuration est dite large si elle est interdite dans un graphe k' -dh ($k' > k$) comme sous-graphe induit.

Proposition 4.1. [39] Une k -configuration ($k \geq 2$) stricte minimale est l'une des graphes suivants :

1. $1C_{4+k}$ configuration.
2. Pour tout $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, (p-1)$, $p = 2, \dots, k$, le graphe :

$$1C_{4+k_1} \varphi_{r_1} 1C_{4+k_2} \varphi_{r_2} \dots 1C_{4+k_{p-1}} \varphi_{r_{p-1}} 1C_{4+k_p} \dots (*)$$

où $1 \leq k_i < k$, $\sum_{i=1}^{i=p} k_i = k$, $r_j \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

3. Tout graphe obtenu à partir de (*) en remplaçant chaque cycle maximal $C_n\{x, y\}$ ayant une distance de corde supérieure strictement à 1 et une dilatation k' par une k' -configuration stricte minimale de type (b).

Théorème 4.3. [39] Soit G un graphe. G est un graphe k -dh ($k \geq 2$) si et seulement si G ne contient pas l'une de ces configurations comme sous-graphe induit :

- 1) $1C_n$ configuration où $n \geq 4+k$,
- 2) les k -configurations strictes minimales,
- 3) les k' -configurations strictes minimales où $k' > k$ et $k' = k_1 + k_2$ avec $1 < k_i < k$, $i = 1, 2$.

4.3. Les graphes k -distance-héritaire bipartis

Dans la section précédente, nous avons donné quelques définitions et certains résultats des graphes distance-héritaire bipartis établis par Bandlet et Mulder [4] et celles des graphes presque distance-héritaire bipartis étudié par Aïder [3]. Dans cette section, nous étendons ces résultats en s'intéressant à une classe de graphe qui généralise la classe précédente, nous donnons la définition et une caractérisation en termes de sous-graphes interdits.

Définition 4.8. Soit G un graphe biparti connexe.

G est dit k -distance-héritaire biparti, noté $\mathcal{B}(k, +)$ si et seulement si G est biparti et pour tout sous-graphe induit connexe H de G , on a :

$$d_H(x, y) \leq d_G(x, y) + 2k, \quad \text{pour toute paire de sommets } \{x, y\} \text{ de } H.$$

Théorème 4.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe biparti. Soit $k \geq 2$ un nombre réel.

Alors $G \in \mathcal{B}(k, +)$ si et seulement si G ne contient pas comme sous graphe induit les configurations suivantes :

- 1) $1C_{2q}$ biconfigurations, $q \geq 3+k$.
- 2) $1C_6 \varphi_{r_1} 1C_6 \varphi_{r_2} \dots \varphi_{r_k} 1C_6$, avec $r_i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ où $i = \{1, \dots, k\}$.

Preuve :

“ Condition nécessaire”

Soit G un graphe biparti connexe.

Si G contient la configuration $1C_{2q}$ -biconfigurations, $q \geq 3+k$, alors la suppression du sommet x incident à toutes les cordes induit une augmentation de plus de $(2k+2)$ unités de la distance entre les deux sommets u et v adjacents à x , et donc G ne sera pas dans $\mathcal{B}(k, +)$.

Si G contient $1C_6 \varphi_{r_1} 1C_6 \varphi_{r_2} \dots \varphi_{r_k} 1C_6$ avec $r_i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ où $i = \{1, \dots, k\}$

Alors, si en supprimant les sommets x_i ($i = 1, \dots, k+1$) de $P(u, v)$ dans ces configurations, la distance entre u et v augmente de $(2k+2)$ unités dans la configuration de type (a),

de $(k + 4)$ unités si $k \leq 3$, de $(2k + 2)$ unités si $k \geq 4$ dans la configuration de type (b), et d'une augmentation de $(2k + 2)$ unités dans les configurations de type σ (a, b). Donc dans les trois cas, nous avons une augmentation de plus $2k$ unités de la distance entre u et v . Ce qui implique que G n'appartient pas à la classe $\mathcal{B}(k, +)$.

