N° d'ordre : **11/2010-M/MT**

République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie

Par : Nassim Siad

Thème

CONNEXION EN GEOMETRIE DE POISSON

Soutenu publiquement le 21/10/2010 à 10H30, devant le jury composé de :

Mr. K. BETINA	**Professeur à l'USTHB**	**Président**
Mr. A. AFFANE	**Maitre de conférences A à l'USTHB**	**Encadreur**
Mr. B. ABBACI	**Maitre de conférences B à l'USTHB**	**Examinateur**
Mr. M. DEFFAF	**Maitre de conférences B à l'USTHB**	**Invité**

Contents

Introduction

Les notions de fibration, fibré et de connexion sont au centre des théories modernes géométriques, topologiques et de physique théorique. Ces notions sont devenues des outils indispensables dans nombres de théories mathématiques contemporaines.

Les structures géométriques peuvent être divisées en deux catégories: singulières et régulières. Pour les structures régulières tous les points sont équivalents et l'on peut les comparer via l'outil "connexion". Pour les structures singulières il y a plus de nuances dans le fait que les points ne sont pas équivalents. On doit prendre plus de précautions en les comparant. L'avantage des connexions qu'on va introduire est qu'elles permettent de donner un cadre pratique pour faire aussi bien l'analyse locale (comparer les points) que l'analyse globale (comparer les géométries de deux ensembles).

Une algébroïde de Lie est un fibré vectoriel ayant une certaine similitude avec le fibré tangent d'une variété et les algèbres de Lie. Ceci permet de développer pour les algébroïdes de Lie les notions de dérivée de Lie et de différentielle extérieure avec des formules analogues à celles de Cartan. Ce sera l'objet de la première partie.

La structure d'algébroïde de Lie est en forte interaction avec les structures de Poisson, elle la généralise en un certain sens et le dual d'une algébroïde de Lie a une structure de Poisson naturelle qui encode toute la structure de l'algébroïde de Lie. Elle engendre un feuilletage caractéristique qui dans le cas des variétés de Poisson coïncide avec le feuilletage symplectique. Les morphismes d'algébroïdes de Lie peuvent être définies en termes de morphismes de Poisson.

On définit les A-connexions sur les fibrés principaux, on étudie leurs principales propriétés. On définit les A-connexions linéaires par le transport parallèle. À la fin on démontre un théorème de stabilité pour le feuilletage caractéristique qui généralise le théorème de stabilité de Reeb pour les feuilletages réguliers. Il s'applique en particulier pour le feuilletages définies par la géométrie de Poisson et par les actions infinitésimales de algèbres de Lie.

Le cas holomorphe est étudié en détails dans l'article [10] où on s'inspire du cas réel pour définir les structures de Poisson holomorphes. Une telle structure est un champ de bivecteur holomorphe qui vérifie les mêmes conditions que dans le cas réel. En décomposant un tenseur de Poisson holomorphe on obtient une partie réelle et une partie imaginaire qui sont des tenseurs de Poisson réels. Cependant, pour que deux tenseurs de Poisson réels soient les parties imaginaire et réelle d'une structure de Poisson holomorphe il faut et il suffit qu'ils vérifient des conditions qui s'éxpriment en terme de structures de Poisson-Nijenhuis. Les algébroïdes de Lie holomorphes peuvent être définies par les structures de Poisson holomorphes.

Tous les objets considérés dans ce mémoire sont supposés de classe C^∞. Dans la suite les variétés sont réelles séparées et dénombrables à l'infini, ce qui assure l'éxistence de partitions de l'unité.

La primière partie est basé sur [1], la seconde sur [2].

Part 1. **Calcul différentiel dans les algébroïdes de Lie**

1. Rappels et compléments

Nous entamons notre travail par quelques rappels sur les algèbres graduées et les fibrés vectoriels. Les espaces vectoriels dans ce travail sont sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. **Algèbres $\mathbb{Z}$-graduées.**

Définition 1.1.1. *(Espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués)*

Un espace E vectoriel est dit $\mathbb{Z}$-gradué s'il existe une famille $\{E^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de sous espaces vectoriels de E telle que

$$E = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} E^P.$$

Chaque E^p est dit sous espace des éléments homogènes de degré p.

Soient $E = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} E^p$ et $F = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} F^p$ deux $\mathbb{k}$ espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués. On dit qu'une application linéaire $f : E \to F$ est homogène de degré $d \in \mathbb{Z}$ si

$$\forall p \in \mathbb{Z} : f(E^p) \subset F^{p+d}.$$

Exemple 1.1.1. *Espace $\mathbb{k}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{k}$*

Posons $E^P := \mathbb{k}.X^p$ pour $p \geq 0$ et $E^P := 0$ si $p < 0$. Alors $\mathbb{k}[X] = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} E^P$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué. La dérivation usuelle des polynômes est un endomorphisme homogène de degré -1 de $\mathbb{k}[X]$.

Définition 1.1.2. *(Algèbres $\mathbb{Z}$-graduées)*

Un espace vectoriel $A = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} A^p$ muni d'un produit bilinéaire associatif $b(x, y) = x.y$ est appelé algèbre $\mathbb{Z}$-graduée si pour tout élément homogène x de degré p, l'application $b(x, .)$ est homogène de degré p, i.e.

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}; \forall x \in A^p, \forall y \in A^q : \ x.y \in A^{p+q}.$$

Une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée $A = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} A^p$ est dite $\mathbb{Z}$-commutative lorsque:

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}; \forall x \in A^p, \forall y \in A^q : xy = (-1)^{pq} yx.$$

Elle est dite $\mathbb{Z}$-anticommutative lorsque:

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}; \forall x \in A^p, \forall y \in A^q : xy = -(-1)^{pq} yx.$$

Exemple 1.1.2. *Algèbre $\mathbb{Z}$-graduée des endomorphismes homogènes:*

Soit $E = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} E^P$ un $\mathbb{k}-$espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué. Pour tout entier d, on note A^d le sous-espace de $End(E)$ constitué des endomorphismes homogènes de degré d. Posons

$$A = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} A^p.$$

Muni de la composition des applications, A devient une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée.

1.2. **Algèbres de Lie $\mathbb{Z}$-graduées, dérivations.**

Définition 1.2.1. *(Algèbres de Lie $\mathbb{Z}$-graduées)*

Une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée est une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée $\mathcal{G} = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} \mathcal{G}^p$,dont la loi de composition notée $[.,.]$ vérifie: pour tout $\forall x \in \mathcal{G}^p, \forall y \in \mathcal{G}^q, \forall z \in \mathcal{G}^r$;

$$[x, y] = -(-1)^{pq}[y, x] \ (\mathbb{Z}\text{-anticommutativité})$$

et l'identité de Jacobi graduée:

$$(-1)^{pr}[x, [y, z]] + (-1)^{qp}[y, [z, x]] + (-1)^{rq}[z, [x, y]] = 0.$$

Un morphisme d'algèbres de Lie $\mathbb{Z}$-graduées est un morphisme d'espace vectoriels $\mathbb{Z}$-graduées compatible avec les crochets.

Exemple 1.2.1. *Algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée associée à une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée:*

Étant donnée une algèbre associative $\mathbb{Z}$-graduée $A = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} A^p$ dont le produit est noté $x.y$, on définit un second produit en posant pour tout $x \in A^p, y \in A^q$

$$[x, y] = x.y - (-1)^{pq} y.x.$$

Ce produit, dit **crochet gradué**, fait de A une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée.

Exemple 1.2.2. *Algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée des endomorphismes homogènes:*

En particulier si $E = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} E^P$ est un $\Bbbk-$espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué et A^d le sous-espace de $End(E)$ constitué des endomorphismes homogènes de degré d

$$A = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} A^p.$$

est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée pour le crochet gradué.

Définition 1.2.2. *(Dérivations)*

Une dérivation d'ordre $d \in \mathbb{Z}$ d'une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée $A = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} A^p$ est un endomorphisme θ de A homogène de degré d et vérifiant la règle de Leibniz: $\forall p \in \mathbb{Z}; \forall x \in A^p, \forall y \in A;$

$$\theta(xy) = \theta(x)y + (-1)^{pd} x\theta(y).$$

On notera $D^d(A)$ l'espace des dérivations d'ordre d de l'algèbre graduée A. C'est un sous-espace vectoriel de $End(A)$.

Exemple 1.2.3. *Les dérivations intérieures d'une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée:*

À tout élément x d'une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée $\mathcal{G} = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} \mathcal{G}^p$, on associe l'endomorphisme ad_x de $\mathcal{G}$ défini par

$$ad_x(y) = [x, y].$$

Nous allons voir que si x est dans A^p, ad_x est une dérivation d'ordre p. En effet, pour tout $y \in \mathcal{G}^q, \forall z \in \mathcal{G}^r$ l'identité de Jacobi graduée s'écrit

$$(-1)^{pr} ad_x([y, z]) - (-1)^{qp+rp}[y, ad_x(z)] - (-1)^{rq+r(p+q)}[ad_x(y), z] = 0,$$

ou encore

$$ad_x([y, z]) = [ad_x(y), z] + (-1)^{qp}[y, ad_x(z)],$$

ce qui signifie que ad_x est une dérivation d'ordre p de A. Observons que l'identité ci-dessus se traduit par: $\forall x \in \mathcal{G}^p, \forall y \in \mathcal{G}^q$

$$ad_{[x,y]} = ad_x \circ ad_y - (-1)^{qp} ad_y \circ ad_x.$$

Exemple 1.2.4. *ad est un morphisme d'algèbres $\mathbb{Z}$-graduées:*

Si l'on considère $\mathcal{A} = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} \mathcal{A}^p$ où $\mathcal{A}^p$ est l'espace des endomorphismes homogènes de degré p d'une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée $A = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} A^p$ et que l'on munit $\mathcal{A}$ du crochet graduée alors $x \longmapsto ad_x$ est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathbb{Z}$-graduées de $A = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} A^p$ sur $\mathcal{A} = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} \mathcal{A}^p$.

Exemple 1.2.5. *L'algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée des dérivations d'une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée:*

Soit $A = \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus} A^p$ une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée dont le produit est noté $x.y$, et $D^d(A)$ l'ensemble de ses dérivations d'ordre $d \in \mathbb{Z}$, c'est un sous espace vectoriel de l'espace des endomorphismes homogènes de degré d de A. Considérons

$$D(A) = \underset{d\in\mathbb{Z}}{\oplus} D^d(A),$$

muni du crochet gradué des endomorphismes. Vérifions que $D(A)$ devient une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée: pour la $\mathbb{Z}$-anticommutativité et l'identité de Jacobi $\mathbb{Z}$-graduée c'est trivial. Il suffit d'établir la règle de Leibniz graduée. Soient $\theta \in D^d(A), \rho \in D^r(A)$; leur crochet est défini par:

$$[\theta, \rho] = \theta \circ \rho - (-1)^{dr} \rho \circ \theta.$$

On sait que $[\theta, \rho]$ est homogène de degré $d + r$. Vérifions que pour tout $x \in A^p, y \in A$

$$[\theta, \rho](x.y) = [\theta, \rho](x).y + (-1)^{dr} x.[\theta, \rho](y).$$

En fait, on a

$$\theta \circ \rho(x.y) = \theta(\rho(x.y)) = \theta(\rho(x).y + (-1)^{pr} x.\rho(y))$$

$$= \theta \circ \rho(x).y + (-1)^{(r+p)d} \rho(x).\theta(y) + (-1)^{pr} \theta(x).\rho(y) + (-1)^{pr+pd} x.\theta \circ \rho(y).$$

On a aussi

$$(-1)^{dr} \rho \circ \theta(x.y) = (-1)^{dr} \rho \circ \theta(x).y$$

$$+(-1)^{(d+p)r+dr} \theta(x).\rho(y) + (-1)^{pd+dr} \rho(x).\theta(y) + (-1)^{pr+pd+dr} x.\rho \circ \theta(y).$$

Ainsi

$$[\theta, \rho](x.y) = \theta \circ \rho(x).y - (-1)^{dr} \rho \circ \theta(x).y + (-1)^{pr+pd} x.\theta \circ \rho(y)$$

$$-(-1)^{dr}.(-1)^{pr+pd}.x.\rho \circ \theta(y) = [\theta, \rho](x).y + (-1)^{p(r+d)} x.[\theta, \rho](y).$$

c.à.d que $[\theta, \rho]$ est une dérivation d'ordre $d + r$.

1.3. **Fibrés vectoriels.**

Définition 1.3.1. *(Fibré vectoriel)*

Soit M une variété lisse de dimension n. Un fibré vectoriel de dimension k sur M est la donnée d'une variété lisse E et d'une application lisse $\pi : E \to M$ telles que: pour tout $p \in M$;

(1) *$\pi^{-1}(p)$ est une espace vectoriel réel de dimension k,*
(2) *il existe U voisinage ouvert de p dans M et un difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ de la forme*

$$\phi(\mu) = (\pi(\mu), \varphi(\mu))$$

tel que la restriction de ϕ aux fibres soit un isomorphisme linéaire.

Un tel fibré vectoriel sera noté par le triplet (E, π, M).

Si U est un ouvert (ou une sous-variété plongé) de M, il est facile de voir que $(\pi^{-1}(U), \pi_{|\pi^{-1}(U)}, U)$ est un fibré vectoriel de même dimension sur U.

Soit U un ouvert de M et (E, π, M) est un fibré vectoriel de dimension k,on appelle section de ce fibré au dessus de U toute application lisse $\sigma : U \to E$ telle que

$$\pi \circ \sigma = id_U$$

On note l'ensemble de ces sections par $\Gamma(U, E)$, cet ensemble est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et un $\mathcal{C}^\infty(U)$–module.

Si U est le domaine d'une trivialisation $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, alors pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^k$ l'application $\sigma_v : U \to E$ définie par

$$\sigma_v(p) = \phi^{-1}(p, v)$$

est une section de (E, π, M) au dessus de U.

(E, π, M) est un fibré vectoriel de dimension k. Un **repère** de E au dessus d'un ouvert U de M est une famille de sections $\sigma_1, ..., \sigma_k$ de $\Gamma(U, E)$, telles que: $(\sigma_1(p), ..., \sigma_k(p))$ est une base de $E_P, \forall p \in U$.

Remarque 1.3.1. *Il existe un repère au voisinage de chaque point.*

En effet, si $p \in M$ et U est un voisinage ouvert de p domaine d'une trivialistion $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, à partir d'une base $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^k$ formons les sections

$$\sigma_i(x) = \phi^{-1}(x, e_i); 1 \leq i \leq k.$$

On obtient un repère au dessus de U. Ainsi toute section $\sigma \in \Gamma(U, E)$ s'écrit de manière unique

$$\sigma = \sum_{1 \leq i \leq k} f^i.\sigma_i, f^i \in \mathcal{C}^\infty(U) \text{ pour tout } i.$$

Soit (E, π, M) un fibré vectoriel de dimension k. On considère l'ensemble

$$E^* := \{(x, \alpha); x \in M, \alpha \in E_x^*\};$$

alors E^* est une variété lisse, sa structure différentielle est construite de manière canonique, et la projection naturelle

$$\varpi : E^* \to M$$

nous donne un fibré vectoriel de dimension k.

Si U est domaine d'une trivialistion $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ et $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ est un repère au dessus de U, alors l'application $\Psi : \varpi^{-1}(U) \to M$ définie par

$$\Psi(x, \alpha) = (x, (\alpha^1, ..., \alpha^k)),\ \alpha^i = \alpha(\sigma_i(x))\ \forall i$$

est une trivialisation au dessus de U. On note $\sigma^i = \Psi^{-1}(., e_i)$ où e_i est le $i^{iéme}$ vecteur coordonnée de $\mathbb{R}^k$, d'après ce qui précéde on voit que $(\sigma^1, ..., \sigma^k)$ est un repère de (E^*, ϖ, M) qu'on appelle le **repère dual** du repère $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$.

1.4. **Un peu d'algébre multilinéaire.**

Définition 1.4.1. *(Forme multilinéaires)*

Si V est un $\Bbbk-$espace vectoriel de dimension finie; on note $\Lambda^p V^*$ pour $p \in \mathbb{N}$; l'espace vectoriel des applications

$$\alpha : \underbrace{V \times ... \times V}_{p-fois} \to \Bbbk$$

qui sont multilinéaires et antisymétriques. Une telle application sera appelé un p-tenseur covariant antisymétrique, $\Lambda^p V^*$ est appelé espace des **p-formes** de V.

Remarque 1.4.1. *On pose par convention* $\Lambda^p V^* = \Bbbk$ *lorsque* $p = 0$ *et* $\Lambda^p V^* = 0$ *lorsque* $p < 0$.*On sait que lorsque* $\dim V = n$ *alors* $\dim \Lambda^p V^* = \binom{n}{p}$.

Définition 1.4.2. *(Produit extérieur)*

On définit le produit extérieur de $\xi \in \Lambda^p V^*$ et de $\eta \in \Lambda^q V^*$ que l'on note $\xi \wedge \eta$ comme étant l'élément de $\Lambda^{p+q} V^*$ défini pour tout $X_1, ..., X_{p+q} \in V$

$$\xi \wedge \eta(X_1, ..., X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sg(\sigma).\xi(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(p)}).\eta(X_{\sigma(p+1)}, ..., X_{\sigma(p+q)})$$

On notera $\Lambda V^* = \underset{p \in \mathbb{Z}}{\oplus} \Lambda^p V^*$, c'est un $\Bbbk-$espace vectoriel. On prolonge le produit extérieur à tout ΛV^* par bilinéarité. Le produit extérieur munit ΛV^* d'une structure d'algèbre $\mathbb{Z}$-graduée, $\mathbb{Z}-$commutative.

Définition 1.4.3. *(Multivecteurs)*

De même on considère pour $p \in \mathbb{Z}$: $\Lambda^p V$ l'espace vetoriel des appliacations

$$f : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{p-fois} \to \Bbbk$$

qui sont multilinéaires et anitisymétriques, une telle application sera appelé un p-tenseur contravariant antisymétrique. $\Lambda^p V$ est appelé espace des **p-multivecteurs** de V.

On définit le produit extérieur de $X \in \Lambda^p V$ et de $Y \in \Lambda^q V$ noté $X \wedge Y$ comme étant l'élément de $\Lambda^{p+q} V$ défini comme dans le cas covariant. On notera $\Lambda V = \underset{p \in \mathbb{Z}}{\oplus} \Lambda^p V$, c'est un $\Bbbk-$espace vectoriel. On prolonge le produit extérieur à tout ΛV par bilinéarité. Ainsi le produit extérieur munit ΛV d'une structure d'algèbre associative $\mathbb{Z}$-graduée et $\mathbb{Z}-$commutative.

Définition 1.4.4. *(Le produit intérieur d'une forme par un vecteur)*

Si V est un $\Bbbk-$espace vectoriel, $X \in V$, on définit pour tout $\xi \in \Lambda^p V^*$ la $(p-1)$-forme $X \rfloor \xi$ qui associe à tout $X_1, ..., X_{p+q} \in V$

$$X \rfloor \xi(X_1, ..., X_{p-1}) = \xi(X, X_1, ..., X_{p-1})$$

on note $X \rfloor \xi$ par $\imath(X).\xi$, on prolonge $\imath(X)$ à tout ΛV^* par $\Bbbk-$linéarité.

Remarque 1.4.2. *Le produit intérieur des formes par un vecteur est une dérivation d'ordre -1 de l'algèbre extérieure graduée, autrement dit pour tout $X \in V$, pour tout $\xi \in \Lambda^p V^*, \eta \in \Lambda V^*$*

$$X \rfloor (\xi \wedge \eta) = (X \rfloor \xi) \wedge \eta + (-1)^p \xi \wedge (X \rfloor \eta).$$

Définition 1.4.5. *(Dualité entre ΛV et ΛV^*)*

Pour tout $p \geq 1$, $\xi \in \Lambda^p V^*$, $v \in \Lambda^p V$. On définit $\langle \xi, v \rangle$ comme suit:

Dans le cas décomposable: i.e. quand $\xi = \xi^1 \wedge ... \wedge \xi^p$ et $v = v_1 \wedge ... \wedge v_p$ sont décomposables; où $\xi^i \in V^*$, $v_j \in V$ on définit

$$\langle \xi, v \rangle = det(\xi^i.v_j)_{1 \leq i,j \leq p}.$$

Cette quantité ne dépend pas de la manière dont ξ et v sont décomposées et ne dépend que de ξ et de v.

Dans le cas homogène: soient $p, q \in \mathbb{Z}$, $\xi \in \Lambda^p V^*$, $v \in \Lambda^q V$ on définit $\langle \xi, v \rangle$ par

si $p < 0$ ou $q < 0$ ou $p \neq q : \langle \xi, v \rangle = 0$;

si $p = q = 0 : \langle \xi, v \rangle = \xi.v$

Enfin, on prolonge ça par bilinéarité à tout ΛV et ΛV^*.

Remarque 1.4.3. *Si $\xi \in \Lambda^p V^*, v = v_1 \wedge ... \wedge v_p \in \Lambda^p V$ alors*

$$\langle \xi, v \rangle = \xi(v_1, ..., v_p).$$

Définition 1.4.6. *(Le produit intérieur d'une forme par un multivecteur)*

On a vu le produit intérieur d'un élément de ΛV^* par un élément de $\Lambda^1 V = V$. On va étendre celà à tout ΛV comme suit:

Si $P \in \Lambda^p V$, on définit $\imath(P) : \Lambda V^* \to \Lambda V^*$ par :

si $p \geq 1$: on suppose que P est décomposable, il existe donc $P_1, ..., P_p \in \Lambda^1 V = V$ tels que $P = P_1 \wedge ... \wedge P_p$,on pose alors

$$\imath(P) = \imath(P_1) \circ ... \circ \imath(P_p),$$

$\imath(P)$ ne dépend pas de la manière dont P est décomposé. On prolonge par linéarité dans le cas où P n'est pas décomposable,

si $p < 0 : \imath(P) = 0$,

si $p = 0 : \imath(P).\eta = P.\eta, \forall \eta \in \Lambda V^*$.

On prolonge $\imath(P)$ à tout ΛV^* par linéarité.

Remarque 1.4.4. *Si $p \geq 1$, $P \in \Lambda^p V$, alors $\imath(P)$ est un endomorphisme homogène d'ordre $-p$ de ΛV^*. Mais ce n'est pas toujours une dérivation.*

Par définition du produit intérieur on a

$$\imath(P \wedge Q) = \imath(P) \circ \imath(Q)$$

Proposition 1.4.1. *Produit intérieur et dualité*

Si $P \in \Lambda^p V$ et $\xi \in \Lambda^p V^*$ on a:

$$\imath(P).\xi = (-1)^{p\frac{(p-1)}{2}} \langle \xi, P \rangle .$$

Preuve:

En effet il suffit de le voir quand P est décomposable. Si $P = P_1 \wedge ... \wedge P_p$ alors

$\imath(P).\xi = (\imath(P_1) \circ ... \circ \imath(P_p)).\xi \; = \xi(P_P, ..., P_1) = (-1)^{p\frac{(p-1)}{2}}.\xi(P_1, ..., P_p).$♠

Plus généralement on a $\forall P \in \Lambda^p V, \forall Q \in \Lambda^q V, \forall \xi \in \Lambda^{p+q} V^*$,

$$\langle \imath(P).\xi, Q \rangle = (-1)^{p\frac{(p-1)}{2}} \langle \xi, P \wedge Q \rangle .$$

Il suffit d'établir celà lorsque $P = P_1 \wedge ... \wedge P_p$ et $Q = Q_1 \wedge ... \wedge Q_q$ sont décomposables.

$$\begin{aligned}
\langle \imath(P).\xi, Q \rangle &= \langle \xi(P_P, ..., P_1, ...), Q_1 \wedge ... \wedge Q_q \rangle \\
&= \left\langle (-1)^{p\frac{(p-1)}{2}}.\xi(P_1, ..., P_p, ...), Q_1 \wedge ... \wedge Q_q \right\rangle \\
&= (-1)^{p\frac{(p-1)}{2}}.\xi(P_1, ..., P_{p,} Q_1, ..., Q_q) \\
&= (-1)^{p\frac{(p-1)}{2}} \langle \xi, P_1 \wedge ... \wedge P_p \wedge Q_1 \wedge ... \wedge Q_q \rangle \\
&= (-1)^{p\frac{(p-1)}{2}} \langle \xi, P \wedge Q \rangle
\end{aligned}$$

On exprime cette égalité en disant que le produit intérieur est au signe près transposé du produit extérieur.

1.5. **Algèbres extérieures associées à un fibré vectoriel.** Soit M est une variété lisse, (E, π, M) est un fibré vectoriel de dimension k.

Algèbre extérieure des formes:

Pour tout $x \in M$, E_x est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension k; on peut considérer $\Lambda^p E_x^*$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Soit

$$\Lambda^p E^* := \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^p E_x^*$$

alors $\Lambda^p E^*$ est une variété lisse dont la structure différentielle est construite de manière canonique. $\Lambda^p E^*$ s'identifie à

$$\{(x, w); x \in M, w \in \Lambda^p E_x\}.$$

C'est un fibré vectoriel de dimension $\binom{p}{k}$ et on note $\pi : \Lambda^p E \to M$ sa projection canonique.

Définition 1.5.1. *Si U est un ouvert de M, on note l'ensemble des sections du fibré $\pi : \Lambda^p E^* \to M$ au dessus de U par $\Omega^p(U, E^*)$. On appelle ses éléments les p-formes de U.*

En particulier, si U est un ouvert de trivialisation et $(\sigma^1, ..., \sigma^k)$ est un repère de (E, π, M) au dessus de U, alors $\alpha \in \Omega^p(U, E^*)$ s'écrit localement:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, < ... < i_p \leq k} \alpha_{i_1 ... i_p}.\sigma^{i_1} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p}, \text{ où } \alpha_{i_1 ... i_p} \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Si $p, q \in \mathbb{Z}, \alpha \in \Omega^p(M, E^*), \beta \in \Omega^p(M, E^*)$ on définit $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}(M, E^*)$ par

$$(\alpha \wedge \beta)(x) := \alpha_x \wedge \beta_x, \forall x \in M.$$

On voit que c'est une section lisse en utilisant l'écriture locale.

On considère la somme directe

$$\Omega(M,E^*) := \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus}\Omega^p(M,E^*).$$

C'est une algèbre réelle $\mathbb{Z}$-graduée, associative et $\mathbb{Z}-$commutative pour le produit extérieur des formes. On l'appelle l'algèbre extérieure des formes. C'est aussi un module $\mathbb{Z}$-gradué sur l'anneau $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Algèbre extérieure des multivecteurs:

Pour tout $x \in M$ et $p \in \mathbb{Z}$, on peut considérer $\Lambda^p E_x$ puis

$$\Lambda^p E := \underset{x\in M}{\sqcup}\Lambda^p E_x.$$

$\Lambda^p E$ est une variété lisse dont la structure différentielle est construite de manière canonique. $\Lambda^p E$ s'identifie à

$$\{(x,w); x\in M, w\in \Lambda^p E_x\}$$

C'est un fibré vectoriel de dimenion $\binom{p}{k}$ et on note $\varpi : \Lambda^p E \to M$ sa projection canonique.

Si U est un ouvert de M, on note l'ensemble des sections du fibré $\varpi : \Lambda^p E \to M$ au dessus de U par $\chi^p(U,E)$. On appelle ses éléments les p-multivecteurs de U.

En particulier, si U est un ouvert de trivialisation et $(\sigma_1,...,\sigma_k)$ est un repère de (E,π,M) au dessus de U,alors $P\in\chi^p(U,E)$ s'écrit localement:

$$P = \sum_{1\le i_1,<...<i_p\le k} P^{i_1...i_p}.\sigma_{i_1}\wedge ... \wedge \sigma_{i_p},\ \text{où } P^{i_1...i_p}\in\mathcal{C}^\infty(U)$$

Si $p,q\in\mathbb{Z}, P\in\chi^p(M,E), Q\in\chi^q(M,E)$ on définit $P\wedge Q\in\chi^{p+q}(M,E)$ par

$$(P\wedge Q)(x) := P_x\wedge Q_x, \forall x\in M$$

on voit que c'est une section lisse en utilisant l'écriture locale.

On considere maintenant $\chi(M,E) := \underset{p\in\mathbb{Z}}{\oplus}\chi^p(M,E)$; c'est une algèbre réelle $\mathbb{Z}$-graduée, associative et $\mathbb{Z}-$commutative pour le produit extérieur des multivecteurs, on l'appelle l'algèbre extérieure des multivecteurs. C'est aussi un module $\mathbb{Z}$-gradué sur l'anneau $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Le produit intérieur d'une forme par un multivecteur:

Pour tout $P\in\chi(M,E)$, soit $\imath(P):\Omega(M,E^*)\to\Omega(M,E^*)$ défini par:

$$(\imath(P).\xi)(x) = \imath(P_x).\xi_x; \forall x\in M.$$

alors $\imath(P)$ est un endomorphisme de $\Omega(M,E^*)$. Si P est homogène de degré $p\in\mathbb{Z}$ alors $\imath(P)$ et homogène de degré $-p$. Pour $p=1$, $\imath(P)$ est une dérivation d'ordre -1 de $\Omega(M,E^*)$ considéré comme $\mathcal{C}^\infty(M)$ module $\mathbb{Z}$-gradué.

La dualité entre $\chi(M,E)$ et $\Omega(M,E^*)$.

On définit $\langle .,.\rangle : \Omega(M,E^*)\times\chi(M,E)\to\mathcal{C}^\infty(M)$, $\mathcal{C}^\infty(M)-$bilinéaire par:

$$\langle \xi, P\rangle(x) = \langle \xi_x, P_x\rangle, \forall x\in M.$$

2. Calcul différentiel sur les algébroïdes de Lie

2.1. Algébroïdes de Lie.

Définition 2.1.1. *Soit (E, π, M) un fibré vectoriel. Une structure d'algébroïde de Lie sur ce fibré est la donnée*

- *d'une loi de composition $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \{\sigma_1, \sigma_2\}$ sur l'ensemble des sections de ce fibré $\Gamma(M, E)$ qui le munit d'une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$,*
- *d'un morphisme de fibrés $\rho : E \to TM$ tel que l'application*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M, E) & \to & \Gamma(M, TM) \\ \sigma & \longmapsto & \rho \circ \sigma \end{array}$$

soit un morphisme d'algèbres de Lie et que la règle de Leibniz

$$\{\sigma_1, f.\sigma_2\} = f.\{\sigma_1, \sigma_2\} + (\rho \circ \sigma_1)f.\sigma_2$$

soit satisfaite.

Le fibré vectoriel (E, π, M) équipé par une structure d'algébroïde de Lie est noté (E, π, M, ρ). La loi de composition $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \{\sigma_1, \sigma_2\}$ sera appelé le crochet, et l'application $\rho : E \to TM$ l'ancrage ou l'ancre de l'algébroïde de Lie.

Exemple 2.1.1. *Le fibré tangent:*

Le fibré tangent (TM, π, M) équipé par le crochet de Lie des champs de vecteurs et de l'ancre id_{TM} est une algébroïde de Lie.

Exemple 2.1.2. *Une algèbre de Lie:*

Considérons une algèbre de Lie $\mathcal{G}$, si $M = \{*\}$ alors le fibré vectoriel trivial $(\mathcal{G}, \pi, M)$ est une algébroïde de Lie.

Exemple 2.1.3. *Une distribution involutive:*

Soit V une distribution lisse et réguliére de la variété M, i.e. un sous fibré vectoriel $(V, \pi_{|V}, M)$ du fibré tangent. Supposons que V est involutive, i.e. le crochet de Lie de deux section de $(V, \pi_{|V}, M)$ est une section de $(V, \pi_{|V}, M)$, alors le fibré vectoriel $(V, \pi_{|V}, M)$ muni du crochet usuel des champs de vecteurs et de l'ancre $i_V : V \to TM$ l'injection canonique est une algébroïde de Lie.

Exemple 2.1.4. *Les variétés de Dirac:*

Soit V un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie. On a deux formes bilinéaires canoniques sur $V \oplus V^*$:

$$\langle (X, \xi), (Y, \eta) \rangle_+ := \frac{1}{2}(\xi(Y) + \eta(X)),$$

$$\langle (X, \xi), (Y, \eta) \rangle_- := \frac{1}{2}(\xi(Y) - \eta(X)).$$

La première est symétrique non dégénérée, la seconde est antisymétrique.

Un sous espace vectoriel L de $V \oplus V^*$ est dit isotrope s'il est inclus dans son orthogonal pour la forme $\langle .,. \rangle_+$, ie $L \subset L^\perp$. La dimension d'un tel espace vérifie:

$$dim(L) \leq dim(V).$$

En effet: d'une part $dim(L) + dim(L^\perp) = dim(V \oplus V^*) = 2.dim(V)$ et d'autre part $L \subset L^\perp$, d'où le resultat.

Une structure de Dirac linéaire sur V est la donnée d'un sous espace isotrope de dimension maximale.

Maintenant M est une variété lisse. Considérons le fibré: $TM \oplus T^*M$ au dessus de M, on étend les formes bilinéaires précédantes de manière naturelle: pour deux sections $(X,\xi),(Y,\eta)$ de $TM \oplus T^*M$:

$$\langle (X,\xi),(Y,\eta) \rangle_+ := \frac{1}{2}(\xi(Y) + \eta(X)),$$

$$\langle (X,\xi),(Y,\eta) \rangle_- := \frac{1}{2}(\xi(Y) - \eta(X)).$$

On définit aussi le crochet de Courant de ces sections:

$$[(X,\xi),(Y,\eta)] := \left\langle [X,Y], L_X\eta - L_Y\xi - d\,\langle (X,\xi),(Y,\eta) \rangle_- \right\rangle.$$

Il et clair que $[.,.]$ est $\mathbb{R}-$bilinéaire, altérnée, mais ce crochet ne vérifie pas toujours l'identité de Jacobi.

Un fibré de Dirac sur M est la donnée d'un sous fibré L de $TM \oplus T^*M$ tel que chaque fibre soit une structure de Dirac linéaire. On a un resultat important:

" L'ensemble des sections d'un fibré de Dirac est stable par le crochet de Courant si et seulement si le crochet de Courant restreint aux sections de ce fibré vérifie l'identité de Jacobi ".

Une structure de Dirac sur une variété M est la donnée d'un fibré de Dirac L sur M stable par le crochet de Courant.

Soit (M,L) une structure de Dirac. Cette structure induit une structure d'algébroïde de Lie. En effet, considérons le fibré $\pi : L \to M$, l'ancre $\rho : L \to TM$ définie par

$$\rho(X \oplus \xi) := X$$

et le crochet de Courant restreint à $\Gamma(M,L)$. Le crochet de Courant vérifie la régle de Leibnitz. En effet, pour $(X,\xi),(Y,\eta) \in \Gamma(M,L)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$[(X,\xi), f.(Y,\eta)] = ([X,f.Y], L_X(f.\eta) - L_{f.Y}\xi - d(\langle (X,\xi), f.(Y,\eta) \rangle_-))$$

$$= (f.[X,Y] + (X.f)Y, (X.f)\eta + f.L_X(\eta) - f.L_Y\xi - \xi(Y).df - d(f.\langle (X,\xi),(Y,\eta) \rangle_-))$$

$$= f.[(X,\xi),(Y,\eta)] + (X.f).(Y,\eta)$$

car $\langle (X,\xi),(Y,\eta) \rangle_- = \xi(Y)$.

Le crochet de Courant vérifie l'identité de Jacobi car L est stable par le crochet de Courant.

Donc toute variété de Dirac admet une structure d'algébroïde de Lie canonique.

Lemme 2.1.1. *Soit $\sigma \in \Gamma(M,E)$ s'annulant sur ouvert U de M. Alors, pour tout $s \in \Gamma(M,E)$ et tout $x \in U$:*

$$\{\sigma, s\}(x) = 0.$$

On dit que le crochet est local.

Preuve:

Soient $x \in U$, $s \in \Gamma(M,E)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $supp f \subset U$ et $f = 1$ au voisinage de x. On voit que $f.\sigma$ est la section nulle, ainsi:

$$\{f.\sigma, s\} = 0$$

car le crochet est bilinéaire. Or:

$$\{f.\sigma, s\} = -\{s, f.\sigma\} = -f.\{s,\sigma\} - (\rho \circ s)f.\sigma.$$

Donc:

$$\begin{aligned} \{f.\sigma, s\}(x) &= -f(x).\{s,\sigma\}(x) - ((\rho \circ s)f)(x).\sigma(x) \\ &= -\{s,\sigma\}(x) - ((\rho \circ s)f)(x).0 \end{aligned}$$

d'où $\{\sigma, s\}(x) = 0.\spadesuit$

Proposition 2.1.1. *Soient $\sigma, \sigma' \in \Gamma(M,E)$, $x \in M$. Alors $\{\sigma,\sigma'\}(x)$ ne dépend que du jet d'ordre 1 de σ et de σ'.Par conséquent, si $\sigma(x) = \sigma'(x) = 0$ alors $\{\sigma,\sigma'\}(x) = 0$.*

Preuve:

Comme le crochet est local, il suffit de travailler sur un ouvert U de M contenant x, soit U un tel ouvert sur lequel on dispose d'un repère $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ de (E,π,M) au dessus de U, alors on a les écritures locales:

$\sigma = \sum\limits_{1 \le i \le k} f^i.\sigma_i$ et $\sigma' = \sum\limits_{1 \le j \le k} g^j.\sigma_j$ où $f^i, g^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$; alors on a en utilisant les conventions d'Einstein:

$$\begin{aligned} \{\sigma,\sigma'\} &= \{f^i.\sigma_i, g^j.\sigma_j\} \\ &= g^j.\{f^i.\sigma_i, \sigma_j\} + (\rho \circ (f^i.\sigma_i))g^j.\sigma_j \\ &= g^j(f^i\{\sigma_i,\sigma_j\} - (\rho \circ \sigma_j)f^i.\sigma_i) + (f^i.(\rho \circ \sigma_i))g^j.\sigma_j \\ &= g^j f^i.\{\sigma_i,\sigma_j\} - g^j.(df^i.(\rho \circ \sigma_j)).\sigma_i + f^i.(dg^j.(\rho \circ \sigma_i)).\sigma_j \end{aligned}$$

On voit que $\{\sigma,\sigma'\}(x)$ ne dépend que de $f^i(x), g^j(x), d_x f^i$ et de $d_x g^j$, ce qui signifie que $\{\sigma,\sigma'\}(x)$ ne dépend que du jet d'ordre 1 de σ et de σ'.

Si $\sigma(x) = \sigma'(x) = 0$ alors $f^i(x) = g^j(x) = 0, \forall i,j$; de l'écriture locale de $\{\sigma,\sigma'\}$ on déduit que $\{\sigma,\sigma'\}(x) = 0.\spadesuit$

2.2. **Dérivée de Lie des champs de formes.** Soit (E,π,M,ρ) une algébroïde de Lie.

Définition 2.2.1. *(Dérivée de Lie d'une forme)Pour tout $V \in \Gamma(M,E)$ et $f \in \Omega^0(M,E^*) = \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit la dérivée de Lie de f suivant V par:*

$$L_\rho(V).f = df(\rho \circ V). \tag{1}$$

Pour tout $\eta \in \Omega^p(M, E^*)$ où $p \geq 1$ et tout $V \in \Gamma(M, E)$. On définit la dérivée de Lie de η suivant V, qu'on note par $L_\rho(V).\eta \in \Omega^p(M, E^*)$ par: $\forall X_1, ..., X_p \in \Gamma(M, E)$

$$(L_\rho(V).\eta)(X_1, ..., X_p) = \tag{2}$$

$$L_\rho(V).(\eta(X_1, ..., X_p)) - \sum_{1 \leq i \leq p} \eta(X_1, ..., \{V, X_i\}, ..., X_p).$$

Il est clair que (1) définit entièrement $L_\rho(V)$ comme endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(M)$. La règle de Leibnitz s'écrit

$$L_\rho(V).(f.g) = (L_\rho(V).f).g + f.(L_\rho(V).g).$$

Ce qui se dit: $L_\rho(V)$ est un endomorphisme d'ordre 0 de $\mathcal{C}^\infty(M)$. On étend $L_\rho(V) : \Omega^p(M, E^*) \to \Omega^p(M, E^*)$ par $\mathbb{R}$-linéarité à tout $\Omega(M, E^*)$. On obtient $L_\rho(V) : \Omega(M, E^*) \to \Omega(M, E^*)$. C'est un endomorphisme homogène de degré 0. On l'appelle la dérivée de Lie des champs de formes suivant V.

On introduit la **différentielle extérieure** d'une section $f \in \Omega^0(M, E^*) = \mathcal{C}^\infty(M)$ induite par une algébroïde de Lie (E, π, M, ρ).

Définition 2.2.2. *($\Omega(M, E^*)$-différentielle d'une fonction)*

Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on appelle la $\Omega(M, E^*)-$différentielle de f qu'on note par $d_\rho f$ comme étant l'unique élément de $\Omega^1(M, E^*)$ tel que $\forall V \in \Gamma(M, E)$:

$$\langle d_\rho f, V \rangle = L_\rho(V).f. \tag{3}$$

Remarque 2.2.1. *La transposé de l'ancrage $\rho^t : T^*M \to E^*$ est encore un morphisme de fibrés vectoriels. On peut écrire*

$$\rho^t(df) = d_\rho f.$$

Proposition 2.2.1. *Propriétés de la dérivée de Lie*

(1) *La dérivée de Lie est la $\Omega(M, E^*)-$différentielle commutent, i.e. $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall V \in \Gamma(M, E)$ on a*

$$L_\rho(V)(d_\rho f) = d_\rho(L_\rho(V).f).$$

(2) *Dérivée de Lie et produit intérieur $\forall V, W \in \Gamma(M, E), \forall \eta \in \Omega(M, E^*)$*

$$L_\rho(V)(W \rfloor \eta) = \{V, W\} \rfloor \eta + W \rfloor L_\rho(V)(\eta).$$

(3) *La dérivée de Lie est une dérivation d'ordre 0 de l'algèbre réelle extérieure $\mathbb{Z}$-graduée $\Omega(M, E^*)$, i.e. pour tout $\xi, \eta \in \Omega(M, E^*), V \in \Gamma(M, E)$ on a*

$$L_\rho(V)(\xi \wedge \eta) = L_\rho(V)(\xi) \wedge \eta + \xi \wedge L_\rho(V)(\eta).$$

(4) *$L_\rho : \Gamma(M, E) \to D^0(\Omega(M, E^*))$ est un morphisme d'algèbres de Lie, i.e. $\forall V, W \in \Gamma(M, E)$*

$$L_\rho(\{V, W\}) = L_\rho(V) \circ L_\rho(W) - L_\rho(W) \circ L_\rho(V).$$

Preuve:

1/ Pour tout $W \in \Gamma(M,E)$:

$$L_{\rho\circ v}(df.(\rho\circ W)) = (L_{\rho\circ v}df).(\rho\circ W) + df.[\rho\circ V, \rho\circ W].$$

En utilisant le fait que la différentielle extérieure classique et la dérivée de Lie classiques commutent, on a:

$$\begin{aligned}(L_\rho(V)(d_\rho f)).W &= L_\rho(V)(d_\rho f.W) - d_\rho f.\{V,W\}\\ &= L_{\rho\circ v}(df.(\rho\circ W)) - df(\rho\circ\{V,W\})\\ &= (L_{\rho\circ v}(df))(\rho\circ W) + df(L_{\rho\circ v}(\rho\circ W)) - df(\rho\circ\{V,W\})\\ &= (d(L_{\rho\circ v}.f))(\rho\circ W) + df([\rho\circ V,\rho\circ W]) - df([\rho\circ V,\rho\circ W])\\ &= \langle d(L_\rho(V).f), \rho\circ W\rangle = \langle d_\rho(L_\rho(V).f), W\rangle\end{aligned}$$

i.e.

$$L_\rho(V)\circ d_\rho = d_\rho\circ L_\rho(V).$$

2/ Comme $L_\rho(V)$ est $\mathbb{R}-$linéaire, il suffit de faire la preuve quand η est homogène. Soient $\eta\in\Omega^p(M,E^*), V,W\in\Gamma(M,E)$, $X_1,...,X_{p-1}\in\Gamma(M,E)$:

$$\begin{aligned}&(L_\rho(V)(W\rfloor\eta))(X_1,...,X_{p-1})\\ &= L_\rho(V)(W\rfloor\eta(X_1,...,X_{p-1})) - \sum_{1\le i\le p-1}(W\rfloor\eta)(X_1,...,\{V,X_i\},...,X_{p-1})\\ &= L_\rho(V)(\eta(W,X_1,...,X_{p-1}) - \sum_{1\le i\le p-1}\eta(W,X_1,...,\{V,X_i\},...,X_{p-1})\\ &= (L_\rho(V)\eta)(W,X_1,...,X_{p-1}) + \eta(\{V,W\},X_1,...,X_{p-1})\\ &\quad + \sum_{1\le i\le p-1}\eta(W,X_1,...,\{V,X_i\},...,X_{p-1})\\ &\quad - \sum_{1\le i\le p-1}\eta(W,X_1,...,\{V,X_i\},...,X_{p-1})\\ &= (W\rfloor(L_\rho(V)\eta) + \{V,W\}\rfloor\eta)(X_1,...,X_{p-1}).\end{aligned}$$

3/ Par $\mathbb{R}-$linéarité de $L_\rho(V)$, il suffit de faire la preuve quand ξ et η sont homogènes. Soient $\xi\in\Omega^p(M,E^*)$, $\eta\in\Omega^q(M,E^*)$. Si $p<0$ ou $q<0$ c'est trivial. Si $p=q=0$ c'est la règle de Leibnitz. Si $p>0$ et $q\ge 0$: on fait la preuve par induction sur $p+q$:

si $p+q=1$, alors $p=1$ et $q=0$ donc $\eta\in\mathcal{C}^\infty(M)$. Pour $W\in\Gamma(M,E)$, on a

$$\begin{aligned}(L_\rho(V)(\xi\wedge\eta))(W) &= (L_\rho(V)(\eta.\xi))(W)\\ &= L_\rho(V)(\eta.\xi(W)) - \eta.\xi(\{V,W\})\\ &= L_\rho(V)(\eta).\xi(W) + \eta.L_\rho(V)(\xi(W)) - \eta.\xi(\{V,W\})\\ &= \eta.(L_\rho(V).\xi)(W) + L_\rho(V)(\eta).\xi(W)\\ &= (L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta + \xi\wedge L_\rho(V)(\eta))(W).\end{aligned}$$

Supposons la formule vrai pour p,q tels que $p+q \leq r-1$, et montrons qu'elle le reste pour $r = p+q$. Soit $W \in \Gamma(M,E)$, d'après 2/ on a

$$W\rfloor(L_\rho(V)\eta) = L_\rho(V)(W\rfloor\eta) - \{V,W\}\rfloor\eta$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} W\rfloor(L_\rho(V)(\xi\wedge\eta)) &= L_\rho(V)(W\rfloor(\xi\wedge\eta)) - \{V,W\}\rfloor(\xi\wedge\eta) \\ &= L_\rho(V)((W\rfloor\xi)\wedge\eta + (-1)^p\xi\wedge(W\rfloor\eta)) - \{V,W\}\rfloor(\xi\wedge\eta). \end{aligned}$$

Comme $\xi \in \Omega^p(M,E^*), \eta \in \Omega^q(M,E^*)$ alors$W\rfloor(\xi\wedge\eta) \in \Omega^{p+q-1}(M,E^*)$. On applique l'hypothèse de réccurence et on obtient:

$$W\rfloor L_\rho(V)(\xi\wedge\eta) = L_\rho(V)((W\rfloor\xi)\wedge\eta) + (-1)^p L_\rho(V)(\xi\wedge W\rfloor\eta) - \{V,W\}\rfloor(\xi\wedge\eta)$$

$$\begin{aligned} = \quad & (\{V,W\}\rfloor\xi)\wedge\eta + (W\rfloor L_\rho(V)(\xi))\wedge\eta + (W\rfloor\xi)\wedge L_\rho(V)(\eta) \\ & +(-1)^p L_\rho(V)(\xi)\wedge(W\rfloor\eta) + (-1)^p\xi\wedge(\{V,W\}\rfloor\eta) \\ & +(-1)^p\xi\wedge(W\rfloor L_\rho(V)(\eta)) - \{V,W\}\rfloor(\xi\wedge\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \quad & (\{V,W\}\rfloor\xi)\wedge\eta + (-1)^p\xi\wedge(\{V,W\}\rfloor\eta) - \{V,W\}\rfloor(\xi\wedge\eta) \\ & +W\rfloor(L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta) + (-1)^p\xi\wedge(W\rfloor L_\rho(V)(\eta)) + (W\rfloor\xi)\wedge L_\rho(V)(\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= W\rfloor(L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta) + (-1)^p\xi\wedge(W\rfloor L_\rho(V)(\eta)) + (W\rfloor\xi)\wedge L_\rho(V)(\eta) \\ &= W\rfloor(L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta) + W\rfloor(\xi\wedge L_\rho(V)(\eta)) \\ &= W\rfloor(L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta + \xi\wedge L_\rho(V)(\eta)) \end{aligned}$$

i.e.

$$W\rfloor(L_\rho(V)(\xi\wedge\eta)) = W\rfloor(L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta + \xi\wedge L_\rho(V)(\eta)).$$

Comme W est quelconque on a

$$L_\rho(V)(\xi\wedge\eta) = L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta + \xi\wedge L_\rho(V)(\eta)$$

c'est le resultat voulu. On obtient le cas $p \geq 0$ et $q > 0$ par $\mathbb{Z}-$commutativité.

