



UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
(ALGER)

## THESE PRESENTEE POUR

L'obtention du diplôme de : **MAGISTER**  
En : **MATHEMATIQUES**  
Spécialité : **RECHERCHE OPERATIONNELLE**  
(Mathématiques de Gestion )

**Par : SAFIA ZENIA**

## SUR UNE METHODE DE COLORATION DE GRAPHS PARFAITS

Soutenue publiquement le : 08/04/2003, devant le jury suivant :

M<sup>f</sup> A.BERRACHEDI, Maître de Conférences, USTHB. Président.

M<sup>f</sup> H. AIT HADDADENE, Maître de Conférences, USTHB. Directeur de Thèse.

M<sup>elle</sup> I.BOUCHEMAKH, Maître de Conférences, USTHB. Examinatrice.

M<sup>me</sup> M.AHMANE, Chargée de Cours, USTHB. Examinatrice.

M<sup>f</sup> M.E.A.CHERGUI, Chargé de Cours, USTHB. Examineur.

## TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION</b>	4
<b>CHAPITRE 1 : PRESENTATION GENERALE</b>	8
1.1. : Généralités sur les concepts de base de la théorie des graphes.	9
1.1.1. : Introduction.	9
1.1.2. : Principales définitions.	9
1.1.3. : Chaînes et Connexité.	11
1.1.4. : Paramètres structurels.	12
1.1.5. : Coloration des sommets d'un graphe.	12
1.1.6. : Notions d'algorithme et de Complexité algorithmique.	13
1.2. : Graphes parfaits.	15
1.2.1. : Introduction.	15
1.2.2. : Développements relatifs à la validité de la conjecture forte des graphes parfaits.	17
1.2.3. : Aspect algorithmique des graphes parfaits.	20
1.2.4. : Les classes de graphes vérifiant la conjecture forte des graphes parfaits.	21
1.3. : La coloration optimale des graphes parfaits.	26
1.3.1. : Introduction.	26
1.3.2. : Quelques algorithmes de coloration des graphes parfaits.	27
<b>CHAPITRE 2 : QUELQUES CLASSES DE GRAPHES PARFAITS</b>	32
2.1. : Introduction.	33
2.3. : Les graphes de Tucker.	33
2.4. : Les graphes Dégénérés.	39
2.5. : Les graphes Faiblement Sans Diamant.	42
2.6. : Les graphes Quasi – Localement Quasi – Adjoint.	44

<b>CHAPITRE 3 : CARACTERISATION PARTIELLE DES SOMMETS DE TUCKER</b>	46
3.1. : Introduction.	47
3.2. : Définition d'un sommet de Tucker	47
3.3. : Quelques classes de graphes admettant des sommets de Tucker	48
3.4. : Caractérisation partielle des sommets de Tucker	51
<b>CHAPITRE 4 : LES GRAPHES QUASI - LOCALEMENT <math>P^*(\omega)</math></b>	54
4.1. : Introduction.	55
4.2. : La coloration d'un graphe de Berge Quasi – Localement $P^*(\omega)$	57
4.3. : Algorithme polynomial de coloration des graphes de Berge Quasi – Localement $P^*(\omega)$	58
4.4. : Validité de la conjecture forte des graphes parfaits pour les graphes Quasi – Localement $P^*(\omega)$ .	60
4.5. : Reconnaissances des graphes Quasi – Localement $P^*(\omega)$ .	61
4.6. : Détermination de la taille maximale d'une clique dans un graphe de Berge Quasi – Localement $P^*(\omega)$ .	64
<b>CONCLUSION</b>	66
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	69

**INTRODUCTION**

## INTRODUCTION

On regroupe généralement sous le titre de théorie des graphes, des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être visualisés : des points représentant des individus, des objets, des situations.....sont joints par des flèches ou des lignes symbolisant les relations existant entre eux.

Jusqu'au milieu du vingtième siècle, la théorie des graphes s'est développée en liaison avec des problèmes de physique et de chimie, ce n'est qu'après 1945 qu'on vit apparaître des applications dans le domaine de la gestion, classées avec beaucoup d'autres, sous le titre général de problèmes de recherche opérationnelle.

Une des classes les plus importantes et très étudiée en théorie des graphes est la classe des graphes parfaits.

Leur introduction remonte au début des années soixante par C. Berge [ 9 ] qui a introduit ce concept en s'intéressant aux travaux de C. Shannon [ 70 ] relatifs à la théorie de l'information. Un graphe  $G$  est dit parfait si pour tout sous graphe induit  $H$  de  $G$ , le nombre chromatique  $\gamma(H)$  est égal à la cardinalité de sa clique maximum  $\omega(H)$ .

Claude Berge a introduit deux conjectures : la conjecture forte des graphes parfaits et la conjecture faible des graphes parfaits, cette dernière a été démontrée par L. Lovasz [ 50 ] en 1972, depuis, elle est connue sous le nom du théorème des graphes parfaits.

Pour la conjecture forte des graphes parfaits, sa résolution, a motivé les intéressés à suivre deux directions : la première consiste à déterminer des classes particulières, de plus en plus grandes, de graphes vérifiant la conjecture et la deuxième direction consiste à étudier la structure des graphes imparfaits critiques (un graphe imparfait minimal).

Un graphe imparfait critique est un graphe qui n'est pas parfait mais tout sous graphe induit propre est parfait.

Beaucoup de travaux ont été réalisés dans les deux directions voir [ 10 ], [ 20 ], [ 59 ], [ 75 ],...

Récemment, Mai 2002, l'équipe de Seymour [ 17 ] dans une séquence remarquable de résultats a proposé une preuve de la validité de la conjecture forte des graphes parfaits, en se basant sur une propriété structurelle des graphes de Berge .

En novembre 2002, une version préliminaire d'un papier de 148 pages a été proposée par Seymour et son équipe. Notons que dans ce papier, le théorème structurel proposé est : « Tout graphe de Berge est un graphe de Base , ou admet une partition oblique équilibrée (a balanced skew partition), ou  $G$  ou son complémentaire admet un 2 – joint [ 25 ], ou  $G$  admet un  $M$  – joint ».

Nous annonçons avec regret la mort de Claude Berge, le 30/06/2002 .

Pour les problèmes d'optimisation associés aux graphes parfaits, M.Grötschel, L.Lovasz et A. Shrijver [ 40 ], ont montré l'existence d'algorithmes polynomiaux dans les cas: du problème de la clique maximum, du problème du stable maximum, du problème de la coloration optimale et du problème de partition en un nombre minimum de cliques, ainsi que dans leurs versions pondérées. Les algorithmes proposés bien qu'ils soient polynomiaux, sont d'une complexité très élevée et difficile à mettre en œuvre. Cet handicap est à l'origine de la recherche d'algorithmes plus efficaces d'un point de vue pratique.

Pour certaines classes de graphes parfaits, des algorithmes combinatoires opérant en temps polynomiaux ont été élaborés pour le problème de la coloration optimale.

Ces résultats ont été obtenus en utilisant la nouvelle méthode d'échange de couleurs, introduite par  $M^r$  Hacène Ait Haddadène en collaboration avec  $M^r$  Frédéric Maffray [ 1,4 ], nommée méthode d'échange Trichromatique.

Cette thèse est développée en 4 chapitres :

Le chapitre 1, est consacré aux concepts de base de la théorie des graphes, aux notions et aux définitions utilisées dans cette thèse. Comme, nous présentons aussi les graphes parfaits, nous donnons un aperçu sur la conjecture forte des graphes parfaits et son développement. Ainsi que quelques méthodes de coloration de graphes parfaits, en particulier celle d'échange Trichromatique, que nous allons utiliser dans cette thèse.

Le chapitre 2, est consacré à un rappel de certaines classes de graphes parfaits comme les graphes de Tucker et d'autres qui utilisent la nouvelle méthode de coloration « échange Trichromatique » pour la résolution du problème de la coloration optimale, parmi ces classes on cite : les graphes Dégénérés [ 1,4 ], les graphes Faiblement Sans Diamant [ 2,4 ] et les graphes de Berge Quasi – Localement Quasi – Adjoints [ 42 ].

## INTRODUCTION

---

Dans le chapitre 3, nous avons introduit une nouvelle caractérisation partielle des sommets de Tucker. A ce titre, nous proposons une nouvelle propriété des sommets de Tucker, concernant l'existence de ces sommets dans un graphe parfait.

Dans le chapitre 4, nous utilisons la méthode de coloration par échange Trichromatique pour la coloration optimale d'une nouvelle classe de graphes, appelée Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  qu'on symbolise par  $QLP^*(\omega)$ , classe introduite comme conséquence de la nouvelle propriété des sommets de Tucker.

Nous donnerons d'abord quelques définitions, ensuite un théorème de coloration. Comme conséquence, nous présentons une preuve d'aspect algorithmique de la validité de la conjecture forte des graphes parfaits pour cette classe.

Nous déduisons ensuite un algorithme combinatoire opérant en temps polynomial pour la coloration optimale de cette classe.

Enfin, nous proposons un algorithme polynomial pour la reconnaissance de cette classe de graphes, ainsi qu'un algorithme combinatoire de la clique maximum d'un graphe de Berge Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ .

**CHAPITRE 1**  
**PRESENTATION GENERALE**

## SECTION 1.1

### GENERALITES SUR LES CONCEPTS DE BASE DE LA THEORIE DES GRAPHES

#### 1.1.1 Introduction

La théorie des graphes est devenue une des branches les plus florissantes de l'algèbre moderne, celle à laquelle on fait appel dans la plupart des problèmes mathématiques de nature combinatoire, ou même dans les problèmes d'algèbre les plus classiques.

A partir de 1946, la théorie des graphes a connu un grand développement sous l'impulsion de nombreux spécialistes de la recherche opérationnelle motivés par des problèmes concrets.

#### 1.1.2 Principales définitions

Ce paragraphe est consacré à la définition des concepts de base utilisés dans ce travail. Le lecteur pourra se référer à [ 7, 8 ] pour les notions non explicitées.

Un graphe  $G$  est une structure constituée d'un ensemble fini, non vide  $V(G)$  d'éléments appelés sommets et d'un ensemble fini  $E(G)$  de paires de sommets appelés arêtes ou arcs.

Les sommets d'un graphe sont représentés dans le plan par des points (ou petits cercles) et les arêtes  $\{u, v\}$  sont représentées par une ligne joignant le point représentant le sommet  $u$  à celui représentant le sommet  $v$ .

Cette définition est connue sous l'appellation graphe simple (sans boucle et arête multiple). Si  $n = |V(G)|$  est le nombre de sommets, on dit que le graphe  $G$  est d'ordre  $n$ .

Pour une arête  $\{u, v\}$  quelconque notée  $uv$ , on a :

- ❖ Les deux sommets  $u$  et  $v$  sont dits adjacents, et ils sont incidents à l'arête  $uv$ ;
- ❖ Les sommets  $u$  et  $v$  sont appelés les extrémités de cette arête;
- ❖ Le sommet  $u$  est le voisin du sommet  $v$ .

Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune. L'ensemble des sommets adjacents à un sommet  $v$  de  $G$  est dit voisinage ou ensemble des voisins de  $v$ , il est noté  $N(v)$  :  $N(v) = \{u \in V / uv \in E\}$ .

# CHAPITRE 1 PRESENTATION GENERALE

---

Le degré du sommet  $v$ , noté  $d_G(v)$  ou  $d(v)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté est le nombre d'arêtes ayant  $v$  comme extrémité.

Un graphe  $G$  est dit complet si, toute paire de sommets est reliée par une arête.

Etant donné  $A \subseteq V(G)$ , le sous graphe engendré par  $A$  est le graphe  $G_A$  dont les sommets sont les éléments de  $A$  et les arêtes sont les arêtes de  $G$  ayant leurs extrémités dans  $A$ .

On appelle graphe complémentaire de  $G$ , un graphe ayant le même ensemble de sommets que  $G$  et comme ensemble d'arêtes l'ensemble  $\bar{E}$  tel que :  $uv \in \bar{E} \Leftrightarrow uv \notin E$ .

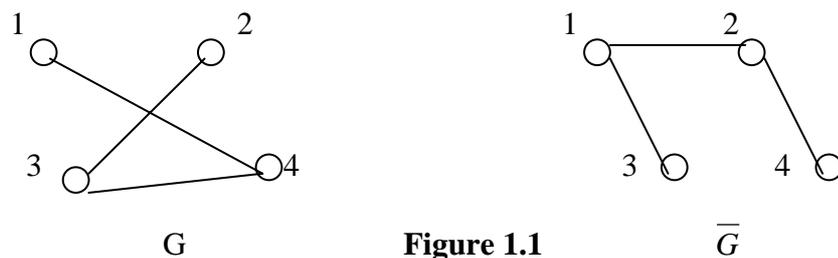


Figure 1.1

La figure 1.1 représente un graphe  $G$  et son complémentaire.

On appelle graphe adjoint d'un graphe  $G$  (ou line graph), noté  $L(G)$ , le graphe dont les sommets représentent les arêtes de  $G$  et tel que deux sommets sont adjacents si et seulement si les deux arêtes qu'ils représentent ont une extrémité commune dans  $G$ .

Un graphe  $G = (V, E)$ , simple peut être représenté par sa matrice d'adjacence  $A = [a_{ij}]$  d'ordre  $n \times n$ , définie par :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est adjacent à } v_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il peut également être représenté par sa matrice d'incidence  $B[b_{ij}]$  d'ordre  $n \times m$ ; définie par :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_j \text{ est incident à } v_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme il peut être représenté par sa matrice sommets cliques maximales  $c \times n$ , ou  $c$  est le nombre de telles cliques de  $G$  :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_j \in c_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## 1.1.3 Chaînes et Connexité

Dans un graphe  $G$ , une chaîne élémentaire  $C$  de longueur  $p$  est une séquence  $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p\}$  de sommets distincts, telle que pour  $i = 0, 1, \dots, p-1$ ,  $v_i$  est adjacent à  $v_{i+1}$ .

Un cycle dans un graphe est une chaîne simple dont les extrémités sont confondues.

Il est dit élémentaire s'il est minimal, c'est à dire ne contenant strictement aucun autre cycle.

Une corde dans un cycle (respectivement une chaîne) est une arête reliant deux sommets non consécutifs du cycle (respectivement une chaîne).

Un cycle sans corde de longueur  $p$  est désigné par  $C_p$ .

Un trou est un cycle élémentaire de longueur  $\geq 4$  sans corde, le complémentaire d'un trou est appelé anti - trou.

Un graphe est dit connexe si pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les reliant. Une composante connexe de  $G$  est un sous graphe induit connexe maximal de  $G$ .

Dans un graphe connexe  $G = (V, E)$ , un ensemble  $A \subseteq V$  est dit ensemble d'articulation si  $G[V \setminus A]$  est non connexe.

Si  $A$  est un ensemble d'articulation de  $G$ , et  $G_1, G_2, \dots, G_p$  sont les composantes connexes de  $G[V \setminus A]$ , alors les sous graphes  $G_i \cup G[A]$  définissent des graphes connexes appelés pièces de  $G$  relatives à  $A$ .

Un cas particulier  $A$  réduit à un sommet, alors  $A$  est dit point (ou sommet) d'articulation de  $G$ .

Etant donné un graphe  $F$ ,  $G$  est dit sans  $F$  ou  $F$  - libre, si  $G$  ne contient pas  $F$  comme sous - graphe induit.

## 1.1.4 Paramètres structurels

Une clique dans un graphe  $G$  est un sous-ensemble  $K$  de sommets de  $G$  qui engendre un graphe complet.

Un stable ou un ensemble indépendant d'un graphe  $G$  est un ensemble  $S$  de sommets deux à deux non adjacents.

Un ensemble qui est une clique dans  $G$  est un stable dans son complémentaire  $\overline{G}$  et inversement.