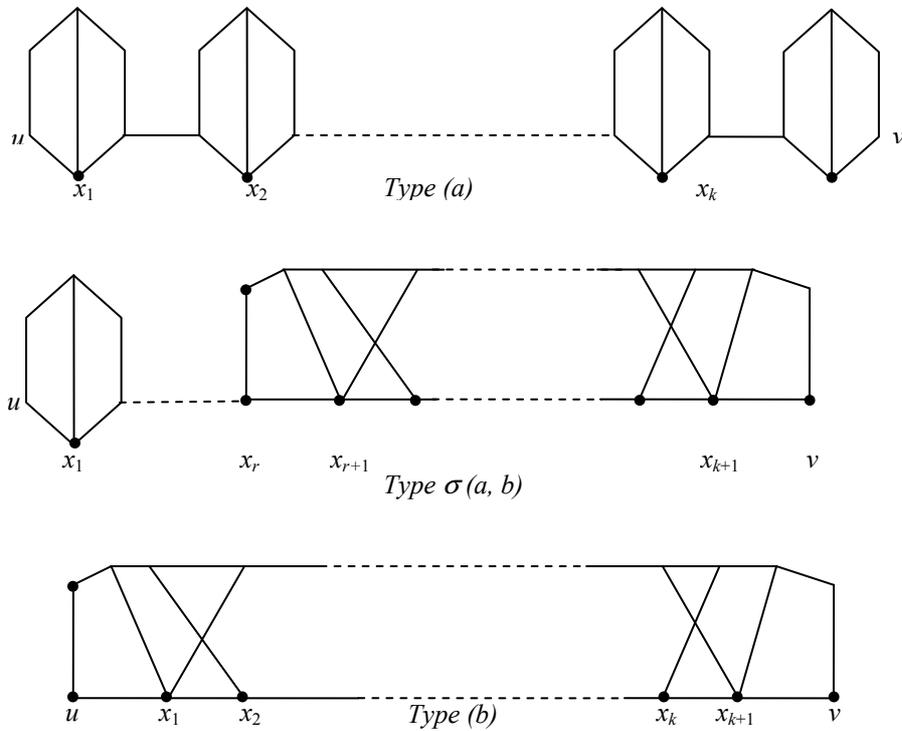


Figure 4.2.

“Condition suffisante”

Soit G un graphe biparti connexe qui ne contient aucune configuration citée au théorème comme sous-graphe induit. En procédant par absurde, nous supposons que G n'appartient pas à la classe $\mathcal{B}(k, +)$, alors G contient une paire de sommet $\{u, v\}$ reliée par une plus longue $\{u, v\}$ -chaîne de longueur supérieure ou égale à $d_G(u, v) + (2k + 2)$.

Parmi toutes les paires de sommets vérifiant cette propriété, que nous notons (Δ) , nous choisissons la paire $\{u, v\}$ de telle sorte que $d_G(u, v)$ soit minimale.

Soit P [resp. Q] une plus courte [resp. longue] $\{u, v\}$ -chaîne induite.

Alors, soit u et v sont contenus dans un cycle induit par $P \cup Q \equiv C(u, v)$ de longueur au moins 2. $d_G(u, v) + (2k + 2)$, ou soit la chaîne P contient au moins deux sommets x et y tels que : $d_Q(u, x) \geq d_P(u, x) + 2k$ et $d_Q(y, v) \geq d_P(y, v) + 2k \dots (1)$.

1^{er} cas : $P \cap Q = \{u, v\}$.

Dans ce cas, il est clair que la paire $\{u, v\}$ est une paire-cycle et $\langle P \cup Q \rangle = C \{u, v\} \equiv C_n$

où $|V(\langle P \cup Q \rangle)| = n$. Puisque $d_G(u, v) \geq 2$, alors le cycle C_n est de longueur $\geq 2k + 6$.

Par suite, C_n doit contenir au moins deux cordes non concourantes. Soit x [resp. y] le sommet de $P \setminus \{u, v\}$ le plus proche de u [resp. v] ayant au moins un voisin dans Q , et soit x' [resp. y'] le voisin de x [resp. y] dans Q le plus proche de v [resp. u].

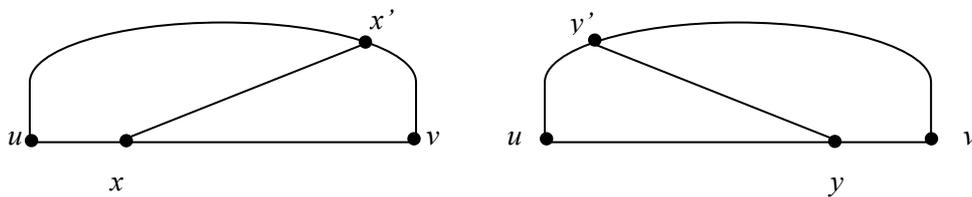


Figure 4.3.

