N⁰ d'ordre : **21/2009-M/M.T.**

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en mathématiques

Spécialité : Géométrie

Par

Ahmed ZEGLAOUI

THÈME

COMPATIBILITE DE STRUCTURE DE POISSON ET DE STRUCTURE PSEUDO-RIEMANNIENNE

Soutenu le 06/05/2009 à 10h, devant le jury composé de :

Mr.	**BETINA**	**Kamel**	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	**AFFANE**	**Atallah**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	**KESSI**	**Arezki**	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	**MEDJDEN**	**Mohamed**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Je tien a remercier Mr Atallah AFFANE de m'avoir encadrer et pour le choix judicieux de mon sujet de recherche. Un grand merci à Mr BETINA Kamel pour avoir accepter de présider mon jury de soutenance et à messieurs Arezki KESSI et Mohamed MEDJDEN d'en faire parti.

Un grand merci a Mr AIT AMRANE Yacine pour ses précieux conseils en matière de rédaction ainsi qu'à son frère Rachid pour son aide pour la collation, pour la même occasion je tiens à remercier Smail CHEMIKH, Mohamed BEN ALI, Hamid FEDDANE.

En fin, un grand merci a tout ce qui m'on aider de près ou de loin afin d'accomplir de ce travail que je dédie a mes parents et a AMIRA DJAAFRI qui nous a quitté il y a 10 ans de cela.

Compatibilité de structure de Poisson et de structure pseudo-riemannienne

Résumé

Une variété kählérienne est munie à la fois d'une structure pseudo-riemannienne (la partie réelle de la métrique hermitienne) et d'une structure symplectique (la partie imaginaire de la métrique hermitienne).
D'autre part, la donnée d'une métrique pseudo-riemannienne et d'une forme symplectique sur une variété différentiable réelle de dimension paire induit une structure presque complexe. On dit que le couple (métrique-forme symplectique) est compatible si la forme symplectique est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de la métrique pseudo-riemannienne; ce qui entraîne l'intégrabilité de la structure presque complexe et on récupère une structure kählérienne.

On se place dans le cas plus général d'une variété différentiable munie d'une métrique pseudo-riemannienne g et d'un champ de bivecteurs π. Le champ π définit un calcul différentiel contravariant (Dérivée de Lie, différentielle extérieure, dérivée contravariante) similaire au calcul différentiel covariant. Au couple (g, π) on associe deux dérivées contravariantes compatibles avec la métrique g.

On définit par la suite deux notions de compatibilité pour le couple (g, π); selon que le champ de bivecteurs soit compatible avec l'une ou l'autre dérivée contravariante. Nous verrons que ces deux notions entraînent que π induit une structure de Poisson sur la variété.
On introduit une nouvelle structure qui est la structure de Poisson pseudo-riemannienne et nous examinons de plus près deux cas particuliers : Les variétés de Riemann-Poisson et les algèbres de Lie pseudo-riemanniennes.

Table des matières

Introduction

L'objet de ce travail est de détailler les travaux de M. Boucetta parus dans ([1], [2], [3], [4]). Le but de ce travail est d'introduire une nouvelle catégorie de variétés différentiables réelles. Il s'agit des variétés de Poisson pseudo-riemanniennes. Tout au long du travail M désignera une variété différentiable (lisse) de dimension n. La donnée d'un champ de bivecteurs π sur M définit un calcul différentiel contravariant, (dérivée de Lie, différentielle extérieure, produit intérieur) similaire au calcul différentiel covariant. On s'étale plus particulièrement sur la notion de dérivée contravariante introduite par Izu Vaisman dans [6].

Nous nous limitons par la suite au cas d'une variété pseudo-riemannienne munie d'un champ de bivecteurs π; nous parlerons dans ce cas du couple (g, π). On associe à ce couple deux champs d'endomorphismes de fibrés sur le fibré tangent et le fibré cotangent. Nous serons alors en mesure d'associer au couple (g, π) deux dérivées contravariantes, dont l'une provient de la connexion de Levi-Civita de la métrique g; tandis que l'autre c'est la dérivée de Levi-Civita contravariante de la métrique duale de g sur le fibré cotangent. On définira par la suite deux notions de compatibilité du couple (g, π) selon que le champ de bivecteurs soit parallèle pour l'une ou l'autre dérivée. Dans les deux cas, le champ π définit bien une structure de Poisson sur la variété M. Après avoir donné une interprétation géométrique pour chacune des deux notions, nous verrons sur un exemple qu'elles sont différentes; cependant, elles coïncident dans le cas symplectique.

Nous introduisons par la suite la notion de variété de poisson pseudo-riemannienne ; nous étudions d'un peu plus près le cas linéaire, (i.e. Les algèbres de Lie pseudo-riemanniennes), ainsi que les variétés de Riemann-Poisson. En guise d'application, nous verrons quelles sont les structures de Poisson compatibles avec la métrique canonique de $\mathbb{R}^3$.

1

Calcul tensoriel sur une variété différentiable

1.1 Algèbre tensorielle

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $V^* = Hom(V, \mathbb{R})$ son dual. On rappelle que le bidual $(V^*)^*$ s'identifie canoniquement à V.

On note par $\langle ., . \rangle$ le crochet de dualité entre V et V^*, il est défini par

$$\langle \alpha, x \rangle = \alpha(x), \qquad \forall x \in V, \ \forall \alpha \in V^*,$$

c'est une forme bilinéaire non dégénérée sur $V^* \times V$.

Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de V, alors sa base duale est notée $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$, autrement dit

$$\langle e^i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j. \end{cases}$$

Toute forme bilinéaire non dégénérée B sur V induit un isomorphisme musical $\flat_B : V \to V^*$ défini pour tout $x \in V$ par $\flat_B(x) = \{x \longmapsto B(x, .)\}$, on note $\sharp_B$ son isomorphisme inverse.

On rappelle également que $V^* \otimes V$ s'identifie à $End(V) = Hom(V, V)$ et que $V \otimes V$ est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires sur V^*, que l'on note $L_2(V^*, \mathbb{R})$, via l'application

$$(x \otimes y)(\alpha, \beta) = \alpha(x)\beta(y).$$

Soient V, W deux espaces vectoriels réels de dimension finie, alors $(V \otimes W)^*$ est isomorphe à $V^* \otimes W^*$; où l'isomorphisme est donné par

$$(\alpha \otimes \beta)(x \otimes y) = \alpha(x)\beta(y).$$

1.1.1 Tenseurs covariants et contravariants

Définition 1.1.1 *Un tenseur covariant homogène de degré r sur V est un élément de*

$$T_r(V) = \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes .... \otimes V^*}_{r\ fois} = L_r(V, \mathbb{R}).$$

Un tenseur covariant sur V est un élément de $T(V) = \oplus_{r \geq 0} T_r(V)$.

Un tenseur contravariant homogène de degré r sur V est un élément de

$$T^r(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes V \otimes .... \otimes V}_{r\ fois} = (T_r(V))^* \simeq T_r(V^*).$$

Un tenseur contravariant sur V est un élément de $T\,(V^*)$.

On a $T_0(V) = \mathbb{R}$, $T_1(V) = V^*$; et si $n = \dim V$, alors : $\dim T_r(V) = \dim T^r(V) = n^r$.

Définition 1.1.2 *Un tenseur de type (s, r) ou de bidegré $\binom{r}{s}$ est une forme $(s+r)$-multilinéaire sur*

$$\underbrace{V \times V \times .... \times V}_{s\ fois} \times \underbrace{V^* \times V^* \times .... \times V^*}_{r\ fois}.$$

On note $T_s^r(V)$ l'ensemble des tenseurs mixtes de bidegré $\binom{r}{s}$.

On a $T_s^0(V) = T_s(V)$, $T_0^r(V) = T^r(V)$ et $T_1^1(V) = End(V)$.

Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de V, alors

$$\left\{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes ..... \otimes e^{i_s} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes ..... \otimes e_{j_r};\quad 1 \leq i_1, i_2, ..., i_s; j_1, j_2, ..., j_s \leq n\right\}$$

est la base de $T_s^r(V)$ qui lui est associée. On note par

$$T_{i_1, i_2, ..., i_s}^{j_1, j_2, ..., j_r} = T(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_s}, e^{j_1}, e^{j_2}, ..., e^{j_r}). \tag{1.1.1}$$

les coordonnées d'un tenseur $T \in T_s^r(V)$ dans cette base.

Dans une autre base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V, on a

$$T(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_s}, v^{j_1}, v^{j_2}, ..., v^{j_r}) = (A_{i_1}^{h_1}.A_{i_2}^{h_2}....A_{i_s}^{h_s})(\overline{A}_{k_1}^{j_1}.\overline{A}_{k_2}^{j_2}....\overline{A}_{k_r}^{j_r}).T_{h_1, h_2, ..., h_s}^{k_1, k_2, ..., k_r}; \tag{1.1.2}$$

où $v_i = A_i^j e_j$ et $A_i^k.\overline{A}_k^j = \delta_i^j$, (symbole de Kronecker). On peut donc définir un tenseur par ses composantes dans chaque base et grâce à cette formule, il suffit de choisir une base.

1.1.2 Opérations sur les tenseurs

Produit tensoriel

Soient $T \in T^r_s(V)$ et $S \in T^t_u(V)$, le produit tensoriel de T et S est le tenseur $T \otimes S \in T^{r+t}_{s+u}(V)$ défini par

$$(T \otimes S)(x_1, ..., x_{r+t}; \alpha^1, ..., \alpha^{s+u}) = T(x_1, ..., x_r; \alpha^1, ..., \alpha^s).S(x_{r+1}, ..., x_{r+t}; \alpha^{s+1}, ..., \alpha^{s+u}). \tag{1.1.3}$$

Le produit tensoriel est associatif, non commutatif en général.

Contraction d'indice

Soit $T \in T^r_s(V)$, on note $T^{j_1,j_2,...,j_r}_{i_1,i_2,...,i_s}$ les composantes de ce tenseur dans une base de $T^r_s(V)$ associée à une base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de V. Les n^{s+r-2} quantités $T^{i_1,j_2,...,j_r}_{i_1,i_2,...,i_s} := \sum_{k=1}^{k=n} T^{k,j_2,...,j_r}_{k,i_2,...,i_s}$ sont les composantes dans cette même base d'un tenseur de type $(s-1, r-1)$ appelé le tenseur contracté de T par rapport aux indices i_1 et j_1 et on le note $C^{j_1}_{i_1}T$. On vérifie facilement que la formule de changement de base marche bien. On définit d'une manière analogue cette opération pour un indice covariant et un indice contravariant quelconque.

1.1.3 Tenseurs symétriques et anti-symétriques

On note $\mathcal{S}_n$: le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

Un tenseur $T \in T_r(V)$ est symétrique si pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$, on a

$$T(\alpha^{\sigma(1)}, \alpha^{\sigma(2)}, ..., \alpha^{\sigma(r)}) = T(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^r);$$

il est anti-symétrique (alterné) si

$$T(\alpha^{\sigma(1)}, \alpha^{\sigma(2)}, ..., \alpha^{\sigma(r)}) = sign(\sigma).T(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^r).$$

Même définition pour les tenseurs contravariants.

On note $\mathcal{S}^r(V)$ le sous-espace vectoriel des tenseurs covariants symétriques de degré r et par $\Lambda^r(V)$ celui des tenseurs covariants anti-symétriques. Même chose pour les tenseurs contravariants en remplaçant V par son dual.

On pose $\Lambda(V) = \oplus_{r\geq 0}\Lambda^r(V)$ et $S(V) = \oplus_{r\geq 0}S^r(V)$.

On munit $\Lambda(V)$ d'une loi interne qu'on appelle le produit extérieur, noté $\wedge$, et défini pour tout $\omega \in \Lambda^p(V)$ et pour tout $\theta \in \Lambda^q(V)$ par

$$\omega \wedge \theta(x_1, ..., x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}} sign(\sigma).\omega(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}).\theta(x_{\sigma(p+1)}, ..., x_{\sigma(p+q)}), \tag{1.1.4}$$

on étend cette définition à $\Lambda(V)$ par linéarité.

On munit également $\mathcal{S}(V)$ d'une loi interne, qu'on appelle le produit symétrique, il est défini pour tout $S \in S^p(V)$ et pour tout $T \in S^q(V)$ par

$$S.T(x_1, ..., x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}} T(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}).S(x_{\sigma(p+1)}, ..., x_{\sigma(p+q)}), \tag{1.1.5}$$

ainsi $\Lambda(V)$ et $\mathcal{S}(V)$ sont deux algèbres graduées associatives.

L'espace vectoriel $\mathcal{S}(V)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes à n indéterminées et $\Lambda(V)$ est un espace vectoriel de dimension 2^n. Mêmes conclusions si on remplace V par V^*.

1.1.4 Effet d'une application linéaire

Soient V, W deux espaces vectoriels et Φ une application linéaire de V dans W.

1- Image directe d'un tenseur contravariant par une application linéaire

L'image directe par Φ d'un tenseur r-fois contravariant T sur V est un tenseur de même type sur W noté $\Phi_* T$ et défini par

$$\Phi_* T(\beta^1, \beta^2, ..., \beta^r) = T(\beta^1 \circ \Phi, \beta^2 \circ \Phi, ..., \beta^r \circ \Phi), \tag{1.1.6}$$

pour toute famille $\beta^1, \beta^2, ..., \beta^r$ de formes linéaires sur W.

2- Image réciproque d'un tenseur covariant par une application linéaire

L'image réciproque par Φ d'un tenseur r-fois contravariant S sur W est un tenseur de même type sur V noté $\Phi^* S$ et défini par

$$\Phi^* S(x_1, x_2, ..., x_r) = S(\Phi(x_1), \Phi(x_2), ..., \Phi(x_r)), \tag{1.1.7}$$

pour toute famille $x_1, x_2, ..., x_r$ de vecteurs de V.

1.2 Fibrés vectoriels sur une variété différentiable

Définition 1.2.1 *Un fibré vectoriel de rang k sur une variété différentiable M est un couple (E, p), où E est une variété différentiable et $p : E \to M$ est une application différentiable, tel que :*

i) Pour tout $m \in M$, l'ensemble $E_m = p^{-1}(m)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel réel de dimension k.

ii) Pour tout $m \in M$, la fibre E_m est isomorphe à $\mathbb{R}^k$.

iii) Tout $m \in M$ admet un voisinage ouvert U trivialisant, autrement dit, il existe un difféomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tel que $p = pr_1 \circ \varphi$; où $pr_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$ est la projection sur le premier facteur.

La deuxième condition de la définition montre que p est une submersion et que E est de dimension $(n+k)$.

Exemple 1.2.1 ***Le fibré trivial***

Si on prend $E = M \times \mathbb{R}^k$ et $p = pr_1$, on l'appelle le fibré trivial de rang k.

Exemple 1.2.2 ***Le fibré tangent***

Pour tout $x \in M$ on note T_xM l'espace tangent à M en x et $TM = \sqcup_{x\in M}(T_xM)$ l'ensemble de tous les vecteurs tangents à M et $\pi : TM \to M$ l'application pied qui associe à tout vecteur tangent son origine, (TM, π) est un fibré vectoriel de rang n sur M.

Définition 1.2.2 *Une section d'un fibré vectoriel (E,p) sur M est une application différentiable $s : M \to E$ qui relève l'identité de M ($\pi \circ s = Id_M$). On note l'ensemble des sections du fibré (E,p) par $\Gamma(M;E)$.*

L'ensemble $\Gamma(M;E)$ est un espace vectoriel réel et un module sur l'anneau des fonctions différentiables.

Les sections du fibré $M \times \mathbb{R}$ sur M sont les fonctions différentiables et les sections du fibré tangent sont les champs de vecteurs.

Définition 1.2.3 ***Le fibré dual d'un fibré vectoriel***

Soit (E,p) un fibré vectoriel, pour tout $m \in M$ on note E_m^* le dual de la fibre au dessus de m, $E^* = \sqcup_{m\in M} E_m^*$ et $p^*(x) = m$ si $x \in E_m^*$, (E^*, p^*) est le fibré dual de (E,p).

Comme conséquence immédiate de cette définition, $\Gamma(M;E^*)$ est le dual de $\Gamma(M;E)$ en tant que $\mathcal{C}^\infty(M)$-module. Le fibré dual du fibré tangent est le fibré cotangent, ses sections sont les 1-formes différentielles.

Définition 1.2.4 *Un morphisme entre deux fibrés vectoriels (E,p) et (F,q) sur M est une application différentiable $\Phi : E \to F$, telle que $p = q \circ \Phi$ et pour tout $m \in M$, $\Phi_m : E_m \to F_{\Phi(m)}$ est une application linéaire.*

Définition 1.2.5 *L'image réciproque d'un fibré vectoriel (E,p) par une application différentiable $f : M \to M$, est le fibré (f^*E, f^*p); où $f^*E := \{(m,\alpha) \in M \times E; f(m) = p(\alpha)\}$ et $f^*p := pr_1$.*

1.3 Champs de tenseurs sur une variété différentiable.

Définition 1.3.1 *Un champ de tenseurs s-fois covariant et r-fois contravariant sur une variété différentiable M est une section différentiable du fibré vectoriel $T_s^r(M) = \sqcup_{x\in M} T_s^r(T_xM)$.*

On note par $\Im_s^r(M) = \Gamma(M; T_s^r(M))$ l'ensemble des champs de tenseurs sur M.

On dit souvent tenseur au lieu de champ de tenseurs si aucune confusion n'est à craindre.

Remarque 1.3.1 1) *L'ensemble $\Im_s^r(M)$ est un espace vectoriel réel et un $\mathcal{C}^\infty(M)$-module.*

2) *Champs de tenseurs particuliers : $\Im_0^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M) = \Gamma(M; M\times\mathbb{R})$: Les fonctions différentiables sur M et $\Im_0^1(M) = \Gamma(M; T^*M) = \Omega^1(M)$: Les 1-formes différentielles (ou les formes différentielles de degré 1) sur M.*

$\Im_1^0(M) = \Gamma(M; TM) = \chi(M)$: Les champs de vecteurs différentiables sur M et $\Im_1^1(M) = \Gamma(M; T^*M \otimes TM)$: Les champs d'endomorphismes de TM.

3) *L'espace $\Omega^1(M)$ est le dual de $\chi(M)$ en tant que $\mathcal{C}^\infty(M)$-module. Plus généralement $\Im_s^r(M)$ est le dual de $\Im_r^s(M)$.*

En plus de l'addition, de la multiplication par une fonction et par un scalaire, les autres opérations sur les tenseurs (produit tensoriel, contraction d'indices, image directe et image réciproque) se prolongent aux champs de tenseurs d'une manière naturelle (ponctuelle).

1.3.1 Image réciproque et image directe par une application différentiable

Soit f une application différentiable d'une variété différentiable M dans une variété différentiable N. Rappelons que la différentielle $df : TM \longrightarrow TN$ est un homomorphisme de fibrés vectoriels, en particulier $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ est une application linéaire.

1- Image directe d'un champ de tenseurs contravariant

Soit $T \in \Im_0^s(M)$ un champ de tenseurs covariant de degré s. On appelle l'image directe de T par f, l'élément de $\Im_0^s(\mathrm{Im}\, f)$, noté f_*T et défini par :

$$(f_*T)_{f(p)}(\beta^1, \beta^2, ..., \beta^s) = T_p(\beta^1 \circ df_p, \beta^2 \circ df_p, ..., \beta^s \circ df_p), \tag{1.3.1}$$

pour toute famille $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ de l'espace cotangent à N au point $f(p)$.

2- Image réciproque d'un champ de tenseurs covariant

Soit $S \in \Im_r^0(N)$ un champ de tenseurs contravariant de degré r. On appelle l'image réciproque de S par l'application différentiable f le champ tensoriel défini par :

$$(f^*S)_p(X_1, X_2, ..., X_r) = S_{f(p)}(df_p.X_1, df_p.X_2, ..., df_p.X_r), \tag{1.3.2}$$

pour toute famille $X_1, X_2, ..., X_r$ de l'espace tangent à M au point p.

1.3.2 Dérivée de Lie d'un tenseur

Soit X un champ de vecteurs différentiable sur M et soit $T \in \Im_s^r(M)$. La dérivée de Lie de champ T le long des courbes intégrales de X est un élément de $\Im_s^r(M)$ noté $\mathcal{L}_X T$ qui mesure la progression (vitesse) de T évaluée le long du flot de champ de vecteurs X.

Pour toute fonction différentiable f sur M, on définit

$$(\mathcal{L}_X f)(x) := df(x).X(x), \text{ pour tout } x \text{ dans } M. \tag{1.3.3}$$

Et pour tout champ de vecteurs Y, on a $\mathcal{L}_X Y ;= [X, Y]$: le crochet de Lie de X et Y. Pour toute 1-formes α sur M, on définit

$$\langle \mathcal{L}_X \alpha, Y\rangle := X. \langle \alpha, Y\rangle - \alpha([X, Y]). \tag{1.3.4}$$

Ensuite, pour tout $T \in \Im_s^r(M)$, on définit

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T)(X_1, ..., X_r, \alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^s) &= X.T(X_1, ..., X_r, \alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^s) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{i=r} T(X_1, ..., \mathcal{L}_X X_i, ..., X_r, \alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{j=s} T(X_1, ..., X_r, \alpha^1, ..., \mathcal{L}_X \alpha^j, ..., \alpha^s).\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

1.3.3 Dérivée covariante d'un tenseur

La dérivée covariante d'un champ tensoriel de type $\binom{r}{s}$ sur M est la dérivée covariante d'une connexion sur le fibré vectoriel $T_s^r(M)$ qui prolonge une connexion affine sur M.

La dérivée covariante est un moyen qui permet de se déplacer entre deux fibres suffisamment voisines à l'aide de la notion de transport parallèle que définit la connexion en question.

Définition 1.3.2 *Soit (E, π, M) un fibré vectoriel sur M, et $\Gamma(M;E)$ le $C^\infty(M)$-module de ses sections différentiables. Une connexion linéaire sur E est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire :*

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \chi(M) \times \Gamma(M;E) & \longrightarrow & \Gamma(M;E) \\ & (X,S) & \longmapsto & \nabla_X S \end{array} \tag{1.3.6}$$

qui vérifie

$$\begin{array}{l} \nabla_{fX} S = f \nabla_X S \\ \nabla_X (f.S) = (\mathcal{L}_X f) S + f.\nabla_X S, \end{array} \tag{1.3.7}$$

pour tout $X \in \chi(M)$, tout $f \in C^\infty(M)$ et tout $S \in \Gamma(M;E)$.

Une connexion affine ou une dérivée covariante sur une variété différentiable est une connexion linéaire sur son fibré tangent.

Soit ∇ une dérivée covariante et X un champ de vecteurs sur M. Pour toute fonction différentiable f sur M, on définit $\nabla_X f := \mathcal{L}_X f$. Pour une 1-forme α, on a

$$(\nabla_X \alpha)(Y) := \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) + \alpha(\nabla_X Y). \tag{1.3.8}$$

Pour tout $T \in \Im^r_s(M)$, le champ de tenseurs $\nabla_X T \in \Im^r_s(M)$ est défini par

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(X_1, ..., X_r, \alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^s) \;=\; & X.T(X_1, ..., X_r, \alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^s) \\ & - \sum_{i=1}^{i=r} T(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_r, \alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^s) \\ & - \sum_{j=1}^{j=s} T(X_1, ..., X_r; \alpha^1, ..., \nabla_X \alpha^j, ..., \alpha^s). \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Définition 1.3.3 *Un tenseur T est parallèle pour la connexion ∇ si $\nabla_X T = 0$, $\forall X \in \chi(M)$.*

La torsion T d'une dérivée covariante est définie par

$$T(X,Y) = [X,Y] - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \tag{1.3.10}$$

et sa courbure R est définie par

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]} Z - (\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z)) \tag{1.3.11}$$

La courbure R est un tenseur de type $\binom{3}{1}$ qui mesure le défaut pour ∇ à être un morphisme d'algèbres de Lie $\chi(M)$ et $End(\chi(M))$.

Définition 1.3.4 *La connexion est dite symétrique (sans torsion) si sa torsion est nulle; plate si sa courbure est nulle.*

1.4 Champs de tenseurs particuliers

1.4.1 Champs de tenseurs métriques et structure pseudo-riemannienne

Définition 1.4.1 *Un champ de tenseurs métrique est un champ tensoriel 2-fois covariant symétrique et non dégénéré; on l'appelle aussi métrique pseudo-riemannienne sur M. Si on note g une telle métrique, le couple (M, g) est une variété pseudo-riemannienne.*

Si de plus le tenseur métrique est défini positif, c'est une variété riemannienne.

Remarque 1.4.1 *La métrique g définit un champ d'isomorphismes $\flat_g : \chi(M) \to \Omega^1(M)$, qui est de plus un champ d'isomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(M)$-module entièrement caractérisé par*

$$\flat_g(X).Y = g(X, Y),$$

son champ d'isomorphismes inverse $\sharp_g : \Omega^1(M) \to \chi(M)$ est défini par

$$\alpha(X) = g(\sharp_g(\alpha), X),$$

pour tout couple de champs de vecteurs X, Y et toute 1-forme α sur M.

Dans un système de coordonnées locales $(U; x = (x^1, x^2, ..., x^n))$, on pose $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ et $(\overline{g}_{ij})$ la matrice inverse de (g_{ij}); ainsi

$$\sharp_g(dx^i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}.\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{et} \quad \flat_g(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{j=1}^{n} \overline{g}_{ij}.dx^j; \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

1- Morphisme entre structures pseudo-riemanniennes

Un morphisme entre deux structures pseudo-riemanniennes (M, g) et (N, h) est la donnée d'une application différentiable $f : M \to N$ telle que $g = f^*h$; en particulier, f est une immersion si la métrique est riemannienne. Inversement, toute immersion d'une variété différentiable dans une variété riemannienne définit une unique structure riemannienne pour laquelle cette application devient un morphisme. Si de plus f est un difféomorphisme, c'est une isométrie et les deux structures sont équivalentes. Voici quelques exemples de morphismes entre variétés pseudo-riemanniennes.

1) Une structure pseudo-riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie G est la donnée d'une métrique pour laquelle toute translation à gauche par un élément de G est une isométrie de G dans G, cette métrique est dite invariante à gauche. De la même manière on définit une structure invariante à droite. Le choix d'une telle structure est équivalent au choix d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'algèbre de Lie de G.

2) Un champ de vecteurs sur (M, g) est **un champ de Killing** si son pseudo-groupe à un paramètre est contenu dans le groupe d'isométries de M; autrement dit : $\mathcal{L}_X g = 0$.

3) Si G est un groupe de Lie agissant librement proprement discontinuement sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) alors, la projection canonique est étale (immersion et submersion à la fois). Le fait que la métrique g soit invariante par l'action de G est équivalent à l'existence d'une unique métrique $\overline{g}$ sur le quotient M/G pour laquelle la projection canonique soit une isométrie locale; c'est le cas de l'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$ considéré comme le quotient de la sphère euclidienne S^n par le groupe cyclique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ muni de la topologie discrète.

2- Connexion de Levi-Civita d'un tenseur métrique

Théorème 1.4.1 *(Levi-Civita)*

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne, il existe sur M une unique connexion affine symétrique pour laquelle le champ de tenseurs métrique g est une section parallèle. Cette connexion est appelée la connexion de Levi-Civita de la métrique g.

