

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE UNIVERSITE DES SCIENCES ET  
DE LA TECHNOLOGIE  
≧ HOUARI BOUMEDIEN ≧  
FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER  
EN : Recherche Opérationnelle

Spécialité : Mathématiques Discrètes et Optimisation  
Par : BOUKECHKOULA née ZAIMI Yamina

Sujet

**Problèmes métriques dans les graphes de Cayley**

Soutenu publiquement le, 16/05/2013 devant le jury composé de :

Melle BOUCHEMAKH Isma,	Professeur à l'U.S.T.H.B	Présidente.
Mr AIDER Méziane,	Professeur à l'U.S.T.H.B	Directeur de mémoire.
Mme BENMEZIANE Zineb,	MCA à l'U.S.T.H.B	Examinatrice.

## RÉSUMÉ :

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux graphes de Cayley et aux différentes propriétés qu'ils recèlent, combinatoires telles que l'hamiltonicité et métriques liées notamment à l'utilisation de ces graphes comme modèles de réseaux d'interconnexion. Un *graphe de Cayley* est un graphe obtenu à partir d'un groupe  $\Gamma$  et d'une partie  $S$  de  $\Gamma$  ne contenant pas l'élément neutre et vérifiant la propriété  $s \in S \iff s^{-1} \in S$ . Les sommets sont les éléments de  $\Gamma$  et les arêtes sont les paires  $\{a, as\}$  avec  $a \in \Gamma$  et  $s \in S$ . Le graphe obtenu à partir de  $\Gamma$  et  $S$  sera noté  $G = Cay(\Gamma, S)$ .

Nous considérons le problème de Moore qui consiste à établir une borne supérieure pour le nombre de sommets que peut avoir un graphe de Cayley de degré maximum et de diamètre donnés et étudions l'existence de graphes pour lesquels cette borne est atteinte.

**Mots-Clés :** Graphe de Cayley, la borne de Moore,  $(\Delta, D)$ -problème .

## **REMERCIEMENTS**

Mes sincères vants à monsieur AIDER Méziane, Professeur à l'USTHB qui m'a permis de mener à bien ce travail et de m'avoir orientée avec rigueur et objectivité.

Je tiens à remercier madame BOUCHEMAKH Isma, Professeur à l'USTHB de me faire l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi à madame BENMEZIANE Zineb, Maître de conférences à l'USTHB d'avoir accepté d'examiner mon travail.

C'est avec beaucoup de tendresse et d'affection que mon salut s'adresse à ma famille ZAIMI et ma belle famille BOUKECHKOULA, qui ont tout fait pour contribuer à ma réussite.

Je tiens à remercier mon cher mari Azeddine pour son soutien et ses encouragements qui m'ont permis de voir toujours plus clair.

Pour finir, je remercie tous les amis et collègues qui m'ont soutenu et encouragé.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Terminologie et notations</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Graphes . . . . .	3
1.2.1 Définitions générales sur les graphes . . . . .	3
1.2.2 Chaîne, cycle et connexité . . . . .	4
1.2.3 Sous graphes . . . . .	6
1.2.4 Morphismes et opérations sur les graphes . . . . .	7
1.2.5 Distance . . . . .	8
1.2.6 Quelques classes particulières de graphes . . . . .	10
1.2.7 Graphes orientés . . . . .	11
1.3 Groupes . . . . .	12
1.3.1 Définitions générales sur les groupes . . . . .	12
<b>2 Le <math>(\Delta, D)</math>-problème et les graphes de Moore</b>	<b>14</b>
2.1 Introduction . . . . .	14
2.2 Graphes non orientés . . . . .	15
2.3 Graphes orientés . . . . .	16
2.4 Graphes bipartis non orientés . . . . .	16
2.5 Graphes bipartis orientés . . . . .	17
2.6 Graphes bipartis orientés de Moore de diamètre 3 et 4 . . . . .	20
<b>3 Graphes de Cayley</b>	<b>22</b>
3.1 Introduction . . . . .	22
3.2 Les graphes de Cayley . . . . .	22

3.2.1	Définitions et résultats préliminaires . . . . .	22
3.2.2	Graphes de Cayley et hamiltonicité . . . . .	25
3.3	Les graphes circulants et la conjecture d'Ádám . . . . .	26
3.3.1	Définitions et résultats préliminaires . . . . .	26
3.3.2	La conjecture d'Ádám pour les circulants à deux pas . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Borne de Moore dans les graphes de Cayley</b>	<b>30</b>
4.1	Introduction . . . . .	30
4.2	Graphes de Cayley . . . . .	30
4.3	Graphes de Cayley abéliens . . . . .	31
4.3.1	Cas non orienté . . . . .	31
4.3.2	Cas orienté . . . . .	32
4.4	Graphes de Cayley abéliens de degré 2 . . . . .	32
4.5	Graphes de Cayley cycliques . . . . .	33
	<b>Conclusion</b>	<b>36</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>36</b>

# Introduction générale

La théorie des graphes est née en 1736 quand Euler démontra qu'il est impossible de traverser chacun des sept points de la ville de Königsberg une fois exactement et revenir au point de départ.

Elle s'est développée depuis la deuxième moitié du 19<sup>e</sup> siècle avec les travaux Hamilton, Heawood, Kempe, Kirchhoff, Petersen, Tait, et connaît un accroissement rapide depuis les années 30 grâce à Konig, Hall, Berge, Cayley,....

Elle représente des liens étroits avec la chimie (modélisation des structures), la biologie (génomique), les sciences sociales (modélisation des relations),...

Par la suite, elle s'est imposée comme un moyen, des plus naturels, d'étude de nombreux sujets tant purement mathématiques (la théorie des relations mathématiques) que l'ordre plutôt pratique (affectation, problèmes de transport, réseaux d'interconnexion et programmation au sens général).

Les réseaux d'interconnexion ont de nombreux domaines d'applications. On les rencontre notamment dans les télécommunications et l'informatique où il s'agit de concevoir des réseaux, et de les adapter à certaines conditions pratiques et matérielles.

En effet, un réseau d'interconnexion est modélisé par un graphe simple, dans lequel les sommets représentent les noeuds ou stations, et les arcs ou arêtes, les liaisons de communication, unidirectionnelles ou bidirectionnelles, le graphe étant soit orienté, soit non orienté.

Certaines classes de graphes peuvent être caractérisées en termes métriques. Un graphe muni de sa fonction distance est un espace métrique, la distance dans un graphe est définie comme étant la longueur de la plus courte chaîne reliant deux sommets dans un graphe.

En 1964, Elspas [21] a introduit le désormais classique problème de construction de larges  $(\Delta, D)$ -graphes (graphes de degré maximum  $\Delta$  et de diamètre  $D$ ). Ce problème est posé sous la forme suivante :

”Quel est le nombre maximum de sommets d'un  $(\Delta, D)$ -graphe? ”

Notre travail de recherche traite principalement du  $(\Delta, D)$ –problème.

Nous nous intéressons particulièrement à ce problème dans les graphes de Cayley.

Il s’agit d’étudier la relation entre l’ordre, le degré maximum et le diamètre en focalisant notre attention particulièrement aux graphes de Cayley.

Outre cette introduction, notre document comprend quatre chapitres.

**Le premier chapitre**, qui s’adresse principalement au lecteur non familiarisé avec la nomenclature de la théorie des graphes et la théorie des groupes, rappelle des définitions essentielles et les résultats généraux utilisés par la suite dans ce mémoire.

**Dans le deuxième chapitre**, nous rappelons le problème de Moore dans les graphes orientés, non orientés, bipartis non orientés et bipartis orientés.

Rappelons que le problème de Moore consiste en la construction de  $(\Delta, D)$ –graphes (des graphes de degré maximum  $\Delta$  et du diamètre  $D$ ) dont le nombre de sommets est maximum, ce nombre étant limité par une borne théorique, pas largement atteinte tout le temps.

**Le chapitre trois** concerne les graphes de Cayley, étudiés ces dernières années car ce sont de bons modèles pour les réseaux d’interconnexion, et les graphes circulants, une classe spéciale des graphes de Cayley.

Nous obtenons d’abord quelques exemples sur les graphes de Cayley. Nous nous intéressons à leurs différentes propriétés, notamment l’hamiltonicité et les propriétés métriques.

Un *graphe de Cayley* est un graphe obtenu à partir d’un groupe  $\Gamma$ , d’une partie  $S$  de  $\Gamma$  ne contenant pas l’élément neutre et vérifiant  $s \in S \iff s^{-1} \in S$ . Les sommets sont les éléments de  $\Gamma$  et les arêtes sont les paires  $\{a, as\}$  avec  $a \in \Gamma$  et  $s \in S$ .

Le graphe obtenu à partir de  $\Gamma$  et  $S$  sera noté  $G = Cay(\Gamma, S)$ .

**Au quatrième chapitre**, nous rappelons la borne de Moore pour les graphes de Cayley et nous nous intéressons à l’existence de graphes de Cayley atteignant cette borne (que nous appelons graphes de Cayley Abéliens de Moore). Nous donnons, en outre, pour certaines valeurs du degré et du diamètre les graphes de Cayley atteignant la borne de Cayley Moore abélien .

# Chapitre 1

## Terminologie et notations

### 1.1 Introduction

Ce chapitre introduit les définitions et les notions essentielles à la compréhension des chapitres suivants.

Le premier paragraphe est destiné aux lecteurs non familiarisés avec la théorie des graphes en général et les aspects métriques dans les graphes en particulier.

La terminologie et les notions utilisées sont celles des ouvrages de référence Buckley et Harray [18] et de Berge [10] [11].

Le second paragraphe donne les bases de la théorie des groupes [42], permettant d'aborder la notion de graphe de Cayley.