Si $d_P(u, x) + d_Q(u, x') + 1 \geq 2k + 6$, alors le cycle induit par $Q(u, x') \cup \{x', x\} \cup P(x', u)$ est de longueur $\geq 2k + 6$ et toutes ces cordes sont incidentes au sommet x . Ce qui constitue une contradiction.

Par conséquent, $d_P(u, x) + d_Q(u, x') + 1 < 2k + 6$, i.e. $d_Q(u, x') < (2k + 5) - d_P(u, x)$.

Si $d_Q(u, x') \leq d_P(u, x) + 2$, alors $|Q(u, v)| = d_Q(u, x') + d_Q(x', v) \geq |P(u, v)| + (2k + 2)$.

Donc $d_Q(u, x') \geq d_P(u, x) + d_P(x, v) + (2k + 2) - d_Q(x', v) \geq d_Q(u, x') - 2 + 2k + 2 + d_P(x, v) - d_Q(x', v)$.

Par suite : $d_P(x, v) + 2k \leq d_Q(x', v)$, alors x peut remplacer le sommet u dans les hypothèses de départ avec $d(x, v) < d(u, v)$. Une contradiction avec la condition de minimalité (Δ).

Donc: $d_Q(u, x') > d_P(u, x) + 2$. Par conséquent $d_P(u, x) + 2 < d_Q(u, x') < (2k + 5) - d_P(u, x)$.

Il s'ensuit que $\begin{cases} d_P(u, x) = 1 & (1) \\ \text{et } 4 \leq d_Q(u, x') < 2k + 4 & (2) \end{cases}$

Et par symétrie, nous avons $\begin{cases} d_P(y, v) = 1 & (3) \\ \text{et } 4 \leq d_Q(y', v) < 2k + 4 & (4) \end{cases}$

Supposons à présent que $d_Q(u, x') < d_Q(u, y')$.

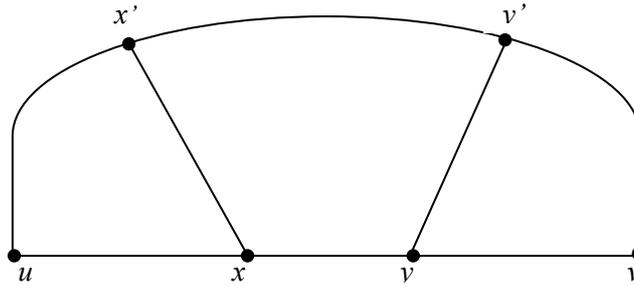


Figure 4.4.

$$d_Q(u, x') + d_Q(x', y') + d_Q(y', v) \geq d_P(u, x) + d_P(x, y) + d_P(y, v) + (2k + 2) = d_P(x, y) + (2k + 4).$$

D'où $d_Q(x', y') > d_P(x, y) - 2k - 4$.

En vertu de la condition (Δ) , nous avons : $d_Q(u, y') + 1 = d_Q(u, y) \leq d_P(u, y) + 2k$, car si non $d_Q(u, y) > d_P(u, y) + 2k$ et donc $d_Q(u, y) \geq d_P(u, y) + 2k + 2$.

Donc la paire $\{u, y\}$ vérifie les hypothèses de départ avec $d(u, y) < d(u, v)$. Ce qui constitue une contradiction.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } d_Q(x', y') &= d_Q(u, y') - d_Q(u, x') \leq d_P(u, y) + (2k - 1) - d_Q(u, x') = \\ &= d_P(u, x) + d_P(x, y) + (2k - 1) - d_Q(u, x'). \end{aligned}$$

En vertu de (1) et (2) on a : $d_Q(x', y') \leq d_P(x, y) + 2k - 4 = d_P(x, y) + 2(k - 2)$.

D'où $d_P(x, y) - 2(k + 2) \leq d_Q(x', y') \leq d_P(x, y) + 2k - 4 \dots (5)$.