Preuve. L'unicité : On suppose qu'une telle connexion existe; on utilisant le fait que ∇ est symétrique et compatible avec la métrique g, on trouve

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) &= X.g(Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = X.g(Y, Z) - g(Y, \nabla_Z X + [X, Z]) \\
&= X.g(Y, Z) - Z.g(Y, X) + g(Y, [Z, X]) + g(X, \nabla_Z Y) \\
&= X.g(Y, Z) - Z.g(Y, X) + g(Y, [Z, X]) + g(X, [Z, Y]) + g(X, \nabla_Y Z) \\
&= X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(Y, X) + g(Y, [Z, X]) + g(X, [Z, Y]) - g(Z, \nabla_Y X) \\
&= X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(Y, X) + g(Y, [Z, X]) \\
&\quad + g(X, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y]) - g(Z, \nabla_Y X),
\end{aligned}$$

ce qui donne la formule de Koszul

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(Y, X) + g(Y, [Z, X]) + g(X, [Z, Y]) - g(Z, [Y, X])\}. \tag{1.4.1}$$

L'existence : Etant donné deux champs de vecteurs X, Y, on note par $\alpha_{X,Y}$ l'application de $\chi(M)$ dans $C^\infty(M)$ définie par

$$\alpha_{X,Y}(Z) = \frac{1}{2}\{X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(Y, X) + g(Y, [Z, X]) + g(X, [Z, Y]) - g(Z, [Y, X])\}.$$

L'application $\alpha_{X,Y}$ est une 1-forme différentielle, on définit $\nabla_X Y = \sharp_g(\alpha_{X,Y})$. Il est facile de vérifier que ∇ est bien une dérivée covariante sur M. (Voir [8], page 136). ■

3- Tenseur de Riemann

On définit un tenseur 4-fois covariant par la formule

$$\Re(X,Y,Z,T) = g(R(X,Y)Z,T), \tag{1.4.2}$$

qui caractérise entièrement le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita, il possède les propriétés suivantes

$$1)\ \Re(X,Y,Z,T) = -\Re(Y,X,Z,T),$$
$$2)\ \Re(X,Y,Z,T) = \Re(Z,T,X,Y).$$

Par conséquent, $r(X,Y) = Trace(Z \mapsto R(X,Z)Y)$ est un tenseur 2-fois covariant symétrique, appelé la courbure de Ricci de la connexion ∇.

Proposition 1.4.1 *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique g bi-invariante (invariante à gauche et à droite) et ∇ sa connexion de Levi-Civita, alors*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]. \tag{1.4.3}$$

La courbure de ∇ est donnée par

$$R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z], \tag{1.4.4}$$

pour tout triplet (X,Y,Z) de champs de vecteurs invariants à gauche.

Preuve. Les champs de vecteurs invariants à gauche étant des champs de Killing, la formule de Koszul devient :

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{g(Y,[Z,X]) + g(X,[Z,Y]) - g(Z,[Y,X])\}. \tag{1.4.5}$$

L'application $Y \longmapsto \nabla_Y X$ étant anti-symétrique par rapport à la métrique (i.e. $g(\nabla_Y X, Y) = 0$), on a

$$g(Y,[X,Y]) = g(Y,\nabla_X Y) - g(Y,\nabla_Y X) = g(Y,\nabla_X Y) = \frac{1}{2}X.g(Y,Y) = 0,$$

ainsi le tenseur $(X,Y,Z) \longmapsto g(X,[Y,Z])$ est anti-symétriques. Ce qui implique que $g(Y,[Z,X]) + g(X,[Z,Y]) = 0$; d'où $g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}g(Z,[X,Y])$ et par conséquent

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y].$$

Pour la courbure, on a

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z)) \\ &= \frac{1}{2}[[X,Y],Z] - \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] + \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]. \end{aligned}$$

pour tout triplet (X,Y,Z) de champs de vecteurs invariants à gauche sur G. ∎

1.4.2 Formes différentielles sur une variété différentiable

On note par $\Lambda^p TM$: Le fibré des tenseurs contravariants anti-symétriques de degré p et par $\Lambda(TM) = \oplus_{p=0}^{p=n} \Lambda^p(TM)$: Le fibré des tenseurs contravariants anti-symétriques quelconques.

Définition 1.4.2 *Une forme différentielle de degré p (respectivement, une forme différentielle quelconque) est une section du fibré $\Lambda^p(TM)$ (respectivement, $\Lambda(TM)$).*

On note $\Omega^p(M) = \Gamma(M; \Lambda^p TM)$ l'espace vectoriel des p-formes différentielles, qui est aussi un $\mathcal{C}^\infty(M)$-module et on note $\Omega(M) = \Gamma(M; \Lambda(TM)) = \oplus_{p=0}^{p=n} \Omega^p(M)$ l'espace vectoriel des formes différentielles sur M, qui, muni de produit extérieur devient une algèbre associative, graduée.

1- Différentielle extérieure d'une forme différentielle

C'est l'unique application linéaire graduée de degré $(+1)$, i.e. $d(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p+1}(M)$, qui prolonge la différentielle d'une fonction différentiable et qui vérifie :

1. $d \circ d = 0$, donc $\{(\Omega^p(M))_{p \geq 0}; d\}$ est un complexe au sens de l'algèbre homologique.
2. d est une anti-dérivation de l'algèbre graduée $\Omega(M)$, autrement dit :

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta); \quad \forall \alpha \in \Omega^p(M), \forall \beta \in \Omega^q(M). \tag{1.4.6}$$

Une p-forme différentielle est fermée si sa différentielle extérieure est nulle; ainsi l'ensemble des p-formes fermées est un sous espace vectoriel de $\Omega^p(M)$ que l'on note $Z^p(M) = Ker(d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))$. Une p-forme est exacte si elle est la différentielle extérieure d'une $(p-1)$-forme différentielle; l'ensemble des p-formes exactes est un sous-espace vectoriel de $Z^p(M)$ (car $d \circ d = 0$), que l'on note $B^p(M) = \mathrm{Im}(d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$.

L'espace quotient $H^p(M) = Z^p(M) / B^p(M)$ est appelé le $p^{ène}$ groupe de **cohomologie de de Rham** de la variété M.

2- Produit intérieur par un champ de vecteurs

Soit X un champ de vecteurs et $\alpha \in \Omega^1(M)$, on définit le produit intérieur de α par X, que l'on note $i_X \alpha$, comme étant la fonction scalaire $\alpha(X) \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Le produit intérieur d'une fonction par un champ de vecteurs est identiquement nul par définition.

Soit maintenant $\omega \in \Omega^p(M)$, $p \geq 2$ et X un champ de vecteurs; le produit intérieur de ω par X est défini par

$$(i_X\omega)(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{p-1}) := \omega(X, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{p-1}), \text{ pour tout } X, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{p-1} \in \chi(M). \tag{1.4.7}$$

Il est clair que $i_X(\Omega^{p+1}(M)) \subset \Omega^p(M)$.

On étend additivement le produit intérieur à une forme différentielle quelconque; on obtient ainsi une anti-dérivation de degré (-1) de l'algèbre graduée $\Omega(M)$, car de plus on a

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_X\beta, \quad \forall \alpha \in \Omega^p(M),\ \forall \beta \in \Omega^q(M). \tag{1.4.8}$$

Le produit intérieur et la dérivée de Lie par un champ X ainsi que la différentielle extérieure sont reliés par la formule de Cartan

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d. \tag{1.4.9}$$

1.4.3 Champs de multivecteurs sur une variété différentiable

Les champs de multivecteurs sont en quelque sorte la version duale des formes différentielles.

Définition 1.4.3 *Un p-champ de multivecteurs est un tenseur contravariant anti-symétrique de degré p.*

On note $\chi^p(M) = \Gamma(M; \wedge^p T^*M)$ l'ensemble des champs de multivecteurs de degré p. On note $A(M) = \oplus_{p=0}^{p=\dim M} \chi^p(M)$, c'est une algèbre graduée pour le produit extérieur.

Il y a deux sortes de dualité entre $A(M)$ et $\Omega(M)$. La première est donnée par le crochet suivant :

$$\langle \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge ... \wedge \alpha^r, X_1 \wedge X_2 \wedge ... \wedge X_s \rangle = \begin{cases} \det(\alpha^i(X_j))_{1 \leq i,j \leq r} & \text{si} \quad r = s \\ 0 & \text{si} \quad r \neq s \end{cases}$$

et généralisée par $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéarité aux champs et aux formes quelconques.

La deuxième est le produit intérieur qui se généralise au champs de multivecteurs à l'aide de la formule : $i_{X \wedge Y} = i_X \circ i_Y$; ainsi on obtient :

$$i(X_1 \wedge X_2 \wedge ... \wedge X_p)\omega = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \omega(X_1, X_2, ..., X_p),$$

pour toute p-forme ω et toute famille de champs de vecteurs $X_1, X_2, ..., X_p$ sur M.

Comme pour les formes différentielles, un champ de multivecteurs Π homogène de degré p s'écrit dans un système de coordonnées locales $(U; x = (x^1, x^2, ..., x^n))$ de la manière suivante :

$$\Pi = \sum_{0 \leq i_1 < ... < i_p} \Pi^{i_1 i_2 ... i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, \tag{1.4.10}$$

avec $\Pi^{i_1 i_2 ... i_p} \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

1- Crochet de Schouten-Nijenhuis

C'est une extension de la notion de crochet de Lie aux champs de multivecteurs.

Théorème 1.4.2 *(Schouten-Nijenhuis)*

Il existe une unique application $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$\begin{array}{rccc} [.,.]_S : & A(M) \times A(M) & \longrightarrow & A(M) \\ & (P, Q) & \longmapsto & [P, Q]_S \end{array}$$

telle que :

1) *Pour tout couple de fonctions différentiables (f, g), on a $[f, g]_S := 0$.*

2) *Pour tout $X \in \chi(M)$ et tout $Q \in A(M)$, on a $[X, Q]_S := \mathcal{L}_X Q$.*

3) *Pour $P \in \chi^p(M)$, $Q \in \chi^q(M)$ et $R \in A(M)$, on a*

a)

$$[P, Q]_S = -(-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, P]_S \,. \tag{1.4.11}$$

b)

$$[P, Q \wedge R]_S = [P, Q]_S \wedge R + (-1)^{(p-1)} Q \wedge [P, R]_S \,. \tag{1.4.12}$$

Le crochet de Schouten-Nijenhuis vérifie les propriétés suivantes :

i)

$$[P \wedge R, Q]_S = P \wedge [R, Q]_S + (-1)^{(q-1)r} [P, Q]_S \wedge R.$$

ii) L'analogue de l'identité de Jacobi

$$(-1)^{(p-1)(r-1)} [P, [Q, R]_S]_S + (-1)^{(q-1)(p-1)} [Q, [R, P]_S]_S + (-1)^{(q-1)(r-1)} [R, [P, Q]_S]_S = 0. \tag{1.4.13}$$

2- Champ de bivecteurs

On connaît bien les champs de multivecteurs de degré 0, ce sont les fonctions différentiables sur M; de degré 1, ce sont les champs de vecteurs différentiables. Un autre cas particulier de champs de multivecteurs est celui des champs de bivecteurs qui sont bien entendu les champs de multivecteurs de degré 2. Dans un système de coordonnées locales $(U; x = (x^1, x^2, ..., x^n))$ un champ de bivecteurs s'écrit

$$\Pi = \sum_{1\leq i<j\leq n} \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{1.4.14}$$

où $\{\Pi^{ij}; 1 \leq i < j \leq n\}$ est une famille de fonctions différentiables.

Proposition 1.4.2 *Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et Π un champ de bivecteurs, on a*

$$[\Pi, f]_S = \sum_{1\leq i<j\leq n} \left[\Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, f\right]_S = \sum_{1\leq i<j\leq n} \Pi^{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{1.4.15}$$

$$[\Pi, \Pi]_S = \sum_{1\leq i<j\leq k\leq n} \left(\sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^s}\Pi^{sk} + \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^s}\Pi^{si} + \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x^s}\Pi^{sj}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.4.16}$$

Preuve. En appliquant le théorème de Schouten-Nijenhuis, on trouve

$$\begin{aligned}
\left[\Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, f\right]_S &= \Pi^{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, f\right]_S = \Pi^{ij} \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} f\right) \\
&= \Pi^{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \Pi^{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\left[\Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \Pi^{sk} \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}\right]_S &= \left[\Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}, \Pi^{sk} \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}\right]_S \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} - \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \Pi^{sk} \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}\right]_S \\
&= \left[\Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}, \Pi^{sk} \frac{\partial}{\partial x^s}\right]_S \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} - \Pi^{sk} \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \left[\Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right]_S \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&\quad -\Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \Pi^{sk} \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}\right]_S \\
&= \Pi^{ij} \frac{\partial \Pi^{sk}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} - \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&\quad +\Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} - \Pi^{ij} \frac{\partial \Pi^{sk}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k},
\end{aligned}$$

et le résultat en découle. ■

Certains champs de bivecteurs définissent une structure géométrique sur la variété M, c'est l'objet du prochain chapitre.

2

Généralités sur les structures de Poisson

2.1 Structure de Poisson sur une variété différentiable

Définition 2.1.1 *Un crochet de Poisson sur une variété différentiable M est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire anti-symétrique, notée $\{.,.\}$, de $\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M)$ à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, qui vérifie :*

1) *La règle de Leibniz*

$$\{f, gh\} = \{f, g\} h + g \{f, h\}. \tag{2.1.1}$$

2) *L'identité de Jacobi*

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0, \tag{2.1.2}$$

pour tout triplet (f, g, h) de fonctions différentiables sur M.

Lemme 2.1.1 *Un crochet de Poisson $\{.,.\}$ sur une variété M induit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(M)$; de plus, l'application linéaire $f \longmapsto \{f,.\}$ réalise un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{C}^\infty(M), \{.,.\})$ à valeurs dans $Der(\mathcal{C}^\infty(M))$: l'algèbre de dérivations associée à l'algèbre associative $\mathcal{C}^\infty(M)$, cette algèbre s'identifie à $(\chi(M), [.,.])$.*

Preuve. En effet, l'identité de Jacobi nous donne pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$[\{f,.\}, \{g,.\}](h) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} = \{\{f, g\},.\}(h),$$

d'où le résultat. ■

Définition 2.1.2 *Pour toute fonction différentiable f, on note H_f le champs de vecteurs associé à la dérivation $\{f, .\}$ et on l'appelle l'**hamiltonien** de f.*

L'équation différentielle linéaire homogène $H_f(g) = \{f, g\} = 0$ qui consiste à trouver les fonctions scalaires qui sont constantes le long de champ hamiltonien associé à f; de telles fonctions sont appelées des **intégrales premières** de H_f.

Les systèmes hamiltoniens trouvent leurs origines dans le formalisme hamiltonien en mécanique analytique, qui part du principe de moindre action et de la conservation de l'énergie. Le théorème suivant du à Poisson démontre que l'ensemble des intégrales premières d'un champs hamiltonien est une sous-algèbre de Lie de $(\mathcal{C}^\infty(M), +, ., \{., .\})$.

Théorème 2.1.1 *Si g, h sont deux intégrales premières de H_f alors $\{g, h\}$ est aussi une intégrale première de H_f.*

La preuve découle immédiatement de l'identité de Jacobi En effet,

$$\{f, \{g, h\}\} = H_f\{g, h\} = \{g, \{f, h\}\} - \{h, \{f, g\}\} = \{g, H_f h\} - \{h, H_f g\}\,.$$

Définition 2.1.3 *Une **variété de Poisson** est une variété différentiable munie d'un crochet de Poisson.*

Définition 2.1.4 *Une **fonction de Casimir** sur une variété de Poisson est une fonction différentiable dont le champ hamiltonien associé est identiquement nulle. L'ensemble des fonctions de Casimir est le noyau du crochet de Poisson.*

On note l'ensemble des fonctions de Casimir par :

$$\Omega_b^0(M) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(M),\ \text{tel que}\ \{f, g\} = 0,\ \forall g \in \mathcal{C}^\infty(M)\}.$$

Exemple 2.1.1 *Toute fonction constante est une fonction de Casimir car $\{c, g\} = c.\{1, g\}$; et la règle de Leibniz donne*

$$\{1, g\} = \{1 \times 1, g\} = 1 \times \{1, g\} + 1 \times \{1, g\} = 2.\{1, g\}\,;$$

donc $\{1, g\} = 0$ pour toute fonction différentiable g.

Définition 2.1.5 *Une structure de poisson sur une variété différentiable M est la donnée d'un crochet de Poisson sur M. Le couple $(M, \{., .\})$ est une variété (structure) de Poisson.*

2.1.1 Structure symplectique sur une variété différentiable

Un des exemples les plus importants d'une structure de Poisson est la structure symplectique.

Définition 2.1.6 *Une structure symplectique est un couple (M, ω) où M est une variété différentiable et ω est une forme différentielle de degré 2, fermée et non dégénérée appelée forme symplectique.*

Pour définir la structure de Poisson induite par une structure symplectique (M, ω), on remarque tout d'abord que l'homomorphisme de fibrés vectoriels $\flat_\omega : TM \to T^*M$ défini sur les sections par : $X \longmapsto \omega(X, .) = i_X\omega$ établit un isomorphisme entre $\chi(M) = \Gamma(M; TM)$ et $\Omega^1(M) = \Gamma(M; T^*M)$. Etant donné une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit l'hamiltonien associé à f par $H_f := \sharp_\omega(-df)$ (i.e. $\omega(H_f, .) = -df$).

On définit alors le crochet de Poisson associé à le forme symplectique ω par :

$$\{f, g\} = \omega(H_f, H_g) = H_f(g) = -H_g(f), \tag{2.1.3}$$

pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur M.

Proposition 2.1.1 *Le crochet associé à une forme symplectique définit bien une structure de Poisson.*

Preuve. 1) Ce crochet vérifie l'identité de Leibniz. Pour tout triplet $(f, g, h) \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\{f, gh\} = H_f(gh) = gH_f(h) + hH_f(g) = g\{f, h\} + h\{f, g\}.$$

2) Pour établir l'identité de Jacobi, on exploite le fait que la forme symplectique est fermée et on utilise la formule de Cartan. On trouve alors pour tout triplet (f, g, h) de fonctions différentiables :

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega(H_f, H_g, H_h) = H_f(\omega(H_g, H_h)) + H_g(\omega(H_h, H_f)) + H_h(\omega(H_f, H_g)) \\
&\quad -\omega([H_f, H_g], H_h) - \omega([H_g, H_h], H_f) - \omega([H_h, H_f], H_g) \\
&= H_f\{g, h\} + H_g\{h, f\} + H_h\{f, g\} + [H_f, H_g](h) + [H_g, H_h](f) + [H_h, H_f](g) \\
&= \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} + (H_f\{g, h\} - H_g\{f, h\}) \\
&\quad +(H_g\{h, f\} - H_h\{g, f\}) + (H_h\{f, g\} - H_f\{h, g\}) \\
&= 3(\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}).
\end{aligned}$$

Donc on a bien un crochet de Poisson sur M. ■

Remarque 2.1.1 *Toute variété symplectique est une variété de Poisson; le contraire n'est pas vrai en général, c'est le cas de* $\mathbb{R}^3$ *muni du crochet* $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$.

2.1.2 Structures symplectiques particulières

On donne ici quelques exemples de variétés symplectiques.

1) $M = \mathbb{R}^2$ et $\omega = dx \wedge dy$; dans ce cas le champ de vecteurs hamiltonien associé à une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est donné par :

$$H_f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x};$$

et le crochet de Poisson associé est défini comme suit :

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial xy}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Plus généralement, la structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, x_2, ., x_n, y_1, .., y_n)\}$ est définie par la forme $\omega = \sum_{i=1}^{i=n} dx_i \wedge dy_i$.

2) Soit N une variété différentiable de dimension n, son fibré cotangent T^*N est une variété de dimension $2n$. Soit $\pi : T^*N \to N$ la projection de fibré T^*N. En tout point $m \in T^*N$ on note $(p_1, p_2, ..., p_n)$ les coordonnées de $\pi(m)$ et $(q_1, q_2, ..., q_n)$ les coordonnées de $\alpha_m \in T^*_{\pi(m)}N$ dans un système de coordonnées. On définit la 1-forme de Liouville par $\theta = \sum_{i=1}^{i=n} q_i dp_i$. La forme symplectique est définie par : $\omega = d\theta = \sum_{i=1}^{i=n} dq_i \wedge dp_i$.

En mécanique classique, le formalisme hamiltonien consiste à établir un système hamiltonien sur $(T^*N; \omega)$. L'espace des phases est T^*N tandis que N est l'espace des configurations.

2.2 Tenseurs de Poisson

Soit M une variété différentiable, on note $\Lambda^p(\mathcal{C}^\infty(M))$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-multilinéaires alternées de degré p de $(\mathcal{C}^\infty(M))^p$ à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(M)$. On a par exemple $\Lambda^0(\mathcal{C}^\infty(M)) = \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\Lambda^1(\mathcal{C}^\infty(M)) = \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(M); \mathcal{C}^\infty(M))$: l'espace vectoriel des applications $\mathbb{R}$-linéaires.

A un champ de multivecteurs $\Pi \in \chi^p(M)$ on associe l'élément $\varphi_\Pi \in \Lambda^p(\mathcal{C}^\infty(M))$ qui est défini par

$$\varphi_\Pi(f_1, f_2, ..., f_p) = \langle \Pi, df_1 \wedge df_2 \wedge ... \wedge df_p \rangle := \Pi(df_1, df_2, ..., df_p), \qquad (2.2.1)$$

pour toute famille $f_1, f_2, ..., f_p$ de fonctions différentiables sur M.

Le lemme suivant nous donne une condition suffisante pour que la réciproque soit vraie.

Lemme 2.2.1 *Un élément $\varphi \in \Lambda^p(\mathcal{C}^\infty(M))$ provient d'un champ de multivecteurs $\Pi \in A^p(M)$ si et seulement si il vérifie l'identité de Leibniz en chacun de ses facteurs. De tels éléments sont appelés des multidérivations de degré p sur $\mathcal{C}^\infty(M)$.*

Preuve. La condition est nécessaire car la différentielle d'une fonction vérifie la règle de Leibniz; pour qu'elle soit suffisante il suffit de prouver que la valeur de $\varphi(f_1, f_2, ..., f_p)$ en un point dépend uniquement de la différentielle de chacun de ces facteurs en ce point; il suffit de le vérifier sur le premier facteur par exemple, ce qui est équivalent à dire que si $df_1(x) = 0$ alors $\varphi(f_1, f_2, ..., f_p)(x) = 0$ pour tout $x \in M$.

Soit x un point de M, on suppose que $df_1(x) = 0$, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à f_1 au point x et en prenant une carte locale centrée en x $(U; (x^1, x^2, ..., x^n))$, on trouve une famille de fonctions différentiables $g_1, g_2, .., g_n$ qui s'annulent en x et telles que pour tout $y \in U$ on a $f_1(y) = f_1(x) + (\sum_{i=1}^{i=n} x^i.g_i)(y)$, par suite :

$$\varphi(f_1, f_2, ..., f_p)(x) = f_1(x)\varphi(1, f_2, ..., f_p)+\sum_{i=1}^{i=n}[x^i(x)\varphi(g_i, f_2, ..., f_p)(x)+g_i(x)\varphi(x^i, f_2, ..., f_p)(x)] = 0$$

car $x^i(x) = 0$ (la carte est centrée en x), et le fait que $\varphi(1, f_2, ..., f_p) = 0$ provient de l'identité de Leibniz appliquée au premier facteur; on conclut que l'application φ provient d'un champ de multivecteurs de degré p. ■

Soit $\{x^i\}_{1\leq i\leq n}$ un système de coordonnées sur un ouvert U, soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $x, y \in U$. En appliquant la formule de Taylor on a $f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{i=n}(x^i - y^i)\widetilde{f}_i(y)$ et $g(x) = g(y) + \sum_{i=1}^{i=n}(x^i - y^i)\widetilde{g}_i(y)$ avec $\widetilde{f}_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ et $\widetilde{g}_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x^i}(x)$; en utilisant la bilinéarité du crochet, on trouve

$$\{f, g\} = \sum_{1\leq i<j\leq n} \left\{x^i, x^j\right\} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \langle \Pi, df \wedge dg\rangle . \tag{2.2.2}$$

On pose $\Pi^{ij} = \{x^i, x^j\} \in \mathcal{C}^\infty(M)$, ce sont les composantes de champ de bivecteurs Π induit par le crochet de Poisson (lemme 2.2.1), elles sont anti-symétriques par rapport aux indices ($\Pi^{ij} = -\Pi^{ji}$) et vérifient l'équation suivante induite par l'identité de Jacobi :

$$\left\{\left\{x^i, x^j\right\}, x^k\right\}+\left\{\left\{x^j, x^k\right\}, x^i\right\}+\left\{\left\{x^k, x^i\right\}, x^j\right\} = \sum_{s=1}^{s=n}\left(\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^s}\Pi^{sk} + \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^s}\Pi^{si} + \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x^s}\Pi^{sj}\right) = 0; \tag{2.2.3}$$

quels que soient $1 \leq i, j, k \leq n$; par conséquent, le crochet de Schouten-Nijenhuis de tenseurs de Poisson par lui même est nul; c'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de bivecteurs définit une structure de Poisson comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.2.1 *Un champ de bivecteurs* Π *sur une variété différentiable* M *définit une structure de Poisson si et seulement si* $[\Pi, \Pi]_S = 0$.

Preuve. On a

$$[\Pi, \Pi]_S = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left(\sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^s} \Pi^{sk} + \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^s} \Pi^{si} + \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x^s} \Pi^{sj} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Soit $\{.,.\}$ le crochet induit par Π, autrement dit: pour tout couple de fonctions différentiables f, g sur M, on a $\{f, g\} = \langle \Pi, df \wedge dg \rangle$; ce crochet vérifie l'identité de Leibniz et pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned} \{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^s} \Pi^{sk} + \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^s} \Pi^{si} + \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x^s} \Pi^{sj} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^k} \\ &= \langle [\Pi, \Pi]_S, df \wedge dg \wedge dh \rangle = 0; \end{aligned}$$

donc le crochet défini par le champ de bivecteurs Π définit bien une structure de Poisson sur M. ■

On note (M, Π) une telle structure. Ainsi la donnée d'une structure de Poisson sur une variété est équivalent à la donnée d'un champ de bivecteurs Π tel que $[\Pi, \Pi]_S = 0$.

Exemple 2.2.1 ***Structure de Poisson constante sur*** $\mathbb{R}^n$

Elle est définie par le tenseur

$$\Pi = p \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j},$$

où p *est une fonction différentiable quelconque sur* $\mathbb{R}^n$. *En particulier, si* $n = 2m$ *et* p *est constante on retrouve la structure symplectique standard sur* $\mathbb{R}^{2m}$.

Exemple 2.2.2 *Tout champ de bivecteurs sur une variété de dimension* 2 *définit une structure de Poisson, il y a pas de champ de trivecteurs non nul.*

2.3 Structure de Poisson linéaire

Soit V un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$) et $V^* = Hom(V, \mathbb{k})$ son dual.

Définition 2.3.1 *Une structure de Poisson sur l'espace vectoriel* V *est dite linéaire si le crochet de deux applications linéaires est également une application linéaire.*

Dans ce cas, la restriction du crochet de Poisson sur V^* définit une structure d'algèbre de Lie. Inversement, toute structure d'algèbre de Lie définit une structure de Poisson linéaire. En effet, soit $(\mathcal{G}, [.,.])$ une algèbre de Lie, pour toute application différentiable $f : \mathcal{G}^* \to \mathbb{k}$, on pose

$$\{f, g\}(\alpha) = \alpha([df(\alpha), dg(\alpha)]), \tag{2.3.1}$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{G}^*$. On remarque que $df(\alpha) \in (\mathcal{G}^*)^*$, ce qui justifie cette définition. Si f est linéaire alors $df(\alpha) = f \in \mathcal{G}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{G}^*$. Ainsi $(\mathcal{G}^*, \{.,.\})$ est une structure de Poisson linéaire.

L'ensemble des structures de Poisson linéaires de dimension finie est en bijection avec les structures d'algèbres de Lie de même dimension. Etudier une algèbres de Lie de dimension finie revient parfois à étudier une structure de Poisson linéaire.

Exemple 2.3.1 *Soit G un groupe de Lie et $\mathcal{G} = T_eG$ son algèbre de Lie, alors l'espace cotangent à G au point e (l'élément neutre de G) est muni d'une structure de Poisson linéaire. Pour $G = SO(3)$, $\mathcal{G} = so(3)$: l'ensemble des matrices anti-symétriques d'ordre* 3.