Pour un graphe  $G = (V, E)$ , nous désignons par :

- $\alpha(G)$ , le nombre de stabilité de  $G$ , c'est à dire la taille maximale d'un stable de  $G$  ;
- $\gamma(G)$ , le nombre chromatique de  $G$ , c'est aussi le nombre minimum d'ensembles stables qui partitionnent les sommets de  $G$
- $\omega(G)$ , la taille maximale d'une clique de  $G$  ;
- $\theta(G)$ , la taille minimale d'une partition de  $V$  en cliques.

Dans un graphe  $G$ , étant donné que deux sommets quelconques d'une clique (respectivement d'un stable) doivent se trouver dans des parties différentes de toute partition en stables (respectivement en cliques) de  $V$ , alors

$$\omega(G) \leq \gamma(G) \quad \text{et} \quad \alpha(G) \leq \theta(G).$$

Pour tout graphe  $G$ , on a :  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$  (où  $\overline{G}$  le graphe complémentaire de  $G$ ).

## 1.1.5 Coloration des sommets d'un graphe

Une  $k$ -coloration des sommets d'un graphe  $G$  est une application :

$$c : V \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\} \text{ telle que } \forall u, v \in V(G), uv \in E(G) \Rightarrow c(u) \neq c(v).$$

$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}, c^{-1}(\{i\})$  est un stable, appelé classe de couleur  $i$ .

Donc, une coloration d'un graphe  $G$  peut être vue comme une partition de ses sommets en ensembles stables.

Ainsi, on définit le nombre chromatique d'un graphe  $G$ , comme étant le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer  $G$ .

## 1.1.6 Notions d'Algorithme et de Complexité algorithmique

Un algorithme de résolution d'un problème (P) donné, est une procédure décomposable en opérations élémentaires (la comparaison, l'affectation, les opérations arithmétiques, etc...), transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple du problème (P) en une chaîne de caractères représentant ses résultats.

L'étude des performances d'un algorithme conduit à définir la complexité de celui-ci, qui constitue un paramètre important pour évaluer l'efficacité de l'algorithme.

Un algorithme est dit efficace, si le nombre des opérations nécessaires pour résoudre le problème est borné par une fonction polynomiale d'un paramètre caractérisant la taille du problème.

Un algorithme est dit polynomial, si le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un exemple de taille n est une fonction polynomiale en n.

Un algorithme est considéré comme efficace si et seulement s'il est polynomial. Lorsqu'on rencontre un problème combinatoire, on aimerait bien savoir s'il existe un algorithme polynomial (bon, efficace) pour le résoudre. Comme on ne peut répondre d'une façon certaine, la complexité algorithmique classera les problèmes en sous-classes [ 35 ] [ 67 ]:

### **La classe P :**

Un problème est dit appartenir à la classe P, s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre.

### **Problème de reconnaissance :**

Un problème de reconnaissance est un problème dont les résultats ne peuvent prendre que l'une des deux valeurs VRAI ou FAUX.

### **La classe NP :**

Un problème est dit appartenir à la classe NP, s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe (c'est-à-dire, un algorithme qui comporte des instructions de choix).

Pour la plupart des problèmes de la classe NP, on ne sait pas dire s'ils peuvent ou ne peuvent pas être résolus par un algorithme polynomial, cette classe contient donc des problèmes qui sont plus difficiles que ceux de la classe P.

### La classe NP - Complet :

La classe NP- Complet, est une large classe de problèmes qui sont équivalents du point de vue de l'existence d'un algorithme polynomial pour les résoudre dans le sens suivant : si un seul de ces problèmes peut être résolu par un algorithme polynomial, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP.

Pour décrire cette classe d'équivalence de problèmes, il faut définir ce qu'est une réduction polynomiale.

Soient  $(P_1)$  et  $(P_2)$  deux problèmes de reconnaissance. On dit  $(P_1)$  se réduit en temps polynomial à  $(P_2)$  s'il existe un algorithme pour  $(P_1)$  qui fait appel (comme à un sous programme) à un algorithme de résolution de  $(P_2)$  et si cet algorithme de résolution de  $(P_1)$  est polynomial lorsque la résolution de  $(P_2)$  est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de reconnaissance est dit NP- complet, si tout problème de la classe NP peut se réduire polynomialement à lui.

- Parmi les problèmes de la classe P, on peut citer le problème du plus court chemin, du flot maximum, du couplage et la programmation linéaire.
- Parmi les problèmes de la classe NP – complet, citons le problème du voyageur de commerce, du sac à dos, du stable, de programmation linéaire en nombres entiers.

## SECTION 1.2

### GRAPHES PARFAITS

#### 1.2.1 Introduction

Les graphes parfaits constituent une des classes les plus importantes en théorie des graphes, introduites par Claude Berge au début des années soixante.

L'intérêt de Claude Berge pour cette classe de graphes est issu des travaux de C. Shannon [ 70], en théorie de l'information sur les codages optimaux et la capacité d'un canal de communication.

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principaux résultats concernant les graphes parfaits.

##### Définition 1.2.1.1

Un graphe  $G$  est dit parfait si, pour tout sous - graphe induit  $H$  de  $G$ , le nombre chromatique  $\gamma(H)$  de  $H$  est égal à la taille  $\omega(H)$  de la plus grande clique de  $H$ .

##### Définition 1.2.1.2

Un graphe  $G$  est dit  $\gamma$  - parfait s'il vérifie  $\omega(G) = \gamma(G)$ .

##### Définition 1.2.1.3

Un graphe  $G$  est dit  $\alpha$  - parfait s'il vérifie  $\alpha(G) = \theta(G)$ .

En 1960, C. Berge [ 9 ] a énoncé les deux conjectures connues respectivement comme étant la conjecture faible des graphes parfaits et la conjecture forte des graphes parfaits :

#### Conjecture faible des graphes parfaits :

« Un graphe est  $\alpha$  - parfait si et seulement s'il est  $\gamma$ - parfait ».

## Conjecture forte des graphes parfaits

« Un graphe  $G$  est  $\alpha$  - parfait si et seulement si ni lui ni son complémentaire ne contient de trou ».

La validité de la conjecture forte des graphes parfaits implique celle de la conjecture faible. Cette dernière, a été démontrée en 1972 par Lovasz [ 50, 51 ], depuis, elle est connue comme étant le théorème des graphes parfaits suivant :

## Théorème des graphes parfaits [ 50 ]

Pour un graphe  $G$  les assertions suivantes sont équivalentes :

- i. Pour tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  :  $\omega(H) = \gamma(H)$ .
- ii. Pour tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  :  $\alpha(H) = \theta(H)$ .
- iii. Pour tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  :  $|V(H)| \leq \alpha(H) \times \omega(H)$ .

Ainsi, étant identique, les notions de graphe  $\gamma$ - parfait et  $\alpha$  - parfait sont remplacées par la notion de graphe parfait, et le théorème des graphes parfaits s'écrit comme suit :

«  $G$  parfait  $\Leftrightarrow \forall H$ , sous graphe induit de  $G$  :  $|V(H)| \leq \alpha(H) \times \omega(H)$  ».

Et depuis la conjecture forte est appelée conjecture des graphes parfaits ou conjecture de Berge.

## Corollaire 1.2.1

Un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait

## Définition 1.2.1.4

Un graphe  $G$  est dit graphe de Berge s'il ne contient ni de trou impair, ni d'anti - trou impair.

## Remarque 1.2.1.1

Comme tout graphe parfait est un graphe de Berge, la conjecture forte des graphes parfaits devient : « tout graphe de Berge est parfait ».

### 1.2.2 Développements relatifs à la validité de la conjecture forte des graphes parfaits

Pendant plus de quarante ans, de nombreux travaux de recherche dans le domaine des graphes parfaits ont été réalisés où de nombreux résultats ont été obtenus.

Les méthodes utilisées pour résoudre la conjecture forte des graphes parfaits ont généralement suivi deux directions :

- ◆ La première direction, consiste à vérifier la conjecture des graphes parfaits (C.F.G.P) pour certaines classes de graphes.

Ces classes sont de deux types : celles excluant implicitement les trous impairs et les anti – trous impairs, et celles les excluant explicitement.

- ◆ La seconde direction, s'intéresse à l'étude de la structure des graphes imparfaits critiques.

On note que la conjecture des graphes parfaits est équivalente à la conjecture suivante :

«Un graphe  $G$  est imparfait minimal si et seulement s'il est un trou impair ou le complémentaire d'un trou impair ».

De nombreuses propriétés des graphes imparfaits critiques ont été trouvées.

Récemment, Maria Chudnovsky et Paul Seymour en collaboration avec Neil Robertson et R.Thomas [ 17 ], dans une séquence de résultats remarquables, ont proposés une preuve de la conjecture forte des graphes parfaits.

Une version préliminaire d'un papier de 148 pages (révisé le 28 octobre 2002 ) a été proposée par Seymour et son équipe, pour la validité de la conjecture forte des graphes parfaits.

Avant de donner le théorème, nous proposons les définitions utilisées :

## Définition 1.2.2.1

Une chaîne élémentaire dans  $G$  est un sous graphe induit de  $G$  non vide, connexe et dont les sommets sont de degrés  $\leq 2$ .

Une anti – chaîne dans  $G$  est un sous graphe induit de  $G$  dont le complémentaire est une chaîne.

Si  $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{p-1}x_p$  est une  $P$  chaîne, alors les sommets  $x_i$  pour  $i = 2, 3, \dots, p-1$ , sont dit intérieurs de  $P$ , de même pour une anti – chaîne.

## Définition 1.2.2.2

Soient  $A, B$  deux sous - ensembles disjoints de  $V(G)$ .

On dit que la paire  $(A, B)$  est équilibrée, s'il n'existe pas de chaîne impaire entre des sommets non adjacents dans  $B$  avec intérieur de la chaîne dans  $A$ , et il n'existe pas d'anti – chaîne impaire entre des sommets adjacents dans  $A$  avec intérieur de la chaîne dans  $B$ .

## Définition 1.2.2.3

Si  $A \subseteq V(G)$ , on note le sous – graphe de  $G$  engendré par  $A$ ,  $G|A$  ou  $G_A$ .

## Définition 1.2.2.4

Un ensemble  $A \subseteq V(G)$  est dit connexe si le sous graphe  $G_A$  est connexe, et anti – connexe si  $\overline{G}_A$  est connexe.

## Définition 1.2.2.5 (V.Chvatal [ 20 ])

Une partition oblique dans  $G$  est une partition  $(A, B)$  de  $V(G)$  tel que :  $A$  n'est pas connexe et  $B$  est non anti – connexe.

## Définition 1.2.2.6 (Cornuéjols et Cunningham en 1985 [ 25 ])

Un 2 – Joint dans un graphe  $G$ , est une partition en deux sous - ensembles  $(V_1, V_2)$  de l'ensemble  $V(G)$ , chacun de taille au moins trois tels que il existe des sous – ensembles non vides  $A_1, B_1 \subseteq V_1$  et  $A_2, B_2 \subseteq V_2$ , qui vérifient :

- Tout sommet de  $A_1$  est adjacent à tout sommet de  $A_2$ , de même tout sommet de  $B_1$  est adjacent à tout sommet de  $B_2$ ;
- Pour  $V_1 \cup A_1 \cup B_1$  et  $V_2 \cup A_2 \cup B_2$ , il n'y a pas d'arêtes que celles entre  $A_1$  et  $B_1$  et celles entre  $A_2$  et  $B_2$ , c'est les seules arêtes entre  $V_1$  et  $V_2$ ;
- Pour  $i = 1, 2$ , toute composante de  $G \setminus V_i$  intersectée  $B_i$  et  $A_i$ , et
- Pour  $i = 1, 2$ , si  $|A_i| = |B_i| = 1$  et  $G \setminus V_i$  est un chemin reliant les parties de  $B_i$  et  $A_i$ , alors il est de longueur  $\geq 3$ .

Ce concept a été introduit par Cornuéjols et Cunningham en 1985 [ 25 ].

### Définition 1.2.2.7

Si  $A, B \subseteq V(G)$ , sont disjoints : on dit que  $A$  est complet à  $B$  (ou la paire  $(A, B)$  est complète) si tout sommet de  $A$  est adjacent à tout sommet de  $B$ .

On dit que  $A$  est anti – complet à  $B$ , s'il n'existe pas d'arêtes entre  $A$  et  $B$ .

### Définition 1.2.2.8 (V.Chvatal et N. Sbihi [ 21 ])

Un  $M$  – joint dans  $G$  est une partition de  $V(G)$  en six sous - ensembles non vides,  $(A, B, C, D, E, F)$  tel que:

- Tout sommet dans  $A$ , a un voisin dans  $B$  et un non voisin dans  $B$ , et vice versa;
- Les paires  $(C, A), (A, F), (F, B), (B, D)$  sont complètes;
- Les paires  $(D, A), (A, E), (E, B), (B, C)$  sont anti complètes;

### Définition 1.2.2.9

Soient  $m, n \geq 2$  des entiers, et soient  $\{a_1, \dots, a_m\}, \{b_1, \dots, b_m\}, \{c_1, \dots, c_n\}, \{d_1, \dots, d_n\}$  des ensembles disjoints.

On définit un graphe  $G$ , tel que l'ensemble de ses sommets, est l'union des sous - ensembles précédents, et les arêtes définies comme suit :

- $a_i$  est adjacent à  $b_i$  pour  $1 \leq i \leq m$ , et  $c_j$  est non adjacent à  $d_j$  pour  $1 \leq j \leq n$ ;

- Il n'existe pas d'arêtes  $\{a_i, b_i\}$  et  $\{a_l, b_l\}$  pour  $1 \leq i < l \leq m$ ; et tout quatre arêtes entre  $\{c_j, d_j\}$  et  $\{c_h, d_h\}$  pour  $1 \leq j < h \leq n$ .

Il existe exactement deux arêtes entre  $\{a_i, b_i\}$  et  $\{c_j, d_j\}$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ , et ces deux arêtes sont disjointes.

Un tel graphe est dit Bicographe.

On note que si  $G$  est Bicographe, alors son complémentaire l'est aussi.

### Définition 1.2.2.10

Les cinq classes de graphes parfaits dites de Base sont :

1. Les graphes Bipartis ;
2. Graphe complémentaire d'un graphe Biparti ;
3. Graphe adjoint d'un graphe Biparti ;
4. Graphe complémentaire d'un graphe adjoint d'un graphe Biparti ;
5. Les Bicographes.

Seymour et son équipe, ont présenté leur preuve dans un atelier de travail qui c'est déroulé du 30 octobre au 3 novembre 2002 à l'institut Américain de Mathématiques situé à Palo Alto, Californie.

Leur théorème structurel, affirme que : « Tout graphe de Berge est un graphe de Base, ou  $G$  ou son complémentaire admet un 2 – joint, ou  $G$  admet un  $M$  – joint, ou  $G$  admet une partition oblique équilibrée ( a balanced skew partition ) ».

### 1.2.3 Aspect algorithmique des graphes parfaits

L'aspect algorithmique des graphes parfaits est l'une des propriétés intéressantes associées à cette classe de graphes.

Les problèmes combinatoires associés à cette classe de graphes sont : problème de reconnaissance et problèmes d'optimisation combinatoire.

- Pour le problème de reconnaissance, des algorithmes polynomiaux ont été développés pour reconnaître certaines classes, bien que pour d'autres il demeure non résolu.

On cite quelques classes de graphes parfaits qu'on sait reconnaître en temps polynomial :

Les graphes triangulés [ 65 ], les graphes bipartis, les graphes de Parité [ 24 ], les graphes parfaits planaire [ 47], les graphes parfaits sans patte [ 60 ], les graphes parfaits sans  $K_4-e$  [ 31 ] et les graphes parfaits sans Dart [ 23 ].