4/ Par $\mathbb{R}-$linéarité il suffit de faire la preuve dans le cas homogène. Soient $V,W \in \Gamma(M,E)$, $\xi \in \Omega^p(M,E^*)$. Si $p < 0$ c'est trivial Si $p = 0$ i.e. $\xi = f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} L_\rho(\{V,W\}).f &= L_{\rho\circ\{V,W\}}f = L_{[\rho\circ V,\rho\circ W]}f \\ &= (L_{\rho\circ V}\circ L_{\rho\circ W} - L_{\rho\circ W}\circ L_{\rho\circ V}).f \\ &= (L_\rho(V)\circ L_\rho(W) - L_\rho(W)\circ L_\rho(V)).f. \end{aligned}$$

Si $p = 1$: alors $L_\rho(\{V,W\}).\xi$ et $L_\rho(V)\circ L_\rho(W).\xi - L_\rho(W)\circ L_\rho(V).\xi$ sont des 1-formes. Soit $X \in \Gamma(M,E)$:

$$\begin{aligned} (L_\rho(\{V,W\}).\xi).X &= L_\rho(\{V,W\})(\xi.X) - \xi.\{\{V,W\},X\} \\ &= L_{\rho\circ\{V,W\}}(\xi.X) - \xi.\{\{V,W\},X\} \\ &= (L_{\rho\circ V}\circ L_{\rho\circ W} - L_{\rho\circ W}\circ L_{\rho\circ V})(\xi.X) - \xi.\{\{V,W\},X\}, \end{aligned}$$

or, on a l' identité de Jacobi

$$\{\{V,W\},X\} = \{V,\{W,X\}\} + \{W,\{X,V\}\}$$

en utilisant 2/

$$\begin{aligned}\xi.\{\{V,W\},X\} &= \xi.(\{V,\{W,X\}\}) + \xi.(\{W,\{X,V\}\}) \\ &= L_\rho(V)(\xi.\{W,X\}) - (L_\rho(V).\xi).\{W,X\} + \\ &\quad L_\rho(W)(\xi.\{X,V\}) - (L_\rho(W).\xi).\{X,V\}\end{aligned}$$

on obtient

$$(L_\rho(\{V,W\}).\xi).X$$

$$\begin{aligned}= \;& L_\rho(V)(L_\rho(W)(\xi.X) - \xi.\{W,X\}) - L_\rho(W)(L_\rho(V)(\xi.X) \\ & + \xi.\{X,V\}) + (L_\rho(V).\xi).\{W,X\} + (L_\rho(W).\xi).\{X,V\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \;& L_\rho(V)(L_\rho(W)(\xi.X)) - L_\rho(W)(L_\rho(V)(\xi.X)) \\ & - L_\rho(V)(\xi.\{W,X\}) - L_\rho(W)(\xi.\{X,V\}) \\ & + (L_\rho(V).\xi).\{W,X\} + (L_\rho(W).\xi).\{X,V\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \;& (L_\rho(V)\circ L_\rho(W) - L_\rho(W)\circ L_\rho(V))(\xi.X) \\ & - L_\rho(W)(\xi.\{X,V\}) - L_\rho(V)(\xi.\{W,X\}) \\ & + (L_\rho(V).\xi).\{W,X\} + (L_\rho(W).\xi).\{X,V\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \;& (L_\rho(V)\circ L_\rho(W) - L_\rho(W)\circ L_\rho(V))(\xi.X) \\ & - \xi.(\{V,\{W,X\}\}) - \xi.(\{W,\{X\ ,V\}\})\end{aligned}$$

$$= ((L_\rho(V)\circ L_\rho(W) - L_\rho(W)\circ L_\rho(V)).\xi).X.$$

Si $p \geq 2$ comme ξ est combinaison linéaire de produit de 1-formes, en utilisant 3/ on aboutit au résultat voulu.♠

2.3. **Dérivée de Lie des champs de multivecteurs.** Exactement comme dans le cas du fibré tangent, on va définir une manière de dériver les champs de multivecteurs suivant une section d'une algébroïde de Lie. On obtiendra une dérivation d'ordre 0 de l'algèbre réelle extérieure $\mathbb{Z}-$graduée des champs de multivecteurs. Soit (E,π,M,ρ) une algébroïde de Lie.

Définition 2.3.1. *(Dérivée de Lie d'un champ de multivecteurs)*
Soit $V \in \Gamma(M,E)$. Pour tout entier p et tout champ de multivecteurs $P \in \chi^p(M,E)$, on définit la dérivée de Lie de P suivant V, qu'on note par$L_\rho(V).P$ comme étant l'unique élément de $\chi^p(M,E)$ vérifiant $\forall \eta \in \Omega^p(M,E^*)$

$$\langle \eta, L_\rho(V).P\rangle = L_\rho(V)(\langle \eta, P\rangle) - \langle L_\rho(V).\eta, P\rangle\,.$$

Proposition 2.3.1. *Propriétés de la dérivée de Lie:*
Soit $V \in \Gamma(M,E)$ alors l'application $L_\rho(V) : \chi(M,E) \to \chi(M,E)$ vérifie:

(1) *La dérivée de Lie d'une section n'est autre que le crochet, i.e. $\forall W \in \Gamma(M,E)$*

$$L_\rho(V).W = \{V,W\}.$$

(2) $L_\rho(V) : \chi(M,E) \to \chi(M,E)$ *est une dérivation d'ordre* 0*, i.e.* $\forall P, Q \in \chi(M,E)$

$$L_\rho(V)(P \wedge Q) = L_\rho(V)(P) \wedge Q + P \wedge L_\rho(V)(Q).$$

(3) *Dérivée de Lie et dualité:* $\forall P \in \chi(M,E), \forall \xi \in \Omega(M,E)$:

$$L_\rho(V)(\langle \xi, P\rangle) = \langle L_\rho(V)\xi, P\rangle + \langle \xi, L_\rho(V)P\rangle .$$

(4) $L_\rho : \Gamma(M,E) \to D^0(\chi(M,E))$ *est un morphisme d'algèbres de Lie réelles,* $\forall V, W \in \Gamma(M,E)$:

$$L_\rho(\{V,W\}) = L_\rho(V) \circ L_\rho(W) - L_\rho(W) \circ L_\rho(V).$$

Preuve:

1/ Pour $\alpha \in \Omega^1(M,E)$, $W \in \Gamma(M,E)$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, L_\rho(V).W\rangle &= L_\rho(V)(\langle \alpha, W\rangle) - \langle L_\rho(V).\alpha, W\rangle \\ &= L_\rho(V)(\langle \alpha, W\rangle) - L_\rho(V).(\langle \alpha, W\rangle) + \alpha.\{V,W\} \\ &= \alpha.\{V,W\}. \end{aligned}$$

2/ Par $\mathbb{R}-$linéarité il suffit de faire la preuve pour le cas décomposables. D'après la définition 1.4.5 et la Proposition 1.4.1, pour tout $\alpha^1, ..., \alpha^p \in \Omega^1(M,E)$, on a

$$\begin{aligned} &\left\langle \alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^p, L_\rho(V)(V_1 \wedge ... \wedge V_p)\right\rangle \\ &= L_\rho(V)(\left\langle \alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^p, V_1 \wedge ... \wedge V_p\right\rangle) - \left\langle L_\rho(V)(\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^p), V_1 \wedge ... \wedge V_p\right\rangle \\ &= L_\rho(V)(\left\langle \alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^p, V_1 \wedge ... \wedge V_p\right\rangle) - L_\rho(V)(\left\langle \alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^p, V_1 \wedge ... \wedge V_p\right\rangle) \\ &\quad + \sum_{1 \le i \le p} (-1)^{p\frac{p-1}{2}} (\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^p)(V_1, ..., \{V, V_i\}, ..., V_p) \\ &= \sum_{1 \le i \le p} (-1)^{p\frac{p-1}{2}} (\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^p)(V_1, ..., \{V, V_i\}, ..., V_p) \\ &= \sum_{1 \le i \le p} \left\langle \alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^p, V_1 \wedge ... \wedge \{V, V_i\} \wedge ... \wedge V_p\right\rangle \\ &= \left\langle \alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^p, \sum_{1 \le i \le p} V_1 \wedge ... \wedge \{V, V_i\} \wedge ... \wedge V_p \right\rangle. \end{aligned}$$

3/ Soient $P = P_1 \wedge ... \wedge P_k \in \chi^k(M,E), \xi \in \Omega^k(M,E)$. En utilisant la Définition 1.4.5 et la Proposition 1.4.1, on obtient

$$\begin{aligned} L_\rho(V)(P \rfloor \xi) &= L_\rho(V)((-1)^{k\frac{k-1}{2}} \xi(P_1, ..., P_k)) \\ &= (-1)^{k\frac{k-1}{2}} L_\rho(V)(\xi(P_1, ..., P_k)) \\ &= (-1)^{k\frac{k-1}{2}} (L_\rho(V).\xi)(P_1, ..., P_k) + (-1)^{k\frac{k-1}{2}} \sum_{1 \le i \le k} \xi(P_1, ..., \{V, P_i\}, ..., P_k) \\ &= (P_1 \wedge ... \wedge P_k) \rfloor (L_\rho(V).\xi) + \sum_{1 \le i \le k} (P_1 \wedge ... \wedge \{V, P_i\} \wedge ... \wedge P_k) \rfloor \xi \\ &= P \rfloor (L_\rho(V).\xi) + (L_\rho(V).P) \rfloor \xi. \end{aligned}$$

4/ Soient $V, W \in \Gamma(M,E)$, $P \in \chi(M,E)$; il suffit de montrer que:

$$L_\rho(\{V,W\}).P = (L_\rho(V) \circ L_\rho(W) - L_\rho(W) \circ L_\rho(V)).P.$$

Il suffit de prendre $P = P_1 \wedge ... \wedge P_k \in \chi^k(M,E)$ décomposable. Si $k = 0$ déja vu. Si $k = 1$, même preuve que dans le cas des formes, en inversant les rôles des formes et des vecteurs. Le cas $k \geq 1$ s'obtient par la propriété 2/.♠

2.4. **La $\Omega(M,E^*)-$différentielle extérieure.** On a introduit la $\Omega(M,E^*)$-différentielle d'une fonction lisse f sur M qu'on a noté $d_\rho f$. On va étendre cet opérateur à toute l'algèbre extérieure graduée $\Omega(M,E^*)$ et on verra que d_ρ vérifie des propriétés analogues à la différentielle extérieure usuelle. Dans la suite, (E,π,M,ρ) une algébroïde de Lie.

Définition 2.4.1. *(La $\Omega(M,E^*)-$différentielle)*
Soient $p \geq 1$ et $\xi \in \Omega^p(M,E^*)$, $d_\rho\xi$ est l'élément de $\Omega^{p+1}(M,E^*)$ défini par : $\forall V_1, ..., V_{p+1} \in \Gamma(M,E)$

$$(d_\rho\xi)(V_1,...,V_{p+1}) = \tag{4}$$

$$\sum_{1\leq i\leq p+1} (-1)^{i+1} L_\rho(V_i)(\xi(V_1,...,\hat{V}_i,...,V_{p+1})) +$$
$$\sum_{1\leq i<j\leq p+1} (-1)^{i+j} \xi(\{V_i,V_j\},V_1,...,\hat{V}_i,...,\hat{V}_j,...,V_{p+1})$$

où le symbole $\hat{}$ au dessus des V_i, V_j signifie que ces termes sont omis.

d_ρ est $\mathbb{R}$-linéaire de $\Omega^p(M,E^*)$ dans $\Omega^{p+1}(M,E^*)$. On étend d_ρ à tout $\Omega(M,E)$ par $\mathbb{R}$-linéarité.

Remarque 2.4.1. *On voit à partir de la formule (4) que d_ρ est **local,** i.e. si $\varsigma = \eta$ sur un ouvert U de M alors $d_\rho\varsigma = d_\rho\eta$ sur U. On note sa restriction à l'ouvert U par d_ρ.*

Proposition 2.4.1. *Propriétés de la $\Omega(M,E^*)-$différentielle*

(1) *Pour tout $V \in \Gamma(M,E)$, les opérateurs $L_\rho(V)$, $i(V)$ et d_ρ vérifient:*
$$L_\rho(V) = i(V) \circ d_\rho + d_\rho \circ i(V). \tag{5}$$
(2) *d_ρ est une dérivation d'ordre 1, i.e.:* $\forall \xi \in \Omega^p(M,E^*)$, $\forall \eta \in \Omega(M,E^*)$
$$d_\rho(\xi \wedge \eta) = d_\rho(\xi) \wedge \eta + (-1)^p \xi \wedge d_\rho(\eta). \tag{6}$$
(3) *d_ρ est nilpotent, i.e.*
$$d_\rho \circ d_\rho = 0. \tag{7}$$
(4) *La dérivée de Lie et la $\Omega(M,E^*)-$différentielle extérieure commutent, i.e. pour tout $V \in \Gamma(M,E)$,*
$$L_\rho(V) \circ d_\rho = d_\rho \circ L_\rho(V).$$

Preuve:

1/ Soient $V \in \Gamma(M,E), \xi \in \Omega^p(M,E)$,on veut montrer que:

$$L_\rho(V)\xi = V\rfloor(d_\rho\xi) + d_\rho(V\rfloor\xi),$$

soient $V_1,...,V_p \in \Gamma(M,E)$: d'une part

$$(L_\rho(V)\xi)(V_1,...,V_p) =$$

$$L_\rho(V)(\xi(V_1,...,V_p)) - \sum_{1\leq i\leq p} \xi(V_1,...,\{V,V_i\},...,V_p)$$

et d'autre part

$$(d_\rho(V\rfloor\xi))(V_1,...,V_p) =$$

$$\sum_{1\leq i\leq p}(-1)^{i+1}L_\rho(V_i)(\xi(V,V_1,...,\hat{V}_i,...,V_p)) +$$
$$\sum_{1\leq i<j\leq p}(-1)^{i+j}\xi(V,\{V_i,V_j\},V_1,...,\hat{V}_i,...,\hat{V}_j,...,V_p)$$

d'où

$$\begin{aligned}
& (V\rfloor(d_\rho\xi) + d_\rho(V\rfloor\xi))(V_1,...,V_p) \\
= \;& L_\rho(V)(\xi(V_1,...,V_p)) + \sum_{1\leq i\leq p}(-1)^{i+1}\xi(\{V_i,V\},V_1,...,\hat{V}_i,...,V_p) \\
= \;& L_\rho(V)(\xi(V_1,...,V_p)) + \sum_{1\leq i\leq p}(-1)^{i}\xi(\{V,V_i\},V_1,...,\hat{V}_i,...,V_p) \\
= \;& L_\rho(V)(\xi(V_1,...,V_p)) - \sum_{1\leq i\leq p}\xi(V_1,...,\{V,V_i\},...,V_p).
\end{aligned}$$

2/ Il suffit de l'établir dans le cas homogène. Soient $\xi \in \Omega^p(M,E), \eta \in \Omega^q(M,E)$. Si $p<0$ et $q<0$: c'est trivial. Si $p=q=0$: alors $\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\eta \in \mathcal{C}^\infty(M)$,déja vu. Si $p>0$ et $q\geq 0$, on fait la preuve par induction sur $p+q$:

si $p+q=1$: alors $p=1$ et $q=0$ donc $\xi \in \Omega^p(M,E)$ et $\eta = g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Soient $V_1,V_2 \in \Gamma(M,E)$,

$$d_\rho(g.\xi)(V_1,V_2) = L_\rho(V_1)(g.\xi(V_2)) - L_\rho(V_2)(g.\xi(V_1)) - g.\xi(\{V_1,V_2\})$$

$$\begin{aligned}
= \;& L_\rho(V_1)(g).\xi(V_2) + g.L_\rho(V_1)(\xi(V_2)) - L_\rho(V_2)(g).\xi(V_1) \\
& -g.L_\rho(V_2)(\xi(V_1)) - g.\xi(\{V_1,V_2\})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;& L_\rho(V_1)(g).\xi(V_2) - L_\rho(V_2)(g).\xi(V_1) + g.(L_\rho(V_1)(\xi(V_2)) \\
& -L_\rho(V_2)(\xi(V_1)) - \xi(\{V_1,V_2\}))
\end{aligned}$$

$$= d_\rho g(V_1).\xi(V_2) - d_\rho g(V_2).\xi(V_1) + g.d_\rho(\xi)(V_1,V_2)$$
$$= (d_\rho g \wedge \xi)(V_1,V_2) + g \wedge d_\rho(\xi)(V_1,V_2).$$

Maintenant, on suppose le resultat vrai pour tout p,q tels que $p+q \leq r-$. Montrons qu'il reste vrai lorsque $p+q=r$: soient $\xi \in \Omega^p(M,E), \eta \in \Omega^q(M,E)$, $V \in \Gamma(M,E)$. Par la formule 5

$$V\rfloor d_\rho(\xi\wedge\eta) = L_\rho(V)(\xi\wedge\eta) - d_\rho(V\rfloor(\xi\wedge\eta))$$

$$= L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta + \xi\wedge L_\rho(V)(\eta) - d_\rho((V\rfloor\xi)\wedge\eta + (-1)^p\xi\wedge(V\rfloor\eta))$$

$$\begin{aligned} = \;& L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta + \xi\wedge L_\rho(V)(\eta) - d_\rho(V\rfloor\xi)\wedge\eta - \\ & (-1)^{p-1}(V\rfloor\xi)\wedge d_\rho(\eta) - (-1)^p d_\rho(\xi)\wedge(V\rfloor\eta) - \xi\wedge d_\rho(V\rfloor\eta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \;& (-1)^{p-1}d_\rho(\xi)\wedge(V\rfloor\eta) + (-1)^p(V\rfloor\xi)\wedge d_\rho(\eta) + L_\rho(V)(\xi)\wedge\eta - \\ & d_\rho(V\rfloor\xi)\wedge\eta + \xi\wedge L_\rho(V)(\eta) - \xi\wedge d_\rho(V\rfloor\eta)\end{aligned}$$

$$= (-1)^{p+1}d_\rho(\xi)\wedge(V\rfloor\eta) + (V\rfloor d_\rho(\xi))\wedge\eta + (-1)^p(V\rfloor\xi)\wedge d_\rho(\eta) + \xi\wedge(V\rfloor d_\rho(\eta))$$

$$= V\rfloor(d_\rho(\xi)\wedge\eta) + (-1)^p.V\rfloor(\xi\wedge d_\rho(\eta))$$

$$= V\rfloor(d_\rho(\xi)\wedge\eta + (-1)^p\xi\wedge d_\rho(\eta)).$$

3/ Comme d_ρ est local et $\mathbb{R}$-linéaire, il suffit de montrer la formule (7) au voisinage de chaque point. Soient U domaine d'une trivialisation, $(\sigma_1,...,\sigma_k)$ un repère de (E,π,M) au dessus de U et $(\sigma^1,...,\sigma^k)$ le repére dual, $\xi \in \Omega^p(U,E)$ s'écrit:

$$\xi = \sum_{1\leq i_1,\prec...\prec i_p\leq k} \alpha_{i_1...i_p}.\sigma^{i_1}\wedge...\wedge\sigma^{i_p},\ \alpha_{i_1...i_p}\in\mathcal{C}^\infty(U).$$

Par $\mathbb{R}$-linéarité il suffit de prendre $\xi = f.\sigma^{i_1}\wedge...\wedge\sigma^{i_p}$ où $f\in\mathcal{C}^\infty(U)$. On fait la preuve par induction sur p: Si $p=0$: soient $V_1,V_2\in\Gamma(U,E)$

$$\begin{aligned} d_\rho(d_\rho(f))(V_1,V_2) &= L_\rho(V_1)(d_\rho(f)(V_2)) - L_\rho(V_2)(d_\rho(f)(V_1)) - d_\rho(f)(\{V_1,V_2\}) \\ &= L_\rho(V_1)(L_\rho(V_2)f) - L_\rho(V_2)(L_\rho(V_1)f) - d_\rho(f)(\{V_1,V_2\}) \\ &= L_\rho(\{V_1,V_2\}).f - d_\rho(f)(\{V_1,V_2\}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Supposons le resultat vrai pour $p\leq r-1$ et montrons qu'il le reste pour $p=r$. On a

$$\begin{aligned} d_\rho\xi &= d_\rho(f.\sigma^{i_1}\wedge...\wedge\sigma^{i_p}) \\ &= d_\rho(f)\wedge\sigma^{i_1}\wedge...\wedge\sigma^{i_p} + f.d_\rho(\sigma^{i_1}\wedge...\wedge\sigma^{i_p}).\end{aligned}$$

$$d_\rho(\sigma^{i_1}\wedge...\wedge\sigma^{i_p}) = d_\rho(\sigma^{i_1})\wedge\sigma^{i_2}\wedge...\wedge\sigma^{i_p} - \sigma^{i_1}\wedge d_\rho(\sigma^{i_2}\wedge...\wedge\sigma^{i_p}),$$

donc:

$$d_\rho(d_\rho(\sigma^{i_1}\wedge...\wedge\sigma^{i_p}))$$

$$\begin{aligned} = \;& d_\rho(d_\rho\sigma^{i_1})\wedge\sigma^{i_2}\wedge...\wedge\sigma^{i_p} + d_\rho(\sigma^{i_1})\wedge d_\rho(\sigma^{i_2}\wedge...\wedge\sigma^{i_p}) \\ & -d_\rho(\sigma^{i_1})\wedge d_\rho(\sigma^{i_2}\wedge...\wedge\sigma^{i_p}) + \sigma^{i_1}\wedge d_\rho(d_\rho(\sigma^{i_2}\wedge...\wedge\sigma^{i_p})) \\ = \;& 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_\rho(d_\rho\xi) &= d_\rho(d_\rho(f)) \wedge \sigma^{i_1} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p} - d_\rho(f) \wedge d_\rho(\sigma^{i_1} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p}) + \\ & \quad d_\rho(f) \wedge d_\rho(\sigma^{i_1} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p}) + f.d_\rho(d_\rho(\sigma^{i_1} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4/

$$L_\rho(V) = i(V) \circ d_\rho + d_\rho \circ i(V)$$

donc:

$$d_\rho \circ L_\rho(V) = d_\rho \circ i(V) \circ d_\rho + d_\rho \circ d_\rho \circ i(V)$$

et

$$L_\rho(V) \circ d_\rho = i(V) \circ d_\rho \circ d_\rho + d_\rho \circ i(V) \circ d_\rho$$

comme $d_\rho \circ d_\rho = 0$, on a l'égalité.♠

2.5. **Le crochet de Schouten-Nijenhuis.** Soit (E, π, M, ρ) une algébroïde de Lie. On a vu que le crochet qui associe à toute paire de sections de ce fibré (σ_1, σ_2) une section noté $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ se prolonge en une application $L_\rho : \Gamma(U,E) \times \chi(M,E) \to \chi(M,E)$ telle que : $L_\rho(V,.) = L_\rho(V)$ est une dérivation d'ordre 0 de l'algèbre extérieure graduée $\chi(M,E)$, pour tout $V \in \Gamma(U,E)$.

On va voir que cette application se prolonge de manière naturelle en une loi de composition $\mathbb{R}-$bilinéaire sur $\chi(M,E)$, $(P,Q) \mapsto [P,Q]$ qu'on appelle le *crochet de Schouten-Nijenhuis.* On aura besoin des lemmes suivant:

Lemme 2.5.1. *Soient $p, q \in \mathbb{Z}$, $P \in \chi^p(M,E)$, $Q \in \chi^q(M,E)$, $\xi \in \Omega(M,E^*)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. On a l'identité:*

$$P\rfloor(d_\rho f \wedge (Q\rfloor\xi)) + (-1)^{(p-1)q+p} Q\rfloor(d_\rho f \wedge (P\rfloor\xi)) -$$

$$(-1)^{(p-1)q} Q\rfloor(P\rfloor(d_\rho f \wedge \xi)) - (-1)^p d_\rho f \wedge (P\rfloor(Q\rfloor\xi)) = 0$$

Preuve:

On note par $K(P,Q,f,\xi)$ le membre de gauche de cette égalité. On doit montrer que $K(P,Q,f,\xi) = 0$:

Si $p < 0$ ou $q < 0$: il n'y a rien à prouver. Si $p = q = 0$:

$$K(P,Q,f,\xi) = P.Q(d_\rho f \wedge \xi) + Q.P(d_\rho f \wedge \xi) - Q.P(d_\rho f \wedge \xi)) - P.Q(d_\rho f \wedge \xi) = 0.$$

Si $p > 0$ ou $q > 0$: on fait la preuve par induction sur p et sur q. Supposons que $K(P,Q,f,\xi) = 0$ pour $p \leq a$ et $q \leq b$, et montrons que cette relation reste vrai pour $p = a+1$ et $q = b+1$. Soient $P = X \wedge P' \in \chi^p(M,E)$ où $X \in \chi^1(M,E)$ et $P' \in \chi^a(M,E)$, $Q \in \chi^q(M,E)$ avec $q \leq b$, $\xi \in \Omega(M,E^*)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$K(P,Q,f,\xi) =$$

$$\begin{aligned}
&(X\wedge P')\rfloor(d_\rho f\wedge(Q\rfloor\xi))+(-1)^{aq+a+1}Q\rfloor(d_\rho f\wedge((X\wedge P')\rfloor\xi))-\\
&(-1)^{aq}Q\rfloor((X\wedge P')\rfloor(d_\rho f\wedge\xi))+(-1)^a d_\rho f\wedge((X\wedge P')\rfloor(Q\rfloor\xi))\\
=\;&(-1)^a P'\rfloor(X\rfloor(d_\rho f\wedge(Q\rfloor\xi))-(-1)^{aq}Q\rfloor(d_\rho f\wedge(P'\rfloor(X\rfloor\xi)))-\\
&(-1)^{aq+a}Q\rfloor(P'\rfloor(X\rfloor(d_\rho f\wedge\xi)))+d_\rho f\wedge(P'\rfloor(X\rfloor(Q\rfloor\xi))\\
=\;&(-1)^a P'\rfloor(d_\rho f.X.(Q\rfloor\xi)-d_\rho f\wedge X\rfloor(Q\rfloor\xi))-(-1)^{aq}Q\rfloor(d_\rho f\wedge(P'\rfloor(X\rfloor\xi)))-\\
&(-1)^{aq+a}Q\rfloor(P'\rfloor(d_\rho f.X.\xi-d_\rho f\wedge(X\rfloor\xi)))+(-1)^q d_\rho f\wedge(P'\rfloor(Q\rfloor(X\rfloor\xi)))
\end{aligned}$$

si l'on note $d_\rho f.X=g$ et $X\rfloor\xi=\eta$, on obtient:

$$\begin{aligned}
&K(P,Q,f,\xi)\\
=\;&(-1)^a P'\rfloor(g.(Q\rfloor\xi))-(-1)^a P'\rfloor(d_\rho f\wedge X\rfloor(Q\rfloor\xi))-\\
&(-1)^{aq}Q\rfloor(d_\rho f\wedge(P'\rfloor\eta))-(-1)^{aq+a}g.Q\rfloor(P'\rfloor(\xi))+\\
&(-1)^{aq+a}Q\rfloor(P'\rfloor(d_\rho f\wedge\eta))+(-1)^q d_\rho f\wedge(P'\rfloor(Q\rfloor\eta))\\
=\;&(-1)^a g.P'\rfloor(Q\rfloor\xi)-(-1)^{aq+a}g.Q\rfloor(P'\rfloor\xi)-(-1)^{a+q}P'\rfloor(d_\rho f\wedge(Q\rfloor\eta))-\\
&(-1)^{aq}Q\rfloor(d_\rho f\wedge(P'\rfloor\eta))+(-1)^{aq+a}Q\rfloor(P'\rfloor(d_\rho f\wedge\eta))\\
&+(-1)^q d_\rho f\wedge(P'\rfloor(Q\rfloor\eta))\\
=\;&(-1)^a g.(P'\rfloor(Q\rfloor\xi)-(-1)^{aq}Q\rfloor(P'\rfloor\xi))-(-1)^{a+q}(P'\rfloor(d_\rho f\wedge(Q\rfloor\eta))+\\
&(-1)^{aq+a-q}Q\rfloor(d_\rho f\wedge(P'\rfloor\eta))-(-1)^{aq-q}Q\rfloor(P'\rfloor(d_\rho f\wedge\eta))\\
&-(-1)^a d_\rho f\wedge(P'\rfloor(Q\rfloor\eta)))\\
=\;&-(-1)^{a+q}K(P',Q,f,\eta)\\
=\;&0\text{ (par hypothèse).}
\end{aligned}$$

Comme $K(P,Q,f,\xi)=(-1)^{(p-1)q+p}K(Q,P,f,\xi)$ alors $K(P,Q,f,\xi)=0$ pour $q=b+1$.♠

Lemme 2.5.2. *Soient $p,q,r\in\mathbb{Z}$, $P\in\chi^p(M,E)$, $Q\in\chi^q(M,E)$, $R\in\chi^r(M,E)$. On a :*

$$i(R)\circ[[i(P),d_\rho],i(Q)]=(-1)^{(p+q-1)r}[[i(P),d_\rho],i(Q)]\circ i(R).$$

Où les crochets sont les crochets graduées des endomorphismes homogènes.

Preuve:
Supposons que $R=V\in\chi^1(M,E)$, alors:

$$i(V)\circ[[i(P),d_\rho],i(Q)]=i(V)\circ([i(P),d_\rho]\circ i(Q)-(-1)^{(p-1)q}i(Q)\circ[i(P),d_\rho])$$

$$=i(V)\circ((i(P)\circ d_\rho-(-1)^p d_\rho\circ i(P))\circ i(Q)-(-1)^{(p-1)q}i(Q)\circ(i(P)\circ d_\rho-(-1)^p d_\rho\circ i(P)))$$

$$\begin{aligned}
=\;&i(V)\circ(i(P)\circ d_\rho\circ i(Q)-(-1)^p d_\rho\circ i(P)\circ i(Q)-(-1)^{(p-1)q}i(Q)\circ i(P)\circ d_\rho\\
&+(-1)^{(p-1)q+p}i(Q)\circ d_\rho\circ i(P))
\end{aligned}$$

on utilise les propriétés du produit intérieur:

$$i(V)\circ i(P)=i(V\wedge P)=(-1)^p i(P)\circ i(V)$$

et la formule (5), alors

$$i(V)\circ[[i(P),d_\rho],i(Q)]$$

$$\begin{aligned} = \quad & (-1)^p i(P)\circ(L_\rho(V)-d_\rho\circ i(V))\circ i(Q)\\ & -(-1)^p(L_\rho(V)-d_\rho\circ i(V))\circ i(P)\circ i(Q)\\ & -(-1)^{(p-1)q+q+p}i(Q)\circ i(P)\circ(L_\rho(V)-d_\rho\circ i(V))\\ & +(-1)^{(p-1)q+p+q}i(Q)\circ(L_\rho(V)-d_\rho\circ i(V))\circ i(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \quad & (-1)^p i(P)\circ L_\rho(V)\circ i(Q)-(-1)^p L_\rho(V)\circ i(P)\circ i(Q)\\ & -(-1)^{(p-1)q+q+p}i(Q)\circ i(P)\circ L_\rho(V)\\ & +(-1)^{(p-1)q+p+q}i(Q)\circ L_\rho(V)\circ i(P)-(-1)^{q+p}i(P)\circ d_\rho\circ i(Q)\circ i(V)\\ & +(-1)^q d_\rho\circ i(P)\circ i(Q)\circ i(V)-(-1)^{(p-1)q+q+p}i(Q)\circ i(P)\circ d_\rho\circ i(V)\\ & -(-1)^{(p-1)q+q}i(Q)\circ d_\rho\circ i(P)\circ i(V)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \quad & (-1)^p i(P)\circ L_\rho(V)\circ i(Q)-(-1)^p L_\rho(V)\circ i(P)\circ i(Q)\\ & -(-1)^{(p-1)q+q+p}i(Q)\circ i(P)\circ L_\rho(V)\\ & +(-1)^{(p-1)q+p+q}i(Q)\circ L_\rho(V)\circ i(P)-(-1)^{q+p}(i(P)\circ d_\rho\circ i(Q)\\ & -(-1)^p d_\rho\circ i(P)\circ i(Q)-(-1)^{(p-1)q}i(Q)\circ i(P)\circ d_\rho\\ & -(-1)^{(p-1)q+p}i(Q)\circ d_\rho\circ i(P))\circ i(V)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \quad & (-1)^p i(P)\circ L_\rho(V)\circ i(Q)-(-1)^p L_\rho(V)\circ i(P)\circ i(Q)\\ & -(-1)^{(p-1)q+q+p}i(Q)\circ i(P)\circ L_\rho(V)+(-1)^{(p-1)q+p+q}i(Q)\circ L_\rho(V)\circ i(P)\\ & -(-1)^{q+p}([i(P),d_\rho]\circ i(Q)-(-1)^{(p-1)q}i(Q)\circ[i(P),d_\rho])\circ i(V)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \quad & (-1)^p i(P)\circ L_\rho(V)\circ i(Q)-(-1)^p L_\rho(V)\circ i(P)\circ i(Q)\\ & -(-1)^{(p-1)q+q+p}i(Q)\circ i(P)\circ L_\rho(V) \;+\; (-1)^{(p-1)q+p+q}i(Q)\circ L_\rho(V)\circ i(P)\\ & +(-1)^{q+p-1}[[i(P),d_\rho],i(Q)]\circ i(V).\end{aligned}$$

Maintenant on utilise la proposition 2.3.1.4:

$$\begin{aligned} & (-1)^p i(P)\circ L_\rho(V)\circ i(Q)=(-1)^p i(P)\circ(i(Q)\circ L_\rho(V)+i(L_\rho(V)Q))\\ &=(-1)^p i(P\wedge Q)\circ L_\rho(V)+(-1)^p i(P\wedge L_\rho(V)Q)-(-1)^p L_\rho(V)\circ i(P)\circ i(Q)\\ &=-(-1)^p L_\rho(V)\circ i(P\wedge Q)-(-1)^{(p-1)q+q+p}i(Q)\circ i(P)\circ L_\rho(V)\\ &=-(-1)^p i(P\wedge Q)\circ L_\rho(V)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{pq+p}i(Q)\circ L_\rho(V)\circ i(P) &= (-1)^{pq+p}(L_\rho(V)\circ i(Q)-i(L_\rho(V)Q))\circ i(P)\\ &= (-1)^p L_\rho(V)\circ i(P\wedge Q)-(-1)^p i(P\wedge L_\rho(V)Q).\end{aligned}$$

La somme de ces termes est nulle, donc:

$$i(V)\circ[[i(P),d_\rho],i(Q)]=(-1)^{q+p-1}[[i(P),d_\rho],i(Q)]\circ i(V).$$

Maintenant, si R est décomposable, $R = R^1 \wedge ... \wedge R^r$,comme $i(R) = i(R^1) \circ ... \circ i(R^1)$ en utilisant r-fois le resultat pour $R = V$, on obtient le resultat. Maintenant si R est quelconque comme il est combinaison linéaire d'éléments décomposables et que $i(R) \circ [[i(P), d_\rho], i(Q)]$ est $\mathbb{R}-$linéaire en R, on obtient le resultat général.♠

Théorème 2.5.1. *Le crochet de Schouten-Nijenhuis:*

Soient $p, q \in \mathbb{Z}$, $P \in \chi^p(M,E)$, $Q \in \chi^q(M,E)$. Il existe un unique élément de $\chi^{p+q-1}(M,E)$ noté $[P,Q]$ et appelé le crochet de Schouten-Nijenhuis de P et de Q, tel que $i([P,Q])$ est l'endomorphisme homogène de degré $p+q-1$ de l'algèbre graduée extérieure $\Omega(M,E^*)$ défini par :

$$i([P,Q]) = [[i(P), d_\rho], i(Q)].$$

Les crochets de gauche étant les crochets gradués des endomorphismes gradués.

Preuve:

Observons que pour tout $r \in \mathbb{Z}$, l'application $\eta \mapsto [[i(P), d_\rho], i(Q)].\eta$ de $\Omega^r(M,E)$ dans $\Omega^{r-p-q+1}(M,E^*)$ est $\mathbb{R}-$linéaire. On va prouver qu'elle est $\mathcal{C}^\infty(M)-$linéaire. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on calcule $[[i(P), d_\rho], i(Q)].(f.\eta)$, rappelons que $i(P)$ est $\mathcal{C}^\infty(M)-$linéaire

$$[[i(P), d_\rho], i(Q)].(f\eta)$$

$$\begin{aligned} &= ((i(P) \circ d_\rho - (-1)^p d_\rho \circ i(P)) \circ i(Q))(f\eta) \\ &\quad -(-1)^{(p-1)q}(i(Q) \circ (i(P) \circ d_\rho - (-1)^p d_\rho \circ i(P)))(f\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i(P) \circ d_\rho \circ i(Q)(f\eta) - (-1)^p d_\rho \circ i(P) \circ i(Q)(f\eta) \\ &\quad -(-1)^{(p-1)q} i(Q) \circ (i(P) \circ d_\rho(f\eta) + (-1)^{(p-1)q+p} i(Q) \circ d_\rho \circ i(P)(f\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i(P) \circ d_\rho(f.Q\rfloor\eta) - (-1)^p d_\rho(f.P \wedge Q\rfloor\eta) - (-1)^q P \wedge Q\rfloor d_\rho(f\eta) \\ &\quad +(-1)^{(p-1)q+p} i(Q) \circ d_\rho(f.P\rfloor\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P\rfloor(d_\rho f \wedge (Q\rfloor\eta) + f.d_\rho(Q\rfloor\eta)) - (-1)^p(d_\rho f \wedge (P \wedge Q\rfloor\eta) + f.d_\rho(P \wedge Q\rfloor\eta)) \\ &\quad -(-1)^q P \wedge Q\rfloor(d_\rho f \wedge \eta + f.d_\rho\eta) + (-1)^{(p-1)q+p} Q\rfloor(d_\rho f \wedge P\rfloor\eta + f.d_\rho(P\rfloor\eta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f.P\rfloor(d_\rho(Q\rfloor\eta)) - (-1)^p f.d_\rho(P \wedge Q\rfloor\eta) - (-1)^q f.P \wedge Q\rfloor d_\rho\eta \\ &\quad +(-1)^{(p-1)q+p} f.Q\rfloor d_\rho(P\rfloor\eta) + P\rfloor(d_\rho f \wedge (Q\rfloor\eta)) - (-1)^p d_\rho f \wedge (P \wedge Q\rfloor\eta) \\ &\quad -(-1)^q P \wedge Q\rfloor(d_\rho f \wedge \eta) + (-1)^{(p-1)q+p} Q\rfloor(d_\rho f \wedge P\rfloor\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f.[[i(P), d_\rho], i(Q)].\eta + P\rfloor(d_\rho f \wedge (Q\rfloor\eta)) - (-1)^p d_\rho f \wedge (P \wedge Q\rfloor\eta) \\ &\quad -(-1)^q P \wedge Q\rfloor(d_\rho f \wedge \eta) + (-1)^{(p-1)q+p} Q\rfloor(d_\rho f \wedge P\rfloor\eta). \end{aligned}$$

D'après le premier lemme on a:

$$\begin{aligned} 0 &= P\rfloor(d_\rho f \wedge (Q\rfloor\eta)) - (-1)^p d_\rho f \wedge (P \wedge Q\rfloor\eta) - (-1)^q P \wedge Q\rfloor(d_\rho f \wedge \eta) \\ &\quad +(-1)^{(p-1)q+p} Q\rfloor(d_\rho f \wedge P\rfloor\eta), \end{aligned}$$

d'où

$$[[i(P), d_\rho], i(Q)].(f\eta) = f.[[i(P), d_\rho], i(Q)].\eta.$$

Donc $[[i(P), d_\rho], i(Q)]$ est $\mathcal{C}^\infty(M)-$linéaire.

Pour $r = p + q - 1$, $\eta \mapsto [[i(P), d_\rho], i(Q)].\eta$ est $\mathcal{C}^\infty(M)-$linéaire de $\Omega^{p+q-1}(M, E^*)$ dans $\mathcal{C}^\infty(M)$.Cela prouve l'existance d'un unique élément $[P, Q]$ dans $\chi^{p+q-1}(M, E)$ tel que pour tout η dans $\Omega^{p+q-1}(M, E^*)$:

$$i([P, Q])\eta = [[i(P), d_\rho], i(Q)].\eta$$

On doit montrer que cette formule est valable pour tout $r \in \mathbb{Z}$. Pour $r < p + q - 1$: c'est trivial. Pour $r = p + q - 1$: on vient de le montrer. Pour $r > p+q-1$: soit $\eta \in \Omega^r(M, E^*)$. Comme $[[i(P), d_\rho], i(Q)].\eta$ et $i([P, Q])\eta$ sont dans $\Omega^{r-p-q+1}(M, E^*)$; il suffit de prouver que si on les évaluent sur tout $R \in \chi^{r-p-q+1}(M, E)$, ils prennent la même valeur. Soit $R \in \chi^{r-p-q+1}(M, E)$, il suffit d'établir que:

$$(i(R) \circ [[i(P), d_\rho], i(Q)])(\eta) = (i(R) \circ i([P, Q]))(\eta).$$

On utilise le second lemme:

$$i(R) \circ [[i(P), d_\rho], i(Q)] = (-1)^{(p+q-1)(r-p-q+1)}[[i(P), d_\rho], i(Q)] \circ i(R), \text{ donc :}$$

$$(i(R) \circ [[i(P), d_\rho], i(Q)])(\eta) = (-1)^{(p+q-1)(r-p-q+1)}[[i(P), d_\rho], i(Q)](i(R)\eta).$$

Comme $i(R).\eta \in \Omega^{p+q-1}(M, E^*)$, en utilisant le cas précédant on obtient que

$$i([P, Q])(i(R)\eta) = [[i(P), d_\rho], i(Q)](i(R)\eta), \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} & (i(R) \circ [[i(P), d_\rho], i(Q)])(\eta) \\ = \;& (-1)^{(p+q-1)(r-p-q+1)} i([P, Q])(i(R)\eta) \\ = \;& (-1)^{(p+q-1)(r-p-q+1)} i([P, Q] \wedge R)\eta \\ = \;& (-1)^{(p+q-1)(r-p-q+1)+(r-p-q+1)(p+q-1)} i(R) \circ i([P, Q])(\eta) \\ = \;& i(R) \circ i([P, Q])(\eta). \end{aligned}$$

Comme R et η sont quelconques, on a le resultat voulu.♠

Proposition 2.5.1. *Propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis:*
Le crochet de Schouten-Nijenhuis a les propriétés suivantes:

(1) *Pour tout* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$[f, g] = 0.$$

(2) *Pout tout* $V \in \chi^1(M, E), q \in \mathbb{Z}, Q \in \chi^q(M, E)$:

$$[V, Q] = L_\rho(V).Q.$$

(3) *Pour tout* $p, q \in \mathbb{Z}, P \in \chi^p(M, E), Q \in \chi^q(M, E)$:

$$[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, P]; \;(\mathbb{Z} - \textit{anticommutativité}).$$

(4) *Soient* $p \in \mathbb{Z}$, $P \in \chi^p(M,E)$. *L'application:*$Q \mapsto [P,Q]$ *est une dérivation de l'algèbre graduée extérieure* $\chi(M,E)$ *de degré* $p-1$, *i.e. on a* $\forall r \in \mathbb{Z}, \forall R \in \chi^r(M,E), \forall Q \in \chi(M,E)$:

$$[P, R \wedge Q] = [P,R] \wedge Q + (-1)^{(p-1)r} R \wedge [P,Q].$$

(5) *Soient* $p,q,r \in \mathbb{Z}, P \in \chi^p(M,E), R \in \chi^r(M,E), Q \in \chi^q(M,E)$; *on a l'identité de Jacobi graduée:*

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}[[P,Q],R]+(-1)^{(q-1)(p-1)}[[Q,R],P]+(-1)^{(r-1)(q-1)}[[R,P],Q] = 0.$$

Preuve:

1/ $[f,g] \in \chi^{-1}(M,E)$.

2/ Si$V \in \chi^1(M,E), Q \in \chi^q(M,E), \xi \in \Omega(M,E^*)$, alors la formule

$$L_\rho(V)(Q \rfloor \xi) = L_\rho(V)(Q) \rfloor \xi + Q \rfloor L_\rho(V)(\xi),$$

devient:

$$\begin{aligned} [L_\rho(V), i(Q)] &= L_\rho(V) \circ i(Q) - i(Q) \circ L_\rho(V) \\ &= i(L_\rho(V)(Q)) \\ &= i([V,Q]). \end{aligned}$$

3/ On utilise l'identité de Jacobi graduée et les propriétés du crochet gradué:

$$(-1)^{pq}[[i(P),d_\rho],i(Q)] + (-1)^q[[i(Q),i(P)],d_\rho] + (-1)^p[[d_\rho,i(Q)],i(P)] = 0$$

$$\begin{aligned} [i(Q),i(P)] &= i(Q) \circ i(P) - (-1)^{pq} i(P) \circ i(Q) \\ &= i(Q \wedge P) - (-1)^{pq} i(P \wedge Q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

on obtient:

$$(-1)^{pq}[[i(P),d_\rho],i(Q)] + (-1)^{p+q-1}[[i(Q),d_\rho],i(P)] = 0$$

donc:

$$(-1)^{pq} i([P,Q]) + (-1)^{p+q-1} i([Q,P]) = 0$$

d'où le resultat.