Exemple 2.3.2 *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ s'identifie à son dual grâce au produit scalaire euclidien $\langle .,. \rangle$. L'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel qu'on note multiplicativement est une algèbre de Lie. Le crochet est défini par*

$$\{f, g\}(x) = \langle x, gradf(x) \times gradg(x) \rangle, \tag{2.3.2}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

2.4 Morphismes de Poisson

Définition 2.4.1 *Soient $(M_1, \{.,.\}_1)$ et $(M_2, \{.,.\}_2)$ deux variétés de Poisson et $\Phi : M_1 \to M_2$ une application différentiable. Φ est un morphisme de Poisson de $(M_1, \{.,.\}_1)$ dans $(M_2, \{.,.\}_2)$ si*

$$\{f, g\}_2 \circ \Phi = \{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_1 \tag{2.4.1}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$.

Un isomorphisme de Poisson est un morphisme de Poisson qui est aussi un difféomorphisme.

Proposition 2.4.1 *Soit l'application différentiable $\Phi : (M_1, \{.,.\}_1) \to (M_2, \{.,.\}_2)$, soient Π_1 et Π_2 les tenseurs de Poisson respectifs. Dire que Φ est un morphisme de Poisson est équivalent à :*

1) $\Pi_2 \circ \Phi = \Phi_* \Pi_1$.

2) *L'application* $\Phi^* : (\mathcal{C}^\infty(M_2), \{.,.\}_2) \to (\mathcal{C}^\infty(M_1), \{.,.\}_2)$ *définie par* $\Phi^*(f) := f \circ \Phi$ *est un morphisme d'algèbres de Lie.*

Preuve. 1) On a

$$\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_1 = \Pi_1(d(f \circ \Phi), d(g \circ \Phi)) = \Pi_1(df \circ d\Phi, dg \circ d\Phi)$$

et

$$\{f, g\}_2 \circ \Phi = \Pi_2(df, dg) \circ \Phi.$$

L'égalité (2.4.1) entraîne

$$\Pi_2(df, dg) \circ \Phi = \Pi_1(df \circ d\Phi, dg \circ d\Phi);$$

autrement dit

$$\Pi_2(df, dg) = \Phi_* \Pi_1(df, dg).$$

2) On a

$$\Phi^*(\{f, g\}_2) = \{f, g\}_2 \circ \Phi;$$

le reste découle de l'identité (2.4.1). ■

Exemple 2.4.1 *Si* $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *est un morphisme d'algèbre de Lie. Alors le morphisme adjoint* $\Phi^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{G}^*$ *est un morphisme des structures de Poisson linéaires induites sur* $\mathcal{G}^*$ *et* $\mathcal{H}^*$*. En particulier,* $\mathbb{R}^3$ *muni de sa structure de Poisson définie dans l'exemple précédent est isomorphe à* $\mathcal{G}^* = so^*(3)$*.*

Exemple 2.4.2 *Un difféomorphisme* $\Psi : M \to N$ *induit un isomorphisme symplectique* $\Psi^* : T^*N \to T^*M$*.*

Exemple 2.4.3 *Soient* G *un groupe de Lie connexe et* $\mathcal{G}^* = T_e^*G$ *le dual de son algèbre de Lie. On définit l'application* $L : T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ *par* $L(g, \alpha) = (L_{g^{-1}})_* \alpha$*. C'est un morphisme de Poisson entre* T^*G *muni de sa structure symplectique standard et* $\mathcal{G}^*$ *muni de sa structure de Poisson linéaire.*

2.5 Produit direct de variétés de Poisson

Définition 2.5.1 *Soient* $(M_1, \{.,.\}_1)$ *et* $(M_2, \{.,.\}_2)$ *deux variétés de Poisson, leurs produit direct est* $(M_1 \times M_2, \{.,.\})$, *où*

$$\{f,g\}(x_1,x_2) := \{f(.,x_2), g(.,x_2)\}_1(x_1) + \{f(x_1,.), g(x_1,.)\}_2(x_2),$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M_1 \times M_2)$ *et* $(x_1,x_2) \in M_1 \times M_2$.

Si on note Π_1 et Π_2 les tenseurs de Poisson associés à $(M_1, \{.,.\}_1)$ et $(M_2, \{.,.\}_2)$ respectivement, alors on a

$$\{f,g\}(x_1,x_2) = \Pi_1(x_1)(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2), \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)) + \Pi_2(x_2)(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)).$$

Exemple 2.5.1 *le produit direct de* $\mathbb{R}^2$ *muni de sa structure de Poisson standard et* $\mathbb{R}$ *muni de la structure triviale est* $\mathbb{R}^3$ *muni de la structure de Poisson définie par le champ de bivecteurs* $\Pi = \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$.

Proposition 2.5.1 *Soient* $(M_1, \{.,.\}_1)$ *et* $(M_2, \{.,.\}_2)$ *deux variétés de Poisson, il existe une unique structure de Poisson sur la variété* $M_1 \times M_2$ *pour laquelle les deux projections canoniques* $p_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ $(i = 1, 2)$ *sont des morphismes de Poisson et* $\{f \circ p_1, g \circ p_2\} = 0$, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M_1)$, $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$.

Preuve. Voir [6]. ■

La proposition précédente caractérise le produit direct de variétés de Poisson. On dit aussi que la variété de Poisson $(M_1 \times M_2, \{.,.\})$ est le produit direct de $(M_1, \{.,.\}_1)$ et $(M_2, \{.,.\}_2)$.

2.6 Champs de Poisson

Définition 2.6.1 *Soient* (M, Π) *une variété de Poisson et* X *un champ de vecteurs sur* M. *On dit que* X *est un* ***champ de Poisson*** *si* $L_X \Pi = 0$.

Proposition 2.6.1 *Soient* (M, Π) *une variété de Poisson et* X *un champ de Poisson. On a*

1) *Pour tout* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X(\{f,g\}) = \{X(f), g\} + \{f, X(g)\}$.
2) *Tout champ hamiltonien est un champ de Poisson.*
3) *Pour tout* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $[X, H_f] = H_{X(f)}$.

Preuve. 1) Soit X un champ de Poisson, on a pour tout f et g dans $\mathcal{C}^\infty(M)$

$$\begin{aligned} X(\{f,g\}) &= \mathcal{L}_X\{f,g\} = \mathcal{L}_X\langle \Pi, df\wedge dg\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}_X\Pi, df\wedge dg\rangle + \{X(f),g\} + \{f,X(g)\} \\ &= \{X(f),g\} + \{f,X(g)\}. \end{aligned}$$

2) Si X est l'hamiltonien d'une fonction, cette équation n'est autre que l'identité de Jacobi; par conséquent : tout champ hamiltonien est un champ de Poisson.

3) Pour tout $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned} [X,H_f](h) &: = X(H_f(h)) - H_f(X(h)) = X(\{f,h\}) - \{f;X(h)\} \\ &= \{X(f),h\} + \{f,X(h)\} - \{f;X(h)\} = \{X(f),h\} \\ &= H_{X(f)}(h), \end{aligned}$$

car X est un champ de Poisson. ■

Remarque 2.6.1 1) *La réciproque de la deuxième assertion n'est pas toujours vraie en général. A titre d'exemple, pour la structure de Poisson triviale, tous les champs de vecteurs sont des champs de Poisson, tandis que l'ensemble des champs hamiltoniens est réduit à l'élément neutre. Cependant, les deux notions coïncident dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa structure symplectique standard.*

2) *Le flot d'un champ de Poisson préserve la structure de Poisson (i.e. c'est un isomorphisme de Poisson).*

3) *Les champs de Poisson sont l'analogue des champs de Killing pour une structure pseudo-riemannienne.*

2.7 Structure locale d'une variété de Poisson

2.7.1 Rang d'une structure de Poisson

Soit (M,Π) une structure de Poisson. Pour tout point x dans M la forme bilinéaire $\Pi(x)$: $T_x^*M \times T_x^*M \to \mathbb{R}$ induit une application linéaire $\sharp_{\Pi(x)} : T_x^*M \to T_xM$; ainsi, le champ de bivecteurs Π induit une application linéaire sur les sections $\sharp_\Pi : \Omega^1(M) \to \chi(M)$ appelée **application ancre** et caractérisée par

$$\beta(\sharp_\Pi(\alpha)) = \langle \Pi, \alpha\wedge\beta\rangle, \tag{2.7.1}$$

pour tout couple (α, β) de 1-formes sur M.

Par exemple, si $\alpha = -df$ alors $\sharp_\Pi(\alpha) = H_f$, ainsi il y a une correspondance entre les 1-formes exactes et les champs hamiltoniens sur M.

Dans un système de coordonnées locales $(U; (x_1, x_2, ..., x_n))$ au voisinage de x on a

$$\sharp_\Pi(\sum_{i=1}^{i=n} a_i dx^i) = \sum_{ij} \{x^i, x^j\} a_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{ij} \Pi^{ij} a_i \frac{\partial}{\partial x^j},$$

ainsi $(\Pi^{ij}(x))_{ij}$ est la matrice associée à $\sharp_{\Pi(x)}$ relativement aux bases $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ et $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$ de T_x^*M et T_xM respectivement.

Définition 2.7.1 *Le rang d'une variété de Poisson (M, Π) en un point x est la dimension de $\mathrm{Im}\, \sharp_{\Pi(x)}$ (ou bien le rang de $\sharp_{\Pi(x)}$).*

*L'**espace caractéristique** de la structure de Poisson en x est $\mathcal{C}_x = \mathrm{Im}\, \sharp_{\Pi(x)}$.*

Le rang de (M, Π) est le maximum des rangs en tous les points de M.

Définition 2.7.2 *On dit qu'un point d'une variété de Poisson (M, Π) est régulier s'il admet un voisinage dans lequel la structure de poisson est constante.*

On appelle l'ouvert régulier de la structure de Poisson (M, Π) l'ensemble des points régulières. On le note $\mathcal{O}$.

*La structure de Poisson est dite **régulière** si $\mathcal{O} = M$.*

On notera souvent l'ouvert régulier par $\mathcal{O}$; c'est un ouvert dense de M; le rang au voisinage de chaque point de l'ouvert régulier est constant.

Exemple 2.7.1 *L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure de Poisson définie par le champ de bivecteurs $\Pi = \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$. Cette structure est régulière de rang 2. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ la matrice associée à $\sharp_{\Pi(x)}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.7.2 Structure d'espace vectoriel symplectique sur l'espace caractéristique

Soient $x \in M$ et $X, Y \in \mathcal{C}_x = \mathrm{Im}\, \sharp_{\Pi(x)}$, on définit sur $\mathcal{C}_x$ la forme bilinéaire suivant

$$\omega_x(X, Y) = \langle \Pi(x), \alpha \wedge \beta \rangle,$$

où $X = \sharp_{\Pi(x)}(\alpha)$ et $Y = \sharp_{\Pi(x)}(\beta)$.

Comme Π est un tenseur de Poisson alors ω_x définit une structure d'espace vectoriel symplectique sur $\mathcal{C}_x$; par conséquent $\mathcal{C}_x$ est toujours de dimension paire.

Dans l'exemple précédent, l'espace caractéristique en tout point est isomorphe à $\mathbb{R}^2$ et la structure symplectique c'est la structure canonique donnée par

$$\omega(X,Y) = X^t JY$$

où X^t est le transposé du vecteur X et J est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.7.3 Système de coordonnées locales canoniques

Théorème 2.7.1 *(A. Weinstein)*

Soit (M,Π) une variété de Poisson, tout point x admet un système de coordonnées $(p_1, p_2, ..., p_s, q_1, q_2, ..., q_s, y_1, y_2, ..., y_{n-2s})$ centré en x et dans lequel le tenseur de Poisson s'écrit

$$\Pi = \sum_{i=1}^{i=s} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{0 \leq i < j \leq n-2s} \varphi^{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j},$$

avec (φ^{ij}) une famille de fonctions différentiables nulles au point x ne dépendant que de $(y_1, y_2, ..., y_{n-2s})$ et $2s$ c'est le rang de la structure de Poisson en ce point.

Preuve. La démonstration du théorème se fait par récurrence sur le rang de Π en x.

Si $s = 0$ c'est l'écriture d'un champ de bivecteurs et il y a pas de facteur symplectique.

Sinon, il existe deux fonctions f et g tel que $\{f, g\}(x) \neq 0$, on pose $p_1 = g$ donc $0 \neq \{f, p_1\}(x) = -H_{p_1}(f)(x)$, grâce au théorème de redressement il existe un système de coordonnées $(q_1, q_2, ..., q_n)$ tel que $H_{p_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}$, ainsi $H_{p_1}(q_1) = 1 = \{p_1, q_1\}$. Les deux champs H_{p_1} et H_{q_1} sont linéairement indépendants; (sinon si $H_{p_1} = \lambda H_{q_1}$ on aura $1 = \{p_1, q_1\} = \lambda H_{q_1}(q_1) = \lambda\{q_1, q_1\} = 0$, contradiction);de plus H_{p_1} et H_{q_1} commutent, en effet

$$[H_{p_1}, H_{q_1}] = H_{\{p_1, q_1\}} = H_1 = 0,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de Frobenius, donc il existe un feuilletage de dimension 2 au voisinage de x, par conséquent il existe un système de coordonnées $(y_1, y_2, ..., y_n)$ tel que

$$H_{p_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}; H_{q_1} = \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Avec ce système, on a $\{p_1, y_i\} = \{q_1, y_i\} = 0$ pour $3 \leq i \leq n$, puis avec l'identité de Jacobi on déduit : $\{p_1, \{y_i, y_j\}\} = \{q_1, \{y_i, y_j\}\} = 0$ pour $3 \leq i, j \leq n$, ainsi

$$\frac{\partial \{y_i, y_j\}}{\partial y_1} = \frac{\partial \{y_i, y_j\}}{\partial y_2} = 0; \quad 3 \leq i, j \leq n.$$

Donc $\{y_i, y_j\}$ est indépendant de y_1 et y_2, autrement dit

$$\{y_i, y_j\} = \varphi^{ij}(y_3, ..., y_n); \quad 3 \leq i, j \leq n.$$

On peut prendre $(p_1, q_1, y_3, ..., y_n)$ comme nouveau système de coordonnées car la matrice Jacobienne de l'application $(y_1, y_2, ..., y_n) \longmapsto (p_1, q_1, y_3, ..., y_n)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ -1 & 0 & * \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

et son déterminant est égal à 1. Le tenseur de Poisson dans ces nouvelles coordonnées s'écrit

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial p_1} \wedge \frac{\partial}{\partial q_1} + \sum_{3 \leq i < j \leq n} \widetilde{\Pi}^{ij}(y_3, ..., y_n) \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Cette formule implique que notre structure de Poisson est le produit de la structure symplectique standard sur le plan $\{(p_1, q_1)\}$ et la sous-variété $\{(y_3, ..., y_n)\}$ munie de la structure de Poisson induite par celle de M. On réitère le processus jusqu'à ce que l'on trouve un tenseur nul au point x. ■

Définition 2.7.3 *Le système de coordonnées donné par le théorème* (2.5.1) *s'appelle le système de coordonnées locales canoniques. Ainsi, le crochet de Poisson dans ce système prend cette forme*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) + \sum_{0 \leq i,j \leq n-2s} \{y_i, y_j\} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial y_j}.$$

Remarque 2.7.1 *Lorsque $n = 2s$ on retrouve le théorème de Darboux qui donne les coordonnées canoniques locales pour une structure symplectique, ce qui veut dire qu'il y a un seul modèle local d'une structure symplectique quelconque.*

2.7.4 Feuilletage symplectique

On va voir qu'une variété de Poisson est munie d'un feuilletage (singulier si la structure de Poisson est singulière et régulier si la structure de Poisson est régulière) dont les feuilles sont des sous-variétés symplectiques maximales. Ceci grâce à un théorème dû à Stefan et Sussmann (1974).

Définition 2.7.4 *Un* ***feuilletage*** *sur une variété différentiable M de dimension n est la donnée d'une partition $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}$ de M en sous-variétés immergées $\mathcal{F}_\alpha$, connexes appelées feuilles dont chacune vérifie : Pour tout $x \in M$, si $x \in \mathcal{F}_\alpha$ et $\mathcal{F}_\alpha$ de dimension d, alors il existe une carte locale $(U; (y_1, y_2, ..., y_n))$ centrée en x telle que $\{y_{d+1} = y_{d+2} = ... = y_n = 0\} \supset U \cap \mathcal{F}_\alpha$; et pour chaque vecteur $(c_{d+1}, c_{d+2}, ..., c_n)$ l'ensemble $\{y_i = c_i,\ i = d+1, ..., n\}$ est soit vide soit contenue dans une feuille.*

Si toutes les feuilles ont la même dimension d alors le ***feuilletage est régulier de dimension*** *d et de codimension $(n-d)$.*

Exemple 2.7.2 1) *Si $f : M \to N$ est une submersion différentiable dont tous les fibres sont connexes, alors $\{F_p := f^{-1}(p);\ p \in N\}$ est un feuilletage régulier de dimension $(dimM - dimN)$.*

2) *En particulier, si $\pi : E \to M$ est un fibré vectoriel sur M, alors $\{E_x := \pi^{-1}(x);\ x \in M\}$ est un feuilletage régulier; sa dimension est le rang du fibré. On l'appelle le feuilletage vertical du fibré.*

Définition 2.7.5 *Une distribution $\mathcal{D}$ sur M est la donnée en chaque point x d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_x$ de T_xM.*

Une distribution est lisse (différentiable) si pour tout $x \in M$, tout vecteur de $\mathcal{D}_x$ est la valeur en x d'un champ de vecteurs défini au voisinage de x.

Si la dimension de $\mathcal{D}_x$ dépend de x alors la distribution est dite ***singulière****; elle est dite* ***régulière*** *sinon.*

Exemple 2.7.3 *A une famille de champs de vecteurs $\mathcal{C}$ on associe la distribution lisse $\mathcal{D}^C$ telle que pour tout $x \in M$, l'espace vectoriel $\mathcal{D}^C_x$ est engendré par $\{X(x); X \in \mathcal{C}\}$. On dit que la distribution $\mathcal{D}^C$ est engendrée par la famille $\mathcal{C}$.*

Exemple 2.7.4 *A chaque feuilletage $\mathcal{F}$ correspond une distribution $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ définie pour tout x dans M par $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_x = T_x(\mathcal{F}_\alpha)$, où $\mathcal{F}_\alpha$ est la feuille qui contient x. La distribution $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ s'appelle la distribution tangente au feuilletage $\mathcal{F}$.*

Réciproquement, étant donné une distribution lisse $\mathcal{D}$, existe-t-il un feuilletage auquel elle est tangente?.

Définition 2.7.6 *Une* ***sous-variété intégrale*** *d'une distribution lisse $\mathcal{D}$ est une sous-variété immergée de M dont l'espace tangent en tout point est un sous-espace vectoriel de l'espace donné par $\mathcal{D}$ en ce point. Une sous-variété intégrale est* ***de dimension maximale***

si son espace tangent en un point x est égal à $\mathcal{D}_x$. Une ***sous-variété intégrale maximale*** *est une sous-variété intégrale qui n'est contenue dans aucune autre sous-variété intégrale.*

Définition 2.7.7 *Une distribution sur M est* ***intégrable*** *si tout point de M est contenu dans une sous-variété intégrale maximale de dimension maximale.*

Définition 2.7.8 *Une distribution $\mathcal{D}$ sur M est* ***invariante*** *par rapport à un champ de vecteurs X si $(\varphi_X^t)_*\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_{\varphi_X^t(x)}$ lorsque cela est bien défini. Une distribution $\mathcal{D}$ est invariante par rapport à une famille de champs de vecteurs si elle l'est pour chacun de ses éléments.*

Nous somme à présent en mesure de faire le lien entre les distributions intégrables et les feuilletages.

Théorème 2.7.2 *(Stefan-Sussmann)*

Soit $\mathcal{D}$ une distribution lisse sur une variété différentiable; les propositions suivantes sont équivalentes :

a) La distribution $\mathcal{D}$ est intégrable.

b) $\mathcal{D}$ est engendrée par une famille C de champs de vecteurs et elle est invariante par rapport à cette famille.

c) $\mathcal{D}$ est la distribution tangente à un feuilletage $\mathcal{F}$ sur M.

Preuve. Nous donnons les grandes lignes de la démonstration, (voir [6] pour plus de détails).

a) $\Longrightarrow$ b): Soit $\mathcal{D}$ une distribution intégrable, on pose $C = \{X \in \chi(M); X(x) \in \mathcal{D}_x, \forall x \in M\}$. Le fait que $\mathcal{D}$ soit lisse implique $\mathcal{D} = \mathcal{D}^C$, reste à démontrer que $\mathcal{D}$ est invariante par la famille $\mathcal{C}$. En effet, soit $X \in \mathcal{C}$, pour $x \in M$ on note $\mathcal{F}_x$ la feuille contenant x, par hypothèse on a pour tout $y \in \mathcal{F}_x$, $T_y(\mathcal{F}_x) = \mathcal{D}_y$ (les feuilles sont de dimension maximale). Ainsi $X(y) \in T_y(\mathcal{F}_x)$, pour tout $y \in \mathcal{F}_x$ donc il existe $t > 0$ tel que $\varphi_X^t(x) \in \mathcal{F}_x$ et par conséquent

$$(\varphi_X^t)_*\mathcal{D}_x = (\varphi_X^t)_*(T_x(\mathcal{F}_x)) = T_{\varphi_X^t(x)}(\mathcal{F}_x) = \mathcal{D}_{\varphi_X^t(x)}.$$

b) $\Longrightarrow$ c): On suppose que $\mathcal{D}$ est engendrée par une famille de champs de vecteurs C et qu'elle est invariante par rapport à cette famille. Pour $x \in M$ soit $d = \dim \mathcal{D}_x$; ainsi il existe $X_1, X_2, ..., X_d \in C$ tels que $\{X_1(x), X_2(x), ..., X_d(x)\}$ engendre $\mathcal{D}_x$. On note par $\phi_1^t, \phi_2^t, ..., \phi_d^t$ leurs flots respectifs. L'application

$$(s_1, s_2, ..., s_d) \mapsto (\phi_1^{s_1} \circ \phi_2^{s_2} \circ ... \circ \phi_d^{s_d})(x)$$

établit un difféomorphisme entre le disque ouvert $D(0,\varepsilon)$ et un voisinage ouvert de x. Lorsque x varie on obtient une sous-variété intégrale maximale de dimension maximale grâce à l'invariance de la distribution $\mathcal{D}$ par rapport à la famille C. En recolant ces sous-variétés lorsqu'elles s'intersectent on obtient une partition de M. La distribution $\mathcal{D}$ est par construction tangente au feuilletage obtenu.

$\underline{c) \Longrightarrow a)}$: Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathcal{F}}$, alors en prenant pour chaque x la feuille qui le contient, c'est une sous-variété intégrale maximale de dimension maximale; on conclut que $\mathcal{D}$ est intégrable. ■

2.7.5 Application à la structure de Poisson

Définition 2.7.9 *Une distribution lisse $\mathcal{D}$ sur une variété différentiable est **localement finie** si pour tout point x dans M, il existe un ouvert U qui le contient et tel que : Pour tout champ de vecteurs Y sur U, tangent à $\mathcal{D}$, Y est une combinaison $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire d'une famille finie de champs de vecteurs sur U.*

Exemple 2.7.5 *Soit (M,Π) une variété de Poisson, le théorème de A. Weinstein montre que la distribution caractéristique, qui associe à chaque point de M l'espace caractéristique de la structure de Poisson en ce point, est localement finie.*

Théorème 2.7.3 *(Hermann)*

*Toute distribution lisse, localement finie et **involutive** (i.e. stable par le crochet de Lie), est intégrable.*

Preuve. Il suffit de considérer la famille des champs de vecteurs tangents à cette distribution et vérifier l'assertion $b)$ du théorème de Stephan-Sussmann. ■

Soit (M,Π) une variété de Poisson, on note par C la distribution caractéristique de la structure de Poisson. Pour tout point x, on a

$$C_x = \operatorname{Im} \sharp_{\Pi(x)} = \{H_f(x); f \in \mathcal{C}^\infty(M)\}.$$

.Comme les champs hamiltoniens sont des champs de Poisson, ils préservent la distribution caractéristique. De plus, C est involutive donc elle est intégrable d'après le théorème d'Hermann. En appliquant le théorème de Stephan-Sussmann, c'est la distribution tangente à un feuilletage $\mathcal{F}$: On l'appelle **le feuilletage symplectique** associé à la structure de Poisson (M,Π). La structure symplectique des feuilles est définie au paragraphe (2.5.2).

Exemple 2.7.6 ***Feuilletage symplectique d'une structure de Poisson linéaire***

Soit G un groupe de Lie connexe, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ le dual de $\mathcal{G}$. Le groupe G agit sur son algèbre de Lie par la représentation adjointe et sur $\mathcal{G}^*$ par l'action coadjointe définie par

$$Ad_g^*\alpha(x) = \alpha(Ad_{g^{-1}}x)$$

pour tout $g \in G$, $\alpha \in \mathcal{G}^*$ et $x \in \mathcal{G}$.

Le générateur infinitésimal de cette action est la représentation coadjointe de l'algèbre de Lie de G sur son dual défini par

$$ad_x^*\alpha(y) = \alpha([y, x]) = -\alpha(ad_x y)$$

pour tout $x, y \in \mathcal{G}$ et tout $\alpha \in \mathcal{G}^*$.

Remarque 2.7.2 *Les feuilles symplectiques de la structure de Poisson linéaire sur le dual d'une algèbre de Lie coïncide avec les orbites de la représentation coadjointe de cette algèbre de Lie sur son dual. (Voir* [6], §3*).*

3

Dérivées contravariantes sur une variété pseudo-riemannienne

3.1 Calcul différentiel contravariant sur une variété

La donnée d'un champ de bivecteurs π permet de définir un calcul différentiel contravariant analogue au calcul différentiel classique mais qui dépend du champ π.

3.1.1 Produit intérieur contravariant

Définition 3.1.1 *Le produit intérieur d'un champ de multivecteurs Q de degré k par une 1-forme α est le champ de multivecteurs noté $i_\alpha Q$, de degré $(k-1)$ et défini par*

$$(i_\alpha Q)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}) := Q(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}), \tag{3.1.1}$$

pour tout $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1} \in \Omega^1(M)$.

Par convention, le produit intérieur d'une fonction par une 1-forme est nul.