- Pour le problème d'optimisation combinatoire, on peut citer les quatre problèmes classiques d'optimisation combinatoire : détermination de la clique maximum, stable maximum, la coloration minimale et la partition minimum par cliques.

Ces problèmes sont NP – complet, mais grâce à M. Grotshel, L.Lovasz et A.Schrijver [ 40 ], ces problèmes peuvent être résolus pour les graphes parfaits, par des algorithmes polynomiaux. Les algorithmes proposés sont basés sur la méthode des ellipsoïdes[ 40 ].

## 1.2.4 Les Classes de graphes vérifiant la conjecture forte des graphes parfaits

Les classes de graphes qui ont été étudiées sont classées en deux classes :

- **Les classes dont la propriété d'être de Berge est implicite** (classes excluant implicitement les trous et les anti – trous impairs ).

- ◆ **Les graphes adjoints d'un bipartis [ 49 ]**

D.Konig [ 49 ], a montré que les graphes adjoints de bipartis sont parfaits.

- ◆ **Les graphes Triangulés**

Un graphe est triangulé si tout cycle, de longueur  $\geq 4$ , a au moins une corde. Les graphes triangulés sont parfaits (Hajnal et Suranyi )[ 41 ].

La notion de graphe triangulé a été introduite par Hajnal et J. Suranyi en 1958 [41] avant même que C. Berge n'eut défini le concept de graphe parfait.

Ils ont montré que le nombre de stabilité d'un graphe triangulé est égal à la taille minimale d'une partition en cliques.

## ◆ Les graphes de Parité

Un graphe  $G$  est dit de parité si pour toute paire de sommets  $u, v$  de  $G$ , toutes les chaînes minimales reliant  $u$  et  $v$  sont de même parité.

Les graphes de parité ont été caractérisés par M.Burlet et J.P.Uhry [ 15 ].

Un graphe  $G$  est de parité si et seulement si tout cycle impair, de longueur supérieure ou égale à 5, possède au moins deux cordes croisées.

H.Sachs [66] a montré que tout graphe de parité est parfait.

## ◆ Les graphes sans $P_4$

Un graphe est dit sans  $P_4$  s'il ne contient pas de  $P_4$  comme sous graphe induit.

D. Seinsche, 1974 [69] a montré que les graphes sans  $P_4$  sont parfaits.

## ◆ Les graphes de Meyniel

Un graphe  $G$  est dit de Meyniel si tout cycle de longueur  $\geq 5$  possède deux cordes. M.Burlet et J.Fonlupt [ 16 ] ont élaboré un algorithme polynomial de reconnaissance de cette classe de graphes parfaits introduite par H. Meyniel.

L'utilisation de la technique de l'échange Bichromatique, a conduit à la perfection de cette classe de graphes [ 57 ].

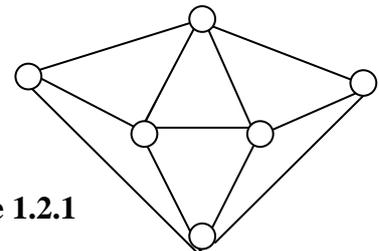


Figure 1.2.1

## ◆ Les graphes Faiblement Triangulés

Un graphe est dit faiblement triangulé s'il ne contient pas de trou ni d'anti-trou de longueur supérieure ou égale à cinq.

Introduite par R.B. Hayward [ 44 ], cette classe de graphes généralise celle des graphes triangulés. R.B. Hayward a prouvé la perfection de cette classe.

## ◆ Les graphes Fortement Parfaits

Un graphe est fortement parfait si et seulement si tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$  contient un ensemble stable qui intersecté toutes les cliques maximales de  $H$ .

C. Berge et P. Duchet [ 12 ] ont montré que tout graphe fortement parfait est parfait.

## ◆ Les graphes préparfaits

Cette classe a été introduite par P.L.Hammer et F.Maffray [43]

Dans un graphe  $G$ , un sommet  $x$  prédomine un autre sommet  $y$  si, dans  $G$  ou bien dans  $\bar{G}$ , toute clique maximum contenant  $y$  contient aussi  $x$ .

Un graphe est dit préparfait si tout sous – graphe induit possède une paire de sommets dont l'un prédomine l'autre

P.L.Hammer et F.Maffray, 1993 [43] ont montré que tout graphe préparfait est parfait.

□ **Les classes dont la propriété d'être de Berge est explicite** (classes excluant explicitement les trous et les anti – trous impairs).

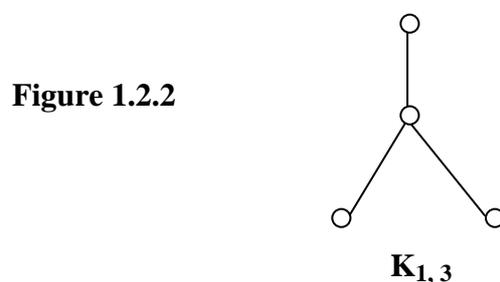
## ◆ Les graphes de Berge Planaires :

Un graphe  $G$  est dit Planaire s'il est possible de le représenter dans un plan de sorte que les sommets soient des points distincts, les arêtes des courbes simples, et que deux arêtes ne se croisent pas.

En 1973,A.Tucker [ 72 ]a montré que tout graphe planaire sans trou impair est parfait.

## ◆ Les graphes sans griffe [62]

Une griffe ou  $K_{1,3}$  est le graphe représenté par la figure suivante :



Un graphe sans griffe est un graphe qui n'admet pas de  $K_{1,3}$  comme sous – graphe induit.

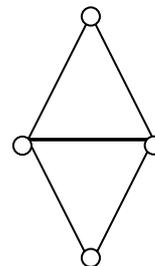
K.R. Parthasarathy, G. Ravindra 1976 [62]ont montré que tout graphe de Berge sans griffe est parfait.

♦ **Les graphes Sans  $K_4$  [ 75, 76 ]**

Un graphe  $G$  est dit sans  $K_4$  s'il ne contient pas  $K_4$  comme sous – graphe induit.

Tout graphe de Berge sans  $K_4$  est parfait.

**Figure 1.2.3**



Les graphes de Berge sans  $K_4$  seront appelés les graphes de Tucker.

♦ **Les Graphes Sans Diamant (ou  $K_4-e$ ) ( A. Tucker 1987 [ 78])**

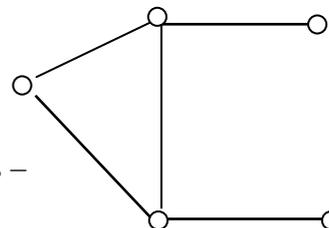
Un graphe sans diamant est un graphe ne contenant pas de sous graphe isomorphe à  $K_4 - e$ .

A. Tucker 1987 [73] a montré que tout graphe de Berge sans  $K_4 - e$  est parfait.

♦ **Les graphes de Berge sans taureau (ou sans bull) (N. Sbihi, V. Chvatal, 1987 [ 21])**

Un taureau (ou bull) est le graphe engendré par les sommets  $\{a, b, c, d, e\}$  et les arêtes  $\{ab, ac, bc, bd, ce\}$  :

**Figure 1.2.4**

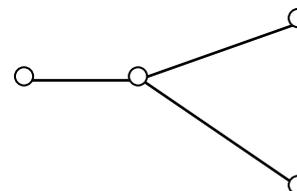


Un graphe est dit sans taureau s'il n'admet pas de sous – graphe isomorphe à un taureau.

♦ **Les graphes sans patte ( ou sans paw) ( S. Olariu 1988 [ 60] )**

Une patte (ou paw) est le graphe suivant (Figure 1.2.5 )

Tout graphe de Berge sans patte est parfait.



♦ **Les graphes voisinage scindé (F. Maffray, M. Preissmann 1995 [54])**

Un graphe  $G$  est dit scindé si l'ensemble des sommets de  $G$  admet une partition en deux sous – ensembles  $S$  et  $K$  où  $S$  est un stable de  $G$  et  $K$  une clique de  $G$ .

Un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est dit scindé si l'ensemble de ses voisins dans  $G$  induit un graphe scindé.

Un graphe est dit voisinage scindé si pour tout sous graphe induit  $H$  contient un sommet scindé.

F. Maffray, M. Preissmann 1995 [54] ont montré que tout graphe de Berge voisinage scindé est parfait.

### ◆ Les graphes jolis (F. Maffray, O. Porto et M. Preissmann 1996 [53])

Un graphe est dit joli si tout sous graphe induit  $H$  contient un sommet  $v$  tel que le sous - graphe induit par ses voisins ne contient pas de  $P_4$  ni de  $2K_2$  (à savoir deux arêtes parallèles)

F. Maffray, O. Porto et M. Preissmann 1996 [53], ont montré que tout graphe de Berge joli est parfait.

### ◆ Les Graphes Faiblement Sans Diamant [ 2, 4 ]

1 – Un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est dit faiblement sans diamant si  $G[N(v)]$  est sans diamant et  $d_G(v) \leq 2(\omega(G)) - 1$ .

2 – Un graphe  $G$  est dit faiblement sans diamant si tout sous - graphe induit  $H$  de  $G$ , contient un sommet faiblement sans diamant.

H . Aît Haddadène et S . Gravier [ 2, 4 ] ont montré la perfection des graphes de Berge faiblement sans diamant est parfait.

### ◆ Les Graphes Faiblement Sans Diamant\* [ 39]

On définit  $P$ , une propriété d'un sommet  $v$ , telles que : Le sous – graphe induit par les voisins de  $v$ , n'admet pas de sous – graphe isomorphe à un diamant ( $K_4-e$ ), et le nombre de voisins de  $v$  qui appartiennent à un triangle ne dépasse pas  $3\omega - 5$  si  $\omega \leq 6$  et  $3\omega - 6$  sinon.

Un sommet  $v$  dans un graphe  $G$ , est dit Faiblement Sans Diamant\*(FSD\*), si  $v$  satisfait la propriété  $P$ .

Un graphe  $G$  est dit Faiblement Sans Diamant\*, si tout sous – graphe induit  $H$  de  $G$ , contient un sommet  $v$  Faiblement Sans Diamant\*.

S . Gravier [ 39] a montré que tout graphe de Berge faiblement sans diamant\* est parfait.

## SECTION 1.3

### LA COLORATION OPTIMALE DES GRAPHES PARFAITS

#### 1.3.1 Introduction

Une  $k$  – coloration des sommets de  $G$  est une application  $c : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  telle que pour toute arête  $xy$  de  $G$  on a :  $c(x) \neq c(y)$ .

Si  $c(v)=i$ , on dit que le sommet  $v$  à la couleur  $i$ .

Les ensembles non vides  $c^{-1}(\{i\})$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) sont les classes de couleurs de la coloration  $c$ .

Un des plus importants problèmes en théorie des graphes est la recherche du nombre de couleurs minimal utilisées pour la coloration optimale d'un graphe, donc une coloration optimale est une coloration utilisant un nombre minimum de couleurs.

Ainsi si un graphe  $G$  admet une  $k$  – coloration on dira que  $G$  est un graphe  $k$  – coloriable, et depuis on appelle problème de coloration d'un graphe  $G$   $k$  – coloriable, le problème qui consiste à colorier les sommets de  $G$  en  $k$  – couleur (en d'autres termes le problème qui consiste à chercher une partition des sommets de  $G$  en  $k$  – stables ).

Le nombre chromatique d'un graphe  $G$ , noté  $\gamma(G)$ , est défini comme étant le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer  $G$ .

Une  $\gamma(G)$  – coloration d'un graphe  $G$ , est appelée alors coloration optimale ou minimale de  $G$ .

Des algorithmes polynomiaux ont été élaborés pour le problème de la coloration optimale pour certaines classes de graphes parfaits.

## 1.3.2 Quelques algorithmes de coloration des graphes parfaits

D'abord nous allons citer les définitions suivantes, concernant l'ordre d'élimination des sommets d'un graphe  $G$  donné :

### Un bon ordre d'élimination[1]

Un bon ordre d'élimination des sommets d'un graphe  $G$  d'ordre  $n$  est une numérotation de ses sommets telle que :

$G_1 = G$  et  $G_n$  est réduit à un sommet.

### Un ordre d'élimination standard [1]

Une séquence standard d'un graphe  $G$  : est tout ordre  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des sommets de  $G$  tel que le sommet  $v_i$  est de degré minimum dans le sous graphe  $G_i$  induit par les sommets  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ .

### Un ordre d'élimination P [1]

Un ordre d'élimination  $P$  d'un graphe  $G$  ; est un ordre  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des sommets de  $G$  tel que le sommet  $v_i$  vérifie la propriété  $P$  dans le sous graphe  $G_i$  induit par les sommets  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ .

Dans ce qui suit, on va citer quelques algorithmes de coloration, ces algorithmes sont de type séquentiel :

❖ L'un des plus simples algorithmes pour colorer un graphe  $G = (V, E)$  est le suivant :

D'abord on donne un bon ordre d'élimination des sommets de  $G$ .

Ensuite pour tout  $i = 1, \dots, n - 1$ , on a :

étant donné une  $\gamma(G_{i-1})$ - coloration du sous – graphe  $G_{i+1}$  de  $G$ , engendré par les sommets  $v_j$  ayant un numéro supérieur ou égal à  $i$  ( $j \geq i$ ), alors il est possible d'étendre cette coloration en temps polynomial en une  $\gamma(G_i)$ - coloration de  $G_i$ .

l'algorithme séquentiel de coloration qu'on vient de décrire est le suivant :

## **Algorithme séquentiel de coloration [4]**

Entrée : un ordre  $v_1 < \dots < v_n$  des sommets du graphe G.

Sortie : une coloration C des sommets de G.

Première étape :

Donner la couleur 1 au sommet  $v_1$  .

L'étape essentielle : pour  $i = 2$  à  $n$ , si une couleur déjà utilisée n'apparaît pas dans aucun voisin  $v_j$  de  $v_i$  avec  $j < i$ , alors donnons à  $v_i$  n'importe quelle couleur de l'ensemble des couleurs déjà utilisées. Sinon attribuons à  $v_i$  la couleur  $1 + \text{Max } C_i$  .

## **❖ Coloration séquentielle avec l'échange Bichromatique [ 4 ]**

Soit G un graphe, et C une coloration de G qui n'est pas optimale pour modifier cette coloration, on suit les étapes suivantes :

Considérons deux classes de couleurs S et T de C.

Le sous graphe  $G[S \cup T]$  est biparti et il peut être composé de plusieurs composantes connexes.

Si, ce sous graphe a plusieurs composantes connexes, alors par l'échange des couleurs à travers une composante, nous obtenons une coloration qui n'est pas la même avec l'initiale et qui peut être meilleure que la précédente.

On appelle cet échange «échange Bichromatique ».

### **Définition 1.3.2.2**

Soit G un graphe, v sommet de G et C une coloration de G – v.

On dit que deux couleurs S, T de C sont indifférentes par rapport à v si aucune composante connexe de  $G_{S,T}$  (avec  $G_{S,T}$  est le sous – graphe induit par les sommets de couleurs S et T) ne contient un voisin de v dans S et un voisin de v dans T.

Ce qui veut dire que le sous graphe induit par  $S \cup T \cup \{v\}$  est biparti (sans triangle).

## Algorithme séquentiel avec l'échange Bichromatique

Entrée : un ordre  $v_1 < \dots < v_n$  des sommets du graphe  $G$ .

Sortie : une coloration  $C$  des sommets de  $G$ .

Première étape : Donner la couleur 1 au sommet  $v_1$ .

L'étape essentielle : pour  $i = 2$  à  $n$ , si une couleur déjà utilisée n'apparaît pas dans aucun voisin  $v_j$  de  $v_i$  avec  $j < i$ , alors donnons à  $v_i$  cette couleur.