Supposons maintenant que x' et y' ne sont pas adjacents, et posons

$$P' = \{x', x\} \cup P(x, y) \cup \{y, y'\} \text{ et } Q' = Q(x', y').$$

Notons que P' est une $\{x', y'\}$ -chaîne induite de longueur $d_P(x, y) + 2 \geq d_Q(x', y') - 2k + 6 \geq d(x, y) - 2k + 6$.

Ce qui constitue une contradiction avec la condition (Δ) , donc x' et y' sont adjacents.

Posons $P' = \{u, x, x', y', y, v\}$. Il est clair que P' est une plus courte $\{u, v\}$ -chaîne,

Cependant, $|V(P') \cup V(Q)| < |V(P) \cup V(Q)|$. Une contradiction.

Par conséquent, $d_Q(u, x') > d_Q(u, y')$.

Soit t [resp. z] un sommet interne de $Q(u, y')$ [resp. $Q(x', v)$].

Si l'arête xt [resp. yz] est une corde entre P et Q , alors on pose $Q' = Q(t, v)$ et

$$P' = \{t, x\} \cup P(x, v) \text{ [resp. } Q' = Q(u, z) \text{ et } P' = P(u, y) \cup \{y, z\}].$$

Notons que Q est une $\{t, v\}$ -chaîne [resp. $\{u, z\}$ - chaîne] induite de longueur $\geq d_P(t, v) + 2 + 2k$ [resp. $\geq d_P(u, z) + 2 + 2k$]. Ce qui aboutit a une contradiction avec la condition de minimalité (Δ).

2^{ième} cas : $\{u, v\} \subset P \cap Q$.

Dans ce cas, il existe au moins une sous-chaîne de P (pouvant être réduite à un sommet) dans $P \cap Q$. Soient $P(y_i, x_{i+1})$ [$1 \leq i \leq t-1$] les sous-chaînes appartenant à $P \cap Q$.



Figure 4.5.

Nous avons : $d(u, y_1) \geq 2$, $d(x_i, y_i) \geq 2$ ($2 \leq i \leq t-1$) et $d(x_t, v) \geq 2$.

Les sommets y_i $1 \leq i \leq t-1$, x_j $2 \leq j \leq t$, u et v vérifient la propriété suivante :

$$d_Q(u, y_1) \geq d_P(u, y_1) + 2k_1, \quad d_Q(x_i, y_i) \geq d_P(x_i, y_i) + 2k_i \quad 2 \leq i \leq t-1,$$

$$d_Q(u, y_t) \geq d_P(u, y_t) + 2k_t \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^t k_i = k \dots (6).$$

Soit y_1 [resp. x_t] le premier sommet [resp. dernier] appartenant à $P \cap Q$ et satisfaisant les inégalités (6).

Notons par C_{n1} , C_{ni} $i = 2, \dots, t-1$ et C_{nt} les cycles induits par les paires-cycles $\{u, y_1\}$, $\{x_i, y_i\}$ $2 \leq i \leq t-1$ et $\{x_t, v\}$ respectivement.

Si C_{ni} ($i = 1, \dots, t$) sont tous de longueur 6, alors ils induisent la configuration $1C_6 \varphi_{r_1} 1C_6 \varphi_{r_2} \dots \varphi_{r_{(t-1)}} 1C_6$, $r_i \in N$ de type (a). Ce qui conduit à une contradiction avec l'hypothèse G ne contient pas une telle configuration.

Considérons le cycle C_{n1} (les mêmes démarches et les mêmes arguments restent valables pour les C_{ni} , $i = \{2, \dots, t\}$), et supposons qu'il soit de longueur supérieur strictement à 6, i. e. est de longueur supérieur où égale à 8. Donc C_{n1} doit contenir au moins deux cordes qui ne sont pas incidentes au même sommets de P . Soient α et β les deux derniers sommets de $P(u, y_1)$ ayant au moins des voisins dans $Q(u, y_1)$, et soit α' le dernier voisin de α dans $Q(u, y_1)$.

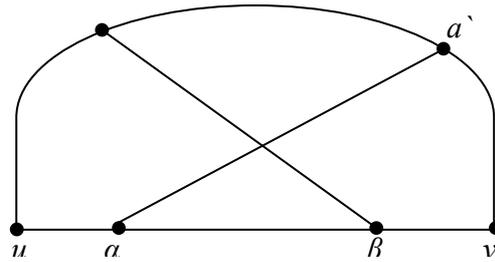


Figure 4.6.