4/ Soient: $p,q,r \in \mathbb{Z}, P \in \chi^p(M,E), Q \in \chi^q(M,E), R \in \chi^r(M,E)$:

$$i([P, R \wedge Q]) = [L_\rho(P), i(R \wedge Q)]$$

$$= L_\rho(P) \circ i(R \wedge Q) - (-1)^{(p-1)(r+q)} i(R \wedge Q) \circ L_\rho(P)$$

$$\begin{aligned} = \quad & L_\rho(P) \circ i(R) \circ i(Q) - (-1)^{(p-1)(r+q)} i(R) \circ i(Q) \circ L_\rho(P) \\ & + (-1)^{(p-1)r} i(R) \circ L_\rho(P) \circ i(Q) - (-1)^{(p-1)r} i(R) \circ L_\rho(P) \circ i(Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \quad & (L_\rho(P) \circ i(R) - (-1)^{(p-1)r} i(R) \circ L_\rho(P)) \circ i(Q) \\ & + (-1)^{(p-1)r} i(R) \circ (L_\rho(P) \circ i(Q) - (-1)^{(p-1)q} i(Q) \circ L_\rho(P)) \end{aligned}$$

$$= [L_\rho(P), i(R)] \circ i(Q) + (-1)^{(p-1)r} i(R) \circ [L_\rho(P), i(Q)]$$

$$= i([P,R]) \circ i(Q) + (-1)^{(p-1)r} i(R) \circ i([P,Q])$$
$$= i([P,R] \wedge Q + (-1)^{(p-1)r} R \wedge [P,Q])$$

i.e.:

$$[P, R \wedge Q] = [P,R] \wedge Q + (-1)^{(p-1)r} R \wedge [P,Q].$$

5/ Soient $p, q, r \in \mathbb{Z}, P \in \chi^p(M,E), R \in \chi^r(M,E), Q \in \chi^q(M,E)$:

$$\begin{array}{rcl} i([[P,Q],R]) & = & [L_\rho([P,Q]), i(R)] \\ & = & [[L_\rho(P), L_\rho(Q)], i(R)] \end{array}$$

on utilise l'identité de Jacobi graduée

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (-1)^{(p-1)r}[[L_\rho(P), L_\rho(Q)], i(R)] + (-1)^{r(q-1)}[[i(R), L_\rho(P)], L_\rho(Q)] \\ & & +(-1)^{(p-1)(q-1)}[[L_\rho(Q), i(R)], L_\rho(P)] \end{array}$$

or:

$$\begin{array}{rcl} [[L_\rho(Q), i(R)], L_\rho(P)] & = & [i([Q,R]), L_\rho(P)] \\ & = & -(-1)^{(p-1)(r+q-1)}[L_\rho(P), i([Q,R])] \\ & = & -(-1)^{(p-1)(r+q-1)} i([P,[Q,R]]) \\ & = & (-1)^{(p-1)} i([[Q,R],P]) \end{array}$$

de même:

$$\begin{array}{rcl} [[i(R), L_\rho(P)], L_\rho(Q)] & = & -(-1)^{r(p-1)}[[L_\rho(P), i(R)], L_\rho(Q)] \\ & = & (-1)^{r(p-1)-q} i([[P,R],Q]) \\ & = & (-1)^{p+q} i([[R,P],Q]); \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} i([[P,Q],R]) & = & -(-1)^{(p-1)r}((-1)^{r(q-1)}[[i(R), L_\rho(P)], L_\rho(Q)] + \\ & & (-1)^{(p-1)(q-1)}[[L_\rho(Q), i(R)], L_\rho(P)]) \\ & = & -(-1)^{(p-1)r}((-1)^{r(q-1)}(-1)^{p+q} i([[R,P],Q]) + \\ & & (-1)^{(p-1)(q-1)}(-1)^{(p-1)} i([[Q,R],P])) \\ & = & -(-1)^{(p+q)(r-1)} i([[R,P],Q]) - (-1)^{(p-1)(r+q)} i([[Q,R],P]); \end{array}$$

donc:

$$[[P,Q],R] + (-1)^{(p-1)(r+q)}[[Q,R],P] + (-1)^{(p+q)(r-1)}[[R,P],Q] = 0.\spadesuit$$

Remarque 2.5.1. *Le crochet de Schouten-Nijenhuis est local.*

Remarque 2.5.2. *Les différents degrés sur une algèbre graduée:*

L'algèbre extérieure $\chi(M,E)$ est une algèbre graduée associative pour le produit extérieur comme loi de composition. Pour cette structure l'ensemble des éléments homogènes de degré p est $\chi^p(M,E)$.

La proposition précédente montre que $\chi(M,E)$ munit de la loi de composition "crochet de Schouten-Nijenhuis" a une structure **d'algèbre de Lie graduée.** Pour cette structure l'ensemble des éléments homogènes de degré p est $\chi^{p+1}(M,E)$.

Ainsi il faut faire attention quand on parle de degré de préciser la structure avec laquelle on travaille.

Remarque 2.5.3. *L'ancre comme morphisme d'algèbres de Lie graduées:*

Par définition d'une algébroïde de Lie, l'application

$$\begin{array}{ccc} \chi^1(M,E) & \to & \chi^1(M,TM) \\ \sigma & \longmapsto & \rho \circ \sigma \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie. On peut construire une application de $\chi^p(M,E)$ sur $\chi^p(M,TM)$. En premier lieu pour les éléments décomoposables:

si $P = X_1 \wedge ... \wedge X_p \in \chi^p(M,E)$ avec $X_1,...,X_p \in \chi^1(M,E)$, on pose $\rho \circ P := \rho \circ X_1 \wedge ... \wedge \rho \circ X_p \in \chi^p(M,TM)$ si $p \geq 1$, et $\rho \circ f := f$ si $p = 0$. On prolonge cette application par $\mathcal{C}^\infty(M)-$linéarité à tout $\chi(M,E)$ et $\chi(M,TM)$. Cette application est un morphisme de $\chi(M,E)$ dans $\chi(M,TM)$ munis de leurs structures d'algèbres réelles extérieures et aussi pour leurs structures d'algèbres graduées induitent par le crochet de Schouten-Nijenhuis.

3. Algébroïdes de Lie et structures de Poisson

3.1. **Les algébroïdes de Lie par le fibré dual.** Soit (E,π,M) un fibré vectoriel, (E^*,ϖ,M) son fibré dual. On a vu que si (E,π,M,ρ) est un algébroïde de Lie, l'ancrage permet de définir une dérivation d'ordre 1 sur l'algèbre extérieure $\Omega(M,E^*)$ qu'on a noté par d_ρ vérifiant $d_\rho \circ d_\rho = 0$.

Maintenant on va faire le chemin inverse. La donnée sur un fibré vectoriel (E,π,M) d'une dérivation δ d'ordre 1 sur $\Omega(M,E^*)$ telle que $\delta \circ \delta = 0$ détermine une structure d'algébroïde de Lie sur ce fibré.

Lemme 3.1.1. *Soit δ une dérivation d'ordre 1 de l'algèbre réelle graduée extérieure $\Omega(M,E^*)$. Alors, pour toute paire de sections (X,Y) de (E,π,M), il existe une unique section $[X,Y]_\delta$ de (E,π,M) telle que:*

$$i([X,Y]_\delta) = [[i(X),\delta], i(Y)].$$

Cette section est appellée le $\delta-$crochet de X de et de Y.

Preuve:

Considerons l'application $K : \xi \mapsto K(\xi) = [[i(X),\delta], i(Y)].\xi$, où le crochet utilisé est le commutateur gradué des endomorphismes homogènes. C'est une dérivation d'ordre -1 de l'algèbre graduée extérieure $\Omega(M,E^*)$. Par conséquent, K s'annulle sur $\Omega^0(M,E) = \mathcal{C}^\infty(M)$ et est $\mathcal{C}^\infty(M)-$linéaire

$$\begin{array}{rcl} K(f.\xi) & = & K(f) \wedge \xi + f.K(\xi) \\ & = & f.K(\xi) \end{array}$$

il existe donc un unique élément $[X,Y]_\delta$ de $\Gamma(M,E)$ tel que:

$$K(\xi) = \langle \xi, [X,Y]_\delta \rangle, \forall \xi \in \Omega^1(M,E).$$

Comme $i([X,Y]_\delta)$ et $[[i(X),\delta],i(Y)]$ sont deux dérivations d'ordres -1 de l'algèbre extérieure $\Omega(M,E^*)$ qui coïncident sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ et $\Omega^1(M,E^*)$, que les dérivations sont locales et que l'algèbre graduée extérieure $\Omega(M,E^*)$ est engendrée localement par ses élements d'ordres 0 et 1 on a

$$i([X,Y]_\delta) = [[i(X),\delta],i(Y)].\spadesuit$$

Remarque 3.1.1. *Un petit calcul montre que :*

$$[X,Y]_\delta = -[Y,X]_\delta.$$

Lemme 3.1.2. *Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédant, posons pour toute section X :*

$$L_\delta(X) := [i(X),\delta].$$

Alors:

(1) *Pour toute section X de (E,π,M), on a:*

$$[L_\delta(X),\delta] = [i(X),\delta^2].$$

(2) *Pour toute paire de sections (X,Y) de (E,π,M), on a:*

$$[L_\delta(X),L_\delta(Y)] - L_\delta([X,Y]_\delta) = [[i(X),\delta^2],i(Y)].$$

(3) *Pour tout triplet de sections (X,Y,Z) de (E,π,M), on a:*

$$i([X,[Y,Z]_\delta]_\delta + [Y,[Z,X]_\delta]_\delta + [Z,[X,Y]_\delta]_\delta) = [[[i(X),\delta^2],i(Y)],i(Z)].$$

Preuve:

1/ $L_\delta(X) = [i(X),\delta]$ est clairement une dérivation d'ordre 0 de l'algèbre graduée extérieure $\Omega(M,E^*)$;

$$\begin{aligned}
[L_\delta(X),\delta] &= L_\delta(X)\circ\delta - \delta\circ L_\delta(X)\\
&= [i(X),\delta]\circ\delta - \delta\circ[i(X),\delta]\\
&= (i(X)\circ\delta + \delta\circ i(X))\circ\delta - \delta\circ(i(X)\circ\delta + \delta\circ i(X))\\
&= i(X)\circ\delta^2 - (-1)^{2.(-1)}\delta^2\circ i(X)
\end{aligned}$$

δ^2 : est homogène de degré 2, $i(X)$: est homogène de degré -1 donc:

$$[L_\delta(X),\delta] = [i(X),\delta^2]$$

2/ $[L_\delta(X),L_\delta(Y)] = [L_\delta(X),[i(Y),\delta]]$, par Jacobi graduée:

$$[L_\delta(X),[i(Y),\delta]] + [i(Y),[\delta,L_\delta(X)]] - [\delta,[L_\delta(X),i(Y)]] = 0$$

donc:

$$\begin{aligned}
[L_\delta(X),L_\delta(Y)] &= [L_\delta(X),[i(Y),\delta]]\\
&= -[i(Y),[\delta,L_\delta(X)]] + [\delta,[L_\delta(X),i(Y)]]\\
&= -[[\delta,L_\delta(X)],i(Y)] + [[L_\delta(X),i(Y)],\delta]\\
&= [[L_\delta(X),\delta],i(Y)] + [[[i(X),\delta],i(Y)],\delta]\\
&= [[i(X),\delta^2],i(Y)] + [i([X,Y]_\delta),\delta]\\
&= [[i(X),\delta^2],i(Y)] + L_\delta([X,Y]_\delta)
\end{aligned}$$

3/ On utilise Jacobie graduée:

$$\begin{aligned}
& i([X,[Y,Z]_\delta]_\delta) \\
= \ & [[i(X),\delta],i([Y,Z]_\delta)] \\
= \ & [[i(X),\delta],[[i(Y),\delta],i(Z)]] \\
= \ & [L_\delta(X),[L_\delta(Y),i(Z)]] \\
= \ & -[L_\delta(Y),[i(Z),L_\delta(X)]] - [i(Z),[L_\delta(X),L_\delta(Y)]] \\
= \ & [L_\delta(Y),[L_\delta(X),i(Z)]] - [i(Z),[L_\delta(X),L_\delta(Y)]] \\
= \ & [L_\delta(Y),[L_\delta(X),i(Z)]] - [i(Z),[[i(X),\delta^2],i(Y)] + L_\delta([X,Y]_\delta)] \\
= \ & [L_\delta(Y),[L_\delta(X),i(Z)]] - [i(Z),[[i(X),\delta^2],i(Y)]] - [i(Z),L_\delta([X,Y]_\delta)] \\
= \ & -i(\ [Y,[Z,X]_\delta]_\delta) + [[[i(X),\delta^2],i(Y)],i(Z)] - i([Z,[X,Y]_\delta]_\delta).\spadesuit
\end{aligned}$$

Théorème 3.1.1. *Soit (E,π,M) un fibré vectoriel, (E^*,ϖ,M) son fibré dual. Soit δ une dérivation d'ordre 1 de l'algèbre graduée extérieure $\Omega(M,E^*)$ telle que*

$$\delta^2 = \delta\circ\delta = 0.$$

Alors δ détermine une structure naturelle d'algébroïde de Lie sur (E,π,M). Pour cette structure l'ancrage $\rho : E \to TM$ est l'unique morphisme de fibrés vectoriels tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et toute section X de (E,π,M) :

$$i(\rho\circ X).df = \langle \delta f, X\rangle \,.$$

Le crochet $(X,Y)\mapsto \{X,Y\} = [X,Y]_\delta$ est le crochet défini par: $\{X,Y\}$ est l'unique section de (E,π,M) vérifiant:

$$i(\{X,Y\}) = [[i(X),\delta],i(Y)].$$

La $\Omega(M,E^*)-$différentielle extérieure associée à cette structure est δ.

Preuve:

Comme $\delta^2=0$ d'après le lemme (3.1.2.3) le crochet $\{.,.\}$ vérifie l'identitée de Jacobi, donc $\Gamma(M,E)$ muni de ce crochet est une algèbre de Lie. Il vérifie aussi la règle de Leibnitz. En effet; soient $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ et deux sections X,Y de (E,π,M)

$$\begin{aligned}
i(\{X,f.Y\}) &= [[i(X),\delta],i(f.Y)] \\
&= [L_\delta(X),i(f.Y)] \\
&= L_\delta(X)\circ i(f.Y) - i(f.Y)\circ L_\delta(X) \\
&= L_\delta(X)(f).i(Y) + f.L_\delta(X)\circ i(Y) - f.i(Y)\circ L_\delta(X) \\
&= [i(X),\delta](f).i(Y) + f.[L_\delta(X),i(Y)] \\
&= (i(X)\circ\delta + \delta\circ i(X))(f).i(Y) + f.[L_\delta(X),i(Y)] \\
&= i(X)\circ\delta(f).i(Y) + f.[L_\delta(X),i(Y)] \\
&= \langle \delta f, X\rangle\,.i(Y) + f.[L_\delta(X),i(Y)].
\end{aligned}$$

On doit montrer que $\langle \delta f, X\rangle = i(\rho\circ X).df$ pour un certain morphisme de fibrés vectoriels $\rho : E\to TM$:

comme δ est une dérivation, c'est un operateur local, soit $p \in M$, soit $n = \dim(M)$ et $x = (x^1, ..., x^n)$ une carte de M en p, par la formule de Taylor:

$$f(q) = f(p) + \sum_{1 \leq i \leq n} (q^i - p^i).\phi_i(q),$$

où $\phi_i(q) \underset{q \to p}{\to} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ et ϕ_i est lisse au voisinage de p. Ainsi:

$$\delta f(q) = \delta(f(p)) + \sum_{1 \leq i \leq n} \delta((q^i - p^i).\phi_i(q)).$$

Comme δ est une dérivation d'ordre 1, on a

$$\delta(f) = \delta(1.f) = \delta(1).f + 1.\delta(f)$$

donc δ est nulle sur le constantes, on en déduit que

$$\delta f(q) = \sum_{1 \leq i \leq n} (\delta(q^i).\phi_i(q)) - (q^i - p^i).\delta(\phi_i)(q)).$$

Quand q tend vers p :

$$\delta f(p) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).\delta(x^i)(p).$$

Soit $\{U_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement de M par des domaines de cartes. Soit $x_\alpha = (x_\alpha^1, ..., x_\alpha^n)$ la carte associée à l'indice α. Considérons les fibrés $\pi_\alpha : E_\alpha \to U_\alpha$ où $E_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha)$ et $\pi_\alpha = \pi_{|U_\alpha}$; leurs fibrés duaux sont notés $(E_\alpha^*, \varpi_\alpha, U_\alpha)$. Pour chaque indice α considérons $\rho_\alpha^t : T^*U_\alpha \to E_\alpha^*$ définie par:

$$\rho_\alpha^t(p, \sum_{1 \leq i \leq n} \xi^i.d_p x_\alpha^i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi^i.\delta(x_\alpha^i)(p).$$

Il est clair que ρ_α^t est un morphisme de fibrés vectoriels. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$:

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} := g_{\alpha\beta}$$

est un difféomorphisme. Si l'on écrit

$$\xi = \sum_{1 \leq i \leq n} \varsigma^i.d_p x_\alpha^i = \sum_{1 \leq i \leq n} \eta^i.d_p x_\beta^i \in T_p^*(U_\alpha \cap U_\beta),$$

si on note par $(e^1, ..., e^n)$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$x_\beta^i = e^i \circ x_\beta = e^i \circ g_{\alpha\beta} \circ x_\alpha,$$

on obtient que

$$d_p x_\beta^i = e^i \circ d_{x_\alpha(p)} g_{\alpha\beta} \circ d_p x_\alpha.$$

On note

$$A = (A_{ij}) = mat(d_{x_\alpha(p)} g_{\alpha\beta}; (e_k));$$

on obtient:

$$d_p x_\beta^i = \sum_{1 \leq j \leq n} A_{ij}.d_p x_\alpha^j$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\rho^t_\beta(p,\xi) &= \rho^t_\beta(p,\sum_{1\le i\le n}\eta^i.d_px^i_\beta)\\ &= \sum_{1\le i\le n}\eta^i.\delta(x^i_\beta)(p)\\ &= \sum_{1\le i\le n}\eta^i.\delta(e^i\circ g_{\alpha\beta}\circ x_\alpha)(p).\end{aligned}$$

Or, si on note

$$h^i(q) := e^i\circ g_{\alpha\beta}\circ x_\alpha(q)$$

alors

$$h^i(q) = h^i(p) + \sum_{1\le j\le n}(q^j-p^j).\varphi_j(q),\ \text{avec}\ \varphi_j(q)\underset{q\to p}{\to}\frac{\partial h^i}{\partial x^j_\alpha}(p),$$

donc

$$\begin{aligned}\delta(e^i\circ g_{\alpha\beta}\circ x_\alpha)(p) &= \sum_{1\le j\le n}\frac{\partial h^i}{\partial x^j_\alpha}(p).\delta(x^j_\alpha)(p)\\ &= \rho^t_\alpha(p,\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial h^i}{\partial x^j_\alpha}(p).d_px^j_\alpha)\end{aligned}$$

en utilisant la relation $\frac{\partial h^i}{\partial x^j_\alpha}(p) = A_{ij}$ on a

$$\begin{aligned}\rho^t_\beta(p,\xi) &= \sum_{1\le i\le n}\eta^i.\rho^t_\alpha(p,\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial h^i}{\partial x^j_\alpha}(p).d_px^j_\alpha)\\ &= \rho^t_\alpha(p,\sum_{1\le i\le n}\eta^i.\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial h^i}{\partial x^j_\alpha}(p).d_px^j_\alpha)\\ &= \rho^t_\alpha(p,\sum_{1\le i\le n}\eta^i.\sum_{1\le j\le n}A_{ij}.d_px^j_\alpha)\\ &= \rho^t_\alpha(p,\xi)\end{aligned}$$

car $\sum_{1\le i\le n}\eta^i.A_{ij} = \varsigma^j$, ainsi

$$\rho^t_\beta(p,\xi) = \rho^t_\alpha(p,\xi).$$

Soit $\rho^t : T^*M \to E^*$ défini par induction par les ρ^t_α. On considère son transposé $\rho : E \to TM$. C'est un morphisme de fibrés vectoriels. D'après ce qui précéde on a

$$\begin{aligned}
\delta f(p) &= \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).\delta(x^i)(p) \\
&= \rho^t(p, \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial f}{\partial x^i} d_p x^i) \\
&= \rho^t(p, d_p f).
\end{aligned}$$

Donc pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et toute section X de (E, π, M) on a

$$\langle \delta f(p), X(p)\rangle = \left\langle \rho^t(p, d_p f), X(p)\right\rangle = \langle d_p f, \rho \circ X(p)\rangle\,,\ \forall p \in M$$

i.e.:

$$i(\rho \circ X).df = \langle \delta f, X\rangle\,.$$

On a donc notre ancrage $\rho : E \to TM$ qui vérifie: $i(\rho \circ X).df = \langle \delta f, X\rangle$ et donc:

$$\{X, f.Y\} = f.\{X, Y\} + df(\rho \circ X).Y.$$

Si $X, Y \in \Gamma(M, E)$:

$$\begin{gathered}
i(\rho \circ \{X, Y\}).df = \langle \delta f, \{X, Y\}\rangle \\
= [[i(X), \delta], i(Y)].\delta f \\
= ([i(X), \delta] \circ i(Y) - i(Y) \circ [i(X), \delta]).\delta f \\
= (i(X) \circ \delta \circ i(Y) + \delta \circ i(X) \circ i(Y) - i(Y) \circ i(X) \circ \delta - i(Y) \circ \delta \circ i(X)).\delta f \\
= (i(X) \circ \delta \circ i(Y) - i(Y) \circ \delta \circ i(X)).\delta f \\
= i(X) \circ \delta(df(\rho \circ Y)) - i(Y) \circ \delta(df(\rho \circ X)) \\
= d(df(\rho \circ Y))(\rho \circ X) - d(df(\rho \circ X))(\rho \circ Y) \\
= (\rho \circ X) \circ (\rho \circ Y).f - (\rho \circ Y) \circ (\rho \circ X).f \\
= [\rho \circ X, \rho \circ Y].f.
\end{gathered}$$

donc

$$\rho \circ \{X, Y\} = [\rho \circ X, \rho \circ Y]$$

et on a notre structure d'algébroïde de Lie sur (E, π, M).

Reste à montrer que $d_\rho = \delta$: comme ce sont toutes deux des dérivations d'ordre 1 de l'algèbre graduée extérieure $\Omega(M, E)$, qui est engendrée localement par ses élements d'ordres 0 et 1. Il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur les éléments homogènes d'ordres 0 et 1. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$d_\rho f = \delta f \Leftrightarrow d_\rho f.X = \delta f.X,\ \forall X \in \Gamma(M, E)$$

or, $\forall X \in \Gamma(M, E)$: $d_\rho f.X = (\rho \circ X)f$ et $\delta f.X = i(\rho \circ X).df$ par définition de ρ. Soit $\xi \in \Omega^1(M, E)$:

$$d_\rho \xi = \delta \xi \Leftrightarrow d_\rho \xi(X, Y) = \delta \xi(X, Y),\ \forall X, Y \in \Gamma(M, E),$$

soient $X, Y \in \Gamma(M, E)$

$$d_\rho \xi(X, Y) = L_\rho(X)(\xi(Y)) - L_\rho(Y)(\xi(X)) - \xi(\{X, Y\})$$

$$= (L_\rho(X) \circ i(Y) - L_\rho(Y) \circ i(X) - i(\{X, Y\}))\xi$$

$$\begin{aligned} = \quad & (L_\rho(X) \circ i(Y) - L_\rho(Y) \circ i(X) - i(X) \circ \delta \circ i(Y) - \delta \circ i(X) \circ i(Y) \\ & + i(Y) \circ i(X) \circ \delta + i(Y) \circ \delta \circ i(X))\xi \end{aligned}$$

$$= (L_\rho(X) \circ i(Y) - L_\rho(Y) \circ i(X) - i(X) \circ \delta \circ i(Y) + i(Y) \circ i(X) \circ \delta + i(Y) \circ \delta \circ i(X))\xi$$

or,

$$\begin{aligned} L_\rho(X) \circ i(Y)(\xi) &= L_\rho(X)(\xi(Y)) \\ &= [i(X), d_\rho](\xi(Y)) \\ &= i(X) \circ d_\rho(\xi(Y)) - d_\rho \circ i(X)(\xi(Y)) \\ &= i(X) \circ d_\rho(\xi(Y)) \\ &= i(X) \circ \delta(\xi(Y)) \end{aligned}$$

donc

$$d_\rho \xi(X, Y)$$

$$= (i(X) \circ \delta \circ i(Y) - i(Y) \circ \delta \circ i(X) - i(X) \circ \delta \circ i(Y) + i(Y) \circ i(X) \circ \delta + i(Y) \circ \delta \circ i(X))\xi$$

$$= (i(Y) \circ i(X) \circ \delta)\xi.$$

Comme $\delta\xi(X, Y) = (i(Y) \circ i(X) \circ \delta)(\xi)$; on a donc le resultat voulu.♠

3.2. **Structures de Poisson.** On définira les variétés de Poisson, on étudiera leurs propriétés élémentaires, puis on montre qu'il existe une structure d'algébroïde de Lie naturelle sur le fibré cotangent d'une variété de Poisson.

Définition 3.2.1. *Soit M une variété lisse, un* ***crochet de Poisson*** *sur M est une application:*

$$\{.,.\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

qui vérifie

(1) $\mathbb{R}-$*bilinéarité;*
(2) *Antisymétrie:*

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M);$$

(3) *La règle de Leibnitz:*

$$\{f, h.g\} = h.\{f, g\} + g.\{f, h\}, \forall f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M);$$

(4) *L'identité de Jacobi:*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \forall f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

M munie d'un crochet de Poisson est appellée une **variété de Poisson**.

Exemple 3.2.1. *Les variétés symplectiques:*

Une **variété symplectique** est un couple (M, ω) où une M est variété lisse et ω est une $2-$forme férmé et partout non dégénérée.

Pour une telle structure on définit pour chaque fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ le **champ hamiltonien** associé à f, qu'on note $X_f \in \chi^1(M)$ par:
X_f est l'unique élément de $\chi^1(M)$ solution de l'équation

$$X \rfloor \omega = -df.$$

Réciproquement, un champ de vecteurs X est dit **hamiltonien** s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $X \rfloor \omega = -df$. Autrement dit "un champ de vecteurs X est dit hamiltonien si $X \rfloor \omega$ est exacte". Dans ce cas on a

$$L_X \omega = X \rfloor d\omega + d(X \rfloor \omega) = 0.$$

On a le fait suivant: "le crochet de deux champs hamiltoniens est hamiltonien". En effet: si $X, Y \in \chi^1(M)$ sont deux champs hamiltoniens

$$\begin{aligned}
[X,Y] \rfloor \omega &= L_X(Y \rfloor \omega) - Y \rfloor L_X \omega \\
&= L_X(Y \rfloor \omega) \\
&= X \rfloor d(Y \rfloor \omega) + d(X \rfloor (Y \rfloor \omega)) \\
&= d(X \rfloor (Y \rfloor \omega)) \\
&= -d(\omega(X,Y)),
\end{aligned}$$

d'où $[X,Y] \rfloor \omega$ est exacte.

Pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit le crochet de Poisson de f et de g par:

$$\{f, g\}_\omega := \omega(X_f, X_g),$$

ce crochet vérifie:

i/ antisymétrie: $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
\{f,g\}_\omega &= \omega(X_f, X_g) \\
&= -\omega(X_g, X_f) \\
&= -\{g, f\}_\omega.
\end{aligned}$$

ii/ $\mathbb{R}-$bilinéarité: si $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M), \lambda \in \mathbb{R}$;

$$X_{\lambda.f} = \lambda.X_f;$$

en effet;

$$\begin{aligned}
(\lambda.X_f) \rfloor \omega &= \lambda.(X_f) \rfloor \omega \\
&= -\lambda.df \\
&= -d(\lambda.f) \\
&= X_{\lambda.f} \rfloor \omega;
\end{aligned}$$

il vérifie aussi:

$$X_{f+h} = X_f + X_h;$$

en effet;

$$\begin{array}{rcl}(X_f + X_h)\rfloor\omega & = & X_f\rfloor\omega + X_h\rfloor\omega \\ & = & -df - dh \\ & = & -d(f+h) \\ & = & X_{f+h}\rfloor\omega;\end{array}$$

donc:

$$\{\lambda.f, g\}_\omega = \omega(X_{\lambda.f}, X_g) = \omega(\lambda.X_f, X_g) = \lambda.\{f,g\}_\omega; \text{ et}$$
$$\{f+h, g\}_\omega = \omega(X_{f+h}, X_g) = \omega(X_f + X_h, X_g) = \{f,g\}_\omega + \{h,g\}_\omega.$$

iii/ La règle de Leibnitz: soient $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\begin{array}{rcl}(f.X_h + h.X_f)\rfloor\omega & = & -f.dh - h.df \\ & = & -d(f.h) \\ & = & X_{f.h}\rfloor\omega;\end{array}$$

donc

$$X_{f.h} = f.X_h + h.X_f.$$

Ainsi, on a

$$\{f.h, g\}_\omega = \omega(X_{f.h}, X_g) = \omega(f.X_h + h.X_f, X_g) = f.\{h,g\}_\omega + h.\{f,g\}_\omega.$$

iv/L'application $X : (\mathcal{C}^\infty(M), \{.,.\}) \to (\chi^1(M), [.,.])$ qui associe à chaque fonction son champ hamiltonien est un morphisme d'algèbres de Lie, i.e. $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on a

$$X_{\{f,g\}_\omega} = [X_f, X_g].$$

En effet; il suffit de voir que: $[X_f, X_g]\rfloor\omega = -d(\{f,g\}_\omega)$;

$$\begin{array}{rcl}[X_f, X_g]\rfloor\omega & = & L_{X_f}(X_g\rfloor\omega) - X_g\rfloor L_{X_f}\omega \\ & = & L_{X_f}(X_g\rfloor\omega) \\ & = & X_f\rfloor d(X_g\rfloor\omega) + d(X_f\rfloor(X_g\rfloor\omega)) \\ & = & -d(\omega(X_f, X_g)) \\ & = & -d(\{f,g\}_\omega);\end{array}$$

iiv/ L'identité de Jacobi:

$$\{\{f,g\}_\omega, h\}_\omega = X_{\{f,g\}_\omega}\rfloor dh = [X_f, X_g].h;$$
$$\{\{g,h\}_\omega, f\}_\omega = -\{f, \{g,h\}_\omega\}_\omega = -X_f.\{g,h\}_\omega = -X_f.(X_g.h);$$

et

$$\{\{h,f\}_\omega, g\}_\omega = \{g, \{f,h\}_\omega\}_\omega = X_g.(X_f.h).$$

Il suffit de faire la somme:

$$\{\{f,g\}_\omega, h\}_\omega + \{\{g,h\}_\omega, f\}_\omega + \{\{h,f\}_\omega, g\}_\omega = 0.$$

Ainsi toute variété symplectique induit une structure de Poisson canonique.

Exemple 3.2.2. *Structure de Lie-Poisson:*

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie de crochet $[.,.]$, $\mathcal{G}^*$ son dual, on considère sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$ le crochet défini par:

$$\{f,g\}(x) = \langle x, [d_x f, d_x g]\rangle \, ,$$

alors $\mathcal{G}^*$ muni de ce crochet est une variété de Poisson. En effet, il est clair qu'il est $\mathbb{R}-$bilinéaire, antisymmétrique; on établit la règle de Leibnitz: soient $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$:

$$\begin{aligned} \{f, h.g\}(x) &= \langle x, [d_x f, d_x(h.g)]\rangle \\ &= \langle x, [d_x f, h(x).d_x g + g(x).d_x h]\rangle \\ &= h(x).\{f,g\}(x) + g(x).\{f,h\}(x). \end{aligned}$$

Reste à démontrer que l'identité de Jacobi a lieu: soient $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$: on commence par calculer la différentielle de $\{f,g\}$: soient $x, y \in \mathcal{G}^*$

$$\begin{aligned} d_x\{f,g\}(y) &= \langle y, [d_x f, d_x g]\rangle + \left\langle x, [d_x^2 f.y, d_x g]\right\rangle + \left\langle x, [d_x f, d_x^2 g.y]\right\rangle \\ &= \langle y, [d_x f, d_x g]\rangle - \left\langle x, ad_{d_x g}(d_x^2 f.y)\right\rangle + \left\langle x, ad_{d_x f}(d_x^2 g.y)\right\rangle \\ &= \langle y, [d_x f, d_x g]\rangle - \left\langle (ad_{d_x g})^* x, d_x^2 f.y\right\rangle + \left\langle (ad_{d_x f})^* x, d_x^2 g.y\right\rangle \\ &= \langle y, [d_x f, d_x g]\rangle - \left\langle y, d_x^2 f.((ad_{d_x g})^* x)\right\rangle + \left\langle y, d_x^2 g.((ad_{d_x f})^* x)\right\rangle \end{aligned}$$

en utilisant le fait que la dérivée seconde est symmétrique. I'identité de Jacobi découle directement de celle de l'algèbre de Lie et du calcul précédant.

Exemple 3.2.3. *Structure symplectique sur le cotangent d'une variété:*

Soit M une n-variété lise, T^*M son fibré cotangent. Il existe sur T^*M une $1-$forme différentielle canonique $\alpha \in \Omega^1(T^*M)$ appelée la forme de Liouville. Elle est définie comme suit:

pour tout $(p,\xi) \in T^*M$, $\alpha_{(p,\xi)} \in T^*_{(p,\xi)}(T^*M) \simeq T_p^*M \times T_pM$ est défini par:

$$\alpha_{(p,\xi)}(X,\eta) = \langle \xi, X\rangle \, .$$

Si $(x^1,...,x^n)$ est une carte de M, on lui associe la carte de T^*M définie par:

$$\begin{aligned} \Phi(p,\xi) \quad &: = (x^1(p),...,x^n(p), \left\langle \xi, \frac{\partial}{\partial x^1}(p)\right\rangle, ..., \left\langle \xi, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\right\rangle) \\ &= (y^1(p,\xi),...,y^n(p,\xi), z^1(p,\xi),...,z^n(p,\xi)). \end{aligned}$$

On voit que dans cette carte α s'écrit:

$$\alpha = \sum_{1\le i\le n} z^i.dy^i.$$

Soit $\omega := d\alpha$, alors $\omega \in \Omega^2(T^*M)$ et s'écrit localement

$$\omega = \sum_{1\le i\le n} dz^i \wedge dy^i$$

Alors, $d\omega = 0$ et ω est partout non dégénéré, ainsi on obtient une structure symplectique naturelle sur T^*M.

Définition 3.2.2. *(Tenseur de Poisson)*
Soit M est une variété de Poisson de crochet $\{.,.\}$. Ce crochet engendre un unique champ de bivecteurs Π qui vérifie: $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\{f, g\} = \Pi(df, dg).$$

Remarque 3.2.1. *L'identitée de Jacobi équivaut à $[\Pi, \Pi] = 0$.*

Dans la suite une variété de Poisson sera noté (M, Π) où M est une variété lisse et Π est le tenseur de Poisson.

Soit (M, Π) une variété de Poisson de crochet $\{.,.\}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$; $\{f, .\}$ est une dérivation de l'algèbre réelle $\mathcal{C}^\infty(M)$, il lui correspond un unique champ de vecteur $X_f \in \chi^1(M)$ vérifiant:

$$\{f, g\} = X_f \rfloor dg, \forall g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Définition 3.2.3. *On appelle X_f le* ***champ hamiltonien*** *associé à f.*

Soit $x = (x^i)$ une carte de M. Si l'on note par $\Pi_{ij} = \Pi(dx^i, dx^j) = \{x^i, x^j\}$, alors:

$$\{f, g\} = \Pi(df, dg)$$

$$= \Pi(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \sum_j \frac{\partial g}{\partial x^j} dx^j)$$

$$= \sum_{i \prec j} \Pi_{ij} (\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^i})$$

$$= \sum_{i \prec j} \Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} (df, dg).$$

Par cette écriture locale de Π on peut déduire celle de X_f pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= X_f \rfloor dg \\ &= \sum_{i,j} \Pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \\ &= \sum_j (\sum_i \Pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}) \frac{\partial g}{\partial x^j}; \end{aligned}$$

ainsi,

$$X_f = \sum_{i,j} \Pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ou encore:

$$X_f = \Pi(df, .).$$

Cette formule se traduit aussi en terme de crochet de Schouten-Nijenhuis. En effet, comme

$$\begin{aligned}
[g, \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}] &= [g, \frac{\partial}{\partial x^i}] \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge [g, \frac{\partial}{\partial x^j}] \\
&= -\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= -dg \rfloor \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
X_f &= \Pi(df, .) \\
&= df \rfloor \Pi,
\end{aligned}$$

ainsi:

$$X_f = -[f, \Pi].$$

Réciproquement, un champ $X \in \chi^1(M)$ est dit hamiltonien s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $X = -[f, \Pi] = \Pi(df, .)$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
[X, \Pi] &= [-[f, \Pi], \Pi] \\
&= [[\Pi, \Pi], f] + [[\Pi, f], \Pi] \\
&= [[f, \Pi], \Pi] \\
&= 0
\end{aligned}$$

par Jacobi graduée. Ainsi, un champ hamiltonien vérifie

$$[X, \Pi] = 0.$$

Proposition 3.2.1. (M, Π) *est une variété de Poisson.*

(1) *Si* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}. \tag{8}$$

(2) *Si* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *et* $Y \in \chi^1(M)$ *est un champ de Poisson alors:*

$$[Y, X_f] = X_{Y(f)}.$$

Preuve:

1/ Voir la discussion avant la définition précédante.

2/ Soient $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$. La formule de Jacobi pour le crochet de Poisson s'écrit:

$$\{\{f, g\}, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}$$

i.e.

$$X_{\{f,g\}}.h = X_f(X_g.h) - X_g(X_f.h) = [X_f, X_g].h;$$

comme h est quelconque on obtient le resultat.

3/ soient $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $Y \in \chi^1(M)$ un champ de Poisson, en utilisant Jacobi graduée on obtient:

$$\begin{array}{rcl} [Y, X_f] & = & -[Y, [f, \Pi]] \\ & = & [[f, \Pi], Y] \\ & = & [[\Pi, Y], f] - [[Y, f], \Pi] \\ & = & -[[Y, f], \Pi] \\ & = & [Y(f), \Pi] \\ & = & X_{Y(f)}.\spadesuit \end{array}$$

Définition 3.2.4. *(Morphismes de Poisson)*

Soient $(M_1, \{.,.\}_1)$ et $(M_2, \{.,.\}_2)$ deux variétés de Poisson et $\phi : M_1 \to M_2$ une application lisse. On dit que ϕ est un morphisme de Poisson si

$$\begin{array}{rccc} \phi^* : & \mathcal{C}^\infty(M_2) & \to & \mathcal{C}^\infty(M_1) \\ & f & \longmapsto & \phi^* f = f \circ \phi \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie, i.e. si:

$$\phi^*(\{f, g\}_2) = \{\phi^* f, \phi^* g\}_1, \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M_2).$$

3.3. **Structure d'algébroïde de Lie sur le fibré cotangent d'une variété de Poisson.** Le but de cette sections est d'exhiber une structure d'algébroïde de Lie naturelle sur le cotangent d'une variété de Poisson.

Dans la suite (M, Π) est une variété de Poisson et $p : T^*M \to M$ son fibré cotangent. On définit une dérivation d_Π d'ordre 1 de l'algèbre graduée extérieure $\Omega(M, (T^*M)^*) \simeq \chi(M, TM)$ comme suit:

$$d_\Pi(P) = -[\Pi, P], \ \forall P \in \chi(M, TM)$$

où le crochet de droite est le crochet de Schouten-Nijenhuis associé au fibré tangent.

Proposition 3.3.1. *d_π est une dérivation involutive d'ordre 1 de l'algèbre graduée extérieure $\chi(M, TM)$.*

Preuve:

Pour tout $P \in \chi^p(M, TM)$ on a $[\Pi, P] \in \chi^{p+2-1}(M, TM) = \chi^{p+1}(M, TM)$. Il est clair que d_Π est $\mathbb{R}$–linéaire. Donc d_Π est homogène d'ordre 1.

Pour tout $P \in \chi^p(M, TM)$, $Q \in \chi^q(M, TM)$:

$$\begin{array}{rcl} d_\Pi(P \wedge Q) & = & -[\Pi, P \wedge Q] \\ & = & -[\Pi, P] \wedge Q - (-1)^{(2-1)p} P \wedge [\Pi, Q] \\ & = & d_\Pi(P) \wedge Q + (-1)^p P \wedge d_\Pi(Q); \end{array}$$

ainsi d_Π est une dérivation d'ordre 1 de l'algèbre graduée extérieure $\chi(M,TM)$. On montre que $d_\Pi \circ d_\Pi = 0$, soit $P \in \chi^p(M,TM)$

$$\begin{aligned}
d_\Pi(d_\Pi(P)) &= -[\Pi, d_\Pi(P)] \\
&= [\Pi,[\Pi,P]] \\
&= -(-1)^p[[\Pi,P],\Pi] \\
&= -(-1)^p(-1)^{p-1}[[P,\Pi],\Pi] - (-1)^p(-1)^{p-1}[[\Pi,\Pi],P] \\
&= [[P,\Pi],\Pi] \\
&= (-1)^{p-1}(-1)^p[\Pi,[\Pi,P]] \\
&= -[\Pi,[\Pi,P]] \\
&= -d_\Pi(d_\Pi(P)).\spadesuit
\end{aligned}$$

Par le théorème 3.1.1 il existe une unique structure d'algébroïde de Lie sur (T^*M,p,M) dont l'ancrage $\rho : T^*M \to TM$ est l'unique morphisme de fibrés vectoriels tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et toute section α de (T^*M,p,M)

$$i(\rho \circ \alpha).df = \langle d_\Pi f, \alpha \rangle .$$

3.4. **Structure de Poisson sur le dual d'une algébroïde de Lie.** Soit (A,π,M,ρ) une algébroïde de Lie et (A^*,ϖ,M) son fibré dual. Le but de cette section est de montrer que A^* admet une structure de Poisson canonique. Ceci généralise les structures de Lie-Poisson associées à une algèbre de Lie qu'on a vu dans l'example 3.2.2 et généralise aussi la structure de Poisson associée à la structure symplectique sur le cotangent d'une variété M où l'on considère l'algébroïde de Lie (TM,π,M,id_{TM}) vu dans l'exemple 3.2.3.

On aura besoin du lemme suivant:

Lemme 3.4.1. *Pour toute section $X \in \Gamma(M,A)$ on associe $\Phi_X \in \mathcal{C}^\infty(A^*)$ définie par:*

$$\Phi_X(\xi) = \langle \xi, X \circ \varpi(\xi) \rangle .$$

Soient $X \in \Gamma(M,A)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\xi \in A^*$ tels que

$$d_\xi(\Phi_X + f \circ \varpi) = 0$$

alors

$$X \circ \varpi(\xi) = 0$$

et pour toute section $Y \in \Gamma(M,A)$ on a

$$\Phi_{\{X,Y\}}(\xi) = \langle df, \rho \circ Y \rangle \circ \varpi(\xi).$$

Preuve:

Il est clair que $\Phi_X \in \mathcal{C}^\infty(A^*)$. Si $d_\xi(\Phi_X + f \circ \varpi) = 0$ alors pour tout $V \in T_\xi A^*$ on a:

$$\langle d_\xi \Phi_X, V \rangle = -\left\langle d_{\varpi(\xi)} f, d_\xi \varpi.V \right\rangle .$$

Si V est vertical, i.e. que $d_\xi\varpi.V = 0$, V est un élément de $\varpi^{-1}(\varpi(\xi))$, i.e. $\varpi(\xi + t.V) \equiv \varpi(\xi)$, ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= \langle d_\xi \Phi_X, V\rangle \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi_X(\xi + t.V) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\left\langle \xi + t.V, X\circ\varpi(\xi+t.V)\right\rangle \\ &= \langle V, X\circ\varpi(\xi)\rangle . \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vrai pour tout $V \in \varpi^{-1}(\varpi(\xi))$ on obtient $X\circ\varpi(\xi) = 0$.