Sinon, s'il existe deux couleurs  $S$  et  $T$  qui sont indifférentes par rapport à  $v_i$ , alors effectuons un échange bichromatique  $S - T$  dans les composantes de  $G_{S,T}$  qui contiennent des voisins de  $v_i$  coloriés en  $S$  et donnons la couleur  $S$  à  $v_i$ .

Sinon on donne une nouvelle couleur à  $v_i$ .

## ❖ Coloration par Contraction

### Définition 1.3.2.3

Pour deux sommets  $u, v$  d'un graphe  $G$ , on note par  $G/\{u,v\}$  le graphe obtenu par la contraction des deux sommets  $u$  et  $v$  par un nouveau sommet  $\{uv\}$  adjacent précisément aux sommets de  $G - u - v$  qui sont adjacents à au moins un des deux  $u, v$  dans  $G$ .

On dit que  $G/\{u,v\}$  est obtenu par contraction de la paire de sommets  $\{u, v\}$ .

### Définition 1.3.2.4

Un graphe  $G$  est contractile s'il existe une séquence  $G_0, G_1, \dots, G_k$  de graphes tels que :

$G_0 := G$  ;  $G_k$  est une clique, et pour  $i \leq k-1$ ,  $G_{i+1}$  est obtenu à partir de  $G_i$  par contraction d'une paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $G_i$ .

### Remarque 1.3.2.1

Plusieurs familles classiques de graphes parfaits sont parfaitement contractiles, on cite particulièrement les graphes faiblement triangulés, les graphes de Meyniel et les graphes parfaitement ordonnés.

## Remarque 1.3.2.2

Soit  $G$ , un graphe,  $u$  et  $v$  deux sommets de  $G$  non adjacents, alors toute coloration de  $G \setminus uv$  est une coloration de  $G$ .

En attribue, simplement à  $u$  et à  $v$  la couleur du sommet  $uv$  contracté dans  $G \setminus uv$ , pour les autres sommets on garde les même couleurs.

Les heuristiques de coloration de graphe basées par la contraction de deux sommets non adjacents, sont généralement proposées par Dutton et Brigham [ 30 ] et par Hertz [ 45,46 ].

Dutton et Brigham, choisissaient à chaque étape une paire de sommets  $u, v$  non adjacent, tel que le nombre de voisins communs est le plus large possible dans  $G$ .

Par contre Hertz, fixe un sommet  $u$ , et tant que  $u$  n'a pas de voisin on choisit un sommet non adjacent  $y$  de  $u$ , qui a le maximum de voisins avec  $u$ .

Les sommets  $u, v$  sont alors contractés, cette procédure continue jusqu'à l'obtention d'une clique  $K$ . Ainsi on obtient une  $|K|$ -coloration de  $G$ , on travaille en sens inverse au long de la séquence de contraction.

L'une des applications de la méthode de coloration par contraction est celle présentée par A.Tucker [ 79 ] pour la coloration des graphes parfaits sans  $K_4$ .

## ❖ Coloration séquentielle avec l'échange Trichromatique

Cette méthode est une nouvelle technique de coloration des sommets d'un graphe de Berge.

Basée sur une idée de monsieur Hacène Ait Haddadène et développée en collaboration avec Monsieur Frédéric Maffray [1,2,3,4 ]. Elle généralise une technique déjà citée au paravent, c'est l'échange Bichromatique.

Soient  $G$  un graphe de Berge et  $v$  un sommet de  $G$ .

Supposons que  $G - v$  admet une coloration utilisant  $\omega(G) \geq 3$  couleurs avec les classes de couleurs  $S_1, \dots, S_{\omega(G)}$ , où les  $\omega(G) -$  couleurs sont présentes dans  $N(v)$ .

Supposons qu'il existe trois couleurs distinctes  $i, j, k$  tel que le sous graphe  $H$  induit par  $[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$  ne contient pas de  $K_4$ .

Ainsi,  $H$  est un graphe parfait sans  $K_4$ , donc on peut appliquer l'algorithme de A. Tucker [ 77 ] à  $H$  pour le colorer avec 3 couleurs, et en gardant les autres  $\omega(G) - 3$  couleurs, on obtient une  $\omega(G) -$  coloration de  $G$ .

### Définition 1.3.2.5

Si un sommet  $v$  a la propriété que pour toute coloration de  $G - v$ , il existe trois classes de couleurs dont l'union avec  $v$  engendre un sous graphe sans  $K_4$ , on appelle le sommet  $v$  sommet de Tucker.

Il est intéressant de trouver des classes de graphes admettant des sommet de Tucker. Cette technique a été utilisée pour résoudre le problème de la coloration optimale pour plusieurs classes de graphes de Berge, on cite quelques-unes :

- Graphes Dégénérés de Berge [ 1,4 ];
- Graphes de Berge Faiblement Sans Diamant [ 2 ,4 ];
- Graphes de Berge de MAG [ 3,4 ];
- Graphes Quasi Localement Sans Patte [ 52 ];
- Graphes Quasi Localement Adjoint [ 42 ];
- Graphes Quasi Localement Quasi Adjoint [ 42 ];

**CHAPITRE 2**

**QUELQUES CLASSES DE GRAPHE**

**PARFAITS**

## CHAPITRE 2

### QUELQUES CLASSES DE GRAPHES PARFAITS

#### 2.1. Introduction

Dans ce chapitre, on va citer quelques classes de graphes parfaits, pour lesquelles le problème de la coloration optimale est résolu avec l'échange Trichromatique ( méthode proposée par H. Ait Haddadène et F. Maffray [ 1 ]).

Nous nous intéressons dans le premier paragraphe aux graphes de Tucker.

#### 2.2 Les graphes de Tucker

La nouvelle méthode de coloration des graphes parfaits, introduite par H.Ait Haddadène et F. Maffray[ 1,3 ], utilise l'algorithme de coloration de Tucker comme sous procédure.

Il est bien utile de présenter les résultats de Tucker relatifs à la coloration des graphes de Tucker.

On commence d'abord par le premier résultat concernant la coloration des graphes parfaits sans diamant ( les graphes parfaits sans  $K_4 - e$  ).

##### 2.2.1 Les Graphes Parfaits Sans $K_4 - e$

Pour la reconnaissance des graphes parfaits sans  $K_4 - e$ , un algorithme polynomial a été élaboré par J.Fonlupt et A. Zemirline [ 31 ], en se basant sur les résultats suivants :

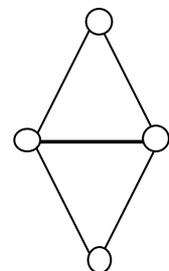


Figure 2.1  $K_4 - e$

### Définition 2.2.1.1

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , soient  $e = xy \in E$  et  $z \in V \setminus \{x, y\}$ . On dit que  $e$  est une  $z$ -arête si  $\{x, y, z\}$  induit un triangle dans  $G$ . On désigne par  $G_{0z}$  le sous-graphe induit par l'ensemble des sommets  $V \setminus \{z\}$  et l'ensemble d'arêtes  $E(G \setminus V - z) - \{z\text{-arêtes}\}$ .

### Théorème 2.2.1.1 Fonlupt et Zemirline [ 31 ]

Soit  $G = (V, E)$  un graphe parfait sans  $K_4$ -e. Alors, l'une au moins des propriétés suivantes est vérifiée :

- (i)  $G$  est biparti ou  $G$  est le graphe adjoint d'un graphe biparti ;
- (ii)  $G$  admet une clique d'articulation ;
- (iii)  $G$  admet un stable d'articulation de cardinalité deux ;
- (iv)  $G$  admet un sommet  $z$  tel que  $G_{0z}$  n'est pas connexe.

Tucker [ 76 ] a pu établir à l'aide de la preuve constructive de la validité de la conjecture des graphes parfaits pour cette classe, un algorithme polynomial en  $O(n^3)$  pour la coloration optimale de tout graphe parfait sans  $K_4$ -e,

### Théorème 2.2.1.2 A . Tucker [ 78 ]

Tout graphe sans trou et sans  $K_4$ -e est parfait.

### Algorithme de coloration des graphes parfaits sans $K_4$ -e

- (0) Soit  $G = (V, E)$  un graphe de Berge sans  $K_4$ -e, avec  $|V| = n$  et  $\omega(G) = \omega$ , défini par sa matrice d'adjacence sommet – sommet ;
- (1) Déterminer la matrice d'incidence clique maximale – sommet de  $G$  ;
- (2) Supprimer toutes les arêtes de  $G$  n'appartenant pas à un triangle ;
- (3) Déterminer un ordre d'élimination  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  des sommets de  $G$  tel que pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$v_i$  appartient à au plus deux cliques maximales dans le sous-graphe  $G_i$  de  $G$  induit par  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$  ;

(4) De manière itérative, trouver une  $\omega$  - coloration de  $G_i$  à partir d'une  $\omega$  - coloration de  $G_{i+1}$ , en effectuant un échange bichromatique ;

(5) Ajouter les arêtes n'appartenant pas à un triangle ;

(6) Trouver une  $\omega$  - coloration du graphe initial  $G$  à partir de la  $\omega$  - coloration de  $G_1$ , en effectuant une série d'échanges bichromatiques ;

### 2.2.2 Les Graphes Parfaits Sans $K_4$

Cette classe de graphes a été introduite par A. Tucker [ 73 ] en 1977.

Tucker a présenté une preuve constructive de la validité de la conjecture forte des graphes parfaits pour cette classe de graphes, qui lui a permis d'établir un algorithme en  $O(n^3)$  pour la coloration optimale de cette classe aussi.

On donne quelques définitions introduites par A. Tucker .

#### Définition 2.2.2.1

Soit  $G = (V, E)$  un graphe.

- Une  $K_3$  - chaîne joignant deux sommets distincts  $u$  et  $v$  dans  $G$ , est une séquence de triangles,  $T_1, T_2, \dots, T_p$  telle que  $u \in T_1, v \in T_p$  et pour  $i = 1, \dots, p - 1, T_i$  et  $T_{i+1}$  ont une arête en commun.

- Une  $K_3$  - composante de  $G$  est un sous - graphe induit maximal dans lequel toute paire de sommets est reliée par une  $K_3$  - chaîne.

- Une  $K_3$  - contraction est l'opération qui consiste à contracter une paire de triangles  $T_1$  et  $T_2$  formant un  $K_4 - e$  en un seul triangle, en contractant en un seul sommet les deux sommets non-adjacents du  $K_4 - e$  ( les arêtes reliant les sommets de  $T_1$  ou  $T_2$  aux autres sommets du graphe sont préservées).

- Une  $K_3$ - contraction itérative d'une  $K_3$ - composante est le processus itératif qui consiste à effectuer des  $K_3$ - contractions dans cette composante jusqu'à l'obtention d'un unique triangle.

### **Théorème 2.2.2.1 A.Tucker [ 79 ]**

Soient  $G$  un graphe de Berge et  $G_0$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant toutes les arêtes n'appartenant pas à un triangle ( les 2 – cliques maximales). Alors  $G_0$  est de Berge. De plus, à partir de toute  $k$ - coloration de  $G_0$ , on peut obtenir en temps linéaire une  $k$ - coloration de  $G$ .

### **Théorème 2.2.2.2 [ 79 ]**

Soient  $G$  un graphe et  $u$  un sommet dans  $G$  tel que  $N[u]$  est un ensemble d'articulation. Si les pièces  $G_1, G_2, \dots, G_p$  de  $G$ , relatives à  $N[u]$ , admettent une  $\omega(G)$  – coloration et si tout sous – graphe induit  $H$  de  $G$  avec  $\omega(H) = \omega(G) - 1$  admet une  $\omega(H)$  – coloration, alors  $G$  admet une  $\omega(G)$  – coloration.

### **Théorème 2.2.2.3. [ 79 ]**

Soit  $G$  un graphe de Berge avec  $\omega(G) = 3$ . Si  $H$  est une  $K_3$  - composante de  $G$ , alors  $H$  est 3 – colorable.

### **Théorème 2.2.2.4. [ 79 ]**

Soit  $G$  un graphe de Berge avec  $\omega(G) = 3$ , et soit  $G_0$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en effectuant une  $K_3$ - contraction itérative. Alors,  $\omega(G_0) = 3$ .

L'algorithme de Tucker de la 3 – coloration d'un graphe de Berge  $G$ , avec  $\omega(G) = 3$ , est basé sur une procédure de réduction qui consiste à contracter un tel graphe en un graphe de Berge sans  $K_4 - e$ ,  $G_0$ , dont on connaît un algorithme polynomial de coloration.

Etant donné que  $\omega(G_0) = 3$  (théorème 2.2.2.4), il est possible d'obtenir une 3 – coloration de  $G$  à partir d'une 3 - coloration de  $G_0$ , en inversant le processus de contraction.

La procédure de réduction est composée de deux étapes :

Une étape (A) qui consiste à effectuer une  $K_3$  - contraction itérative et une étape (B) qui consiste à éliminer les trous qui peuvent être créés par le processus de contraction dans l'étape (A).

Soit  $G$  un graphe de Berge connexe, tel que  $\omega(G) = 3$ .

Supposons que dans  $G$ , toute arête appartient à un triangle.

### Procédure de réduction

Répéter les deux étapes suivantes jusqu'à ce que le graphe de Berge  $G$ , avec  $\omega(G) = 3$ , soit réduit en une collection de graphes de Berge sans  $K_4 - e$  :

(A) Effectuer une  $K_3$  - contraction itérative sur une certaine  $K_3$  - composante  $H$  de  $G$ .

(B) Soit  $G_0$  le graphe réduit de  $G$  après l'étape (A), et soit  $T_H = \{ X_0, Y_0, Z_0 \}$  le triangle obtenu de la  $K_3$  - contraction itérative de  $H$ . Si pour un sommet de  $T_H$ , disons  $x_0$ ,  $G_0 - N[X_0]$  n'est pas connexe, alors remplacer  $G_0$  par ses pièces  $G_{01}, G_{02}, \dots, G_{0p}$  relatives à  $N[x_0]$ .

Si dans l'une de ces pièces, un certain  $G_0 - N[Y_0]$  (resp.  $G_{0i} - N[Z_0]$ ) n'est pas connexe, alors remplacer  $G_{0i}$  par ses pièces relatives à  $N[Y_0]$  (resp.  $N[Z_0]$ ).

### Algorithme de coloration des graphes parfaits sans $K_4$

Données : un graphe de Berge  $G$ , avec  $\omega(G) = 3$ , ne contenant pas de 2 – cliques maximales.

Résultat : Une coloration de  $G$ .

(1) Appliquer l'algorithme de coloration d'un graphe de Berge sans  $K_4 - e$  pour la 3 – coloration de la collection des graphes de Berge sans  $K_4 - e$  obtenus par la procédure de réduction.

(2) Répéter les deux étapes suivantes, en inversant les étapes (A) et (B) dans la procédure de réduction, jusqu'à l'obtention d'une 3-coloration du graphe initial  $G$  :

(2.1) Trouver une 3 – coloration du graphe  $G_0$  à partir de la 3-coloration de ses pièces.

(2.2) Inverser la  $K_3$ - contraction itérative dans la  $K_3$ - composante  $H$ , en affectant la même couleur aux sommets contractés en un sommet de  $T_H$ .

### **Théorème 2.2.2.5 (théorème de réduction) A.Tucker [ 79 ]**

- (i) Soit  $G$  un graphe de Berge avec  $\omega(G) = 3$ . A chaque itération de la procédure de réduction,  $G$  est contracté et décomposé en une collection de graphes de Berge  $G_i$  avec  $\omega(G_i) = 3$ . Lorsque la procédure est terminée, les graphes  $G_i$  sont sans  $K_4 - e$ .
- (ii)  $G$  admet une 3-coloration si et seulement si  $G_i$  admet une 3-coloration.