### 1.2 Graphes

#### 1.2.1 Définitions générales sur les graphes

**Définition 1.1.** *Un graphe  $G$  est défini par un ensemble fini  $V = V(G)$  appelé ensemble de sommets et un ensemble  $E = E(G)$  de  $m$  paires de sommets appelées arêtes de  $G$ . On le note  $G = (V, E)$ .*

*Le nombre de sommets  $n$  du graphe  $G$  est appelé l'ordre de  $G$  et le nombre d'arêtes  $m$  est appelé taille du graphe  $G$ .*

*Chaque paire de sommets  $\{u, v\}$  qui forme une arête est notée  $e = \{u, v\}$  ;*

*$u, v$  sont alors dits adjacents et  $e$  est incidente aux sommets  $u$  et  $v$ .*

*Si deux arêtes ont une extrémité commune, elles sont dites arêtes adjacentes et dans le cas contraire elles sont dites disjointes.*

**Définition 1.2.** *Toute arête dont les extrémités sont confondues est appelée boucle. Si plusieurs arêtes relient la même paire de sommets distincts, elles sont dites arêtes parallèles.*

*Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes parallèles .*

*Dans la suite, tous les graphes que nous utilisons sont simples.*

**Définition 1.3.** *On appelle degré du sommet  $u$  d'un graphe  $G$ , et on note  $d_G(u)$  ou  $d(u)$  le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Le degré maximum d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.*

**Définition 1.4.** *L'ensemble des voisins d'un sommet  $u$  est noté  $N_G(u)$  ou  $N(u)$  ; il représente le voisinage de  $u$ . On parle aussi de voisinage fermé  $N_G[u]$  défini par :*

$$N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$$

*Le cardinal de  $N(u)$  représente le degré du sommet  $u$ .*

*Un sommet  $u$  qui n'a aucun voisin est dit sommet isolé ainsi  $N(u) = \emptyset$  et  $d(u) = 0$ .*

*Un sommet  $u$  est dit sommet pendant s'il a un unique voisin. Si deux sommets  $u$  et  $v$  ont les mêmes voisins alors ils sont appelés jumeaux.*

**Définition 1.5.** *Un graphe  $G = (V, E)$  est dit régulier de degré  $d$  lorsque tous ses sommets ont le même degré  $d$ . On dit alors qu'il est  $d$ -régulier.*

## 1.2.2 Chaîne, cycle et connexité

### Chaîne

**Définition 1.6.** *Une séquence de sommets deux à deux distincts  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est une chaîne dans  $G = (V, E)$  si  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$ .*

*La chaîne  $P = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  est notée  $\{v_1, v_n\}$ -chaîne.*

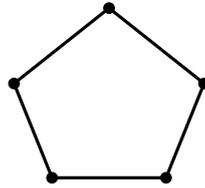
*Elle est de longueur  $n - 1$  et d'ordre  $n$ .*

### Cycle

**Définition 1.7.** *Un cycle est une chaîne  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  telle que les sommets  $v_1$  et  $v_n$  sont reliés par une arête.*

**Définition 1.8.** *Un cycle d'un graphe  $G$  d'ordre  $n$  est hamiltonien s'il est de longueur  $n$ , autrement dit, il passe "une et une seule fois " par chaque sommet de  $G$ . Un graphe hamiltonien est un graphe qui contient un cycle hamiltonien.*

**Exemple 1.**



le cycle  $C_5$

**Figure 1.1**

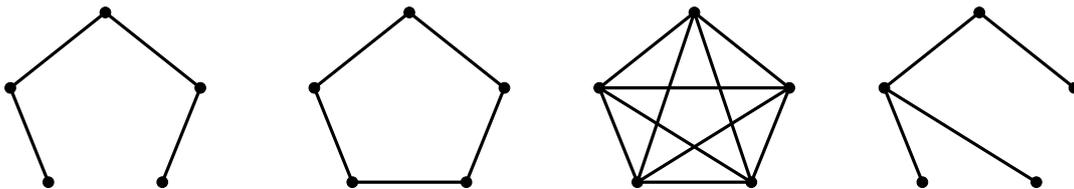
### Connexité

**Définition 1.9.** Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *connexe*, si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $V$  il existe une chaîne reliant  $u$  et  $v$ .

Notons que la relation de connexité ( $x \mathcal{R} y \iff \exists (x, y)$  chaîne de  $G$ ) est une relation d'équivalence dont les classes constituent une partition de  $G$  en sous graphes connexes.

Tout sous graphe connexe maximal de  $G$  est appelé *composante connexe* du graphe  $G$ .

**Exemple 2.** Graphes connexes.



la chaîne  $P_5$

le cycle  $C_5$

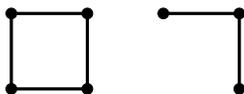
le graphe complet  $K_5$

Un arbre

**Figure 1.2**

Dans le cas où le nombre de composantes connexes de  $G$  est supérieur à 1, alors  $G$  est dit *non connexe*.

**Exemple 3.** Graphes non connexes.



2 composantes connexes

**Figure 1.3**

**Définition 1.10.** *Un point d'articulation d'un graphe  $G$  est un sommet  $u$  de  $G$  dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.*

*Un isthme est une arête dont l'élimination produit de nouvelles composantes connexes.*

**Définition 1.11.** *Un graphe  $G$  est dit  $k$ -connexe si la suppression de moins de  $k$  sommets quelconques engendre toujours un graphe connexe.*

### 1.2.3 Sous graphes

**Définition 1.12.** *Un sous graphe  $H$  de  $G = (V, E)$  est un graphe dont tous les sommets et toutes les arêtes sont dans  $G$ .*

*Si  $H$  a le même ensemble de sommets que  $G$ , alors le sous graphe  $H$  est dit partiel.*

*Pour tout ensemble  $X (X \subseteq V)$  le sous graphe induit (ou engendré) par  $X$  noté  $G(X)$  ou  $\langle X \rangle$  est le sous graphe de  $G$  qui contient toutes les arêtes de  $G$  reliant des sommets de  $X$ .*

*On note  $G - U$  (où  $U \subseteq V$ ) le sous graphe de  $G$  induit par  $V - U$ .*

$$i.e : G - U = G(V - U) = \langle V - U \rangle$$

*Lorsque :  $U = \{u\}$ ,  $G - \{u\}$  est noté  $G - u$ .*

**Définition 1.13.** *Dans un graphe  $G = (V, E)$ , un ensemble  $S \subset V$  est dit stable ou indépendant si l'ensemble des arêtes du sous graphe de  $G$  induit par  $S$  est vide.*

*Un ensemble  $K \subset V$  est dit clique si tous ses sommets sont deux à deux adjacents.*

### 1.2.4 Morphismes et opérations sur les graphes

**Définition 1.14.** Le graphe complémentaire  $\overline{G}$  de  $G = (V, E)$  possède  $V$  comme ensemble de sommets, deux sommets sont adjacents dans  $\overline{G}$  si et seulement s'ils ne le sont pas dans  $G$ .

**Définition 1.15.** Étant donné deux graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$ , une application  $f: V \rightarrow V'$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $G'$ , si lorsque deux sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents dans  $G$ , alors leurs images  $f(u)$  et  $f(v)$  le sont dans  $G'$  ( $uv \in E \implies f(u)f(v) \in E'$ ). Le graphe  $G$  est alors dit homomorphe au graphe  $G'$ .

L'application  $f$  est un isomorphisme si elle est bijective et  $f$  et  $f^{-1}$  sont des homomorphismes.

S'il existe un isomorphisme de  $G$  dans  $G'$ , alors  $G$  et  $G'$  sont dits isomorphes et nous notons  $G \cong G'$ .

**Définition 1.16.** Un graphe  $G$  est transitif si pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ , il existe un automorphisme  $f$  de  $G$  tel que  $v = f(u)$ ,  $\forall u, v \in V(G)$ .

**Définition 1.17.** Un graphe  $G$  est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être subdivisé en deux sous-ensembles disjoints  $V_1$  et  $V_2$  tels que toute arête de  $G$  relie un sommet de  $V_1$  à un sommet de  $V_2$ , autrement dit, de sorte que  $V_1$  et  $V_2$  soient des stables de  $G$ . Si  $G$  contient toutes les arêtes reliant tout sommet de  $V_1$  à tout sommet de  $V_2$ , alors le graphe  $G$  est dit biparti complet. Dans ce cas, si  $V_1$  contient  $p$  sommets et  $V_2$  en contient  $q$ , alors  $G$  est noté  $K_{p,q}$ . Le graphe  $n$ -parti complet  $K_{p_1, p_2, \dots, p_n}$  a un ensemble de sommets qui peut être subdivisé en  $n$  parties disjointes  $V_1, V_2, \dots, V_n$  telles que  $V_i$  possède  $p_i$  sommets,  $i = 1, \dots, n$ , et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils appartiennent à deux parties distinctes.

**Définition 1.18.** La somme cartésienne des graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  est le graphe, noté  $G \square G'$ , dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien  $V \times V'$  et où le sommet  $(u, u')$  est adjacent au sommet  $(v, v')$  si et seulement si soit ( $u = v$  et  $u'v' \in E'$ ) ou bien ( $uv \in E$  et  $u' = v'$ ).

Si  $G = P_n$ ,  $G' = P_m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $G \square G'$  est appelé grille.

**Exemple 1.1.**

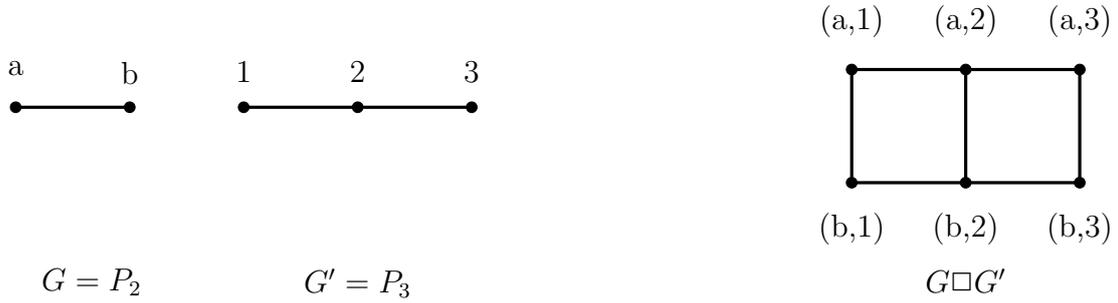


Figure 1.4.

### 1.2.5 Distance

#### Distance et décomposition en couches

**Définition 1.19.** La distance  $d_G(u, v)$  (ou  $d(u, v)$ , si aucune confusion n'est à craindre) entre les sommets  $u$  et  $v$  de  $G = (V, E)$  représente la longueur d'une plus courte  $\{u, v\}$ -chaîne.

L'application

$$\begin{aligned} d_G : V \times V &\rightarrow N \\ (u, v) &\mapsto d_G(u, v) \end{aligned}$$

est une métrique, appelée fonction distance dans  $G$ , et l'ensemble  $V$  muni de cette application est un espace métrique fini.

En effet :  $d_G$  satisfait les trois axiomes de la distance :  $\forall u, v, w \in V(G)$  :

1.  $d_G(u, v) \geq 0$  ; et si  $d_G(u, v) = 0$  alors  $u = v$ .
2.  $d_G(u, v) = d_G(v, u)$ .
3.  $d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v)$ .

Le troisième axiome est connu sous le nom de l'inégalité triangulaire.

**Définition 1.20.** Un sous graphe  $H$  de  $G$  est dit isométrique si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $H$  on a :

$$d_H(u, v) = d_G(u, v)$$

**Définition 1.21.** L'excentricité d'un sommet  $u$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est le maximum de toutes ses distances avec les autres sommets. On la note  $e(u)$ .

$$e(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$$

**Définition 1.22.** Le diamètre du graphe  $G = (V, E)$ , noté  $D(G)$ , représente le maximum des excentricités des sommets de  $G$ .

$$D(G) = \max_{u \in V} e(u)$$

Une décomposition en couches (niveaux) des sommets de  $G = (V, E)$  relativement à  $u$  est une partition des sommets  $V$  en  $p = e(u) + 1$  parties disjointes

$$N_0(u) = \{u\}, N_1(u), \dots, N_p(u)$$

$N_i$  est appelé le  $i^{\text{ème}}$  niveau dans  $G$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  relativement à  $u$ .