Soient k la dimension du fibré (A, π, M), U un ouvert de trivialisation, $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ un repère au dessus de U et $\xi \in A^*$ tels que $\varpi(\xi) \in U$ et $d_\xi(\Phi_X + f\circ\varpi) = 0$ on obtient que

$$X = X^i.\sigma_i$$

avec $X^i\circ\varpi(\xi) = 0$, pour tout $\eta \in \varpi^{-1}(U)$ on a

$$\Phi_X(\eta) = \langle \eta, X\circ\varpi(\eta)\rangle = X^i\circ\varpi(\eta).\left\langle \eta, \sigma_i\circ\varpi(\xi)\right\rangle ,$$

soient $V \in T_\xi A^*$ et $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to A$ une courbe lisse telle que $\gamma(0) = \xi$ et $\dot\gamma(0) = V$, on a

$$\begin{aligned} \langle d_\xi\Phi_X, V\rangle &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi_X(\gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\left\langle \gamma(t), X\circ\varpi(\gamma(t))\right\rangle \\ &= \left\langle \xi, \frac{d}{dt}|_{t=0}X\circ\varpi(\gamma(t))\right\rangle \end{aligned}$$

or $\frac{d}{dt}|_{t=0}X\circ\varpi(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\{X^i\circ\varpi(\gamma(t)).\sigma_i\circ\varpi(\gamma(t)\} = \{\frac{d}{dt}|_{t=0}X^i\circ\varpi(\gamma(t))\}.\sigma_i\circ\varpi(\xi)$, ainsi

$$\begin{aligned} \langle d_\xi\Phi_X, V\rangle &= \{\frac{d}{dt}|_{t=0}X^i\circ\varpi(\gamma(t))\}.\left\langle \xi, \sigma_i\circ\varpi(\xi)\right\rangle \\ &= \left\langle d_\xi(X^i\circ\varpi), V\right\rangle.\left\langle \xi, \sigma_i\circ\varpi(\xi)\right\rangle . \end{aligned}$$

Or on a d'un autre coté

$$\langle d_\xi\Phi_X, V\rangle = -\left\langle d_{\varpi(\xi)}f, d_\xi\varpi.V\right\rangle$$

donc

$$-\left\langle d_{\varpi(\xi)}f, d_\xi\varpi.V\right\rangle = \left\langle d_{\varpi(\xi)}X^i, d_\xi\varpi.V\right\rangle.\left\langle \xi, \sigma_i\circ\varpi(\xi)\right\rangle$$

d'où

$$d_\xi(f\circ\varpi) = -\left\langle \xi, \sigma_i\circ\varpi(\xi)\right\rangle.d_\xi(X^i\circ\varpi).$$

Maintenant pour tout $Y \in \Gamma(M, A)$ on a sur U

$$\{X, Y\} = X^i.\{\sigma_i, Y\} - \left\langle dX^i, \rho\circ Y\right\rangle.\sigma_i$$

comme $X^i \circ \varpi(\xi) = 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi_{\{X,Y\}}(\xi) &= \langle \xi, \{X,Y\} \circ \varpi(\xi) \rangle \\
&= -\left\langle d_{\varpi(\xi)} X^i, \rho \circ Y(\varpi(\xi)) \right\rangle . \langle \xi, \sigma_i \circ \varpi(\xi) \rangle \\
&= \langle df, \rho \circ Y \rangle \circ \varpi(\xi). \spadesuit
\end{aligned}$$

Théorème 3.4.1. *Soit (A, π, M, ρ) une algébroïde de Lie de crochet $\{.,.\}$ et (A^*, ϖ, M) son fibré dual. Considérons l'application*

$$\begin{array}{rccc}
\Phi : & \Gamma(M, A) & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(A^*) \\
& X & \longmapsto & \Phi_X
\end{array}$$

définie par

$$\Phi_X(\xi) = \langle \xi, X \circ \varpi(\xi) \rangle$$

alors il existe une unique structure de Poisson sur A^* qu'on note par $\{\{.,.\}\}$ telle que Φ soit un morphisme d'algèbres de Lie, i.e. telle que pour tout $X, Y \in \Gamma(M, A)$:

$$\{\{\Phi_X, \Phi_Y\}\} = \Phi_{\{X,Y\}}$$

Preuve:

Si une telle structure de Poisson existe, pour tout $X, Y \in \Gamma(M, A)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on a:

$$\{f.X, g.Y\} = f.g.\{X,Y\} - g. \langle df, \rho \circ Y \rangle .X + f. \langle dg, \rho \circ X \rangle .Y$$

donc

$$\begin{aligned}
\{\{\Phi_{f.X}, \Phi_{g.Y}\}\} &= \{\{f \circ \varpi.\Phi_X, g \circ \varpi.\Phi_Y\}\} \\
&= f \circ \varpi.g \circ \varpi.\{\{\Phi_X, \Phi_Y\}\} + \Phi_X.g \circ \varpi.\{\{f \circ \varpi, \Phi_Y\}\} + \\
&\quad f \circ \varpi.\Phi_Y.\{\{\Phi_X, g \circ \varpi\}\} + \Phi_X.\Phi_Y.\{\{f \circ \varpi, g \circ \varpi\}\}
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\{\{\Phi_{f.X}, \Phi_{g.Y}\}\} &= \Phi_{\{f.X, g.Y\}} \\
&= \Phi_{f.g.\{X,Y\} - g.\langle df, \rho \circ Y \rangle .X + f.\langle dg, \rho \circ X \rangle .Y} \\
&= f \circ \varpi.g \circ \varpi.\Phi_{\{X,Y\}} - g \circ \varpi. \langle df, \rho \circ Y \rangle \circ \varpi.\Phi_X + \\
&\quad f \circ \varpi. \langle dg, \rho \circ X \rangle \circ \varpi.\Phi_Y
\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}
\{\{\Phi_X, \Phi_{g.Y}\}\} &= \{\{\Phi_X, g \circ \varpi.\Phi_Y\}\} \\
&= \{\{\Phi_X, g \circ \varpi\}\}.\Phi_Y + g \circ \varpi.\{\{\Phi_X, \Phi_Y\}\}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\{\{\Phi_X, \Phi_{g.Y}\}\} &= \Phi_{\{X, g.Y\}} \\
&= g \circ \varpi.\Phi_{\{X,Y\}} + \langle dg, \rho \circ X \rangle \circ \varpi.\Phi_Y
\end{aligned}$$

alors

$$\{\{\Phi_X, g \circ \varpi\}\} = \langle dg, \rho \circ X \rangle \circ \varpi$$

donc

$$\begin{aligned}\{\{\Phi_{f.X},\Phi_{g.Y}\}\} &= f\circ\varpi.g\circ\varpi.\Phi_{\{X,Y\}}+g\circ\varpi.\Phi_X.\{\{f\circ\varpi,\Phi_Y\}\}+\\ &\quad f\circ\varpi.\Phi_Y.\{\{\Phi_X,g\circ\varpi\}\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\{\{\Phi_{f.X},\Phi_{g.Y}\}\} &= f\circ\varpi.g\circ\varpi.\{\{\Phi_X,\Phi_Y\}\}+\Phi_X.g\circ\varpi.\{\{f\circ\varpi,\Phi_Y\}\}+\\ &\quad f\circ\varpi.\Phi_Y.\{\{\Phi_X,g\circ\varpi\}\}+\Phi_X.\Phi_Y.\{\{f\circ\varpi,g\circ\varpi\}\}\end{aligned}$$

d'où

$$\{\{f\circ\varpi,g\circ\varpi\}\}=0.$$

Maintenant, soient $\xi\in A^*$, $\eta_1,\eta_2\in T^*_\xi A^*$, soient $X_1,X_2\in\Gamma(M,A)$ alors $\eta_i-d_\xi\Phi_{X_i}\in T^*_\xi A^*$. Soit $f_i\in\mathcal{C}^\infty(M)$ tels que $\eta_i-d_\xi\Phi_{X_i}=d_\xi(f_i\circ\varpi)$ i.e.

$$\eta_i=d_\xi(\Phi_{X_i}+f_i\circ\varpi).$$

De tels fonctions existent car ϖ est une submersion et on n'exige l'égalité qu'en ξ. Mais les couples (X_i,f_i) ne sont pas forcement uniques. Alors le tenseur de Poisson Λ sur A^* évalué sur η_1,η_2 donne:

$$\begin{aligned}\Lambda_\xi(\eta_1,\eta_2) &= \{\{\Phi_{X_1}+f_1\circ\varpi,\Phi_{X_2}+f_2\circ\varpi\}\}(\xi)\\ &= \Phi_{\{X_1,X_2\}}(\xi)-\langle df_1,\rho\circ X_2\rangle\circ\varpi(\xi)+\langle df_2,\rho\circ X_1\rangle\circ\varpi(\xi).\end{aligned}$$

Ceci prouve que si une telle structure de Poisson existe alors elle est unique.

Pour l'existance on utilise le membre de droite de la formule précédante. On montre d'abord qu'il ne dépend que de η_1 et de η_2 et pas des (X_i,f_i) : comme ce membre dépend de manière bilinéaire antisymétrique de (X_i,f_i) il suffit de prouver que si (X_1,f_1) est tel que

$$d_\xi(\Phi_{X_1}+f_1\circ\varpi)=0$$

alors pour tout (X_2,f_2) on a

$$\Phi_{\{X_1,X_2\}}(\xi)-\langle df_1,\rho\circ X_2\rangle\circ\varpi(\xi)+\langle df_2,\rho\circ X_1\rangle\circ\varpi(\xi)=0.$$

Mais ceci decoule directement du lemme précédant. Reste à prouver que Λ est un tenseur de Poisson, il est lisse par

$$\Lambda_\xi(\eta_1,\eta_2)=\Phi_{\{X_1,X_2\}}(\xi)-\langle df_1,\rho\circ X_2\rangle\circ\varpi(\xi)+\langle df_2,\rho\circ X_1\rangle\circ\varpi(\xi).$$

Pour voir que $\{\{.,.\}\}$ vérifie l'identitée de Jacobi il suffit de le faire en chaque point et pour les fonctions du type $\Phi_X+f\circ\varpi$. Ce qui est une conséquence du fait que Φ est un morphisme d'algèbres de Lie et des deux relations

$$\begin{aligned}\{\{\Phi_X,g\circ\varpi\}\} &= \langle dg,\rho\circ X\rangle\circ\varpi\\ \{\{f\circ\varpi,g\circ\varpi\}\} &= 0.\spadesuit\end{aligned}$$

Définition 3.4.1. *On appelle le crochet $\{\{.,.\}\}$ le crochet de Lie-Poisson sur A.*

On passe au cas local. Considérons un ouvert U de M domaine d'une carte $(x^1,...,x^n)$ de M et d'un repère $(\sigma_1,...,\sigma_k)$ de (A,π,M). Alors il existe des fonctions $b_i^l, c_{ij}^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$ telles que:

$$\begin{aligned}\rho\circ\sigma_i &= \sum_{1\le j\le n} b_i^l.\frac{\partial}{\partial x^l}, 1\le i\le k\\ \{\sigma_i,\sigma_j\} &= \sum_{1\le l\le k} c_{ij}^l.\sigma_l, 1\le i,j\le k\end{aligned}$$

Définition 3.4.2. *On appelle les fonctions $b_i^j, c_{ij}^l \in \mathcal{C}^\infty(U), 1\le i,j\le k, 1\le l\le n$ les fonctions de structure associées à la carte $(x^1,...,x^n)$ et au repère $(\sigma_1,...,\sigma_k)$.*

Si l'on associe au repère $(\sigma_1,...,\sigma_k)$ les coordonées linéaires $(\xi^1,...,\xi^k)$ définies par

$$\mu = \sum_{1\le i\le k}\xi^i(\mu).\sigma^i(\varpi(\mu)),\ \ \mu\in\varpi^{-1}(U);$$

on remarque que

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma_i}(\mu) &= \langle\mu,\sigma_i\circ\varpi(\mu)\rangle\\ &= \xi^i(\mu)\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi_{\sigma_i} = \xi^i.$$

Alors $(x^1\circ\varpi,...,x^n\circ\varpi,\xi^1,...,\xi^k)$ est une carte de $\varpi^{-1}(U)$. Calculons les coordonées du tenseur de Poisson Λ dans ces coordonées:

$$\{\{x^i\circ\varpi, x^j\circ\varpi\}\} = 0$$

$$\{\{x^i\circ\varpi,\xi^j\}\} = -\left\langle dx^i,\rho\circ\sigma_j\right\rangle\circ\varpi = -b_j^i\circ\varpi$$

$$\{\{\xi^i,\xi^j\}\} = \{\{\Phi_{\sigma_i},\Phi_{\sigma_j}\}\} = \Phi_{\{\sigma_i,\sigma_j\}} = \Phi_{\sum\limits_{1\le l\le k} c_{ij}^l.\sigma_l} = \sum_{1\le l\le k} c_{ij}^l\circ\varpi.\xi^l$$

Remarque 3.4.1. *On peut définir la structure de Lie-Poisson sur A^* par les fonctions de structure. Les relations précédantes nous donnent explicitement le tenseur de Poisson dans une carte.*

Dans la suite un point générique de $\varpi^{-1}(U)$ sera noté $(x^1,...,x^n,\xi^1,...,\xi^k)$. On conviendra de voir les fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(U)$ comme des fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\varpi^{-1}(U))$ qui sont constantes sur les fibres.

Si $\alpha = \sum\limits_{1\le i\le k}\alpha^i(x).\sigma_i \in \Gamma(U,A)$, considérons $f_\alpha = \Phi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\varpi^{-1}(U))$, alors

$$f_\alpha(x,\xi) = \sum_{1\le i\le k}\alpha^i(x).\xi^i.$$

Ainsi le champ hamiltonien X_{f_α} associé à f_α est défini par l'équation:
(9)
$$X_{f_\alpha} = \sum_{1\leq j\leq k, 1\leq i\leq n} \alpha^j b^i_j.\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{1\leq l,j\leq k} (\sum_{1\leq i\leq k} c^l_{ij}.\alpha^j - \sum_{1\leq i\leq n} b^i_j.\frac{\partial\alpha^l}{\partial x^i})\xi^l.\frac{\partial}{\partial\xi^j}(x,\xi).$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned} d_{(x,\xi)}\varpi.(X_{f_\alpha}(x,\xi)) &= \sum_{1\leq j\leq k, 1\leq i\leq n} \alpha^j(x).b^i_j(x).\frac{\partial}{\partial x^i}(x) \\ &= \sum_{1\leq j\leq k} \alpha^j(x).\rho\circ\sigma_i(x) \\ &= \rho\circ\alpha(x) \end{aligned}$$
i.e. que

$$\varpi_* X_{f_\alpha} = \rho\circ\alpha. \tag{10}$$

La structure de Lie-Poisson sur le dual d'une algébroïde de Lie codifie toutes le informations concernant l'algébroïde de Lie.

4. Écriture locale des algébroïdes de Lie, champ et feuilletage caractériqtiques

4.1. **Distributions singulières.** On commence par quelques resultats sur les feuilletages singuliers. Dans la suite M est une variété lisse de dimension n.

Définition 4.1.1. *(Feuilletages singuliers)*

Un feuilletage singulier lisse au sens de Stefan-Sussmann sur M est une partition $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_\alpha$ de M en sous variétés immergées et connexes $\mathcal{F}_\alpha$ appelées feuilles et vérifiant la condition (dite propriété de régularité locale des feuilletages singuliers) :

pour tout $x \in M$, si $\mathcal{F}_\alpha$ est la feuille qui contient x, d sa dimension, alors il existe une carte $(U,(y^1,...,y^n))$ de M centrée en x telle que la composante connexe de $\mathcal{F}_\alpha\cap U$ soit $\{y^d = ... = y^n = 0\}$ et pour chaque vecteur $(c_{d+1},...,c_n)$ l'ensemble $\{y^d = c_{d+1},...,y^n = c_n\}$ est soit vide soit contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$.

Dans la suite on dira "feuilletage singulier " au lieu de "feuilletage singulier lisse au sens de Stefan-Sussmann". Une variété feuilleuté est un couple $(M,\mathcal{F})$ où M est une variété lisse et $\mathcal{F}$ est un feuilletage singulier sur M.

Définition 4.1.2. *(Morphismes)*

Soient $(M,\mathcal{F}),(N,\mathcal{N})$ deux variétés feuilletés et $F: M\to N$ une application lisse. On dit que F est un morphisme feuilletés si elle envoie feuille sur feuille. On dit que c'est un isomorphisme de variétés feuilletés si F est un difféomorphisme qui est un morphisme de variétés feuilletés ainsi que son iverse.

Remarque 4.1.1. *Si $F : M \to N$ est un difféomorphisme et $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_\alpha$ est un feuilletage singulier sur M alors la partition $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_\alpha := F(\mathcal{F}_\alpha)\}_\alpha$ est un feuilletage singulier sur N.*

En effet soit $q \in N$ et $p = F^{-1}(q)$, alors il existe une carte $(U, (y^1, ..., y^n))$ de M centrée en x telle que la composante connexe de $\mathcal{F}_\alpha \cap U$ soit $\{y^d = ... = y^n = 0\}$ et pour chaque vecteur $(c_{d+1}, ..., c_n)$ l'ensemble $\{y^d = c_{d+1}, ..., y^n = c_n\}$ est soit vide soit contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$. Considerons $V = F(U)$ qui est un ouvert de N contenant q, et la carte $(z^1, ..., z^n)$ de N en q définie par $z^i = y^i \circ F^{-1}$, nous permet d'établir la propriété de régularité locale des feuilletages singuliers. Ce feuilletage est l'unique sur N qui rend F un isomorphisme de variétés feuilleutés.

Remarque 4.1.2. *On peut faire la construction réciproque i.e. démarer avec un feuilletage singulier sur N et on a un unique feuilletage singulier sur M tel que F soit un isomorphisme de variétés feuilletés.*

Un feuilletage singulier où toutes les feuilles ont la même dimension n'est autre qu'un feuilletage au sens classique. Un tel feuilletage sera dit régulier.

Exemple 4.1.1. *(Submersion)*

Si $f : M \to N$ est une submersion dont les fibres sont connexes alors $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_p = f^{-1}(p), p \in N\}_\alpha$ est un feuilletage régulier de M de codimension la dimension de N.

En particulier si $\pi : E \to M$ est un fibré vectoriel alors l'espace des fibres est un feuilletage régulier de dimension la dimension du fibré, on l'appelle le feuilletage vertical du fibré.

Définition 4.1.3. *(Distributions singulières)*

Une distribution singulière $\mathcal{D}$ sur M est la donnée en tout point p de M d'un sous espace vectoriel $\mathcal{D}_p$ de T_pM.

Une distribtion singulière $\mathcal{D}$ sur M est dite lisse si: $\forall p \in M$, $\forall V \in \mathcal{D}_p$ il existe un voisinage ouvert U de p et un champ de vecteurs $X \in \chi^1(U)$ tels que: $X_q \in \mathcal{D}_q$, $\forall q \in U$ et $X_p = V$.

Si la dimension de $\mathcal{D}_p$ ne dépend pas de p sur tout M on dit alors que la distribution est régulière.

Exemple 4.1.2. *(Feuilletage singulier)*

Si $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_\alpha$ est un feuilletage singulier sur M alors on obtient une distribution $\mathcal{D}^\mathcal{F}$ définie par $\mathcal{D}^\mathcal{F}_p := T_p\mathcal{F}_\alpha$ où $\mathcal{F}_\alpha$ est la feuille contenant p. Par la propriété locale des feuilletages singuliers on voit que que la distribution singulière associée à un feuilletage singulier est lisse. En particulier si le feuilletage est régulier il induit une distribtion lisse et régulière.

Exemple 4.1.3. *(Distribution singulière induite par une famille de champs)*

Soit $\mathcal{E}$ une famille de champs de vecteurs de M, alors cette famille engendre une distribution singulière lisse $\mathcal{D}^\mathcal{E}$ en declarant que $\mathcal{D}^\mathcal{E}_p$ est le sous espace vectoriel de T_pM engendré par tous les éléments de $\mathcal{E}$ évalués en p. On dit que cette ditribution est engendré par $\mathcal{E}$.

Définition 4.1.4. *(Sous variété intégrale);*

Une sous variété intégrale d'une distribution singulière lisse $\mathcal{D}$ sur M est une sous variété immergée et connexe S de M vérifiant: T_pS est un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}_p, \forall p \in S$.

Une telle sous variété est dite maximale si elle l'est au sens ensembliste. Elle est dite de dimension maximale si $T_pS = \mathcal{D}_p, \forall p \in S$.

Une distribution singulière lisse $\mathcal{D}$ sur M est dite intégrable si par chaque point de M passe une sous variété intégrale maximale de dimension maximale.

Exemple 4.1.4. *(Champ de vecteur)*

Pour tout champ de vecteur $X \in \chi^1(M)$, la distribution $\mathcal{D}_p := \mathbb{R}.X(p)$ est lisse. On sait par la théorie des équations différentielles ordinaires que cette distribution admet en chaque point une sous variété intégrale maximale. Si de plus X ne s'annulle en aucun point on sait qu'au voisinage de chaque point il existe une sous variété intégrale maximale de dimension maximale.

Reciproquement, si $\mathcal{D}$ est une distribution lisse et régulière de dimenion 1 sur M, il existe un champ de vecteur sur M qui l'engendre et on voit qu'une telle distribution est toujours intégrable.

Définition 4.1.5. *(Involutivité)*

Une distribution lisse $\mathcal{D}$ sur M est dite involutive si le crochet de Lie de deux champs de M qui sont tangents à $\mathcal{D}$ est tangent à $\mathcal{D}$.

Remarque 4.1.3. *Toute distribution lisse intégrable est involutive:*

en effet, si $\mathcal{D}$ est une distribution singulière lisse et intégrable sur M. Soient X, Y des champs de vecteurs sur M qui sont tangents à $\mathcal{D}$. Alors, par la naturalité du crochet de Lie, leurs crochet de Lie est tangent à $\mathcal{D}$.

Définition 4.1.6. *(Invariance)*

Une distribution singulière lisse $\mathcal{D}$ sur M est dite invariante par une famille de champ de vecteurs $\mathcal{E}$ si elle est invariante par les flots des éléments de $\mathcal{E}$, ce qui s'écrit: si $X \in \mathcal{E}$ et $(\phi^t)_t$ est son flot alors

$$(\phi^t)_*\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_{\phi^t(p)}$$

pour tout $p \in M$ et partout où ϕ^t est défini.

Théorème 4.1.1. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution singulière lisse sur une variété lisse M, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *$\mathcal{D}$ est intégrable;*
(2) *$\mathcal{D}$ est engendré par une famille de champs de vecteurs $\mathcal{E}$ et elle est invariante par $\mathcal{E}$;*
(3) *$\mathcal{D}$ est la distribution engendré par un feuilletage singulier lisse.*

Preuve:

$1 \Rightarrow 2$: Soit $\mathcal{E} := \{X \in \chi^1(M); X(p) \in \mathcal{D}_p, \forall p \in M\}$. Il est clair que $\mathcal{D}$ est engendré par $\mathcal{E}$. Reste à voir que les éléments de $\mathcal{E}$ préservent $\mathcal{D}$:

Soient $X \in \mathcal{E}$, $(\phi^t)_t$ son flot, $p \in M$ et $\mathcal{F}$ la sous variété maximale de dimension maximale qui contient p. Alors, $\forall q \in \mathcal{F} : T_q\mathcal{F} = \mathcal{D}_q$. Ainsi $X(q) \in T_q\mathcal{F}, \forall q \in \mathcal{F}$, d'où $X_{|\mathcal{F}} \in \chi^1(\mathcal{F})$. En particulier le flot de X peut être restreint à $\mathcal{F}$, si $\phi^\tau(p)$ est bien définit alors par connexité de $\mathcal{F}$ et de l'intervalle de définition de $\phi(.,p)$ on a que $\phi^\tau(p)$ reste dans $\mathcal{F}$, ainsi

$$(\phi^\tau)_* T_p\mathcal{F} = T_{\phi^\tau(p)}\mathcal{F}$$

partout où $\phi^\tau(p)$ est bien définit. Or ceci s'écrit $(\phi^t)_*\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_{\phi^t(p)}$ partout où $\phi^t(p)$ est définit.

$2 \Rightarrow 3$: Soient $p \in M$, $d = \dim \mathcal{D}_p$ et $X_1, ..., X_d \in \mathcal{E}$, $\phi_1^t, ..., \phi_d^t$ leurs flots respectifs tels que $\mathcal{D}_p$ est le sous espace vectoriel de T_pM engendré par $X_1(p), ..., X_d(p)$. L'application $(s_1, ..., s_d) \overset{\phi}{\mapsto} \phi_1^{s_1} \circ ... \circ \phi_d^{s_d}(p)$ est un difféomorphisme d'un ouvert connexe contenant $0_{\mathbb{R}^d}$ dans une sous variété S de M de dimension d et contenant p.

S est une sous variété intégrale de $\mathcal{D}$ de dimension maximale car: $\forall q \in S$: $T_qS = \phi_*(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}_q$. On veut construire un feuilletage avec ces sous-variétés.

Remarquons en premier lieu que si l'on dispose de deux sous variétés intégrales de dimensions maximales qui se rencontrent en un point, alors elles ont necessairement la même dimension. De plus leurs réunion est toujours une sous variété intégrales de dimension maximale. En effet: les cartes de ces sous variétés intégrales sont des compositions de flots qui preservent $\mathcal{D}$, il est clair que les changements de cartes sont lisses et donc on obtient une structure de variété lisse sur les réunions. La réunion de deux connexes qui s'intersectent en un point est toujours connexe. On obtient une sous variété intégrale de dimension maximale, en recollant ces sous variétés intégrales là où elles s'intersectent. On obtient une partition $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_\alpha$ de M en sous variétés immergées et connexes qui sont maximales pour l'inclusion, ainsi $\mathcal{D}$ est intégrable et est donc involutive. Reste à montrer la propriété de régularité locale des feuilletages singuliers.

On procéde par induction sur la dimension de $\mathcal{D}$. Soit $p \in M$ si $\dim \mathcal{D}_p = 0$ c'est trivial. Si $\dim \mathcal{D}_p \geq 1$ alors il existe $Y \in \mathcal{E}$ tel que $Y(p) \neq 0$, on note $(\psi^t)_t$ son flot; $Y(p) \neq 0$ donc il existe un ouvert V autour de p domaine d'une carte $\Phi = (y^1, ..., y^n)$ où $\Phi_*(\dfrac{\partial}{\partial y^1}) = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$: le champ de vecteur induit par le premier vecteur de la base canonique $(e^1, ..., e^n)$ de $\mathbb{R}^n$. En considerant V comme un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Y comme le champ de vecteur $\dfrac{\partial}{\partial x^1}$; le flot de Y est $\psi^t(x) = t.e^1 + x$; le but est de réduire la dimension de V pour utiliser l'hypothèse de recurrence.

On considère sur V la relation d'équivalence: $x \sim y \iff y = \psi^t(x) \Leftrightarrow (y^1, ..., y^n) = t.e^1 + x \Leftrightarrow (x^2, ..., x^n) = (y^2, ..., y^n)$. L'espace quotient $V/\sim$ n'est autre que la projection de V sur les facteurs $x^2, ..., x^n$.

Il existe donc un voisinage V de p tel que le quotient de V par le flot de Y, noté $V/\sim$ soit un $n-1$ variété lisse et que la projection $p : V \to V/\sim$ soit une submersion surjective. On construit une distribution lisse engendré par une famille de champs de vecteurs qui la préserve sur $V/\sim$. Par l'hypothèse de récurrence, c'est la distribution engendré par un feuilletage lisse, et on montre que l'on peut remonter ce feuilletage via p et que la distribution du début n'est autre que celle engendré par ce feuilletage:

Sur $V/\sim$ on définit une distribution Δ par: $\Delta(\tilde{q}) = p_*(\mathcal{D}_q)$ où $q \in \tilde{q}$ est quelconque. Cette distribution est bien définie, en effet: si $q_1, q_2 \in \tilde{q}$ alors il existe t tel que $q_2 = \psi^t(q_1)$, ainsi $p_*(\mathcal{D}_{q_2}) = d_{q_2}p(\mathcal{D}_{q_2}) = d_{\psi^t(q_1)}p(\mathcal{D}_{\psi^t(q_1)}) = d_{\psi^t(q_1)}p(d_{q_1}\psi^t(\mathcal{D}_{q_1})) = d_{q_1}(p \circ \psi^t)(\mathcal{D}_{q_1}) = d_{q_1}p(\mathcal{D}_{q_1})$. Δ est lisse et est engendré par une famille de champs de vecteurs qui la préserve:

Considérons une section $\sigma : V/\sim \to V$ de p. On sait qu'il existe toujours des section locales, mais la construction particulière de V nous permet de la considérer sur tout $V/\sim$. Soit $\tilde{q} \in V/\sim$ et soit $q \in V$ tel que $\sigma(\tilde{q}) = q$, soient $X_1, ..., X_r \in \mathcal{E}$ tels que $(X_1(q), ..., X_r(q))$ engendre $\mathcal{D}_q$. Considérons $\tilde{X}_i := p_* \circ X_i \circ \sigma \in \chi^1(V/\sim)$ alors si $\tilde{v} \in \Delta(\tilde{q})$ il existe $v \in \mathcal{D}_q$ tel que $\tilde{v} = p_*(v)$, or $v = \sum\limits_i a_i(q).X_i(q)$, où $a_i \in \mathcal{C}^\infty(V)$,ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= d_q p(\sum_i a_i(q).X_i(q)) \\ &= \sum_i a_i(\sigma(\tilde{q})).d_{\sigma(\tilde{q})}p(X_i(\sigma(\tilde{q}))) \\ &= \sum_i b_i(\tilde{q}).\tilde{X}_i(\tilde{q}), \end{aligned}$$

donc Δ est lisse. Considerons la famille $\tilde{\mathcal{E}} =\{\tilde{X} \in \chi^1(V/\sim)$ tels que $\tilde{X} = p_* \circ X_i \circ \sigma$ pour un $X \in \mathcal{E}\}$. $\tilde{\mathcal{E}}$ engendre Δ, reste à voir que Δ est invariante par $\tilde{\mathcal{E}}$:

Soit $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{E}}$, $(\tilde{\phi}^t)_t$ son flot. On veut montrer que

$$(\tilde{\phi}^t)_*(\Delta(\tilde{q})) = \Delta(\tilde{\phi}^t(\tilde{q})), \forall \tilde{q} \in V/\sim \text{ où } \tilde{\phi}^t(\tilde{q}) \text{ est bien défini.}$$

Soit $X \in \mathcal{E}$ tel que $\tilde{X} = p_* \circ X \circ \sigma$, on note $(\phi^t)_t$ le flot de X. On montre que X et $\tilde{X}$ sont $p-$reliés, en effet: soit $x \in V$; $\tilde{x} = p(x)$ alors

$$\tilde{X}(p(x)) = p_* \circ X \circ \sigma(\tilde{x}) = p_* \circ X(y)$$

pour un $y \in \tilde{x}$. Ainsi il existe t tel que $y = \psi^t(x)$, donc

$$\begin{aligned}\tilde{X}(p(x)) &= d_y p(X(y)) \\ &= d_{\psi^t(x)} p(X(\psi^t(x))) \\ &= d_x(p \circ \psi^t)(\psi^{-t}(X(\psi^t(x)))) \\ &= d_x p(X(x))\end{aligned}$$

car $p \circ \psi^t = p$ et X et Y commutent ($\mathcal{D}$ est involutive). Ainsi $\tilde{X} = p_* X$ et donc

$$\tilde{\phi}^t \circ p = p \circ \phi^t.$$

Maintenant, soient $\tilde{q} \in V/\sim$, $q = \sigma(\tilde{q})$. Alors

$$\begin{aligned}(\tilde{\phi}^t)_*(\Delta(\tilde{q})) &= (\tilde{\phi}^t)_*(p_*(\mathcal{D}_q)) \\ &= p_*((\phi^t)_*(\mathcal{D}_q)) \\ &= p_*(\mathcal{D}_{\phi^t(q)}) \\ &= \Delta(\tilde{\phi}^t(\tilde{q}));\end{aligned}$$

donc Δ est une distribution lisse sur $V/\sim$ et est engendré par une famille de champs de vecteurs qui la préservent. Comme $\dim(V/\sim) = \dim \mathcal{D}_p - 1$, il existe un feuilletage singulier lisse $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $V/\sim$ tel que la distribution qu'il engendre est Δ. Il est clair que $p(\mathcal{F} \cap V) = \tilde{\mathcal{F}}$.

Maintenant on montre que $\mathcal{F}$ vérifie la propriété locale des feuilletages singuliers. Comme c'est un critère local, en utilisant les remarques 4.1.2 et 4.1.1 il suffit de considérer un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ de la forme $I \times U$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, la projection $\pi : (x, y) \mapsto y$ de $I \times U$ sur U, $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha\}_\alpha$ un feuilletage singulier de U, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_\alpha$ la partition de V définie par $\mathcal{F}_\alpha = \pi^{-1}(\tilde{\mathcal{F}}_\alpha) = I \times \tilde{\mathcal{F}}_\alpha$. On veut montrer que $\mathcal{F}$ est un feuilletage singulier sur V. Soit $(p, q) \in I \times U$, il existe une carte de U noté $(W, (y^2, ..., y^n))$ et centré en q telle que: si $\tilde{\mathcal{F}}_\beta$ est la feuille qui contient q et r sa dimension, la composante connexe de $\tilde{\mathcal{F}}_\beta \cap W$ est $\{y^{r+1} = ... = y^n = 0\}$, et pour chaque $(c^{r+1}, ..., c^n) : \{y^{r+1} = c^{r+1}, ..., y^n = c^n\}$ est soit vide soit contenu dans un $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha \cap W$. Alors la carte $(x-p, y^2, ..., y^n)$ sur $I \times W$ est centré en (p, q) et l'on a:

la composante connexe de $\mathcal{F}_\beta \cap I \times W$ est $\{y^{r+1} = ... = y^n = 0\}$, et pour chaque $(c^{r+1}, ..., c^n) : \{y^{r+1} = c^{r+1}, ..., y^n = c^n\}$ est soit vide soit contenu dans un $\mathcal{F}_\alpha \cap W$.

$3 \Rightarrow 1$: Les feuilles sont les sous variétés intégrales maximales de dimension maximale.♠

Définition 4.1.7. *(Distributions de type fini)*

Une ditribution singulière lisse $\mathcal{D}$ sur une variété lisse M est dite localement de type fini si pour tout $p \in M$ il existe un voisinage ouvert U de p, et des champs de vecteurs $X_1, ..., X_r \in \chi^1(U)$ vérifiant: tout champ de vecteur $Y \in \chi^1(U)$ tangent à $\mathcal{D}$ peut être écrit: $Y = \sum_i f_i.X_i$, où $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Exemple 4.1.5. *Les distributions régulières sont localement de type fini.*

Théorème 4.1.2. *Toute distribution singulière lisse localement de type fini et involutive est intégrable.*

Preuve:
Soit $\mathcal{D}$ une ditribution singulière lisse localement de type fini et involutive sur une variété lisse M. Il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est localement intégrable, i.e. en chaque point passe une sous variété intégrale de dimension maximale. Par le théorème précédant il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est engendré par une famille de champs de vecteurs qui la preserve:

Considerons la famille $\mathcal{E}$ =$\{X \in \chi^1(M)$ tel que X est tangent à $\mathcal{D}\}$ et $X \in \mathcal{E}$. Montrons que son flot préserve $\mathcal{D}$: soit $p \in M$, si $X(p) = 0$ c'est trivial, sinon par des coordonnées locales on se ramène dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ et $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$, où le point générique de $\mathbb{R}^n$ est $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Le flot $(\psi^t)_t$ de X est formé des translations suivant le premier vecteur coordonées de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\psi^t(q) = t.e_1 + q,\ \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

Soient $V_1, ..., V_k$ des champs de vecteurs engendrant $\mathcal{D}$ sur un voisinage U de p. Chaque V_i peut être considéré comme une application lisse de U sur $\mathbb{R}^n$, comme $\mathcal{D}$ est involutive

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, V_i\right] = \frac{\partial V_i}{\partial t} \in \mathcal{E}$$

pour tout i. Ainsi il existe des fonctions $a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ telles que

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = \sum_{i,j} a_{ij}.V_j \text{ sur } U.$$

On veut montrer que $(\psi^t)^*(\mathcal{D}_p) = \mathcal{D}_{\psi^t(p)}$. On montre une inclusion et que les dimensions des deux espaces sont égales:

Soit $V \in \mathcal{D}_p$, il existe $Y \in \chi^1(U)$ tangent à $\mathcal{D}$ tel que $Y = \sum_i f_i.V_i$, où $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et $Y(p) = V$. Montrons que $(\psi^t)^*(V) \in \mathcal{D}_{\psi^t(p)}$:

Le long de l'axe des $(t, 0) \in U$ on a le système d'équations

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}(t, 0) = \sum_{i,j} a_{ij}(t, 0).V_j(t, 0),\ 1 \leq i \leq k$$

alors le sous espace engendré par $\{V_1(t, 0), ..., V_k(t, 0)\}$ est indépendant du flot de $\dfrac{\partial}{\partial t}$, en effet:

Si $k = 1$: s'il existe un champ de vecteurs V vérifiant $\dfrac{\partial V}{\partial t}(t, 0) = a(t, 0).V(t, 0)$:

si$V(t, 0)$ s'annulle quelque part, alors il s'annulle partout et donc $V(t, 0)$ est indépendant de t;

si $V(t,0)$ ne s'annulle pas, soit $(c_1,...,c_n) = V(t_0,0)$, alors $V(t,0) = \exp(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau).(c_1,...,c_n)$. Considérons $e(t,0) = \frac{V(t,0)}{|V(t,0)|} = \frac{(c_1,...,c_n)}{|(c_1,...,c_n)|}$. Alors $e(t,0)$ est indépendant de t, donc $e(t,0) = e(\psi^t(0)) = (\psi^t)^* e(0,0)$ car $(\psi^t)^* = Id_{\mathbb{R}^n}$.

Si $k \geq 2$: on peut réduire au voisinage d'un point $(t_0,0)$ la famille $V_1,...,V_k$ en une sous famille libre $V_1,...,V_r$ telle que chaque V_i s'écrive comme combinaison lisse des $V_1,...,V_r$, $1 \leq i \leq k$. Considérons alors $W(t,0) = V_1(t,0) \wedge ... \wedge V_r(t,0)$. Alors il existe une foncion lisse $a(t,0)$ au voisinage de t_0 telle que $\frac{\partial W}{\partial t}(t,0) = a(t,0).W(t,0)$, par le cas $k=1$ on voit que $W(t,0)$ ne dépend pas de t, donc $W(t,0) = b(t).W(0,0)$. Par conséquent

$$W(\psi^t(0)) = b(t).(\psi^t)^*(W(0,0)).$$

Ainsi le sous espace engendré par $\{V_1(t,0),...,V_k(t,0)\}$ est indépendant de t, i.e. $(\psi^t)^*(\mathcal{D}_p) \subseteq \mathcal{D}_{\psi^t(p)}$. Reste à montrer que les dimensions sont égales:

la dimension du sous espace engendré par $\{V_1(t,0),...,V_k(t,0)\}$ est égal au rang de la matrice $A(t) = (x_{ij}(t))_{i\leq k, j\leq n}$ définie par $V_i(t,0) = \sum_j x_{ij}(t).e_j$ où $(e_j)_j$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc $\frac{\partial V_i}{\partial t}(t,0) = \sum_j \frac{\partial x_{ij}}{\partial t}(t).e_j = \sum_{k,j} a_{ij}(t,0).x_{jk}(t).e_k$. Alors, la matrice A vérifie l'équation $\frac{\partial A}{\partial t}(t) = B(t).A(t)$ où $B(t) = (a_{ij}(t,0))_{i\leq k, j\leq k}$. Ainsi le rang de $A(t)$ est celui de $A(0)$ qui vaut $\dim \mathcal{D}_p$.♠

4.2. **Écriture locale des algébroïdes de Lie.** Sur une algébroïde de Lie, les écritures locales dépendent d'une carte de M et d'une trivialisation locale où de manière équivalente d'un repère. On va montrer que l'on peut choisir ces données pour avoir les écritures les plus simples. Ce resultat ressemble au théorème de Darboux-Weinstein pour les variétés de Poisson mais n'en est pas une conséquence.

Théorème 4.2.1. *Écriture locale des algébroïdes de Lie*

Soient (A,π,M,ρ) une algébroïde de Lie de dimension k et de crochet $\{.,.\}$, $x_0 \in M$, $n = \dim M$ et $r = rg(\rho_{x_0})$. Alors il existe des coordonnées de M : $(x^i,y^j), 1 \leq i \leq r$, $r+1 \leq j \leq n$ dans un voisinage U de x_0, et un repère $(\sigma_1,...,\sigma_k)$ de A au dessus de U, tels que:

$$\begin{aligned} \rho\circ\sigma_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leq i \leq r \\ \rho\circ\sigma_j &= \sum_{r+1\leq l\leq n} b_j^l.\frac{\partial}{\partial y^l}, r+1 \leq j \leq k \end{aligned} \tag{11}$$

où les $b_j^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$ *et ne dépendent que des* y *et s'annulant en* x_0*, i.e.*

$$\begin{aligned} b_j^l(x^i, y^j) &= b_j^l(y^j), \\ b_j^l(x_0) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

De plus,

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sum_{1 \le l \le k} c_{ij}^l . \sigma_l \tag{13}$$

où $c_{ij}^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$*,* $c_{ij}^l = 0$ *pour* $1 \le l \le r$ *et*

$$\sum_{l \ge r} \frac{\partial c_{st}^l}{\partial x^i} . b_j^l = 0. \tag{14}$$

Preuve:

On procéde par induction sur r. Si $r = 0$ c'est trivial. On suppose le resultat vrai pour tout s tel que $0 \le s \le r-1$ et on le montre pour $s = r$:

Soient des coordonnées $(x^i, \tilde{y}^j), i \le r-1,\ r \le j \le n$ sur un ouvert U de M voisinage de x_0, et un repère $(\sigma_i, \tilde{\sigma}_j), i \le r-1,\ r \le j \le k$ de A au dessus de U, tels que:

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}, i \le r-1 \\ \rho \circ \tilde{\sigma}_j &= \sum_{r \le l \le n} b_j^l . \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^l}, r \le j \le k \end{aligned}$$

où les $b_j^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et ne dépendent que des $\tilde{y}$ et s'annulent en x_0. Comme $r = rg(\rho_{x_0}) \ge 1$ il existe un j, $r \le j \le k$ tel que $\rho \circ \tilde{\sigma}_j(x_0) \ne 0$. On peut choisir $j = r$, on note $\sigma_r = \tilde{\sigma}_r$. Si l'on considère la sous variété plongé $S = \{(x^i, \tilde{y}^j); x^i = 0, i \le r-1, r \le j \le n;\}$ de M et si l'on restreint l'algébroïde de Lie (A, π, M, ρ) à S, en utilisant l'hypothèse de récurrence on peut changer les coordonnées $(\tilde{y}^j), r \le j \le n$ de sorte à avoir $\rho \circ \sigma_r = \dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}$.
On obtient des coordonnées (x^i, y^j), $i \le r$, $r+1 \le j \le n$ sur U telles que

$$\begin{aligned} x^r &= x^r(\tilde{y}^r, ..., \tilde{y}^n) \\ y^j &= y^j(\tilde{y}^r, ..., \tilde{y}^n), r+1 \le j \le n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}, i \le r \\ \rho \circ \tilde{\sigma}_j &= b_j^r . \frac{\partial}{\partial x^r} + \sum_{r+1 \le l \le n} b_j^l . \frac{\partial}{\partial y^l}, r+1 \le j \le k. \end{aligned}$$

Si l'on remplace $\tilde{\sigma}_j$ par $\tilde{\sigma}_j - b^r_j.\sigma_r$: $(\sigma_i, \tilde{\sigma}_j), i \leq r,\ r+1 \leq j \leq k$ reste un repère de A. dans ce cas

$$\rho \circ \tilde{\sigma}_j = \sum_{r+1 \leq l \leq n} b^l_j.\frac{\partial}{\partial y^l}, r+1 \leq j \leq k$$

avec

$$b^l_j = b^l_j(x^r, y^{r+1}, ..., y^n)$$

On doit montrer que les b^l_j ne dépendent pas de x^r : comme pour $r+1 \leq j \leq k$ on a

$$\begin{aligned} \rho \circ \{\sigma_r, \tilde{\sigma}_j\} &= [\rho \circ \sigma_r, \rho \circ \tilde{\sigma}_j] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x^r}, \sum_{r+1 \leq l \leq n} b^l_j.\frac{\partial}{\partial y^l}\right] \\ &= \sum_{r+1 \leq l \leq n} \frac{\partial b^l_j}{\partial x^r}.\frac{\partial}{\partial y^l} \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que le rang de ρ vaut r:

$$\{\sigma_r, \tilde{\sigma}_j\} = \sum_{r+1 \leq l \leq k} c^l_{rj}.\tilde{\sigma}_l$$

ainsi,

$$\frac{\partial b^i_j}{\partial x^r} = \sum_{r+1 \leq l, s \leq k} c^l_{ri}.b^l_j, r+1 \leq i \leq n, r+1 \leq j \leq k.$$

On obtient une équation différentielle ordinaire pour les b^i_j dont la variable de temp est x^r et les variables d'espace sont les $y^{r+1}, ..., y^n$. On note $X(x^r)$ la resolvante de ce système telle que $X(0) = I$ et $Y(x^r)$ son inverse. On considère les sections

$$\sigma_j = \sum_{r+1 \leq l \leq k} Y^l_j(x^r).\tilde{\sigma}_l, r+1 \leq j \leq k$$

alors $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ est un repère de A au dessus de U, et l'on a

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma_j &= \sum_{r+1 \leq l \leq k, r+1 \leq s \leq n} Y^l_j(x^r).b^s_l(x^r, y^{r+1}, ..., y^n).\frac{\partial}{\partial y^s} \\ &= \sum_{r+1 \leq s \leq n} b^s_j(0, y^{r+1}, ..., y^n).\frac{\partial}{\partial y^s}. \end{aligned}$$

Comme le rang de ρ en x_0 vaut r on a necessairement $b^s_j(x_0) = 0$.

Ainsi on a trouvé des coordonnées $(x^i, y^j), 1 \leq i \leq r$, $r+1 \leq j \leq n$ dans un voisinage U de x_0, et un repère $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ de A au dessus de U, tels que:

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leq i \leq r \\ \rho \circ \sigma_j &= \sum_{r+1 \leq l \leq n} b_j^l . \frac{\partial}{\partial y^l}, r+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

où les $b_j^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et ne dépendent que des y et s'annulant en x_0, i.e.

$$\begin{aligned} b_j^l(x^i, y^j) &= b_j^l(y^j), \\ b_j^l(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

de plus,

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sum_{1 \leq l \leq k} c_{ij}^l . \sigma_l$$

où $c_{ij}^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $c_{ij}^l = 0$ pour $1 \leq l \leq r$. Reste à montrer que

$$\sum_{l \geq r} \frac{\partial c_{st}^l}{\partial x^i} . b_j^l = 0.$$

On la déduit directement de l'identité de Jacobi

$$\rho \circ \{\sigma_l, \{\sigma_i, \sigma_j\}\} = [[\rho \circ \sigma_j, \rho \circ \sigma_l], \rho \circ \sigma_i] + [[\rho \circ \sigma_l, \rho \circ \sigma_i], \rho \circ \sigma_j] . \spadesuit$$

4.3. **Champ caractéristique, feuilletage caractéristique.**

Définition 4.3.1. *(Champ caractéristique)*
Soient (A, π, M, ρ) une algébroïde de Lie, $p \in M$ l'espace caractéristique en p est l'espace vectoriel $D_p := \rho(A_p) \subset T_pM$. La distribution qui en decoule est appelée le champ caractéristique.

Le champ caractéristique est une distribution singulière lisse de M :
Considérons la famille $\mathcal{E} = \{X \in \chi^1(M)$ tel qu'il existe $\tilde{X} \in \chi^1(M, A)$ vérifiant $X = \rho \circ \tilde{X}\}$. Cette famille engendre la distribution singulière D, donc elle est lisse. Cette ditribution a une propriété remarquable: si $X = \rho \circ \tilde{X}, Y = \rho \circ \tilde{Y} \in \mathcal{E}$ on a la relation

$$[X, Y] = \left[\rho \circ \tilde{X}, \rho \circ \tilde{Y}\right] = \rho \circ \{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$$

Théorème 4.3.1. *Le champ caractéristique est une distribution intégrable.*

Preuve:
On montre que la distribution caractéristique est involutive et localement de type fini:
Soient $p \in M$ et $r = rg(\rho_p)$; il existe des coordonnées de M : $(x^i, y^j), 1 \leq i \leq r$, $r+1 \leq j \leq n$ dans un voisinage U de p, et un repère $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ de

A au dessus de U, tels que:

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leq i \leq r \\ \rho \circ \sigma_j &= \sum_{r+1 \leq l \leq n} b_j^l . \frac{\partial}{\partial y^l}, r+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

où les $b_j^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et ne dépendent que des y et s'annulant en p.

Soit $Y \in \chi^1(U)$ un champ tangent à D, alors $Y = \sum_{1 \leq i \leq r} X^i . \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{r+1 \leq j \leq n} Y^j . \frac{\partial}{\partial y^j}$, où $X^i, Y^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Le champ Y est tangent à D si et seulement si $\sum_{r+1 \leq j \leq n} Y^j . \frac{\partial}{\partial y^j}$ est tangent à D. Comme la famille $\{\frac{\partial}{\partial y^j}, r+1 \leq j \leq n\}$ est libre, ceci équivaut à dire que $Y^j . \frac{\partial}{\partial y^j}$ est tangent à D pour tout j. Soit j_0 tel que $r+1 \leq j_0 \leq n$. Si $Y^{j_0} \neq 0$ considérons l'ouvert non vide $V_0 = \{Y^{j_0} \neq 0\}$. $\frac{\partial}{\partial y^{j_0}}$ est tangent à D sur V_0 ce qui implique qu'au voisinage de chaque point de V_0 il existe j_1 tel que $r+1 \leq j_1 \leq k$ et

$$b_{j_1}^{j_0} . \frac{\partial}{\partial y^{j_0}} = \rho \circ \sigma_{j_1} - \sum_{r+1 \leq l \leq n, l \neq j_0} b_{j_1}^{j_0} . \frac{\partial}{\partial y^{j_0}}$$

est non nul sur ce voisinage. Comme la famille $\{\frac{\partial}{\partial y^j}, r+1 \leq j \leq n\}$ est libre ceci implique qu'au voisinage de chaque point de V_{j_0} il existe j_1 tel que $r+1 \leq j_1 \leq k$

$$\frac{\partial}{\partial y^{j_0}} = \frac{1}{b_{j_1}^{j_0}} . \rho \circ \sigma_{j_1}.$$

Par un argument de partition de l'unité on peut construire une famille de fonctions $\tilde{f}_j \in \mathcal{C}^\infty(V_0), r+1 \leq j \leq k$ telles que:

$$\frac{\partial}{\partial y^{j_0}} = \sum_{r+1 \leq j \leq n} \tilde{f}_j . \rho \circ \sigma_j, \text{ sur } V_0.$$

Soient $f_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$ des prolongements quelconques de $\tilde{f}_j$, alors on a sur tout U :

$$Y^{j_0} . \frac{\partial}{\partial y^{j_0}} = \sum_{r+1 \leq j \leq n} Y^{j_0} . f_j . \rho \circ \sigma_j.$$

Ceci montre que la distribution caractéristique est localement de type fini.