### **Algorithme de coloration des graphes de Tucker**

Entrées : matrice d'incidence clique- sommets d'un graphe parfait sans diamant

$$G=(V,E) \text{ avec } |V| = n, \omega(G) = \omega.$$

Sortie : Une  $\omega$ - coloration de  $G$ .

Complexité :  $O(\omega n^2)$

(1) Supprimer toutes les 2-cliques maximales de  $G$

(2) Déterminer un ordre  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des sommets de  $G$  tel que pour  $i=1, \dots, n$   $v_i$  appartient à au plus deux cliques maximales dans le sous – graphe  $G_i$  induit par les sommets  $\{ v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \}$  ;

(3) De manière itérative, trouver une  $\omega$ - coloration de  $G_{i+1}$ , en effectuant un échange bichromatique;

(4) Trouver une  $\omega$ - coloration du graphe initial  $G$  à partir de la  $\omega$ - coloration de  $G_i$ , en effectuant une série d'échanges bichromatiques ;

### 2.3 Les graphes de Berge Dégénérés

On s'intéresse dans cette partie, à une classe de graphe introduite par H. Ait Haddadène en collaboration avec F. Maffray en 1996[1,4].

Utilisant la nouvelle technique de coloration dite échange trichromatique, H. Ait Haddadène et F. Maffray en 1996, on pu vérifier la conjecture forte des graphes parfaits pour cette classe de graphe à partir d'un résultat positif concernant le problème de la coloration optimale pour cette classe de graphes.

#### **Définition 2.3.1 H. Ait Haddadène et F . Maffray [1,4]**

Un sommet  $v$  dans un graphe  $G$  est dit dégénéré si le degré du sommet  $v$  dans  $G$  est inférieur ou égal  $\omega(G)+1$ .

#### **Définition 2.3.2 H. Ait Haddadène et F . Maffray [1,4]**

Un graphe  $G$  est dit dégénéré, si tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  contient un sommet dégénéré.

Tout graphe de Berge dégénéré admet un ordre d'élimination dégénéré.

L'existence de l'ordre d'élimination dégénéré d'un graphe de Berge dégénéré n'implique pas la reconnaissance des graphes de Berge dégénérés. Ce problème reste ouvert jusqu'à aujourd'hui.

#### **Théorème 2.3.1 H. Ait Haddadène et F . Maffray [1,4]**

Tout graphe dégénéré de Berge est parfait.

#### **Théorème 2.3.2 H. Ait Haddadène et F . Maffray [1,4]**

Soit  $G$  un graphe de Berge dégénéré et  $v$  un sommet dégénéré. Alors, à partir de toute  $\omega(G) -$  coloration de  $G-v$ , on peut obtenir en temps polynomial une  $\omega(G) -$  coloration de  $G$ .

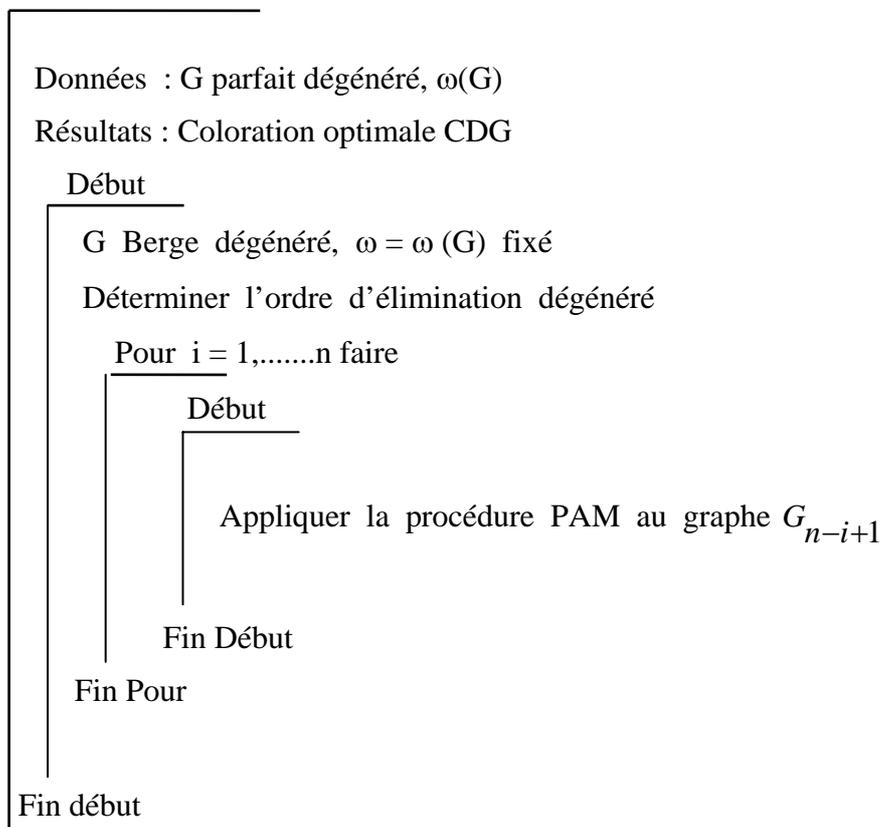
### Algorithme de coloration des graphes Dégénérés

Pour la description de l'algorithme de coloration des graphes de Berge dégénérés, on utilise l'ordre d'élimination dégénéré et la méthode du théorème 2.3.2.

Pour  $\omega$  fixé, si  $G$  est un graphe de berge dégénéré à  $n$  sommets et  $\omega(G) = \omega$ , alors il est possible de déterminer l'ordre d'élimination dégénéré en temps polynomial en examinant – les sous – graphes d'ordre au plus  $\omega$  et en cherchant le sommet  $v$  dégénéré.

Ensuite, on colorie le graphe  $G_n$ , et itérativement on détermine la coloration optimale du graphe  $G_{i-1}$  à partir de celle de  $G_i$ , en utilisant la méthode du théorème 2.3.2.

#### Algorithme. CDG



Fin Algorithme. CDG.

PAM: La procédure qui utilise l'algorithme de A.Tucker [ 79], permettant l'extension de la 3 – coloration de  $G_i$  à  $G_{i-1}$ .

CDG: La coloration optimale cherchée.

Pour le calcul de la taille de la clique maximum de ces graphes en temps polynomial, on propose l'algorithme suivant :

### Algorithme pour le calcul de la taille de la clique maximum d'un graphe dégénéré

#### Algorithme

Données :  $G = (V, E)$  Dégénéré;

Résultats :  $\omega(G)$ ;

Début

G Berge dégénéré,

Déterminer l'ordre d'élimination standard

Début

$\omega(G_n) = 1$

Pour  $i = 1, \dots, n-1$  faire

Appliquer la formule suivante

$$\omega(G_i) := \max \{ \omega(G_i [N(v_i)]) + 1, \omega(G_{i+1}) \},$$

Fin Pour

Fin début

Fin début

Fin algorithme

#### Théorème 2.3.3 Ait Haddadène and al [ 5 ]

Si  $G$  est un graphe Dégénéré, alors  $\omega(G)$  est calculable en  $O(n^3)$

#### Théorème 2.3.4 Ait Haddadène and al [ 5 ]

Tout graphe parfait Dégénéré est colorable par un algorithme en  $O(n^5)$ .

### 2.4 Les Graphes de Berge Faiblement Sans Diamant

Cette classe de graphes a été introduite par H. Ait Haddadène et S. Gravier [ 2,4 ].

Ils ont démontrés pour cette classe la conjecture forte des graphes parfaits. Ils ont proposés un algorithme combinatoire de coloration de ces graphes.

Cette classe contient d'importantes classes de graphes parfaits : Les graphes Triangulés, Les graphes Adjoints de Berge et les graphes de Berge Sans Diamant.

#### **Définition 2.4.1[ 2,4 ]**

Un sommet  $v$  dans un graphe  $G$ , est dit Faiblement Sans Diamant (ou FSD) si le degré du sommet  $v$  dans  $G$  est inférieur ou égal à  $2\omega(G) - 1$  et si le sous graphe induit  $G[N(v)]$  est sans diamant.

#### **Définition 2.4.1[ 2,4 ]**

Un graphe  $G$ , est dit Faiblement Sans Diamant (ou FSD) si tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  contient un sommet  $v$  Faiblement Sans Diamant.

La reconnaissance des graphes parfaits Faiblement Sans diamant demeure ouverte.

En utilisant la nouvelle méthode de coloration «échange Trichromatique », H. Ait Haddadène et S. Gravier [ 2 ] ont donnés une réponse positive pour le problème de la coloration de cette classe de graphes.

#### **Théorème 2.4.1 H. Ait Haddadène, S. Gravier [ 2, 4 ]**

Tout graphe de Berge Faiblement Sans Diamant est parfait.

#### **Théorème 2.4.2 H. Ait Haddadène S. Gravier [ 2,4 ]**

Soit  $G$  un graphe de Berge Faiblement sans Diamant et  $v$  un sommet Faiblement sans Diamant. Alors, à partir de toute  $\omega(G) - 1$  coloration de  $G - v$ , on peut obtenir en temps polynomial une  $\omega(G) - 1$  coloration de  $G$ .

### Algorithme de coloration des graphes de Berge Faiblement Sans Diamant

D'abord on doit déterminer l'ordre d'élimination Faiblement Sans Diamant :

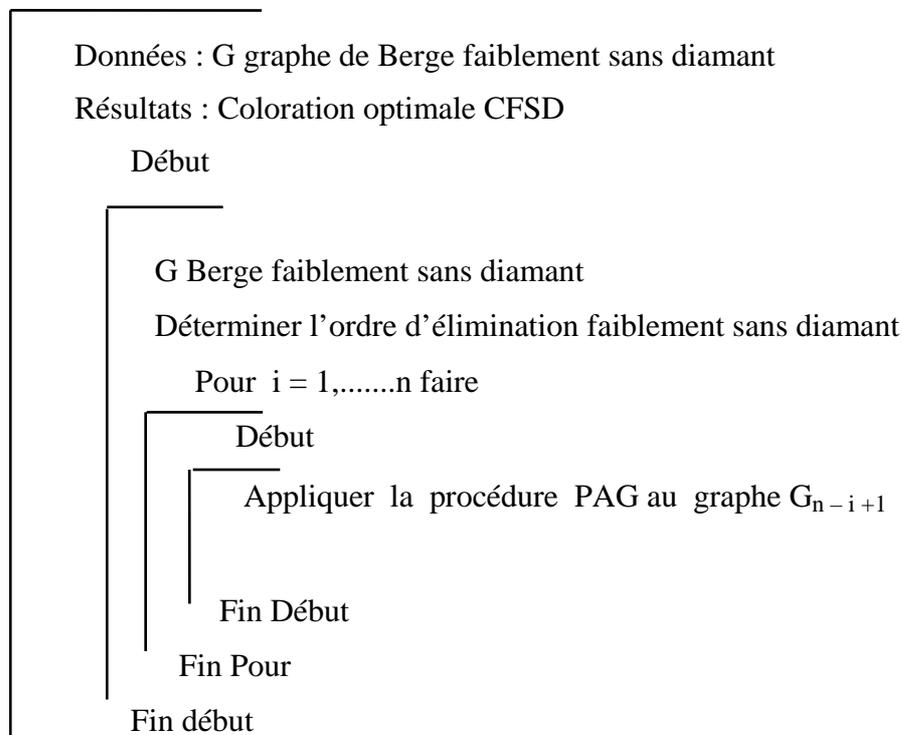
Tout graphe de Berge faiblement sans diamant admet un ordre de ses sommets  $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$  appelé ordre d'élimination FSD, avec  $v_i$  est un sommet FSD dans le sous – graphe  $G_i$  induit par  $\{ v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \}$ ; on peut déterminer cet ordre en temps polynomial.

On prend le sommet  $v_i$  de degré minimum parmi tous les sommets de  $G_i$  tel que  $G_i - [N(v)]$  est sans diamant.

Ensuite, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , on calcule  $\omega(G_i)$ .

Enfin, on cherche le triplet manquant par examen de tous les triplets apparaissant dans le voisinage d'un sommet FSD; en utilisant l'algorithme séquentiel décrit dans le paragraphe 2.2.3, on obtient séquentiellement une  $\omega(G)$  – coloration d'un graphe de Berge faiblement sans diamant en temps  $O(n^6)$ .

#### Algorithme CFSD



Fin Algorithme. CFSD.

Nous désignons par :

PAG: La procédure décrivant la méthode séquentielle utilisant l'algorithme de Tucker [ 77 ] permettant l'extension de la 3 – coloration de  $G_i$  à  $G_{i-1}$ .

CFSD : La coloration optimale cherchée.

### 2.5 Les graphes de Berge Quasi – Localement Quasi – Adjoint

Cette classe de graphes a été introduite par H. Ait Haddadène et H. Hamadi [ 42 ], qui est une extension de la classe des graphes Quasi – Adjoints.

Ils ont donné un théorème de coloration pour un graphe parfait de cette classe, vérifier ensuite pour cette classe la conjecture forte des graphes parfaits et obtenu à la fin un algorithme combinatoire de coloration de ces graphes.

#### Définition 2.5.1[42]

Un graphe  $G$  est dit **Quasi – Localement Quasi – Adjoint ( QLQA )**, si pour tout sous graphe induit  $H$  de  $G$ ,  $H$  admet un sommet dont le voisinage peut être partitionné en au plus deux cliques .

#### Théorème 2.5.1 [42]

La conjecture forte des graphes parfaits est vraie pour la classe des graphes Quasi Localement Quasi - Adjoints.

#### Théorème 2.5.2 [42]

Soit  $G$  un graphe parfait Quasi Localement Quasi – Adjoint et  $v$  un sommet de  $G$ . Alors, à partir de toute  $\omega(G) –$  coloration de  $G – v$  on peut obtenir en temps polynomial une  $\omega(G) –$  coloration de  $G$  .

### Algorithme de coloration des graphes de Berge Quasi – Localement Quasi – Adjoint

A chaque étape  $i$ , on doit chercher le sommet  $v_i$  dont le voisinage admet une partition en au plus deux cliques, dans le sous graphe  $G_i$  induit par les sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . On répète cette procédure pour  $G - v_i$ , et ainsi de suite.

On obtient à la fin un ordre d'élimination  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des sommets de  $G$ .

Alors on peut colorier  $G_n$ , et itérativement on trouve une coloration optimale de  $G_{i-1}$  à partir de la coloration optimale de  $G_i$ , en utilisant la méthode du théorème 2.5.2 [ 42 ].

**CHAPITRE 3**

**CARACTERISATION PARTIELLE DES**

**SOMMETS DE TUCKER**

**CHAPITRE 3****CARACTERISATION PARTIELLE DES SOMMETS DE TUCKER****3.1 Introduction**

Le but de ce chapitre, est de donner un aperçu sur les sommets de Tucker. A ce titre, nous citons quelques classes de graphes admettant des sommets de Tucker.

Nous proposons une caractérisation partielle des sommets de Tucker, concernant leurs existence dans un graphe parfait. Ce résultats a été obtenu, après une étude faite sur certaines graphes de classe  $G^P$ , avec  $G^P = \{G \text{ graphe de Berge, où tout sous graphes induit } H \text{ contient un sommet } v \text{ vérifiant la propriété } P\}$ , ou  $P$  est l'une des propriétés suivantes :

$P$  Dégénéré,  $P$  Faiblement sans diamant,  $P$  de MAG, quasi – localement sans patte.

Il est intéressant de caractériser la classe des graphes, où tout sous – graphe induit contient un sommet de Tucker, cette classe de graphe est notée par  $G^T$ , cette classe contient les graphes de Berge Dégénéré, les graphes de Berge Faiblement sans diamant, les graphes de MAG, les graphes de Berge Quasi – localement sans patte, les graphes de Berge Faiblement sans diamant\* et les graphes de Berge Quasi – localement quasi – adjoint.