**Exemple 4.** La décomposition en couches des sommets de  $H$  relativement à 1 est la suivante :

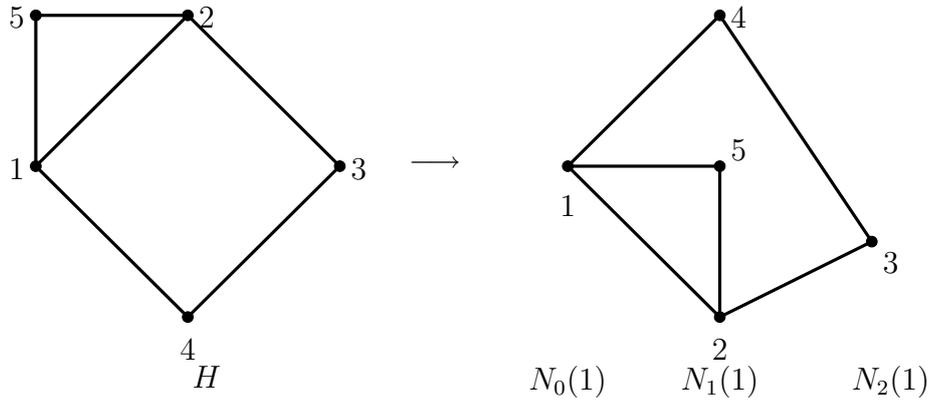


Figure 1.5.

### 1.2.6 Quelques classes particulières de graphes

Dans ce paragraphe, nous donnons la définition de certaines classes particulières de graphes ayant un lien étroit avec les travaux présentés dans ce mémoire.

#### Hypercube

L'hypercube de dimension  $n$ , noté  $H(n)$ , est le graphe dont les sommets représentent les  $n$ -uples de  $\{0, 1\}^n$ , deux sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent exactement d'une composante. Notons que pour  $n \geq 0$ , nous avons  $H(n+1) = H(n) \square K_2$ . De ce fait,  $H(n)$  peut être vu comme le produit de  $n$  copies de  $K_2$ .

De plus, l'hypercube  $H(n)$  de dimension  $n$  est biparti, sommet-transitif, (donc régulier, et de degré  $n$ ), d'ordre  $2^n$  et de taille  $n \cdot 2^{n-1}$ .

#### Exemple 1.2.

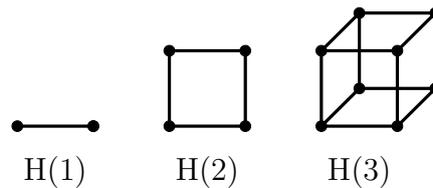


Figure 1.6.

#### Graphes circulants

Pour une séquence d'entiers positifs  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$  le graphe circulant  $G_N(a_1, a_2, \dots, a_k)$  a pour ensemble de sommets  $V = Z_N = Z/NZ = \{0, 1, \dots, N-1\}$  et deux sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents s'il existe  $i$   $1 \leq i \leq k$  tel que  $u \equiv (v \pm a_i)[N]$

#### Grille et grille torique :

On note  $M(p_1, p_2, \dots, p_n)$  la grille de dimension  $n$  d'ordre  $N = \prod_{i=1}^n p_i$  qui est la somme cartésienne des  $n$  chaînes,  $P_{p_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), soit  $P_{p_1} \square P_{p_2} \square \dots \square P_{p_n}$ .

On note  $TM(l_1, l_2, \dots, l_n)$  la grille torique ou tore de dimension  $n$  d'ordre  $N = \prod_{i=1}^n l_i$  qui est la somme cartésienne des  $n$  cycles,  $C_{l_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), soit  $C_{l_1} \square C_{l_2} \square \dots \square C_{l_n}$ . On note  $TM(n)^d$  la grille torique somme de  $d$  cycles de longueur  $n$ .

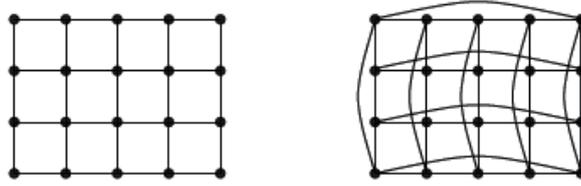
La grille  $M(5,4)$  et la grille torique  $TM(5,4)$ 

Figure 1.7.

### 1.2.7 Graphes orientés

**Définition 1.23.** Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées, chaque arête relie deux sommets dans un certain ordre. Le premier est appelé origine de l'arête et le second extrémité.

Dans le cas où l'arête  $e$  est orientée on l'appelle **arc** noté :  $a=(u,v)$  où le point  $u$  est l'extrémité initiale et le point  $v$  est l'extrémité terminale.

Un arc de  $G$  de la forme  $(u,u)$  est une boucle.

**La longueur** du chemin est le nombre d'arcs utilisés, ou le nombre de sommets moins un. Un chemin **simple** ne peut pas visiter le même sommet plus d'une fois. Un chemin **fermé** a pour dernier sommet le premier.

Dans un graphe orienté, un **circuit** est un chemin fermé simple.

**Définition 1.24.** Un graphe orienté est simple s'il n'a pas de boucles et entre deux sommets il n'y a pas plus d'un arc pour les relier.

**Définition 1.25.** Etant donné  $a = (uu')$  un arc (qui n'est pas une boucle) d'un graphe orienté  $G$ ,  $a$  est incident à  $u$  vers l'extérieur et incident à  $u'$  vers l'intérieur.

Le nombre d'arcs incidents à  $u$  vers l'extérieur est noté  $d_G^+(u)$  (ou  $d^+(u)$ ) et s'appelle le **demi-degré extérieur de  $u$** . Par analogie, le **demi-degré intérieur de  $u$** , noté  $d_G^-(u)$  (ou  $d^-(u)$ ) est le nombre d'arcs incidents à  $u$  vers l'intérieur.

Le degré du sommet  $u$  est noté  $d_G(u)$  ou  $(d(u))$  tels que :

$$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$

**Définition 1.26.** Un **réseau d'interconnexion** est modélisé par un graphe simple, dans lequel les sommets représentent les noeuds ou stations, et les arcs ou arêtes, les liaisons

de communication, unidirectionnelles ou bidirectionnelles, le graphe étant soit orienté, soit non orienté.

## 1.3 Groupes

### 1.3.1 Définitions générales sur les groupes

**Définition 1.27.** Un **groupe** est un ensemble  $\Gamma$  muni d'une loi de composition interne  $*$ , c'est-à-dire d'une application :

$$\Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$$

$$(x, y) \mapsto x * y$$

qui a de plus les propriétés :

- Pour tous  $x, y, z$  dans  $\Gamma$ , on a  $(x * y) * z = x * (y * z)$
  - $\forall x \in \Gamma; \exists x^{-1} \in \Gamma; \text{ tel que } x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$
  - Pour tout  $x$  de  $\Gamma$ , il y a un inverse  $y \in \Gamma$  tel que  $x * y = y * x = e$
- Parfois, on écrit  $xy$  au lieu de  $x * y$ .

**Définition 1.28.** On dit que  $\Gamma$  est **abélien (ou commutatif)** si on a de plus  $xy = yx$  pour tous  $x, y$  de  $\Gamma$ . Dans ce cas on notera souvent  $+$  la loi,  $0$  l'élément neutre, et  $-x$  la symétrique de  $x$  qu'on appelle alors l'opposé de  $x$ .

**Définition 1.29.** Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux groupes. Une application  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  est un morphisme de groupes si  $f(xy) = f(x)f(y)$  pour tous  $x, y$  de  $\Gamma$ . Si  $f$  est de plus bijective, alors  $f^{-1}$  est aussi un morphisme et on dit que  $f$  est un isomorphisme de  $\Gamma$  sur  $\Gamma'$ . Un isomorphisme de  $\Gamma$  sur lui-même s'appelle un automorphisme de  $\Gamma$ .

**Définition 1.30.** On dit qu'une partie  $\Lambda$  d'un groupe  $\Gamma$  est un **sous-groupe** de  $\Gamma$  si  $\Lambda$  est non vide et si les relations

$$x \in \Lambda \text{ et } y \in \Lambda \text{ impliquent } xy^{-1} \in \Lambda$$

**Définition 1.31.** Soient  $\Gamma$  un groupe et  $S$  une partie de  $\Gamma$ . Alors il existe un plus petit sous-groupe  $\Lambda$  de  $\Gamma$  contenant  $S$ . On l'appelle **sous-groupe engendré par  $S$**  et on le note  $\langle S \rangle$ .

**Définition 1.32.** Soient  $\Gamma$  un groupe et  $g \in \Gamma$ . **L'ordre** de  $g$  est le plus petit entier  $n > 0$  (s'il existe) tel que  $g^n = e$ . Si  $g^n \neq e$  pour tout  $n > 0$ , on dit que  $g$  est d'ordre infini. Si  $n = 2$  alors  $g$  est une **involution**.

**Définition 1.33.** Soient  $E$  un ensemble et  $S(E)$  l'ensemble des bijections de  $E$  dans  $E$ . Alors  $S(E)$  muni de la composition  $\circ$  des applications est un groupe.

Quand  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $S_n$  pour  $S(E)$  et on appelle ce groupe **le groupe symétrique** sur  $n$  lettres (ou  $n$  éléments).

**Définition 1.** Un groupe est dit **cyclique** s'il est engendré par un seul élément et fini.

**Définition 1.34.** On appelle **groupe diédral** tout groupe non abélien engendré par deux éléments d'ordre 2, distincts.

**Définition 1.35.** Un *graphe de Cayley* est un graphe obtenu à partir d'un groupe  $\Gamma$ , d'une partie  $S$  de  $\Gamma$  ne contenant pas l'élément neutre et vérifiant  $s \in S \iff s^{-1} \in S$ . Les sommets sont les éléments de  $\Gamma$ , les arêtes sont les paires  $\{a, as\}$  avec  $a \in \Gamma$  et  $s \in S$ . Le graphe obtenu à partir de  $\Gamma$  et  $S$  sera noté  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ .

# Chapitre 2

## Le $(\Delta, D)$ -problème et les graphes de Moore

### 2.1 Introduction

Le but d'un réseau, quelle que soit sa nature (informatique ou non), est de connecter des composants de telle façon que chacun d'entre eux puisse joindre tous les autres (i.e. on cherche à construire des réseaux connexes). Dans la majorité des cas, et a fortiori dans le monde informatique, on désire que le nombre de composants connectés soit le plus grand possible. Cependant, on est bien souvent limité par des contraintes physiques de réalisation, exprimées sous la forme de paramètres. Dans la problématique qui intéresse, on en retient deux : le degré maximum  $\Delta$ , qui limite le nombre de voisins possibles pour chacun des composants du réseau (représentés par les sommets du graphe) et le diamètre  $D$  qui est la distance maximale qui peut exister entre deux composants du réseau (en effet, l'efficacité globale du réseau est dépendante de cette quantité qui détermine la vitesse des échanges entre les composants).

Ce problème a été posé en 1964 par Elspas [24] sous la forme suivante :

**Quel est le nombre maximum de sommets d'un  $(\Delta, D)$ -graphe ?**

Un  $(\Delta, D)$ -graphe est un graphe de degré maximum  $\Delta$  et de diamètre  $D$ . La borne obtenue sur le nombre maximum de sommets d'un  $(\Delta, D)$ -graphe est appelée borne de Moore (du nom de l'auteur qui est à l'origine des résultats qui vont suivre). Les graphes de Moore sont les  $(\Delta, D)$ -graphes atteignant cette borne.