Si $d_P(\alpha, y_1) < d_Q(\alpha', y_1) - (2k_1 - 1)$ [$d_P(\alpha, y_1)$ et $d_Q(\alpha', y_1)$ ne sont pas de même parité car si non, on trouve un cycle de longueur impair. Contradiction avec le fait que G est biparti]. Le cycle induit par $P(y_1, \alpha) \cup \{\alpha, \alpha'\} \cup Q(\alpha', y_1)$ est de longueur supérieure ou égale à $(2k_1 + 6, k_1 \geq 2)$ [et comme $d_P(\alpha, y_1) \geq 2$] et toutes ces cordes sont incidentes au sommet β .

Ce qui constitue une contradiction avec l'hypothèse G ne contient pas de cycle de longueur au moins $(2k_1 + 6, k \geq 2)$ ayant toutes ces cordes concourantes.

Si $d_P(\alpha, y_1) = d_Q(\alpha', y_1) - (2k_1 - 1)$.

Considérons les deux $\{x, y\}$ -chaînes P' et Q' définies par: $P' = P(\alpha, y_1)$ et $Q' = \{\alpha, \alpha'\} \cup Q(\alpha', y_1)$. Les deux chaînes P' et Q' satisfont les hypothèses de récurrence et, de plus $|P' \cup Q'| < |P \cup Q|$. Une contradiction avec la minimalité de $p \cup Q$.

Si $d_P(\alpha, y_1) > d_Q(\alpha', y_1) - (2k_1 - 1)$, alors $d_Q(u, \alpha') > d_P(u, \alpha) + 1$, par suite $d_P(\alpha, y_1) \geq d_Q(\alpha', y_1) + 3$,



Figure 4.7.

Posons $P' = P(u, \alpha) \cup \{\alpha, \alpha'\} \cup Q(\alpha', y_1) \cup P(y_1, v)$. P' et Q satisfont les hypothèses de départ et $|P' \cup Q| < |P \cup Q|$, une contradiction avec l'hypothèse de minimalité (Δ). \square

Remarque 4.3. Si G est dans $\mathcal{B}(k, +)$, alors nécessairement G est dans k -dh. Si G est dans $\mathcal{B}(k, +)$, également G est un graphe $2k$ -dh.

Conclusion générale

Les graphes distance-héréditaire sont des graphes dans lesquels toute chaîne induite est isométrique, ont été introduits par Howorka [33], qui avait donné la première caractérisation en termes de sous-graphes interdits, puis étudiés métriquement par Bandelt et Mulder [4.]

Dans cette thèse, nous avons étudié quelques classes de graphes constituant une extension paramétrique des graphes distance-héréditaire. Dans ce cadre et au long de chapitre trois, nous nous sommes intéressés aux graphes presque distance-héréditaire bipartis, introduits par Aïder [3], qui a donné une caractérisation en termes de sous-graphes interdits. Par la suite, nous avons pu résoudre le problème de reconnaissance de ces graphes en développant deux algorithmes polynomiaux. Nous avons donné aussi une condition métrique suffisante en utilisant la condition des quatre points par qu'un graphe connexe biparti soit un graphe presque distance-héréditaire biparti.

Tandis que, la quatrième chapitre est consacrée aux graphes distance-héréditaire bipartis d'ordre k ($k \geq 2$) noté $\mathcal{B}(k, +)$ définit comme suite : toute $\{u, v\}$ -chaîne induite est de longueur au plus égale à $d(u, v) + 2k$. Nous avons étudié ces graphes en donnant quelques configurations interdites. Les différentes recherches motivant pour étudier les classes de graphes distance-héréditaire ont aboutis à des résultats très importants.

Cependant, il est nécessaire de noter que certains problèmes demeurent non résolus généralement dans ces graphes et particulièrement dans les graphes que nous avons abordés

dans notre travail. Pour cela, nous proposons d'étudier comme perspectives les problèmes suivants :

Aïder [3] avait donné la caractérisation des graphes presque distance héréditaire bipartis en termes de sous-graphes interdits. Nous proposons alors de donner d'autres caractérisations en utilisant par exemple les opérations constructives de graphes et la condition des quatre points.