**3.2 Définition d'un sommet de Tucker [4]**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe.

$v$  est dit sommet de Tucker s'il vérifie la propriété suivante : pour toute  $\omega(G)$  – coloration de  $G - v$ , il existe trois couleurs distinctes  $i, j$  et  $k \in \{1, 2, \dots, \omega(G)\}$  telles que le sous graphe  $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$  est sans  $K_4$ , (avec  $S_i, S_j$  et  $S_k$  étant respectivement les stables de couleurs  $i, j$  et  $k$ ).

### 3.3 Quelques classes de graphes admettant des sommets de Tucker

#### 3.3.2 Les graphes de Berges Dégénéré [ 1, 4 ]

On a introduit la définition de cette classe de graphes dans le chapitre 2.

D'après le théorème 2.3.2, on peut obtenir en temps polynomial une  $\omega(G)$  – coloration de  $G$ , à partir d'une  $\omega(G)$  – coloration de  $G - v$ , avec  $v$  sommet dégénéré dans  $G$ .

La preuve de ce théorème est basée sur le théorème 2.2.2.3 et le lemme suivant.

On note l'ensemble  $N[v]$  des voisins de  $v$  dans  $G$  par  $N$ .

#### Lemme 3.3.1 H. Ait Haddadène, F. Maffray [ 1, 4 ]

S'il existe un ensemble  $S \subset N$  tel que :

- (i)  $|C(S)| = 3$ ;
- (ii)  $G(S)$  ne contient pas de triangle ;
- (iii)  $C(N - S) \cap C(S) = \emptyset$ ;

Alors, on peut obtenir une  $\omega$  - coloration de  $G$  en temps polynomial.

Notons que les conjonctions (i) et (ii) sont équivalentes à dire que  $S = N \cap c^{-1}(\{i, j, k\})$  pour tout triplet  $\{i, j, k\}$  d'entiers distincts dans  $\{1, 2, \dots, \omega\}$ .

Un ensemble  $S$  satisfaisant les hypothèses de ce lemme sera dit bon.

L'existence de tel ensemble dans le voisinage d'un sommet  $v$  dégénéré, implique l'existence d'un triplet de couleurs  $i, j$  et  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  distinctes, tel que le sous graphe induit par  $[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$  est un graphe de Berge sans  $K_4$ .

Ainsi, tout sommet dégénéré est un sommet de Tucker.

#### 3.3.2 Les graphes de Berges faiblement sans diamant [ 2, 4 ]

On a introduit la définition de cette classe de graphes dans le chapitre 2.

D'après le théorème 2.4.2, on peut obtenir en temps polynomial une  $\omega(G)$  – coloration de  $G$ , à partir d'une  $\omega(G)$  – coloration de  $G - v$ , avec  $v$  sommet faiblement sans diamant dans  $G$ .

La preuve de ce théorème est basée sur le théorème 2.2.2.3 et le lemme suivant :

### Lemme 3.3.2

Soit  $H = (V, E)$  un graphe sans diamant avec  $\omega(H) \leq p - 1$  ( $p \geq 4$ ).

S'il existe une  $p$  - coloration de  $H$  tel que tous les triplets apparaissent dans  $H$ , alors  $|V| > 2p - 1$ .

A partir de ce lemme, si  $v$  est un sommet faiblement sans diamant dans un graphe  $G$ , et  $H$  le sous graphe induit par les voisins de  $v$ , donc  $H$  vérifie les hypothèses du lemme 3.3.2, alors le degré de  $v$  dans  $G$  est supérieur strictement à  $2p - 1$ .

L'existence de tout les triplets contredit le fait que le degré de  $v$  soit inférieur ou égal à  $2p - 1$ . Alors, il existe un triplet de couleurs  $i, j$  et  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  distinctes, tel que le sous graphe induit par  $[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$  est un graphe de Berge sans  $K_4$ .

Ainsi, tout sommet faiblement sans diamant est un sommet de Tucker

### 3.3.3 Les graphes de MAG [ 3, 4 ]

Cette classe de graphes a été introduite par H. Ait Haddadène, F. Maffray, S. Gravier [3,4].

Considérons la propriété (P) suivante :

L'union de quatre  $K_4$  contenant un sommet  $v$  donné contient un  $K_5$ .

De manière similaire on peut dire que le voisinage de  $v$  a la propriété ( $P_4$ ) : toute union de quatre triangles contient un  $K_4$ .

#### Définition 3.3.3.1 [3, 4]

Un sommet  $v$  dans un graphe  $G$ , est dit sommet de MAG s'il vérifie la propriété ( $P_4$ ).

#### Définition 3.3.3.1 [3, 4]

Un graphe  $G$  est dit de MAG, si tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  contient un sommet de MAG.

Si  $G$  est un graphe de MAG, et  $v$  un sommet de MAG dans  $G$ , alors pour toute  $\omega$  - coloration de  $G - v$ , on peut obtenir en temps polynomial une  $\omega$  - coloration de  $G$ , basée sur le résultat suivant :

### Lemme 3.3.3

Soit  $H$  un graphe ayant la propriété  $(P_4)$ , et  $\omega(H) \geq 2$ .

Pour toute  $p$  – coloration de  $H$  avec  $\omega(H) < p$ , il existe trois couleurs distinctes  $i, j$  et  $k$  qui n'induisent pas de triplet  $\{i, j, k\}$  dans  $H$ .

A partir de ce lemme 3.3.3, si  $v$  est un sommet de MAG dans  $G$ , et  $H$  le sous graphe induit par les voisins de  $v$ , avec  $H$  vérifie la propriété  $(P_4)$ , alors  $H$  vérifie les hypothèses du lemme 3.3.3.

Ainsi, il existe un triplet de couleurs  $i, j$  et  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  distinctes, tel que le sous graphe induit par  $[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$  est un graphe de Berge sans  $K_4$ .

Ainsi, tout sommet de MAG est un sommet de Tucker

### 3.3.4 Les graphes Quasi – Localement $P_0$ [56]

C'est une sous – classe des graphes Quasi – Localement sans patte (QLP), introduite par H. Ait. Haddadène et M. Mechebbek [56].

Nous donnons ici la définissons des graphes  $QLP_0$  :

#### Définition 3.3.4.1 [ 56 ]

Un sommet  $v$  dans un graphe  $G$ , est dit sommet  $QLP_0$ , si  $G[N(v)]$  est sans patte et admet au plus une composante multipartite – complet.

#### Définition 3.3.4.2 [ 56 ]

Un graphe  $G$  est dit  $QLP_0$ , si tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  contient un sommet  $QLP_0$ .

Si  $G$  est un graphe  $QLP_0$ , et  $v$  un sommet  $QLP_0$  dans  $G$ , alors pour toute  $\omega$  – coloration de  $G - v$ , on peut obtenir en temps polynomial une  $\omega$  - coloration de  $G$ ,

On peut montrer qu'il existe un triplet de couleurs  $i, j$  et  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  distinctes, dans le sous – graphe induit par les voisins de  $v$ , tel que le sous graphe induit par  $[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$  est un graphe de Berge sans  $K_4$ .

Ainsi, tout sommet  $QLP_0$  est un sommet de Tucker.

### 3.4 Caractérisation partielle des sommets de Tucker

Nous démontrons ci – après une caractérisation partielle des sommets de Tucker. Que nous présentons sous formes de deux lemmes, le lemme 3.4.1 et le lemme 3.4.2

#### Lemme 3.4.1

Soit  $v$  un sommet de Tucker,  $H$  le sous graphe induit par les voisins de  $v$ , avec  $\omega(H) \leq p - 1$  ( $p \geq 4$ ). Soit  $S_1, S_2, \dots, S_p$  une  $p$  – coloration de  $H$ , alors le nombre de triplets  $\{i, j, k\}$  avec  $i, j$  et  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  existant dans  $H$  ne dépasse pas  $\frac{1}{6}(p - 3)(p^2 + 2)$ .

#### Preuve du Lemme 3.4.1

Soit  $v$  un sommet de Tucker, et  $H$  un sous graphe satisfaisant les hypothèses du lemme 3.4.1.

Pour une  $p$  – coloration de  $H$ , Le nombre de triplets possible qu'on peut former d'un ensemble à  $p$  éléments  $\{1, \dots, p\}$  est égal à  $C_p^3 = \frac{1}{6}(p^3 - 3p^2 + 2p)$ .

Comme  $v$  est sommet de Tucker, alors il existe trois couleurs distinctes  $i, j$  et  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  telles que le sous graphe  $H[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$  est sans  $K_4$ , c'est à dire  $S_i \cup S_j \cup S_k$  n'induit pas un triangle  $\{i, j, k\}$  dans  $H$ .

Ainsi le nombre de triplets  $\{i, j, k\}$  (avec  $i, j$  et  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ ) existants dans  $H$  est borné par le nombre de triplets possible .

D'où le nombre de triplets existant est inférieur strictement au nombre de triplets possible.

Si on pose :

Tri\* comme étant le nombre de triplets existants dans  $H$ ,

Tri comme étant le nombre de triplets possibles dans  $H$ , on obtient :

$$\text{Tri}^* < \text{Tri}.$$

$$\text{Tri}^* \leq \text{Tri} - 1. \text{ (v est un sommet de Tucker)}$$

$$\text{Tri}^* \leq \frac{1}{6} (p^3 - 3p^2 + 2p) - 1.$$

$$\text{Tri}^* \leq \frac{1}{6} (p - 3)(p^2 + 2), \quad \forall p \geq 3.$$

**Remarque 3.4.1**

Le nombre de triangles existant dans le voisinage d'un sommet  $v$  de Tucker est inférieur ou égal au nombre de triplets existant multiplié par une certaine fonction  $F_n$ .

$F_n$  est une fonction qui dépend de l'ordre de multiplicité de chaque triplet, elle varie d'un triple à un autre. Avec  $n$  c'est l'indice du  $n$ ème triplet.

Dans le cas où l'ordre de multiplicité serait égal à 1 pour chaque triplet, on a le résultat suivant :

**Lemme 3.4.2**

Soit  $v$  un sommet et soit  $H = (V, E)$  le sous graphe induit par les voisins de  $v$ , avec  $\omega(H) \leq p - 1$  ( $p \geq 4$ ).

Si le nombre de triangles existants dans  $H$  est inférieur ou égal  $\frac{1}{6} (p - 3)(p^2 + 2)$  pour toutes  $p$  - coloration de  $H$ , alors  $v$  est un sommet de Tucker .

**Preuve du Lemme 3.4.2**

Soient  $v$  un sommet et  $H$  un graphe qui vérifie les hypothèses du lemme 3.4.2.

On suppose que  $v$  n'est pas un sommet de Tucker.

Ce qui veut dire : il existe une  $p$  - coloration de  $G - v, \forall i, j$  et  $k$  trois couleurs distinctes  $\in \{1, \dots, p\}$ , le sous graphe  $H [S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$  (avec  $S_i, S_j$  et  $S_k$  étant respectivement les stables de couleurs  $i, j$  et  $k$ ) induit un  $K_4$  . (1)

Ainsi, le sous graphe  $H [S_i \cup S_j \cup S_k]$  induit un triangle  $\{i, j, k\}$  dans  $H$ .

D'après (1) : tout les triplets de couleurs  $i, j$  et  $k \in \{1, \dots, p\}$  existent dans  $H$ .

De ce fait le nombre de triplets possibles est égal à exactement  $\frac{1}{6}(p^3 - 3p^2 + 2p)$ , qui est supérieur strictement à  $\frac{1}{6}(p-3)(p^2+2)$ .

Donc le nombre de triangles existant dans  $H$  est aussi, supérieur strictement à  $\frac{1}{6}(p-3)(p^2+2)$ .

Ce qui contredit les hypothèses du Lemme 3.4.2.

### Conséquence 3.4.1

D'après le Lemme 3.4.1 et le Lemme 3.4.2 : si  $v$  est un sommet de  $G$ , tel que le nombre de triplets existants dans le sous graphe induit par les voisins de  $v$ ,  $G[N(v)]$  est égal au nombre de triangles existants dans  $G[N(v)]$ , alors  $v$  est un sommet de Tucker.

## **CHAPITRE 4**

# **LES GRAPHES QUASI – LOCALEMENT $P^*(\omega)$**

## CHAPITRE 4

### LES GRAPHES QUASI – LOCALEMENT $P^*(\omega)$

#### 4.1 Introduction

Comme conséquence de la nouvelle caractérisation partielle des sommets de Tucker, introduite dans le chapitre précédant, on a introduit dans cette partie une nouvelle classe de graphes appelée graphe Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , qu'on symbolise par QLP\*.

Nous utilisons la nouvelle méthode de coloration « échange Trichromatique » pour colorer cette nouvelle classe. D'abord nous donnons quelques définitions, ensuite un théorème de coloration et nous proposons un algorithme séquentiel polynomial pour la coloration optimale des graphes parfaits de cette classe.

Comme conséquence de ces résultats, nous donnons une preuve de type algorithmique de la validité de la conjecture forte des graphes parfaits pour cette classe de graphes.

Enfin, nous proposons un algorithme polynomial pour la reconnaissance de cette classe de graphes, ainsi qu'un algorithme polynomial pour la clique maximum.

#### Définition 4.1.1

Un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est dit Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , si dans le sous graphe induit par les voisins de  $v$ , le nombre de triangles est inférieur ou égal à  $P^*(\omega)$ , avec

$$P^*(\omega) = \frac{1}{6} (\omega(G) - 3)(\omega^2(G) + 2) \quad \forall \omega(G) \geq 3.$$

### Définition 4.1.2

Un graphe  $G$  est dit Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  si tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  contient un sommet Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ .

### Remarque 4.1.1

D'après le chapitre précédent :

Le nombre de triangles existant dans le voisinage d'un sommet  $v$  de Tucker est inférieur ou égal au nombre de triplets existant multiplié par une certaine fonction  $F_n$ .

Dans le cas où l'ordre de multiplicité serait égal à 1 pour chaque triplet et d'après la définition 4.1.1, le sommet  $v$  est dit Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ .

### Lemme 4.1.1

Soit  $H$  un graphe, avec  $\omega(H) \leq \omega - 1$  ( $\omega \geq 4$ ). Si pour toute  $\omega$  – coloration de  $H$ , le nombre de triangles existants  $\text{Tri}^{**} \{i, j, k\}$  ( $i, j$  et  $k \in \{1, 2, \dots, \omega\}$ ) est inférieur ou égal à  $P^*(\omega)$ , avec

$$P^*(\omega) = 1/6(\omega - 3)(\omega^2 + 2); \forall \omega \geq 3.$$

Alors, nous pouvons toujours trouver trois couleurs distinctes  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, \omega\}$  qui n'induisent pas de triangle  $\{i, j, k\}$  dans  $H$ .

### Preuve du lemme 4.1.1

Soit  $H = (V, E)$  un graphe qui vérifie les hypothèses du lemme 4.1.1.

Soit  $S_1, S_2, \dots, S_\omega$  une  $\omega$  – coloration de  $H$ .

Nous supposons que tout les triplets  $\{i, j, k\} \in \{1, 2, \dots, \omega\}$  apparaissent dans  $H$ .

Ainsi le nombre de triplets  $\{i, j, k\}$  possible dans  $H$  est égal exactement à  $C_\omega^3 = \frac{1}{6}(\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega)$ , qui est supérieur strictement à  $\frac{1}{6}(\omega - 3)(\omega^2 + 2)$ .

Par conséquent, le nombre de triangle  $\{i, j, k\}$  existant dans  $H$  est supérieur strictement à  $\frac{1}{6}(\omega - 3)(\omega^2 + 2)$ . Ceci contredit les hypothèses du lemme 4.1.1.