## 2.2 Graphes non orientés

Le  $(\Delta, D)$ -problème consiste en la construction de  $(\Delta, D)$ -graphes, des graphes de degré maximum  $\Delta$  et de diamètre  $D$ , ayant le plus grand nombre possible de sommets. Une borne théorique pour ce nombre est donnée par Moore de la manière suivante :

Soit  $G = (V, E)$  un  $(\Delta, D)$ -graphe, et soit  $x$  un sommet quelconque de  $G$ . Le nombre de sommets à distance  $i$  de  $x$  est majoré par  $\Delta(\Delta - 1)^{i-1}$ .

Donc :

$$|V| \leq 1 + \sum_{i=1}^D \Delta(\Delta - 1)^{i-1} = \begin{cases} 2D + 1 & \text{si } \Delta = 2 \\ \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2} & \text{si } \Delta \geq 3 \end{cases}$$

Les graphes satisfaisant l'égalité sont appelés *graphes de Moore*.

Cependant, l'égalité n'est pas atteinte très souvent. Outre **les graphes complets** et **les cycles impairs**, seulement deux autres graphes de Moore sont connus [29] .

Il s'agit du graphe de Petersen (fig 2.2) , pour  $D = 2$  et  $\Delta = 3$ , et du graphe de Hoffman-Singleton (fig 2.3) , pour  $D = 2$  et  $\Delta = 7$ .

Pour  $D = 2$  et  $\Delta = 57$ , l'existence est possible mais n'est pas prouvée [44].

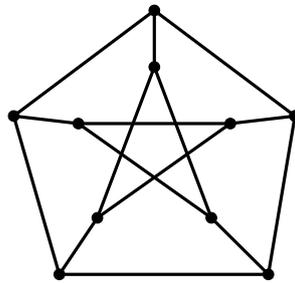


Figure 2.1

Si  $D > 2$  et  $\Delta > 2$ , il n'existe aucun  $(\Delta, D)$ -graphe de Moore [9] [21] .

Certains résultats partiels ont été établis par Friedman [28] .

Finalement, pour  $D \geq 3$  et  $\Delta = 2$ , les graphes de Moore sont les cycles de longueur impaire [44].

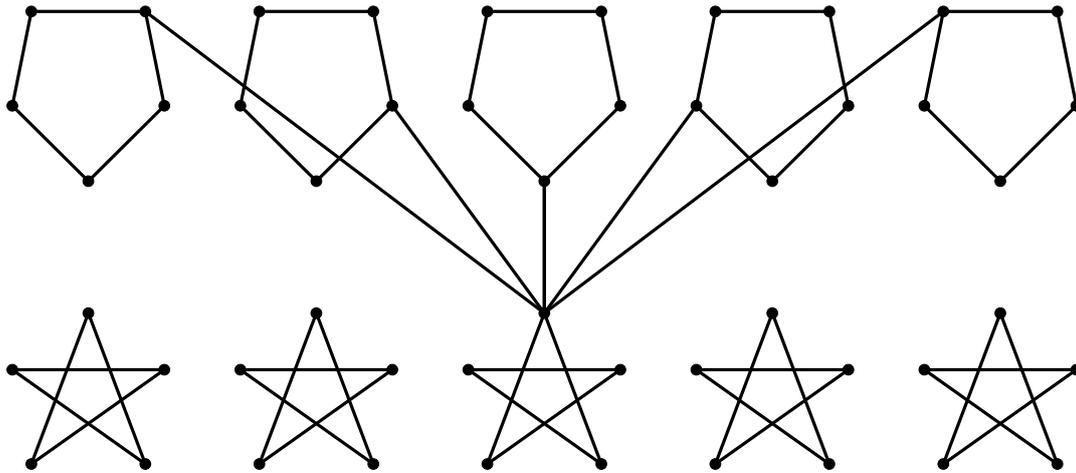


Figure 2.2

## 2.3 Graphes orientés

Dans ce cas, on s'intéresse à la construction de  $(\Delta, D)$ -graphes orientés, ayant le plus grand nombre possible de sommets.

De façon analogue à celle du cas non orienté, une borne théorique de Moore est obtenue de la manière suivante :

Soit  $G = (V, E)$  un  $(\Delta, D)$ -graphe orienté ( $\Delta$  étant le demi-degré extérieur maximum, et le cas où il représente le demi-degré maximum inférieur se traite de manière similaire) , et soit  $x$  un sommet quelconque de  $G$ . Le nombre de sommets à distance  $i$  de  $x$  est borné supérieurement par  $\Delta^i$ .

Donc :

$$|V| \leq \sum_{i=1}^D \Delta^i = \begin{cases} D + 1 & \text{si } \Delta = 1 \\ \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta - 1}, & \text{si } \Delta \geq 2. \end{cases}$$

Néanmoins, les seuls graphes atteignant cette borne sont **les graphes orientés complets** (pour  $D = 1$ ) et **les circuits** (pour  $\Delta = 1$ ) [17] .

## 2.4 Graphes bipartis non orientés

Soit  $b_{\Delta, D}$  le nombre maximum de sommets que peut avoir un  $(\Delta, D)$ -graphe biparti. Alors,  $b_{\Delta, D}$  ne peut excéder la borne de Moore obtenue de la manière suivante :

Soit  $x$  un sommet quelconque de  $G$ , Alors

1. Si  $i \leq D - 1$ ,  $x$  possède au plus  $\Delta(\Delta - 1)^{i-1}$  sommets à distance  $i$ .
2. Si  $i = D$ , en utilisant le fait que  $G$  est biparti, au plus  $(\Delta - 1)^{D-1}$  sommets sont à distance  $D$  de  $x$ .

Par conséquent :

$$b_{\Delta,D} \leq 1 + \Delta \sum_{i=1}^{D-1} (\Delta - 1)^{i-1} + (\Delta - 1)^{D-1} = \begin{cases} 2D & \text{si } \Delta = 2 \\ \frac{2(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2} & \text{si } \Delta \geq 3. \end{cases}$$

Les graphes bipartis satisfaisant l'égalité sont appelés **graphes bipartis de Moore**. De tels graphes existent dans les cas suivants :

- $\Delta = 2$ , ces graphes étant les cycles de longueur  $2D$ ,
- $D = 2$ , ces graphes étant les graphes bipartis complets équilibrés,
- Si  $D = 3, 4$  ou  $6$ , des graphes bipartis de Moore existent si  $\Delta - 1$  est une puissance d'un nombre premier [13], auquel cas, certains sont donnés par les graphes d'incidence de certaines géométries projectives [22] [43].

## 2.5 Graphes bipartis orientés

Les graphes considérés sont bipartis, orientés et réguliers. Voyons d'abord le nombre maximum de sommets que peut avoir un tel graphe de demi-degré maximum  $\Delta$  et de diamètre  $D$ .

**Proposition 2.1.** [2][3] Soit  $G = (V, E)$ , un graphe biparti orienté, de demi-degré maximum  $\Delta$  et de diamètre  $D$ .

$$\text{Alors, } |V| \leq \begin{cases} D + 1 & \text{si } \Delta = 1 \text{ et } D \text{ est impair} \\ D & \text{si } \Delta = 1 \text{ et } D \text{ est paire} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ et } D \text{ est impair} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - \Delta}{\Delta - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ et } D \text{ est paire.} \end{cases}$$

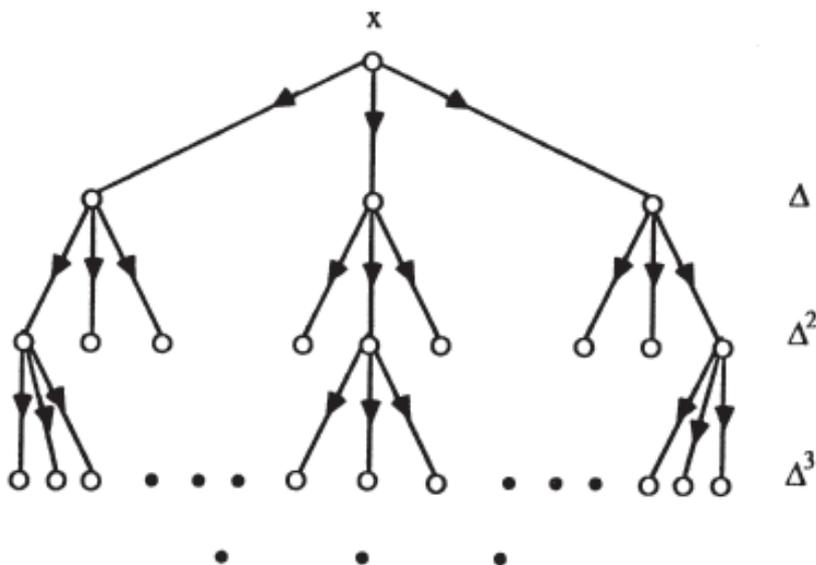


Figure 2.4.

**Preuve.** Soient  $V_1$  et  $V_2$  les deux stables définis par la bipartition du graphe  $G$ , tels que  $|V_1| \geq |V_2|$ . Supposons que  $\Delta$ , le demi-degré maximum, soit atteint pour des demi-degrés extérieurs (sinon, au lieu de considérer une décomposition en couches à partir du sommet  $x$ , il suffit d'en considérer une vers le sommet  $x$ ).

Si  $D = 2p + 1$ , alors en considérant une décomposition en couches à partir d'un sommet  $x$  de  $V_1$

et en remarquant que pour  $i \leq D - 1$ , au plus  $\Delta^i$  sommets sont à distance  $i$  de  $x$ , nous avons :

$$|V_1| = \sum_{i=0}^p |N_i^{2i}(v)| \leq \sum_{i=0}^p \Delta^{2i} = \frac{\Delta^{2(p+1)} - 1}{\Delta^2 - 1}$$

Comme  $|V_1| \geq |V_2|$ , nous obtenons le résultat énoncé.

Si  $D = 2p$ , considérons une décomposition en couches à partir d'un sommet  $x$  de  $V_2$  et remarquons également que pour  $i \leq D - 1$ , au plus  $\Delta^i$  sommets sont à distance  $i$  de  $x$ . Aussi,

nous avons :

$$|V_1| = \sum_{i=0}^p |N_i^{2i+1}(v)| \leq \sum_{i=0}^p \Delta^{2i+1} = \Delta \frac{\Delta^{2p} - 1}{\Delta^2 - 1}$$

Nous obtenons ainsi, tout comme dans le cas où  $D$  est impair, le résultat énoncé.

**Remarque 2.1.** Notons  $b'_{\Delta,D}$ , la borne donnée par Proposition 2.1, avec  $\Delta \geq 2$ .

$$b'_{\Delta,D} = \begin{cases} 2 \frac{\Delta^{2p} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ et } D = 2p - 1 \text{ est impair} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - \Delta}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ et } D = 2p \text{ est paire.} \end{cases}$$

Donc :  $b'_{\Delta,2p} = \Delta * b'_{\Delta,2p-1}$

Tout  $(\Delta, D)$ -graphe biparti orienté d'ordre  $b'(\Delta, D)$  est appelé graphe biparti orienté de Moore.