Le produit intérieur vérifie la règle de Leibniz, i.e.

$$i_\alpha (P \wedge Q) = (i_\alpha P) \wedge Q + (-1)^{\deg P} P \wedge (i_\alpha Q). \tag{3.1.2}$$

3.1.2 Dérivée de Lie contravariante

On munit $\Omega^1(M)$ d'une application $\mathbb{R}-$bilinéaire, appelée crochet de Koszul et définie par

$$\begin{array}{rccc} [.,.]_\pi : & \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) & \rightarrow & \Omega^1(M) \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & [\alpha, \beta]_\pi \end{array}$$

où

$$[\alpha, \beta]_\pi := \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)). \tag{3.1.3}$$

Proposition 3.1.1 *Dans un système de coordonnées locales $(x^1, x^2, ..., x^n)$, on a*

$$\left[dx^i, dx^j\right]_\pi = d\left\{x^i, x^j\right\} = d\pi^{ij} = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x^s} dx^s; 1 \leq i, j \leq n. \tag{3.1.4}$$

Preuve. On rappelle que pour tout champ de vecteurs X, toute fonction différentiable et toute 1-forme α sur M, on a

$$\mathcal{L}_{fX}\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + \alpha(X).df$$

et si on prend $X = \frac{\partial}{\partial x^s}$, $f = \pi^{is}$, $\alpha = dx^j$, on a

$$\mathcal{L}_{\pi^{is}\frac{\partial}{\partial x^s}}(dx^j) = \pi^{is}(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^s}} dx^j) + dx^j(\frac{\partial}{\partial x^s}).d\pi^{is} = \begin{cases} d\pi^{ij} & si \quad s = j \\ 0 & si \quad s \neq j; \end{cases}$$

par conséquent

$$\mathcal{L}_{\sharp_\pi(dx^i)}(dx^j) = \mathcal{L}_{\sum_{s=1}^{s=n} \pi^{is}\frac{\partial}{\partial x^s}}(dx^j) = \sum_{s=1}^{n} \mathcal{L}_{\pi^{is}\frac{\partial}{\partial x^s}}(dx^j) = d\pi^{ij};$$

donc en utilisant la définition du crochet, on obtient

$$\begin{aligned} \left[dx^i, dx^j\right]_\pi &= \mathcal{L}_{\sharp_\pi(dx^i)}(dx^j) - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(dx^j)}(dx^i) - d(\pi(dx^i, dx^j)) \\ &= d\pi^{ij} - d\pi^{ji} - d\pi^{ij} = -d\pi^{ji} = d\pi^{ij}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

Ce crochet est visiblement anti-symétrique, de plus, on a :

Proposition 3.1.2 *Pour tout fonction différentiable f sur M et pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, on a l'identité*

$$[\alpha, f\beta]_\pi = f\,[\alpha, \beta]_\pi + [\sharp_\pi(\alpha).f]\,\beta. \tag{3.1.5}$$

Preuve. On a par définition

$$[\alpha, f\beta]_\pi = \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}(f\beta) - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(f\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, f\beta)).$$

Or

$$\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}(f\beta) = f\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta + [\sharp_\pi(\alpha).f]\,\beta$$

et

$$\mathcal{L}_{\sharp_\pi(f\beta)}\alpha = \mathcal{L}_{f\sharp_\pi(\beta)}\alpha = f\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha + \alpha(\sharp_\pi(\beta))df = f\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha - \pi(\alpha,\beta)df.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
[\alpha, f\beta]_\pi &= f\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta + [\sharp_\pi(\alpha).f]\,\beta - f\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha + \pi(\alpha,\beta)df - d(f\pi(\alpha,\beta)) \\
&= f(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha) - fd(\pi(\alpha,\beta)) + [\sharp_\pi(\alpha).f]\,\beta \\
&= f\,[\alpha,\beta]_\pi + [\sharp_\pi(\alpha).f]\,\beta,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Définition 3.1.2 *On définit la dérivée de Lie contravariante sur $\Omega^1(M)$ par*

$$\mathfrak{L}_\alpha\beta := [\alpha,\beta]_\pi\,.$$

De la proposition précédente, l'application $(\alpha \longmapsto \mathfrak{L}_\alpha)$ est une application linéaire de $\Omega^1(M)$ dans $End(\Omega^1(M))$; mais contrairement au cas covariant, ce n'est généralement pas un morphisme d'algèbres de Lie car le crochet ne vérifie pas l'identité de Jacobi.

On généralise la notion de dérivée de Lie contravariante à $\chi^k(M)$ en posant pour toute fonction différentiable f et toute 1-forme α,

$$\mathfrak{L}_\alpha f := \sharp_\pi(\alpha).f = df(\sharp_\pi(\alpha)) \tag{3.1.6}$$

et pour toute famille $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k \in \Omega^1(M)$ et tout $Q \in \chi^k(M)$,

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_\alpha Q)(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k) \;:&= \sharp_\pi(\alpha).Q(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k) - Q([\alpha,\beta_1]_\pi\,,\beta_2,...,\beta_k) \\
&\quad -Q(\beta_1,[\alpha,\beta_2]_\pi\,,...,\beta_k) - ... - Q(\beta_1,\beta_2,...,[\alpha,\beta_k]_\pi).
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

3.1.3 La différentielle extérieure contravariante d'un champ de multivecteurs

Définition 3.1.3 *On définit la différentielle extérieure d'un champ de multivecteurs $Q \in \chi^k(M)$ par la formule*

$$\begin{aligned}
k.(\delta Q)(\beta_0,\beta_1,\beta_2,...,\beta_k) &= \sum_{i=0}^{i=k}(-1)^i\sharp_\pi(\beta_i).Q(\beta_0,...,\widehat{\beta_i},...,\beta_k) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}Q(\left[\beta_i,\beta_j\right]_\pi\,,\beta_0,...,\widehat{\beta_i},...,\widehat{\beta_j},...,\beta_k).
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Voici quelques propriétés de cette différentielle extérieure.

Proposition 3.1.3 *i) L'opérateur δ vérifie la règle de Leibniz*

$$\delta(P \wedge Q) = \delta P \wedge Q + (-1)^{\deg P} P \wedge \delta Q. \tag{3.1.9}$$

ii) L'opérateur δ s'exprime en fonction du crochet de Schouten-Nijenhuis de Q par la formule

$$\delta Q = -\left[\pi, Q\right]_S. \tag{3.1.10}$$

iii) On a les identités

$$\delta^2 Q = \frac{1}{2}\left[Q, [\pi, \pi]_S\right]_S, \tag{3.1.11}$$

$$\begin{aligned} \left[\pi, \pi\right]_S(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}\{&\sharp_\pi(\alpha).\pi(\gamma, \beta) + \sharp_\pi(\beta).\pi(\alpha, \gamma) + \sharp_\pi(\gamma).\pi(\beta, \alpha) \\ &+\pi([\alpha, \beta]_\pi, \gamma) + \pi([\gamma, \alpha]_\pi, \beta) + \pi([\beta, \gamma]_\pi, \alpha)\} = -\delta\pi(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Preuve. *i)* C'est la même démonstration que pour le cas covariant, voir [1; page 307].

ii) La démonstration se fait par récurrence sur le degré de Q. Pour une fonction différentiable f sur M, on a

$$\delta f(\alpha) = -\sharp_\pi(\alpha)(f) = \alpha(H_f) = -\left[\pi, f\right]_S(\alpha) \quad \forall \alpha \in \Omega^1(M).$$

On suppose que

$$\delta Q = -\left[\pi, Q\right]_S.$$

alors d'après *i)* on a

$$\begin{aligned} \delta(Q \wedge X) &= \delta Q \wedge X + (-1)^{\deg Q} Q \wedge \delta X \\ &= -\left[\pi, Q\right]_S \wedge X - (-1)^{\deg Q} Q \wedge \left[\pi, X\right]_S \\ &= -\left[\pi, Q \wedge X\right]_S; \end{aligned}$$

puis on étend par linéarité à tout champ du degré $(\deg Q + 1)$.

iii) D'après *ii)* on a

$$(-1)^{\deg Q - 1}.\delta^2(Q) = -(-1)^{\deg Q - 1}\left[\pi, \delta Q\right]_S = (-1)^{\deg Q - 1}\left[\pi, [\pi, Q]_S\right]_S.$$

On applique l'analogue de l'identité de Jacobi pour le crochet Schouten-Nijenhuis, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} (-1)^{\deg Q - 1}\left[\pi, [\pi, Q]_S\right]_S &= \left[\pi, [Q, \pi]_S\right]_S - (-1)^{\deg Q - 1}\left[Q, [\pi, \pi]_S\right]_S \\ &= (-1)^{\deg Q}\left[\pi, [\pi, Q]_S\right]_S + (-1)^{\deg Q}\left[Q, [\pi, \pi]_S\right]_S \end{aligned}$$

et par suite

$$2\delta^2(Q) = 2\left[\pi, [\pi, Q]_S\right]_S = \left[Q, [\pi, \pi]_S\right]_S ..$$

iv) Il suffit d'appliquer la définition pour $k = 2$. ■

Corollaire 3.1.1 *Le crochet de Schouten-Nijenhuis $[\pi, \pi]_S$ est l'obstruction à ce que le morphisme musical réalise un morphisme d'algèbre de Lie entre $(\Omega^1(M), [.,.]_\pi)$ et l'espace $\chi(M)$ muni du crochet de Lie. Autrement dit, pour tout α, β, γ dans $\Omega^1(M)$, on a*

$$[\pi, \pi]_S(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(\sharp_\pi([\alpha, \beta]_\pi) - [\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)]). \tag{3.1.13}$$

Preuve. On a d'une part $\gamma(\sharp_\pi([\alpha, \beta]_\pi)) = \pi([\alpha, \beta]_\pi, \gamma)$ et d'autre part

$$\begin{aligned}\gamma([\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)]) &= \gamma(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_\pi(\beta)) = \sharp_\pi(\alpha).\gamma(\sharp_\pi(\beta)) - (\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\gamma)(\sharp_\pi(\beta)) \\ &= \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) - \pi(\beta, \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\gamma).\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\gamma = [\alpha, \gamma]_\pi + \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\gamma)}\alpha + d\pi(\alpha, \gamma)$, on trouve

$$\gamma([\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)]) = \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) + \sharp_\pi(\beta).\pi(\gamma, \alpha) + \pi([\alpha, \gamma]_\pi, \beta) + \pi(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\gamma)}\alpha, \beta).$$

Or

$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\gamma)}\alpha, \beta) &= -(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\gamma)}\alpha)(\sharp_\pi(\beta)) = \sharp_\pi(\gamma).\pi(\alpha, \beta) + \alpha([\sharp_\pi(\gamma), \sharp_\pi(\beta)]) \\ &= \sharp_\pi(\gamma).\pi(\alpha, \beta) + \pi([\gamma, \beta]_\pi, \alpha) + \alpha(\sharp_\pi([\beta, \gamma]_\pi) - [\sharp_\pi(\beta), \sharp_\pi(\alpha)]).\end{aligned}$$

Donc, si on pose $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(\sharp_\pi([\alpha, \beta]_\pi) - [\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)])$, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha, \beta, \gamma) &= \sharp_\pi(\alpha).\pi(\gamma, \beta) + \sharp_\pi(\beta).\pi(\alpha, \gamma) + \sharp_\pi(\gamma).\pi(\beta, \alpha) \\ &\quad +\pi([\alpha, \beta]_\pi, \gamma) + \pi([\gamma, \alpha]_\pi, \beta) + \pi([\beta, \gamma]_\pi, \alpha) - \varphi(\beta, \gamma, \alpha);\end{aligned}$$

autrement dit, $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 2.[\pi, \pi]_S(\alpha, \beta, \gamma) - \varphi(\beta, \gamma, \alpha)$ et ceci démontre que φ est antisymétrique; par conséquent $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \varphi(\beta, \gamma, \alpha)$, et le résultat en découle. ■

3.1.4 Cohomologie de Poisson

Dans le cas où le champ de bivecteurs π définit une structure de Poisson, on a $[\pi, \pi]_S = 0$. D'après *iii*) de la proposition 3-5-1, on a donc $\delta^2 = 0$. Par conséquent $(\chi^*(M), \delta)$ forme un complexe appelé complexe de Poisson. On note $Z_\pi^k(M)$ l'espace des k-cocycles et $B_\pi^k(M)$ l'espace des k-cobords de ce complexe. Sa cohomologie, que l'on note $H_\pi^*(M)$, est appelée la cohomologie de Poisson de la variété de Poisson (M, π).

Proposition 3.1.4 *Soit (M, π) une variété de Poisson, et soit $(\chi^*(M), \delta)$ le complexe de Poisson associé.*

1) *$H^0_\pi(M)$ est l'espace des fonctions de Casimir.*
2) *$Z^1_\pi(M)$ est l'espace des champs de Poisson.*
3) *$B^1_\pi(M)$ est l'espace des champs hamiltoniens de la structure Poisson.*

Preuve. 1) On a

$$\begin{aligned} H^0_\pi(M) &= Z^0_\pi(M) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M), \text{ tel que } \delta(f) = 0\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}^\infty(M), \text{ tel que } H_f = 0\} = \Omega^0_b(M). \end{aligned}$$

2) Un champ de vecteurs X appartient à $Z^1_\pi(M)$ si $\delta(X) = 0$; ce qui est traduit par

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(X)(\alpha, \beta) := \sharp_\pi(\alpha).X(\beta) - \sharp_\pi(\beta).X(\alpha) - [\alpha, \beta]_\pi(X) \\ &= \big(\sharp_\pi(\alpha).X(\beta) - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta(X)\big) - \big(\sharp_\pi(\beta).X(\alpha) - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha(X)\big) + X.\pi(\alpha; \beta) \\ &= X.\pi(\alpha; \beta) + \beta(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}X) - \alpha(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}X) = X.\pi(\alpha; \beta) - \beta(\mathcal{L}_X\sharp_\pi(\alpha)) + \alpha(\mathcal{L}_X\sharp_\pi(\beta)) \\ &= X.\pi(\alpha; \beta) + \mathcal{L}_X\beta(\sharp_\pi(\alpha)) - \mathcal{L}_X\alpha(\sharp_\pi(\beta)) = \mathcal{L}_X\pi(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, ce qui veut dire que X est un champ de Poisson.

3) Pour que X appartient à $Z^1_\pi(M)$ il faut qu'il existe une fonction différentiable f telle que

$$X = \delta(f) = -[f, \pi]_S = H_f,$$

donc X est l'hamiltonien de la fonction f. ■

Définition 3.1.4 *Pour toute k-forme ω sur M, on définit le k-champ de multivecteurs $\sharp_\pi(\omega)$ comme suit : Pour toute famille $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ de $\Omega^1(M)$, on pose*

$$\sharp_\pi(\omega)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) := (-1)^k\omega(\sharp_\pi(\alpha_1), \sharp_\pi(\alpha_2), ..., \sharp_\pi(\alpha_k)); \tag{3.1.14}$$

ce qui permet d'étendre le morphisme musical $\sharp_\pi$ aux k-formes.

Proposition 3.1.5 *Si le tenseur π définit une structure de Poisson sur M, alors*

$$\delta \circ \sharp_\pi = \sharp_\pi \circ d.$$

i.e. le morphisme $\sharp_\pi$ est un morphisme du complexe de de Rham dans le complexe de Poisson.

Preuve. On a

$$\begin{array}{rcl}\delta\circ\sharp_\pi(\omega)(\beta_0,...,\beta_i,...,\beta_k) & = & \sum_{i=0}^{i=k}(-1)^i\sharp_\pi(\beta_i).\sharp_\pi(\omega)(\beta_0,...,\widehat{\beta}_i,...,\beta_k)\\ & & +\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\sharp_\pi(\omega)(\left[\beta_i,\beta_j\right]_\pi,\beta_0,...,\widehat{\beta}_i,...,\widehat{\beta}_j,...,\beta_k)\\ & = & (-1)^k\sum_{i=0}^{i=k}(-1)^i\sharp_\pi(\beta_i).\omega(\sharp_\pi(\beta_0),...,\widehat{\sharp_\pi(\beta_i)},...,\sharp_\pi(\beta_k))\\ & & +(-1)^k\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(\sharp_\pi(\left[\beta_i,\beta_j\right]_\pi),\sharp_\pi(\beta_0),...,\widehat{\sharp_\pi(\beta_i)},...,\widehat{\sharp_\pi(\beta_j)},...,\sharp_\pi(\beta_k))\\ & = & \sharp_\pi(d\omega)(\beta_0,...,\beta_i,...,\beta_k),\end{array}$$

car le tenseur π définit une structure de Poisson (i.e. $\sharp_\pi(\left[\beta_i,\beta_j\right]_\pi=\left[\sharp_\pi(\beta_i),\sharp_\pi(\beta_j)\right]$. Corollaire 3.1.1). ■

Corollaire 3.1.2 *Dans le cas symplectique (i.e. $\sharp_\pi$ est inversible), c'est un isomorphisme.*

Preuve. De la relation $\delta\circ\sharp_\pi=\sharp_\pi\circ d$, on déduit que $d\circ\sharp_\pi^{-1}=\sharp_\pi^{-1}\circ\delta$. ■

3.2 Dérivées contravariantes sur une variété

3.2.1 Notions élémentaires

Définition 3.2.1 *Une dérivée contravariante $\mathcal{D}$ sur une variété M est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire*

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{D}: & \Omega^1(M)\times\Omega^1(M) & \to & \Omega^1(M)\\ & (\alpha,\beta) & \longmapsto & \mathcal{D}_\alpha\beta\end{array}$$

telle que pour tout $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$ et toute fonction $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\mathcal{D}_{f\alpha}\beta=f\mathcal{D}_\alpha\beta \tag{3.2.1}$$

$$\mathcal{D}_\alpha f\beta=f\mathcal{D}_\alpha\beta+\left[\sharp_\pi(\alpha)f\right]\beta. \tag{3.2.2}$$

Par abus de langage, on entendra par connexion contravariante sur une variété, une dérivée contravariante. La forme $\mathcal{D}_\alpha\beta$ est la dérivée contravariante de β par rapport à α.

Remarque 3.2.1 *Comme c'est le cas pour une drivée covariante, grâce à ces deux dernières formules, la dérivée $\mathcal{D}$ est locale. Dans un système de coordonnées $(U;(x^1,...,x^n))$, on définit les symboles de Christoffel associés à $\mathcal{D}$ par*

$$\mathcal{D}_{dx^i}dx^j:=\Gamma_k^{ij}dx^k,\qquad 1\leq i,j,k\leq n. \tag{3.2.3}$$

Où $\Gamma_k^{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$. *Si on note par* $\{\overline{\Gamma}_k^{ij}\}$ *les symboles de Christoffel associés à* $\mathcal{D}$ *dans un autre système de coordonnées* $(V;(y^1,...,y^n))$, *On a la relation de changement de coordonnées sur* $U \cap V$ *donnée par*

$$\overline{\Gamma}_k^{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial x^l}\frac{\partial y^j}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial y^k}\Gamma_n^{lm} - \frac{\partial y^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^m \partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial y^k}\pi^{nl}. \tag{3.2.4}$$

Inversement; la donnée des symboles de Christoffel détermine entièrement $\mathcal{D}$.

Définition 3.2.2 *La dérivée contravariante d'un champ de multivecteurs* P *de degré* k *par* $\mathcal{D}$ *est l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}P: & \Omega^1(M) & \to & \chi^k(M) \\ & \alpha & \longmapsto & \mathcal{D}_\alpha P \end{array}$$

définie par

$$(\mathcal{D}_\alpha P)(\alpha_1,...,\alpha_k) := \sharp_\pi(\alpha).P(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k) - \sum_{i=1}^{i=n} P(\alpha_1,...,\mathcal{D}_\alpha \alpha_i,...,\alpha_k). \tag{3.2.5}$$

On peut voir $\mathcal{D}P$ *comme un élément de* $\chi^{k+1}(M)$ *en posant*

$$(\mathcal{D}P)(\alpha,\alpha_1,...,\alpha_k) := (\mathcal{D}_\alpha P)(\alpha_1,...,\alpha_k).$$

En particulier, pour un champ de vecteurs X, on a

$$\mathcal{D}X(\alpha,\beta) = \sharp_\pi(\alpha).\beta(X) - (\mathcal{D}_\alpha \beta)(X). \tag{3.2.6}$$

De même, pour un champ de bivecteurs π, on a

$$\mathcal{D}\pi(\alpha,\beta,\gamma) = \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta,\gamma) - \pi(\mathcal{D}_\alpha\beta,\gamma) - \pi(\beta,\mathcal{D}_\alpha\gamma). \tag{3.2.7}$$

Définition 3.2.3 1) *Un champ de multivecteurs* P *est parallèle par rapport à* $\mathcal{D}$ *si* $\mathcal{D}P = 0$. *On dit aussi que* $\mathcal{D}$ *est compatible avec le tenseur* P.

2) *Une dérivée contravariante est appelée* ***connexion de Poisson*** *lorsque* $\mathcal{D}\pi = 0$.

Comme conséquence immédiate de cette définition : Une connexion de Poisson commute avec le morphisme musical $\sharp_\pi$, autrement dit :

Proposition 3.2.1 *Pour tout* $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$, *on a*

$$\mathcal{D}_\alpha(\sharp_\pi(\beta)) = \sharp_\pi(\mathcal{D}_\alpha\beta). \tag{3.2.8}$$

Preuve. On a pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$

$$\begin{aligned}
\gamma\{\mathcal{D}_\alpha(\sharp_\pi(\beta))\} &= \mathcal{D}_\alpha(\gamma(\sharp_\pi(\beta))) - \mathcal{D}_\alpha\gamma(\sharp_\pi(\beta)) \\
&= \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta,\gamma) - \pi(\beta, \mathcal{D}_\alpha\gamma) \\
&= \mathcal{D}\pi(\alpha,\beta,\gamma) + \pi(\mathcal{D}_\alpha\beta, \gamma).
\end{aligned}$$

Le fait qu'il s'agit d'une connexion de Poisson entraîne

$$\gamma\{\mathcal{D}_\alpha(\sharp_\pi(\beta))\} = \pi(\mathcal{D}_\alpha\beta, \gamma) = \gamma\{\sharp_\pi(\mathcal{D}_\alpha\beta)\};$$

d'où l'égalité. ■

Remarque 3.2.2 *Une dérivée contravariante n'est pas un tenseur, cependant :*

Proposition 3.2.2 *La différence de deux dérivées contravariantes est un tenseur 2-fois contravariant.*

Preuve. Soient $\mathcal{D}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}$ deux dérivées contravariantes, on pose $S = \mathcal{D} - \widetilde{\mathcal{D}}$. Pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, on a

$$S(f\alpha, \beta) = \mathcal{D}_{f\alpha}\beta - \widetilde{\mathcal{D}}_{f\alpha}\beta = f(\mathcal{D}_\alpha\beta - \widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta) = fS(\alpha,\beta)$$

et

$$\begin{aligned}
S(\alpha, f\beta) &= \mathcal{D}_\alpha f\beta - \widetilde{\mathcal{D}}_\alpha f\beta = f\mathcal{D}_\alpha\beta + [\sharp_\pi(\alpha)f]\,\beta - f\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta - [\sharp_\pi(\alpha)f]\,\beta \\
&= f\mathcal{D}_\alpha\beta - f\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta = f(\mathcal{D}_\alpha\beta - \widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta) = fS(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que S est bien un tenseur. ■

Torsion d'une dérivée contravariante

Pour les dérivées contravariantes on a aussi les notions de torsion et de courbure.

Définition 3.2.4 *La torsion d'une dérivée contravariante $\mathcal{D}$ est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire*

$$\begin{aligned}
T:\ \Omega^1(M)\times\Omega^1(M) &\to \Omega^1(M) \\
(\alpha,\beta) &\longmapsto T(\alpha,\beta);
\end{aligned}$$

définie par

$$T(\alpha,\beta) = [\alpha,\beta]_\pi - (\mathcal{D}_\alpha\beta - \mathcal{D}_\beta\alpha)\,. \tag{3.2.9}$$

Une dérivée contravariante est dite symétrique si sa torsion est nulle.

Proposition 3.2.3 *i) La torsion T d'une dérivée contravariante $\mathcal{D}$ est un champ de tenseurs 2-fois contravariant anti-symétrique.*

ii) La différence de deux dérivées contravariantes symétriques est symétrique.

Preuve. *i)* Pour l'anti-symétrie, c'est évident. En effet, pour tout $\beta \in \Omega^1(M)$, on a

$$T^\pi(\beta,\beta) = [\beta,\beta]_\pi - \mathcal{D}_\beta\beta + \mathcal{D}_\beta\beta = 0.$$

Pour montrer que T est un champ de tenseurs, on montre qu'il est $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire. Vu que T est anti-symétrique, il suffit de vérifier la $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéarité pour l'une des deux composantes. On a

$$\begin{aligned} T^\pi(\alpha, f\beta) &= [\alpha, f\beta]_\pi - (\mathcal{D}_\alpha f\beta - \mathcal{D}_{f\beta}\alpha) = [\alpha, f\beta]_\pi - \mathcal{D}_\alpha f\beta + f\mathcal{D}_\beta\alpha \\ &= (f\,[\alpha,\beta]_\pi + [\sharp_\pi(\alpha).f]\,\beta) - (f\mathcal{D}_\alpha\beta + [\sharp_\pi(\alpha)f]\,\beta) + f\mathcal{D}_\beta\alpha \\ &= f([\alpha,\beta]_\pi - (\mathcal{D}_\alpha\beta - \mathcal{D}_\beta\alpha)) = fT^\pi(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

ii) Soit $S = \mathcal{D} - \widetilde{\mathcal{D}}$, où $\mathcal{D}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}$ sont deux dérivées contravariantes. Pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, on a

$$\begin{aligned} S(\alpha,\beta) &= \mathcal{D}_\alpha\beta - \widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta = (\mathcal{D}_\beta\alpha + [\alpha,\beta]_\pi) - (\widetilde{\mathcal{D}}_\beta\alpha + [\alpha,\beta]_\pi) \\ &= \mathcal{D}_\beta\alpha - \widetilde{\mathcal{D}}_\beta\alpha = S(\beta,\alpha). \end{aligned}$$

ce qui prouve que S est symétrique. ■

Courbure

Définition 3.2.5 *La courbure $\mathcal{R}$ d'une dérivée contravariante $\mathcal{D}$ est l'application $\mathbb{R}$-trilinéaire*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}:\ \Omega^1(M)\times\Omega^1(M)\times\Omega^1(M) &\to \Omega^1(M) \\ (\alpha,\beta,\gamma) &\longmapsto \mathcal{R}(\alpha,\beta)\gamma; \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{R}(\alpha,\beta)\gamma := \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma - (\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma) - \mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\alpha\gamma)), \tag{3.2.10}$$

pour tout triplet (α,β,γ) de 1-formes différentielles sur M.

Proposition 3.2.4 *Comme pour le cas covariant, la courbure d'une dérivée contravariante symétrique vérifie l'identité de Bianchi*

$$\mathcal{R}(\alpha,\beta)\gamma + \mathcal{R}(\beta,\gamma)\alpha + \mathcal{R}(\gamma,\alpha)\beta = 0. \tag{3.2.11}$$

Preuve. Par la symétrie de $\mathcal{D}$ et l'identité de Jacobi, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma+\mathcal{D}_{[\beta,\gamma]_\pi}\alpha+\mathcal{D}_{[\gamma,\alpha]_\pi}\beta &= \mathcal{D}_\alpha([\beta,\gamma]_\pi)+\mathcal{D}_\beta([\gamma,\alpha]_\pi)+\mathcal{D}_\gamma([\alpha,\beta]_\pi)\\ &\quad+[[\beta,\gamma]_\pi,\alpha]_\pi+[[\gamma,\alpha]_\pi,\beta]_\pi+[[\alpha,\beta]_\pi,\gamma]_\pi\\ &= \mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma)-\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\gamma\beta)+\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\gamma\alpha)\\ &\quad-\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\alpha\gamma)+\mathcal{D}_\gamma(\mathcal{D}_\alpha\beta)-\mathcal{D}_\gamma(\mathcal{D}_\beta\alpha),\end{aligned}$$

et le résultat en découle. ■

Proposition 3.2.5 *L'application* $\mathbb{R}-$*trilinéaire* $(\alpha,\beta,\gamma)\longmapsto\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma$ *a les propriétés suivantes :*

i) $\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma=-\mathcal{R}^\pi(\beta,\alpha)\gamma$
ii) $\mathcal{R}^\pi(f\alpha,\beta)\gamma=f\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma.$
iii) $\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)(f\gamma)=f\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma.$

Preuve. *i)* Provient de la définition et du fait que $[.,.]_\pi$ est anti-symétrique.
ii) On utilise les propriétés de $\mathcal{D}$ et celles de $[.,.]_\pi$; on a

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\pi(f\alpha,\beta)\gamma &= \mathcal{D}_{[f\alpha,\beta]_\pi}\gamma-(\mathcal{D}_{f\alpha}(\mathcal{D}_\beta\gamma)-\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_{f\alpha}\gamma))\\ &= \left(\mathcal{D}_{f[\alpha,\beta]_\pi}\gamma-[\sharp_\pi(\beta)f]\,\mathcal{D}_\alpha\gamma\right)-f\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma)+\mathcal{D}_\beta(f\mathcal{D}_\alpha\gamma)\\ &= f\mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma-[\sharp_\pi(\beta)f]\,\mathcal{D}_\alpha\gamma-f\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma)+f\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\alpha\gamma)+[\sharp_\pi(\beta)f]\,\mathcal{D}_\alpha\gamma\\ &= f\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma.\end{aligned}$$

iii) On a

$$\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)(f\gamma)=\mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}f\gamma-(\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta f\gamma)-\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\alpha f\gamma)).$$

Or

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta f\gamma) &= \mathcal{D}_\alpha\left\{f\mathcal{D}_\beta\gamma+(\sharp_\pi(\beta).f)\gamma\right\}\\ &= f\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma)+(\sharp_\pi(\beta).f)\mathcal{D}_\alpha\gamma\\ &\quad+(\sharp_\pi(\alpha).f)\mathcal{D}_\beta\gamma+\left\{\sharp_\pi(\alpha)(\sharp_\pi(\beta).f)\right\}\gamma,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta f\gamma)-\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\alpha f\gamma) &= f(\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma)-\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\alpha\gamma))+\left\{\sharp_\pi(\alpha)(\sharp_\pi(\beta).f)-\sharp_\pi(\beta)(\sharp_\pi(\alpha).f)\right\}\gamma\\ &= f(\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma)-\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\alpha\gamma))+\left\{[\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)]\,.f\right\}\gamma,\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)(f\gamma) &= \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi} f\gamma - f(\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma) - \mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\alpha\gamma)) - \{[\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)]\,.f\}\,\gamma \\ &= f\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma + \{\sharp_\pi([\alpha,\beta]_\pi).f\}\,\gamma - \{[\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)]\,.f\}\,\gamma \\ &= f\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma + \{(\sharp_\pi([\alpha,\beta]_\pi) - [\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)])\,.f\}\,\gamma \\ &= f\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma;\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Comme conséquence immédiate de cette proposition, l'application $(\alpha,\beta,\gamma)\longmapsto\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma$ est aussi $\mathcal{C}^\infty(M)$-trilinéaire, ainsi la courbure d'une dérivée contravariante est un tenseur 3-fois contravariant, 1-fois covariant.