### 4.2 La coloration d'un graphe parfait Quasi – Localement $P^*(\omega)$

Dans le paragraphe suivant, nous montrons qu'il est possible de colorer tout graphe de Berge Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , utilisant la technique de l'échange Trichromatique.

#### Théorème 4.2.1

Soit  $G = (V, E)$  un graphe de Berge Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  et  $v$  un sommet Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  de  $G$ . Pour toute  $\omega(G)$  – coloration de  $G - v$ , on peut obtenir en temps polynomial une  $\omega(G)$  – coloration de  $G$ .

Pour la preuve de ce théorème, nous utilisons le lemme 3.3.1. et le théorème de A . Tucker [ 79 ].

#### Théorème 4.2.2 A. Tucker [ 79 ]

Il existe un algorithme combinatoire de coloration des graphes parfaits sans  $K_4$  opérant en temps polynomial.

#### Preuve du Théorème 4.2.1

Soit  $G = (V, E)$  un graphe vérifiant les hypothèses du théorème.

Nous simplifions en écrivant  $\omega$  pour désigner  $\omega(G)$ .

Comme nous supposons que  $\omega > 3$  sinon, par le théorème de A.Tucker [ 74 ], on a le résultat.

Soit  $C$  une  $\omega$  – coloration de  $G - v$ , on suppose que les  $\omega$  – couleurs sont présentes dans  $N(v)$ , sinon on attribue une des couleurs manquantes au sommet  $v$ .

Appliquons le lemme 4.1.1 avec  $H = N(v)$ . Alors il existe trois couleurs  $i, j$  et  $k \in \{1, \dots, \omega\}$ , telles qu'il n'existe pas de triangle  $\{i, j, k\}$  dans  $N(v)$ .

D'après le lemme 3.3.1 l'ensemble  $S = \{S_i, S_j, S_k\}$  est un ensemble bon.

Ainsi le sous graphe induit par  $v$  et les sommets coloriés en  $i, j$  et  $k$  est un graphe de Berge sans  $K_4$ .

Alors  $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$  est sans  $K_4$  ( $S_i, S_j$  et  $S_k$  étant respectivement les stables de couleurs  $i, j, k$ ).

Par conséquent, on peut obtenir en temps polynomial une 3 – coloration du sous graphe  $G[S_i \cup S_j \cup S_k \cup \{v\}]$ , avec les couleurs  $i, j$  et  $k$ , en appliquons l'algorithme de 3 – coloration de A. Tucker [ 79 ].

### 4.3 Algorithme polynomial de coloration des graphes de Berge Quasi – Localement $P^*(\omega)$

La preuve du théorème précédent, nous a permis de proposer à un algorithme combinatoire polynomial pour la coloration optimale de tout graphe  $G = (V, E)$  de Berge Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  possédant  $n$  sommets avec  $\omega(G) \geq 3$ .

Pour cela :

En détermine d'abord la taille de la clique maximum de  $G$ ,  $\omega(G)$  :

On définit l'ordre d'élimination standard des sommets de  $G$   $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$ , nous utilisons après la formule récurrente :

$$\omega(G_i) = \text{Max} \{ \omega(G_i(N[v_i])) + 1, \omega(G_{i+1}) \}.$$

Ensuite on détermine l'ordre d'élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ :

On prend le sommet  $v_i$  de degré minimum parmi tous les sommets de  $G_i$  ( $G_i$  étant le sous graphe induit par  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ ) tel que dans  $G_i [N(v_i)]$  le nombre de triangles est inférieure ou égale à  $P^*(\omega)$ , avec  $P^*(\omega) = \frac{1}{6} (\omega(G) - 3)(\omega^2(G) + 2) \quad \forall \omega(G) \geq 3$ .

On répète cette procédure pour  $G_i - v_i$ , et ainsi de suite. A la fin on obtient un ordre d'élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$  des sommets de  $G$ .

Alors on peut colorier  $G_n$  trivialement, et itérativement on trouve une coloration optimale de  $G_{i-1}$  à partir de la coloration optimale de  $G_i$ , en utilisant la méthode du théorème 4.2.1.

L'algorithme séquentiel, que nous proposons est décrit comme suit :

### Algorithme 4.3.1

Donnée : Un graphe de Berge Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , avec  $|V| = n$  ;

Résultats : Une Coloration Optimale de  $G$  ;

#### ETAPE 1 :

Déterminer un ordre d'élimination standard  $[v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n]$  des sommets de  $G$ .

Pour  $i$  décroissant de  $n - 1$  jusqu'à 1, déterminer la valeur de  $\omega(G_i)$  à partir de la formule suivantes :  $\omega(G_i) = \text{Max} \{ \omega(G_i[N(v_i)]) + 1, \omega(G_{i+1}) \}$ .

#### ETAPE 2 :

Déterminer un ordre d'élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ ,  $[v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n]$  des sommets de  $G$ , tel que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  le nombre de triangles existant  $\text{Tri}^{**}$  dans  $G_i[N(v_i)]$  est inférieur ou égale à  $P^*(\omega)$ , avec  $P^*(\omega) = \frac{1}{6} (\omega(G) - 3)(\omega^2(G) + 2) \quad \forall \omega(G) \geq 3$ .

$G_i$  étant le sous – graphe induit par les sommets  $[v_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$ .

### ETAPE 3 :

Pour  $i$  décroissant de  $n - 1$  jusqu'à 1, trouver une coloration optimale de  $G_i$  à partir d'une coloration optimale de  $G_{i+1}$ , en partant d'une coloration triviale de  $G_n$  et en appliquant la procédure du théorème 4.2.1.

### Complexité de l'algorithme de coloration

- Le nombre d'itérations est en  $O(n)$ , car  $|V(G)| = n$ .
- Dans l'étape 1, le calcul de  $\omega(G)$  peut se faire en  $O(n^3)$ , dans le cas où il n'est pas donné.
- Dans l'étape 3, l'extension de la coloration optimale de  $G_{i+1}$  à  $G_i$  nécessite au plus  $O(n^3)$  opération.
- Pour l'étape 2, dans le paragraphe 4.5 nous allons décrire un algorithme polynomiale d'une complexité  $O(n^5)$  pour la détermination de l'ordre d'élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ .

Ainsi la complexité totale de l'algorithme de coloration d'un graphe parfaits Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  est  $O(n^4)$ , quand l'ordre d'élimination approprié des sommets est donné, et elle est de  $O(n^5)$  si l'ordre d'élimination approprié des sommets n'est pas donné.

## 4.4 Validité de la conjecture forte des graphes parfaits pour les graphes Quasi – Localement $P^*(\omega)$

Dans ce paragraphe, nous établissons, la validité de la conjecture forte des graphes parfaits pour la classe des graphes Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , comme conséquence directe du théorème 4.2.1.

### Théorème 4.4.1

La conjecture forte des graphes parfaits est vraie pour la classe des graphes Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ .

### Preuve du Théorème 4.4.1

La preuve est immédiate d'après le théorème 4.2.1.

### 4.5 Reconnaissance des graphes Quasi – Localement $P^*(\omega)$

Dans cette partie, nous déduisons à l'aide d'une caractérisation des graphes quasi localement  $P^*(\omega)$ , un algorithme polynomial pour la reconnaissance d'un graphe Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ .

#### Définition 4.5.1

Un ordre d'élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , d'un graphe  $G = (V, E)$ , est un ordre des sommets de graphe  $\{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ , tel que  $v_i$  est un sommet Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  dans le sous graphe induit par les sommets  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ .

#### Théorème 4.5.1

Un graphe est Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , si et seulement si, il admet un ordre d'élimination

Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  de ses sommets.

#### Preuve du Théorème 4.5.1

La condition nécessaire est claire, puisque  $G$  est Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , il admet un ordre d'élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , pour cela il suffit d'éliminer à chaque étape le sommet Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  parmi les sommets existants, jusqu'à éliminer tous les sommets.

Pour la condition suffisante : On démontre par l'absurde.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Supposons que  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  est un ordre élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  des sommets de  $G$ .

Et supposons aussi que  $G$  n'est pas Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ .

C'est à dire : il existe un sous graphe  $H$  induit de  $G$  tel que, pour tout sommet  $v$  de  $H$ , dans  $H[N(v)]$  le nombre de triangle est supérieur strictement à  $\frac{1}{6}(\omega(G) - 3)(\omega^2(G) + 2)$ .

Soit  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_k\} \subseteq V$  l'ensemble des sommets de  $H$  avec  $k \leq n$ .

Soit  $v_i$  le premier sommet de  $H$  dans l'ordre d'élimination donné  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  des sommets de  $G$ .

Il est bien claire que le sous – graphe  $H$ , est un sous – graphe de  $G_i$ , avec  $G_i = G[v_i, v_{i+1}, \dots, v_k]$ .

Ainsi, nous pouvons dire que le sous graphe induit par les voisins de  $v_i$  dans  $H$  est inclus dans le sous – graphe induit par les voisins de  $v_i$  dans  $G_i$ .

Comme le nombre de triangles dans  $H[N(v_i)]$  est supérieure strictement à  $P^*(\omega)$ , alors le nombre de triangles dans  $G_i[N(v_i)]$  l'est aussi.

Ainsi, le sommet  $v_i$  n'est pas un sommet Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  dans  $G_i$ , contradiction avec  $G$  admet un ordre d'élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  de ses sommets.

Dans ce qui suit, nous proposons un algorithme combinatoire en temps polynomial, pour la reconnaissance des graphes Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , caractériser par l'ordre d'élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  d'un graphe de Berge.

En effet, il suffit pour cela de déterminer pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , un sommet  $v_i$  de  $G_i$  tel que dans  $G_i[N(v_i)]$  le nombre de triangles existant est inférieur ou égale à  $P^*(\omega)$ , avec

$$P^*(\omega) = 1/6 (\omega(G) - 3)(\omega^2(G) + 2) \quad \forall \omega(G) \geq 3.$$

Ce qui est possible en temps polynomial étant donné que, pour un sous graphe simple le nombre de triangles est calculable en  $O(n^3)$ .

Si pour un certain  $G_i$ ,  $v_i$  n'existe pas alors le graphe  $G$  n'est pas un graphe Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , sinon on obtient un ordre d'élimination Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ ,  $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ , des sommets de  $G$ .

L'algorithme séquentiel, que nous proposons est le suivant :

Algorithme de reconnaissance des graphes de Berge Quasi – Localement  $P^*(\omega)$

Algorithme

Entrée : { Un graphe  $G = (V, E)$  de Berge, un ordre standard;  
 $\omega$  fixée;  $\text{Tri}^{**}(v)$  est le nombre de triangles existants dans le voisinage de  $v$  ;  
 $A$  matrice d'incidence sommets arêtes;

Sortie : {  $\text{GQLP}^*(\omega) : \{ \text{Oui}, \text{Non} \}$ ;  
 $\text{Ordre}() : \{ \text{vecteur de l'ordre d'élimination } \text{QLP}^*(\omega) \text{ des sommets de } G, \text{ s'il existe} \}$

Début

$i := 1;$      $P^*(\omega) = \frac{1}{6}(\omega(G) - 3)(\omega^2(G) + 2);$

$G_1 = G;$      $\{V_1 = V\};$

$\text{GQLP}^*(\omega) := \text{'Oui'}$ ;

Répéter :  $\{G_i\}$

$v := v_j^{(i)};$      $\text{Trouver} := \text{'Faux'};$      $|V_i| = k;$      $j := 1;$

Répéter

$\text{Tri}^{**}(v) = \text{calculé}(v, G_i);$

Si  $\text{Tri}^{**}(v) \leq P^*(\omega)$  alors  $\text{Trouver} := \text{'Vraie'}$

Sinon  $j := j + 1;$

Jusqu'à ( $\text{Trouver} := \text{'Vraie'}$ ) ou ( $j > k$ );

Si  $\text{Trouver} := \text{'Faux'}$  alors  $\text{GQLP}^*(\omega) := \text{'Non'}$

Sinon {  $V_{i+1} := V_i / \{v\};$   $\text{Ordre}(v) := i;$   
 $i := i + 1;$

Fin Si

Jusqu'à ( $i > n$ ) ou ( $\text{GQLP}^*(\omega) := \text{'Non'}$ );

Fin Début

Fin algorithme

### Complexité de l'algorithme de reconnaissance

- Le nombre d'itérations est en  $O(n)$ , car  $|V(G)| = n$ .
- Dans la  $i$ ème étape de l'algorithme, soit on a le nombre de triangles existants dans le voisinage de  $v \leq P^*(\omega) = \frac{1}{6}(\omega(G) - 3)(\omega^2(G) + 2)$  qu'on peut vérifier en  $O(n^3)$ , soit on passe à un autre sommet de  $G_i$ . Cette étape s'effectue en  $O(n^4)$

Donc la complexité totale de l'algorithme de reconnaissance des graphes de Berge Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  est  $O(n^5)$ .

- Le calcul de  $\omega(G)$  peut se faire en  $O(n^3)$ , dans le cas où il n'est pas donné ( voir le paragraphe suivant ).

### 4.6 Détermination de la taille maximale d'une clique dans un graphe de Berge Quasi – Localement $P^*(\omega)$

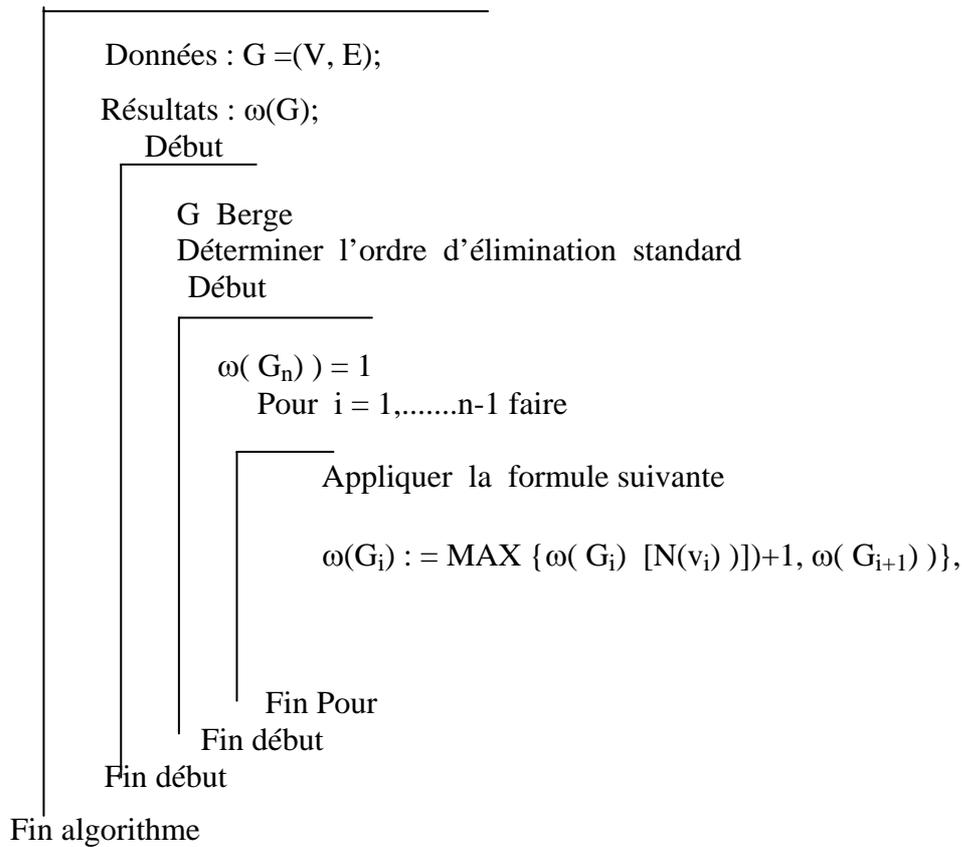
Il est possible de déterminer en temps polynomial, la taille maximale d'une clique dans un graphe de Berge Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ .

Etant donné un ordre d'élimination standard de  $G$ ,  $[v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n]$ , la valeur de  $\omega(G)$  peut s'obtenir, de manière itérative, en appliquant la formule suivante :

$$\omega(G_i) = \text{Max} \{ \omega(G_i[N(v_i)]) + 1, \omega(G_{i+1}) \}, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

## Algorithme combinatoire pour le calcul de la taille maximale d'une clique dans un graphe de Berge $QLP^*(\omega)$

### Algorithme de la clique maximum



### Théorème 4.6.1

Si  $G$  est un graphe Quasi – Localement  $P^*(\omega)$ , alors  $\omega(G)$  est calculable en  $O(n^3)$ .

**LA CONCLUSION**

### CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons introduit une caractérisation partielle des sommets de Tucker. Comme conséquence d'une étude faite sur certaines classes de graphes  $G^P$  :

$G^P = \{G \text{ graphe de Berge, où tout sous - graphe induit } H \text{ de } G, \text{ contient un sommet } v \text{ vérifiant la propriété } P\}$ , pour  $P$  : Dégénéré, FSD, FSD\*, de MAG et QLP.

Ce résultat, nous a permis de définir une nouvelle classe de graphes, les graphes Quasi – Localement  $P^*(\omega)$  ( $QLP^*(\omega)$ ), pour lesquels nous nous sommes intéressés aux problèmes de coloration, de perfection, de reconnaissance et de la clique maximum.

L'utilisations de la technique de coloration échange trichromatique pour la coloration de la classe des graphes  $QLP^*(\omega)$ , nous a permis de montré comme résultat l'extension de cette technique à une classe de graphes appartenant à la classe  $G^P$ .

Comme conséquence de ce résultat aussi, nous avons proposé, un algorithme combinatoire opérant en temps polynomial, pour la coloration optimale des graphes  $QLP^*(\omega)$ .

Ce qui nous a permis de déduire la perfection des graphes  $QLP^*(\omega)$  avec une approche séquentielle.

En utilisant l'ordre d'élimination  $QLP^*(\omega)$ , nous avons proposé un algorithme combinatoire en  $O(n^5)$  pour la reconnaissance des graphes de Berge  $QLP^*(\omega)$ .

Ainsi qu'un algorithme combinatoire en  $O(n^3)$  pour le calcul de la taille maximale d'une clique dans un graphe de Berge  $QLP^*(\omega)$ .

Une autre caractérisation qui concerne la structure des graphes de Berge  $QLP^*(\omega)$ , est que tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  contient un sommet de Tucker.

Comme conséquence de cette caractérisation, la classe des graphes Berge  $QLP^*(\omega)$  appartient à la classe des graphes  $G^T$ , avec  $G^T = \{G \text{ de Berge, tous sous graphe induit } H \text{ de } G \text{ contient un sommet de Tucker}\}$ .

Comme perspectives, nous proposons de développer d'avantage l'étude structurelle et algorithmique de la classe des graphes  $QLP^*(\omega)$ .

Les problèmes que nous espérons aborder sont essentiellement :

Les problèmes d'optimisation combinatoire, à savoir les problèmes du stable maximum et de la partition minimum par des cliques.

« Les bonnes réponses ne sont pas le résultat d'un esprit brillant ou d'une intuition fulgurante.

Les bonnes réponses s'obtiennent quand on pose les bonnes questions. »

P.DUCKER

**BIBLIOGRAPHIE**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES



- [1] **H. AIT HADDADENE and F.MAFFRAY**, Coloring perfect degenerate graphs, Discrete Mathematics, 163, 237-240,1997.
- [2] **H. AIT HADDADENE, S.GRAVIER**, On weakly diamond-free Berge graphs; Discrete mathematics, 159, 237-240, 1996.
- [3] **H. AIT HADDADENE, S. GRAVIER, F. MAFFRAY** , An algorithm for coloring some perfect graphs; Discrete mathematics, 183, 1-16 ,1998.
- [4] **H. AIT HADDADENE**, Sur quelques structures de graphes parfaits. Thèse de Doctorat. ES – Sciences, USTHB (2000).
- [5] **H. AIT HADDADENE, P. DUCHET, A. KHELLADI, F. MAFFRAY** , A Generalization For Coloring Perfect Degenerate graphs Algorithm , Papier Soumis 2002 .
- [6] **H. AIT HADDADENE, S. ZENIA**, Quasi – Locally  $P^*(\omega)$  Graphs, Paper in Preparation 2003 .
- [7] **C.BERGE** , GRAPHS, (North-Holland,Amsterdam,1985).
- [8] **C. BERGE**, Graphes et hypergraphes; Dunod, 1973.
- [9] **C. BERGE**, Les problèmes de coloration en théorie des graphes Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 9, 123-160,1960.
- [10] **C. BERGE and V. CHVATAL**, Topics on perfect graphs, Annals of Discrete Mathematics 21, 1984.
- [11] **C.BERGE** , Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade kreise starr sind, Wiss. Z. Martin – Luther Univ. Halle – Wittenberg,1961.
- [12] **C.BERGE and P.DUCHET**,Strongly Perfect Graph, in Berge and Chvatal (1984).
- [13] **M.BLIDIA**, Graphes Parfaits et Noyaux dans les graphes orientes ;Thèse de doctorat es – Sciences en Mathématiques, USTHB, Mars 1999.

- [14] **M.BURLET**, Etude algorithmique de certaines classes de graphes parfaits; Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, USMG-INPG, Grenoble 1978.
- [15] **M.BURLET and J.P.UHRY**, Parity Graphs, in topics on Perfect Graphs, 253 – 277, 1984.
- [16] **M.BURLET and J.FONLUPT**, Polynomial Algorithm To Recognize a Meyniel Graph, in Berge and Chvatal (1984).
- [17] **M.CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, and P.SEYMOUR, R. THOMAS**, The Strong Perfect Graph Theorem. 20 Novembre 2002, revised Decembre 18, 2002.
- [18] **V. CHVATAL**, On The Strong Perfect Graph Conjecture; Journal Of Combinatorial Theory, B20(1976),139-141.
- [19] **V. CHVATAL**, An Equivalent Version Of The Strong Perfect Graph Conjecture; In Annals of Discrete Mathematics, Topics On Perfect Graphs, Berge and Chvatal eds.,21, 193-195.
- [20] **V. CHVATAL**, Star-Cutsets and Perfect Graphs; Journal Of Combinatorial Theory B 39, 189-199, 1985.
- [21] **V. CHVATAL N. SBIHI**, Bull – Free Berge graphs are perfect, Graphs and Combinatorics 3 (1987)127 – 139.
- [22] **V. CHVATAL N. SBIHI**, Recognizing claw-free perfect graphs; Journal of combinatorial theory B 44 (2) : 154-176, 1988.
- [23] **V. CHVATAL, J. FONLUPT,SUN, A.ZEMIRLINE**, Recognizing Dart-Free Perfect Graphs ;SIAM Journal Comb, 2002.
- [24] **S.CICERONE and G.DI STEFANO**, On the extension of bipartite to parity graphs, Discrete Appl.Math .,95, 181-195.
- [25] **G.CORNUEJOLS and W.H.CUNNINGHAM**, Composition for perfect graphs, Discrete Mathematics 55 (1985) 245 - 254 .
- [26] **G.CORNUEJOLS**, The Strong Perfect Graphs Conjecture, JUNE 2002, Survy Prepared For The International Congress of Mathematicians, Bijing , China 2002.
- [27] **G. A. DIRAC**, On rigid circuit graphs ;Abh.Math.Sem.Uni.Humburg 25(1961) 71-76.
- [28] **P.DUCHET**, Représentations, noyaux en théorie des graphes et hypergraphes, Doct. Diss. Univ.Paris 6,1979.
- [29] **P.DUCHET**, Classical Perfect Graphs, In topics On Perfect graphs, 67-96, 1984.
- [30] **R.D.DUTTON and R.C.BRIGHAM**, A new graph coloring algorithm. Computer Journal 24 (1981), 85-86.
- [31] **J.FONLUPT and A.ZEMIRLINE**, Polynomial Recognition Algorithm of Perfect ( $K_4$ -e) – Free Graphs, institut IMAG Rapport Technique RT-16, 1987.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [32] **D.R FULKERSON**, Blocking and Anti-blocking pairs of polyedra; Mathematical Programming 1 (1971) 168-194.
- [33] **D.R FULKERSON**, On The Perfect graph theorem ; Dans Mathematical Proqraming, Acad. Press, New-York, 1973.
- [34] **D.R FULKERSON and O.A.GROSS**, Incidence matrices and interval graphs, Pacific Journal Of Mathematics, 15, 835-855, 1965.
- [35] **M.R.GAREY and D.S.JOHNSON**, Computers and Intractability, A guide to the Theory of NP – Completeness, W.H.Freeman, San Francisco, 1979
- [36] **F. GAVRIL**, Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of a chordal graph, SIAM Journal Comb. 1 : 180-187, 1972.
- [37] **M.C GOLUMBIC**, Algorithmic graph theory and perfect graphs, Academic-press, New-york, 1980.
- [38] **M.GONDRAN and M.MINOUX**, Graphes et Algorithmes, Editions EYROLLES, Paris 1990.
- [39] **S.GRAVIER**, On Tucker vertices of graphs, Discrete Mathematics 203(1999), 121-131.
- [40] **M. GROTSCHEL, L. LOVASZ, S. SCHRIJVER**, Polynomial algorithm for perfect graphs; Topics on perfect graphs, Annals of discrete mathematics 21, 325-356,1984.
- [41] **A. HAJNAL, J. SURANYI**, Uber die Auflosung von Graphen in vollstandige Teilgraphen, Annals of University of Sciences Budapest, Eötvös sect. Math.1 :113-121,1958.
- [42] **H.HAMADI**, Sur Les Graphes Quasi – Adjoint,Thèse de Magister USTHB(2002).
- [43] **P.L.HAMMER and F.MAFFRAY**, Perfect graphs, Combinatorica, 13 (1993) 199 –208.
- [44] **R.B.HAYWARD**, Weakly Triangulated graphs, J. Comb. Theory, B 39, 200-208, 1985.
- [45] **A.HERTZ**, A Fast Algorithm for Coloring Meyniel Graphs. J. Comb. Theory. B 50 (1990), 231-240.
- [46] **A.HERTZ and COSINE**, A New Graph Coloring Algorithm. Operation Research Letters 10(1991), 411-415.
- [47] **W.L.HSU**, Recognizing Planar perfect Graphs, J. acm, 34, 255-288.
- [48] **L.G. KHACHIYAN**, A polynomial algorithm in linear programming; Soviet mathematica dokl 20,191-194, 1979.
- [49] **D.KÖNIG**, Theory der endlichen und unendlichen graphen, Chelse a, New-York , 1950.
- [50] **L. LOVASZ**, A characterization of perfect graphs; Journal of Combinatorial Theory B 13, 95-98, 1972.

- [51] **L.LOVASZ**, Normal Hypergraphs and The Perfect Graphs Conjecture; Discrete Mathematics 2 (235-267), 1972.
- [52] **F. MAFFRAY**, Une Etude Structurale Des Graphes Parfaits ; Thèse de Docteur de L'UJF, Grenoble 1992.
- [53] **F. MAFFRAY, O.PORTO and M. PREISSMANN**,  
A generalization of simplicial elimination orderings, Journal of Graph Theory, 23(1996),203- 208.
- [54] **F. MAFFRAY, M. PREISSMANN**,  
Split – Neighbourhood graphs, Journal of Combinatorial Theory B 63 :294 – 309, 1995
- [55] **F. MAFFRAY, M. PREISSMANN**  
Sequentiel Colorings and Perfect Graphs. Disc. Appl. Math. 94 (1999), 287-296.
- [56] **M.MECHEBBEK**, Contribution a La Connaissance Des Graphes Parfaits,Thèse de Magister USTHB (2001).
- [57] **H. MEYNIEL**, the graphs whose odd cycles have at least two chords, in Topics On Perfect Graphs, 115-119, 1984.
- [58] **H. MEYNIEL**, A new property of critical imperfect graphs and some consequences; European Journal of combinatorics, 8 : 313-316, 1987.
- [59] **S. OLARIU**, No antitwins in minimal imperfect graphs ; Journal of Combinatorial Theory, Serie B 45, 1988, 255-257.
- [60] **S. OLARIU** , Paw – free graphs, Information Processing Letters 28, 53-54, 1988.
- [61] **M.W. PADBERG**, Perfect zero-one matrices; Mathematical Programming, 6 : 180-196, 1974.
- [62] **K.R. PARTHASARATHY and G. RAVINDRA**, The Strong Perfect Graph Conjecture is true for  $K_{1-3}$ -free graphs; Journal of Combinatorial Theory. B 21, 212-223, 1976.
- [63] **K.R. PARTHASARATHY and G. RAVINDRA**, The validity of the strong perfect graph conjecture for  $(K_4-e)$  – free graphs,J.Comb.Theory, B26, 98-100,1979.
- [64] **M. PREISSMANN**, Sur quelques problèmes théoriques et appliqués de la théorie des graphes; Thèse de Docteur d'Etat, UJF, Grenoble, décembre 1988.
- [65] **D.J.ROSE, R.E.TARJAN and G.S.LUEKER**  
Algorithmic aspect of vertex elimination on graphs, SIAM J.Comput.5, 266-283, 1976.
- [66] **H.SACHS**, On the Berge conjecture concerning perfect graphs, Combinatorial Structures and their Applications, Gordon and Breach, New-York, 377-384, 1970.
- [67] **M. SAKAROVITCH**, Optimisation Combinatoire; Hermann 1984
- [68] **M. SAKAROVITCH**, Techniques Mathématiques de la recherche Opérationnelle, Optimisation combinatoire Mai 1983.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [69] **D.SEINSCHÉ** , On a property of class of  $n$  –colorable graphs, Journal of Combinatorial Theory, B 16, 191 –193, 1974.
- [70] **C. SHANNON**, The zero-error capacity of a noisy channel.; IRE transmission Information theory IT2 , 8- 19,1956
- [71] **L.E. TROTTER**, Line perfect graphs; Mathematical programming, 12-1977; 255-259.
- [72] **A.C. TUCKER**, The strong perfect graph conjecture for planar graphs; Canadian Journal Mathematics 25 (1973) 103-114.
- [73] **A.C. TUCKER**,Critical Perfect Graphs and Perfect 3 – Chromatic Graphs, J. Comb. Theory, B29, 143-149, 1977
- [ 74] **A.C. TUCKER**, Coloring graphs with stable cutsets; Journal of combinatorial theory B34 (258-267) ,1983.
- [ 75] **A.C.TUCKER**,Uniquely colorable perfect graphs; Discrete Mathematics 44 (1983) 187-194.
- [76] **A.C. TUCKER** , The validity of the perfect graph conjecture for  $K_4$ -free graphs; Topics on perfect graphs, annals of discrete mathematics 21 (148-157) 1984
- [ 77] **A.C. TUCKER , D. WILSON** ,  
An  $O(n^2)$  algorithm for coloring perfect planar graphs; Journal of algorithms 5 (60-68),1984.
- [78] **A.C. TUCKER**, Coloring perfect  $K_4 - e -$  free graphs; Journal of combinatorial theory,B42, 313-318, 1987.
- [79] **A.C. TUCKER**, A reduction procedure for coloring perfect  $K_4 -$  free graphs; Journal of combinatorial theory,B43 :151-172 ,1987.
- [80] **B.YALAOUI** , Etude Structurale des Graphes Quasi – Localement Sans  $P_4$  Thèse de Magister USTHB(2001).