**Remarque 2.2.** [2] [3] La condition nécessaire pour qu'un  $(\Delta, D)$ -graphe biparti orienté  $G = (V, E)$  soit de Moore est qu'il soit régulier et antisymétrique. Aussi, nous écrivons  $(d, D)$ -graphe dès lors qu'il s'agit d'un graphe régulier (de Moore). De tels graphes existent dans les cas suivants :

- $d = 1$  Les circuits de longueurs  $2p$ , si  $D = 2p$  ou  $D = 2p - 1$ ,
- $D = 2$  les graphes bipartis orientés complets,
- $D = 3, 4$  nous avons les résultats suivantes.

**Remarque 2.3.** [2][3] Notons que  $b'(d, 2p) = d.b'(d, 2p - 1)$ . Par ailleurs, si  $G$  est un  $(d, D)$ -graphe biparti orienté ( $d$ -régulier) d'ordre  $n$ , alors  $LG$ , le graphe représentatif des arcs de  $G$ , est un  $(d, D')$ -graphe biparti orienté, où  $D' = D$  ou  $D + 1$ , d'ordre  $dn$ .

**Proposition 2.2.** [2][3] Un graphe biparti orienté de Moore est  $d$ -fortement connexe.

**Proposition 2.3.** [2][3] Si  $G$  est un  $(d, 2p - 1)$ -graphe biparti orienté de Moore, alors  $LG$  est un  $(d, 2p)$ -graphe biparti orienté de Moore.

**Corollaire 2.1.** [2][3] Si pour un couple de valeurs  $(d, 2p)$ , il n'existe pas de  $(d, 2p)$ -graphe biparti orienté de Moore, alors il n'existe pas non plus de  $(d, 2p-1)$ -graphe biparti orienté de Moore.

**Théorème 2.1.** [2][3] Si  $p > 2$ , alors il ne peut exister de  $(d, 2p)$ -graphes bipartis orientés de Moore.

**Corollaire 2.2.** [2][3] Il ne peut exister de  $(d, D)$ -graphes bipartis orientés de Moore que si  $D = 3$  ou  $D = 4$ .

## 2.6 Graphes bipartis orientés de Moore de diamètre 3 et 4

Considérons le graphe  $G(d, n) = (V, E)$ , où  $n \geq 2d$ , construit de la manière suivante : L'ensemble  $V$  des sommets, d'ordre  $n$  pair, est composé des entiers naturels compris entre 0 et  $n - 1$ . Un sommet  $v$  pair, possède comme successeurs les sommets impairs qui s'écrivent sous la forme  $v + 2i + 1$ , où  $0 \leq i \leq d - 1$ , et les successeurs d'un sommet  $v$  impair s'écrivent sous la forme  $v + 2id + 1$ , avec  $0 \leq i \leq d - 1$ , les additions étant effectuées modulo  $n$ .

**Remarque 2.4.** [2][3] *Il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le graphe  $G(d, n)$  soit régulier est que  $n$  ne s'écrive pas sous la forme  $n = 2kd$ , avec  $k = 1..d - 1$ .*

D'après la proposition 2.1 , un  $(d, 3)$ -graphe biparti orienté de Moore doit avoir  $n = 2(d^2 + 1)$  sommets.

Pour simplicité , nous noterons  $G(d)$  le graphe  $G(d, 2(d^2 + 1))$ .

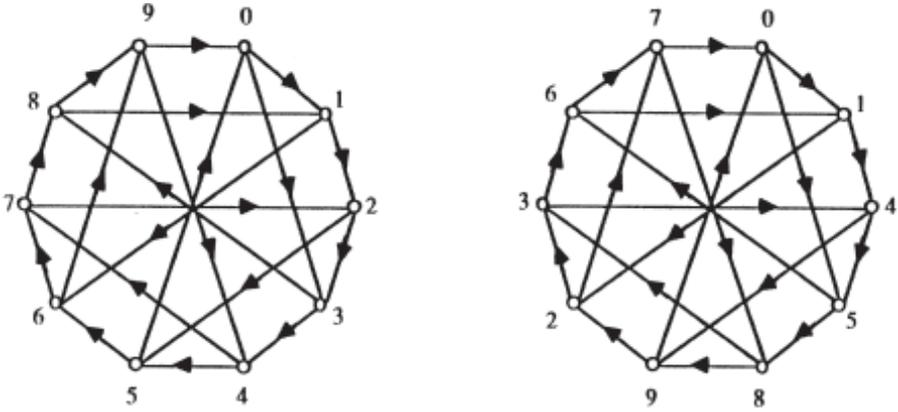
**Proposition 2.4.** [3] *Le graphe  $G(d)$  est sommet-transitif.*

**Remarque 2.5.** [3] *Les sommets de  $G(d)$  sont disposés en un circuit hamiltonien, induit par l'ordre naturel des entiers modulo  $N$ .*

**Proposition 2.5.** [3] *Le diamètre de  $G(d)$  est égal à 3.*

**Corollaire 2.3.** [3] *Pour toute valeur de  $d$ , les graphes  $G(d)$  et  $LG(d)$  sont des graphes bipartis orientés de Moore.*

**Preuve.** Le graphe  $G(d)$  est  $d$ -régulier, de diamètre 3 et possède  $2(d^2 + 1)$  sommets. Le graphe  $LG(d)$  est  $d$ -régulier, de diamètre 4 et possède  $2d(d^2 + 1)$  sommets. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que de tels graphes bipartis orientés soient de Moore.



$G(2)$   
Figure 2.5.

# Chapitre 3

## Graphes de Cayley

### 3.1 Introduction

C'est Arthur Cayley qui, le premier, a eu l'idée de représenter les groupes par des graphes en faisant correspondre un point à chaque élément du groupe et en joignant deux points par un arc si le second est multiple du premier par un générateur [20]. Nous allons voir que cette définition permet d'établir une connexion intéressante entre la théorie des groupes et la théorie des graphes. Ces graphes ont été intensément étudiés ces dernières années car ce sont de bons modèles pour les réseaux d'interconnexions.

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord les principaux résultats concernant les graphes de Cayley et donnons ensuite les graphes de Cayley sur les groupes cycliques qui sont appelés les graphes circulants.

### 3.2 Les graphes de Cayley

#### 3.2.1 Définitions et résultats préliminaires

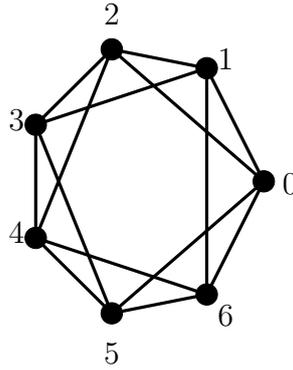
**Définition 3.1.** Soient  $\Gamma$  un groupe fini dont la loi de composition est notée multiplicativement et  $S$  un sous-ensemble de  $\Gamma$  ne contenant pas l'élément neutre. Alors le graphe de Cayley orienté  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  est défini comme suit :

- l'ensemble des sommets est  $\Gamma$ ,
- l'ensemble des arcs est constitué des couples  $(a, as)$  pour  $a \in \Gamma$  et  $s \in S$ .

Si de plus, pour tout élément  $s$  de  $S$ , son inverse  $s^{-1}$  est dans  $S$  alors le graphe de Cayley non orienté (aussi considéré comme orienté symétrique)  $\text{Cay}(G, S)$  est défini de la manière suivante :

- l'ensemble des sommets est  $\Gamma$ ,
- l'ensemble des arêtes est constitué des paires  $\{a, as\}$ , pour  $a \in \Gamma$  et  $s \in S$ .

**Exemple 3.1.**



Le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  avec  $S = \{1, 2, 5, 6\}$ .

**Figure 3.1**

**Propriété 3.1.** *Le graphe de Cayley est naturellement un espace métrique : il suffit de décréter que chaque arête est de longueur 1.*

**Définition 3.2.** *Une géodésique entre deux sommets dans le graphe de Cayley est un chemin de longueur minimale (un tel chemin n'est pas nécessairement unique). Un triangle est la donnée de trois sommets du graphe de Cayley, ainsi que de trois géodésiques reliant ces points deux à deux qu'on appellera côtés du triangle.*

**Proposition 3.1.** [30] *Un graphe de Cayley  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  est connexe si et seulement si l'ensemble  $S$  est un ensemble de générateurs du groupe  $\Gamma$ . En d'autres termes, il est connexe si tout élément de  $\Gamma$  est le produit d'éléments de  $S$ .*

**Définition 3.3.** *Un graphe de Cayley est un graphe simple, orienté, sans boucle et sans arête multiple, régulier de degré entrant et de degré sortant égal au nombre d'éléments de  $S$ .*

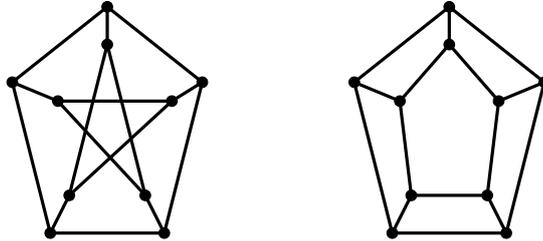
**Théorème 3.1.** [34] *Tout groupe fini est isomorphe à un groupe de permutations.*

Par exemple  $Z_n$  le groupe des entiers modulo  $n$  est un groupe additif isomorphe au groupe des applications bijectives  $\{x \rightarrow x + p \pmod{n}, 0 \leq p \leq n - 1\}$ . Ces applications sont des permutations de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Tout graphe de Cayley peut donc être défini sur un groupe de permutations.

**Proposition 3.2.** [36] [37] *Les graphes de Cayley sont des graphes sommet-transitifs.*

**Remarque 3.1.** [36] [37] *Tout graphe sommet-transitif n'est pas forcément un graphe de Cayley*

Le graphe de Petersen, dessiné à gauche, est un graphe sommet-transitif, mais n'est pas isomorphe à un graphe de Cayley d'un groupe à 10 éléments. Son groupe d'automorphismes est d'ailleurs égal isomorphe au groupe des permutations d'un ensemble à 5 éléments. Il existe en réalité deux groupes à 10 éléments non isomorphes, le produit direct abélien dessiné ci-dessus et le groupe des symétries d'un pentagone, qui fait partie des groupes diédraux.



Le graphe de Petersen

$Z/2Z \times Z/5Z$

**Figure 3.2**

**Proposition 3.3.** [15] *Un graphe de Cayley connexe admet un circuit eulérien.*

**Proposition 3.4.** [15] *La somme de deux graphes est connexe si et seulement si ces graphes sont connexe.*

**Propriété 3.2.** *Si  $G$  et  $G'$  sont les graphes de Cayley  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  et  $\text{Cay}(\Gamma', S')$  alors  $G \square G'$  est un graphe de Cayley sur le groupe  $\Gamma \times \Gamma'$  engendré par :*

$$S' = \{(s, e') \mid s \in S\} \cup \{(e, s') \mid s' \in S'\}$$

où  $e$  et  $e'$  sont respectivement les éléments neutres de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$

Ainsi par exemple la grille torique  $TM(n)^d$  est un graphe de Cayley sur  $(\mathbb{Z}_n)^d$  où les générateurs sont les  $n$ -uplets dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une qui vaut 1 ou  $-1$ .