Définition 3.2.6 *La courbure de Ricci d'une dérivée contravariante symétrique $\mathcal{D}$ est la trace de l'endomorphisme $\gamma\longmapsto\mathcal{R}^\pi(\alpha,\gamma)\beta$ que l'on note $r^\pi(\alpha,\beta)$.*

Proposition 3.2.6 *La courbure de Ricci est un tenseur 2-fois contravariant symétrique.*

Preuve. Pour la symétrie, on a grâce à l'identité de Bianchi

$$\begin{aligned}r^\pi(\alpha,\beta) &= Tr(\gamma\longmapsto\mathcal{R}^\pi(\alpha,\gamma)\beta) \\ &= Tr(\gamma\longmapsto\mathcal{R}^\pi(\beta,\gamma)\alpha) + Tr(\gamma\longmapsto\mathcal{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma) \\ &= Tr(\gamma\longmapsto\mathcal{R}^\pi(\beta,\gamma)\alpha) = r^\pi(\beta,\alpha)\end{aligned}$$

car la matrice $(\mathcal{R}^\pi(dx^i,dx^j))_{i,j}$ est anti-symétrique; donc sa trace est nulle.

On montre que r^π est un tenseur

$$r^\pi(f\alpha,\beta) = Tr(\gamma\longmapsto\mathcal{R}^\pi(f\alpha,\gamma)\beta) = Tr(\gamma\longmapsto f\mathcal{R}^\pi(\alpha,\gamma)\beta) = fr^\pi(\alpha,\beta)$$

et

$$r^\pi(\alpha,f\beta) = r^\pi(f\beta,\alpha) = fr^\pi(\beta,\alpha) = fr^\pi(\alpha,\beta).$$

Ainsi, l'application r^π est $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire par symétrie. ■

3.2.2 Interprétation géométrique

Comme pour les dérivées covariantes, on définit les notions de géodésiques et transport parallèle. Tout d'abord on introduit la notion de courbe cotangente.

Définition 3.2.7 *Une **courbe cotangente** à M est un couple (γ, α) où $\gamma : [0,1] \to M$ et $\alpha : [0,1] \to T^*M$ sont deux courbes différentiables liées par la relation*

$$\sharp_\pi(\alpha(t)) = \dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t), \quad \forall t \in [0,1] .$$

Dans le cas où le champ de bivecteurs π définit une structure de Poisson, la courbe γ est contenue dans une seule feuille symplectique S. En effet, on a

$$\dot{\gamma}(t) = \sharp_\pi(\alpha(t)) \in T_{\gamma(t)}S; \quad \forall t \in [0,1] .$$

Inversement; soit $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe lisse qui reste dans une seule feuille $\mathcal{F}$ du feuilletage symplectique, si $r = \dim \mathcal{F}$ alors d'après le théorème de Weinstein, pour tout $x_0 \in \mathcal{F}$ il existe une carte $(U, (x^1, ..., x^r, y^{r+1}, ..., y^n))$ de M centrée en x_0 $(n = \dim M)$ et un repère $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ au dessus de U tels que $U \cap \mathcal{F} = \{y^j = 0\}$ et

$$\sharp_\pi(\alpha_i) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^i}, & 1 \leq i \leq r \\ 0 & r+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

ainsi on a l'écriture locale définie sur $I = \gamma^{-1}(U)$

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), ..., \gamma^r(t), 0, ..., 0),$$

on voit que $\gamma : I \to \mathcal{F}$ est encore lisse.

Pour toute famille de fonctions lisses $f^{r+1}, ..., f^n : I \to \mathbb{R}$, soit la courbe lisse $\alpha : I \to T^*M$ définie par

$$\alpha = \dot{\gamma}^1.\alpha_1 + ... + \dot{\gamma}^r.\alpha_r + f^{r+1}.\alpha_{r+1} + ... + f^n.\alpha_n,$$

on voit que

$$\begin{aligned} \sharp_\pi(\alpha) &= \dot{\gamma}^1.\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + \dot{\gamma}^r.\frac{\partial}{\partial x^r} \\ &= \frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned}$$

Ainsi, à toute courbe lisse γ de M qui reste dans une feuille on associe une courbe cotangente (γ, α), pas nécessairement unique.

Proposition 3.2.7 *Soient $\mathcal{D}$ une dérivée contravariante et (γ, α) une courbe cotangente sur M. Pour tout vecteur cotangent β_0 à M au point $\gamma(0)$, il existe une unique courbe $(\gamma, \widetilde{\alpha})$ dans T^*M, telle que pour tout $t \in [0,1]$, $(\mathcal{D}_\alpha \widetilde{\alpha})(\gamma(t)) = 0$.*

Preuve. C'est une application directe du théorème d'existence et d'unicité de solution d'équation différentielle ordinaire. (voir [4]) . ■

Définition 3.2.8 *Avec les hypothèses de la proposition précédente, on pose $\beta_1 := \widetilde{\alpha}(1)$: C'est le transporté de β_0 parallèlement à la courbe cotangente (γ, α) et relativement à la dérivée contravariante $\mathcal{D}$. Pour toute courbe cotangente (γ, α) on a une application de $T^*_{\gamma(0)}M$ à valeurs dans $T^*_{\gamma(1)}M$ que l'on note $\tau_{(\gamma,\alpha)}$.*

Proposition 3.2.8 *L'application $\tau_{(\gamma,\alpha)} : T^*_{\gamma(0)}M \to T^*_{\gamma(1)}M$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Preuve. Soient $\beta_0, \eta_0 \in T^*_{\gamma(0)}M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $(\gamma, \widetilde{\beta})$, $(\gamma, \widetilde{\eta})$ les deux parallèles à (γ, α) telles que : $\widetilde{\beta}(0) = \beta_0, \widetilde{\eta}(0) = \eta_0$ (i.e. pour tout $t \in [0, 1]$, $(\mathcal{D}_\alpha\widetilde{\beta})(\gamma(t)) = (\mathcal{D}_\alpha\widetilde{\eta})(\gamma(t)) = 0$). Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, $(\mathcal{D}_\alpha(\widetilde{\beta} + \lambda\widetilde{\eta}))(\gamma(t)) = 0$. Par conséquent,

$$\tau_{(\gamma,\alpha)}(\beta_0 + \lambda\eta_0) = (\widetilde{\beta} + \lambda\widetilde{\eta})(1) = \widetilde{\beta}(1) + \lambda\widetilde{\eta}(1) = \tau_{(\gamma,\alpha)}(\beta_0) + \lambda\tau_{(\gamma,\alpha)}(\eta_0);$$

ce qui démontre que $\tau_{(\gamma,\alpha)}$ est une application linéaire.

On considère la courbe cotangente $(\overline{\gamma}, \overline{\alpha})$, où $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$ et $\overline{\alpha}(t) = -\alpha(1 - t)$. Ainsi $(\tau_{(\gamma,\alpha)})^{-1} = \tau_{(\overline{\gamma},\overline{\alpha})}$ car $\overline{\gamma}(0) = \gamma(1)$ et $\overline{\gamma}(1) = \gamma(0)$. ■

Définition 3.2.9 *Une courbe cotangente (γ, α) est une **géodésique** de la dérivée contravariante $\mathcal{D}$ si $(\mathcal{D}_\alpha\alpha) \circ \gamma = 0$.*

La proposition suivante démontre que la notion de géodésique caractérise les dérivées contravariantes symétriques, autrement dit

Proposition 3.2.9 *Pour toute dérivée contravariante il existe une unique dérivée contravariante symétrique ayant les mêmes géodésiques..*

Preuve. Commençons par montrer l'existence. Etant donné une dérivée contravariante $\mathcal{D}$, on pose

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta = \frac{1}{2}\left\{[\alpha, \beta]_\pi + \mathcal{D}_\alpha\beta + \mathcal{D}_\beta\alpha\right\}.$$

Vérifions tout d'abord que $\widetilde{\mathcal{D}}$ est une dérivée contravariante. En effet, on a

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta = \mathcal{D}_\alpha\beta + \frac{1}{2}T(\alpha, \beta),$$

donc

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{f\alpha}\beta = \mathcal{D}_{f\alpha}\beta + \frac{1}{2}T(f\alpha, \beta) = f\mathcal{D}_\alpha\beta + \frac{1}{2}f.T(\alpha, \beta) = f\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha f\beta &= \mathcal{D}_\alpha f\beta + \frac{1}{2}T(\alpha, f\beta) = f\mathcal{D}_\alpha\beta + (\sharp_\pi(\alpha).f)\beta + \frac{1}{2}f.T(\alpha,\beta)\\ &= f\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta + (\sharp_\pi(\alpha).f)\beta.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta - \widetilde{\mathcal{D}}_\beta\alpha &= \frac{1}{2}\left\{([\alpha,\beta]_\pi + \mathcal{D}_\alpha\beta + \mathcal{D}_\beta\alpha) - ([\beta,\alpha]_\pi + \mathcal{D}_\beta\alpha + \mathcal{D}_\alpha\beta)\right\}\\ &= \frac{1}{2}([\alpha,\beta]_\pi - [\beta,\alpha]_\pi) = [\alpha,\beta]_\pi\,.\end{aligned}$$

Ainsi, $\widetilde{\mathcal{D}}$ est sans torsion. Enfin, on a pour toute courbe cotangente α

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\alpha = \frac{1}{2}\left\{[\alpha,\alpha]_\pi + 2\mathcal{D}_\alpha\alpha\right\} = \mathcal{D}_\alpha\alpha,$$

ce qui prouve que les deux dérivées ont les mêmes géodésiques.

Pour l'unicité, soient $\widetilde{\mathcal{D}}$ et $\overline{\mathcal{D}}$ deux dérivées contravariantes symétriques ayant les mêmes géodésiques. D'après la remarque (2.1.1) leur différence $S = \widetilde{\mathcal{D}} - \overline{\mathcal{D}}$ est un tenseur symétrique; de plus, pour tout point $(x,\alpha_x) \in T^*M$ on note α la géodésique commune à ces deux dérivées qui passe par (x,α_x). Ainsi $S(\alpha,\alpha)(x) = (\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha\alpha)(x) - (\overline{\mathcal{D}}_\alpha\alpha)(x) = 0$, par conséquent le tenseur symétrique S est également anti-symétrique, ce qui implique qu'il est identiquement nul; d'où l'unicité. ■

3.3 Dérivées contravariantes particulières

3.3.1 Dérivées contravariantes sur une variété symplectique

Dans le cas où le champ de bivecteurs π est non dégénéré, ce qui implique que $\sharp_\pi$ est inversible et par conséquent (M,π) est une variété symplectique. La forme symplectique ω est définie par

$$\omega(X,Y) := \pi((\sharp_\pi)^{-1}(X), (\sharp_\pi)^{-1}(Y)), \tag{3.3.1}$$

pour tout $X, Y \in \chi(M)$.

Proposition 3.3.1 *Sur une variété symplectique (M,π), il y a bijection entre l'ensemble des dérivées contravariantes et celui des dérivées covariantes.*

Preuve. Pour toute dérivée covariante ∇, on définit la dérivée contravariante $\mathcal{D}$ qui lui correspond par

$$\mathcal{D}_\alpha\beta := \sharp_\pi^{-1}(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_\pi(\beta)); \forall\alpha,\beta \in \Omega^1(M), \tag{3.3.2}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. Il est clair que $\mathcal{D}$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire; de plus, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a d'une part

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f\alpha}\beta &= \sharp_\pi^{-1}(\nabla_{\sharp_\pi(f\alpha)}\sharp_\pi(\beta)) = \sharp_\pi^{-1}(f\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_\pi(\beta)) \\ &= f\mathcal{D}_\alpha\beta,\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\alpha(f\beta) &= \sharp_\pi^{-1}(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}(f\sharp_\pi(\beta))) = \sharp_\pi^{-1}(f\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_\pi(\beta) + (\sharp_\pi(\alpha)f)\,.\sharp_\pi(\beta)) \\ &= \sharp_\pi^{-1}(f\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_\pi(\beta)) + \sharp_\pi^{-1}((\sharp_\pi(\alpha)f)\,.\sharp_\pi(\beta)) \\ &= f\mathcal{D}_\alpha\beta + (\sharp_\pi(\alpha)f)\,.\beta.\end{aligned}$$

Ce qui démontre bien que $\mathcal{D}$ est une dérivée contravariante sur M.

Inversement, pour toute dérivée contravariante $\mathcal{D}$, on pose

$$\nabla_X Y := \sharp_\pi(\mathcal{D}_{(\sharp_\pi)^{-1}(X)}\,(\sharp_\pi)^{-1}(Y)), \tag{3.3.3}$$

pour tout $X, Y \in \chi(M)$. Par un calcul similaire, on démontre que ∇ est bien une dérivée covariante sur M. ■

Définition 3.3.1 *Une **connexion symplectique** sur une variété symplectique est une dérivée covariante pour laquelle la forme symplectique est parallèle.*

Remarque 3.3.1 *Comme pour les connexions riemanniennes sur une variété riemannienne, le transport parallèle défini par une connexion symplectique conserve la structure symplectique.*

Proposition 3.3.2 *Une dérivée covariante ∇ sur une variété symplectique (M, π) est une connexion symplectique si et seulement si la dérivée contravariante $\mathcal{D}$ qui lui correspond est une connexion de Poisson.*

Preuve. Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$, on pose : $X = \sharp_\pi(\alpha)$, $Y = \sharp_\pi(\beta)$, $Z = \sharp_\pi(\gamma)$; ainsi $\omega(X, Y) = \pi(\alpha, \beta)$ et $\nabla_X Y = \sharp_\pi(\mathcal{D}_\alpha\beta)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\nabla\omega(X, Y, Z) &= X.\omega(Y, Z) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) \\ &= \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) - \pi(\mathcal{D}_\alpha\beta, \gamma) - \pi(\beta, \mathcal{D}_\alpha\gamma) \\ &= \mathcal{D}\pi(\alpha, \beta, \gamma),\end{aligned}$$

et le résultat en découle. ■

3.3.2 $\mathcal{F}$-connexions

Comme une variété de Poisson est feuilletée par des feuilles symplectiques, il est naturel de considérer des dérivées contravariantes compatibles avec le feuilletage symplectique $\mathcal{F}$ donné par la structure de Poisson sur M.

Définition 3.3.2 *Une dérivée contravariante $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion si pour tout α qui vérifie $\sharp_\pi(\alpha) = 0$, l'opérateur $\mathcal{D}_\alpha$ est identiquement nul.*

Exemple 3.3.1 *Toute dérivée covariante ∇ sur une variété de Poisson induit une $\mathcal{F}$-connexion $\mathcal{D}$, elle est définie pour tout $\alpha \in \Omega^1(M)$ par : $\mathcal{D}_\alpha := \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}$.*

Lemme 3.3.1 *Soit $\mathcal{D}$ une $\mathcal{F}$-connexion symétrique sur une variété de Poisson (M, π) et S une feuille symplectique . On note $i : S \to M$ l'injection canonique. La restriction de $\mathcal{D}$ à S que l'on note $\mathcal{D}^S$ est une dérivée contravariante sur S.*

Preuve. On a

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}^S: & \Omega^1(S) \times \Omega^1(S) & \to & \Omega^1(S) \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \mathcal{D}^S_\alpha \beta := i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{\beta}); \end{array} \tag{3.3.4}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(S)$, et tout $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \Omega^1(M)$ tels que $\alpha = i^*(\widetilde{\alpha})$ et $\beta = i^*(\widetilde{\beta})$.

On démontre tout d'abord que $\mathcal{D}^S$ vérifie les axiomes d'une dérivée contravariante sur S; en effet, on a :

$$\mathcal{D}^S_{f\alpha}\beta = i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{f}\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta}) = i^*(\widetilde{f}\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta}) = i^*(\widetilde{f}).i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta}) = f\mathcal{D}^S_\alpha\beta$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^S_\alpha f\beta &= i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\widetilde{f}\widetilde{\beta}}) = i^*(\widetilde{f}\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta} + (\sharp_\pi(\widetilde{\alpha}).\widetilde{f})\widetilde{\beta}) \\ &= i^*(\widetilde{f}\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta}) + i^*((\sharp_\pi(\alpha).\widetilde{f}))\beta \\ &= f\mathcal{D}^S_\alpha\beta + (\sharp_\pi(\alpha).f)\beta. \end{aligned}$$

Reste à démontrer que $\mathcal{D}^S$ est bien défini (i.e. la 1-forme $i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta})$ ne dépend pas du choix de $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$, elle dépend uniquement de α et β). En effet, le fait que $\alpha = 0$ entraîne $\sharp_\pi(\widetilde{\alpha}) = \sharp_\pi(\alpha) = 0$, (car $\widetilde{\alpha} - \alpha \in Ker\sharp_\pi$); comme $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion, ceci entraîne $\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta} = 0$ pour tout $\widetilde{\beta}$. Par la suite, comme $\mathcal{D}$ est symétrique, on a

$$i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta}) = i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\beta}}\widetilde{\alpha} + [\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]_\pi) = i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\beta}}\widetilde{\alpha}) + i^*([\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]_\pi) = i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\beta}}\widetilde{\alpha}) + [\alpha, \beta]_\pi .$$

Par conséquent, le fait que $\beta = 0$ entraîne $\sharp_\pi(\widetilde{\beta}) = \sharp_\pi(\beta) = 0$, ce qui implique $i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\beta}}\widetilde{\alpha}) = [\alpha, \beta]_\pi = 0$; donc $\mathcal{D}^S_\alpha\beta = i^*(\mathcal{D}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta}) = 0$. ∎

Corollaire 3.3.1 *Soit $\mathcal{D}$ une $\mathcal{F}$-connexion symétrique sur une variété de Poisson (M,π). Sur chaque feuille symplectique S, on définit la dérivée covariante ∇^S par*

$$\nabla^S_X Y = \sharp_\pi \left(\mathcal{D}^S_\alpha \beta\right), \tag{3.3.5}$$

pour tout $X = \sharp_\pi(\alpha)$, $Y = \sharp_\pi(\beta)$ où $X, Y \in \chi(S) = \operatorname{Im}\sharp_\pi$.

Preuve. C'est une conséquence du lemme précédent et de la proposition 3.3.1. ■

D'après ce qui précède, une $\mathcal{F}$-connexion symétrique sur une variété de Poisson peut être vue comme une famille de dérivées covariantes sur les feuilles symplectiques.

Remarque 3.3.2 *Pour une $\mathcal{F}$-connexion la notion du transport parallèle le long d'une courbe cotangente (γ,α) définie par une $\mathcal{F}$-connexion ne dépend que de la courbe γ qui est tangente à une feuille symplectique. En effet, si (γ,β) est une autre courbe, comme $\sharp_\pi(\alpha) = \sharp_\pi(\beta)$ on a $\sharp_\pi(\alpha-\beta) = 0$, donc $0 = D_{\alpha-\beta} = D_\alpha - D_\beta$, ainsi on a le même opérateur de dérivation. Par unicité de solution pour problème de Cauchy, on a $\tau_{(\gamma,\alpha)} = \tau_{(\gamma,\beta)}$.*

3.3.3 Connexions de Poisson symétriques

Proposition 3.3.3 *Soit $\mathcal{D}$ une connexion de Poisson symétrique sur une variété de Poisson (M,π). Pour toute feuille symplectique S, on pose*

$$\nabla^S_X Y := \sharp_\pi(\mathcal{D}_\alpha \beta); \quad X = \sharp_\pi(\alpha), Y = \sharp_\pi(\beta), \tag{3.3.6}$$

pour tout $X, Y \in \chi(S)$. Ainsi, ∇^S est une dérivée covariante sur S.

Preuve. L'application billinéaire ∇^S est bien définie sur l'espace des champs de vecteurs sur la feuille S car si $Y = \sharp_\pi(\beta) = 0$, on a

$$\nabla^S_X Y = \sharp_\pi(\mathcal{D}_\alpha \beta) = \mathcal{D}_\alpha(\sharp_\pi(\beta)) = \mathcal{D}_\alpha Y = 0$$

et si $X = \sharp_\pi(\alpha) = 0$, comme $\mathcal{D}$ est symétrique, on trouve

$$\nabla^S_X Y = \sharp_\pi(\mathcal{D}_\alpha \beta) = \sharp_\pi(\mathcal{D}_\beta \alpha) + \sharp_\pi([\alpha,\beta]_\pi) = \mathcal{D}_\beta X + [X,Y] = 0.$$

On vérifie facilement que ∇^S est bien une dérivée covariante. ■

Proposition 3.3.4 *Avec les mêmes hypothèses de la proposition précédente, si on note R^S et r^S, respectivement la courbure et la courbure de Ricci de la connexion ∇^S et si on note par $R^{\mathcal{D}}$ et $r^{\mathcal{D}}$ respectivement, la courbure et la courbure de Ricci de $\mathcal{D}$, on a*

$$R^S(X,Y)Z = R^S(\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta))\sharp_\pi(\gamma) = \sharp_\pi(R^{\mathcal{D}}(\alpha,\beta)\gamma) \tag{3.3.7}$$
$$r^S(X,Y) = r^S(\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)) = r^{\mathcal{D}}(\alpha,\beta);$$

pour tout $X = \sharp_\pi(\alpha)$, $Y = \sharp_\pi(\beta)$, $Z = \sharp_\pi(\gamma) \in \chi(S) = \mathrm{Im}\,\sharp_\pi$.

Ainsi, à partir de certaines propriétés sur les feuilles symplectiques, on peut avoir des informations sur la variété M.

Preuve. On a

$$\nabla^S_{[X,Y]} Z = \nabla^S_{\sharp_\pi([\alpha,\beta]_\pi)} \sharp_\pi(\gamma) = \sharp_\pi(\mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma),$$

et

$$\nabla^S_X(\nabla^S_Y Z) = \nabla^S_{\sharp_\pi(\alpha)}(\sharp_\pi(\mathcal{D}_\beta\gamma)) = \sharp_\pi(\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma)).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} R^S(X,Y)Z &= \nabla^S_{[X,Y]} Z - \nabla^S_X(\nabla^S_Y Z) + \nabla^S_Y(\nabla^S_X Z) \\ &= \sharp_\pi(\mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma) - \sharp_\pi(\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}_\beta\gamma)) + \sharp_\pi(\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_\alpha\gamma)) \\ &= \sharp_\pi(R^{\mathcal{D}}(\alpha,\beta)\gamma). \end{aligned}$$

Pour la courbure de Ricci, on remarque tout d'abord que $\sharp_\pi$ réalise un isomorphisme entre $\chi(S)$ et $\Omega^1(S)$, puis on a

$$\begin{aligned} r^S(X,Y) &= Tr(Z \mapsto R^S(X,Z)Y) = Tr(\sharp_\pi(\gamma) \mapsto \sharp_\pi(R^{\mathcal{D}}(\alpha,\gamma)\beta)) \\ &= Tr(\gamma \mapsto R^{\mathcal{D}}(\alpha,\gamma)\beta) = r^{\mathcal{D}}(\alpha,\beta), \end{aligned}$$

et ceci parce que les deux endomorphismes sont conjugués par l'isomorphisme $\sharp_\pi$. ■

Remarque 3.3.3 *Une dérivée de Poisson symétrique n'est pas forcément une* $\mathcal{F}$*-connexion.*

3.4 Dérivées contravariantes associées au couple (g, π)

3.4.1 Préliminaires

Dans tout ce qui suit, (M, g) est une variété pseudo-riemannienne de dimension n et π est un champ de bivecteurs sur M. On note $\sharp_\pi$ le morphisme musical de T^*M dans TM défini par

$$\beta(\sharp_\pi(\alpha)) := \pi(\alpha, \beta) \tag{3.4.1}$$

pour tout couple (α, β) de 1-formes différentielles sur M.

Les deux morphismes musicaux définis par le tenseur métrique g sont $\sharp_g$ et $\flat_g$ introduits dans le premier chapitre. La non dégénérescence de la métrique g fait qu'ils sont l'inverses l'un de l'autre. On entend par le couple (g, π) que la variété M est munie d'une structure pseudo-riemannienne définie par la métrique g et π est un champ de bivecteurs sur M. On note par ∇ la connexion de Levi-Civita de la métrique g; et par g^* la métrique duale de g définie par

$$g^*(\alpha,\beta) := g(\sharp_g(\alpha),\sharp_g(\beta)), \quad \text{pour tout } \alpha,\beta\in\Omega^1(M). \tag{3.4.2}$$

Définition 3.4.1 1) *On définit le champ d'endomorphismes J^* sur T^*M par $J^* := \flat_g \circ \sharp_\pi$.*

2) *Au champ J^* on associe le champ d'endomorphismes J sur TM défini par $J := \sharp_g \circ J^* \circ \flat_g = \sharp_\pi \circ \flat_g$.*

Remarque 3.4.1 *On a les deux identités*

$$\begin{cases} g^*(J^*\alpha,\beta) = \pi(\alpha,\beta) \\ g^*(J^*\alpha,\beta) = g(J\sharp_g(\alpha),\sharp_g(\beta)) \end{cases} \quad \textit{pour tout } \alpha,\beta\in\Omega^1(M). \tag{3.4.3}$$

Donc $g^*(J^*\alpha,\alpha)=0$, ce qui montre que J^* est anti-symétrique par rapport à g^*. On pose $X=\sharp_g(\alpha)$ et $Y=\sharp_g(\beta)$. on a

$$g(JX,Y) = g^*(J^*\alpha,\beta); \tag{3.4.4}$$

par conséquent $g(JX,X)=0$, ce qui montre que J est anti-symétrique par rapport à g.

Inversement, la donnée d'un J^* anti-symétrique par rapport à g^* ou d'un J définit π.