On montre l'involutivité:

Soient $X, Y \in \mathcal{E}$ on montre que $[X, Y]$ est tangent à D. D'après ce qui précéde, il suffit de faire la vérification pour $X \in \{\rho \circ \sigma_i\}$. Dans les coordonnées (x^i, y^j) : Y s'écrit $Y = \sum_{1 \leq i \leq r} X^i . \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{r+1 \leq j \leq n} Y^j . \frac{\partial}{\partial y^j}$. Par additivité

il suffit de le faire quand $Y = f.\frac{\partial}{\partial x^i}$ ou $Y = f.\frac{\partial}{\partial y^j}$, où $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et $f \neq 0$.
Le premier cas est évident. Si $Y = f.\frac{\partial}{\partial y^j}$; quand $1 \leq i \leq r$:

$$\begin{aligned}\left[\rho \circ \sigma_i, f.\frac{\partial}{\partial y^j}\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, f.\frac{\partial}{\partial y^j}\right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}.\frac{\partial}{\partial y^j}\end{aligned}$$

est tangent à D car $f.\frac{\partial}{\partial y^j}$ est tangent à D. Ceci implique que $\frac{\partial}{\partial y^j}$ est tangent à D; quand $r+1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}\left[\rho \circ \sigma_i, f.\frac{\partial}{\partial y^j}\right] &= \left[\sum_{r+1\leq l\leq n} b_i^l.\frac{\partial}{\partial y^l}, f.\frac{\partial}{\partial y^j}\right] \\ &= \sum_{r+1\leq l\leq n} b_i^l.\frac{\partial f}{\partial y^l}.\frac{\partial}{\partial y^j} - f.\sum_{r+1\leq l\leq n}\frac{\partial b_i^l}{\partial y^j}.\frac{\partial}{\partial y^l}\end{aligned}$$

il est clair que $\sum_{r+1\leq l\leq n} b_i^l.\frac{\partial f}{\partial y^l}.\frac{\partial}{\partial y^j}$ est tangent à D. Reste à voir que chaque $\frac{\partial b_i^l}{\partial y^j}.\frac{\partial}{\partial y^l}$ est tangent à D : si $\frac{\partial b_i^l}{\partial y^j} \neq 0$ alors $b_i^l \neq 0$. Comme $(\frac{\partial}{\partial y^l})_l$ est une famille libre, on a nécessairement que $\frac{\partial}{\partial y^l}$ est tangent à D, si $\frac{\partial b_i^l}{\partial y^j} = 0$ alors $\frac{\partial b_i^l}{\partial y^j}.\frac{\partial}{\partial y^l}$ est trivialement tangent à D; d'où D est involutive.♠

Par conséquent, le champ caractéristique définit un feuilletage singulier au sens de Stefan-Sussmann de M. On l'appelle le feuilletage caractéristique engendré par l'algébroïde de Lie.

Remarque 4.3.1. *Dans le cas des variétés de Poisson on retrouve le feuilletage symplectique.*

Part 2. **Les $\mathcal{A}$-connexions**

5. Les fibrés principaux

5.1. **Défintions, premières propriétés.** Dans la suite M est une $n-$variété lisse.

Définition 5.1.1. *(Fibré principal)*

Un fibré principal au dessus de M est un triplet (E, π, G) où:
– E est une variété lisse;
– G est un groupe de Lie opérant à droite sur E;
– π est une application lisse de E dans M telle que: $\pi(\mu.g) = \pi(\mu)$, $\forall \mu \in E, \forall g \in G$; et vérifiant la condition de trivialité locale:

pour tout $p \in M$ il existe un ouvert U de M contenant p et un difféomorphisme $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tel que

$$\Phi(\mu) = (\pi(\mu), \phi(\mu)), \forall \mu \in \pi^{-1}(U),$$

et

$$\Phi(\mu.g) = (\pi(\mu), \phi(\mu).g), \forall \mu \in E, \forall g \in G.$$

Proposition 5.1.1. *Soit (E, π, G) un fibré principal au dessus de M, alors:*

(1) *π est une submersion.*
(2) *Les fibres sont des sous variétés plongées de E.*
(3) *Il existe des sections locales lisses au voisinage de chaque point.*
(4) *G opère librement et transitivement sur les fibres.*

Preuve:

1/ Soit U un ouvert de M et $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ une trivialisation au dessus de U. Alors $\pi = p \circ \Phi$ implique que π est une submersion.

2/ Le critère des submersions.

3/ Si $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ une trivialisation au dessus de U alors pour tout $g \in G$ l'application $\sigma : U \to E$ définie par $\sigma(p) = \Phi^{-1}(p, g)$ est une section locale lisse.

4/ Soit $p \in M$. Considerons l'application $A : E_p \times G \to E_p$ définie par $A(\mu, g) = \mu.g$. C'est la restriction de l'action de G sur E. Comme les fibres sont des sous variétés plongés elle est lisse. L'action est transitive: si $\mu, \upsilon \in E_p$ alors en considerant une trivialisation $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ autour de p,

$$\Phi(\mu) = (\pi(\mu), \phi(\mu)) \text{ et } \Phi(\upsilon) = (\pi(\upsilon), \phi(\upsilon))$$

impliquent qu'il existe $g \in G$ tel que $\phi(\upsilon) = \phi(\mu).g$ (il suffit de prendre $g = \phi(\mu)^{-1}.\phi(\upsilon)$). Ainsi $\phi(\upsilon) = \phi(\mu.g)$ et donc

$$\Phi(\upsilon) = (\pi(\upsilon), \phi(\upsilon)) = (\pi(\mu.g), \phi(\mu.g)) = \Phi(\mu.g).$$

Comme Φ est bijective on voit que $\upsilon = \mu.g$.

L'action est libre: s'il existe $g \in G$ tel que $\mu.g = \mu, \forall \mu \in E_p$. Par ce qui précéde, $\phi(\mu.g) = \phi(\mu), \forall \mu \in E_p$ i.e. $\phi(\mu).g = \phi(\mu), \forall \mu \in E_p$ et donc $g = e$.♠

Soit (E, π, G) un fibré principal au dessus de M. Comme il existe une trivialisation au voisinage de chaque point de M, on peut construire un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de M par des domaines de trivialisations. On associe à chaque $i \in I$ la trivialisation $\Phi_i(.) = (\pi(.), \phi_i(.))$ au dessus de U_i.

Pour chaque i, j dans I tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, soit le difféomorphime

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : U_i \cap U_j \times G \to U_i \cap U_j \times G.$$

Pour chaque $(p, g) \in U_i \cap U_j \times G$ il existe un unique $\mu \in E_p$ tel que

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, g) = \Phi_i(\mu) = (\pi(\mu), \phi_i(\mu)) = (p, g').$$

On note $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, g) = (p, g_{ij}(p)(g))$. Comme $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, g.a) = \Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, g).a$, on déduit que $g_{ij}(p)(g) = g_{ij}(p)(e).g$. On note $g_{ij}(p) = g_{ij}(p)(e)$.

Définition 5.1.2. *(Fonctions de transition)*

Les fonctions $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ *s'appellent les fonctions de transition du fibré principal* (E, π, G) *associées au recouvrement* $\{U_i\}_{i \in I}$ *et aux trivialisations* $\{\Phi_i\}_{i \in I}$.

Cette famille vérifie la condition de cocycle: $\forall i, j, k \in I$ tels que $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing, \forall p \in U_i \cap U_j \cap U_k$

$$g_{ij}(p).g_{jk}(p) = g_{ik}(p),$$

en effet :

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} \circ \Phi_j \circ \Phi_k^{-1}(p, g) &= \Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, g_{jk}(p).g) \\ &= (p, g_{ij}(p).g_{jk}(p).g), \end{aligned}$$

d'un autre coté

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} \circ \Phi_j \circ \Phi_k^{-1}(p, g) = \Phi_i \circ \Phi_k^{-1}(p, g) = (p, g_{ik}(p).g),$$

ainsi

$$g_{ij}(p).g_{jk}(p) = g_{ik}(p).$$

Ainsi la donnée d'un fibré principal (E, π, G) au dessus de M nous permet d'associer à tout recouvrement ouvert assez fin $\{U_i\}_{i \in I}$ de M une famille $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ où $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ à chaque fois que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, telles que $\forall i, j, k \in I$ tels que $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, $\forall p \in U_i \cap U_j \cap U_k$ on a

$$g_{ij}.g_{jk} = g_{ik}.$$

La réciproque est aussi valable. On conviendra de noter $U_i \cap U_j \cap U_k$ par U_{ijk}.

Proposition 5.1.2. *Soit* G *un groupe de Lie.*

Si l'on se donne un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ *d'une variété lisse* M *et une famille de fonctions* $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ *à chaque fois que* $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, *et vérifiant l'identité de cocycle:* $g_{ij}.g_{jk} = g_{ik}$, $\forall i, j, k \in I$ *tels que* $U_{ijk} \neq \varnothing$. *Alors il existe un fibré principal* (E, π, G) *au dessus de* M *dont les fonctions de transitions associés au recouvrement* $\mathcal{U}$ *soit les* g_{ij}.

Preuve:

Par les conditions de cocycle on a que $g_{ii}(p) = e, \forall p \in U_i, \forall i \in I$ et que $g_{ji}(p) = (g_{ij}(p))^{-1}, \forall i, j \in I$ tels que $U_{ij} \neq \varnothing$, $\forall p \in U_i \cap U_j$.

Considérons l'ensemble $\tilde{E} := \bigsqcup_{i \in I} U_i \times G$. Un élément de $\tilde{E}$ est représenté par un triplet (i, p, g) où $i \in I$, $p \in U_i$ et $g \in G$. On introduit la relation d'équivalence sur $\tilde{E}$:

$$(i, p, g) \sim (j, q, h) \Leftrightarrow p = q \text{ et } g = g_{ij}(p).h.$$

On note $E := \tilde{E}/\sim$. Pour tout $k \in I$: $U_k \times G$ est un sous espace de E :

soit $i_k : U_k \times G \to E$ définie par $i_k(p, g) = [(k, p, g)]$ où $[(k, p, g)]$ est la classe de (k, p, g) modulo $\sim$. Alors i_k est bien définie. Elle et injective: si $(p, g), (q, h) \in U_k \times G$ tels que $i_k(p, g) = i_k(q, h)$ alors $(k, p, g) \sim (k, q, h)$ et donc $p = q$ et $g = g_{ii}(p)(h) = h$. La famille $\{U_k \times G\}_{k \in I}$ est un recouvrement de E. Il existe une unique structure différentielle sur E telle que les $U_k \times G$ soient des ouverts de E.

Considérons l'application $\pi : E \to M$ définie par $\pi([(k,p,g)]) = p$. Alors π est bien définie: si $[(k,p,g)] = [(j,q,h)]$ alors $(k,p,g) \sim (j,q,h)$ et donc $p = q$. Le triplet (E, π, G) est un fibré principal au dessus de M :

– G opère à droite sur E : considérons $A : E \times G \to E$ définie par

$$A([(k,p,g)], \rho) = [(k,p,g.\rho)] .$$

Alors A est bien définie: si $[(k,p,g)] = [(j,q,h)]$ alors $(k,p,g) \sim (j,q,h)$ et donc $p = q$ et $g = g_{kj}(p)(h)$, donc $p = q$ et $g.\rho = g_{kj}(p)(h).\rho = g_{kj}(p)(h.\rho)$. Ainsi

$$[(k,p,g.\rho)] = [(j,q,h.\rho)] .$$

A est une action à droite: en effet

$$A([(k,p,g)], e) \equiv [(k,p,g.e)] \equiv [(k,p,g)]$$

et

$$\begin{aligned} A(A([(k,p,g)], a), b) &\equiv A([(k,p,g.a)], b) \equiv [(k,p,(g.a).b)] \\ &\equiv [(k,p,g.(a.b))] \equiv A([(k,p,g)], a.b). \end{aligned}$$

A est lisse sur chaque $U_k \times G \times G$ et est donc lisse sur $E \times G$.

– π est lisse car π restreinte à $U_k \times G$ n'est autre que la projection sur le premier facteur. Soit $[(k,p,g)] \in E$, $h \in G$ alors $\pi([(k,p,g)].h) = \pi([(k,p,g.h)]) = p$.

Reste à montrer qu'il existe des trivialisation locales aux voisinage de chaque point: soit $p \in M$. Considérons un ouvert U_k de M contenant p, alors $\Phi_k : U_k \times G \to U_k \times G$ définie par $\Phi_k(q,g) = (q,g)$ est une trivialisation locale au dessus de U_k qui s'écrit $\Phi_k(q,g) = (\pi(q,g), \phi_k(q,g))$ et telle que $\Phi_k((q,g).a) \equiv (\pi(q,g), \phi_k(q,g).a)$.♠

Exemple 5.1.1. *(Le fibré des repères d'un fibré vectoriel)*

Soit (E, π, M) un fibré vectoriel de dimension k au dessus d'une variété lisse M. En chaque point p de M la fibre E_p est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension k. On considère $\mathcal{F}(p) = \{\mu = (v_1, ..., v_k) \in (E_p)^k$; tel que $(v_1, ..., v_k)$ est une base de $E_p\}$, $\mathcal{F}(E,\pi,M) = \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{F}(p)$ et la projection canonique $\tilde{\pi} : \mathcal{F}(E,\pi,M) \to M$. Alors il existe une unique structure différentielle sur $\mathcal{F}(E,\pi,M)$ qui rend $(\mathcal{F}(E,\pi,M), \tilde{\pi}, Gl(k,\mathbb{R}))$ un fibré principal au dessus de M; en effet: considérons un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de M par des domaines de trivialisation du fibré (E,π,M). Pour chaque $i \in I$ on choisit un repère $\sigma^i = (\sigma^i_1, ..., \sigma^i_k)$ de (E,π,M) au dessus de U_i et on note $\mathcal{F}(U_i) = \bigsqcup_{p \in U_i} \mathcal{F}(p)$. Soit $\Phi_i : \mathcal{F}(U_i) \to U_i \times Gl(k,\mathbb{R})$ définie par

$$\Phi_i(p,\mu) = (p, pass(\sigma^i(p), \mu)),$$

il est clair que Φ_i est bijective. Pour chaque i, j dans I tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ on considère la fonction

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : U_i \cap U_j \times Gl(k, \mathbb{R}) \to U_i \cap U_j \times Gl(k, \mathbb{R}).$$

C'est un difféomorphime, en effet; si $(p, A) \in U_i \cap U_j \times Gl(k, \mathbb{R})$ alors $\Phi_j^{-1}(p, A) = (p, \mu)$ avec $A = pass(\sigma^j(p), \mu)$ et $\Phi_i(p, \mu) = (p, pass(\sigma^i(p), \mu)) = (p, B)$. Ainsi

$$B = pass(\sigma^i(p), \mu) = pass(\sigma^i(p), \sigma^j(p)).pass(\sigma^j(p), \mu) = pass(\sigma^i(p), \sigma^j(p)).A,$$

i.e.

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, A) = (p, pass(\sigma^i(p), \sigma^j(p)).A)$$

qui est lisse, de plus elle est inversible et d'inverse $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ qui est aussi lisse. On obtient une famille de fonctions $g_{ij} : U_i \cap U_j \to Gl(k, \mathbb{R})$ définies par $g_{ij}(p) = pass(\sigma^i(p), \sigma^j(p))$. L'identité de cocycle est vérifié car

$$pass(\sigma^i(p), \sigma^j(p)).pass(\sigma^j(p), \sigma^l(p)) \equiv pass(\sigma^i(p), \sigma^l(p)).$$

Par la proposition précédante il existe une unique structure différentielle sur $\mathcal{F}(E, \pi, M)$ telle que $(\mathcal{F}(E, \pi, M), \tilde{\pi}, Gl(k, \mathbb{R}))$ soit un fibré principal au dessus de M.

5.2. **Morphismes de fibrés principaux, image réciproque.** Soient M et N deux variétés lisses, G et H sont des groupes de Lie. Soient (E, π, G), (F, ϖ, H) des fibrés principaux au dessus de M et N respectivement.

Définition 5.2.1. *(Morphisme)*

Un morphisme de fibrés principaux de (E, π, G) dans (F, ϖ, H) est un couple d'applications lisses $(f, \phi) = (f : E \to F, \phi : G \to H)$ tel que

(1) *ϕ est un morphisme de groupes de Lie;*
(2) *$f(\mu.g) \equiv f(\mu).\phi(g)$.*

Remarque 5.2.1. *Si $(f : E \to F, \phi : G \to H)$ est un morphime de fibré principaux alors f respecte les fibres, i.e. si $p \in M$, $\mu \in E_p$, en posant $q = \varpi(f(\mu))$ on a: $f(E_p) \subset F_q$.*

Ceci implique qu'il existe une unique application lisse $\tilde{f} : M \to N$ qui fait commuter le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \varpi \\ M & \xrightarrow[\tilde{f}]{} & N \end{array}$$

i.e.: $f \circ \varpi = \pi \circ \tilde{f}$.

Si (f, ϕ) est un isomorphisme de fibrés principaux alors $\tilde{f}$ est un difféomorphisme. On dit que le fibré principal (E, π, G) au dessus de M est trivial s'il est isomorphe au fibré trivial $(M \times G, p, G)$ au dessus de M.

Soient (E, π, G) un fibré principal au dessus de M et $f : N \to M$ une application lisse. Considérons l'ensemble

$$f^*E = N \times_M E := \{(x, \mu) \in N \times E; f(x) = \pi(\mu)\}$$

et la projection naturelle $p : N \times_M E \to N$ définie par $p(x, \mu) = x$ (la fibre au dessus de x est $\{x\} \times E_{f(x)}$). Si U est un ouvert de M domaine de la trivialisation $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi} U \times G$; $\Phi(\mu) = (\pi(\mu), \phi(\mu))$, on considère l'ouvert$W := f^{-1}(U)$ de N et l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & p^{-1}(W) & \to & W \times G \\ & (x, \mu) & \mapsto & \Psi(x, \mu) = (p(x, \mu), \psi(x, \mu)) = (x, \phi(\mu)) \end{array}$$

On construit une unique structure différentielle sur f^*E telle que $(N \times_M E, p, G)$ soit un fibré principal au dessus de N dont les trivialisations sont de la forme de Ψ :

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert assez fin de M avec les fonctions de transition $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$. Pour tout $i \in I$, considérons $W_i := f^{-1}(U_i)$. Si (i, j) est un couple de I tel que $W_i \cap W_j \neq \varnothing$ on pose $h_{ij} : W_i \cap W_j \to G$ définie par $h_{ij}(x) \equiv g_{ij}(f(x))$. La famille $\{h_{ij}\}_{i,j \in I}$ vérifie l'identitée de cocycle. Par la proposition précédante (f^*E, p, G) est un fibré principal au dessus de M dont les trivialisations sont de la forme de Ψ, les fonctions de transition associées au recouvrement ouvert $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ sont les h_{ij} et telle que l'action de G sur f^*E soit $((x, \mu), g) \mapsto (x, \mu.g)$.

Définition 5.2.2. *(Fibré pull-back)*
Le fibré principal $(f^*E = N \times_M E, p, G)$ au dessus de N s'appelle le fibré image réciproque (ou le fibré pull-back) par f.

Considérons maintenant l'application $F : N \times_M E \to E$ définie par $F(x, \mu) \equiv \mu$. Alors (F, id_G) est un morphisme de fibrés principaux. En effet; F est lisse: soient U un ouvert de M domaine d'une trivialiation $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi} U \times G$; $\Phi(\mu) = (\pi(\mu), \phi(\mu))$ et $W := f^{-1}(U)$ avec la trivialisation $p^{-1}(W) \xrightarrow{\Psi} W \times G$; $\Psi(x, \mu) = (x, \phi(\mu)) = (p(x, \mu), \psi(x, \mu))$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(W) & \xrightarrow{F} & \pi^{-1}(U) \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ W \times G & \underset{\Phi \circ F \circ \Psi^{-1}}{\longrightarrow} & U \times G \end{array}$$

F est lisse car $\Phi \circ F \circ \Psi^{-1}$ l'est.

F est invariante par l'action de G; en effet: $F((x, \mu).g) \equiv F((x, \mu.g)) \equiv \mu.g \equiv F(x, \mu).g$. De plus, l'application induite par ce morphisme de fibrés n'est autre que f. On obtient le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} N \times_M E & \xrightarrow{F} & E \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \underset{f}{\longrightarrow} & M \end{array} .$$

5.3. **Les champs verticaux.** Soit (E, π, G) un fibré principal au dessus de M. On note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, e l'élément neutre de G, $A : E \times G \to E$, $(\mu, g) \mapsto \mu.g$ l'action de G sur E, $R_g : \mu \mapsto \mu.g$ la multiplication à droite par $g \in G$, $Ad : G \to Gl(\mathcal{G})$ la représentation adjointe de G et exp l'exponentielle de G.

Définition 5.3.1. *(L'action infinitésimale)*
Pour tout $\xi \in \mathcal{G}$ on définit le champ vertical $\sigma(\xi)$ par:

$$\sigma(\xi).\mu = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\mu. \exp t\xi), \ \ \mu \in E.$$

On appelle $\sigma : \mathcal{G} \to \chi^1(E)$ l'action infinitésimale de G sur E.

Remarque 5.3.1. *Par définition, le flot de $\sigma(\xi)$ est $(\mu. \exp t\xi)_{\mu \in E, t \in \mathbb{R}}$.*

Si $\mu \in E$ considérons l'application $\sigma(.).\mu : \mathcal{G} \to T_\mu E$. C'est une application linéaire injective; en effet: elle est linéaire car

$$\sigma(\xi).\mu = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\mu. \exp t\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} A(\mu, \exp t\xi) = d_{(\mu,e)}A.(0, \xi).$$

Elle est injective car $\sigma(\xi).\mu = 0 \Rightarrow \mu. \exp t\xi \equiv \mu$, donc $\exp t\xi \equiv e$, i.e. $\xi = 0$.

Remarque 5.3.2. *Pour tout $\mu \in E$ on a $\sigma(\mathcal{G}).\mu$ est un sous espace vectoriel de $T_\mu E$ de dimension la dimension de G.*

Comme π est constante sur ses fibres alors $\pi(\mu. \exp t\xi) \equiv \pi(\mu)$, donc $\pi_*(\sigma(\xi).\mu) \equiv 0$, d'où $\sigma(\mathcal{G}).\mu \subset \ker \pi_*$ pour tout $\mu \in E$. D'autre part π est une submersion et $\dim E = \dim M + \dim G$. Donc $\dim(\ker \pi_*) = \dim G$.

Définition 5.3.2. *(Le champ vertical)*
La distribution verticale du fibré principal (E, π, G) au dessus de M est la distribution $\mathcal{V} : \mu \mapsto \mathcal{V}_\mu = \sigma(\mathcal{G}).\mu = \ker(d_\mu \pi)$ sur E engendré par les champs verticaux.

Cette ditribution est lisse car engendré par les champs verticaux et de dimension constante égale à la dimension de G.

Proposition 5.3.1. *(Propriétés du champ vertical)*

(1) *Le champ vertical est invariant par l'action de G : pour $g \in G$, $\xi \in \mathcal{G}$:*

$$(R_g)_* \sigma(\xi) = \sigma(Ad(g^{-1}).\xi). \tag{15}$$

(2) *La distribution verticale est involutive: $\forall \xi, \eta \in \mathcal{G}$:*

$$[\sigma(\xi), \sigma(\eta)] = \sigma([\xi, \eta]). \tag{16}$$

Preuve:

1/

$$\begin{aligned}(R_g)_*(\sigma(\xi).\mu) &= (R_g)_*(\frac{d}{dt}|_{t=0}(\mu.\exp t\xi)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\mu.\exp t\xi.g) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\mu.g.g^{-1}.\exp t\xi.g) \\ &= \sigma(Ad(g^{-1}).\xi).(\mu.g).\end{aligned}$$

2/ Comme c'est une vérification ponctuelle, il suffit de la faire au voisinage de chaque point. On choisit un ouvert où notre fibré trivial, dans ce cas

$$\sigma(\xi).(p,g) = (0_{T_pM}, g.\xi) \text{ et } \sigma(\eta).(p,g) = (0_{T_pM}, g.\eta).$$

Considérons l'injection canonique $j(h) = (p,h)$ et $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ les champs invariants à gauche tels que $\tilde{\xi}(e) = \xi$ et $\tilde{\eta}(e) = \eta$. Par définition, on a: $\sigma(\xi) = j^*\tilde{\xi}$ et $\sigma(\eta) = j^*\tilde{\eta}$. Comme le crochet de Lie est naturel on a le resultat.♠

Ainsi la distribution verticale est $G-$invariante, intégrable et définit un feuilletage régulier de E.

5.4. **Lemme technique.** Soit G un groupe de Lie qui agit à droite sur une variété lisse P par $A : P \times G \to P$. Si $(p,g) \in P \times G$ on note $R_g$le difféomorphisme défini par

$$\begin{array}{rccc} R_g : & P & \to & P \\ & x & \mapsto & R_g(x) = x.g \end{array},$$

et $L_p : G \to P$ l'application lisse définie par

$$\begin{array}{rccc} L_p : & G & \to & P \\ & h & \mapsto & L_p(h) = p.h = A(p,h) \end{array}.$$

Pour $X_p \in T_pP$ et $\xi_g \in T_gG$ on note par:

(17)
$$\begin{aligned} X_p.g &= d_pR_g.X_p \in T_{p.g}P \\ p.\xi_g &= d_gL_p.\xi_g \in T_{p.g}P. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $P = G$ et A est la multiplication sur G, on note $r_g : G \to G$ la multiplication à droite et $l_g : G \to G$ la multiplication à gauche. Ainsi, pour $g, h \in G$; $\xi_g \in T_gG$ et $\eta_h \in T_hG$ on a

$$\begin{aligned} h.\xi_g &= d_gl_h.\xi_g \in T_{h.g}G \\ \eta_h.g &= d_hr_g.\eta_h \in T_{h.g}G \end{aligned}$$

Lemme 5.4.1. *En utilisant le notations précédantes on a les formules:*

(1)

(18)
$$d_{(p,g)}A(X_p, \xi_g) = X_p.g + p.\xi_g;$$

(2)

(19)
$$p.\xi_g = (p.h).(h^{-1}.\xi_g)$$

Preuve:
1/ Par linéarité, on a

$$d_{(p,g)}A(X_p,\xi_g)=d_{(p,g)}A(0,\xi_g)+d_{(p,g)}A(X_p,0).$$

On note $i_g:P\to P\times G$ l'injection définie par $i_g(x)=(x,g)$, et $j_p:G\to P\times G$ l'injection définie par $j_p(h)=(p,h)$. On a: $(X_p,0)=d_pi_g.X_p$ et $(0,\xi_g)=d_gj_p.\xi_g$. Ainsi:

$$\begin{aligned}d_{(p,g)}A(X_p,\xi_g) &= d_{(p,g)}A.d_gj_p.\xi_g+d_{(p,g)}A.d_pi_g.X_p\\ &= d_g(A\circ j_p).\xi_g+d_p(A\circ i_g).X_p\end{aligned}$$

or: $A\circ j_p(h)=p.h=L_p(h)$ et $A\circ i_g(x)=x.g=R_g(x)$, donc:

$$\begin{aligned}d_{(p,g)}A(X_p,\xi_g) &= d_gL_p.\xi_g+d_pR_g.X_p\\ &= X_p.g+p.\xi_g.\end{aligned}$$

2/ Soit $\gamma(t)$ une courbe sur G telle que $\gamma(0)=g$ et $\dot\gamma(0)=\xi_g$. En utilisant le resultat précédant on a:

$$\begin{aligned}p.\xi_g &= d_gL_p.\xi_g\\ &= d_{(p,g)}A.(0,\xi_g)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}A(p,\gamma(t))\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(p.\gamma(t))\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(p.h).(h^{-1}\gamma(t))\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}A(p.h,h^{-1}.\gamma(t)).\end{aligned}$$

Par ce qui précéde, on a: $\frac{d}{dt}|_{t=0}(h^{-1}.\gamma(t))=h^{-1}.\xi_g$, donc:

$$p.\xi_g=d_{(p.h,h^{-1}.g)}A.(0,h^{-1}.\xi_g)=(p.h).(h^{-1}.\xi_g).\spadesuit$$

Remarque 5.4.1. *Pour les fibrés principaux si $\mu\in P$ et $\xi\in\mathcal{G}$ alors*

$$\mu.\xi=d_eL_\mu.\xi=\frac{d}{dt}|_{t=0}A(\mu,\exp t.\xi)=\sigma(\xi).\mu.$$

6. Les $\mathcal{A}$-connexions sur les fibrés principaux

Dans la suite $(A,\pi,M,\#)$ est une algébroïde de Lie de dimension k et de crochet $\{.,.\}$. On note $C:p\mapsto C_p$ son champ caractéristique et $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_\alpha\}_\alpha$ le feuilletage singulier qu'il induit.

Soit (P,p,G) un fibré principal au dessus de M, on note $\mu\mapsto\mathcal{V}_\mu$ sa distribution verticale, $R_g:\mu\mapsto\mu.g$ l'action à droite de G sur P et $\sigma:\mathcal{G}\to\chi^1(P)$ l'action infinitésimale de G sur P.

On utilisera les notations suivante:

Si $\theta : M \to N$ est une application lisse on définit sa $A-$différentielle comme étant le morphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{array}{rccc} d_\#\theta : & A & \to & TN \\ & \alpha_p & \mapsto & d_p\theta.(\#\alpha_p) \end{array}$$

dans le cas où $N = \mathbb{R}$ on retrouve la notion de $A-$différentielle vu dans la première partie.

Si $\phi : M \to G$ est une application, on note $\phi^{-1} : M \to G$ l'application définie par $\phi^{-1}(x) = (\phi(x))^{-1}$.

6.1. **Les $\mathcal{A}$-connexions sur les fibrés principaux.** Comme $\pi : A \to M$ est une application lisse on peut considérer l'image réciproque de (P, p, G) par π et le fibré principal $\hat{p} : P \times_M A \to A$, où

$$P \times_M A = \{(\mu, \alpha) \in P \times A;\ p(\mu) = \pi(\alpha)\}.$$

On a aussi l'image réciproque de (A, π, M) par p qui donne le fibré vectoriel $\hat{\pi} : P \times_M A \to P$. Ces deux fibrés peuvent être resumés par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} P \times_M A & \xrightarrow{\hat{p}} & A \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ P & \xrightarrow[p]{} & M \end{array}$$

Définition 6.1.1. *(A-connexions principales)*

Une A-connexion sur le fibré principal (P, p, G) au dessus de M est un morphisme de fibrés vectoriels $h : P \times_M A \to TP$ tel que

(1) *h fait commuter les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} P \times_M A & \xrightarrow{h} & TP \\ \hat{p} \downarrow & & \downarrow p_* \\ A & \xrightarrow[\#]{} & TM \end{array}$$

(2) *h est $G-$invariant, i.e. on a pour tout $g \in G, (\mu, \alpha) \in P \times_M A$*

$$h(\mu.g, \alpha) = (R_g)_* h(\mu, \alpha)$$

(3) *$h(\mu, \alpha) \in T_\mu P$, pour tout $(\mu, \alpha) \in P \times_M A$, i.e. h fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} P \times_M A & \xrightarrow{h} & TP \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ P & \xrightarrow[id]{} & P \end{array}.$$

En tout $\mu \in P$, on considère le sous espace $\mathcal{H}_\mu$ de $T_\mu P$ engendré par les vecteurs $h(\mu, \alpha)$ tels que $p(\mu) = \pi(\alpha)$. Ceci définit une ditribution singulière $\mathcal{H} : \mu \mapsto \mathcal{H}_\mu$ sur P qu'on appelle la **ditribution horizontale**. La distribution horizontale est lisse, en effet:

Soient $\mu \in P, v \in \mathcal{H}_\mu \subset T_\mu P$, il existe $\alpha \in A$ tel que $(\mu, \alpha) \in P \times_M A$ et $h(\mu, \alpha) = v$. Soit $\tilde{X} : M \to A$ une section telle que $\tilde{X}(p(\mu)) = \alpha$, alors

$X : x \longmapsto X(x) = h(x, \tilde{X}(p(x)))$ est un champ de vecteurs lisse sur P tel que: $X(x) \in \mathcal{H}_x$ pour tout $x \in P$ et vérifiant $X(\mu) = v$.

On dit qu'un vecteur $X \in T_\mu P$ est horizontal si $X \in \mathcal{H}_\mu$ et vertical si $X \in \mathcal{V}_\mu$.

Remarque 6.1.1. *À moins que h soit de rang constant, le rang de la distribution horizontale n'est pas fixe, néanmoins il est fixe sur les fibres.*

Remarque 6.1.2. *Par définition d'une A-connection, on a: pour tout $\mu \in P$, $p_*\mathcal{H}_\mu \subset T_{p(\mu)}\mathcal{F}_\alpha$ où $\mathcal{F}_\alpha$ est le feuille du feuilletage caractéristique qui passe par $p(\mu)$.*

Remarque 6.1.3. *En général on n'a ni $T_\mu P = \mathcal{H}_\mu + \mathcal{V}_\mu$ ni $\mathcal{H}_\mu \cap \mathcal{V}_\mu = \{0\}$.*

6.2. **Formes à valeurs dans un fibré vectoriel, algébroïde de Lie, algèbre de Lie.** On introduit des fibré vectoriels dont on aura besoin pour définir les formes de connexion et de courbure.

Soient (A, π, M) et (E, ϖ, M) des fibrés vectoriels au dessus de M. Pour tout entier k considérons l'ensemble:

$$\wedge^k(A; E) := \bigsqcup_{p\in M} \wedge^k (A_p; E_p),$$

où $\wedge^k(A_p; E_p)$ est l'espace vectoriel des applications $k-$multilinéaires antisytmétriques de A_p dans E_p. Il est clair que $\wedge^k(A; E) \xrightarrow{p} M$ est un fibré vectoriel de dimension finie.

Définition 6.2.1. *(Formes à valeurs dans un fibré vectoriel)*

Une $k-$forme de (A, π, M) à valeurs dans (E, ϖ, M) est une section du fibré vectoriel $\wedge^k(A; E) \xrightarrow{p} M$, on note l'ensemble de ces formes par $\Omega^k(M, A; E)$.

Remarque 6.2.1.
1. *Pour $k = 0$: $\wedge^0(A; E) = \bigsqcup_{p\in M} \wedge^0 (A_p; E_p) = \bigsqcup_{p\in M} E_p$, donc $\Omega^0(M, A; E) = \chi^1(M; E)$.*
2. *Pour $k = 1$: $\wedge^1(A; E) = \bigsqcup_{p\in M} \wedge^1 (A_p; E_p) = \bigsqcup_{p\in M} End(A; E)$; une section de ce fibré est une application lisse*

$$\begin{array}{cccc} X: & M & \rightarrow & \bigsqcup_{p\in M} End(A; E) \\ & p & \mapsto & (p, X(p)) \end{array}$$

telle que $X(p) \in End(A_p; E_p)$ pour tout $p \in M$. Elle donne un morphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{array}{cccc} X: & A & \rightarrow & E \\ & (p, v) & \mapsto & (p, X(p).v) \end{array}.$$

Réciproquement, un morphisme de fibrés vectoriels $X : A \rightarrow E$ nous donne une unique section $X \in \Omega^1(M, A; E)$.

(3) *Soient* $Q \in \Omega^k(M,A;E)$ *et* $\alpha_1,...,\alpha_k \in \chi^1(M;A)$. *Alors* $Q(\alpha_1,...,\alpha_k) \in \chi^1(M;E)$. *Donc* $\Omega^k(M,A;E)$ *s'identifie naturellement avec l'ensemble des applications*

$$Q: \underbrace{\chi^1(M;A)\times...\times\chi^1(M;A)}_{k-fois} \rightarrow \chi^1(M;E)$$

qui sont $\mathcal{C}^\infty(M)$*-multilinéaires antisymétriques.*

Maintenant, on suppose que $(E,\varpi,M,\#)$ est une algébroïde de Lie de crochet $\{.,.\}$ on peut définir le produit extérieur de $P \in \Omega^p(M,A;E)$ et de $Q \in \Omega^q(M,A;E)$ par:

$$\{P,Q\}(\alpha_1,...,\alpha_{p+q}) =$$

$$\frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} sg(\sigma).\{P(\alpha_{\sigma(1)},...,\alpha_{\sigma(p)}),Q(\alpha_{\sigma(p+1)},...,\alpha_{\sigma(p+q)})\}_E.$$

Cependant on ne peut pas définir une différentielle extérieure de manière canonique.

Soit m la dimension du fibré (A,π,M) et V un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie. On peut considérer V comme étant le fibré vectoriel trivial $M\times V \rightarrow M$. Pour tout $p\in M$ et tout entier k on considère l'espace $\Lambda^k(A_p;V)$ des applications $\underbrace{A_p\times...\times A_p}_{k-fois} \rightarrow V$ qui sont $\mathbb{R}-$multilinéaires et anitisymétriques. On obtient $\Lambda^k(A;V) := \underset{p\in M}{\sqcup}\Lambda^k(A_p;V)$. Naturellement, $\Lambda^k(A;V) \rightarrow M$ est un fibré vectoriel. Une section de $\Lambda^k(A;V) \rightarrow M$ s'appelle une $k-$forme de (A,π,M) à valeurs dans V. On note l'espace de ces sections par $\Omega^k(M,A;V)$. C'est un $\mathcal{C}^\infty(M)$ module pour l'addition naturelle et multiplacation scalaire par des fonctions lisses. Dans le cas particulier du fibré tangent on note $\Omega^k(M,TM;V)$ par $\Omega^k(M;V)$.

Soit $(v_1,...,v_n)$ est une base de V. Alors tout $\alpha\in\Omega^k(M,A;V)$ s'écrit:

$$\alpha = \sum_{1\leq i\leq n}\alpha_i.v_i,\ \ \alpha_i\in\Omega^k(M,A)$$

Dans le cas particulier où $(A,\pi,M,\#)$ est une algébroïde de Lie de différentielle extérieure $d_\#$. On définit $d_\#\alpha\in\Omega^{k+1}(M,A;V)$ par:

$$d_\#\alpha = \sum_{1\leq i\leq n} d_\#\alpha_i.v_i.$$

De même on construit l'espace $\Lambda^k(A^*;V)$ et on a les mêmes resultats, on note ses sections par $\chi^k(M,A;V)$.

Si maintenant $b: V\times V\rightarrow V$ est une application bilinéaire, $\omega\in\Omega^k(M,A;V)$, $\eta\in\Omega^l(M,A;V)$, on définit $\omega\wedge_b\eta\in\Omega^{k+l}(M,A;V)$ par: $\forall X_1,...,X_{k+l}\in\chi^1(M,A)$:

$$\omega\wedge_b\eta(X_1,...,X_{k+l}) =$$

$$\frac{1}{k!l!}.\sum_{\sigma\in S_{p+q}} sg(\sigma).b(\omega(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(k)}),\eta(X_{\sigma(k+1)},...,X_{\sigma(k+l)})).$$

Dans la base $(v_1,...,v_n)$, $\omega=\sum_{1\leq i\leq n}\omega_i.v_i$, où $\omega_i\in\Omega^k(M,A)$ et $\eta=\sum_{1\leq j\leq n}\eta_j.v_j$, où $\eta_j\in\Omega^l(M,A)$, ainsi:

$$\omega\wedge_b\eta=\sum_{1\leq i,j\leq n}\omega_i\wedge\eta_i.b(v_i,v_j).$$

On sait que $d_\#$ est une dérivation d'ordre 1 de l'algèbre extérieure, ceci implique que

$$d_\#(\omega\wedge_b\eta)=(d_\#\omega)\wedge_b\eta+(-1)^k\omega\wedge_b d_\#\eta.$$

En particulier si $V=\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie et $b=[.,.]$ est son crochet, on note

$$[\omega,\eta]=\omega\wedge_b\eta.$$

Si $(\xi_1,...,\xi_n)$ est une base de $\mathcal{G}$. Pour tout $\omega=\sum_{1\leq i\leq n}\omega_i.\xi_i$ et $\eta=\sum_{1\leq j\leq n}\eta_j.\xi_j$, où $\omega_i,\eta_j\in\Omega^k(M,A)$ on a

$$[\omega,\eta]=\sum_{1\leq i,j\leq n}\omega_i\wedge\eta_i.\left[\xi_i,\xi_j\right].$$

Donc

$$[\omega,\eta]=-(-1)^{k.l}\left[\eta,\omega\right].$$

Exemple 6.2.1. *(Forme de Maurer-Cartan sur un groupe de Lie)*

Soit un groupe de Lie G d'élément neutre e et de dimension n. On note l_g, r_g les multiplications à gauche et à droite respectivementet $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Soit $(\xi_1,...,\xi_n)$ une base de $\mathcal{G}$, alors:

$$\left[\xi_i,\xi_j\right]=\sum_{1\leq k\leq n}c_{ij}^k.\xi_k.$$

On appelle les c_{ij}^k les constantes de structure.

Une forme $\omega\in\Omega^1(G)$ est dite invariante à gauche si: $(l_g)^*\ \omega=\omega$, $\forall g\in G$. De même on définit les formes invariantes à droite. Si $\omega\in\Omega^1(G)$ est invariante à gauche alors $\omega(e)\in\mathcal{G}^*$ et ω est entièrement déterminée par sa valeur en e. D'où

$$\mathcal{G}^*\cong\{\omega\in\Omega^1(G);\ \omega\ \textit{invariante à gauche}\}.$$

Soient $\omega\in\mathcal{G}^*$, $X,Y\in\mathcal{G}$ alors:

$$\begin{aligned}(d\omega)(X,Y)&=X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y])\\&=-\omega([X,Y]).\end{aligned}$$

Car $\omega(X)$ et $\omega(Y)$ sont constantes.On note par $(\xi^1, ..., \xi^n)$ la base duale sur $\mathcal{G}^*$. Alors:

$$(d\xi^l)(\xi_i, \xi_j) = -\xi^l([\xi_i, \xi_j]) = -\sum_{1\leq k\leq n} c_{ij}^k.\xi^l(\xi_k) = -c_{ij}^l.$$

On obtient les équations de Maurer-Cartan:

$$d\xi^l = -\sum_{1\leq i,j\leq n} c_{ij}^l.\xi^i \wedge \xi^j.$$

On peut écrire ces équations autrement. Soit $\omega \in \Omega^1(G; \mathcal{G})$, alors $\omega = \sum_{1\leq i\leq n} \omega_i.\xi_i$ où $\omega_i \in \Omega^1(G)$. Il est clair que ω est invariante à gauche si et seulement si chaque ω_i est invariante à gauche. En particulier si ω est invariante à gauche elle est entièrement déterminée par sa valeur en e. On définit la forme de Maurer-Cartan par:

$$\omega = \sum_{1\leq i\leq n} \xi^i.\xi_i.$$

Pour cette forme on a:

$$d\omega = \sum_{1\leq l\leq n} d\xi^l.\xi_l = -\sum_{1\leq i,j,l\leq n} c_{ij}^l.\xi^i \wedge \xi^j.\xi_l.$$

On sait d'autre part que

$$[\omega, \omega](\xi_i, \xi_j) = 2.\left[\omega(\xi_i), \omega(\xi_j)\right] = 2.\left[\xi_i, \xi_j\right] = 2.\sum_{1\leq k\leq n} c_{ij}^k.\xi_k.$$

Donc $[\omega, \omega] = 2.\sum_{1\leq i,j,l\leq n} c_{ij}^l.\xi^i \wedge \xi^j.\xi_l$, et on obtient la formule de Maurer-Cartan:

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]. \tag{20}$$

6.3. **Les formes locales de la $A-$connexion.** On commence par une étude des $A-$connexions sur le fibré trivial $p : M \times G \to M$. Il est clair que $(M \times G) \times_M A = G \times A$.

Soit $h : G \times A \to TM \times TG$ une $A-$connexion sur le fibré trivial. Pour tout $(g, \alpha_x) \in G \times A$, il existe un unique $\omega(g, \alpha_x) \in T_gG$ tel que

$$h(g, \alpha_x) = (\#\alpha_x, \omega(g, \alpha_x)).$$

Comme h est $G-$invariante, alors

$$\omega(g.g', \alpha_x) = (R_{g'})_*\omega(g, \alpha_x).$$

Il suffit de connaitre $\omega(e, \alpha_x)$ pour connaitre $\omega(g, \alpha_x)$ et donc pour connaitre notre $A-$connexion h. Ainsi, une $A-$connexion sur le fibré trivial $p : M \times G \to M$ n'est autre qu'un $\omega \in \Omega^1(M, A; \mathcal{G})$.

En particulier si ω_0 est la forme de Maurer-Cartan sur G. Pour toute application lisse $\phi : M \to G$ on définit

$$\tilde{\omega}_\phi := \phi^{-1}.\phi^*\omega_0 \in \Omega^1(M, TM; \mathcal{G}).$$

On obtient une $TM-$connexion sur $p : M\times G \to M$. Comme la différentielle extérieure et le produit extérieur commutent avec les applications linéaires, on déduit que $\tilde{\omega}_\phi$ vérifie l'équation de structure

$$d\tilde{\omega}_\phi + \frac{1}{2}\left[\tilde{\omega}_\phi, \tilde{\omega}_\phi\right] = 0.$$

On obtient comme ça une $A-$connexion $\hat{\omega}_\phi \in \Omega^1(M, A; \mathcal{G})$ définie par

$$\hat{\omega}_\phi(\alpha_x) := \tilde{\omega}_\phi(\#\alpha_x).$$

Il est clair que cette connexion vérifie l'équation de structure

$$d_\#\hat{\omega}_\phi + \frac{1}{2}\left[\hat{\omega}_\phi, \hat{\omega}_\phi\right] = 0.$$

Revenons au cas où $p : P \to M$ est un fibré principal de groupe de structure G. Soit un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de M par des domaines de trivialisations. On associe à chaque $i \in I$ la trivialisation $\Phi_i(.) = (p(.), \phi_i(.))$ au dessus de U_i. On obtient les sections triviales $s_i : U_i \to P$ définies par

$$s_i(x) = \Phi_i^{-1}(x, e).$$

On se donne une $A-$connxion h sur le fibré principal $p : P \to M$. Soient $\alpha \in \chi^1(M; A)$, $x \in U_i$ et $\mu = s_i(x)$, alors le vecteur

$$X_\mu := (s_i)_*\#\alpha_x - h(s_i(x), \alpha_x)$$

est vertical, en effet

$$p_*X_\mu = p_*(s_i)_*\#\alpha_x - p_*h(s_i(x), \alpha_x) = \#\alpha_x - \#\alpha_x = 0.$$

Considérons $\omega_i(\alpha_x)$ l'unique élément de $\mathcal{G}$ tel que

$$\sigma(\omega_i(\alpha_x)).\mu = X_\mu. \tag{21}$$

Alors en adoptant les notations $A_i := \pi^{-1}(U_i)$ et $P_i := p^{-1}(U_i)$, on obtient que $\omega_i(\alpha) \in \chi^1(U_i, A_i; \mathcal{G})$. Ainsi, on a une $A-$connexion $\omega_i \in \Omega^1(U_i, A_i; \mathcal{G})$ sur le fibré trivial $U_i \times G \to U_i$.