### 3.2.2 Graphes de Cayley et hamiltonicité

**Théorème 3.2.** [35] *Tout graphe de Cayley défini sur un groupe abélien est hamiltonien.*

**Conjecture 3.1.** [5] *Tout graphe de Cayley connexe  $2k$ -régulier sur un groupe abélien se décompose en  $k$ -cycles hamiltoniens.*

Cette conjecture a été vérifiée par Bermond, Favaron et Mahéo [14] pour les graphes de degré 4 .

Depuis, des progrès ont été obtenus grâce aux résultats de Liu [31] dans le cas des graphes de Cayley définis sur un groupe abélien d'ordre impair [32]. La conjecture a aussi été montrée pour des graphes particuliers tels que *la grille torique* de dimension  $n$  notée  $TM(n)^d$  ou l'hypercube  $H(n)$  de dimension  $n$  (qui sont décomposables en  $n/2$  cycles hamiltoniens).

Le résultat sur la grille torique résulte du fait que la somme cartésienne de deux cycles est décomposable en deux cycles hamiltoniens. Pour l'hypercube, cela résulte aussi du résultat suivant dû à Aubert et Schneider [8] : à savoir que la somme cartésienne d'un cycle et d'un graphe  $G$  formé de deux cycles hamiltoniens est décomposable en trois cycles hamiltoniens. Plus généralement, la conjecture suivante est toujours ouverte, même si de nombreux cas ont déjà été prouvés par Stong [45].

Dans ce contexte, Bermond propose la conjecture suivante :

**Conjecture 3.2.** (Bermond, 1978 [12]) *Si  $G$  et  $G'$  sont décomposables en cycles hamiltoniens, alors la somme cartésienne  $G \square G'$  l'est aussi.*

**Théorème 3.3.** [47] *Tout graphe de Cayley défini sur un groupe d'ordre  $p^n$ , où  $p$  est impair et  $n \geq 1$  possède un cycle hamiltonien.*

**Théorème 3.4.** [40] *Soit  $\Gamma$  un groupe fini engendré par trois involutions  $\alpha, \beta, \gamma$  telles que  $\alpha\beta = \beta\alpha$ . Alors le graphe de Cayley  $G = \text{Cay}(\Gamma, \{\alpha, \beta, \gamma\})$  possède un cycle hamiltonien.*

**Théorème 3.5.** [41] *Soit  $\Gamma$  un groupe fini engendré par deux éléments  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $(\alpha\beta)^2 = 1$ . Alors le graphe de Cayley  $G = \text{Cay}(\Gamma, \{\alpha, \beta\})$  contient un cycle hamiltonien.*

### 3.3 Les graphes circulants et la conjecture d'Ádám

#### 3.3.1 Définitions et résultats préliminaires

Soit  $Z$  l'ensemble des entiers relatifs,  $Z_N = Z/NZ = \{0, 1, \dots, N-1\}$  l'ensemble des classes de congruence modulo  $N$ , et  $S$  un sous-ensemble de  $Z_N$ ;  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , où  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ .

Nous construisons alors le graphe  $G = (V, E)$  sur l'ensemble de sommets  $V = \{0, 1, \dots, N-1\}$  et des arêtes reliant le sommet  $i$  à tous les sommets  $i + a_j$  et  $i - a_j$ , pour  $j = 1..k$ , les additions étant effectuées modulo  $N$ .

**Définition 3.4.** *Le graphe  $G$ , habituellement noté  $G_N(a_1, a_2, \dots, a_k)$  est appelé graphe circulant ou circulant tout simplement. L'ensemble  $S = \langle a_j \rangle$  est appelée séquence de pas et les  $a_j$  sont les pas de  $G$ .*

**Remarque 3.2.** *Les graphes circulants sont des graphes de Cayley ayant des propriétés intéressantes, notamment en termes de symétries (leur matrice d'adjacence est circulante, c'est à dire que la ligne  $(i+1)$  est le décalage cyclique de 1 vers la droite de la ligne  $i$ ), diamètre, connexité; ce qui en fait des candidats intéressants pour être utilisés comme topologies de réseaux d'interconnexion.*

**Remarque 3.3.** *Notons que le graphe circulant n'est pas changé lorsque le saut  $a_j$  est remplacé par  $N - a_j$ . Il s'ensuit que nous pouvons supposer que  $a_k < \frac{N+1}{2}$ . De plus, si  $a_k \neq \frac{N}{2}$ , alors le circulant  $G_N(a_1, a_2, \dots, a_k)$  est toujours régulier, de degré  $2k$ , tandis que si  $N$  est pair et  $a_k = \frac{N}{2}$  (le saut correspondant est appelé saut diagonal), alors il est  $(2k-1)$ -régulier.*

Considérons le circulant  $G_9(1, 4)$  de la figure suivante et notons que le saut de 4 (nous appellerons saut de  $a$  toutes les arêtes d'un circulant correspondant au pas  $a$ ) crée un cycle hamiltonien. Si nous redessinons  $G_9(1, 4)$  par rapport à ce cycle hamiltonien (au lieu de celui avec un saut de 1), nous remarquons que les arêtes initialement obtenues par le saut de 1 correspondant à celles avec un saut de 2. Ainsi, les circulants  $G_9(1, 4)$  et  $G_9(1, 2)$  sont isomorphes.

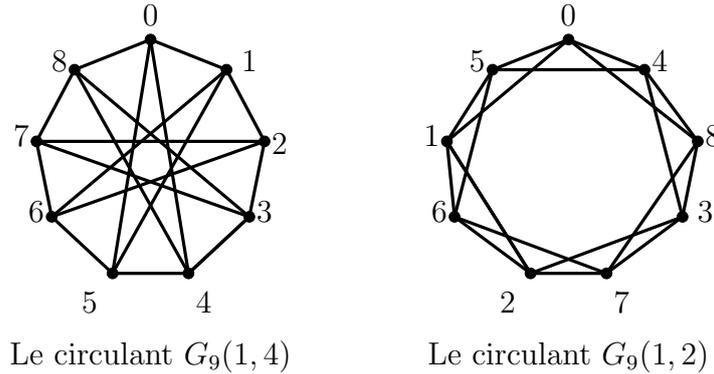


Figure 3.6.

La transformation utilisée dans cet exemple peut être généralisée de la manière suivante.

**Définition 3.5.** Soient  $S$  et  $S'$  les deux séquences de sauts des circulants  $G$  et  $G'$  respectivement. Nous dirons que les séquences  $S$  et  $S'$  sont équivalentes s'il existe dans  $\mathbf{Z}_N$  un entier  $r$ , relativement premier à  $N$ , tel que  $S = rS'$ , où  $rS' = \{rs', s' \in S'\}$ .

**Conjecture 3.3.** [1] Deux circulants  $G$  et  $G'$  sont isomorphes au sens Ádám (ou Ádám isomorphes) si et seulement si leurs séquences correspondantes de sauts  $S$  et  $S'$  sont équivalentes .

Cependant, en 1970 B. Elspas et J. Turner [25] ont produit plusieurs contre-exemples. En effet, soient  $G_{16}(1, 2, 7)$  et  $G_{16}(2, 3, 5)$  et soit  $r$  un entier relativement premier à 16 ; or dans  $G_{16}(2, 3, 5)$ , en établissant une fonction  $f$  entre les points de  $x = \{0, 1, \dots, 15\}$  telle que :

$$f(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \text{ est pair} \\ (i + 4) \bmod 16 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

On peut vérifier qu'il est isomorphe à  $G_{16}(1, 2, 7)$ .

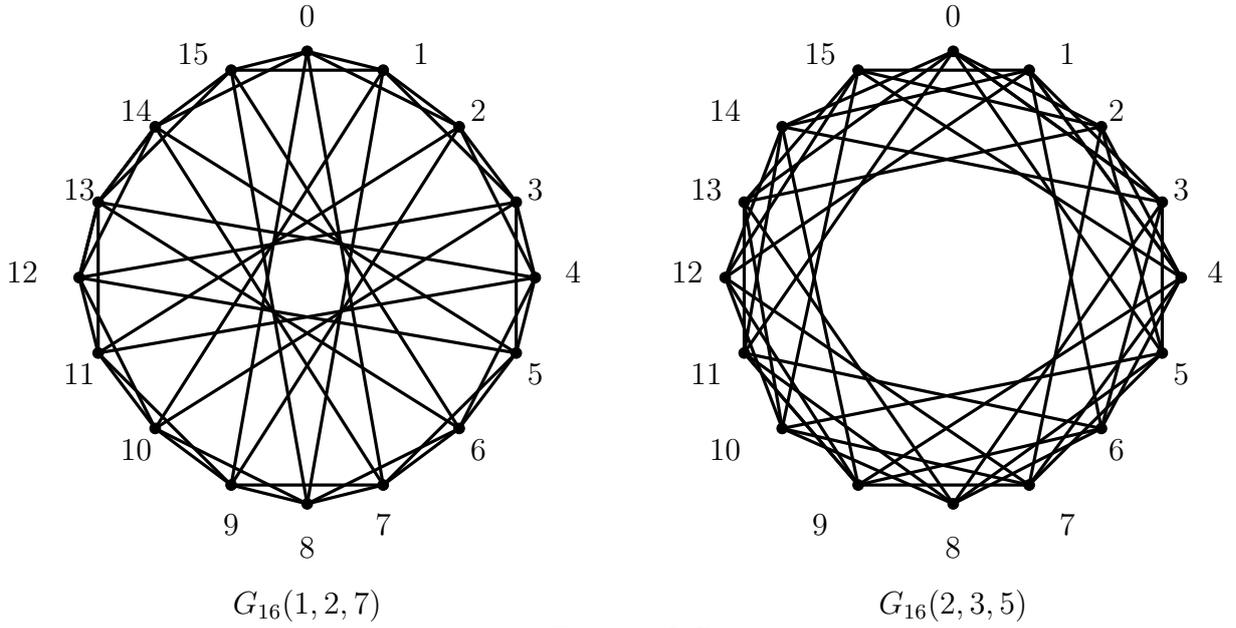


Figure 3.7

### 3.3.2 La conjecture d'Ádám pour les circulants à deux pas

**Proposition 3.5.** [3] Soient  $a, b, s$ , et  $N$  des entiers naturels tels que :

- (i)  $\text{pgcd}(N, a, b) = 1$ ,
- (ii)  $N = 2(a + b) = 2(s + 1)$

Alors les séquences de sauts  $\{1, s\}$  et  $\{a, b\}$  sont équivalentes dans  $\mathbf{Z}_N$ , et par conséquent, les circulants  $G_N(1, s)$  et  $G_N(a, b)$  sont Ádám isomorphes.