3.4.2 Dérivée de Levi-Civita contravariante du couple (g,π)

C'est l'analogue de ∇ pour la métrique g^* sur le fibré cotangent à M.

Proposition 3.4.1 *Il existe une unique dérivée contravariante sur M, symétrique et compatible avec g^*, que l'on note D^π.*

Preuve. L'unicité : *On suppose que D^π existe. Comme D^π est compatible avec g^*, on a*

$$g^*(D^\pi_\alpha\beta,\gamma) = \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta,\gamma) - g^*(D^\pi_\alpha\gamma,\beta).$$

Comme D^π est sans torsion, i.e $D^\pi_\alpha\gamma = D^\pi_\gamma\alpha + [\alpha,\gamma]_\pi$, on trouve

$$g^*(D^\pi_\alpha\beta,\gamma) = \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta,\gamma) - g^*([\alpha,\gamma]_\pi,\beta) - g^*(D^\pi_\gamma\alpha,\beta)$$

et

$$g^*(D^\pi_\gamma\alpha,\beta) = \sharp_\pi(\gamma).g^*(\alpha,\beta) - g^*([\gamma,\beta]_\pi,\alpha) - g^*(D^\pi_\beta\gamma,\alpha).$$

De la même manière

$$g^*(D^\pi_\beta\gamma,\alpha)=\sharp_\pi(\beta).g^*(\gamma,\alpha)-g^*([\beta,\alpha]_\pi,\gamma)-g^*(D^\pi_\alpha\beta,\gamma),$$

donc

$$\begin{aligned} g^*(D^\pi_\alpha\beta,\gamma) &= \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta,\gamma)-\sharp_\pi(\gamma).g^*(\alpha,\beta)+\sharp_\pi(\beta).g^*(\gamma,\alpha)\\ &\quad +g^*([\gamma,\alpha]_\pi,\beta)+g^*([\gamma,\beta]_\pi,\alpha)+g^*([\alpha,\beta]_\pi,\gamma)-g^*(D^\pi_\alpha\beta,\gamma).\end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée D^π est entièrement caractérisée par la formule

$$\begin{aligned} 2g^*(D^\pi_\alpha\beta,\gamma) &= \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta,\gamma)-\sharp_\pi(\gamma).g^*(\alpha,\beta)+\sharp_\pi(\beta).g^*(\gamma,\alpha)\\ &\quad +g^*([\gamma,\alpha]_\pi,\beta)+g^*([\gamma,\beta]_\pi,\alpha)+g^*([\alpha,\beta]_\pi,\gamma).\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

L'existence : *Pour tout $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$, on définit $D^\pi_\alpha\beta:=\flat_g(X_{\alpha,\beta})$, où $X_{\alpha,\beta}$ est le champ de vecteurs sur M défini par*

$$\begin{aligned} X_{\alpha,\beta}(\gamma) &:= \frac{1}{2}\{\sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta,\gamma)-\sharp_\pi(\gamma).g^*(\alpha,\beta)+\sharp_\pi(\beta).g^*(\gamma,\alpha)\\ &\quad +g^*([\gamma,\alpha]_\pi,\beta)+g^*([\gamma,\beta]_\pi,\alpha)+g^*([\alpha,\beta]_\pi,\gamma)\},\end{aligned}$$

pour toute 1-forme γ sur M. Comme pour la connexion de Levi-Civita (Chapitre 1, Théorème 1.4.1), on démontre que D^π est bien une dérivée contravariante sur M. ■

Le résultat suivant donne un lien entre cette dérivée et le tenseur $[\pi,\pi]_S$.

Proposition 3.4.2 *Pour tout triplet (α,β,γ) de 1-formes sur M, on a*

$$[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{2}\left\{g^*(\alpha,D^\pi_\gamma(J^*)\beta)+g^*(\beta,D^\pi_\alpha(J^*)\gamma)+g^*(\gamma,D^\pi_\beta(J^*)\alpha)\right\}. \tag{3.4.6}$$

Preuve. *Comme D^π est compatible avec g^*, on a*

$$\begin{aligned} \sharp_\pi(\alpha).\pi(\gamma,\beta) &= \sharp_\pi(\alpha).g^*(J^*\gamma,\beta)=g^*(D^\pi_\alpha(J^*\gamma),\beta)+g^*(J^*\gamma,D^\pi_\alpha\beta)\\ &= \{g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta)+g^*(J^*(D^\pi_\alpha\gamma),\beta)\}+g^*(J^*\gamma,D^\pi_\alpha\beta)\\ &= g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta)-\pi(\beta,D^\pi_\alpha\gamma)+\pi(\gamma,D^\pi_\alpha\beta).\end{aligned}$$

En permutant les positions de α,β et γ, on trouve

$$\sharp_\pi(\beta).\pi(\alpha,\gamma)=g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma)-\pi(\gamma,D^\pi_\beta\alpha)+\pi(\alpha,D^\pi_\beta\gamma)$$
$$\sharp_\pi(\gamma).\pi(\beta,\alpha)=g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha)-\pi(\alpha,D^\pi_\gamma\beta)+\pi(\beta,D^\pi_\gamma\alpha).$$

En additionnant les trois formules précédentes, et comme D^π est symétrique, on a

$$\begin{aligned}
\sharp_\pi(\alpha).\pi(\gamma,\beta) + \sharp_\pi(\beta).\pi(\alpha,\gamma) + \sharp_\pi(\gamma).\pi(\beta,\alpha) &= g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta) + g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) + g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) \\
&\quad + g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) + \pi(\alpha, D^\pi_\beta\gamma - D^\pi_\gamma\beta) \\
&\quad + \pi(\beta, D^\pi_\gamma\alpha - D^\pi_\alpha\gamma) + \pi(\gamma, D^\pi_\alpha\beta - D^\pi_\beta\alpha) \\
&= g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta) + g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) + g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) \\
&\quad + \pi(\alpha,[\beta,\gamma]_\pi) + \pi(\beta,[\gamma,\alpha]_\pi) + \pi(\gamma,[\alpha,\beta]_\pi);
\end{aligned}$$

ainsi d'après iii) de la proposition 3.1.3*, on a*

$$g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta) + g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) + g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) = 2\,[\pi,\pi]_\pi\,(\alpha,\beta,\gamma),$$

d'où l'égalité. ■

3.4.3 Dérivée contravariante induite par ∇

Définition 3.4.2 *On définit la dérivée ∇^π par $\nabla^\pi_\alpha\beta = \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta$, pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.*

C'est bien une dérivée contravariante. En effet, pour toute fonction différentiable f, on a

$$\nabla^\pi_{f\alpha}\beta = \nabla_{\sharp_\pi(f\alpha)}\beta = \nabla_{f\sharp_\pi(\alpha)}\beta = f\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta = f\nabla^\pi_\alpha\beta$$

et

$$\nabla^\pi_\alpha(f\beta) = \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}(f\beta) = f\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta + (\sharp_\pi(\alpha)f)\,\beta = f\nabla^\pi_\alpha\beta + (\sharp_\pi(\alpha)f)\,\beta.$$

Comme conséquence de la définition, la dérivée contravariante ∇^π est une $\mathcal{F}$-connexion.

Proposition 3.4.3 *La dérivée contravariante ∇^π a les propriétés suivantes :*

1) *On a $\sharp_g(\nabla^\pi_\alpha\beta) = \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_g(\beta)$.*

2) *Elle est compatible avec la métrique g^*; i.e.*

$$\sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta,\gamma) = g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta,\gamma) + g^*(\beta,\nabla^\pi_\alpha\gamma).$$

3) *La torsion T^π de ∇^π vérifie l'identité*

$$g^*(T^\pi(\alpha,\beta),\gamma) = g(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(J)(\sharp_g(\alpha)),\sharp_g(\beta)).$$

Preuve. 1) Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$ on a par définition

$$\begin{aligned}
\gamma(\sharp_g(\nabla^\pi_\alpha\beta)) &= g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta,\gamma) = (\nabla^\pi_\alpha\beta)(\sharp_g(\gamma)) = \left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta\right)(\sharp_g(\gamma)) \\
&= \sharp_\pi(\alpha).\beta(\sharp_g(\gamma)) - \beta(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_g(\gamma)) \\
&= \sharp_\pi(\alpha).g(\sharp_g(\beta),\sharp_g(\gamma)) - g(\sharp_g(\beta),\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_g(\gamma)).
\end{aligned}$$

Comme ∇ est compatible avec la métrique g, on trouve

$$\gamma(\sharp_g(\nabla^\pi_\alpha \beta)) = g(\sharp_g(\gamma), \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \sharp_g(\beta)) = \gamma(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \sharp_g(\beta)).$$

2) Comme $g^*(\nabla^\pi_\alpha \beta, \gamma) = g(\sharp_g(\nabla^\pi_\alpha \beta), \sharp_g(\gamma))$, en utilisant 1) et le fait que ∇ est compatible avec la métrique, on obtient

$$\begin{aligned} g^*(\nabla^\pi_\alpha \beta, \gamma) &= g(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \sharp_g(\beta), \sharp_g(\gamma)) = \sharp_\pi(\alpha).g(\sharp_g(\beta), \sharp_g(\gamma)) - g(\sharp_g(\beta), \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \sharp_g(\gamma)) \\ &= \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta, \gamma) - g^*(\beta, \flat_g\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \sharp_g(\gamma)\right)) = \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta, \gamma) - g^*(\beta, \nabla^\pi_\alpha \gamma). \end{aligned}$$

3) On a

$$g^*(\nabla^\pi_\alpha \beta, \gamma) = \left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \beta\right)(\sharp_g(\gamma)) = \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta, \gamma) - \beta(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \sharp_g(\gamma)),$$

et comme ∇ est sans torsion on trouve

$$\begin{aligned} g^*(\nabla^\pi_\alpha \beta, \gamma) &= \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta, \gamma) - \beta(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \sharp_\pi(\alpha)) - \beta([\sharp_\pi(\alpha), \sharp_g(\gamma)]) \\ &= \left\{\sharp_\pi(\alpha).\beta(\sharp_g(\gamma)) - \beta(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)} \sharp_g(\gamma))\right\} - \beta(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \sharp_\pi(\alpha)) \\ &= \left(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)} \beta\right)(\sharp_g(\gamma)) - \beta(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \sharp_\pi(\alpha)) = g^*(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)} \beta, \gamma) - \beta(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \sharp_\pi(\alpha)). \end{aligned}$$

En permutant α et β, on trouve

$$g^*(\nabla^\pi_\beta \alpha, \gamma) = g^*(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)} \alpha, \gamma) - \alpha(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \sharp_\pi(\beta)).$$

Par conséquent, on a

$$g^*(\nabla^\pi_\alpha \beta - \nabla^\pi_\beta \alpha, \gamma) = g^*(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)} \beta - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)} \alpha, \gamma) + \alpha(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \sharp_\pi(\beta)) - \beta(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \sharp_\pi(\alpha)).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \alpha(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \sharp_\pi(\beta)) &= \sharp_g(\gamma).\alpha(\sharp_\pi(\beta)) - \left(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \alpha\right)(\sharp_\pi(\beta)) \\ &= \sharp_g(\gamma).\pi(\beta, \alpha) - \pi(\beta, \nabla_{\sharp_g(\gamma)} \alpha) \\ &= -g^*(d(\pi(\alpha, \beta)), \gamma) + g^*(J^*(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \alpha), \beta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta(\nabla_{\sharp_g(\gamma)} \sharp_\pi(\alpha)) &= \sharp_g(\gamma).\pi(\alpha, \beta) - \pi(\alpha, \nabla_{\sharp_g(\gamma)} \beta) \\ &= \sharp_g(\gamma).g^*(J^*\alpha, \beta) - g^*(J^*\alpha, \nabla_{\sharp_g(\gamma)} \beta). \end{aligned}$$

Comme ∇ est compatible avec g et g^*, elle commute avec $\sharp_g$, et du fait que $J \circ \sharp_g = \sharp_g \circ J^*$, on déduit

$$\begin{aligned}
\beta(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}\sharp_\pi(\alpha)) &= g^*(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(J^*\alpha), \beta) = g(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(\sharp_g(J^*\alpha)), \sharp_g(\beta)) \\
&= g(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}\left[J(\sharp_g(\alpha))\right], \sharp_g(\beta)) = g(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(J)(\sharp_g(\alpha)), \sharp_g(\beta)) + g(J\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(\sharp_g(\alpha)), \sharp_g(\beta)) \\
&= g(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(J)(\sharp_g(\alpha)), \sharp_g(\beta)) + g^*(J^*(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}\alpha), \beta);
\end{aligned}$$

ainsi

$$\alpha(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}\sharp_\pi(\beta)) - \beta(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}\sharp_\pi(\alpha)) = -g^*(d(\pi(\alpha,\beta)), \gamma) - g(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(J)(\sharp_g(\alpha)), \sharp_g(\beta)).$$

Donc

$$\begin{aligned}
g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta - \nabla^\pi_\beta\alpha, \gamma) &= g^*(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha,\beta)), \gamma) - g(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(J)(\sharp_g(\alpha)), \sharp_g(\beta)) \\
&= g^*([\alpha,\beta]_\pi, \gamma) - g(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(J)(\sharp_g(\alpha)), \sharp_g(\beta)).
\end{aligned}$$

En conclusion, $g^*(T^\pi(\alpha,\beta),\gamma) = g(\nabla_{\sharp_g(\gamma)}(J)(\sharp_g(\alpha)), \sharp_g(\beta))$. ■

Remarque 3.4.2 *La dernière assertion affirme que la dérivée ∇^π est symétrique (sans torsion), si et seulement si, le tenseur J est compatible avec la connexion de Levi-Civita de la métrique g .*

On a une formule analogue pour la dérivée ∇^π et sa relation avec le tenseur $[\pi,\pi]_S$.

Proposition 3.4.4 *Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$, on a*

$$[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma) = g^*(\alpha, \nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta) + g^*(\beta, \nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma) + g^*(\gamma, \nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha). \tag{3.4.7}$$

Preuve. *Comme ∇ est sans torsion, on a*

$$\begin{aligned}
[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma) &= \gamma(\sharp_\pi([\alpha,\beta]_\pi)) - \gamma([\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)]) \\
&= \pi([\alpha,\beta]_\pi, \gamma) - \gamma(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_\pi(\beta) - \nabla_{\sharp_\pi(\beta)}\sharp_\pi(\alpha)).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\gamma(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_\pi(\beta)) &= \sharp_\pi(\alpha).\gamma(\sharp_\pi(\beta)) - \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\gamma\,(\sharp_\pi(\beta)) \\
&= \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta,\gamma) - \pi(\beta, \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\gamma) \\
&= -\sharp_\pi(\alpha).g^*(J^*\gamma,\beta) + g^*(\beta, J^*\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\gamma\right)).
\end{aligned}$$

Comme ∇ est compatible avec la métrique g^*, on trouve

$$\begin{aligned}\gamma(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_\pi(\beta)) &= -g^*(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}(J^*\gamma),\beta) - g^*(J^*\gamma,\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta) + g^*(\beta, J^*\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\gamma\right))\\ &= -g^*(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}(J^*)\gamma,\beta) - g^*(J^*\gamma,\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta)\\ &= -g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta) - \pi(\gamma,\nabla^\pi_\alpha\beta).\end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned}\gamma(\nabla_{\sharp_\pi(\beta)}\sharp_\pi(\alpha)) &= \sharp_\pi(\beta).\pi(\alpha,\gamma) - \pi(\alpha,\nabla_{\sharp_\pi(\beta)}\gamma)\\ &= \sharp_\pi(\beta)..g^*(J^*\alpha,\gamma) - g^*(J^*\alpha,\nabla_{\sharp_\pi(\beta)}\gamma)\\ &= g^*(\nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) - \pi(\gamma,\nabla^\pi_\beta\alpha).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma) &= g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta) + g^*(\nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) - \pi(\gamma,\nabla^\pi_\beta\alpha)\\ &\quad +\pi(\gamma,\nabla^\pi_\alpha\beta) + \pi([\alpha,\beta]_\pi,\gamma)\\ &= g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta) + g^*(\nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) + \pi(\gamma,T^\pi(\alpha,\beta)).\end{aligned}$$

Mais d'après la proposition précédente

$$\pi(\gamma,T^\pi(\alpha,\beta)) = g^*(J^*\gamma,T^\pi(\alpha,\beta)) = g(\nabla_{\sharp_g(J^*\gamma)}(J)(\sharp_g(\alpha)),\sharp_g(\beta)).$$

Comme $\sharp_g\circ J^* = \sharp_\pi$ et que $\sharp_g$ commute avec ∇^π, on a

$$\begin{aligned}\pi(\gamma,T^\pi(\alpha,\beta)) &= g(\nabla^\pi_\gamma(J)(\sharp_g(\alpha)),\sharp_g(\beta)) = g(\sharp_g(\nabla^\pi_\gamma(J^*)(\alpha)),\sharp_g(\beta))\\ &= g^*(\nabla^\pi_\gamma(J^*)\alpha,\beta),\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat recherché. ■

3.4.4 Comparaison des deux dérivées D^π et ∇^π

Comparer deux dérivées contravariantes consiste à savoir si elles ont les mêmes géodésiques. Si elles sont symétriques, il suffit alors d'étudier leur différence, qui doit être identiquement nulle pour qu'elles aient les mêmes géodésiques.

La dérivée D^π est sans torsion, tandis que ∇^π a de la torsion. Nous définissons l'unique dérivée symétrique $\widetilde{\nabla^\pi}$ ayant les mêmes géodésiques que ∇^π (proposition 3.4.6) par

$$\widetilde{\nabla}^\pi_\alpha\beta = \nabla^\pi_\alpha\beta + \frac{1}{2}T^\pi(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^\pi_\alpha\beta + \nabla^\pi_\beta\alpha\right) + [\alpha,\beta]_\pi\right\}. \qquad (3.4.8)$$

Comparer D^π et ∇^π revient donc à comparer les dérivées symétriques D^π et $\widetilde{\nabla^\pi}$, ce qui consiste en l'étude de leur différence que l'on note S.

Lemme 3.4.1 *On a pour tout $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$*

$$S(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\alpha\beta\right)+\left(\nabla^\pi_\beta\alpha-D^\pi_\beta\alpha\right)\right\}. \tag{3.4.9}$$

Preuve. Par définition

$$S(\alpha,\beta)=\widetilde{\nabla}^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\alpha\beta=\frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^\pi_\alpha\beta+\nabla^\pi_\beta\alpha\right)+[\alpha,\beta]_\pi\right\}-D^\pi_\alpha\beta.$$

Mais D^π est sans torsion, par conséquent

$$\begin{aligned}
S(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^\pi_\alpha\beta+\nabla^\pi_\beta\alpha\right)+\left(D^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\beta\alpha\right)\right\}-D^\pi_\alpha\beta\\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^\pi_\alpha\beta+\nabla^\pi_\beta\alpha\right)+\left(D^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\beta\alpha\right)-2D^\pi_\alpha\beta\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\alpha\beta\right)+\left(\nabla^\pi_\beta\alpha-D^\pi_\beta\alpha\right)\right\},
\end{aligned}$$

d'où l'identité recherché. ■

Le résultat suivant donne une autre définition du tenseur S et une relation le reliant au couple (g,π).

Proposition 3.4.5 *On a pour tout $\alpha,\beta,\gamma\in\Omega^1(M)$, les deux identités :*

1)

$$S(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\flat_g(\nabla_{\sharp_g(\alpha)}(J)\sharp_g(\beta)+\nabla_{\sharp_g(\alpha)}(J)\sharp_g(\beta)). \tag{3.4.10}$$

2)

$$\begin{aligned}
g^*(S(\alpha,\gamma),J^*\beta)-g^*(S(\alpha,\beta),J^*\gamma) &= \frac{1}{2}[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma)\\
&\quad +g^*(\gamma,D^\pi_\alpha(J^*)\beta-\frac{1}{2}\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta).
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Preuve. 1) *On a*

$$\begin{aligned}
g^*(2S(\alpha,\beta),\gamma) &= g^*(2\widetilde{\nabla}^\pi_\alpha\beta,\gamma)-2g^*(D^\pi_\alpha\beta,\gamma)\\
&= g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta+\nabla^\pi_\beta\alpha+[\alpha,\beta]_\pi,\gamma)-2g^*(D^\pi_\alpha\beta,\gamma).
\end{aligned}$$

Par définition de D^π, on a

$$\begin{aligned}
g^*(2S(\alpha,\beta),\gamma) &= g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta+\nabla^\pi_\beta\alpha+[\alpha,\beta]_\pi,\gamma)-\{\sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta,\gamma)-\sharp_\pi(\gamma).g^*(\alpha,\beta)\\
&\quad +\sharp_\pi(\beta).g^*(\gamma,\alpha)+g^*([\gamma,\alpha]_\pi,\beta)+g^*([\gamma,\beta]_\pi,\alpha)+g^*([\alpha,\beta]_\pi,\gamma)\}.
\end{aligned}$$

La bilinéarité de g^* nous donne

$$\begin{aligned}
g^*(2S(\alpha,\beta),\gamma) &= \{g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta,\gamma)-\sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta,\gamma)\}+\left\{g^*(\nabla^\pi_\beta\alpha,\gamma)-\sharp_\pi(\beta).g^*(\alpha,\gamma)\right\}\\
&\quad +\sharp_\pi(\gamma).g^*(\alpha,\beta)+g^*([\alpha,\gamma]_\pi,\beta)+g^*([\beta,\gamma]_\pi,\alpha);
\end{aligned}$$

comme la dérivée ∇^π est compatible avec la métrique g^*, on a

$$\begin{aligned} g^*(2S(\alpha,\beta),\gamma) &= g^*([\alpha,\gamma]_\pi,\beta)+g^*([\beta,\gamma]_\pi,\alpha)+\left\{g^*(\nabla^\pi_\gamma\alpha,\beta)+g^*(\nabla^\pi_\gamma\beta,\alpha)\right\}\\ &\quad -g^*(\nabla^\pi_\alpha\gamma,\beta)-g^*(\nabla^\pi_\beta\gamma,\alpha)\\ &= g^*(T^\pi(\alpha,\gamma),\beta)+g^*(T^\pi(\beta,\gamma),\alpha),\end{aligned}$$

et d'après la proposition précédente

$$\begin{aligned} g^*(2S(\alpha,\beta),\gamma) &= g(\nabla_{\sharp_g(\beta)}(J)(\sharp_g(\alpha)),\sharp_g(\gamma))+g(\nabla_{\sharp_g(\alpha)}(J)(\sharp_g(\beta)),\sharp_g(\gamma))\\ &= g(\nabla_{\sharp_g(\beta)}(J)(\sharp_g(\alpha))+\nabla_{\sharp_g(\alpha)}(J)(\sharp_g(\beta)),\sharp_g(\gamma))\\ &= g^*(\flat_g\left[\nabla_{\sharp_g(\beta)}(J)(\sharp_g(\alpha))+\nabla_{\sharp_g(\alpha)}(J)(\sharp_g(\beta))\right],\gamma).\end{aligned}$$

D'où le résultat

$$S(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\flat_g(\nabla_{\sharp_g(\alpha)}(J)\sharp_g(\beta)+\nabla_{\sharp_g(\alpha)}(J)\sharp_g(\beta)).$$

2) *Tout d'abord, d'après le lemme précédent, on a*

$$\begin{aligned} g^*(S(\alpha,\gamma),J^*\beta)-g^*(S(\alpha,\beta),J^*\gamma) &= \frac{1}{2}\{g^*(\nabla^\pi_\alpha\gamma-D^\pi_\alpha\gamma,J^*\beta)-g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\alpha\beta,J^*\gamma)\}\\ &\quad +\frac{1}{2}\{g^*(\nabla^\pi_\gamma\alpha-D^\pi_\gamma\alpha,J^*\beta)-g^*(\nabla^\pi_\beta\alpha-D^\pi_\beta\alpha,J^*\gamma)\}.\end{aligned}$$

Comme les deux dérivées sont compatibles avec la métrique g^*, on a d'une part

$$\begin{aligned} g^*(\nabla^\pi_\alpha\gamma-D^\pi_\alpha\gamma,J^*\beta) &= g^*(D^\pi_\alpha(J^*\beta)-\nabla^\pi_\alpha(J^*\beta),\gamma)\\ &= g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma)+g^*(J^*(D^\pi_\alpha\beta-\nabla^\pi_\alpha\beta),\gamma)\\ &= g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma)+g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\alpha\beta,J^*\gamma).\end{aligned}$$

Ainsi

$$g^*(\nabla^\pi_\alpha\gamma-D^\pi_\alpha\gamma,J^*\beta)-g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\alpha\beta,J^*\gamma)=g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma).$$

Mais

$$g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma)=-g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta),$$

donc

$$g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma)=g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta)+2g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma).$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2}\{g^*(\nabla^\pi_\alpha\gamma-D^\pi_\alpha\gamma,J^*\beta)-g^*(\nabla^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\alpha\beta,J^*\gamma)\}=\frac{1}{2}g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta)+g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta-\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma).$$

D'autre part, on trouve par le même procédé

$$g^*(\nabla^\pi_\gamma\alpha - D^\pi_\gamma\alpha, J^*\beta) = g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta - \nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) + g^*(\nabla^\pi_\gamma\beta - D^\pi_\gamma\beta, J^*\alpha).$$

Et comme $\nabla^\pi_\gamma\beta - D^\pi_\gamma\beta = T^\pi(\beta,\gamma) + \nabla^\pi_\beta\gamma - D^\pi_\beta\gamma$, *on a*

$$g^*(\nabla^\pi_\gamma\alpha - D^\pi_\gamma\alpha, J^*\beta) = g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta - \nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) + g^*(\nabla^\pi_\beta\gamma - D^\pi_\beta\gamma, J^*\alpha) + g^*(T^\pi(\beta,\gamma), J^*\alpha).$$

Or

$$g^*(\nabla^\pi_\beta\gamma - D^\pi_\beta\gamma, J^*\alpha) = g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha - \nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) + g^*(\nabla^\pi_\beta\alpha - D^\pi_\beta\alpha, J^*\gamma),$$

ainsi

$$\begin{aligned} g^*(\nabla^\pi_\gamma\alpha - D^\pi_\gamma\alpha, J^*\beta) &= g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta - \nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) + g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha - \nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) \\ &\quad + g^*(T^\pi(\beta,\gamma), J^*\alpha) + g^*(\nabla^\pi_\beta\alpha - D^\pi_\beta\alpha, J^*\gamma); \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{g^*(\nabla^\pi_\gamma\alpha - D^\pi_\gamma\alpha, J^*\beta) - g^*(\nabla^\pi_\beta\alpha - D^\pi_\beta\alpha, J^*\gamma)\} &= \frac{1}{2}\{g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta - \nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) + g^*(T^\pi(\beta,\gamma), J^*\alpha) \\ &\quad + g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha - \nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma)\}. \end{aligned}$$

Par la suite

$$\begin{aligned} g^*(S(\alpha,\gamma), J^*\beta) - g^*(S(\alpha,\beta), J^*\gamma) &= \frac{1}{2}\{g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta - \nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) + g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha - \nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) \\ &\quad + g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma - \nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta)\} + \frac{1}{2}\{g^*(T^\pi(\beta,\gamma), J^*\alpha) \\ &\quad + 2g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta - \nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma)\}. \end{aligned}$$

D'après les deux identités qui relient les deux dérivées au crochet de Schouten-Nijenhuis, on a

$$\begin{aligned} & g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta - \nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) + g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha - \nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) + g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma - \nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta) \\ = \; & \left\{g^*(D^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) + g^*(D^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) + g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta)\right\} - \{g^*(\nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) \\ & + g^*(\nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma) + g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta)\} \\ = \; & 2\,[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma) - [\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma) = [\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma), \end{aligned}$$

et d'après la formule caractérisant la torsion T^π de la dérivée ∇^π et le fait que ∇^π est compatible avec la métrique g^*, on a

$$\begin{aligned} g^*(T^\pi(\beta,\gamma), J^*\alpha) &= g(\nabla_{\sharp_g(J^*\alpha)}(J^*)\sharp_g(\beta),\sharp_g(\gamma)) = g(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\sharp_g(\beta),\sharp_g(\gamma)) \\ &= g^*(\flat_g(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\sharp_g(\beta)),\gamma) = g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma). \end{aligned}$$

En conclusion

$$g^*(S(\alpha,\gamma), J^*\beta) - g^*(S(\alpha,\beta), J^*\gamma) = \frac{1}{2}\left[\pi,\pi\right]_S(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{1}{2}g^*(2D^\pi_\alpha(J^*)\beta - \nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta, \gamma).$$

C'est l'identité recherché. ∎

4

Compatibilité du couple (g, π)

4.1 Notion de compatibilité du couple (g, π)

Soit (M, g) une variété différentiable pseudo-riemannienne de dimension n. Soit π un champ de bivecteurs sur M. Au couple (g, π) est associé les deux dérivées contravariantes D^π et ∇^π que l'on a introduit dans le précédent chapitre. Il est naturel de se pencher sur le cas où l'une des deux dérivées soit une connexion de Poisson, d'où la définition suivante :

Définition 4.1.1 *Le couple (g, π) est compatible par rapport à la dérivée D^π (ou D^π-compatible) si D^π est une connexion de Poisson.*

Le couple (g, π) est ∇^π-compatible si ∇^π est une connexion de Poisson (i.e. $\nabla^\pi \pi = 0$).