Définition 6.3.1. *On appelle la famille $\{\omega_i \in \Omega^1(U_i, A_i; \mathcal{G})\}_{i\in I}$ les 1-formes locales de la $A-$connexion h associées au recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ et aux trivialisations $\Phi_i(.) = (p(.), \phi_i(.))$.*

Maintenant si $s_i : U_i \to P$ et $s_j : U_j \to P$ sont deux trivialisations telles que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. On cherche à savoir comment se transforment les 1-formes locales par changement de trivialisation:

Si $x \in U_i \cap U_j$, $\mu = s_i(x)$ et $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ est la fonction de transition. Par définition des fonctions de structure, on a

$$s_j = s_i.g_{ij}.$$

On note $g_{ij}(x) = g$ alors $s_j(x) = \mu.g$, ainsi

$$\begin{aligned}\sigma(\omega_j(x)(\alpha_x)).(\mu.g) &= (s_j)_*(\#\alpha_x) - h(\mu.g, \alpha_x)\\ &= (s_i)_*(\#\alpha_x).g_{ij}(x) + s_i(x).(g_{ij})_*(\#\alpha_x) - (R_g)_*h(\mu, \alpha_x)\\ &= (R_g)_*(s_i)_*(\#\alpha_x) + (\mu.g).(g^{-1}.(g_{ij})_*(\#\alpha_x)) - (R_g)_*h(\mu, \alpha_x)\end{aligned}$$

$$= (R_g)_*(\sigma(\omega_i(x)(\alpha_x)).\mu) + \sigma(g^{-1}.(g_{ij})_*(\#\alpha_x)).(\mu.g)$$
$$= \sigma(Ad(g^{-1}).\omega_i(x)(\alpha_x)).(\mu.g) + \sigma(g^{-1}.(g_{ij})_*(\#\alpha_x)).(\mu.g).$$

Comme $\sigma(.).(\mu.g)$ est injective, on obtient

$$\omega_j = Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i + g_{ij}^{-1}.d_{\#}g_{ij} \tag{22}$$

Réciproquement, si l'on se donne une famille $\{\omega_i \in \Omega^1(U_i, A_i; \mathcal{G})\}_{i\in I}$ associée au recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ qui vérifie l'identité précédante pour tout $i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. On récupère une unique A-connxion telle que ses 1-formes locales soient les ω_i. En effet: pour tout $i \in I$ et tout $x \in U_i$ soit

$$h(s_i(x), \alpha_x) := (s_i)_*(\#\alpha_x) - \sigma(\omega_i(x)(\alpha_x)).s_i(x),\ \ \alpha_x \in A_x.$$

Comme l'action de G sur les fibres est libre et transitive, pour tout $\mu \in P_x$ et tout $\alpha_x \in A_x$ on définit $h(\mu, \alpha_x)$ en imposant à h d'être $G-$invariante, i.e. on sait qu'il existe un unique $g \in G$ tel que $\mu = s_i(x).g$, on pose alors

$$h(\mu, \alpha_x) := (R_g)_* h(s_i(x), \alpha_x).$$

On définit ainsi un morphisme de fibrés vectoriels $h : P \times_M A \to TP$. Il est clair que h est $G-$invariante. Reste à vérifier la condition 1 :

$$\begin{aligned} p_* \circ h(s_i(x), \alpha_x) &= p_*(s_i)_*(\#\alpha_x) - p_*\sigma(\omega_i(x)(\alpha_x)).s_i(x) \\ &= \#\alpha_x \\ &= \# \circ \hat{p}(s_i(x), \alpha_x). \end{aligned}$$

Proposition 6.3.1. *(Formes locales de la $A-$connexion)*

Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M avec les fonctions de transition $\{g_{ij}\}$. On se donne une famille $\{\omega_i \in \Omega^1(U_i, A; \mathcal{G})\}_{i\in I}$ qui vérifie l'équation

$$\omega_j = Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i + g_{ij}^{-1}.d_{\#}g_{ij}.$$

Alors, il existe une unique $A-$connexion dont les 1-formes locales sont les ω_i.

Preuve: voir ce qui précéde.♠

6.4. **Formes locales de courbure de la $A-$connexion.** Soient $h : P \times_M A \to TP$ une $A-$connexion, $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M avec les fonctions de transition $\{g_{ij}\}$ et les 1-formes locales de la connexion $\omega_i \in \Omega^1(U_i, A_i; \mathcal{G})$.

Définition 6.4.1. *(Formes locales de courbure)*

Pour tout $i \in I$ on définit la 2-forme locale de courbure $\Omega_i \in \Omega^2(U_i, A_i; \mathcal{G})$ par

$$\Omega_i := d_{\#}\omega_i + \frac{1}{2}\left[\omega_i, \omega_i\right]. \tag{23}$$

Proposition 6.4.1. *(Propriétés des 2-formes locales de courbure)*

(1) *Elles se transforment par:*

$$\Omega_j = Ad(g_{ij}^{-1}).\Omega_i \tag{24}$$

(2) *On a l'identité de Bianchi*

$$d_{\#}\Omega_i + [\omega_i, \Omega_i] = 0. \tag{25}$$

Preuve:

1/ On reprend les notions relatives aux $A-$connexions sur les fibrés triviaux. Considérons $\eta_{ij} := g_{ij}^{-1}.d_{\#}g_{ij}$, alors

$$\begin{aligned}\eta_{ij}(\alpha_x) &= g_{ij}^{-1}(x).d_{\#}g_{ij}(\alpha_x)\\ &= \tilde{\omega}_{g_{ij}}(\#\alpha_x)\\ &= \hat{\omega}_{g_{ij}}(\alpha_x)\end{aligned}$$

donc η_{ij} vérifie l'équation de Maurer-Cartan

$$d_{\#}\eta_{ij} + \frac{1}{2}\left[\eta_{ij}, \eta_{ij}\right] = 0.$$

D'autre part, comme $\omega_j = Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i + \eta_{ij}$ alors

$$\Omega_j = d_{\#}\omega_j + \frac{1}{2}\left[\omega_j, \omega_j\right]$$

$$= d_{\#}(Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i) + d_{\#}\eta_{ij} + \frac{1}{2}\left[Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i + \eta_{ij}, Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i + \eta_{ij}\right]$$

$$\begin{aligned} &= Ad(g_{ij}^{-1}).d_{\#}\omega_i + d_{\#}\eta_{ij} + \frac{1}{2}\left[Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i, Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i\right]\\ &\quad +\frac{1}{2}\left[Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i, \eta_{ij}\right] + \frac{1}{2}\left[\eta_{ij}, Ad(g_{ij}^{-1}).\omega_i\right] + \frac{1}{2}\left[\eta_{ij}, \eta_{ij}\right]\end{aligned}$$

$$= Ad(g_{ij}^{-1}).d_{\#}\omega_i + \frac{1}{2}Ad(g_{ij}^{-1}).\left[\omega_i, \omega_i\right]$$

$$= Ad(g_{ij}^{-1}).\Omega_i.$$

2/

$$\begin{aligned} d_{\#}\Omega_i &= d_{\#}(d_{\#}\omega_i + \frac{1}{2}\left[\omega_i, \omega_i\right])\\ &= d_{\#}(\frac{1}{2}\left[\omega_i, \omega_i\right])\\ &= \frac{1}{2}(\left[d_{\#}\omega_i, \omega_i\right] - \left[\omega_i, d_{\#}\omega_i\right])\\ &= -\left[\omega_i, d_{\#}\omega_i\right].\spadesuit\end{aligned}$$

On veut avoir une interprétation plus géométrique de la courbure, on aura besoin du lemme suivant

Lemme 6.4.1. *Pour tout $\alpha, \beta \in \chi^1(U_i; A_i)$ on a*

$$[h(\alpha), \sigma(\omega_i(\beta))] = \sigma(L_{\#\alpha}(\omega_i(\beta))) \tag{26}$$

Preuve:
Le flot de $\sigma(\omega_i(\beta))$ est $\Phi^t_\beta(\mu) = \mu.\exp(t\omega_i(\beta_{p(\mu)}))$. Alors

$$[h(\alpha), \sigma(\omega_i(\beta))]\,(\mu_0) = -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((\Phi^{-t}_\beta)_* h(\Phi^t_\beta(\mu_0), \alpha_{p(\mu_0)}) - h(\mu_0, \alpha_{p(\mu_0)})).$$

En posant $\Psi(\mu, t) = \exp(t\omega_i(\beta_{p(\mu)}))$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(\Phi^{-t}_\beta)_* h(\Phi^t_\beta(\mu_0), \alpha_{p(\mu_0)}) \\
&= h(\Phi^t_\beta(\mu_0), \alpha_{p(\mu_0)}).\Psi(\mu_0, -t) + \mu_0.(\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}(\mu_0, -t).h(\Phi^t_\beta(\mu_0), \alpha_{p(\mu_0)})) \\
&= d_{\Phi^t_\beta(\mu_0)} R_{\Psi(\mu_0,-t)}.h(\Phi^t_\beta(\mu_0), \alpha_{p(\mu_0)}) + \mu_0.(\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}(\mu_0, -t).h(\Phi^t_\beta(\mu_0), \alpha_{p(\mu_0)})) \\
&= h(\mu_0, \alpha_{p(\mu_0)}) + d_{\Psi(\mu_0,-t)} L_{\mu_0}.(\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}(\mu_0, -t).h(\Phi^t_\beta(\mu_0), \alpha_{p(\mu_0)})).
\end{aligned}$$

Soit $\tilde\gamma(s, t)$ une courbe telle que $\tilde\gamma(0, t) = \Phi^t_\beta(\mu_0)$ et $\tilde\gamma'(0, t) = h(\Phi^t_\beta(\mu_0), \alpha_{p(\mu_0)})$. Alors $\gamma(s, t) = p(\tilde\gamma(s, t))$ est une courbe telle que $\gamma(0, t) = p(\mu_0)$ et $\dot\gamma(0, t) = \#\alpha_{p(\mu_0)}$. Donc

$$\begin{aligned}
&d_{\Psi(\mu_0,-t)} L_{\mu_0}.(\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}(\mu_0, -t).h(\Phi^t_\beta(\mu_0), \alpha_{p(\mu_0)})) \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0}(\mu_0.\Psi(\tilde\gamma(s, t), -t)) \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0}(\mu_0.\exp(-t\omega_i(\beta_{\gamma(s,t)})).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
[h(\alpha), \sigma(\omega_i(\beta))]\,(\mu_0) &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}(\frac{d}{ds}|_{s=0}(\mu_0.\exp(-t\omega_i(\beta_{\gamma(s,t)}))) \\
&= -\frac{d}{ds}|_{s=0}(\frac{d}{dt}|_{t=0}(\mu_0.\exp(-t\omega_i(\beta_{\gamma(s,t)}))) \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0}(\sigma(\omega_i(\beta_{\gamma(s,0)})).\mu_0) \\
&= \sigma(L_{\#\alpha}(\omega_i(\beta_{p(\mu_0)}))).\mu_0.\spadesuit
\end{aligned}$$

Maintenant on peut prouver la proposition

Proposition 6.4.2. *Soient $\alpha, \beta \in \chi^1(U_i; A_i)$ alors*

$$[h(\alpha), h(\beta)] - h(\{\alpha, \beta\}) = -\sigma(\Omega_i(\alpha, \beta)) \tag{27}$$

Preuve:
Comme $(s_i)_*\#\alpha - \sigma(\omega_i(\alpha)) = h(\alpha)$, on a

$$\begin{aligned}
&[h(\alpha), h(\beta)] \\
&= [(s_i)_*\#\alpha - \sigma(\omega_i(\alpha)), (s_i)_*\#\beta - \sigma(\omega_i(\beta))] \\
&= [(s_i)_*\#\alpha, (s_i)_*\#\beta] - [(s_i)_*\#\alpha, \sigma(\omega_i(\beta))] \\
&\quad - [\sigma(\omega_i(\alpha)), (s_i)_*\#\beta] + [\sigma(\omega_i(\alpha)), \sigma(\omega_i(\beta))]
\end{aligned}$$

$$= (s_i)_*\#(\{\alpha,\beta\})+\sigma([\omega_i(\alpha),\omega_i(\beta)])-[(s_i)_*\#\alpha,\sigma(\omega_i(\beta))]+[(s_i)_*\#\beta,\sigma(\omega_i(\alpha))]$$

$$\begin{aligned} = \quad & h(\{\alpha,\beta\}) + \sigma(\omega_i(\{\alpha,\beta\})) + \sigma([\omega_i(\alpha),\omega_i(\beta)]) \\ & - [h(\alpha)+\sigma(\omega_i(\alpha)),\sigma(\omega_i(\beta))] + [h(\beta),\sigma(\omega_i(\alpha))] + [\sigma(\omega_i(\beta)),\sigma(\omega_i(\alpha))] \end{aligned}$$

$$= h(\{\alpha,\beta\})+\sigma(\omega_i(\{\alpha,\beta\}))-\sigma(L_{\#\alpha}(\omega_i(\beta)))+\sigma(L_{\#\beta}(\omega_i(\alpha)))-\sigma([\omega_i(\alpha),\omega_i(\beta)])$$

$$= h(\{\alpha,\beta\}) + \sigma(\omega_i(\{\alpha,\beta\}) - L_{\#\alpha}(\omega_i(\beta)) + L_{\#\beta}(\omega_i(\alpha)) - [\omega_i(\alpha),\omega_i(\beta)])$$

$$= h(\{\alpha,\beta\}) + \sigma(-L_{\#\alpha}(\omega_i(\beta)) + L_{\#\beta}(\omega_i(\alpha)) + \omega_i(\{\alpha,\beta\}) - [\omega_i(\alpha),\omega_i(\beta)])$$

$$= h(\{\alpha,\beta\}) - \sigma((d_\#\omega_i)(\alpha,\beta) + \frac{1}{2}\left[\omega_i,\omega_i\right](\alpha,\beta))$$

$$= h(\{\alpha,\beta\}) - \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta)).\spadesuit$$

Définition 6.4.2. *($A-$connexions plates)*
Une $A-$connexion est dite plate si sa distribution horizontale est intégrable.

On retrouve un resultat bien connu dans le cas classique qui lie la courbure et l'intégrabilité de la distribution horizontale:

Proposition 6.4.3. *Une $A-$connexion plate si et seulement si les formes locales de courbure sont nulles.*

Preuve:
Soient h une $A-$connexion et $\mathcal{H}$ la distribution horizontale. Si la $A-$connexion h est plate, elle est involutive et d'après la proposition 6.4.2 $\sigma(\Omega_i(\alpha,\beta)) = 0$ pour tout i et tout α,β. Ainsi $\Omega_i = 0$ pour tout i.

Réciproquement, si $\Omega_i = 0$ pour tout i. Soit $\mathcal{D} = \{h(\alpha), \alpha \in \chi^1(M;A)\}$. Il est clair que $\mathcal{D}$ engendre la distribution horizontale. Par le théorème 4.1.1 il suffit de montrer que le flot de tout élément de $\mathcal{D}$ préserve $\mathcal{H}$:

soient $\alpha \in \chi^1(M;A)$, $\Phi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(A^*)$ la fonction définie dans le lemme 3.4.1, X_{Φ_α} le champ hamiltonien de cette fonction et $(\phi^t_\alpha)_t$ son flot. Soit $(\psi^t_\alpha)_t$ le flot de $\#\alpha$ et $(\tilde{\psi}^t_\alpha)_t$ le flot de $h(\alpha)$. Par les formules 10 $\pi_* X_{\Phi_\alpha} = \#\alpha$ et la condition 1 sur les connexions $p_* \circ h = \# \circ \hat{p}$, on obtient

$$\psi^t_\alpha = \pi \circ \phi^t_\alpha = p \circ \tilde{\psi}^t_\alpha.$$

Comme la courbure est nulle on a pour tout $\beta \in \chi^1(M;A)$

$$[h(\alpha),h(\beta)] = h(\{\alpha,\beta\})$$

qui n'est autre que la version infinitesimale de la relation

$$(\tilde{\psi}^t_\alpha)_* h(\beta) = h(\phi^t_\alpha \beta).$$

Ainsi $(\tilde{\psi}^t_\alpha)_*$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\tilde{\psi}^0_\alpha}$ dans $\mathcal{H}_{\tilde{\psi}^t_\alpha}$ pour t assez petit.$\spadesuit$

6.5. **Forme de la connexion, forme de courbure, A-dérivée covariante.** Soient (P, p, G) un fibré principal au dessus de M et $h : P\times_M A \to TP$ une $A-$connexion sur ce fibré. On sait que G agit à droite sur $P \times_M A$ et à droite sur TP respectivement par

$$\begin{aligned}(\mu, \alpha).g &= (\mu.g, \alpha)\\ (\mu, v).g &= (\mu.g, d_\mu R_g.v).\end{aligned}$$

Comme h est G-invariante on voit que h passe au quotient et on obtient un morphisme de fibrés vectoriels

$$\omega : (P \times_M A)/G \simeq A \to TP/G$$

i.e. une 1-forme $\omega \in \Omega^1(M, A; TP/G)$ (voir la remarque 6.2.1). C'est la 1-forme de la connexion h.

Comme le fibré tangent $TP \to P$ est l'algébroïde de Lie tangente on peut la faire passer au qutient $\pi_p : TP/G \to P/G \simeq M$. L'ensemble des sections de ce fibré vectoriel s'identifie avec l'ensemble des champs de vecteurs sur P qui sont invariants par l'action de G. On définit un crochet sur les éléments de $\chi^1(M; TP/G)$ qui n'est autre que le crochet de Lie sur P qui passe au quotient. Ainsi TP/G a une structure d'algébroïde de Lie naturelle au dessus de M d'ancre $p_* : TP/G \to TM$ et de crochet $\{.,.\}_{TP/G}$. Cette structure s'appelle l'algébroïde de Atiyah. Donc, on peut définir le produit extérieur des formes à valeurs dans TP/G.

On définit la 2-forme de courbure $\Omega \in \Omega^2(M, A; TP/G)$ par

$$\Omega(\alpha, \beta) := \{\omega(\alpha), \omega(\beta)\}_{TP/G} - \omega(\{\alpha, \beta\}); \alpha, \beta \in \chi^1(M; A).$$

On définit la $A-$dérivée covariante de cette $A-$connexion comme étant l'opérateur

$$D : \Omega^k(M, A; TP/G) \to \Omega^{k+1}(M, A; TP/G)$$

défini par

$$\begin{aligned}&(DQ)(\alpha_1, ..., \alpha_{k+1})\\ =& \sum_{1\leq i\leq k+1} (-1)^{i+1}\{\omega(\alpha_i), Q(\alpha_1, ..., \hat{\alpha}_i, ..., \alpha_{k+1})\}_{TP/G}\\ &+ \sum_{1\leq i\prec j\leq k+1} (-1)^{i+j} Q(\{\alpha_i, \alpha_j\}\alpha_1, ..., \hat{\alpha}_i, ..., \hat{\alpha}_j, ..., \alpha_{k+1}).\end{aligned}$$

Proposition 6.5.1. *(Propriétés de la $A-$dérivée covariante)*

(1) *Équation de structure:*

$$\Omega = D\omega - \frac{1}{2}\{\omega, \omega\}_{TP/G}.$$

(2) *Identité de Bianchi:*

$$D\Omega = 0$$

Preuve:
1/ Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \chi^1(M;A)$ alors

$$\begin{aligned} D\omega(\alpha,\beta) &= \{\omega(\alpha),\omega(\beta)\}_{TP/G} - \{\omega(\beta),\omega(\alpha)\}_{TP/G} - \omega(\{\alpha,\beta\}) \\ &= 2.\{\omega(\alpha),\omega(\beta)\}_{TP/G} - \omega(\{\alpha,\beta\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\omega,\omega\}_{TP/G}(\alpha,\beta) &= \{\omega(\alpha),\omega(\beta)\}_{TP/G} - \{\omega(\beta),\omega(\alpha)\}_{TP/G} \\ &= 2.\{\omega(\alpha),\omega(\beta)\}_{TP/G} \end{aligned}$$

ainsi

$$D\omega(\alpha,\beta) - \frac{1}{2}\{\omega,\omega\}_{TP/G}(\alpha,\beta)$$

$$\begin{aligned} &= 2.\{\omega(\alpha),\omega(\beta)\}_{TP/G} - \omega(\{\alpha,\beta\}) - \{\omega(\alpha),\omega(\beta)\}_{TP/G} \\ &= \{\omega(\alpha),\omega(\beta)\}_{TP/G} - \omega(\{\alpha,\beta\}); \end{aligned}$$

2/

$$\begin{aligned} D\Omega(\alpha,\beta,\gamma) &= \oint_{\alpha,\beta,\gamma} \{\omega(\alpha),\Omega(\beta,\gamma)\}_{TP/G} - \oint_{\alpha,\beta,\gamma} \Omega(\{\alpha,\beta\},\gamma) \\ &= \oint_{\alpha,\beta,\gamma} \{\omega(\alpha),\{\omega(\beta),\omega(\gamma)\}_{TP/G}\}_{TP/G} - \oint_{\alpha,\beta,\gamma} \{\omega(\alpha),\omega(\{\beta,\gamma\})\}_{TP/G} - \\ &\quad \oint_{\alpha,\beta,\gamma} \{\omega(\{\alpha,\beta\}),\omega(\gamma)\}_{TP/G} - \oint_{\alpha,\beta,\gamma} \omega(\{\{\alpha,\beta\},\gamma\}) \end{aligned}$$

les termes 1 et 4 s'en vont par l'identité de Jacobi et ceux du milieux se compensent.♠

On peut auusi démarer des formes globales et obtenir les formes locales.

On se donne un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de M par des domaines de trivialisations. On note $\Phi_i(.) = (p(.), \phi_i(.))$ la trivialisation au dessus de U_i et $s_i : U_i \to P$ est la section triviale; $A_i := \pi^{-1}(U_i)$ et $P_i := p^{-1}(U_i)$.

Modulo la trivialisation Φ_i on a $TP_i \simeq TU_i \times TG \simeq TU_i \times G \times \mathcal{G}$. Si l'on considére la relation d'équivalence sur TP_i

$$V_\mu \sim W_\nu \Leftrightarrow \exists g \in G : \nu = \mu.g, W_\nu = d_\mu R_g.V_\mu,$$

l'action qui lui correspond sur $TU_i \times G \times \mathcal{G}$ est

$$(X_p, g, \xi) \sim (Y_q, g', \eta) \Leftrightarrow X_p = Y_q; \exists h \in G : g' = g.h, \eta = \xi.h.$$

Ainsi on a l'isomorphisme $TP_i/G \simeq TU_i \times \mathcal{G}$ défini par

$$\begin{array}{ccc} TP_i/G & \to & TU_i \times \mathcal{G} \\ [V_\mu] & \mapsto & (d_\mu p.V_\mu, \phi_i(\mu)^{-1}.(d_\mu \phi_i.V_\mu)) \end{array}$$

On se donne une $A-$connxion h, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P\times_M A & \xrightarrow{h} & TP \\ \hat{p}\downarrow & & \downarrow p_* \\ A & \xrightarrow[\#]{} & TM \end{array}$$

se transforme en passant au quotient en

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\omega} & TP/G \\ id\downarrow & & \downarrow p_* \\ A & \xrightarrow[\#]{} & TM \end{array}.$$

En observant que

$$X_\mu = \sigma(\xi).\mu \Leftrightarrow (\Phi_i)_* X_\mu = (0,\xi).$$

Alors, ω vu comme élément de $\Omega^1(U_i, A; TU_i \times \mathcal{G})$ se trivialise sur $TU_i \times \mathcal{G}$ comme suit

$$\omega(\alpha) \overset{\Phi_i}{=} (\#\alpha, \omega_i(\alpha))$$

on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{(\#,\omega_i)}{\to} & TU_i \times \mathcal{G} \\ id\downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow[\#]{} & TU_i \end{array}.$$

Ainsi, les formes locales de la $A-$connexion ne sont autre que les trivialisations de la 1-forme de la $A-$connexion.

Comme $\Omega \in \Omega^2(M, A; TP/G)$, alors pour tout $\alpha, \beta \in \chi^1(M; A)$ on a $\Omega(\alpha,\beta) \in \chi^1(M; TP/G)$. Ce champ est vertical, en effet

$$\begin{aligned} p_*\Omega(\alpha,\beta) &= p_*(\{\omega(\alpha),\omega(\beta)\}_{TP/G} - \omega(\{\alpha,\beta\})) \\ &= [p_*\omega(\alpha), p_*\omega(\beta)] - p_*\omega(\{\alpha,\beta\})) \\ &= [p_*\circ h(\alpha), p_*\circ h(\beta)] - p_*\circ h(\{\alpha,\beta\}) \\ &= [\#\alpha, \#\beta] - \#\{\alpha,\beta\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par le même argument, $\Omega(\alpha,\beta)$ se trivialise par Φ_i sur $TU_i \times \mathcal{G}$ comme suit

$$\Omega(\alpha,\beta) \overset{\Phi_i}{=} (0, \Omega_i(\alpha,\beta)).$$

Ainsi les 2-formes locales de courbure de la $A-$connexion ne sont autre que les trivialisations de la 2-forme de courbure de la $A-$connexion. Le resultat suivant est trivial

Proposition 6.5.2. *Une $A-$connexion est plate si et seulement si sa 2-forme de courbure est nulle.*

Preuve:

Comme les trivialisations sont des difféomorphismes, c'est une conséquence de la proposition 6.4.3.♠

6.6. **Parallèlisme.** On a vu que modulo les bonnes hypothèses, les concepts des connexions classiques peuvent se généraliser aux $A-$connexions Ceci s'applique au transport parallèle.

Étant donnée une $A-$connexion on ne peut pas définir le relèvement horizontal d'une courbe lisse quelconque $\gamma : [0,1] \to M$. L'une des utilités du transport parallèle est de comparer les points de M, cependant, si l'algèbroïde de Lie n'est pas de rang constant alors le feuilletage caractéristique n'est pas de rang constant et on ne peut pas espérer comparer deux point qui sont dans des feuilles différentes. On ne définit le transport parallèle que pour des courbe dont l'image reste dans une seule feuille. Dans la suite on donne les familles de courbes "admissibles" pour lesquelles on développe les notions de parallèlisme.

Définition 6.6.1. *($A-$chemin)*

Un $A-$chemin est une courbe lisse $\alpha : [0,1] \to A$ telle que

$$\#\alpha = \frac{d}{dt}(\pi \circ \alpha).$$

La courbe $\gamma = \pi \circ \alpha : [0,1] \to M$ est appellée la courbe base du $A-$chemin α.

Remarque 6.6.1. *La courbe base vit dans une seule feuille du feuilletage caractéristique.*

Soit une courbe lisse $\gamma : [0,1] \to M$ qui reste dans une seule feuille $\mathcal{F}$ du feuilletage caractéristique. Si $r = \dim \mathcal{F}$, on sait que pour tout $x_0 \in \mathcal{F}$ il existe une carte $(U, (x^1, ..., x^r, y^{r+1}, ..., y^n))$ de M centré en x_0 ($n = \dim M$) et un repère $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ au dessus de U tels que

$$\begin{aligned} U \cap \mathcal{F} &= \{y^j = 0\} \\ \# \circ \sigma_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

On obtient l'écriture locale de γ définie sur $I = \gamma^{-1}(U)$ par

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), ..., \gamma^r(t), 0, ..., 0).$$

On déduit que $\gamma : I \to \mathcal{F}$ est encore lisse.

Pour toute famille de fonctions lisses $f^{r+1}, ..., f^k : I \to \mathbb{R}$, soit $\alpha : I \to A$ la courbe lisse définie par

$$\alpha = \dot{\gamma}^1.\sigma_1 + ... + \dot{\gamma}^r.\sigma_r + f^{r+1}.\sigma_{r+1} + ... + f^k.\sigma_k.$$

On a: $\#\alpha = \dot{\gamma}^1.\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + \dot{\gamma}^r.\frac{\partial}{\partial x^r} = \frac{d}{dt}(\pi \circ \alpha)$. Ainsi, toute courbe lisse de M qui reste dans une feuille du feuilletage caractéristique est courbe base d'un certain $A-$chemin lisse par morceaux α (qui n'est pas necéssairement unique).

Proposition 6.6.1. *(Relèvement horizontal des $A-$chemins)*

Soit $\alpha : [0,1] \to A$ un $A-$chemin de courbe base $\gamma : [0,1] \to M$. Alors pour tout $\mu_0 \in P_{\gamma(0)}$ il existe une unique courbe lisse $\tilde{\gamma} : [0,1] \to P$ qui vérifie le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{c} \tilde{\gamma}'(t) = h(\tilde{\gamma}(t), \alpha(t)), \\ \tilde{\gamma}(0) = \mu_0. \end{array}\right.$$

On appelle $\tilde{\gamma}$ un relèvement horizontal de $\alpha : [0,1] \to A$.

Preuve:

Par le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires on sait qu'il existe une unique solution maximale. On montre que cette solution est définie sur tout $[0,1]$:

par trivialité locale du fibré principal $p : P \to M$, il existe une courbe lisse $\bar{\gamma} : [0,1] \to P$ telle que $p \circ \bar{\gamma} = \gamma$ et $\bar{\gamma}(0) = \mu_0$. On cherche une courbe lisse $a : t \mapsto a(t) \in G$ telle que

$$\tilde{\gamma}(t) = \bar{\gamma}(t).a(t)$$

partout où c'est défini. Si une telle courbe existe, en dérivant on obtient

$$\tilde{\gamma}'(t) = \bar{\gamma}'(t).a(t) + \bar{\gamma}(t).a'(t).$$

Ce qui implique que

$$h(\tilde{\gamma}, \alpha) = h(\bar{\gamma}.a, \alpha) = \bar{\gamma}'.a + \bar{\gamma}.a'.$$

On obtient

$$\bar{\gamma}.a'.a^{-1} = h(\bar{\gamma}, \alpha) - \bar{\gamma}'.$$

Or $p_*(h(\bar{\gamma}, \alpha) - \bar{\gamma}') = \#\alpha - \gamma' = 0$ implique que le vecteur $h(\bar{\gamma}, \alpha) - \bar{\gamma}'$ est vertical. Ainsi $h(\bar{\gamma}(t), \alpha(t)) - \bar{\gamma}'(t) \in \mathcal{V}_{\bar{\gamma}(t)}$ pour tout t. Il exite donc une unique courbe lisse $A : [0,1] \to \mathcal{G}$ telle que $h(\bar{\gamma}(t), \alpha(t)) - \bar{\gamma}'(t) = \bar{\gamma}(t).A(t)$ pour tout t. Donc, la courbe $a(t)$ vérifie le problème de Cauchy

$$a'(t).a^{-1}(t) = A(t), a(0) = e,$$

ce qui montre que $a(t)$ est définie sur tout $[0,1]$ et de même pour $\tilde{\gamma}$.♠

Définition 6.6.2. *(Transport parallèle suivant les $A-$chemins)*

Le transport parallèle suivant le $A-$chemin $\alpha : [0,1] \to A$ est l'application

$$\begin{array}{rccl} \tau_\alpha : & P_{\gamma(0)} & \to & P_{\gamma(1)} \\ & \mu_0 & \mapsto & \tau_\alpha(\mu_0) = \tilde{\gamma}(1) \end{array}$$

où $\tilde{\gamma}$ l'unique relèvement horizontal de $\alpha : [0,1] \to A$ qui a pour point initial μ_0.

Remarque 6.6.2. *(Propriétés du relèvement horizontal)*

(1) Par le théorème de différentiabilité par rapport aux paramètres on voit que τ_α est lisse.

(2) Soit $\tilde{\gamma}$ l'unique relèvement horizontal de $\alpha : [0,1] \to A$ qui a pour point initial μ_0, i.e. $\tilde{\gamma}$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\tilde{\gamma}'(t) = h(\tilde{\gamma}(t), \alpha(t)), \tilde{\gamma}(0) = \mu_0.$$

Alors pour tout $g \in G : \tilde{\gamma}.g$ est l'unique solution de la même équation différentielle avec la valeur initiale $\mu_0.g$, ainsi on a

(28) $$\tau_\alpha \circ R_g = R_g \circ \tau_\alpha.$$

Ainsi, τ_α est un difféomorphisme.

(3) Si l'on note par $\tilde{\alpha} : [0,1] \to A$ le chemin défini par

$$\tilde{\alpha}(t) = -\alpha^{-1}(t) = -\alpha(1-t)$$

alors sa courbe base $\gamma^{-1} : [0,1] \to M$ n'est aure que $\gamma : [0,1] \to M$ parcouru dans le sens inverse, en effet

$$\gamma^{-1}(t) = \pi(\tilde{\alpha}(t)) = \gamma(1-t)$$

de plus $\tilde{\alpha}$ est un $A-$chemin car

$$\begin{aligned} \#\tilde{\alpha}(t) &= -\#\alpha(1-t) \\ &= -\frac{d}{dt}(\pi \circ \alpha(1-t)) \\ &= \dot{\gamma}^{-1}(t) \\ &= \frac{d}{dt}(\pi \circ \tilde{\alpha}(t)). \end{aligned}$$

Si l'on note par $\tilde{\gamma} : [0,1] \to P$ le relèvement horizontal de $\alpha : [0,1] \to A$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \mu_0$. On définit $\tilde{\gamma}^{-1} : [0,1] \to P$ par

$$\tilde{\gamma}^{-1}(t) = \tilde{\gamma}(1-t).$$

C'est le relèvement horizontal de $\tilde{\alpha} : [0,1] \to A$ qui débute en $\tilde{\gamma}(1)$, en effet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tilde{\gamma}^{-1}(t)) &= -\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(1-t) \\ &= -h(\tilde{\gamma}(1-t), \alpha(1-t)) \\ &= h(\tilde{\gamma}^{-1}(t), \tilde{\alpha}(t)). \end{aligned}$$

Ainsi l'inverse de $\tau_\alpha : P_{\gamma(0)} \to P_{\gamma(1)}$ n'est autre que $\tau_{\tilde{\alpha}} : P_{\gamma(1)} \to P_{\gamma(0)}$, i.e.

(29) $$(\tau_\alpha)^{-1} = \tau_{\tilde{\alpha}}.$$

7. Les $\mathcal{A}-$connexions sur les fibrés vectoriels

Soit (E, ϖ, M) un fibré vectoriel de dimension d. On a construit dans l'exemple 5.1.1 son fibré des repères $\mathcal{F}(E) = \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{F}(E_p) \xrightarrow{p} M$ de groupe de structure $Gl(d, \mathbb{R})$ et de fibres $\mathcal{F}(E_p) = \{\mu = (v_1, ..., v_d) \in (E_p)^d$; tel que $(v_1, ..., v_d)$ est une base de $E_p\}$.

7.1. **Les $\mathcal{A}-$connexions linéaires.**

Définition 7.1.1. *($A-$connexions linéaires)*
Une $A-$connexion linéaire sur le fibré vectoriel (E, ϖ, M) est une A-connexion sur son fibré des repères.

On munit (E, π, M) d'une $A-$connexion linéaire $h : \mathcal{F}(E) \times_M A \to T\mathcal{F}(E)$. Pour tout $A-$chemin $\alpha : [0,1] \to A$ de courbe base $\gamma : [0,1] \to M$, le transport parallèle suivant α qu'on a noté par $\tau_\alpha : \mathcal{F}(E_{\gamma(0)}) \longrightarrow \mathcal{F}(E_{\gamma(1)})$ est un difféomorphisme. Soient $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_d) \in \mathcal{F}(E_{\gamma(0)})$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, ..., b'_d) := \tau_\alpha(\mathcal{B})$. Pour tout $v = \sum\limits_{1 \leq i \leq d} v^i.b_i \in E_{\gamma(0)}$ on définit $T_\alpha(v) \in E_{\gamma(1)}$ par:

$$T_\alpha(v) = \sum_{1 \leq i \leq d} v^i.b'_i,$$

i.e. $T_\alpha : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$ est l'unique application linéaire bijective qui envoit chaque b_i sur b'_i, $1 \leq i \leq d$.

Remarque 7.1.1. *La formule 28*

$$\tau_\alpha \circ R_g = R_g \circ \tau_\alpha$$

vu dans la remarque 2 montre que T_α ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$.

Définition 7.1.2. *(Transport parallèle)*
On appelle l'isomorphisme linéaire $T_\alpha : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$ défini ci-dessus le transport parallèle suivant le $A-$chemin $\alpha : [0,1] \to A$. Si $t \leq t' \in [0,1]$ on note $T_\alpha(t,t') : E_{\gamma(t)} \to E_{\gamma(t')}$ le transport parallèle suivant $\alpha_{|[t,t']}$.

Remarque 7.1.2. *En utilisant la relation 29 de la remarque 3. On définiT $T_\alpha(t,t')$ pour $t \geq t'$ par*

$$T_\alpha(t,t') := T_{\alpha^{-1}}(t',t) = (T_\alpha(t',t))^{-1}.$$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $c : I \to M$ une courbe lisse. Une section du fibré vectoriel (E, π, M) lelong de la courbe c (ou section lelong de c) est une courbe lisse $V : I \to E$ telle que:

$$V(t) \in E_{c(t)}, \forall t \in I.$$

Soient $\alpha : [0,1] \to A$ un $A-$chemin de courbe base $\gamma : [0,1] \to M$ et $V : [0,1] \to E$ une section lelong de γ. Soit $t_0 \in]0,1[$. On veut calculer $T_\alpha(t,t_0).V(t)$ pour t voisin de t_0:

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_d) \in \mathcal{F}(E_{\gamma(t_0)})$, on note $\tilde{\gamma}$ le relèvement horizontal de α qui vaut $\mathcal{B}$ en t_0. On note

$$\tilde{\gamma}(t) = \tau_{\alpha|[t_0,t]}(\mathcal{B}) = (e_1(\gamma(t)), ..., e_d(\gamma(t))).$$

On note $V(t) = \sum\limits_{1 \leq i \leq d} V^i(t).e_i(\gamma(t))$, alors $V(t) = \sum\limits_{1 \leq i \leq k} V^i(t).T_\alpha(t_0,t).e_i$, d'où

$$T_\alpha(t,t_0).V(t) = \sum_{1 \leq i \leq d} V^i(t).e_i.$$

Définition 7.1.3. *(A−dérivée covariante 1)*
Soient $\alpha : [0,1] \to A$ un A−chemin de courbe base $\gamma : [0,1] \to M$ et $V : [0,1] \to E$ une section lelong de γ. La A−dérivée covariante de V suivant α est la section lelong de γ:

$$D_\alpha V(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{T_\alpha(t,t_0).V(t) - V(t_0)}{t - t_0}, \; t_0 \in [0,1]\,. \tag{30}$$

Si $x_0 = \gamma(t_0)$ et $Y \in \Gamma(U,E)$ est définie au voisinage de x_0 on pose:

$$D_\alpha Y(x_0) := D_\alpha(Y \circ \gamma)(t_0)$$

Proposition 7.1.1. *(Propriétés de la A−dérivée covariante)*
Soit U un ouvert de M contenant $\gamma([0,1])$. La A−dérivée covariante suivant α vérifie les propriétés suivantes:

(1) *Additivité, i.e.* $\forall V, W \in \Gamma(U,E)$

$$D_\alpha(V + W) = D_\alpha V + D_\alpha W. \tag{31}$$

(2) *Règle de Leibnitz, i.e.* $\forall V \in \Gamma(U,E), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U)$

$$D_\alpha(f.V) = (f\circ\gamma).D_\alpha V + \dot\gamma(f).(V\circ\gamma). \tag{32}$$

Preuve:
La première découle de la $\mathbb{R}$-linéarité de $T_\alpha(t,t_0)$, la seconde s'obtient par la règle de Leibnitz classique.♠

Remarque 7.1.3. *Si l'on identifie $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_d) \in \mathcal{F}(E)$ avec l'application linéaire*

$$\begin{array}{llll} \mathcal{B}: & \mathbb{R}^d & \to & E_{p(\mathcal{B})} \\ & (v^1,...,v^d) & \mapsto & v^1 e_1 + ... + v^d e_d \end{array}$$

il est clair à partir de la relation

$$\tilde\gamma(t) = (e_1(\gamma(t)), ..., e_d(\gamma(t))) = \sum_{1\le i\le d} T_\alpha(t_0,t).e_i$$

que

$$T_\alpha(t,t_0) = \tilde\gamma(t_0).\tilde\gamma(t)^{-1}$$

ainsi

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}|_{t=t_0} T_\alpha(t_0,t) & = & (\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\tilde\gamma(t)).\tilde\gamma(t_0)^{-1} \\ & = & h(\tilde\gamma(t_0),\alpha(t_0)).\tilde\gamma(t_0)^{-1}. \end{array}$$

Comme $D_\alpha V(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{T_\alpha(t,t_0).V(t) - V(t_0)}{t - t_0}$ et que cette limite ne dépend que de $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} T_\alpha(t_0,t)$ et de $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} V(t)$. On déduit que "$D_\alpha V(t_0)$ ne dépend que de $\alpha(t_0)$ et de V au voisinage de t_0". Cette dépendance est clairement $\mathbb{R}$-linéaire en $\alpha(t_0)$. La définition suivante est naturelle:

Définition 7.1.4. *($A-$dérivée covariante 2)*

Pour tout $x_0 \in M$, tout voisinage U de x_0 et tout $\alpha_0 \in A_{x_0}$, on a un unique opérateur $D_{\alpha_0} : \Gamma(U, E) \to E_{x_0}$ défini par

$$D_{\alpha_0} Y := D_\alpha (Y \circ \gamma)(0)$$

où $\alpha : [-\epsilon, \epsilon] \to A$ est un A-chemin quelconque tel que $\alpha(0) = \alpha_0$ et $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to M$ est sa base.

Proposition 7.1.2. *(Propriétés de la A-dérivée covariante 2)*

Soient $x_0 \in M$, U un voisinage de x_0, $\alpha_0, \beta_0 \in A_{x_0}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a les propriétés:

(1) *Additivité*

(33)
$$D_{\alpha_0+\beta_0} = D_{\alpha_0} + D_{\beta_0}.$$

(2) *homogènéité*

(34)
$$D_{\lambda.\alpha_0} = \lambda.D_{\alpha_0}.$$

Preuve: Voir la remarque 7.1.3.♠

On présente notre $A-$dérivée covariante sous la forme compacte suivante:

Définition 7.1.5. *($A-$dérivée covariante forme globale)*

Soit (E, ϖ, M) un fibré vectoriel. On se donne une $A-$connexion linéaire sur ce fibré, alors il existe un unique opérateur

$$\begin{array}{rccc} D: & \chi^1(M, A) \times \Gamma(M, E) & \to & \Gamma(M, E) \\ & (\alpha, V) & \mapsto & D_\alpha V \end{array}$$

qu'on appelle la A-dérivée covariante et qui vérifie les propriétés suivantes: pour tout $\alpha, \beta \in \chi^1(M, A)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $V, W \in \Gamma(M, E)$:

Proposition 7.1.3. (1) $D_\alpha(V + W) = D_\alpha V + D_\alpha W$,
(2) $D_\alpha(f.V) = f.D_\alpha V + (\#\alpha.f).V$,
(3) $D_{\alpha+\beta} V = D_\alpha V + D_\beta V$,
(4) $D_{f.\alpha} V = f.D_\alpha V$.

On veut établir la réciproque. Dans le fibré trivial, l'équivalence entre la dérivée covariante et la connexion sur le fibré des repères est plus visible:

Considérons le fibré trivial $\varpi : M \times \mathbb{R}^d \to M$ et son fibré des repères $p : M \times Gl(d, \mathbb{R}) \to M$. On se donne une A-connexion $h : Gl(d, \mathbb{R}) \times A \to TM \times TGl(d, \mathbb{R})$ sur ce fibré, la forme de la A-connexion $\omega \in \Omega^1(M, A; \mathfrak{gl}(d, \mathbb{R}))$ est définie par

$$h(e, \alpha) = (\#\alpha, \omega(\alpha)).$$

Soit $\alpha : [0, 1] \to A$ un $A-$chemin de courbe base $\gamma : [0, 1] \to M$. Pour tout $\mu_0 \in Gl(d, \mathbb{R})$, il existe un unique relèvement horizontal $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to M \times Gl(d, \mathbb{R})$ tel que

$$\tilde{\gamma}'(t) = h(\tilde{\gamma}(t), \alpha(t)) \text{ et } \tilde{\gamma}(0) = (\gamma(0), \mu_0).$$

D'après la demonstration de la proposition 6.6.1, il existe une unique courbe lisse $a : [0, 1] \to Gl(d, \mathbb{R})$ telle que $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \mu_0.a(t))$. On a vu aussi qu'il existe une courbe lisse $A : [0,1] \to \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$ telles que a est la solution du problème de Cauchy

$$\dot{a}(t).a(t)^{-1} = A(t) \text{ et } a(0) = e.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(t) &= (\dot{\gamma}(t), \mu_0.\dot{a}(t)) \\ &= (\dot{\gamma}(t), \mu_0.A(t).a(t)) \\ &= h(\mu_0.a(t), \alpha(t)) \\ &= h(e, \alpha(t)).\mu_0.a(t) \\ &= (\#\alpha, \omega(\alpha(t)).\mu_0.a(t)) \end{aligned}$$

on en déduit que

$$A(t) = \mu_0^{-1}.\omega(\alpha(t)).\mu_0.$$

Décrivons plus précisement le transport parallèle. C'est l'application

$$\begin{array}{llll} \tau_\alpha : & \gamma(0) \times Gl(d,\mathbb{R}) & \to & \gamma(1) \times Gl(d,\mathbb{R}) \\ & (\gamma(0), \mu_0) & \mapsto & (\gamma(1), \mu_0.a(1)) \end{array}.$$

Comme $T_\alpha(t,t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)\tilde{\gamma}(t)^{-1}$ pour un relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ quelconque, et $T_\alpha(t_0,t)$ ne dépend pas de la valeur initiale de $\tilde{\gamma}$ (voir la remarque 7.1.3). En posant $\mu_0 = e$ on obtient

$$\begin{aligned} T_\alpha(t,t_0) &= \tilde{\gamma}(t_0)\tilde{\gamma}(t)^{-1} \\ &= a(t_0)(a(t))^{-1} \end{aligned}$$

et

$$A(t) = \omega(\alpha(t)).$$

Ainsi, si $V : [0,1] \to M \times \mathbb{R}^d$ est une section lelong de γ. En l'identifiant avec $V : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ on obtient que

$$\begin{aligned} D_\alpha V(t_0) &= \frac{d}{dt}|_{t=t_0}(a(t_0)(a(t))^{-1}.V(t)) \\ &= a(t_0).\frac{d}{dt}|_{t=t_0}(a(t)^{-1}.V(t)). \end{aligned}$$

Comme $V(t) = a(t).(a(t)^{-1}.V(t))$ on obtient

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0}V(t) = (\frac{d}{dt}|_{t=t_0}a(t)).a(t_0)^{-1}.V(t_0) + a(t_0).\frac{d}{dt}|_{t=t_0}(a(t)^{-1}.V(t))$$

ainsi

$$\begin{aligned} D_\alpha V(t_0) &= \frac{d}{dt}|_{t=t_0}V(t) - (\frac{d}{dt}|_{t=t_0}a(t)).a(t_0)^{-1}.V(t_0) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=t_0}V(t) - A(t_0).a(t_0).a(t_0)^{-1}.V(t_0) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=t_0}V(t) - \omega(\alpha(t_0)).V(t_0). \end{aligned}$$

Théorème 7.1.1. *Soient* (E, ϖ, M) *un fibré vectoriel de dimension* d *et* $\mathcal{F}(E) \xrightarrow{p} M$ *son fibré des repères. Soit* $h : \mathcal{F}(E) \times_M A \to T\mathcal{F}(E)$ *une* $A-$*connexion. On considère la A-dérivée covariante de cette* $A-$*connexion*

$$\begin{array}{rccc} D: & \chi^1(M,A) \times \Gamma(M,E) & \to & \Gamma(M,E) \\ & (\alpha, V) & \mapsto & D_\alpha V \end{array}$$

Soit U *un ouvert de* M *domaine d'un repère* $(\sigma_1, ..., \sigma_d)$ *de* E. *On note* $\omega \in \Omega^1(U, A; \mathfrak{gl}(d, \mathbb{R}))$ *la forme locale de cette* $A-$*connexion associée au repère* $(\sigma_1, ..., \sigma_d)$. *Alors, pour tout* $\alpha \in \chi^1(U, A)$, *si l'on regarde* $\omega(\alpha)$ *comme une fonction* $\omega(\alpha) = (\omega_{ij}(\alpha))_{1 \le i,j \le d}$ *où chaque* $\omega^i_j(\alpha) \in \mathcal{C}^\infty(U)$. *On a la relation qui lie la A-dérivée covariante et la forme locale de la* $A-$*connexion*

$$D_\alpha \sigma_i = - \sum_{1 \le j \le d} \omega_{ij}(\alpha).\sigma_j.$$

Réciproquement, si l'on se donne une application

$$\begin{array}{rccc} \nabla: & \chi^1(M,A) \times \Gamma(M,E) & \to & \Gamma(M,E) \\ & (\alpha, V) & \mapsto & \nabla_\alpha V \end{array}$$

qui vérifie les conditions 1 *à* 4 *de la définition* 7.1.5. *Il existe une unique A-connexion sur le fibré vectoriel* (E, ϖ, M) *dont la A-dérivée covariante est* ∇.