**Preuve.** Il est clair que sous les hypothèses ci-dessus, nous avons soit  $\text{pgcd}(N, a) = 1$  ou bien  $\text{pgcd}(N, b) = 1$ . Supposons que  $\text{pgcd}(N, a) = 1$  (le cas  $\text{pgcd}(N, b) = 1$  est similaire).

Si nous multiplions la séquence  $\{1, \frac{N}{2} - 1\}$  par  $a \pmod{N}$ , nous obtenons  $\{a, a(\frac{N}{2} - 1)\}$

Puisque  $N$  est pair, alors  $a$  est nécessairement impair, soit  $a = 2p + 1$ .

$$a(\frac{N}{2} - 1) = \frac{N}{2}(2p + 1) - a = pN + \frac{N}{2} - a = pN + b \equiv b \pmod{N}.$$

Par conséquent, les séquences  $\{1, s\}$  et  $\{a, b\}$  sont équivalentes et les circulants  $G_N(1, s)$  et  $G_N(a, b)$  sont Ádám isomorphes.

**Théorème 3.6.** [3] Soient  $a, b, s$  et  $N$  des entiers naturels tels que  $a, b, s \leq N$ . Alors les circulants  $G_N(1, s)$  et  $G_N(a, b)$  sont isomorphes si et seulement si ils sont Ádám isomorphes.

**Théorème 3.7.** [3] *Les circulants  $G_N(a, b)$  et  $G_N(a', b')$ , avec  $a < b < \frac{N}{2}$  et  $a' < b' < \frac{N}{2}$ , sont isomorphes si et seulement si ils sont Ádám isomorphes.*

**Remarque 3.4.** *Deux circulants à deux pas sont isomorphes si et seulement si ils sont Ádám isomorphes.*

# Chapitre 4

## Borne de Moore dans les graphes de Cayley

### 4.1 Introduction

Le problème de Moore, consiste à construire des graphes (non orientés) ayant un nombre de sommets égal à la borne théorique.

Les recherches dans ce sens ont permis de constater que de tels graphes, non triviaux (qui ne sont ni des cycles, ni des graphes complets), existent très rarement (deux seulement sont connus).

Le problème de Moore, a également été abordé en le restreignant aux graphes de Cayley, ou aux graphes de Cayley abéliens.

Dans ce chapitre, nous donnons d'abord une borne supérieure pour le nombre de sommets d'un graphe de Cayley, puis nous construisons des graphes de Cayley de diamètre deux atteignant cette borne.

### 4.2 Graphes de Cayley

Dans tout qui suit, sauf indication contraire, les graphes considérés sont des graphes de Cayley de degré  $\Delta$  et de diamètre 2. Soit  $C_{\Delta,2}$  le nombre maximum de sommet d'un  $(\Delta, 2)$ -graphe de Cayley.

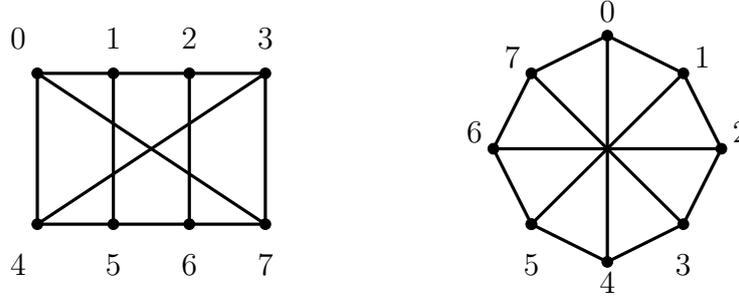
**Proposition 4.1.** [39] *Soit  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$  un graphe de Cayley, sur un groupe quelconque, de degré  $\Delta$  et de diamètre 2.*

*Alors :*

$$C_{\Delta,2} \leq \Delta^2 - 1 \quad \text{si } \Delta \geq 3$$

**Exemple 5.** Soient  $\Gamma = Z_8$  et  $S = \{-1, 1, 4\}$ , alors le graphe de Cayley associé est le graphe de Möbius .

Le graphe de Cayley  $Cay(Z_8, \{-1, 1, 4\})$  est un graphe qui atteint la borne  $C_{\Delta,2}$  pour  $\Delta = 3$ .



Le graphe de Möbius.

Figure 4.1.

**Remarque 4.1.** [46] Soit  $\Delta = 2q+1$  et "q" est une puissance d'un nombre premier. Alors,

$$C_{\Delta,2} \geq \frac{(\Delta + 1)^2}{2}$$

## 4.3 Graphes de Cayley abéliens

### 4.3.1 Cas non orienté

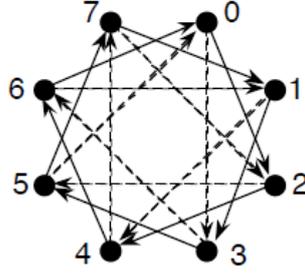
**Proposition 4.2.** (Faber et Dougherty [23]) Notons  $AC_{2d,D}$  le nombre maximum de sommets d'un  $(2d, D)$ -graphe de Cayley abélien.

Alors il existe une constante "c" (dépendant de d et de D), telle que pour chaque  $d \geq 2$  et chaque D,

$$\frac{c2^d}{d!(\ln d)^{1+\log_2 e}} D^d \leq AC_{2d,D} \leq \sum_{i=0}^d 2^i \binom{d}{i} \binom{D}{i}$$

Les  $(\Delta, D)$ -graphes de Cayley abéliens atteignant la deuxième inégalité sont appelés graphes de Cayley abéliens de Moore.

- Si d est fixé et  $D \rightarrow \infty$ , alors  $AC_{2d,D} \leq 2^d D^d / d! + O(D^{d-1})$ .
- Si  $d = 2$  alors  $AC_{4,D} = 2D^2 + 2D + 1$ .
- Si  $d = 3$ , alors la borne de Moore Cayley abélien est :  $AC_{6,D} \leq (4D^3 + 6D^2 + 8D + 3) / 3$
- Si  $D = 2$  et  $\Delta \geq 3$  on a :  $AC_{\Delta,D} \leq \frac{\Delta^2}{2} + O(\Delta)$ .



Un graphe de Cayley de degré 2 et de diamètre 3

Figure 4.2.

### 4.3.2 Cas orienté

**Proposition 4.3.** (Faber et Dougherty [23]) Soit  $\overrightarrow{AC}_{d,k}$  le nombre maximum de sommets que peut avoir un  $(d, k)$ -graphe de Cayley orienté.

$$\text{Alors : } \overrightarrow{AC}_{d,k} \leq \sum_{i=0}^k \binom{d+i-1}{i} = \binom{d+k}{d}$$

Les graphes satisfaisant l'égalité sont appelés graphes de Cayley abéliens orientés de Moore .

- Si  $d$  est fixé et  $k \rightarrow \infty$  alors :  $\overrightarrow{AC}_{d,k} \leq k^d/d! + O(k^{d-1})$ .
- Si  $d = 2$  alors  $\overrightarrow{AC}_{d,k} = \lfloor (k+2)^2/3 \rfloor$ .

**Exemple 4.1.**  $\Gamma$  est le groupe additif de  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ,  $S = \{2, 3\}$

Alors  $G = \text{Cay}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, S)$  est un graphe de Cayley de degré 2 et du diamètre 3 et illustré dans la figure 4.2.

Le  $\text{Cay}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, S)$  est un graphe de Cayley de Moore abélien orienté qui atteint le borne de Cayley Moore Abélien.

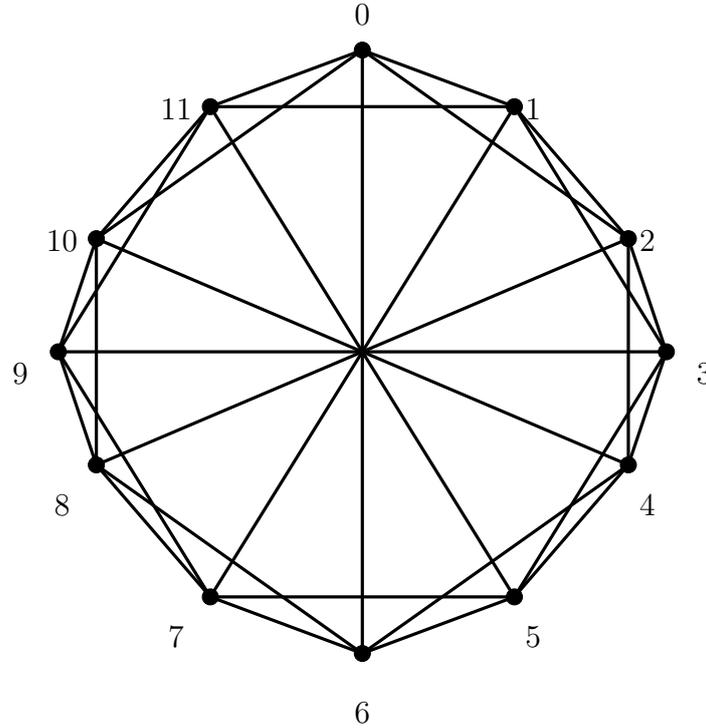
## 4.4 Graphes de Cayley abéliens de degré 2

**Théorème 4.1.** [33] Soit  $\Delta = 3q - 1$ , et  $q$  est une puissance impaire d'un nombre premier. Alors,

$$AC_{\Delta,2} \geq (\Delta + 1)^2/3.$$

**Exemple 4.2.**  $\Gamma$  est le groupe additif de  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ,  $S = \{1, -1, 2, -2; 6\}$

Alors  $G = \text{Cay}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, S)$  est un graphe de Cayley de degré 5 et de diamètre 2 est illustré dans la figure 4.3.  $\text{Cay}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, S)$  est un graphe de Cayley Moore abélien .



Un graphe de Cayley à 12 sommets

**Figure 4.3.**

**Théorème 4.2.** [33] Soit  $\Delta = 4q - 2$ , et  $q$  est une puissance impaire d'un nombre premier. Alors,

$$AC_{\Delta,2} \geq (3/8)(\Delta^2 - 4)$$

## 4.5 Graphes de Cayley cycliques

**Proposition 4.4.** [39] Soit  $CC_{\Delta,2}$  le nombre maximum de sommets d'un graphe de Cayley sur un groupe cyclique de degré  $\Delta$  et de diamètre 2.

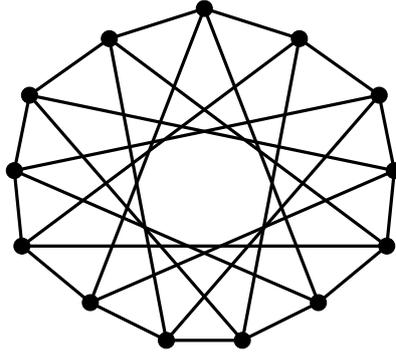
Alors :

$$CC_{\Delta,2} \leq AC_{\Delta,2} \leq 1 + \Delta + \Delta^2/2$$

**Exemple 4.3.**  $\Gamma$  est le groupe additif de  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ,  $S = \{1, 5, -1, -5\}$

Alors  $G = \text{Cay}(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, S)$  est un graphe de Cayley de degré 4 et de diamètre 2 est illustré dans la figure 4.4.

$\text{Cay}(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, S)$  est un graphe de Cayley Moore abélien .