Comme conséquence immédiate de cette définition, on a les deux formules

$$\begin{aligned} \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) &= \pi(D^\pi_\alpha \beta, \gamma) + \pi(\beta, D^\pi_\alpha \gamma), \\ \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) &= \pi(\nabla^\pi_\alpha \beta, \gamma) + \pi(\beta, \nabla^\pi_\alpha \gamma). \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

La proposition suivante caractérise ces deux notions de compatibilité du couple (g, π).

Proposition 4.1.1 *Le couple (g, π) est D^π-compatible si et seulement si $D^\pi(J^*) = 0$.*

Le couple (g, π) est ∇^π-compatible si et seulement si $\nabla^\pi(J^*) = 0$.

Preuve. En utilisant le fait que ces deux dérivées sont compatibles avec la métrique g^*, on trouve pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$

$$\begin{aligned} \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) &= \sharp_\pi(\alpha).g^*(J^*\beta, \gamma) = g^*(D^\pi_\alpha (J^*\beta), \gamma) + g^*(J^*\beta, D^\pi_\alpha \gamma) \\ &= g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta, \gamma) + g^*(J^*(D^\pi_\alpha \beta), \gamma) + g^*(J^*\beta, D^\pi_\alpha \gamma) \\ &= g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta, \gamma) + \pi(D^\pi_\alpha \beta, \gamma) + \pi(\beta, D^\pi_\alpha \gamma); \end{aligned}$$

or

$$(D^\pi\pi)(\alpha,\beta,\gamma)=\sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta,\gamma)-\pi(D^\pi_\alpha\beta,\gamma)-\pi(\beta,D^\pi_\alpha\gamma),$$

par conséquent

$$(D^\pi\pi)(\alpha,\beta,\gamma)=g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma). \tag{4.1.2}$$

De la même manière

$$(\nabla^\pi\pi)(\alpha,\beta,\gamma)=g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma), \tag{4.1.3}$$

et le résultat en découle. ■

Corollaire 4.1.1 *Si le couple (g,π) est compatible par rapport à l'une ou l'autre dérivée alors le champ de bivecteurs π définit une structure de Poisson sur M.*

Preuve. D'après les formules (3.4.6) et (3.4.7) le fait que $\nabla^\pi(J^*)=0$ ou $D^\pi(J^*)=0$ entraîne $[\pi,\pi]_S=0$, ce qui implique que π définit bien une structure de Poisson sur M. ■

Remarque 4.1.1 *Si le couple (g,π) est D^π-compatible, ou ∇^π-compatible et si f est une fonction de Casimir (i.e. $H_f=\sharp_\pi(df)=0$), alors le couple $(g,f\pi)$ est également compatible pour l'une ou l'autre dérivée. En effet, pour tout $\alpha,\beta,\gamma\in\Omega^1(M)$, on a*

$$\begin{aligned}
\nabla^\pi(f\pi)(\alpha,\beta,\gamma) &= \sharp_\pi(\alpha).(f\pi(\beta,\gamma))-(f\pi)(\nabla^\pi_\alpha\beta,\gamma)-(f\pi)(\beta,\nabla^\pi_\alpha\gamma)\\
&= (\sharp_\pi(\alpha)f).\pi(\beta,\gamma)+f.(\sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta,\gamma))-f\pi(\nabla^\pi_\alpha\beta,\gamma)-f\pi(\beta,\nabla^\pi_\alpha\gamma)\\
&= \pi(\alpha,df).\pi(\beta,\gamma)+f.(\sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta,\gamma))-\pi(\nabla^\pi_\alpha\beta,\gamma)-\pi(\beta,\nabla^\pi_\alpha\gamma))\\
&= -\alpha(\sharp_\pi(df))+f.(\nabla^\pi\pi)(\alpha,\beta,\gamma)\\
&= f.(\nabla^\pi\pi)(\alpha,\beta,\gamma).
\end{aligned}$$

Et la même formule pour D^π.

Remarque 4.1.2 *La deuxième assertion de la proposition* 3.4.5 *du chapitre précédent montre que ces deux notions de compatibilité sont en général différentes l'une de l'autre. Aussi on va le voir dans un futur exemple.*

4.1.1 Compatibilité dans le cas symplectique

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cas où le champ de bivecteurs π est non dégénéré, ce qui est équivalent à dire que les champs de tenseurs $\sharp_\pi$, J et J^* sont des champs d'isomorphismes. Nous désignons par X, Y, Z sont trois champs de vecteurs et par α, β, γ trois formes différentielles de degré 1 sur M; tels que

$$X = \sharp_\pi(\alpha);\ Y = \sharp_\pi(\beta);\ Z = \sharp_\pi(\gamma).$$

On définit la 2-forme suivante :

$$\omega(X, Y) := \pi((\sharp_\pi)^{-1}X, (\sharp_\pi)^{-1}Y). \tag{4.1.4}$$

La ∇^π-compatibilité

Proposition 4.1.2 *Le couple (g, π) est ∇^π-compatible si et seulement si la forme symplectique est parallèle pour la connexion de Levi-Civita de la métrique g.*

Preuve. L'hypothèse de compatibilité entraîne que ∇^π commute avec $\sharp_\pi$; ainsi

$$\nabla_X Y = \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\sharp_\pi(\beta) = \nabla^\pi_\alpha(\sharp_\pi(\beta)) = \sharp_\pi(\nabla^\pi_\alpha\beta),$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
(\nabla\omega)(X, Y, Z) &= X.\omega(Y, Z) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) \\
&= \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) - \omega(\sharp_\pi(\nabla^\pi_\alpha\beta), \sharp_\pi(\gamma)) - \omega(\sharp_\pi(\beta), \sharp_\pi(\nabla^\pi_\alpha\gamma)) \\
&= \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) - \pi(\nabla^\pi_\alpha\beta, \gamma) - \pi(\beta, \nabla^\pi_\alpha\gamma) \\
&= (\nabla^\pi\pi)(\alpha, \beta, \gamma).
\end{aligned}$$

Donc $\nabla^\pi\pi = 0$ si et seulement si $\nabla\omega = 0$. ■

La D^π-compatibilité

Comme le champ de tenseurs J est un champ d'automorphismes dans $\chi(M)$, on note g^J la métrique suivante

$$g^J(X, Y) = g(J^{-1}X, J^{-1}Y) = g^*(\alpha, \beta), \tag{4.1.5}$$

et on note ∇^J sa connexion de Levi-Civita.

Lemme 4.1.1 *Les deux dérivées D^π et ∇^J sont reliées par la formule*

$$D^\pi_\alpha\beta = (\sharp_\pi)^{-1}(\nabla^J_X Y). \tag{4.1.6}$$

Preuve. Tout d'abord, comme π définit une structure symplectique sur M, on a

$$[X, Y] = [\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)] = \sharp_\pi([\alpha, \beta]_\pi),$$

ainsi

$$g^J([X, Y], Z) = g^J(\sharp_\pi([\alpha, \beta]_\pi), \sharp_\pi(\gamma)) = g^*([\alpha, \beta]_\pi, \gamma),$$

ensuite, par définition de ∇^J, on a

$$\begin{aligned} 2.g^J(\nabla^J_X Y, Z) &= X.g^J(Y, Z) + Y.g^J(X, Z) - Z.g^J(X, Y) \\ &\quad + g^J([X, Y], Z) + g^J([Y, Z], Z) + g^J([Z, X], Y) \\ &= \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta, \gamma) + \sharp_\pi(\beta).g^*(\alpha, \gamma) - \sharp_\pi(\gamma).g^*(\alpha, \beta) \\ &\quad + g^*([\alpha, \beta]_\pi, \gamma) + g^*([\gamma, \alpha]_\pi, \beta) + g^*([\beta, \gamma]_\pi, \alpha) \\ &= 2.g^*(D^\pi_\alpha \beta, \gamma) \\ &= 2.g(\sharp_\pi(D^\pi_\alpha \beta), Z), \end{aligned}$$

par conséquent $\sharp_\pi(D^\pi_\alpha \beta) = \nabla^J_X Y$; d'où le résultat recherché. ■

Proposition 4.1.3 *Le couple (g, π) est D^π-compatible si et seulement si la forme symplectique ω est parallèle pour la connexion de Levi-Civita de la métrique g^J.*

Preuve. D'après le lemme précédent, on a

$$\omega(\nabla^J_X Y, Z) = \omega(\sharp_\pi(D^\pi_\alpha \beta), \sharp_\pi(\gamma)) = \pi(D^\pi_\alpha \beta, \gamma),$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \left(\nabla^J \omega\right)(X, Y, Z) &= X.\omega(Y, Z) - \omega(\nabla^J_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla^J_X Z) \\ &= \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) - \pi(D^\pi_\alpha \beta, \gamma) - \pi(\beta, D^\pi_\alpha \gamma) \\ &= (D^\pi \pi)(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

En conclusion, $D^\pi \pi = 0$ si et seulement si $\nabla^J \omega = 0$. ■

Remarque 4.1.3 *Comme $\nabla^J g = 0$ alors, par unicité $\nabla^J = \nabla$. Ainsi, dans le cas symplectique les deux notions sont identiques, et ce cas a été étudié par* ***M. Rakotondralambo*** *en 1997.*

Structure kählérienne induite par le couple (g, π)

Définition 4.1.2 *Une variété kählérienne est un couple* (M, h)*; où* M *est une variété complexe et* h *une métrique hermitienne sur* M *dont la partie imaginaire est une forme symplectique sur* M*.*

Nous disposons, en ce qui nous concerne, d'une variété symplectique (M, ω) et d'une métrique g sur M. La forme $h = g + i2\omega$ ferait bien un bon candidat à la forme hermitienne, encore faut-il que M soit munie d'une structure complexe.

Définition 4.1.3 *Une* ***structure presque complexe*** *est un couple* (M, J)*, où* M *est une variété différentiable réelle de dimension paire et* J *un champ d'endomorphismes sur le fibré tangent à* M*, tel que* $J^2 := J \circ J = -Id_{TM}$*.*

Il résulte de cette définition qu'en tout point x de M, l'espace vectoriel réel T_xM admet une structure d'espace vectoriel complexe.

Définition 4.1.4 *Une structure presque complexe* (M, J) *est une* ***structure complexe****, on dit aussi intégrable, si le tenseur de Nijenhuis noté* $\mathcal{N}$ *est défini par*

$$\mathcal{N}(X, Y) := \frac{1}{4}\left([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]\right), \tag{4.1.7}$$

pour tout $X, Y \in \chi(M)$*, est nul.*

Proposition 4.1.4 *On considère le couple* (g, π) *sur une variété symplectique* (M, ω)*, et on pose* $h = g + i2\omega$*. Si le champ de tenseur* J *définit une structure presque complexe sur* M *et si le couple* (g, π) *est compatible, alors* (M, h) *est une variété kählérienne.*

Preuve. Reste à démontrer l'intégrabilité de la structure presque complexe (M, J). En effet, pour tout $X, Y \in \chi(M)$, on a

$$\begin{aligned}
[JX, JY] &= \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) = J(\nabla_{JX}Y - \nabla_{JY}X) \\
&= J([JX, Y] + \nabla_Y(JX) + [X, JY] - \nabla_X(JY)) \\
&= J[JX, Y] + J[X, JY] - J(\nabla_X(JY) - \nabla_Y(JX)) \\
&= J[JX, Y] + J[X, JY] + [X, Y].
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{N} = 0$. ■

4.1.2 Interprétation géométrique

Interprétation géométrique de la ∇^π-compatibilité

Proposition 4.1.5 *Le couple (g, π) est ∇^π-compatible si et seulement si le tenseur de Poisson π est invariant par transport parallèle le long des courbes tangentes aux feuilles symplectiques. De plus, toutes les feuilles symplectiques sont totalement géodésiques.*

Preuve. On a pour toute courbe cotangente (γ, α), $\nabla^\pi_\alpha \pi = \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\pi = \nabla_{\gamma'}\pi$; par conséquent, $\nabla^\pi_\alpha \pi = 0$ est équivalent à $\nabla_{\gamma'}\pi = 0$.

La ∇^π-compatibilité entraîne que la $\mathcal{F}$-connexion symétrique ∇^π, qui provient de la connexion de Levi-Civita, est une dérivée de Poisson; ainsi, la dérivée covariante qu'elle induit sur chaque feuille symplectique n'est autre que la restriction de la connexion de Levi-Civita sur cette feuille. Par conséquent, toutes les feuilles sont totalement géodésiques. ■

Remarque 4.1.4 *Soit S une feuille symplectique, comme sa forme symplectique n'est autre que la restriction du tenseur de Poisson sur S, alors la ∇^π-compatibilité du couple (g, π) entraîne que cette forme symplectique est parallèle par rapport à la restriction de la connexion de Levi-Civita sur S.*

Interprétation géométrique de la D^π-compatibilité

Proposition 4.1.6 *Le couple (g, π) est D^π-compatible si et seulement si pour toute feuille symplectique S, sa forme symplectique ω_S est parallèle par rapport à la connexion ∇^S.*

Preuve. Si on note par ω_S la forme symplectique de S, i.e.

$$\omega_S(X, Y) = \omega_S(\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)) = \pi(\alpha, \beta) = g_S(X, J_S(Y)),$$

alors on a

$$\begin{aligned}
(D^\pi\pi)(\alpha, \beta, \gamma) &= \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta, \gamma) - \pi(D^\pi_\alpha\beta, \gamma) - \pi(\beta, D^\pi_\alpha\gamma) \\
&= X.\omega_S(Y, Z) - \omega_S(\nabla^S_X Y, Z) - \omega_S(Y, \nabla^S_X Z) \\
&= \left(\nabla^S\omega_S\right)(X, Y, Z);
\end{aligned}$$

donc le couple (g, π) est D^π-compatible si et seulement si, pour toute feuille symplectique S, sa forme symplectique ω_S est parallèle pour la connexion ∇^S. ■

Proposition 4.1.7 *Le transport parallèle associé à D^π le long d'une courbe cotangente (γ, α) induit une isométrie entre $T^*_{\gamma(0)}S$ et $T^*_{\gamma(1)}S$. De plus, cette isométrie est un isomorphisme d'espaces vectoriels symplectiques.*

Preuve. Soit (γ, α) une courbe cotangente, l'isomorphisme $\tau_{(\gamma,\alpha)}$ (Proposition 3.2.7) est une isométrie car g^* est parallèle par rapport à D^π. Le fait que $\nabla^S \omega_S = 0$ entraîne que $\tau_{(\gamma,\alpha)}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels symplectiques. ■

La D^π-compatibilité du couple (g, π) entraîne que D^π est une dérivée de Poisson symétrique, elle induit donc sur chaque feuille symplectique S une dérivée covariante ∇^S (proposition 3.3.3) qui vérifie les deux identités de la proposition 3.3.4.

Remarque 4.1.5 *On définit également l'application g_S sur S par*

$$g_S(X, Y) = g((J_S)^{-1} X, (J_S)^{-1} Y), \quad \textit{pour tout} \quad X, Y \in \chi(S). \tag{4.1.8}$$

Si g_S est non dégénérée, alors d'après le lemme 4.1.1, la dérivée ∇^S est la connexion de Levi-Civita de g_S. Comme D^π n'est en général pas une $\mathcal{F}$-connexion, la feuille S n'est pas totalement géodésique.

Structures kählériennes sur les feuilles symplectiques

Soit S une feuille symplectique de feuilletage symplectique défini par la structure de Poisson sur M, on note ω_S sa forme symplectique.

Définition 4.1.5 *On définit sur S le champ d'endomorphismes $J_S : TS \to TS$ par*

$$\begin{array}{rccc} J_S : & TS & \to & TS \\ & X & \longmapsto & J_S(X), \end{array}$$

où $J_S(X) = J_S(\sharp_\pi(\alpha)) := \sharp_\pi(J^*\alpha)$, pour tout $X \in \chi(S)$ et tout $\alpha \in \Omega^1(M)$ tels que $X = \sharp_\pi(\alpha)$.

Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} TS & \xrightarrow{J_S} & TS \\ \sharp_\pi \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \sharp_\pi \\ T^*M & \xrightarrow{J^*} & T^*M. \end{array}$$

L'application J_S est bien définie car, si $u = v \in TS = \mathrm{Im}\,\sharp_\pi$, en posant $u = \sharp_\pi(\alpha)$, $v = \sharp_\pi(\beta)$, on trouve $\sharp_\pi(\alpha - \beta) = 0$ et par conséquent

$$\begin{aligned} J^*(\alpha - \beta) &= \flat_g(\sharp_\pi(\alpha - \beta)) = 0 \Longrightarrow (\sharp_\pi \circ J^*)(\alpha - \beta) = 0 \\ &\Longrightarrow J_S(u) = \sharp_\pi(J^*\alpha) = \sharp_\pi(J^*\beta) = J_S(v). \end{aligned}$$

De la même manière on démontre que pour tout $x \in S$, $J_S(x) : T_xS \longrightarrow T_xS$ est injectif, donc c'est un automorphisme de T_xS, ainsi le tenseur J_S est inversible.

Proposition 4.1.8 *On suppose que $(J^*)^3 = -J^*$ (on rappelle que J^* n'est pas inversible en général). Dans ce cas, la compatibilité du couple, pour l'une où l'autre notion de compatibilité, entraîne que toutes les feuilles symplectiques sont des variétés kählériennes.*

Preuve. Par hypothèse, on a

$$(J_S)^3 = \left(\sharp_\pi \circ J^* \circ (\sharp_\pi)^{-1}\right)^3 = \sharp_\pi \circ (J^*)^3 \circ (\sharp_\pi)^{-1} = -\sharp_\pi \circ J^* \circ (\sharp_\pi)^{-1} = -J_S,$$

par conséquent $(J_S)^2 = -Id_{TS}$, donc S est munie d'une structure presque complexe.

On a vu que pour les deux notions de compatibilité on a $\nabla^S(J^*) = 0$ et par conséquent $\nabla^S(J_S) = 0$, où ∇^S est la dérivée covariante symétrique ∇^S induite par l'une des deux dérivées contravariantes sur S. Comme pour une variété symplectique, on définit la métrique hermitienne h_S par

$$h_S(X, Y) := g_S(X, Y) + i2\omega_S(X, Y),$$

pour tout $X, Y \in \chi(S)$. Ainsi, si $(J^*)^3 = -J^*$ alors toutes les feuilles symplectiques sont des variétés kählériennes. ■

4.2 Exemple de couple compatible

4.2.1 Champ de bivecteurs induit par un champ de Killing

Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne et U un champ de Killing (i.e. son flot est constitué d'isométries); on note ∇ la connexion de Levi-Civita de la métrique g; on note également g^* la métrique duale définie sur le fibré cotangent à M.

On rappelle que pour tout champ de vecteurs X, on a $U.g(X, X) = 2g([U, X], X)$.

Lemme 4.2.1 *Pour tout champ de vecteurs X, on a $g(X, \nabla_X U) = 0$.*

Preuve. D'après la formule de Koszul

$$\begin{aligned} 2g(X, \nabla_X U) &= X.g(U, X) + U.g(X, X) - X.g(X, U) \\ &\quad + g([X, U], X) + g([U, X], X) + g([X, X], U) \\ &= U.g(X, X) + g([X, U], X) + g([U, X], X) \\ &= U.g(X, X) \\ &= 2g([U, X], X); \end{aligned}$$

par conséquent

$$0 = g(X, \nabla_X U - [U, X]) = g(X, \nabla_X U),$$

pour tout champ de vecteurs X sur M. ■

Comme conséquence immédiate de ce lemme, la forme bilinéaire $(X, Y) \longmapsto g(X, \nabla_Y U)$ est anti-symétrique, ce qui motive la définition suivante :

Définition 4.2.1 *On définit le champ d'endomorphismes J sur TM par*

$$J(X) = JX := \nabla_X U. \tag{4.2.1}$$

On définit son champ d'endomorphismes dual J^* sur T^*M par $J^* = \flat_g \circ J \circ \sharp_g$; ainsi que le champ de bivecteurs π par

$$\pi(\alpha, \beta) := g(J\sharp_g(\alpha), \sharp_g(\beta)) = g(\nabla_{\sharp_g(\alpha)} U, \sharp_g(\beta)), \tag{4.2.2}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

Ainsi, pour tout champ de Killing U, on propose d'étudier la compatibilité du couple (g, π) où π est le champ de bivecteurs défini ci-dessus (4.22). Le lemme suivant montre la relation entre la connexion de Levi-Civita, sa courbure et le tenseur J.

Lemme 4.2.2 *Pour tout couple de champ de vecteurs (X, Y) sur M, on a*

$$R(U, X)Y = \nabla_X(J)Y. \tag{4.2.3}$$

Preuve. On a par définition de R,

$$R(U, X)Y = \nabla_{[U,X]}Y - \nabla_U(\nabla_X Y) + \nabla_X(\nabla_U Y),$$

et comme ∇ est sans torsion, on déduit :

$$\begin{aligned}
R(U,X)Y &= \nabla_{[U,X]}Y - ([U,\nabla_X Y] + \nabla_{\nabla_X Y}U) + \nabla_X([U,Y] + \nabla_Y U) \\
&= \big(\nabla_{[U,X]}Y - [U,\nabla_X Y]\big) + \nabla_X[U,Y] + (\nabla_X(\nabla_Y U) - \nabla_{\nabla_X Y}U) \\
&= \big(\nabla_{[U,X]}Y - [U,\nabla_X Y]\big) + \nabla_X[U,Y] + (\nabla_X(JY) - J\nabla_X Y) \\
&= \nabla_{[U,X]}Y - ([U,\nabla_X Y] - \nabla_X[U,Y]) + \nabla_X(J)Y,
\end{aligned}$$

et comme

$$\nabla_{[U,X]}Y = \nabla_{\mathcal{L}_U X}Y := \mathcal{L}_U(\nabla_X Y) - \nabla_X(\mathcal{L}_U Y) = [U,\nabla_X Y] - \nabla_X[U,Y],$$

le résultat en découle. ■

Les deux dérivées contravariantes ∇^π et D^π sont définies comme au chapitre précédent, le résultat ci-dessous les relient à la connexion de Levi-Civita et au champ de Killing U.

Proposition 4.2.1 *Pour tout triplet α,β,γ de 1-formes sur M, en posant $X = \sharp_g(\alpha)$, $Y = \sharp_g(\beta)$, $Z = \sharp_g(\gamma)$, on a :*

i) $g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) = g(R(Y,Z)U, JX) = g(\nabla_{JX}(J)Y, Z)$.

ii) $g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) = g(R(Y,Z)U, JX) + g(R(U,X)Z, JY) + g(R(X,U)Y, JZ)$.

Preuve. *i)* Comme ∇^π est métrique, on a

$$\begin{aligned}
g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) &= g(\sharp_g(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta), \sharp_g(\gamma)) = g(\nabla^\pi_\alpha(\sharp_g\circ J^*)\beta, \sharp_g(\gamma)) \\
&= g(\nabla^\pi_\alpha(J\circ\sharp_g)\beta, \sharp_g(\gamma)) = g(\nabla^\pi_\alpha(J)\sharp_g(\beta), \sharp_g(\gamma));
\end{aligned}$$

ainsi

$$g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) = g(\nabla_{\sharp_g(J^*\alpha)}(J)Y, Z) = g(\nabla_{JX}(J)Y, Z).$$

D'après le lemme précédent et une propriété de tenseur de Riemann (page 12), on conclue

$$g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) = g(R(U,JX)Y,Z) = g(R(Y,Z)U,JX).$$

ii) D'après la proposition 3.4.5, on a

$$\begin{aligned}
g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) &= \frac{1}{2}\{g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) - [\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma)\} \\
&\quad + g^*(S(\alpha,\gamma), J^*\beta) - g^*(S(\alpha,\beta), J^*\gamma) \\
&= \frac{1}{2}\{g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta - \nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha, \gamma) - g^*(\nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha) \\
&\quad - g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\gamma,\beta)\} + g^*(S(\alpha,\gamma), J^*\beta) - g^*(S(\alpha,\beta), J^*\gamma),
\end{aligned}$$

et comme d'après la même proposition, on a

$$S(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\flat_g(\nabla_{\sharp_g(\alpha)}(J)\sharp_g(\beta)+\nabla_{\sharp_g(\beta)}(J)\sharp_g(\alpha))=\frac{1}{2}\flat_g(\nabla_X(J)Y+\nabla_Y(J)X),$$

alors

$$\begin{aligned} g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) &= g^*(\nabla^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma)-\frac{1}{2}g^*(\nabla^\pi_\gamma(J^*)\beta,\alpha)-\frac{1}{2}g^*(\nabla^\pi_\beta(J^*)\alpha,\gamma)\\ &+\frac{1}{2}\{g(\nabla_X(J)Z+\nabla_Z(J)X,JY)-g(\nabla_X(J)Y+\nabla_Y(J)X,JZ)\}. \end{aligned}$$

Puis en appliquant le lemme précédent, on trouve

$$\begin{aligned} g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) &= \frac{1}{2}\{g(\nabla_X(J)Z+\nabla_Z(J)X,JY)-g(\nabla_X(J)Y+\nabla_Y(J)X,JZ)\\ &-g(R(Y,X)U,JZ)-g(R(X,Z)U,JY)\}+g(R(Y,Z)U,JX)\\ &= g(R(Y,Z)U,JX)+\frac{1}{2}\{g(R(U,X)Z+R(U,Z)X-R(X,Z)U,JY)\\ &-\frac{1}{2}\{g(R(U,X)Y+R(U,Y)X+R(Y,X)U,JZ). \end{aligned}$$

Mais d'après l'identité de Bianchi, on a

$$\begin{aligned} R(U,X)Z+R(U,Z)X-R(X,Z)U &= R(U,X)Z-(R(Z,U)X+R(X,Z)U)\\ &= R(U,X)Z-(-R(U,X)Z)\\ &= 2R(U,X)Z, \end{aligned}$$

et également

$$\begin{aligned} R(U,X)Y+R(U,Y)X+R(Y,X)U &= R(U,Y)X+R(U,Y)X-R(X,Y)U\\ &= 2R(U,X)Y, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} g^*(D^\pi_\alpha(J^*)\beta,\gamma) &= g(R(Y,Z)U,JX)+g(R(U,X)Z,JY)-g(R(U,X)Y,JZ)\\ &= g(R(Y,Z)U,JX)+g(R(U,X)Z,JY)+g(R(X,U)Y,JZ). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Théorème 4.2.1 *On reprend les mêmes notations ci-dessus; alors on a :*

1) *Le couple (g,π) est ∇^π-compatible si et seulement si*

$$R(U,JX)Y=0, \tag{4.2.4}$$

pour tout couple de champs de vecteurs (X, Y) sur M.