Nous avons étudié les graphes presque distance-héréditaire bipartis, pour lesquels nous avons donné une propriété métrique partielle, il serait donc intéressant d'obtenir une caractérisation métrique totale de ces graphes.

Nous avons aussi traité dans cette thèse, les graphes distance-héréditaire bipartis d'ordre k ($\mathcal{B}(k, +)$), pour lesquels nous avons donné une caractérisation en termes de sous-graphes interdits. Il serait donc intéressant d'améliorer et de compléter l'étude de cette classe en donnant par exemple une caractérisation par construction de ces graphes, et une caractérisation métrique.

Il serait intéressant d'obtenir une caractérisation des graphes (s, d) -distance-héréditaire (voir définition 2.21.) par construction, par sous-graphes induits interdits, comme il serait également intéressant de donner une caractérisation métrique complète de ces graphes.

Bibliographie

- [1] M. Aïder, sur quelques Structures Combinatoires, thèse de Doctorat USTHB, soutenue en Mars 1999.
- [2] M. Aïder, Almost Distance-Hereditary Graphs, *Discrete Mathematics* 242 (2002) 1- 16.
- [3] M. Aïder, Bipartite Almost Distance-Hereditary Graphs, Soumis.
- [4] H. J. Bandelt and H. M. Mulder, Distance Hereditary Graphs, *J. Combin, Series B41*, (1986) 182- 208.
- [5] H. J. Bandelt, A. D'Arti, M. Moscarini, H. M. Mulder and A. Schultze, Operations in Distance-Hereditary Graphs, Technical Report 226 CNR (Rome, Italy), 1988.
- [6] H. J. Bandelt and H. M. Mulder, Metric Characterization of Parity Graphs, *Discrete Mathematics* 91 (1999) 221- 230.
- [7] C. Berge, *Graphs*, Dunod, Paris, 1983.
- [8] M. Bessedik, Sur quelques Propriétés Métriques des Graphes, Thèse de Magister USTHB, soutenue en Décembre 1997.
- [9] A. Bouchet, Transforming Trees by Successive Complementation, *J. Graph Theory*. 4 (1988) 196- 207.
- [10] A. Brandstädt, F. F. Dragan , A Linear-Time Algorithm for Connected r -Domination and Steiner Tree on Distance-Hereditary Graphs. *Net Works* 31 (3), 177-182 (1998)
- [11] A. Brandstädt, F. F. Dragan and F. Nicolăi, Homogeneously Orderable Graphs, *Theoretical Computer Science*. 172 (1997) 209- 232.
- [12] F. Buckley and F. Harary, *Distance in Graphs*, Addison-Wesley Edition, (1990).
- [13] M. Burlet and J.P. Uhry, Parity Graphs, *Annals of Discrete Math*. 50 (1984) 99- 105.
- [14] M.S. Chang, S.C.Wu, G.J.Chang, and H.G. Yeh, Domination in Distance-Hereditary Graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 116: 103-113, 2002.
- [15] G.H. Chen, S.Y.Hseinh, C.W. Ho, T.S. Tsu, and M.T. Ko, Efficient Parallel Algorithms on Distance-Hereditary Graphs, *International Conference on Parallel processing* 1999.
- [16] S. Cicerone and G. Di Stefano, On the Extension of Bipartite to Parity Graphs, *Discrete Applied Mathematics*. 95 (1999) 181- 195.
- [17] S. Cicerone and G. Di Stefano, Graphs classes between Parity and Distance-hereditary Graphs, *Discrete Applied Mathematics*. 95 (1999) 197- 216.