Un graphe de Cayley à 13 sommets

**Figure 4.4.**

**Théorème 4.3.** [33] Soit  $p$  un nombre premier tel que  $p \equiv 2[3]$  et  $\Delta = 5p - 3$ . Alors

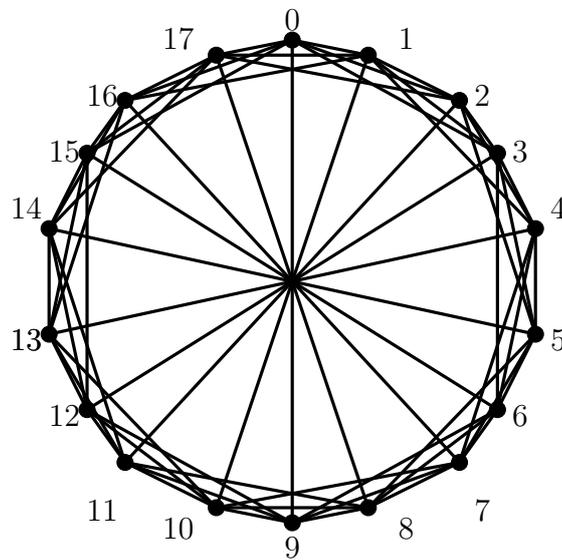
$$CC_{\Delta,2} \geq (9/25)(\Delta + 3)(\Delta - 2).$$

**Exemple 6.** Soit  $\Gamma = Z/18Z$  et  $S = \{1, -1, 2, -2, 3, -3; 9\}$  alors le graphe de Cayley correspond est illustré dans la figure 4.5 suivante. On a  $\Delta = 7$ , alors on peut écrire  $\Delta$  sous la forme suivante :

$$\Delta = 5 \times 2 - 3 \text{ et } 2 \equiv 2[3].$$

$$|Cay(Z/18Z, \{1, -1, 2, -2, 3, -3; 9\})| = 18 \text{ et}$$

Alors le graphe de Cayley  $Cay(Z/18Z, \{1, -1, 2, -2, 3, -3; 9\})$  atteint le borne  $CC_{7,2}$ .



Un graphe de Cayley à 18 sommets

**Figure 4.5.**

# Conclusion

Les graphes de Cayley possèdent de nombreuses propriétés de symétrie et de régularité, ce qui leur permet de constituer d'excellents modèles pour la conception de réseaux d'interconnexion. Les réseaux d'interconnexion ont de nombreux domaines d'applications. On les rencontre notamment dans les télécommunications et l'informatique où il s'agit de concevoir des réseaux, et de les adapter à certaines conditions pratiques et matérielles.

C'est Arthur Cayley qui, le premier, a eu l'idée de les groupes par des graphes en faisant correspondre un point à chaque élément du groupe et en joignant deux points par un arc si le second est multiple du premier par un générateur [20]. De nombreux problèmes métriques sont posés dans les graphes de Cayley.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux graphes de Cayley et aux différentes propriétés qu'ils recèlent, combinatoires telles que l'hamiltonicité et métriques liées notamment à l'utilisation de ces graphes comme modèles de réseaux d'interconnexion. En 1964, Elspas [24] a introduit le désormais classique problème de construction de larges  $(\Delta, D)$ -graphes (graphes de degré maximum  $\Delta$  et de diamètre  $D$ ).

Notre travail de recherche traite principalement du  $(\Delta, D)$ -problème.

Nous considérons le problème de Moore qui consiste à établir une borne supérieure pour le nombre de sommets que peut avoir un graphe de Cayley de degré maximum et de diamètre donnés et étudions l'existence de graphes pour lesquels cette borne est atteinte.

# Bibliographie

- [1] A. Ádám, , Research problem 2-10, *J. Combin. Theory* 2 (1967), 309.
- [2] M. Aïder, Réseaux d'interconnexion bipartis orientés, *Rev. Maghrébine Math.* Volume 1 (1992), No. 1, 79-92.
- [3] M. Aïder, Sur quelques structures combinatoires, Thèse de Doctorat d'Etat USTHB, Soutenue en mars 1999.
- [4] M. Aïder and M.Bessedik, "convexité et p-convexité dans certaines classe de graphes", *Les Annales Maghrébines de l'Ingénieur*, Vol. 12. NO 1. Novembre 1998, 49-51.
- [5] B. Alspach, Research problem 59, *Discrete Math.* 50(1984)115.
- [6] B. Alspach, J-C. Bermound, D. Sotteau. Decomposition into cycles I : Hamilton decompositions. In G. Hahn et al., editors, *Cycles and Rays*, Volume 301 of NATO ASI Series C : Mathematical and Physical Sciences pages 9-18. Kluwer Academic Publishers., Dordrecht, 1990. Proceedings of the NATO Advance Research Workshop on Cycles and Rays : Basic Structures in Finite and Infinite Graphs, Montréal, May 3-7, 1987.
- [7] B. Alspach and T. D. Parsons, Isomorphism of circulant graphs et digraphs, *Discrete Math.* 25(1979) , 97-108.
- [8] J. Aubert and B. Schneider. Décomposition de la somme cartésienne d'un cycle et de l'union de deux cycles en cycles hamiltoniens. *Discrete Mathematics*, 38 : 7-16, 1982.
- [9] E. Bannai and T. Ito. On finite Moore graphs. *J. Fac. Tokyo Univ.* no. 20, 1973, pp. 191-208.
- [10] C. Berge. *Théorie des grahes et ses applications*. Dunod, 2<sup>e</sup> éd., 1967.
- [11] C. Berge. *Graphes*, Dunod, Paris, 1983.
- [12] J. C. Bermound. Hamiltonian decomposition of graphs, directed graphs and hypergraphs. *Advances in Graph Theory, Annals of Discrete Mathematics*, 3 : 21-28, 1987.
- [13] J. C. Bermound, C. Delorme and G. Farhi. Large graphs with given degree and diameter . II, *J. of Comb. Theory, Ser. B*, no. 36, 1984, pp. 32-48.
- [14] J. C. Bermound, O. Favaron, and M. Maheo. Hamiltonian decomposition of Cayley graphs of degree 4. *Journal of Combinatorial Theory*, 46(2) : 142-153, 1989.
- [15] A. Bigard. Propriétés des diagrammes de Cayley. *Série rouge*, tome 4, n°2 (1970), p. 51-56.
- [16] J. Bond and C. Peyrat. Diameter vulnerability in networks, in *Proc. Of Kalamazoo Colloquium*, 1984, *Graph Theory and its Applications to Algorithms and Computer Science*, pp. 123-149, Wiley, 1985.
- [17] W. G. Bridges and S. Toueg. On the impossibility of directed Moore graphs. *J. of Comb. Theory, Ser. B.* no. 29, pp. 339-341, 1980.

- [18] F. Buckley and J. P. Harray, Distance in Graphs, Addison-Wesley Edition, (1990).
- [19] G. Buroch and J. M. Laborde. Somme intersection theorems for Structures. Europ, J. Of Combinatorics, 9 (1988) 207-214.
- [20] Cayley. The theory of groups : graphical representation. American Journal of Mathematics 1 (1878).
- [21] R. M. Damerel. On Moore graphs. Proc . , Cambridge Phil. Soc., no 74 , 1973, pp. 227-236.
- [22] C. Delorme. Grands graphes de degré et diamètre donnés . Europ .J. of Combinatorics, vol. 6, 1985, pp. 291-302.
- [23] R. Dougherty and V. Faber. The degree-diameter problem for several varieties of Cayley graphs. I : The Abelian case, preprint (2001).
- [24] B. Elspas. Topological constraints on interconnexion limited logic. Switching circuits Theory and Logical design, 5 : 133-147, 1964.
- [25] B. Alspas et J. Turner. Graphs with circulants adjacency matrices. J. Combin. Theory (1970) 297-307.
- [26] A. H. Esfahanian. Lower bounds on the connectivities of a graph. J. of Graph Theory, vol. 9, 1985, pp. 503-511.
- [27] X. Fang and M. Xu. On isomorphism of Cayley graphs of small valency. Algebra Colloq, Vol. 1, no 1, 1994, pp. 67-76.
- [28] H. D. Friedman. On the impossibility of certain Moore graphs. J. of Comb. Theory, no. 10, 1971, pp. 245-252.
- [29] A. J. Hoffman and R. R. Singleton. On Moore graphs with diamters 2 and 3. IBM J. Res. Develop. Vol. 4, 1960, pp. 497-504.
- [30] E. Konstantinova. Some problems on Cayley graphs. Linear Algebra and its Applications 429 (2008) 2754-2769.
- [31] J. Liu. Hamiltonian decompositions of Cayley graphs on abelian groups . Discrete Math. 131(1994).
- [32] J. Liu. Hamiltonian decompositions of Cayley graphs on abelian groups of odd order. Journal of Combinatorial Theory, 66 : 75-86, 1996.
- [33] H. Macbeth, J. Šiagiová and J. Širáň. Cayley graphs of given degree and diameter for cyclic, Abelian, and metacyclic groups. Submitted, 2009.
- [34] N. Marlin. Communications structurées dans les réseaux, Thèse de Docteur en sciences STIC, Soutenue en juin 2000.
- [35] D. Marusic, Hamiltonian circuits in Cayley graphs, Discrete Math. 46(1983) 49-54.
- [36] B. D. McKay, C. E. Praeger. Vertex-transitive graphs that are not Cayley graphs . I, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 56 (1994) 53-63.
- [37] B. D. McKay, C. E. Praeger. Vertex-transitive graphs that are not Cayley graphs . II, J. Graph Theory 22 (4) (1996) 321-324.
- [38] B. D. McKay, Miller and J. Širáň. A note large graphs of diameter two and given maximum degree. J. of Combin- Theory Ser. B, 74 : 110-118, 1998.
- [39] M. Miller and J. Širáň . Moore graphs and beyond : A survey of the degree-diameter problem. Electronic J. Combinat., Dynamic survey No. D14 (61pp), 2001.

- 
- [40] E. Rapaport-Strasser. Cayley color groups and Hamilton lines, *Scr. Math.* 24 (1959) 51–58.
  - [41] R.A. Rankin. A campanological problem in group theory II, *Proc. Camb. Phyl. Soc.* 62 (1966) 11–18.
  - [42] J. J. Rotman . An introduction to the theory of groups, volume 148 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1994.
  - [43] R. Singleton. On minimal graphs of maximum even girth. *J. of Comb. theory*, no. 1, 1966, pp. 306-332.
  - [44] Slamin. Diregularity of digraphs close Moore bound, PhD Thesis, Department of Computer Science and Software Engineering, The university of Newcastle (2001).
  - [45] F. Stong. Hamiltonian decompositions of cartesian products of graphs. *Discrete Mathematics*, 90 : 169-190, 1991.
  - [46] J. Šiagiová and J. Širáň. A note on large graphs of diameter two and given degree. *Discrete Math.* 305 : 379-382, 2005.
  - [47] D. Witte. Cayley digraphs of prime power ordre are hamiltonian. *J. Combin. Theory Ser . B* 40 (1984), 107-112.