Preuve:

La première partie du théorème n'est qu'une conséquence de la discussion qui précède. Pour la seconde partie, on définit sur chaque ouvert de trivialisation la forme de la connexion par la relation

$$\nabla_\alpha \sigma_i = - \sum_{1 \le j \le d} \omega_{ij}(\alpha).\sigma_j.$$

Il suffit de vérifier que ces formes locales se transforment selon la règle 24 par changement de trivialisations.♠

On peut aussi définir une $A-$connexion linéaire sur le fibré vectoriel (E, ϖ, M) par le relèvement horizontal:

Définition 7.1.6. *C'est un morphisme de fibrés vectoriels* $h : E \times_M A \to TE$ *tel que*

(1) *h fait commuter les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} E \times_M A & \xrightarrow{h} & TE \\ \hat{p} \downarrow & & \downarrow p_* \\ A & \xrightarrow[\#]{} & TM \end{array}$$

(2) *h est linéaire pour le second facteur, i.e. pour tout* (u, α), $(u, \beta) \in E \times_M A$, *pour tout* $c \in \mathbb{R}$

$$h(\mu, \alpha + c.\beta) = h(\mu, \alpha) + c.h(\mu, \beta)$$

(3) *$h(\mu,\alpha)\in T_\mu E$, pour tout $(\mu,\alpha)\in E\times_M A$, i.e. h fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} E\times_M A & \xrightarrow{h} & TE \\ \hat{\pi}\downarrow & & \downarrow\pi_P \\ E & \xrightarrow[id]{} & E \end{array}.$$

7.2. **Courbure.** Soit $\nabla:\chi^1(M,A)\times\Gamma(M,E)\to\Gamma(M,E)$ une A-connexion linéaire sur le fibré vectoriel (E,ϖ,M). On se donne un ouvert U de M domaine d'un repère $(\sigma_1,...,\sigma_d)$ de E, on note $\omega\in\Omega^1(U,A;\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R}))$, $\Omega\in\Omega^2(U,A;\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R}))$ la forme locale de la $A-$connexion et la forme locale de courburerespectivement.

On veut calculer Ω en fonction de la A-dérivée covariante ∇. Soient $\alpha,\beta\in\chi^1(U,A)$:

$$\begin{aligned}\Omega(\alpha,\beta) &= d_\#\omega(\alpha,\beta)+\frac{1}{2}\left[\omega,\omega\right](\alpha,\beta)\\ &= L_{\#\alpha}\omega(\beta)-L_{\#\beta}\omega(\alpha)-\omega(\{\alpha,\beta\})+\omega(\alpha).\omega(\beta)-\omega(\beta).\omega(\alpha).\end{aligned}$$

Alors, pour tout i on a

$$\Omega(\alpha,\beta).\sigma_i$$

$$=L_{\#\alpha}\omega(\beta).\sigma_i-L_{\#\beta}\omega(\alpha).\sigma_i-\omega(\{\alpha,\beta\}).\sigma_i+\omega(\alpha).\omega(\beta).\sigma_i-\omega(\beta).\omega(\alpha).\sigma_i$$

$$=L_{\#\alpha}\{\omega(\beta).\sigma_i\}-L_{\#\beta}\{\omega(\alpha).\sigma_i\}-\omega(\{\alpha,\beta\}).\sigma_i+\omega(\alpha).\{\omega(\beta).\sigma_i\}-\omega(\beta).\{\omega(\alpha).\sigma_i\}$$

$$\begin{aligned}=\quad & L_{\#\alpha}\{-\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\beta).\sigma_j\}-L_{\#\beta}\{-\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\alpha).\sigma_j\}+\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\{\alpha,\beta\}).\sigma_j\\ & +\omega(\alpha).\{-\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\beta).\sigma_j\}-\omega(\beta).\{-\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\alpha).\sigma_j\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\quad & -\sum_{1\le j\le d}\{L_{\#\alpha}\omega_{ij}(\beta)-L_{\#\beta}\omega_{ij}(\alpha)-\omega_{ij}(\{\alpha,\beta\})\}.\sigma_j\\ & -\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\beta).\omega(\alpha).\sigma_j+\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\alpha).\omega(\beta).\sigma_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\quad & -\sum_{1\le j\le d}\{L_{\#\alpha}\omega_{ij}(\beta).\sigma_j+\omega_{ij}(\beta).\omega(\alpha).\sigma_j\}\\ & +\sum_{1\le j\le d}\{L_{\#\beta}\omega_{ij}(\alpha).\sigma_j+\omega_{ij}(\alpha).\omega(\beta).\sigma_j\}+\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\{\alpha,\beta\}).\sigma_j\end{aligned}$$

$$=\nabla_\alpha(-\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\beta).\sigma_j)+\nabla_\beta(\sum_{1\le j\le d}\omega_{ij}(\alpha).\sigma_j)-\nabla_{\{\alpha,\beta\}}\sigma_i$$

$$=(\nabla_\alpha\nabla_\beta-\nabla_\beta\nabla_\alpha-\nabla_{\{\alpha,\beta\}})\sigma_i.$$

Définition 7.2.1. *(Courbure)*

La section de courbure $R \in \Gamma(M, A \times_M A \times_M E; E) = \Gamma(M, \wedge^2 A \otimes End(E))$ *de la A-connexion linéaire* ∇ *est définie par:*

$$R(\alpha,\beta).\sigma = (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_{\{\alpha,\beta\}}).\sigma \tag{35}$$

Avec les notations précédantes l'identitée de Bianchi s'écrit

$$\oint_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \nabla_{\alpha_1}(R(\alpha_2,\alpha_3)) - \oint_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} R(\{\alpha_1,\alpha_2\},\alpha_3) = 0. \tag{36}$$

7.3. **Écritures locales, A-dérivée covariante des champs tensoriels.** On se donne une $A-$connexion ∇ sur le fibré vectoriel (E, ϖ, M). Les propriétés 2 et 4 de la proposition 7.1.5 montrent que ∇ est local. Ainsi on peut définir $\nabla_\alpha V$ pour $V \in \Gamma(U, E)$ et $\alpha \in \chi^1(U, A)$, où U est un ouvert de M.

On se donne un ouvert U de M, domaine des repères $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ et $(\sigma_1, ..., \sigma_d)$ de A et de E respectivement. Alors, comme tout $\alpha \in \chi^1(U, A)$ et tout $V \in \Gamma(U, E)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha = \alpha^i.\alpha_i$ et $V = V^j.\sigma_j$ où $\alpha_i, V^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $1 \leq j \leq d$, $1 \leq i \leq k$. En utilisant les convention de somme des indices en haut et en bas, on calcule $\nabla_\alpha V$:

$$\begin{array}{rcl}
\nabla_\alpha V & = & \nabla_{\alpha^i.\alpha_i}(V^j.\sigma_j) \\
& = & \alpha^i.\nabla_{\alpha_i}(V^j.\sigma_j) \\
& = & \alpha^i.(V^j.\nabla_{\alpha_i}\sigma_j + \#\alpha_i.V^j.\sigma_j) \\
& = & (\alpha^i.V^j).\nabla_{\alpha_i}\sigma_j + \alpha^i.(\#\alpha_i.V^j).\sigma_j.
\end{array}$$

Comme $\nabla_{\alpha_i}\sigma_j \in \Gamma(U, E)$, il existe donc une unique famille de fonctions $\Gamma^l_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $1 \leq l \leq d$, qu'on appelle les symboles de Christoffel, telles que

$$\nabla_{\alpha_i}\sigma_j = \Gamma^l_{ij}.\sigma_l. \tag{37}$$

Ainsi

$$\nabla_\alpha V = \alpha^i.\{V^j.\Gamma^l_{ij} + \#\alpha_i.V^l\}.\sigma_l. \tag{38}$$

On regarde comment les symboles de Christoffel se transforment par changements de repères. Si $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ et $(\sigma_1, ..., \sigma_d)$ sont des repères de A et de E respectivement au dessus d'un ouvert U de M, alors les fonctions $\Gamma^l_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j, l \leq d$ sont définies par 37. Maintenant si $(\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_k)$ est un autre repère de A, on note $A = (A^l_i)_{1 \leq i,l \leq k}$ la matrice de passage $\tilde{\alpha}_i = A^l_i.\alpha_l$. De même si $(\tilde{\sigma}_1, ..., \tilde{\sigma}_d)$ est un autre repère de E, on note $B = (B^m_j)_{1 \leq j,m \leq d}$ la matrice de changement de varibles $\tilde{\sigma}_j = B^m_j.\sigma_m$. On note $\tilde{\Gamma}^l_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j, l \leq d$ les symboles de Christoffel dans les repères $(\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_k)$ et $(\tilde{\sigma}_1, ..., \tilde{\sigma}_d)$. Alors

$$\nabla_{\tilde{\alpha}_i}\tilde{\sigma}_j = \nabla_{A^l_i.\alpha_l} B^m_j.\sigma_m$$

$$= A^l_i.\nabla_{\alpha_l} B^m_j.\sigma_m$$

$$= A_i^l.\{(\#\alpha_l.B_j^m).\sigma_m + B_j^m.\nabla_{\alpha_l}\sigma_m\}$$
$$= A_i^l.\{(\#\alpha_l.B_j^m).\sigma_m + B_j^m.\Gamma_{lm}^s.\sigma_s\}$$
$$= A_i^l.\{(\#\alpha_l.B_j^m).\sigma_m + B_j^s.\Gamma_{ls}^m.\sigma_m\}$$
$$= A_i^l.\{(\#\alpha_l.B_j^m) + B_j^s.\Gamma_{ls}^m\}.\sigma_m.$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{\alpha}_i}\tilde{\sigma}_j &= \tilde{\Gamma}_{ij}^l.\tilde{\sigma}_l \\ &= \tilde{\Gamma}_{ij}^l.B_l^m.\sigma_m, \end{aligned}$$

ainsi

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^l.B_l^m = A_i^l.\{(\#\alpha_l.B_j^m) + B_j^s.\Gamma_{ls}^m\}.$$

On note par $\beta = (\beta_j^m)_{1\leq j,m\leq d}$ l'inverse de B, alors on a les deux relations

$$\begin{aligned} \beta_l^i.B_j^l &= \delta_j^i \\ B_l^i.\beta_j^l &= \delta_j^i, \end{aligned}$$

donc

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^l = \beta_m^l.a_i^u.\{(\#\alpha_u.B_j^m) + B_j^s.\Gamma_{us}^m\}.$$

Si U est le domaine d'une carte $(x^1, ..., x^n)$ de M et si l'on note par $b_i^l, c_{ij}^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$ les fonctions de structure de l'algébroïde de Lie par rapport au repère $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$. Alors, on a la formule

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^l = \beta_m^l.a_i^u.\{(b_u^r.\frac{\partial B_j^m}{\partial x^r}) + B_j^s.\Gamma_{us}^m\}. \tag{39}$$

Remarque 7.3.1. *Réciproquement, si l'on se donne une famille de symboles qui se transforment par 39 pour un changement de repères. Alors il existe une unique $A-$connexion ∇ sur le fibré vectoriel (E, ϖ, M) telles que ces symboles soient les symboles de Christoffel pour cette connexion.*

On a vu dans la remarque 7.1.3 que $\nabla_\alpha V$ ne dépend que des valeurs de α poncutellement et des valeurs de V sur un $A-$chemin qui réalise α. On peut remarquer ce fait directement:
soit $x_0 \in U$ et $\alpha \in \chi^1(U, A)$ tel que $\alpha_{x_0} = 0$, alors

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha V(x_0) &= \{\alpha^i(x_0).V^j(x_0).\Gamma_{ij}^l(x_0) + \alpha^i(x_0).(\#\alpha_i.V^l)(x_0)\}.\sigma_l(x_0) \\ &= \alpha^i(x_0).(\#\alpha_i.V^l)(x_0).\sigma_l(x_0) \\ &= \alpha^i(x_0).d_{x_0}V^l(\#\alpha_{x_0}).\sigma_l(x_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soient maintenant $x_0 \in U$, $\alpha : I \to A$ est un A-chemin de courbe base $\gamma : I \to M$ tels que $\gamma(0) = x_0$ et $V \in \Gamma(U, E)$ tel que $V \circ \gamma = 0$. On considère le cas où $\alpha = \alpha_i$ alors

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha V(x_0) &= (\#\alpha_i.V^l)(x_0).\sigma_l(x_0) \\
&= d_{x_0}V^l(\#\alpha_i(x_0)).\sigma_l(x_0) \\
&= d_{x_0}V^l(\dot\gamma(0)).\sigma_l(x_0) \\
&= (\frac{d}{dt}|_{t=0}V^l \circ \gamma(t)).\sigma_l(x_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Maintenant si $\alpha(t) = \alpha^i(t).\alpha_i(\gamma(t))$ en utilisant le fait que $\dot\gamma(0) = \alpha^i(0).\#\alpha_i(x_0)$ et 32 on se retrouve dans le cas précédant. Conclusion "$\nabla_\alpha V(x_0)$ ne dépend que de α_{x_0} et des valeurs de V sur un $A-$chemin qui réalise α en x_0".

Maintenant on va étendre la A-dérivée covariante ∇ à des champs de type tensoriel. On commence par un rappel d'algébre linéaire. Si V est un espace vectoriel on note par $T^r_s(V)$ l'espace vectoriel des formes multilinéaires

$$T: \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{r-fois} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{s-fois} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Un élément de $T^r_s(V)$ est appelé un tenseur de type (r, s).

Si $T \in T^r_s(V)$, $S \in T^p_q(V)$, le produit tensoriel de T et de S noté $T \otimes S$ est l'élement de $T^{r+p}_{s+q}(V)$ défini par

$$T \otimes S(\xi^1, ..., \xi^{r+q}, v_1, ..., v_{s+q})$$
$$= T(\xi^1, ..., \xi^r, v_1, ..., v_s).S(\xi^{r+1}, ..., \xi^{r+q}, v_{s+1}, ..., v_{s+q}).$$

Si $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_d)$ est une base de V et $\mathcal{E}' = (e^1, ..., e^d)$ est la base duale. Pour tout $T \in T^r_s(V)$ on appelle les composantes de T pour la base $\mathcal{E}$ les quantités définies par

$$T^{j_1...j_r}_{i_1...i_s} = T(e^{j_1}, ..., e^{j_r}, e_{i_1}, ..., e_{i_s}).$$

Alors, T s'écrit de manière unique sous la forme

$$T = T^{j_1...j_r}_{i_1...i_s}.e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_r} \otimes e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_s}.$$

Si $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_d)$ est une autre base de V et $\mathcal{B}' = (\varepsilon^1, ..., \varepsilon^d)$ est la base duale. Soient $a = (a^i_j)_{1\le i,j \le d}$ la matrice de changement de varibles $\varepsilon_j = a^l_j.e_l$ et $a^{-1} = b = (b^i_j)_{1\le i,j\le d}$ la matrice inverse. Alors $e_i = b^l_i.\varepsilon_l$. On sait aussi que les bases duales se transforment par les formules $\varepsilon^i = b^i_l.e^l, e^j = a^j_i.\varepsilon^i$.

Soit $T \in T^r_s(V)$, on note ses composantes par rapport aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ respectivement $T^{j_1...j_r}_{i_1...i_s}$ et $\tilde{T}^{j_1...j_r}_{i_1...i_s}$. Alors on a la formule de changement de bases

$$\tilde{T}^{j_1...j_r}_{i_1...i_s} = b^{j_1}_{l_1}...b^{j_r}_{l_r}.a^{k_1}_{i_1}...a^{k_s}_{i_s}.T^{l_1...l_r}_{k_1...k_s}.$$

On définit l'opérateur de contraction des indices C^k_l comme étant l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc}
C^k_l: & T^r_s(V) & \rightarrow & T^{r-1}_{s-1}(V) \\
& T & \mapsto & C^k_l T
\end{array}$$

$$C_l^k(T_{i_1...i_s}^{j_1...j_r}.e_{j_1}\otimes...\otimes e_{j_r}\otimes e^{i_1}\otimes...\otimes e^{i_s})$$
$$= T_{i_1...i_{l-1}ti_{l+1}...i_s}^{j_1...j_{k-1}tj_{k+1}...j_r}.e_{j_1}\otimes...\otimes e_{j_{k-1}}\otimes e_{j_{k+1}}\otimes...\otimes e_{j_r}\otimes e^{i_1}\otimes...\otimes e^{i_{l-1}}\otimes e^{i_{l+1}}\otimes...\otimes e^{i_s}.$$

Si (E,ϖ,M) est un fibré vectoriel, on note $T_s^r(E) = \bigsqcup_{p\in M} T_s^r(E_p)$. On obtient un fibré vectoriel $(T_s^r(E),\varpi,M)$. Une section de ce fibré est ce qu'on appelle un champ tensoriel de type (r,s) du fibré $T_s^r(E)$.

Si $(\sigma_1,...,\sigma_d)$ est un repère de E au dessus d'un ouvert U de M et $(\sigma^1,...,\sigma^d)$ est le repère dual. Tout $T \in \Gamma(M,T_s^r(E))$ se décompose de manière unique sous la forme

$$T = T_{i_1...i_s}^{j_1...j_r}.\sigma_{j_1}\otimes...\otimes\sigma_{j_r}\otimes\sigma^{i_1}\otimes...\otimes\sigma^{i_s},\ T_{i_1...i_s}^{j_1...j_r}\in\mathcal{C}^\infty(U).$$

Soit une A-connexion ∇ sur le fibré vectoriel (E,ϖ,M). Pour tout $\alpha \in \chi^1(M,A)$ on étend la A-dérivée covariante ∇_α à $T_s^r(E)$ comme suit:

(1) pour tout $T\in\Gamma(M,T_s^r(E)) : \nabla_\alpha T \in \Gamma(M,T_s^r(E))$;

(2) pour toute fonction $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$, on pose
$$\nabla_\alpha f = \#\alpha.f;$$

(3) pour tout $\xi\in\Omega^1(M,E)=\Gamma(M,T_1^0(E))$ on définit $\nabla_\alpha\xi\in\Omega^1(M,E)$ par
$$\langle\nabla_\alpha\xi,X\rangle = \nabla_\alpha\langle\xi,X\rangle - \langle\xi,\nabla_\alpha X\rangle\,;$$

(4) en imposant à ∇_α de vérifier la règle de Leibnitz pour le produit tensoriel
$$\nabla_\alpha(T\otimes S) = \nabla_\alpha(T)\otimes S + T\otimes\nabla_\alpha(S).$$

Comme tout champ tensoriel se décompose localement en un produit tensoriel d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(M)$, $\Omega^1(M,E)$ et $\chi^1(M,E)$, on étend ∇_α aux tenseurs de type quelconque.

7.4. **Les $\mathcal{A}-$connexions affines.**

Définition 7.4.1. *($A-$connexions affines)*
Une $A-$connexion affine est une $A-$connexion sur le fibré (A,π,M).

Soit ∇ une A-connexion affine. La torsion de ∇ est la section $T \in \Gamma(M, A\times_M A; A)$ définie par

$$T(\alpha,\beta) = \nabla_\alpha\beta - \nabla_\beta\alpha - \{\alpha,\beta\}.$$

Définition 7.4.2. *Une A-connexion affine ∇ est dite symétrique si sa section de torsion est nulle.*

Pour les A-connexions affines, la section de courbure R s'identifie avec le champ tensoriel $R\in\Gamma(M,T_3^1(A))$ défini par

$$R(\xi,\alpha,\beta,\sigma) = \langle\xi,R(\alpha,\beta).\sigma\rangle$$

et la section de torsion T s'identifie avec le champ tensoriel $T\in\Gamma(M,T_2^1(A))$ défini par

$$T(\xi,\alpha,\beta) = \langle\xi,T(\alpha,\beta)\rangle\,;$$

Soit U est le domaine d'une carte $(x^1, ..., x^n)$ de M et du repère $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ de A au dessus de U. Si on note par $b_i^l, c_{ij}^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$ les fonctions de structure de l'algébroïde de Lie par rapport au repère $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$. On note les symboles de Christoffel pour ce repère par Γ_{ij}^l. On calcule R dans ces coordonnées locales

$$R_{ijm}^u = \langle \alpha^u, R(\alpha_i, \alpha_j).\alpha_m \rangle$$
$$= \left\langle \alpha^u, (\nabla_{\alpha_i}\nabla_{\alpha_j} - \nabla_{\alpha_j}\nabla_{\alpha_i} - \nabla_{\{\alpha_i,\alpha_j\}}).\alpha_m \right\rangle$$
$$= \left\langle \alpha^u, \nabla_{\alpha_i}(\Gamma_{jm}^l \alpha_l) - \nabla_{\alpha_j}(\Gamma_{im}^l \alpha_l) - \nabla_{c_{ij}^l.\alpha_l}\alpha_m \right\rangle$$
$$= \left\langle \alpha^u, (\#\alpha_i.\Gamma_{jm}^l).\alpha_l + \Gamma_{jm}^l.\Gamma_{il}^v.\alpha_v - ((\#\alpha_j.\Gamma_{im}^l).\alpha_l + \Gamma_{im}^l.\Gamma_{jl}^v.\alpha_v) - c_{ij}^l.\Gamma_{lm}^v.\alpha_v \right\rangle$$
$$= \#\alpha_i.\Gamma_{jm}^u + \Gamma_{jm}^l.\Gamma_{il}^u - \#\alpha_j.\Gamma_{im}^u - \Gamma_{im}^l.\Gamma_{jl}^u - c_{ij}^l.\Gamma_{lm}^u$$
$$= \Gamma_{jm}^l.\Gamma_{il}^u - \Gamma_{im}^l.\Gamma_{jl}^u + b_i^l.\frac{\partial \Gamma_{jm}^u}{\partial x^l} - b_j^l.\frac{\partial \Gamma_{im}^u}{\partial x^l} - c_{ij}^l.\Gamma_{lm}^u.$$

Et les coordonnées de T

$$T_{ij}^u = \langle \alpha^u, T(\alpha_i, \alpha_j) \rangle$$
$$= \left\langle \alpha^u, \nabla_{\alpha_i}\alpha_j - \nabla_{\alpha_j}\alpha_i - \{\alpha_i, \alpha_j\} \right\rangle$$
$$= \left\langle \alpha^u, \Gamma_{ij}^l \alpha_l - \Gamma_{ji}^l \alpha_l - c_{ij}^l.\alpha_l \right\rangle$$
$$= \Gamma_{ij}^u - \Gamma_{ji}^u - c_{ij}^u.$$

Part 3. **Holonomie, stabilité**

8. Structures transverses

8.1. **Structure de Poisson linéaire sur les fibres.** Dans un fibré vectoriel $p : E \to M$, on distingue deux catégories de fonctions sur $\mathcal{C}^\infty(E)$:

(1) Les fonctions basiques: ce sont les fonctions qui sont constantes sur les fibres, l'ensemble de ces fonctions est un sous espace vecoriel de $\mathcal{C}^\infty(E)$ qui s'identifie naturellement avec $\mathcal{C}^\infty(M)$.
(2) les fonctions qui sont linéaires sur le fibres: l'ensemble de ces fonctions s'identifie naturellement avec l'espace $\Omega^1(M, E^*)$ des 1-formes du fibré. En effet: si $f \in \mathcal{C}^\infty(E)$ est linéaire sur le fibres, on lui associe $\omega \in \Omega^1(M, E^*)$ définie par

$$\omega(x) = f_{|E_x}, x \in M$$

et réciproquement.

Exemple 8.1.1. *Soit un U ouvert de M domaine de la carte $(x^1, ..., x^n)$ et du repère $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ de E, alors*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & p^{-1}(U) & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \\ & \mu = \mu^i.\sigma_i(p(\mu)) & \mapsto & (x^1(p(\mu)), ..., x^n(p(\mu)), \mu^1, ..., \mu^k) \end{array}$$

est une carte de $p^{-1}(U)$. On remarque que les n-premières composantes sont des fonctions basiques et les k-dernières sont des fonctions linéaires sur les fibres.

Définition 8.1.1. *(Structure de Poisson linéaire sur les fibres)*

Une structure de Poisson Π sur E est dite linéaire sur le fibres si:

(1) *le crochet de deux fonctions basiques est nul;*
(2) *le crochet d'une fonction basique et d'une fonction linéaire sur le fibres est une fonction basique;*
(3) *le crochet de deux fonctions linéaires sur les fibres est linéaires sur les fibres.*

Exemple 8.1.2. *(Le dual d'une algébroïde de Lie)*

$(A, \pi, M, \#)$ est une algébroïde de Lie de crochet $\{.,.\}$. Le fibré $\varpi : A^* \to M$ admet une structure de Poisson linéaire sur les fibres. Son crochet est définie comme suit: pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\alpha, \beta \in \Omega^1(M, (A^*)^*) = \chi^1(M, A)$:

$$\begin{array}{rcl}\{\{f, g\}\} & = & 0 \\ \{\{f, \alpha\}\} & = & -\#\alpha.f \\ \{\{\alpha, \beta\}\} & = & \{\alpha, \beta\}.\end{array}$$

Réciproquement, la donnée d'un fibré vectoriel $\pi : A \to M$ dont le fibré dual $\varpi : A^* \to M$ est muni d'une structure de Poisson linéaire sur les fibres $\{\{.,.\}\}$ nous donne une structure d'algébroïde de Lie: pour tout $\alpha, \beta \in \chi^1(M, A)$ considérons

$$\{\alpha, \beta\} := \{\{\alpha, \beta\}\}.$$

Le crochet $\{.,.\}$ munit $\chi^1(M, A)$ d'une structure d'algèbre de Lie car $\{\{.,.\}\}$ vérifie les identités de Jacobi et de Leibnitz. Considérons l'opérateur

$$\delta : \Omega(M, A^*) \to \Omega(M, A^*)$$

défini par: pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\alpha, \beta \in \chi^1(M, A)$, $\omega \in \Omega^1(M, A^*)$:

$$(\delta f)(\alpha) = \{\{\alpha, f\}\};$$
$$(\delta\omega)(\alpha, \beta) = (\delta(\omega(\beta)))(\alpha) - (\delta(\omega(\alpha)))(\beta) - \omega(\{\alpha, \beta\}).$$

qu'on étend à tout $\Omega(M, A^*)$ par $\mathbb{R}$-linéarité. Par Leibnitz, c'est une dérivation d'ordre 1 de l'algèbre extérieure graduée $\Omega(M, A^*)$. Comme $\delta^2 = 0$, le théorème 3.1.1, montre qu'il existe une unique structure d'algébroïde de Lie sur $\pi : A \to M$ dont le crochet est $\{.,.\}$. On vient de démontré le théorème suiavnt:

Théorème 8.1.1. *Il y a une correspondance biunivoque liant les structures de Poisson linéaires sur les fibres et les structures d'algébroïdes de Lie.*

Preuve: Voir l'exemple 8.1.2.♠

Exemple 8.1.3. *Sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, il y a une dualité entre l'ensemble des tructures d'algèbres de Lie et les structures de Poisson linéaires sur le dual.*

8.2. **Morphismes, automorphismes d'algébroïdes de Lie.**

Définition 8.2.1. *(Morphisme d'algébroïdes de Lie)*
Un morphisme d'algébroïdes de Lie est un morphisme de fibré vectoriels compatible avec les ancrages et avec les crochets.

Autrement dit: Si $(A_1, \pi_1, M_1, \#_1)$ et $(A_2, \pi_2, M_2, \#_2)$ sont des algébroïdes de Lie de crochets respectifs $\{.,.\}_1$ et $\{.,.\}_2$. Un morphisme de A_1 vers A_2 est un morphisme de fibrés vectoriels $\Phi : A_1 \to A_2$ tel que:

(1) compatibilité avec les ancres: pour tout $\alpha \in A_1$ on a
$$\#_2.\Phi(\alpha) = \phi_*(\#_1.\alpha);$$
où $\phi : M_1 \to M_2$ est l'application induite.

(2) compatibilité avec les crochets: le morphisme de fibrés vectoriels $\Phi : A_1 \to A_2$ induit l'application
$$\begin{array}{cccc} \tilde{\Phi} : & \Gamma(M_1, A_1) & \to & \Gamma(M_2, A_2) \\ & \alpha & \mapsto & \tilde{\Phi}.\alpha \end{array}$$
définie par
$$\tilde{\Phi}.\alpha(y) = \Phi.\alpha(\phi^t(y)),$$
où $\phi^t : M_2 \to M_1$ est l'application induite par le morphisme transposé $\Phi^t : A_2^* \to A_1^*$.

La compatibilité avec les crochet s'exprime par: pour tout $\alpha, \beta \in \Gamma(M_2, A_2)$:
$$\tilde{\Phi}.\{\alpha, \beta\}_1 = \{\tilde{\Phi}.\alpha, \tilde{\Phi}.\beta\}_2.$$

Exemple 8.2.1. *Sur une algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$, $\#$ est un morphisme d'algébroïdes de Lie.*

Exemple 8.2.2. *Si $\phi : M_1 \to M_2$ est une application lisse, alors $\phi_* : TM_1 \to TM_2$ est un morphisme d'algébroïdes de Lie. Ceci n'est qu'une autre façon de dire que le crochet de Lie est naturel.*

Remarque 8.2.1. *En transposant la condition (1), la compatibilité avec les ancres se traduit par la commutativité du diagramme suivant*
$$\begin{array}{ccc} T^*M_2 & \xrightarrow{(\phi^t)^*} & T^*M_1 \\ \#_2^t \downarrow & & \downarrow \#_1^t \\ A_2^* & \xrightarrow[\Phi^t]{} & A_1^* \end{array}$$

Proposition 8.2.1. *Dire que $\Phi : A_1 \to A_2$ est un morphisme d'algébroïdes de Lie équivaut à dire que le morphisme de fibrés vectoriels $\Phi^t : A_2^* \to A_1^*$ est un morphisme de fibrés vectoriels et de variétés de Poisson.*

Preuve:
Si $\Phi : A_1 \to A_2$ est un morphisme d'algébroïdes de Lie. Considérons l'application
$$\begin{array}{cccc} (\Phi^t)^* & \mathcal{C}^\infty(A_1^*) & \to & \mathcal{C}^\infty(A_2^*) \\ & F & \mapsto & F \circ \Phi^t \end{array}.$$

En identifiant $\mathcal{C}^\infty(M_i)$ avec le sous espace de $\mathcal{C}^\infty(A_i^*)$ des fonctions basiques et $\Gamma(M_i, A_i)$ avec le sous espace de $\mathcal{C}^\infty(A_i^*)$ des fonctions linéaires sur les fibres. Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M_1)$ et tout $\alpha \in \Gamma(M_1, A_1)$:

$$\begin{aligned} (\Phi^t)^*.f &= (f \circ \pi_1^t) \circ \Phi^t \\ ((\Phi^t)^*.\alpha)(\mu) &= \left\langle \mu, \Phi(\alpha(\phi^t(\pi_2(\mu))))\right\rangle, \ \mu \in A_2^*. \end{aligned}$$

Observons que Φ^t envoi fonctions basiques sur fonctions basiques et fonctions linéaires sur les fibres sur fonctions linéaires sur les fibres. On note par $\{\{.,.\}\}_1$ et $\{\{.,.\}\}_2$ les crochets de Poisson sur A_1^* et A_2^* respectivement, alors il est clair que

$$(\Phi^t)^*\{\{f,g\}\}_1 = \{\{(\Phi^t)^*f, (\Phi^t)^*g\}\}_2 = 0, \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M_1).$$

Observons que $\tilde{\Phi}$ est la restriction de $(\Phi^t)^*$ sur les sous espaces des fonctions linéaires sur les fibres. Ainsi la condition (2) équivaut à

$$(\Phi^t)^*\{\{\alpha,\beta\}\}_1 = \{\{(\Phi^t)^*\alpha, (\Phi^t)^*\beta\}\}_2, \ \forall \alpha, \beta \in \Gamma(M_1, A_1).$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \Gamma(M_1, A_1)$ et tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M_1)$ on a

$$\begin{gathered} (\Phi^t)^*\{\{\alpha, f.\beta\}\}_1 = \{\{(\Phi^t)^*\alpha, (\Phi^t)^*(f.\beta)\}\}_2 \\ = (\Phi^t)^*f.\{\{(\Phi^t)^*\alpha, (\Phi^t)^*\beta\}\}_2 + \beta.\{\{(\Phi^t)^*\alpha, (\Phi^t)^*f\}\}_2 \\ = (\Phi^t)^*f.\{\{(\Phi^t)^*\alpha, (\Phi^t)^*\beta\}\}_2 + (\Phi^t)^*\beta.((\#_2.(\Phi^t)^*\alpha).(\Phi^t)^*f) \\ = (\Phi^t)^*f.\{\{(\Phi^t)^*\alpha, (\Phi^t)^*\beta\}\}_2 + (\Phi^t)^*\beta.(\phi_*(\#_1.\alpha).(\Phi^t)^*f)) \\ = (\Phi^t)^*f.\{\{(\Phi^t)^*\alpha, (\Phi^t)^*\beta\}\}_2 + (\Phi^t)^*\beta.(\Phi^t)^*((\#_1.\alpha).f) \end{gathered}$$

comme β est quelconque, la condition (1) implique que

$$(\Phi^t)^*\{\{\alpha, f\}\}_1 = (\Phi^t)^*((\#_1.\alpha).f) = \{\{(\Phi^t)^*\alpha, (\Phi^t)^*f\}\}_2.$$

Réciproquement, si $\Phi^t : A_2^* \to A_1^*$ est un morphisme de variétés de Poisson, alors on a (2), et par la relation précédante on a (1).♠

Applications:

(1) Sur une algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$, $\#^t : T^*M \to A^*$ est un morphisme de variétés de Poissons, pour la structure de Poisson canonique de T^*M.

(2) Si $\Phi : A_1 \to A_2$ est un morphisme d'algébroïdes de Lie. Le diagramme commutatif suivant est un diagramme de morphismes de variétés de Poisson linéaires sur les fibres

$$\begin{array}{ccc} T^*M_2 & \xrightarrow{(\phi^t)^*} & T^*M_1 \\ \#_2^t \downarrow & & \downarrow \#_1^t \\ A_2^* & \xrightarrow[\Phi^t]{} & A_1^* \end{array}$$

(3) Si $(A_1, \pi_1, M_1, \#_1)$ et $(A_2, \pi_2, M_2, \#_2)$ sont des algébroïdes de Lie. On peut définir leur produit $A_1 \times A_2$ comme étant le dual de la structure de Poisson produit sur $A_1^* \times A_2^*$ (qui reste linéaire sur les fibres). Pour cette structure, les projection naturelles $A_1 \times A_2 \to A_1$ et $A_1 \times A_2 \to A_2$ sont des morphismes d'algébroïdes de Lie.

Définition 8.2.2. *(Automorphismes d'une algébroïde de Lie)*
Un automorphisme de l'algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$ *est un isomorphisme local* $\Phi : A \to A$ *de l'algébroïde de Lie* A.

Ça revient au même de dire que son transposé $\Phi^t : A^* \to A^*$ est un isomorphisme local de fibrés et un automorphisme de Poisson. On note l'ensemble de ces applications par $Aut(A)$ et par $Aut(A)^0$ sa composante connexe en l'identité. Ce sont des groupes locaux.

Par définition, $\Phi \in Aut(A)^0$ si et seulement s'il existe une famille à un paramètre $\Phi_t \in Aut(A)$ telle que $\Phi_0 = id$ et $\Phi_1 = \Phi$.

Exemple 8.2.3. *(Flots hamiltoniens sur une algébroïde de Lie)*

Soient $(A, \pi, M, \#)$ une algébroïde de Lie et $\alpha \in \Gamma(M, A)$. On regarde α comme un élément de $\mathcal{C}^\infty(A^*)$ linéaire sur les fibres. Son champ hamiltonien X_{f_α} est linéaire sur les fibres. En effet: on se donne une carte $(x^1, ..., x^n)$ de M et un repère $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ de A, alors $(x^1, ..., x^n, \sigma^1, ..., \sigma^k)$ est une carte de A^*. La formule 9

$$X_{f_\alpha} = \sum_{1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq n} \alpha^j b^i_j . \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{1 \leq l, j \leq k} \Big(\sum_{1 \leq i \leq k} c^l_{ij} . \alpha^j - \sum_{1 \leq i \leq n} b^i_j . \frac{\partial \alpha^l}{\partial x^i} \Big) \xi^l . \frac{\partial}{\partial \xi^j}$$

montre que X_{f_α} est linéaire sur les fibres. Ainsi son flot $\Phi^\alpha_t : A^* \to A^*$ (défini sur des ouverts de A^*) est aussi linéaire sur le fibres, i.e. c'est un morphisme de fibrés. Or c'est aussi un automorphisme de Poisson. Ainsi son transposé $\Phi^\alpha_t : A \to A$ est un automorphisme local de l'algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$.

Définition 8.2.3. *(Automorphismes intérieurs)*
Un automorphisme intérieur de l'algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$ *est un automorphismes* $\Phi : A \to A$ *vérifiant:*
il existe une famille de sections $\alpha_s \in \Gamma(M, A)$, $s \in [0, 1]$ *dont la famille à un paramètre d'automorphismes* $\Phi^{\alpha_s}_t : A \to A$ *vérifie:*

$$\Phi^{\alpha_s}_1 \equiv \Phi.$$

L'ensemble des automorphismes intérieurs de A *sera noté* $Inn(A)$.

Proposition 8.2.2. $Inn(A)$ *est un sous groupe local et normal de* $Aut(A)$. *Le groupe quotient sera appelé le groupe des automorphismes extérieurs de* A *et est noté par*

$$Out(A) = Aut(A)/Inn(A)$$

Preuve:
Il suffit de montrer que $Inn(A)$ est normal dans $Aut(A)^0$. Soient $\Phi \in Inn(A)$, $\Psi \in Aut(A)^0$. Soient $\alpha_s \in \Gamma(M, A)$, $s \in [0, 1]$ dont la famille à un paramètre d'automorphismes $\Phi^{\alpha_s}_t : A \to A$ réalise Φ et $\Psi_t \in Aut(A)$, $t \in [0, 1]$ une famille réalisant Ψ. Soit Y le champ de vecteurs fondamental de Ψ_t.

Sur une variété de Poisson on a toujours $[Z, X_f] = X_{Z.f}$ pour toute fonction lisse f et tout champ de vecteur Z. Ainsi le flot $\Phi_t^{Z.f}$ de $X_{Z.f}$ vérifie

$$\Phi_t^{Z.f} = \Theta_s^{-1} \circ \Phi_t^f \circ \Theta_s$$

où Θ_s est le flot de Z et Φ_t^f celui de X_f. Il suffit de remplacer f par les $\alpha_s \in \Gamma(M, A)$ et Z.par Y.♠

Exemple 8.2.4. *(Flots hamiltoniens dans une algèbre de Lie)*

Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension finie considéré comme algébroïde de Lie au dessus d'un point. Tout $\alpha \in \mathcal{G}$ peut être vu comme élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$. Le flot de son champ hamiltonien est

$$\phi_t^\alpha(\xi) = Ad(\exp(t.\alpha))^*.\xi.$$

En effet, il suffit de montrer que $\frac{d}{dt}|_{t=0} Ad(\exp(t.\alpha))^*.\xi = X_\alpha(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathcal{G}^*$:

soit $(\xi_1, ..., \xi_k)$ une base de $\mathcal{G}$ et $(\xi^1, ..., \xi^k)$ sa base duale, soient $\beta \in \mathcal{G}$ et $\eta \in \mathcal{G}^*$. D'une part, on a par l'écriture locale du champ hamiltonien:

$$X_\alpha(\eta).\beta = \eta_l.c_{ij}^l.\alpha^i.\beta^j.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (\frac{d}{dt}|_{t=0} Ad(\exp(t.\alpha))^*.\eta).\beta &= (ad^*(\alpha).\eta).\beta \\ &= \eta([\alpha, \beta]) \\ &= \eta_l.c_{ij}^l.\alpha^i.\beta^j. \end{aligned}$$

L'automorphisme d'algébroïde de Lie qui en découle est

$$\phi_t^\alpha = Ad(\exp(t\alpha)).$$

8.3. **Structure transverse à une algébroïde de Lie.** On commence par quelques généralités.

Soient $i : L \hookrightarrow M$ une sous variété (immergé ou plongé) et $f : N \to M$ une fonction lisse. On dit que f est transverse à L si

$$d_p f.T_p N + T_{f(p)} L = T_{f(p)} M, \text{ pour tout } p \in f^{-1}(L).$$

Si l'on se donne un feuilletage singulier $\mathcal{F}$ sur M, une application lisse $f : N \to M$ est dite transverse au feuilletage $\mathcal{F}$ si

$$d_p f.T_p N + T_{f(p)} \mathcal{F} = T_{f(p)} M, \text{ pour tout } p \in N.$$

Si $i : S \hookrightarrow M$ est une sous-variété de M et $\mathcal{F}$ est un feuilletage singulier sur M. On dit que S est transverse à $\mathcal{F}$ si l'injection i est transverse à $\mathcal{F}$.

Maintenant on se donne une algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$. On note $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_\alpha$ son feuilletage caractéristique.

Définition 8.3.1. *(Sous variété transverse à une algébroïde de Lie)*

Une sous variété (plongé) $i : S \hookrightarrow M$ est dite transverse à l'algébroïde de Lie si S est tranverse au feuilletage caractéristique.

Ça qui revient à dire que

$$\mathrm{Im}\,\#_p + T_pS = T_pM, \text{ pour tout } p \in S.$$

On introduit la notion d'algébroïde de Lie transverse à $(A, \pi, M, \#)$ par la proposition suivante:

Proposition 8.3.1. *(Algébroïde de Lie transverse)*

Soit $i : S \hookrightarrow M$ une sous variété transverse à l'algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$. On considère le sous espace de A :

$$A_S = \{\alpha \in A; \#\alpha \in TS\}.$$

Alors $\pi_{|S} : A_S \to S$ est un fibré vectoriel On le munit de l'ancrage $\#_{|S} : A_S \to TS$ et de la restriction du crochet $\{.,.\}$ à $\Gamma(S, A_S)$. Alors $(A_S, \pi_{|S}, S, \#_{|S})$ est une algébroïde de Lie.

On appelle $(A_S, \pi_{|S}, S, \#_{|S})$ l'algébroïde de Lie transverse à $(A, \pi, M, \#)$ induite par la sous variété (plongé) $i : S \hookrightarrow M$.

Preuve:

On procéde par induction sur $\dim S$. Si $\dim S = 0$ c'est evident. On suppose le resultat vrai pour tout s tel que $1 \leq s \leq d-1$ et on le montre pour $s = d$:

soit $(x^1, ..., x^d, x^{d+1}, ..., x^n)$ une carte de M telle que

$$S = \{x^{d+1} = 0, ..., x^n = 0\}$$

et soit $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ un repère de A. Si $\#A_S \cap TS = \{0\}$ le resultat est evident. Sinon, supposons que $\dfrac{\partial}{\partial x^d} \in \mathrm{Im}\,\#$ et qu'il exite un i_0 tel que $\#\sigma_{i_0} = \dfrac{\partial}{\partial x^d}$. Ceci ne nous restreint en rien. Alors $S_0 = \{x^d = 0, x^{d+1} = 0, ..., x^n = 0\}$ est une sous variété plongé de M de dimension $d-1$. Comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\# + TS_0 &= \langle \#\sigma_1, ..., \#\sigma_k \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{d-1}} \right\rangle \\
&= \langle \#\sigma_1, ..., \#\sigma_k \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^d} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{d-1}} \right\rangle \\
&= TM.
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence $(A_{S_0}, \pi_{|S_0}, S_0, \#_{|S_0})$ est une algébroïde de Lie. On voit clairement que $A_S = A_{S_0} \oplus \langle \sigma_{i_0} \rangle$. Ainsi, on a notre fibré vectoriel $\pi_{|S} : A_S \to S$ et notre ancrage $\#_{|S} : A_S \to TS$.

Reste à voir que la restriction du crochet à S est stable: soient $\alpha, \beta \in \Gamma(S, A_S)$ alors il existe $\alpha_0, \beta_0 \in \Gamma(S, A_S)$ tangents à A_{S_0}, il existe $f, g \in \mathcal{C}^\infty(S)$ tels que $\alpha = \alpha_0 + f.\sigma_{i_0}$ et $\beta = \beta_0 + g.\sigma_{i_0}$. Alors

$$\begin{aligned}
\#\{\alpha, \beta\} &= [\#\alpha, \#\beta] \\
&= [\#\alpha_0 + f.\#\sigma_{i_0}, \#\beta_0 + g.\#\sigma_{i_0}].
\end{aligned}$$

Comme $\#\alpha_0 + f.\#\sigma_{i_0}, \#\beta_0 + g.\#\sigma_{i_0} \in \Gamma(S, TS)$ alors leur crochet de Lie reste dans $\Gamma(S, TS)$ et donc $\{\alpha, \beta\} \in \Gamma(S, A_S)$.♠

L'interet des algébroïdes de Lie transverses est dans le théorème suivant:

Théorème 8.3.1. *(Structures transverses)*

Soit F une feuille du feuilletage caractéristique d'une algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$ et soient $i : S \hookrightarrow M$ et $j : N \hookrightarrow M$ deux sous variétés de M transveses à F, de dimensions comlémentaires à $\dim F$ *et coupant F en un seul point.*

Il existe un automorphisme intérieur de A qui envoi un voisinage de l'algébroïde de Lie autour de $\{p\} = S \cap \mathcal{F}$ dans S sur un voisinage de l'algébroïde de Lie autour de $\{q\} = N \cap \mathcal{F}$ dans N pour les structures d'algébroïdes de Lie transverses induites.

Preuve:

Si p et q sont différents, soit $\alpha : I \to A$ un A-chemin joignat p et q. Il existe une section prolongeant α et dont le flot est un isomorphisme de p à q.