-
- [18] S. Cicerone and G. Di Stefano, Graphs with Bounded Induced Distance, *Discrete Applied Mathematics*. 108 (2001) 3- 21.
- [19] S. Cicerone and G. Di Stefano, Networks with Small Stretch Number, *J. of Discrete Algorithms*.2 (4): 383-405, December 2004.Elsevier Science.
- [20] S. Cicerone and G. Di Stefano, $(K,+)$ Distance Hereditary Graphs, *J. of Discrete Algorithms* Vol 1, Issue 3-4 (June 2003) 281-302.
- [21] S.A. Cook, The Complexity of Theorem-Proving Procedures; Proc. 3rd Ann.ACM Symp. On Theory of Computing, Association of Computing Machinery, New York; PP:151-158; 1971.
- [22] D. G. Corneil, H. Lerchs and L. Stewart-Burlingham, Completely Reducible Graphs, *Discrete Applied Mathematics*. 3 (1981) 163- 174.
- [23] A. D'arti and M. Moscarini, Distance Hereditary Graphs, Steiner Tree and Connected Domination, *SIAM Journal on Computing*. 17 (1988) 521- 530.
- [24] A. D'Arti, M. Moscarini and H. M. Mulder, On the Isomorphism Problem for Distance-Hereditary Graphs, Report 9241/ A Econometric Institute. Erasmus University Rotterdam (1988).
- [25] D. P. Day, O. R. Oellermann and H. C. Swart, Steiner Distance Hereditary Graphs, *SIAM J. Discrete Math* Vol 7 N° 3 (1994) 437- 442.
- [26] D. P. Day, O. R. Oellermann and C. Swart, A Characterization of 3 Steiner Distance Hereditary Graphs, *Networks* (1997) 243- 253.
- [27] F. F. Dragan, Dominating Cliques in Distance-Hereditary Graphs, in 4th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT'94), Lecture Note in Computer Science, Vol 824, eds. EM. Smit, Skyum, Springer, Berlin (1994) 370- 381.
- [28] J.Edmonds; Paths, Trees and Flowers, *Cand.J.Math.* 17; pp: 449-467; 1965.
- [29] C. P. Gabor, W. L. Hsu and K. J. Supwit, Recognizing Circle Graphs in Polynomial Time. Proc, 26th IEEE Symp, On Foundations of Computer Science. (1985) 106- 116.
- [30] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman 1979.
- [31] M.Habib and C. Paul, A Simple Linear Time Algorithm for Cograph Recognition, *Discret Applied Mathematics*, Vol 145, ISSUE 2, (Janvier 2005) 183-197.
- [32] P. L. Hammer and F. Maffray, Completely Separable Graphs, *Discrete Applied Mathematics*. 27 (1990) 85- 99.
- [33] F. Harray, *Graph Theory*, Academic Press New York and London 1969.
- [34] E. Howorka, A Characterization of Distance Hereditary Graphs, *Quart. J. Math. Oxford* (2).28 (1977) 417- 420.

-
- [35] E. Howorka, On metric Properties of Certain Clique Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Serie. B* 27 (1979) 67-74.
- [36] E. Howorka, A Characterization of ptolemaic Graphs, *J. Graph Theory* 5 (1981) 323- 331.
- [37] R.M. Karp, Reductibility Among Combinatorial Problems; in R.E. Miller and J.W. Thatcher(eds); *Complexity of Computer Computations*; Plenum Press; New York; pp: 85-103; 1972.
- [38] D. C. Kay and G. Chartrand, A Characterization of certain Ptolemaic Graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, 17 (1965) 342- 346.
- [39] K. Meslem, Distances dans les Graphes et Préservations, Thèse de Magistère USTHB, soutenue en Juin 2003.
- [40] H. Mulder, The Interval Function of Graphs, MCT 132, Math. Centrum, Amesterdam 1980.
- [41] F. Nicolai, Hamiltonian Problem on Distance-Hereditary Graphs. Technical report SMDU_ 264, University Duisburg 1994.
- [42] F. Nicolai and T. Szymczak, Homogeneous Sets and Domination: A Linear Time Algorithm for Distance- Hereditary Graphs, *Networks* Vol. 37 (3) (2001) 117- 128.
- [43] D. Rautenbach, Proof of a Conjecture on Graphs with Bounded Induced Distance, manuscript (2002).
- [44] D. Rautenbach, Graphs with Small Additive Stretch Number, *Discussiones Mathematicae. Graph Theory* 24 (2004) pp: 291-301.
- [45] D. P. Sumner, Dancy Graphs, *J. Austral. Math. Soc.* 18 (4) (1974) 492- 502.
- [46] R. Uehara and Y. Uno, On the Laminar Structure of Ptolemaic and Distance-Hereditary Graphs, *Scientific Research on Priority Areas , New Horizonsn in Computing-*, mini-seminar, Nihon University, Fevrier 2005.
- [47] H. G. Yeh and G. J. Chang, Weighted Connected Domination and Steiner Tree In Distance-Hereditary Graphs, *Discrete Applied Mathematics* 87 (1998) 245- 253.