Il suffit de considérer que $p = q$. Comme c'est un resultat local, on peut travaille dans un domaine trivialisant canonique $(x^i, y^j), 1 \leq i \leq r,\ r+1 \leq j \leq n$ et un repère $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ dans un voisinage U de p. On interpole $S = N_0$ et $N = N_1$ par une famille de sous variétés N_t de la forme

$$N_t = \{x^i = f^i(y^{r+1}, ..., y^n, t);\ i = 1, .., r\}.$$

On construit une famille de sections $\alpha_s \in \Gamma(U, A)$ telle que pour tout s, le flot $\Phi_t^{\alpha_s} : A \to A$ induit un isomorphisme $\phi_t^{\alpha_s}$ d'un voisinage de p dans N_0 sur un voisinage de p dans N_t:

écrivons $\alpha_s = a^l(x^i, y^j, s).\sigma_l$. Pour que $\#\alpha_s \in TN_t$ il faut et il suffit que $a^i = \dfrac{\partial f^i}{\partial y^j} b_l^j.a^l + \dfrac{\partial f^i}{\partial t}$, $i = 1, ..., r$ sur tout N_t. En choisissant les a^l de la sorte, on obtient un automorphisme $\Phi_t^{\alpha_s} : A \to A$ qui vérifie

$$\# \circ \Phi_t^{\alpha_s} = (\phi_t^{\alpha_s})_* \circ \#$$

ce qui montre qu'il induit un automorphisme de A_{N_0} dans A_{N_t}.♠

Deux sous variétés de transveses à une feuille, de dimensions comlémentaires et la coupant en un seul point, sont égales à un difféomorphisme intérieur près.

Finalement, on a une notion bien définie de structure d'algébroïde de Lie transverse le long d'une feuille, c'est un germe algébroïde de Lie. La définition suivante est naturelle:

Définition 8.3.2. *(Structure transverse à une feuille caractéristique)*

Une structure transverse à la feuille F du feuilletage caractéristique de l'algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$. C'est une algébroïde de Lie $(A_S, \pi_{|S}, S, \#_{|S})$ telle que $i : S \hookrightarrow M$ est une sous variété de dimension complaimentaire à F, coupant F transversalement en un seul point.

Exemple 8.3.1. *(Écriture locale des structures transverses)*

Dans des coordonnées canoniques $(x^1,...,x^r,y^{r+1},...,y^n)$ sur un ouvert U voisinage de p, et un repère $(\sigma_1,...,\sigma_k)$ de A au dessus de U, tels que:

$$\begin{aligned}\rho\circ\sigma_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}, 1\leq i\leq r\\ \rho\circ\sigma_j &= \sum_{r+1\leq l\leq n} b_j^l.\frac{\partial}{\partial y^l}, r+1\leq j\leq k\end{aligned}$$

où les $b_j^l\in\mathcal{C}^\infty(U)$ et ne dépendent que des y et s'annulant en p. On a la structure transverse à la feuillle $F=\{y^{r+1}=0,...,y^n=0\}$: c'est l'algébroïde de Lie de base $S=\{x^1=0,...,x^r=0\}$, d'espace total $A_S=\langle\sigma_{r+1}(0,y),...,\sigma_k(0,y)\rangle$, d'ancre

$$\rho\circ\sigma_j=\sum_{r+1\leq l\leq n} b_j^l.\frac{\partial}{\partial y^l}, r+1\leq j\leq k$$

et de crochet

$$\{\sigma_j,\sigma_q\}=\sum_{r+1\leq l\leq n} c_{jq}^l.\sigma_l, r+1\leq j,q\leq k.$$

Toute structure transverse coupant Fen un seul point est isomorphe à A_S.

9. Holonomie

9.1. **Holonomie d'une A-connexion.** On revient aux A-connexions principales. Dans la suite $(A,\pi,M,\#)$ est une algébroïde de Lie et (P,p,G) est un fibré principal au dessus de M.

On se donne une A-connexion $h:P\times_M A\to TP$. Pour tout $\mu\in P$ on définit l'ensemble

$$\Phi(\mu):=\{g\in G;\text{ il existe une courbe horizontale joignant }\mu\text{ et }\mu.g\}.$$

On a:

(1) $e\in\Phi(\mu)$;
(2) $\Phi(\mu)$ est stable par inversion: si $g\in\Phi(\mu)$: soit $\tilde\gamma:[0,1]\to P$ une courbe horizontale telle que $\tilde\gamma(0)=\mu$ et $\tilde\gamma(1)=\mu.g$. Alors $\tilde\gamma^{-1}:[0,1]\to P$ définie par
$$\tilde\gamma^{-1}(t)=\tilde\gamma(1-t)$$
est aussi horizontale et on a $\tilde\gamma^{-1}(0)=\mu.g$, $\tilde\gamma^{-1}(1)=\mu$;
(3) $\Phi(\mu)$ est stable par multiplication: soient $g,h\in\Phi(\mu)$ et $\tilde\gamma:[0,1]\to P$, $\tilde\delta:[0,1]\to P$ des courbes horizontales telles que $\tilde\gamma(0)=\mu$, $\tilde\gamma(1)=\mu.g$ et $\tilde\delta(0)=\mu$, $\tilde\delta(1)=\mu.h$. Alors la courbe $\tilde\gamma.(\tilde\delta.g):[0,1]\to P$ est horizontale et vérifie $\tilde\gamma.(\tilde\delta.g)(0)=\mu$ et $\tilde\gamma.(\tilde\delta.g)(1)=\mu.h.g$. Donc $h.g\in\Phi(\mu)$;

(4) $\Phi(\mu)$ est férmé dans G : soit $(g_n)_n$ une suite de $\Phi(\mu)$ qui converge vers $g \in G$. Montrons que $g \in \Phi(\mu)$: pour tout n soit $\tilde{\gamma}_n : \left[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}\right] \to P$ une courbe horizontale telle que

$$\tilde{\gamma}_n(1-\frac{1}{n}) = \mu.g_n \text{ et } \tilde{\gamma}_n(1-\frac{1}{n+1}) = \mu.g_{n+1}.$$

Alors la courbe $\tilde{\gamma} : [0,1] \to P$ définie par

$$\tilde{\gamma}_{|\left[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}\right]} = \tilde{\gamma}_n$$

est horizontale et vérifie

$$\tilde{\gamma}(0) = \mu \text{ et } \tilde{\gamma}(1) = \mu.g$$

ainsi $g \in \Phi(\mu)$.

Définition 9.1.1. *(Holonomie d'une A-connexion)*
On appelle le sous groupe de Lie $\Phi(\mu)$ le groupe d'holonomie de la A-connexion h au point μ.

Remarque 9.1.1. *Pour tout $x \in M$, $\mu \in P_x$ et tout $g \in G$ les sous groupes $\Phi(\mu)$ et $\Phi(\mu.g)$ sont conjugués:*
en effet, soit $g' \in \Phi(\mu.g)$, alors il existe une courbe horizontale $\tilde{\gamma} : [0,1] \to P$ telle que $\tilde{\gamma}(0) = \mu.g$ et $\tilde{\gamma}(1) = \mu.g.g'$, posons $h = g.g'.g^{-1}$ alors la courbe $\tilde{\gamma}.g^{-1} : [0,1] \to P$ est horizontale et vérifie $\tilde{\gamma}.g^{-1}(0) = \mu$ et $\tilde{\gamma}.g^{-1}(1) = \mu.h$, on voit que $h \in \Phi(\mu)$, ainsi $g' \in g^{-1}.\Phi(\mu).g$. Par un raisonnement analogue on a

$$\Phi(\mu.g) = g^{-1}.\Phi(\mu).g$$

Remarque 9.1.2. *Si $\mu, \nu \in P$ peuvent être joints par une courbe horizontale $\tilde{\gamma} : [0,1] \to P$, alors $\Phi(\mu) = \Phi(\nu)$. En effet, si $g \in \Phi(\mu)$, soit $\tilde{\delta} : [0,1] \to P$ une courbe horizontale telle que $\tilde{\delta}(0) = \mu$ et $\tilde{\delta}(1) = \mu.g$, alors la courbe $\tilde{\gamma}^{-1}.\tilde{\delta}.(\tilde{\gamma}.g) : [0,1] \to P$ est horizontale et joint ν et $\nu.g$, ainsi $g \in \Phi(\nu)$.*

Cette classe de conjugaison est ce qu'on appelle le groupe d'holonomie en x, qu'on va introduire maintenant:

Soit $\mathcal{F}$ une feuille du feuilletage caractéristique et $x \in \mathcal{F}$. On note par $\Omega(\mathcal{F}, x)$ l'ensemble des lacets lisses par morceux de $\mathcal{F}$ basés en x. Un A-chemin $\alpha : [0,1] \to A$ dont la base est un lacet $\gamma \in \Omega(\mathcal{F}, x)$ sera appelé un A-lacet de $\mathcal{F}$ basé en x. Le transport parallèle suivant un tel A-lacet $\alpha : [0,1] \to A$ nous donne un isomorphisme de la fibre $p^{-1}(x)$. On décrit le propriétés de l'ensemble de ces isomorphismes:

(1) L'ensemble de ces isomorphismes est stable par composition: en effet, soient $\alpha : [0,1] \to A$ et $\beta : [0,1] \to A$ deux A-lacets de $\mathcal{F}$ basés en x, on doit montrer que $\tau_\beta \circ \tau_\alpha = \tau_\theta$ où $\theta : [0,1] \to A$ est un certain A-lacet de $\mathcal{F}$ basé en x :

soit $\mu \in P_x$, il existe un unique $g \in G$ et un unique $g' \in G$ tels que $\tau_\alpha(\mu) = \mu.g$ et $\tau_\beta(\mu) = \mu.g'$ ceci implique que $g, g' \in \Phi(\mu)$. Soit $\tilde{\gamma} : [0,1] \to P$ une courbe horizontale de base $\gamma : [0,1] \to M$ et telle que $\tilde{\gamma}(0) = \mu$ et $\tilde{\gamma}(1) = \mu.g.g'$, alors $\gamma \in \Omega(\mathcal{F}, x)$: en effet, pour tout $t \in [0,1]$, $\tilde{\gamma}'(t) \in \mathcal{H}_{\tilde{\gamma}(t)}$, il existe donc $\eta \in A_{\gamma(t)}$ tel que $\tilde{\gamma}'(t) = h(\tilde{\gamma}(t), \eta)$. On a vu dans 6.6 qu'il existe un A-chemin $\eta : [0,1] \to A$ dont le base est γ. Comme

$$p_* \tilde{\gamma}'(t) = \dot{\gamma}(t) = \# \eta(t) = \# \hat{p}(\tilde{\gamma}(t), \eta(t));$$

on a

$$\tilde{\gamma}'(t) = h(\tilde{\gamma}(t), \eta(t)), \ \tilde{\gamma}(0) = \mu \text{ et } \tilde{\gamma}(1) = \mu.g.g'.$$

Par G-invariance il existe un A-lacet $\eta : [0,1] \to A$ de $\mathcal{F}$ basé en x tel que

$$\tau_\beta \circ \tau_\alpha = \tau_\eta.$$

(2) L'ensemble de ces isomorphismes est stable par inversion: découle de la relation $\tau_{\alpha^{-1}} = (\tau_\alpha)^{-1}$ (propriétes du transport parallel).
(3) L'identité est un tel isomorphisme: il suffit de prendre un A-lacet constant.

Définition 9.1.2. *Pour tout $x \in M$, soit $\mathcal{F}$ la feuille du feuilletage caractéristique qui passe par x. On définit le groupe*

$$\Phi(x) = \{\tau_\alpha, \ \pi \circ \alpha \in \Omega(\mathcal{F}, x)\}$$

on l'appelle le groupe d'holonomie de la A-connexion h au point x. Sa composante connexe en l'élément neutre est noté $\Phi^0(x)$.

Remarque 9.1.3. *Pour tout $x \in M$ et $\mu \in P_x$ on a l'isomorphisme de groupes:*

$$\begin{array}{ccc} \Phi(x) & \to & \Phi(\mu) \\ \tau_\alpha & \mapsto & \tau_\alpha(\mu) \end{array}$$

ce qui montre que $\Phi(x)$ est un groupe de Lie.

Remarque 9.1.4. *Soient x et y sont dans la même feuille $\mathcal{F}$ du feuilletage caractéristique et soit $\alpha \in \Gamma(M, A)$ telle que le flot de $\#\alpha$ joint x et y. On note $\gamma : [0,1] \to M$ cette courbe. Alors $\alpha \circ \gamma : [0,1] \to A$ est un A-chemin de base γ, son relèvement horizontal nous donne le transport parallèle $\tau_\alpha : P_x \to P_y$. Alors, la conjugaison*

$$\begin{array}{cccc} T: & \Phi(x) & \to & \Phi(y) \\ & \tau_\beta & \mapsto & \tau_\alpha \circ \tau_\beta \circ (\tau_\alpha)^{-1} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes. Cependant, si l'on a deux points qui ne sont pas dans la même feuille, leurs groupes d'holonomies ne sont pas isomorphes en général.

Il est aussi important de connaitre l'algèbre de Lie des ces groupes, car elles donnent une description infinitésimale de ces dérniers.

On se donne un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de M par des domaines de trivialisations, on associe à chaque $i \in I$ la section triviale $s_i : U_i \to P$, la 1-forme locale de la $A-$connexion $\omega_i \in \Omega^1(U_i, A_i; \mathcal{G})$ et la 2-forme de courbure $\Omega_i \in \Omega^2(U_i, A_i; \mathcal{G})$.

Théorème 9.1.1. *Soit $x_0 \in U_i$ et $\mu_0 = s_i(x_0) \in P_{x_0}$. Alors l'algèbre de Lie du sous groupe d'holonomie $\Phi(\mu_0)$ est le sous espace vectoriel de $\mathcal{G}$ engendré par les éléments $\Omega_i(\alpha,\beta)_{x_0}$ et $\omega_i(\gamma)_{x_0}$ où $\alpha,\beta,\gamma \in A_{x_0}$ avec $\#\gamma = 0$.*

Preuve:
Soit $\mathcal{G}(\mu_0)$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{G}$ engendré par les $\Omega_i(\alpha,\beta)$ et $\omega_i(\gamma)$ où $\alpha,\beta,\gamma \in A_{x_0}$ avec $\#\gamma = 0$. C'est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{G}$. On considère la distribution sur P définie par

$$\mathcal{D}_\mu = \{h(\mu, A) + \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta)).\mu;\ A,\alpha,\beta \in A_{x_0}\}.$$

Cette distribution est intégrable et $P(\mu_0) = \{\mu \in P;\ \mu_0$ et μ sont reliés par une courbe horizontale$\}$ est la sous variété intégrale qui passe par μ_0. Modulo ça on a

$$\begin{aligned}
\xi \in Lie(\Phi(\mu_0)) &\Longleftrightarrow \exp(t.\xi) \in \Phi(\mu_0),\ \forall t \in \mathbb{R}\\
&\Longleftrightarrow \mu_0.\exp(t.\xi) \in P_{x_0} \cap P(\mu_0),\ \forall t \in \mathbb{R}\\
&\Longleftrightarrow \sigma(\xi).\mu_0 \in \mathcal{V}_{\mu_0} \cap T_{\mu_0}P(\mu_0) = \mathcal{V}_{\mu_0} \cap \mathcal{D}_{\mu_0}\\
&\Longleftrightarrow \exists A,\alpha,\beta \in A_{x_0} :\ \sigma(\xi).\mu_0 = h(\mu_0, A) + \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta)).\mu_0\\
&\Longleftrightarrow \exists A,\alpha,\beta \in A_{x_0} :\ h(\mu_0, A) = -\sigma(\Omega_i(\alpha,\beta) - \xi).\mu_0\\
&\Longleftrightarrow \exists A,\alpha,\beta \in A_{x_0} :\ \#A = 0 \text{ et } \xi = \omega_i(A) + \Omega_i(\alpha,\beta)\\
&\Longleftrightarrow \xi \in \mathcal{G}(\mu_0).
\end{aligned}$$

On montre que $\mathcal{D}$ est intégrable: elle est lisse. Elle est involutive, en effet: soient $\alpha,\beta,A,B \in \Gamma(M,A)$, en utilisant la proposition 6.4.2 et le fait que $[h,[h,h]] = 0$, on a

$$\begin{aligned}
[h(A), \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))] &= [h(A), h(\{\alpha,\beta\}) - [h(\alpha), h(\beta)]]\\
&= h(\{A,\{\alpha,\beta\}\}) - \sigma(\Omega_i(A,\{\alpha,\beta\})) \in \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
&[\sigma(\Omega_i(A,B)), \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))]\\
&= [h(\{A,B\}) - [h(A),h(B)], \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))]\\
&= [h(\{A,B\}), \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))] - [[h(A),h(B)], \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))]
\end{aligned}$$

d'après ce qui précéde on a $[h(\{A,B\}), \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))] \in \mathcal{D}$. Reste à voir que $[[h(A),h(B)], \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))] \in \mathcal{D}$: en utilisant Jacobi on a

$$\begin{aligned}
&[[h(A),h(B)], \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))]\\
&= [h(A), [h(B), \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))]] - [h(B), [h(A), \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))]].
\end{aligned}$$

Il suffit de voir que $[h(A), [h(B), \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))]] \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
&[h(A), [h(B), \sigma(\Omega_i(\alpha,\beta))]]\\
&= [h(A), h(\{B,\{\alpha,\beta\}\}) - \sigma(\Omega_i(B,\{\alpha,\beta\}))]\\
&= [h(A), h(\{B,\{\alpha,\beta\}\})] - [h(A), \sigma(\Omega_i(B,\{\alpha,\beta\}))] \in \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{D}$ est involutive. De plus $\mathcal{D}$ est localement de type fini; car le champ caractéristique est localement de type fini. Donc $\mathcal{D}$ est intégrable. Soit

$\tilde{\mathcal{H}} : \mu \mapsto \tilde{\mathcal{H}}_\mu$ la distribution engendré par les flots des $h(\alpha)$, c'est la plus petite distribution intégrable qui contient le distribution horizontale. Il est clair que la sous variété intégrale de $\tilde{\mathcal{H}}$ qui passe par μ_0 est $P(\mu_0)$. Reste à voir que $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{H}}$: il est clair que $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{D}$, d'autre part $\tilde{\mathcal{H}}$ contient la distribution horizontale, elle est involutive donc elle contient $[h(\alpha), h(\beta)]$ et $h(\{\alpha, \beta\})$ pour tout $\alpha, \beta \in \Gamma(M, A)$. Ainsi $\tilde{\mathcal{H}}$ contient $\Omega_i(\alpha, \beta)$ pour tout $\alpha, \beta \in \Gamma(M, A)$ et donc $\mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{H}}$.♠

Remarque 9.1.5. *Si # est injective (cas du fibré tangent) alors l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie est engendré par les formes locales de courbure. Si le groupe d'holonomie est discret, alors son algèbre de Lie est nulle ce qui implique que la courbure est nulle et réciproquement. Autremenent dit "la A-connexion est plate si et seulement si le groupe d'holonomie est discret en tout point".*

9.2. **Holonomie d'une feuille caractéristique.** On considère une algébroïde de Lie $(A, \pi, M, \#)$ et une feuille $i : F \to M$ de dimension r du feuilletage caractéristique. On note $\nu(F) := \bigsqcup_{p \in F} T_pM/T_pF$ le fibré normal au dessus de F, c'est un fibré vectoriel, on note $p : \nu(F) \to F$ sa projection.

Le théorème du voisinage tubulaire (voir [6] page 76) nous peremet de voir $\nu(F)$ comme un voisinage ouvert particulier de F dans M. Autrement dit, il existe une immersion injective (non canonique) $\tilde{\imath} : \nu(F) \to M$ telle que:

(1) $\tilde{\imath} \circ Z = i$ où $Z : F \to \nu(F)$ est la section nulle, i.e. $\tilde{\imath}_{|F} = i$ où l'on identifie la section nulle avec la sous variété F de $\nu(F)$,
(2) $\tilde{\imath}$ envoi les fibres transversalement à la feuille F.

On suppose que chaque fibre est transverse au feuilletage caractéristique.

On construit une $A_{|F}$-connexion $h : \nu(F) \times_F A_{|F} \to T\nu(F)$ comme suit:

Soit $x \in F$. On choisit un sous fibré $E \subset A_{|T_x}$complémentaire à l'algébroïde de Lie transverse $A_{T_x} \to T_x$. Comme $A_{T_x} = \ker \#$, on a que # est injective sur E. La base T_x de l'algébroïde de Lie transverse $A_{T_x} \to T_x$ est contractile donc trivialisable (voir [7] page30).

Tout $\alpha \in A_x = (A_{|T_x})_x = (A_{|F})_x$ se scinde de manière unique sous la forme:

$$\alpha = \alpha^{\shortparallel} + \alpha^{\perp}, \text{ où } \alpha^{\shortparallel} \in E_x, \alpha^{\perp} \in (A_{T_x})_x.$$

Pour tout $u \in T_x$ il existe un unique $\alpha_u^{\shortparallel} \in E_u$ et un unique $\alpha_u^{\perp} \in (A_{T_x})_u$ tel que $p_*.\#\alpha_u^{\shortparallel} = \#\alpha^{\shortparallel}$ et $\alpha_u^{\perp} = \alpha^{\perp}$ modulo la trivialisation de $A_{T_x} \to T_x$.

On vient de construire une application

$$\begin{array}{rccc} h : & \nu(F) \times_F A_{|F} & \to & T\nu(F) \\ & (u, \alpha) & \mapsto & h(u, \alpha) = \#(\alpha_u^{\shortparallel} + \alpha_u^{\perp}) \end{array}$$

telle que

$$\begin{aligned} p_*.h(u, \alpha) &= p_*.\#(\alpha_u^{\shortparallel} + \alpha_u^{\perp}) \\ &= \#(\alpha^{\shortparallel} + \alpha^{\perp}) \\ &= \#\alpha. \end{aligned}$$

i.e. on vient de construire une $A_{|F}$-connexion linéaire sur le fibré vectoriel $p : \nu(F) \to F$.

Maintenant, s'il existe une fibre du fibré normal non transverse au feuilletage caractéristique. On sait qu'elle l'est au voisinage de la feuille F, on peut refaire les mêmes constructions sur un voisinage contractile d'une transversale en un point de F et prolonger la connexion au fibré normal.

Remarque 9.2.1. *La $A_{|F}$-connexion h dépend du voisinage tubulaire, de la trivialisation de $A_{T_x} \to T_x$ et du fibré complaimentaire $E \subset A_{|T_x} \to T_x$.*

Soit $\alpha : [0,1] \to A$ un A-chemin de base $\gamma : [0,1] \to F$. Si $u \in \nu(F)_{\gamma(0)}$, il existe $\epsilon > 0$ et une unique courbe horizontale $\tilde{\gamma} : [0,\epsilon[\to \nu(F)$ vérifiant le problème de Cauchy

$$\tilde{\gamma}'(t) = h(\tilde{\gamma}(t), \alpha(t)),\ \tilde{\gamma}(0) = u.$$

Si $u = 0$ alors $\tilde{\gamma}$ coïncide avec γ (en regardant F comme une sous variété de $\nu(F)$). Dans ce cas $\tilde{\gamma}$ est définie sur tout $[0,1]$. Ainsi, dans un voisinage $U_{\gamma(0)}$ de 0 dans $\nu(F)_{\gamma(0)}$ les courbes horizontales $\tilde{\gamma} : [0,\epsilon[\to \nu(F)$ vérifiant le problème de Cauchy

$$\tilde{\gamma}'(t) = h(\tilde{\gamma}(t), \alpha(t)),\ \tilde{\gamma}(0) = u \in U_{\gamma}$$

sont définies sur tout $[0,1]$. D'où, en passant du point initial $\tilde{\gamma}(0)$ au point final $\tilde{\gamma}(1)$ on obtient un difféomorphisme de $U_{\gamma(0)}$ dans un voisinage ouvert $U_{\gamma(1)}$ de 0 dans $\nu(F)_{\gamma(1)}$ qu'on note par

$$\begin{array}{rccc} H^0_F(\alpha) : & U_{\gamma(0)} & \to & U_{\gamma(1)} \\ & u & \mapsto & \tilde{\gamma}(1) \end{array}$$

où $\tilde{\gamma}$ est le relèvement horizontal de α de valeur initiale u.

Remarque 9.2.2. *On a $H^0_F(\alpha)(0) = 0$.*

Proposition 9.2.1. *Soit $\alpha : [0,1] \to A$ un A-chemin de base $\gamma : [0,1] \to F$ dans une feuille caractéristique F.*

L'isomorphime $H^0_F(\alpha)$ se relève en un isomorphisme d'algébroïdes de Lie transveres $H_F(\alpha) : A_{T_{\gamma(0)}} \to A_{T_{\gamma(1)}}$. Si $\beta : [0,1] \to A$ un A-chemin dans F tel que $\alpha(1) = \beta(0)$ alors

$$H_F(\alpha.\beta) = H_F(\beta) \circ H_F(\alpha),$$

où le point étant la concatenation des courbes.

Preuve:

Soit $\alpha : [0,1] \to A$ un A-chemin de base $\gamma : [0,1] \to F$. On peut trouver une famille de sections $\sigma_s : F \to A_{|F}$ telle que $\alpha = \sigma_s \circ \gamma$. En utilisant les notations précédantes, la section $\Sigma_s = \sigma_s \circ p : \nu(F) \to A$ se décompose pour tout $x \in F$ et $u \in \nu(F)$ comme suit

$$\Sigma_s(u) = \Sigma_s^{||}(u) + \Sigma_s^{\perp}(u) \text{ où } \Sigma_s^{||}(u) \in E_u,\ \Sigma_s^{\perp}(u) \in (A_{T_x})_u.$$

Les relèvements horizontaux $\tilde{\gamma}$ ne sont autre que les courbes intégrales du champ de vecteur $\#\Sigma_s$ (par définition de h). Or le flot $\phi_t^{\Sigma_s}$ de $\#\Sigma_s$ est induit par un automorphisme local d'algébroïdes $\Phi_t^{\Sigma_s}$ de Lie (qui est le transposé du flot du champ hamiltonien de Σ_s). Il engendre à son tour l'isomorphisme d'algébroïdes de Lie transveres

$$\Phi_1^{\Sigma_s} = H_F(\alpha) : A_{T_{\gamma(0)}} \to A_{T_{\gamma(1)}}.$$

La relation

$$H_F(\alpha.\beta) = H_F(\beta) \circ H_F(\alpha)$$

n'est autre que la composition des flots.♠

On appelle le difféomorphisme local d'algébroïdes de Lie transveres $H_F(\alpha)$ la A-holonomie du A-chemin α. On peut l'étendre sans difficultés aux A-chemins lisses par morceaux.

Pour tout $x_0 \in F$ on note par $\mathfrak{Aut}(A_{T_{x_0}})$ (resp.$\mathfrak{Inn}(A_{T_{x_0}})$, $\mathfrak{Out}(A_{T_{x_0}})$) le groupe des germes en 0 des automorphismes (resp. intérieur, extérieurs) de A_{T_x} qui envoient 0 sur 0, et par $\Omega_A(F, x_0)$ le groupe des A-lacets lisses par morceaux de base x_0.

Définition 9.2.1. *(Holonomie d'une feuille caractéristique)*

La A-holonomie de la feuille F de point base x_0 est le morphisme de groupes

$$H_F : \Omega_A(F, x_0) \to \mathfrak{Aut}(A_{T_{x_0}}).$$

Remarque 9.2.3. *Notons que la A-holonomie de la feuille F dépend du voisinage tubulaire, de la trivialisation de $A_{T_{x_0}} \to T_{x_0}$ et du fibré complementaire $E \to T_{x_0}$.*

Exemple 9.2.1. *(Feuilletages réguliers)*

Dans le cas où # est injective, i.e. l'algébroïde de Lie découle d'un feuilletage régulier $TF \to M$ sur M, on a:

(1) $A_{T_{x_0}} \to T_{x_0}$ est l'algébroïde de Lie triviale (nulle),
(2) $\mathfrak{Aut}(A_{T_{x_0}})$ s'identifie avec $\mathfrak{Aut}(T_{x_0})$ le groupe des germes de difféomorphismes de T_{x_0} qui envoient 0 sur 0,
(3) aussi $E = TF$, ainsi $h(u, \alpha)$ est l'unique vecteur tangent à la feuille qui passe par u et qui se projette sur α.

Donc, pour un feuilletage régulier, les notions d'holonomie et de A-holonomie coïncident.

Exemple 9.2.2. *(Action infinitésimale d'une algèbre de Lie)*

Soit $\rho : \mathcal{G} \to \chi^1(M)$ une action infinitésimale d'une algèbre de Lie de dimension finie, i.e. un morphisme d'algèbres de Lie. On considère le fibré vectoriel $\pi : M \times \mathcal{G} \to M$ avec l'ancrage

$$\#(v_x, \xi) = \rho(\xi)_x$$

et le crochet

$$\{\xi, \eta\}_x = [\xi(x), \eta(x)] + (\rho(\xi).\eta)_x - (\rho(\eta).\xi)_x$$

où l'on identifie $\xi, \eta \in \chi^1(M, M \times \mathcal{G})$ avec des fonctions $\xi, \eta \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{G})$. Alors, $(M \times \mathcal{G}, \pi, M, \{.,.\})$ est une algébroïde de Lie.

Soit x_0 un point fixe pour cette action, i.e. $\rho(\xi)_{x_0} = 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{G}$. La feuille qui passe par x_0 est $\mathcal{F} = \{x_0\}$. On prend $T_{x_0} = M$ et $A_{T_{x_0}} = M \times \mathcal{G}$, ainsi E est le fibré trivial au dessus de M. Le relèvement horizontal vaut $h(u,\alpha) = \#(u,\alpha) = \rho(\alpha)_u$.

Si cette action découle d'une action $A : M \times G \to M$, alors

$$\rho(\alpha)_u = d_{(u,e)}A(0,\alpha).$$

On trouve que pour le A-lacet constant $\alpha(t) = \alpha$ la solution de

$$\tilde{\gamma}'(t) = h(\tilde{\gamma}(t), \alpha(t)) = \rho(\alpha)_{\tilde{\gamma}(t)},\ \tilde{\gamma}(0) = u$$

est $\tilde{\gamma}(t) = u.\exp(t.\alpha)$. On prend la section constante $\beta : M \to M \times \mathcal{G}$ définie par $\beta(x) = (x,\alpha)$, alors l'automorphisme d'algébroïde de Lie $\Phi_t^{\beta} : M \times \mathcal{G} \to M \times \mathcal{G}$ engendré est (voir exemple 8.2.4)

$$\Phi_t^{\beta}(x,\xi) = (x.\exp(t.\alpha), Ad(\exp(t.\alpha)).\xi).$$

Ainsi

$$H_F(\alpha)(x,\xi) = (\exp(\alpha).x, Ad(\exp\alpha).\xi).$$

9.3. **Holonomie réduite.** La A-holonomie définie dans la section précédante n'est pas invariante par homotopie. En effet, l'exemple précédant montre que même si un A-lacet est homotope au A-lacet constant, sa A-holonomie n'est pas nécessairement triviale. On introduit la notion d'holonomie réduite qui est invariante par homotopie par la proposition suivante:

Proposition 9.3.1. *(Holonomie réduite)*

Soit F une feuille du feuilletage caractéristique, $x_0 \in F$ et $H_F : \Omega_A(F,x_0) \to \mathfrak{Aut}(A_{T_{x_0}})$ sa A-holonomie. Si α_1, α_2 sont deux A-lacet de F basés en x_0 dont les bases γ_1, γ_2 sont homotpoes, alors $H_F(\alpha_1)$ et $H_F(\alpha_2)$ forment la même classe dans $\mathfrak{Out}(A_{T_{x_0}})$.

Preuve:

On reprend les notations de la proposition 9.2.1.Il suffit de montrer que si γ est homotope au lacet constant alors $H_F(\alpha)$ est un automorphisme intérieur de $A_{T_{x_0}}$. Soit $\gamma_i : I \to F$ une famille de lacets en x_0 telle que $\gamma_0(t) = x_0$ et $\gamma_1 = \gamma$. On lui associe une famille de A-lacets α_i.

La construction de $H_F(\alpha_i)$ dans la preuve de la proposition 9.2.1 s'est faite en intégrant une famille d'automorphismes intérieurs $\Phi_t^{\Sigma_s^i}$, il suffit de choisir les $\sigma_s^i : F \to A_{|F}$ telle que $\sigma_0^i = id$. On obtiendra une famille $\Phi_t^{\Sigma_s}$ telle que $\Phi_0^{\Sigma_s} = id$ et $\Phi_1^{\Sigma_s} = H_F(\alpha)$.♠

On se donne un lacet γ basé en x_0 dans la feuille F. On note encore par $H_F(\gamma) \in \mathfrak{Out}(A_{T_{x_0}})$ la classe d'équivalence de $H_F(\alpha)$ où α est un A-lacet de F quelconque, basés en x_0 et de courbe base γ. Le morphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc} H_F : & \Omega(F,x_0) & \to & \mathfrak{Out}(A_{T_{x_0}}) \\ & \gamma & \mapsto & H_F(\gamma) \end{array}$$

se prolonge naturellement pour les lacets continues et est invariant par classe d'homotopie. La définition suivante est naturelle:

Définition 9.3.1. *(Holonomie réduite)*

On appelle holonomie réduite de la feuille F en x_0 le morphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc} H_F: & \pi_1(F,x_0) & \rightarrow & \mathfrak{Out}(A_{T_{x_0}}) \\ & \gamma & \mapsto & H_F(\gamma) \end{array}$$

où $\pi_1(F,x_0)$ est le groupe fondamental de F basé en x_0.

9.4. **Stabilité.** On se donne une algébroïde de Lie $(A,\pi,M,\#)$.

On introduit quelques définitions et on montre la généralisation du théorème de stabilité de Reeb pour les feuilletages singuliers induits par une algébroïde de Lie.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M. Un sous ensemble de M est dit saturé s'il est réunion de feuilles. Une feuille F est dite stable si elle possède un voisinage saturé.

Pour le feuilletage caractéristique d'une algébroïde de Lie, un sous ensemble de la base est saturé si et seulement si sa préimage est invariante par les automorphismes intérieurs. De manière équivalente, si et seulement s'il est invariant par leurs projections sur la base (ce qu'on appellera indifféremment stable par les automorphimes intérieurs). Ainsi une feuille est stable si elle admet un voisinage invariant par les automorphismes intérieurs.

Définition 9.4.1. *Une feuille F du feuilletage caractéristique est dite transversalement stable si pour toute sous variété tranverse S le sous ensemble $F\cap S$ est stable pour l'algébroïde de Lie transverse A_S.*

Théorème 9.4.1. *(Stabilité)*

Soit F une feuille du feuilletage caractéristique d'une algébroïde de Lie. On suppose que F est compacte, transveralement stable à holonomie réduite finie. Alors F est stable.

Preuve:

On commenece la preuve dans le cas où F a une holonomie réduite triviale. On construit un voisinage $V\subset\nu(F)$ stable.

On se fixe un point $x_0\in F$, soit $h:\nu(F)\times_F A_{|F}\rightarrow T\nu(F)$ une A-connexion comme dans la construction de l'holonomie. On peut choisir un voisinage U de x_0 dans T_{x_0} tel que le relèvement horizontal de tout A-lacet $\alpha(t)$ de base x_0 est un difféomorphisme $\sigma_\alpha: U\rightarrow U$. La feuille F est transversalement stable, donc quitte à réduire U on peut supposer que c'est un voisinage de x_0 dans T_{x_0} stable par les automorphismes intérieurs de $A_{T_{x_0}}$.

Maintenant, pour tout $x\in F$ soit α un A-chemin de x_0 vers x. On note $\sigma_\alpha: U\rightarrow T_x$ le relèvement horizontal induit. Si β est un A-chemin de x_0 vers x dont la base est homotope à celle de α, par la proposition précédante, leurs holonomies réduites forment la même classe dans les automorphismes extérieurs de $A_{T_{x_0}}$, comme l'holonomie réduite est nulle, elles sont égles, ainsi $\sigma_\alpha(U)=\sigma_\beta(U)$. Par ce qui précéde, on déduit que $\sigma_\alpha(U)$ est aussi stable par les automorphismes intérieurs de A_{T_x}.

Soit $V = \bigcup_{\alpha \in A-\text{lacet}} \sigma_\alpha(U)$, c'est un voisinage ouvert de F. Montrons qu'il est stable:

soit $p \in V$, il existe un A-chemin α de base γ tel que $p \in \sigma_\alpha(U)$, i.e. $p = \tilde{\gamma}(1)$ où $\tilde{\gamma}$ est le relèvement horizontal de α tel que $\tilde{\gamma}(0) = y \in U$.

Soit $\mathfrak{Inn}(A)$, ϕ le difféomorphisme induit sur la base, montrons que $\phi(p) \in V$:

$$\phi(p) \in V \Leftrightarrow (\phi \circ \sigma_\alpha)(y) \in V.$$

Il suffit de voir que $\phi \circ \sigma_\alpha = \sigma_{\Phi.\alpha}$, en effet si $\tilde{\gamma}_0$ est le relèvement horizontal de α et $\tilde{\gamma}_1$ celui de $\Phi.\alpha$, alors on a

$$\tilde{\gamma}_0^{'} = h(\gamma, \alpha) \text{ et } \tilde{\gamma}_1^{'} = h(\gamma, \Phi.\alpha)$$

i.e

$$\phi_* \tilde{\gamma}_0^{'} = \phi_* h(\gamma, \alpha) \text{ et } \tilde{\gamma}_1^{'} = h(\gamma, \Phi.\alpha)$$

or comme $\# \circ \Phi = \phi_* \circ \#$, on a le résultat.

Maintenant si l'holonomie réduite est finie, soit $q : F' \to F$ un revêtement de F tel que

$$q_* \pi_1(F') = \ker H_F \subset \pi_1(F).$$

On fait le pull-back de $\nu(F)$ et de l'algébroïde de Lie A par q, on obtient $\nu(F')$ et de l'algébroïde de Lie $\tilde{A}$ et le morphisme d'algébroïdes de Lie $\Phi : A \to \tilde{A}$ au dessus du morphise de fibrés $\nu(F') \to \nu(F)$. Or, l'holonomie réduite de F' est nulle. Comme un revêtement est un difféomorphisme local et en utilisant ce qui précéde on a le resultat.♠

9.5. **Applications.** La notion d'algebroide de Lie a été introduite pour la première fois (de manière modèrne) par Pradines dans ([36], [37], [38]) dans son étude des groupoïdes de Lie du point de vue des catégories. Ces derniers sont les succéseurs directs des groupes de Lie et des fibrés principaux (Voir l'introduction de [17]).

Les algébroïdes de Lie sont très utile en mécanique, car c'est un modèle géométrique "unificateur" (voir [11]). Les systèmes lagrangiens peuvent s'exprimer dans ce cadre (voir [12], [15], [20] et [30]).

Soit (A, π, M, ρ) une algébroïde de Lie et $L : E \to \mathbb{R}$ un lagrangien régulier. On peut exprimer dans ce cadre les équations d'Euler-Lagrange (généralisés) indépendament des coordonnées. Quand on regarde ça dans les exemples classiques, ça donne:

1/ Algèbres de Lie: on retrouve les équations d'Euler-Poincaré

2/Fibré tangent: les équations d'Euler-Lagrange classiques

3/Feuilletages: on retrouve le formalisme de la mécanique holonome;

4/Algébroïdes d'Atiyah: on retrouve les équations de Lagrange-Poincaré

5/Action infinitésimale d'une algébroïde de Lie: on a les équations d'Euler-Poisson-Poincaré.

Par une aproche analogue, on obtient des équations de Hamilton généralisés, qui donne dans les exemples classiques:

1/ Algèbres de Lie: on retrouve les équations de Lie-Poisson;

2/Fibré tangent: les équations de Hamilton classiques;

3/Feuilletages: on retrouve le formalisme de la mécanique holonome hamiltonienne;

4/Algébroïdes d'Atiyah: on retrouve les équations de Hamilton-Poincaré;

5/Action infinitésimale d'une algébroïde de Lie: on a les équations de Lie-Poisson sur un produit semi-direct.

Ceci est bien dévelopé dans [29] et [30].

Exemple 9.5.1. *Un solide généralisé:*

Un corps solide selon Arnold (voir [40]*) est un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et une métrique riemanienne g invariante à gauche. L'équation des géodésiques est une équation différentielle d'ordre 2. Elle se réduit à une équation différentielle sur l'algèbre de Lie*

$$\dot{x} + \nabla_x x = 0$$

Qui est une équation différentielle homogène d'ordre 1. C'est l'équation d'Euler des fluides incompréssibles. Ce sont les symmétries du groupe et de la métrique qui ont réduit cette équation. Un lagrangien est la forme quadratique induite par la métrique.

En passant sur le dual, on adopte un point de vue hamiltonien. Si l'on note par $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ l'isomorphisme induit par la métrique, cette équation devient

$$\dot{\xi} + ad^*_{\Phi^{-1}\xi}\xi = 0$$

sur le cotangent $\mathcal{G}^*$ Les solutions sont sur les orbites de la représentation coadjointe, ou encore sur les feuilles symplectiques de la structure de Poisson naturelle.

On a vu que les algébroïdes de Lie offrent un cadre agréable pour faire de la mécanique lagrangienne ou hamiltonienne, et qu'une large panoplie de problèmes peuvent y être décrits. La résolution de ces problèmes exige, parfois une formulation variationelle, c'est ici que les A-connexions jouent un rôle fondamental.

On voit dans [29] qu'un (Mechanical system control) sur une algébroïde de Lie est la solution d'une équation différentielle du second ordre; laquelle est exprimé avec une A-connexion. La théorie du controle optimal étant une généralisation de la mécanique classique, les problèmes variationnels peuvent être exprimés dans le cadre des algébroïdes de Lie. Le principe du maximum de Pontryagin peut y être formulé, et les courbes admissibles sur lesquelles on formule notre problème de minimisation sont des A-chemins.

Il y a aussi l'aspect cohomologique des algébroïdes de Lie, on a vu que la A-différentielle vérifie

$$d_A \circ d_A = 0$$

ceci permet de définir la cohomologie d'une algébroïde de Lie. La donnée d'une A-connexion permet de définir les classes charactéristiques. Il y a des applications purement géométriques dans l'étude de ces classes, par exemple dans [3], on a pu associer à certaines classes de G-structures une algébroïde de Lie classifiante. Et là encore, les A-connexions jouent un rôle important.

Il y a aussi des prémices de liens avec la géométrie non-commutative voir [35].

Ce ne sont que des germes d'applications très récentes. La série d'articles de [11] à [40] est une sorte de brouillion d'un large programme lancé par Alan Weinstein en 1987 dans [13] pour développer le formalisme de Felix Klein dans le cadre des groupoïdes et des algébroïdes de Lie. Et ceci se met en place.

References

[1] Charles Michel Marle, *Differential calculus on a Lie algebroid and Poisson manifolds*, The J. A. Pereira da Silva Birthday Schrift, Textos de matematica 32, Departamento de matematica da Universidade de Coimbra, Portugal, pages 83-149, (2002)

[2] Rui Loja Fernandes, *Lie algebroid, holonomy and characteristic classes*, Adv. in Math. 170.n°1, 119-179, (2002)

[3] Rui Loja Fernandes, Ivan Struchiner, *LIE ALGEBROIDS AND CLASSIFICATION PROBLEMS IN GEOMETRY,* http://www.arxiv.org/abs/0712.3198v2, (2008)

[4] Mohamed Boucetta, *Introduction à la géométrie de Poisson*, Sixième école de géométrie et systèmes dynamiques, Tipaza (2007)

[5] Jean-Paul Dufour, Nguyen Tien Zung, *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Birkhäuser Verlag, Pogress in mathematics, volume 242, (2005)

[6] Guillemin- Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall.(1974)

[7] Dale Husemoller, *Fiber Bundles*, third edition, Springer-Verlag.(1994)

[8] I.Moerdijk- J.Mrčun, *Introduction to foliations and Lie groupoids.* Cambridge University Press.(2003)

[9] Ivan Kolář- Peter W.Michor- Jan Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry.* Springer-Verlag.(1993)

[10] Camille Laurent-Gengoux, Mathieu Stienon, Ping Xu; *Holomorphic Poisson Manifolds and Holomorphic Lie Algebroids,* (2008)

[11] Alan Weinstein. *Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry A Tour through Some Examples*, NOTICES OF THE AMS VOLUME 43, NUMBER 7, (1996).

[12] A. Weinstein: *Lagrangian Mechanics and groupoids*, Fields Inst. Comm. 7 (1996), 207-231.

[13] A. Weinstein, *Symplectic groupoids and Poisson manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 16 (1987),101–104.

[14] Cannas da Silva A., Weinstein A., *Geometric models for noncommutative algebras*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[15] P. Libermann: *Lie algebroids and Mechanics*, Arch. Math. (Brno) 32 (1996), 147-162.

[16] K. Mackenzie: *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, Cambridge University Press, 1987.

[17] K.Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Cambridge University Press, 2005.

[18] K. Mackenzie, P. Xu: *Lie bialgebroids and Poisson groupoids*, Duke Math. J. 73 (1994), 415-452.

[19] A. Coste, P. Dazord, A. Weinstein: *Groupoïdes symplectiques*, Pub. Dep. Math. Lyon, 2/A (1987), 1-62.

[20] E. Martinez: *Lagrangian Mechanics on Lie algebroids*, Acta Appl. Math., 67 (2001),295-320.

[21] E. Martinez, *Variational calculus on Lie algebroids*, arXiv:math-ph/0603028v2 29 Nov 2006

[22] E. Martinez, *Lie Algebroids in Classical Mechanics and Optimal Control*. arXiv:math-ph/0703062v1 20 Mar 2007

[23] E. Martinez, *Lagrangian mechanics on Lie algebroids*, Acta Appl. Math. 67 (2001), 295–320.

[24] E. Martinez, *Geometric formulation of mechanics on Lie algebroids*, Publicaciones de la RSME 2 (2001), 209–222.

[25] E. Martinez, *Reduction in optimal control theory*, Rep. Math. Phys. 53 (2004) 79–90.

[26] E. Martinez, *Classical field theory on Lie algebroids: variational aspects*, J. Phys. A: Mat. Gen. 38 (2005), 7145–7160, math.DG/0410551.

[27] E. Martinez, *Classical field theory on Lie algebroids: multisymplectic formalism*, math.DG/0411352.

[28] E. Martinez, Mestdag T., Sarlet W., *Lie algebroid structures and Lagrangian systems on affine bundles*, J. Geom. Phys. 44 (2002), 70–95, math.DG/0203178.

[29] Cortés J., de Léon M., Marrero J.C., Martin de Diego D., Martinez E., *A survey of Lagrangian mechanics and control on Lie algebroids and groupoids*, Int. J. Geom. Meth. Math. Phys. 3 (2006), 509–558,

[30] Léon M, Marrero JC and Martinez E, *Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie algebroids*, J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005), R241–R308.

[31] J.F. Carinena, E. Martinez: *Lie algebroid generalization of geometric mechanics*, Banach Center Publ. 54, Warsaw, (2001), 201-215.

[32] J. Cortés, E. Martinez: *Mechanical control systems on Lie algebroids*, Preprint math.OC/0402437, to appear in IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2004.

[33] J.Grabowski, M. Jozwikowski. *Pontryagin maximum principle- a generalisation.* arXiv:0905.2767v1 [math.OC] 17 May 2009.

[34] Crainic M., Fernandes R.L., *Integrability of Lie brackets*, Ann. of Math. (2) 157 (2003), 575–620,

[35] Serge Lazzarini, Thierry Masson. *Generalization of connections on Lie algebroids and derivation-based non-commutative geometry.* Preprint, 2010. http://www.arxiv.org/abs/1003.6106v1

[36] J. Pradines, *Théorie de Lie pour les groupoides différentiables.* C. R. Acad. Sci. Paris, Série A 263 (1966), 907–910.

[37] J. Pradines, *Calcul différenetiel dans la catégorie des groupoides infinitésimaux*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A 264 (1967), 245–248.

[38] J.Pradines, *Troisième théorème de Lie sur les groupoïdes différentiables*, C.R. Acad. Sci. Paris, 267 (1968), 21 - 23.

[39] J. Pradines, *GROUPOÏDES DE LIE ET FEUILLETAGES*. arXiv:0711.2462v1 [math.GT] 15 Nov 2007

[40] V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York 1989.

E-mail address: `nassimsiad@gmail.com`