2) *Le couple (g, π) est D^{π}-compatible si et seulement si*

$$g(R(Y,Z)U,JX) + g(R(U,X)Z,JY) + g(R(X,U)Y,JZ) = 0, \tag{4.2.5}$$

pour tout triplet de champs de vecteurs (X, Y, Z) sur M.

Preuve. 1) D'après $i)$ de la proposition précédente

$$g^*(\nabla^{\pi}_{\alpha}(J^*)\beta,\gamma) = g(R(Y,Z)U,JX) = g(\nabla_{JX}(J)Y,Z) = g(R(U,JX)Y,Z),$$

donc

$$\nabla^{\pi}_{\alpha}(J^*)\beta = \sharp_g(\nabla_{JX}(J)Y) = \sharp_g(R(U,JX)Y);$$

ainsi le couple (g, π) est ∇^{π}-compatible si et seulement si

$$\nabla^{\pi}_{\alpha}(J^*)\beta = 0, \quad \forall \alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M),$$

ce qui est équivalent à

$$\nabla_{JX}(J)Y = R(U,JX)Y = 0, \quad \forall X,Y \in \chi(M).$$

2) D'après $ii)$ de la même proposition, on a

$$g^*(D^{\pi}_{\alpha}(J^*)\beta,\gamma) = g(R(Y,Z)U,JX) + g(R(U,X)Z,JY) + g(R(X,U)Y,JZ).$$

Donc, le couple (g, π) est D^{π}-compatible si et seulement si

$$D^{\pi}_{\alpha}(J^*)\beta = 0, \ \ \forall \alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M),$$

ce qui équivalent à

$$g^*(D^{\pi}_{\alpha}(J^*)\beta,\gamma) = 0, \quad \forall \alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M);$$

autrement dit :

$$g(R(Y,Z)U,JX) + g(R(U,X)Z,JY) + g(R(X,U)Y,JZ) = 0, \quad \forall X,Y,Z \in \chi(M),$$

et ceci d'après le lemme précédent. ■

4.2.2 Cas particulier

On prend $M = G$ un groupe de Lie, et g une pseudo-métrique bi-invariante (donc Ad invariante). Dans ce cas, tout champ de vecteurs invariant à gauche est un champ de Killing. On choisit U un champ de vecteurs invariant à gauche, et on note par la lettre minuscule u l'élément qui lui correspond dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = T_eG$, on fait de même pour tout champ de vecteurs invariant à gauche. Le théorème précédent prend la forme suivante :

Théorème 4.2.2 1) *Le couple (g, π) est ∇^π-compatible si et seulement si*

$$[[u,[x,u]],y] = 0, \tag{4.2.6}$$

pour tout couple de vecteurs (x, y) dans $\mathcal{G}$.

2) *Le couple (g, π) est D^π-compatible si et seulement si*

$$[[u,x],[u,y]] = 0, \tag{4.2.7}$$

pour tout couple de vecteurs (x, y) dans $\mathcal{G}$.

Preuve. 1) Comme

$$JX = \nabla_X U = \frac{1}{2}[X,U]$$

et

$$R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z],$$

alors

$$R(U,JX)Y = -\frac{1}{4}[[U,JX],Y] = -\frac{1}{8}[[U,[X,U]],Y].$$

Par identification

$$R(U,JX)Y = -\frac{1}{8}[[u,[x,u]],y],$$

et le résultat découle de cette dernière formule.

2) D'après 1), on a

$$g(R(Y,Z)U,JX) = g(R(U,JX)Y,Z) = -\frac{1}{8}g([[U,[X,U]],Y],Z)$$

et

$$g(R(U,X)Z,JY) = -g(R(U,X)(JY),Z) = -\frac{1}{4}g([[U,X],JY],Z) = \frac{1}{8}g([[X,U],[Y,U]],Z).$$

Or
$$g(R(X,U)Y,JZ) = -\frac{1}{8}g([[X,U],Y],[U,Z]) = \frac{1}{8}g([[[U,X],Y],U],Z)$$
et d'après l'identité de Jacobi
$$[[U,[X,U]],Y] = [[[U,X],Y],U] - [[X,U],[Y,U]].$$

Ainsi
$$\begin{aligned} g(R(Y,Z)U,JX) &= \frac{1}{8}g([[X,U],[Y,U]],Z) - \frac{1}{8}g([[[U,X],Y],U],Z) \\ &= \frac{1}{8}g([[X,U],[Y,U]],Z) - g(R(U,X)Z,JY), \end{aligned}$$

par conséquent
$$g(R(Y,Z)U,JX) + g(R(U,X)Z,JY) + g(R(X,U)Y,JZ) = \frac{1}{4}g([[X,U],[Y,U]],Z).$$

D'après le théorème précédent, la D^π-compatibilité du couple (g,π) est équivalente à
$$g([[X,U],[Y,U]],Z) = 0, \qquad \forall X,Y,Z \in \chi(G),$$

ce qui caractérise le fait que
$$[[X,U],[Y,U]] = 0, \qquad \forall X,Y \in \chi(G).$$

Par identification, ceci est équivaut à
$$[[u,x],[u,y]] = 0$$

pour tout couple de vecteurs (x,y) dans $\mathcal{G}$. ■

4.3 Variétés de Riemann-Poisson

4.3.1 Variétés de Poisson pseudo-riemannienne

On se donne une variété de Poisson (M,π) munie d'une métrique pseudo-riemannienne g^* sur le fibré cotangent T^*M, on note g sa métrique duale et D^π la connexion de Levi-Civita contravariante associée au couple (g^*,π).

Après avoir étudié les deux notions de compatibilité du couple (g,π), il est naturel d'introduire une nouvelle structure sur la variété M.

Définition 4.3.1 *Une **variété de Poisson pseudo-riemannienne** est un triplet (M, π, g^*) où (M, π) est une variété de Poisson et g^* est une métrique sur T^*M telle que la connexion de Levi-Civita contravariante de métrique g^* est une connexion de Poisson.*

*Si de plus g^* est définie positive, on dit que (M, π, g^*) est une variété de **Riemann-Poisson**.*

Proposition 4.3.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le triplet (M, π, g^*) est une variété de Poisson pseudo-riemannienne.*
2. *Pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ et tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a*

$$\pi(D^\pi_\alpha df, \beta) + \pi(\alpha, D^\pi_\beta df) = 0. \tag{4.3.1}$$

Preuve. Comme D^π est sans torsion alors

$$-[\pi, \pi]_S(\alpha, \beta, \gamma) = (D^\pi\pi)(\alpha, \beta, \gamma) + (D^\pi\pi)(\beta, \gamma, \alpha) + (D^\pi\pi)(\gamma, \alpha, \beta).$$

Or π est un tenseur de Poisson, par conséquent

$$(D^\pi\pi)(\alpha, \beta, \gamma) + (D^\pi\pi)(\beta, \gamma, \alpha) = \pi(D^\pi_\alpha\gamma, \beta) + \pi(\alpha, D^\pi_\beta\gamma).$$

D'où

$$-(D^\pi\pi)(df, \alpha, \beta) = \pi(D^\pi_\alpha df, \beta) + \pi(\alpha, D^\pi_\beta df).$$

Comme l'application $\gamma \longmapsto -(D^\pi\pi)(\gamma, \alpha, \beta)$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire alors, $(D^\pi\pi) = 0$ est équivalent à

$$(D^\pi\pi)(df, \alpha, \beta) = 0, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega^1(M), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

ou bien

$$\pi(D^\pi_\alpha df, \beta) + \pi(\alpha, D^\pi_\beta df) = 0, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega^1(M), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M);$$

d'où la proposition. ■

On aura besoin par la suite du lemme suivant :

Lemme 4.3.1 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, on a*

$$\left(\mathcal{L}_{H_f} g^*\right)(\alpha, \beta) = g^*(D^\pi_\alpha df, \beta) + g^*(\alpha, D^\pi_\beta df). \tag{4.3.2}$$

Preuve. Pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\left(\mathcal{L}_{H_f} g^*\right)(dg, dh) = \sharp_\pi(df).g^*(dg, dh) - g^*(\mathcal{L}_{H_f} dg, dh) - g^*(dg, \mathcal{L}_{H_f} dh),$$

comme D^π est compatible avec la métrique g^* et que $\mathcal{L}_{H_f} dg = d\{f,g\} = [df,dg]_\pi$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_{H_f} g^*\right)(dg,dh) &= g^*(D^\pi_{df}dg,dh) + g^*(dg,D^\pi_{df}dh) - g^*([df,dg]_\pi\,,dh) - g^*(dg,[df,dh]_\pi) \\
&= g^*(D^\pi_{df}dg - [df,dg]_\pi\,,dh) + g^*(dg,D^\pi_{df}dh - [df,dh]_\pi) \\
&= g^*(D^\pi_{dg}df,dh) + g^*(dg,D^\pi_{dh}df);
\end{aligned}$$

mais l'application $(\alpha,\beta) \longmapsto g^*(D^\pi_\alpha df,\beta) + g^*(\alpha,D^\pi_\beta df)$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire, ce qui donne le résultat recherché. ■

4.3.2 Variétés de Riemann-Poisson régulières

Définition 4.3.2 *Une variété de Riemann-Poisson régulière est une variété de Riemann-Poisson dont la structure de Poisson est régulière.*

Soit (M,π,g^*) une telle variété, on note par TS la distribution tangente au feuilletage symplectique régulier. Parce que la métrique est définie positive, on a

$$T^*M = Ker\pi \oplus (Ker\pi)^\perp\,,$$

où

$$(Ker\pi)^\perp = \{\alpha \in T^*M \ \text{ tels que } \ g^*(\alpha,\beta) = 0, \text{ pour tout } \beta \in Ker\pi\}. \tag{4.3.3}$$

on note $\mathcal{H} = \sharp_g(Ker\pi)$ où $\mathcal{H}$ est la distribution transverse au feuilletage symplectique. Comme

$$TM = TS \oplus \mathcal{H}$$

on aura $TS = \sharp_g\left((Ker\pi)^\perp\right)$.

Le morphisme de fibrés $\sharp_\pi$ restreint à $(Ker\pi)^\perp$ et à valeurs dans TS est un isomorphisme. On définit la forme symplectique ω par

$$\omega(u,v) := \pi(\sharp_\pi^{-1}(u),\sharp_\pi^{-1}(v)), \quad \text{pour tout} \quad u,v \in TS. \tag{4.3.4}$$

Proposition 4.3.2 *Soit (M,π,g^*) une variété de Riemann-Poisson régulière et soit D^π sa dérivée de Levi-Civita contravariante, alors*

1) *Si $\sharp_\pi(\beta) = 0$ alors, pour tout $\alpha \in \Omega^1(M)$, on a $\sharp_\pi(D^\pi_\alpha\beta) = 0$.*

2) *La dérivée D^π est une $\mathcal{F}$-connexion (i.e. $\forall\alpha \in \Omega^1(M)$; $\sharp_\pi(\alpha) = 0 \implies D^\pi_\alpha = 0$).*

Preuve. 1) Soient $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M)$ tels que $\sharp_\pi(\beta) = 0$, comme le tenseur de Poisson est parallèle par rapport à D^π, on a

$$\begin{aligned}
\gamma(\sharp_\pi(D^\pi_\alpha\beta)) &= \pi(D^\pi_\alpha\beta,\gamma) = \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta,\gamma) - \pi(\beta,D^\pi_\alpha\gamma) \\
&= \sharp_\pi(\alpha).\gamma(\sharp_\pi(\beta)) - D^\pi_\alpha\gamma(\sharp_\pi(\beta)) = 0
\end{aligned}$$

et par conséquent $\sharp_\pi(D^\pi_\alpha\beta) = 0$.

2) On suppose que $\sharp_\pi(\alpha) = 0$, comme D^π est sans torsion, et d'après 1), on trouve

$$\begin{aligned}\sharp_\pi(D^\pi_\alpha\beta) &= \sharp_\pi(D^\pi_\beta\alpha + [\alpha,\beta]_\pi) = \sharp_\pi(D^\pi_\beta\alpha) + \sharp_\pi([\alpha,\beta]_\pi)\\ &= \sharp_\pi(D^\pi_\beta\alpha) + [\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)] = 0.\end{aligned}$$

Ainsi $D^\pi_\alpha\beta \in \Gamma(Ker\pi)$. Reste à démontrer que $D^\pi_\alpha\beta \in \Gamma((Ker\pi)^\perp)$ pour que $D^\pi_\alpha\beta = 0$. Soit $\gamma \in \Omega^1(M)$ tel que $\sharp_\pi(\gamma) = 0$, il suffit de démontrer que $g^*(D^\pi_\alpha\beta, \gamma) = 0$. Grâce à la décomposition $T^*M = Ker\pi \oplus (Ker\pi)^\perp$, on écrit $\beta = \beta_1 + \beta_2$ où $\beta_1 \in \Gamma(Ker\pi)$ et $\beta_2 \in \Gamma((Ker\pi)^\perp)$, ainsi par définition de D^π on a $g^*(D^\pi_\alpha\beta_1, \gamma) = 0$; d'autre part,

$$\sharp_\pi(\alpha) = 0 \implies 0 = \sharp_\pi(\alpha).g^*(\beta_2, \gamma) = g^*(D^\pi_\alpha\beta_2, \gamma) + g^*(\beta_2, D^\pi_\alpha\gamma),$$

mais $D^\pi_\alpha\gamma \in \Gamma(Ker\pi)$ car $\sharp_\pi(\gamma) = 0$, par conséquent

$$g^*(D^\pi_\alpha\beta_2, \gamma) = -g^*(\beta_2, D^\pi_\alpha\gamma) = 0,$$

en conclusion

$$g^*(D^\pi_\alpha\beta, \gamma) = g^*(D^\pi_\alpha\beta_1, \gamma) + g^*(D^\pi_\alpha\beta_2, \gamma) = 0.$$

Le choix de β étant arbitraire, ceci démontre que $D^\pi_\alpha = 0$. ■

La proposition suivante donne quelques propriétés de $\Gamma((Ker\pi)^\perp) = (Ker\sharp_\pi)^\perp$.

Proposition 4.3.3 1) *L'ensemble* $\Gamma((Ker\pi)^\perp)$ *est stable par* D^π *et par le crochet* $[.,.]_\pi$.

2) *Pour tout* $\alpha, \beta \in \Gamma((Ker\pi)^\perp)$ *et tout champ de vecteurs* X *tangent à* $\mathcal{H} = \sharp_g(Ker\pi)$, *on a* $\mathcal{L}_X\pi(\alpha, \beta) = 0$.

Preuve. 1) Soient $\alpha, \beta \in \Gamma((Ker\pi)^\perp)$ et $\gamma \in \Gamma(Ker\pi)$; d'après 2) de la proposition précédente et comme $g^*(\beta, \gamma) = 0$, on a

$$g^*(D^\pi_\alpha\beta, \gamma) = -g^*(\beta, D^\pi_\alpha\gamma) = 0,$$

ce qui implique que $D^\pi_\alpha\beta \in \Gamma((Ker\pi)^\perp)$; pour la stabilité par le crochet il suffit de remarquer que $[\alpha,\beta]_\pi = D^\pi_\alpha\beta - D^\pi_\beta\alpha \in \Gamma((Ker\pi)^\perp)$.

2) Provient de fait que, d'après 1) on a $[\alpha,\beta]_\pi \in \Gamma((Ker\pi)^\perp)$ et que si $X \in \sharp_g(Ker\pi)$, alors $[\alpha,\beta]_\pi(X) = 0$. D'autre part

$$[\alpha,\beta]_\pi(X) = \mathcal{L}_X\pi(\alpha,\beta),$$

d'où $\mathcal{L}_X\pi(\alpha,\beta) = 0$. ■

Remarque 4.3.1 *La possibilité de décomposer le fibré cotangent en deux sous-fibrés orthogonaux nous a permet de prouver que la dérivée D^π est une $\mathcal{F}$-connexion; ce qui n'est pas le cas en général car la métrique n'est pas toujours définie positive.*

Le corollaire suivant nous donne des propriétés des variétés de Riemann-Poisson quelconques, on a :

Corollaire 4.3.1 *Soit (M, π, g^*) une variété de Riemann-Poisson, et $\mathcal{O}$ l'ouvert régulier de la structure de Poisson, alors*

1) *La dérivée D^π est une $\mathcal{F}$-connexion sur l'ouvert régulier $\mathcal{O}$.*

2) *La dérivée D^π est également basique sur $\mathcal{O}$, (i.e. pour toute feuille symplectique $S \subset \mathcal{O}$ et tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathcal{O})$ tels que $\sharp_\pi(\beta) \mid_S = 0$, on a $(D^\pi_\alpha \beta) \mid_S = [\alpha, \beta]_\pi \mid_S$).*

3) *Pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathcal{O})$ tels que $\sharp_\pi(\alpha) = \sharp_\pi(\beta) = 0$ et tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, on a*

$$\left(\mathcal{L}_{H_f} g^*\right)(\alpha, \beta) = 0.$$

4) *Pour tout couple (f, g) de fonctions de Casimir, $g^*(df, dg)$ est une fonction de Casimir.*

Preuve. 1) Comme l'ouvert régulier est la réunion finie d'ouverts disjoints et que sur chaque ouvert la structure de Poisson est régulière, la dérivée D^π est une $\mathcal{F}$-connexion sur chacun de ces ouverts (deuxième assertion de la proposition 4.3.2).

2) On a pour toute feuille symplectique $S \subset \mathcal{O}$,

$$(D^\pi_\alpha \beta) \mid_S - [\alpha, \beta]_\pi \mid_S = \left(D^\pi_\beta \alpha\right) \mid_S,$$

or D^π est une $\mathcal{F}$-connexion, donc

$$\sharp_\pi(\beta) \mid_S = 0 \implies \left(D^\pi_\beta \alpha\right) \mid_S = 0 \implies (D^\pi_\alpha \beta) \mid_S = [\alpha, \beta]_\pi \mid_S .$$

3) D'après le lemme précédent

$$\left(\mathcal{L}_{H_f} g^*\right)(\alpha, \beta) = g^*(D^\pi_\alpha df, \beta) + g^*(\alpha, D^\pi_\beta df),$$

d'un autre côté, comme D^π est une $\mathcal{F}$-connexion sur $\mathcal{O}$, alors

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^1(\mathcal{O}), \quad (\sharp_\pi(\alpha) = \sharp_\pi(\beta) = 0) \implies (D^\pi_\alpha df = D^\pi_\beta df = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})).$$

Par conséquent $\left(\mathcal{L}_{H_f} g^*\right)(\alpha, \beta) = 0$.

4) Soient f, g deux fonctions de Casimir sur (M, π). Pour tout $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}
\{h, g^*(df, dg)\} &= H_h.g^*(df, dg) = g^*(D^\pi_{dh}df, dg) + g^*(df, D^\pi_{dh}dg) \\
&= g^*(D^\pi_{df}dh + [df, dh]_\pi, dg) + g^*(df, D^\pi_{dg}dh + [dg, dh]_\pi) \\
&= g^*(D^\pi_{df}dh, dg) + g^*(df, D^\pi_{dg}dh) + g^*([df, dh]_\pi, dg) + g^*(df, [dg, dh]_\pi);
\end{aligned}$$

mais comme f et g sont des fonctions de Casimir, on a $[df, dh]_\pi = d\{f, h\} = 0$ et $[dg, dh]_\pi = d\{g, h\} = 0$; d'un autre côté, sur l'ouvert régulier $\mathcal{O}$ on a; du fait que D^π est une $\mathcal{F}$-connexion, $D^\pi_{df}dh = D^\pi_{dg}dh = 0$; par conséquent, sur $\mathcal{O}$ on a $\{h, g^*(df, dg)\} = 0$. Par densité on a $\{h, g^*(df, dg)\} = 0$ sur M, ainsi $g^*(df, dg)$ est une fonction de Casimir. ■

4.3.3 Feuilletage de Kähler-Riemann et variétés de Riemann-Poisson régulières

Définition 4.3.3 *Un champ de vecteurs X sur une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ est dit **feuilleté** si son crochet de Lie avec tout champ de vecteurs tangent aux feuilles est également tangent aux feuilles.*

Remarque 4.3.2 *Dans le cas où $\mathcal{F}$ est le feuilletage symplectique d'une variété de Poisson (M, π), alors le champ X est feuilleté si et seulement si :*

$$\forall \alpha \in \Omega^1(M), \quad [X, \sharp_\pi(\alpha)] \in TS. \tag{4.3.5}$$

Définition 4.3.4 *Une métrique riemannienne g sur une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ est **quasi-fibrée** si pour tout couple de champs de vecteurs (X, Y) feuilletés et perpendiculaires en chaque points aux feuilles, la fonction $g(X, Y)$ est constante sur les feuilles (i.e. basique).*

*Si une telle métrique existe, on dit que $\mathcal{F}$ est un **feuilletage riemannien** sur (M, g).*

D'un point de vue intuitif, pour un feuilletage riemannien, la distance entre les feuilles est localement constante.

Définition 4.3.5 *Soit M une variété différentiable munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un feuilletage de **Kähler-Riemann** si toutes les feuilles sont munies d'une structure de variété kählérienne.*

On définit l'espace des fonctions basiques (transverses ou constantes sur les feuilles) sur une variété de Poisson (M, π) par

$$\Omega^0_b(M) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(M) \ \text{ tel que } \ H_f = \sharp_\pi(df) = 0\} = H^0_\pi(M);$$

et l'ensemble des 1-formes différentielles basiques par

$$\Omega_b^1(M) := \{\alpha \in \Omega^1(M) \text{ tel que } \sharp_\pi(\alpha) = 0 \ \ et \ \ ([\alpha, \beta]_\pi = 0, \quad \forall \beta \in \Omega^1(M))\}. \tag{4.3.6}$$

Plus généralement

$$\Omega_b^p(M) := \{\omega \in \Omega^p(M) \text{ tel que } \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\omega = 0, \ \forall \beta \in \Omega^1(M)\}. \tag{4.3.7}$$

Comme la différentielle extérieure commute avec la dérivée de Lie, cela démontre que $d(\Omega_b^p(M)) \subset \Omega_b^{p+1}(M)$. On parle alors de Cohomologie basique.

Proposition 4.3.4 *Soient* (M, π, g^*) *une variété de Riemann-Poisson régulière et* $\alpha \in \Gamma(Ker\pi)$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *La forme* α *est basique.*
2) *Le tenseur* $D^\pi\alpha$ *est nul.*
3) *Le champ* $\sharp_g(\alpha)$ *est feuilleté.*
4) *On a* $\mathcal{L}_{\sharp_g(\alpha)}\pi = 0$*.*

Preuve. 1) $\Longleftrightarrow$ 2) : On a

$$D^\pi\alpha = 0 \iff (\forall\beta \in \Omega^1(M),\ D^\pi_\beta\alpha = 0) \iff (\forall\beta \in \Omega^1(M),\ D^\pi_\alpha\beta + [\alpha, \beta]_\pi = 0).$$

Rappelons que par hypothèse $\sharp_\pi(\alpha) = 0$ et que, du fait que D^π est une $\mathcal{F}$-connexion, cela entraîne $D^\pi_\alpha\beta = 0$. Par conséquent,

$$D^\pi\alpha = 0 \iff (\forall\beta \in \Omega^1(M),\ [\alpha, \beta]_\pi = 0).$$

3) $\Longleftrightarrow$ 4) : Soient $\gamma \in \Gamma(Ker\pi)$ et $\beta \in \Gamma\left((Ker\pi)^\perp\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\gamma([\sharp_g(\alpha), \sharp_\pi(\beta)]) &= -d\gamma(\sharp_g(\alpha), \sharp_\pi(\beta)) - \sharp_\pi(\beta).\gamma(\sharp_g(\alpha)) \\
&= -\pi(\beta, i_{\sharp_g(\alpha)}d\gamma) - \pi(\beta, d\,[\gamma(\sharp_g(\alpha))]) \\
&= -\pi(\beta, i_{\sharp_g(\alpha)}d\gamma + d\left(i_{\sharp_g(\alpha)}\gamma\right)) = -\pi(\beta, \mathcal{L}_{\sharp_g(\alpha)}\gamma) \\
&= \mathcal{L}_{\sharp_g(\alpha)}\pi(\beta, \gamma).
\end{aligned}$$

D'après 2) de la proposition 4.3.3 on a l'équivalence.

2) $\Longleftrightarrow$ 3) : Pour tout $\gamma \in \Gamma(Ker\pi)$ et $\beta \in \Gamma\left((Ker\pi)^\perp\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\gamma([\sharp_g(\alpha), \sharp_\pi(\beta)]) &= \gamma(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\sharp_g(\alpha)) = \sharp_\pi(\beta).\gamma(\sharp_g(\alpha)) - (\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\gamma)\sharp_g(\alpha) \\
&= g^*(D^\pi_\beta\alpha, \gamma) + g^*(D^\pi_\beta\gamma, \alpha) - g^*(\alpha, \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\gamma) \\
&= g^*(D^\pi_\beta\alpha, \gamma) + g^*(D^\pi_\beta\gamma, \alpha) - g^*(\alpha, \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\gamma)}\beta) \\
&\quad -g^*(\alpha, [\beta, \gamma]_\pi) - g^*(\alpha, d\pi(\beta, \gamma)),
\end{aligned}$$

on a $\sharp_\pi(\gamma) = 0$ et D^π est une $\mathcal{F}$-connexion symétrique, par conséquent

$$\gamma([\sharp_g(\alpha), \sharp_\pi(\beta)]) = g^*(D^\pi_\beta \alpha, \gamma).$$

D'où l'équivalence. ∎

Lemme 4.3.2 *Soit (M, π, g^*) une variété de Riemann-Poisson régulière. Pour tout $\gamma, \beta \in \Omega^1_b(M)$, la fonction $g^*(\gamma, \beta)$ est une fonction de Casimir.*

Preuve. On appliquant le théorème d'Alain Weinstein, toute 1-forme basique est une combinaison $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire des différentielles extérieurs de fonctions de Casimir. D'après 4) du corollaire 4.3.1 en on déduit que $g^*(\gamma, \beta)$ est une fonction de Casimir, pour tout $\gamma, \beta \in \Omega^1_b(M)$. ∎

On définit la métrique g sur $TM = TS \oplus \mathcal{H}$ comme suit :

$$\begin{cases} g(\sharp_g(\alpha), \sharp_g(\beta)) = g^*(\alpha, \beta), & \alpha, \beta \in Ker\pi \\ g(u, v) = g^*(\sharp_\pi^{-1}(u), \sharp_\pi^{-1}(v)), & u, v \in TS \\ g(u, \sharp_g(\beta)) = 0, & \beta \in Ker\pi, \ u \in TS \end{cases} \tag{4.3.8}$$

Soit S une feuille symplectique. La métrique g_S est la restriction de g à S, elle est par construction non dégénérée. Ainsi (S, g_S) est une variété riemannienne. Si on note ∇^S la connexion de Levi-Civita de g_S, elle vérifie :

$$\nabla^S_{\sharp_\pi(\alpha)} \sharp_\pi(\beta) = \sharp_\pi(D^\pi_\alpha \beta), \quad \text{pour tout} \quad \alpha, \beta \in \Gamma((Ker\pi)^\perp), \tag{4.3.9}$$

et si on note ω_S la forme symplectique de S, alors le couple (g_S, ω_S) définit sur S un champ d'isomorphismes J_S comme suit

$$g_S(J_S(u), v) = \omega_S(u, v), \quad \text{pour tout} \quad u, v \in TS. \tag{4.3.10}$$

Grâce à la décomposition polaire, le champ tensoriel $A_S = J_S.(-J_S^2)^{\frac{1}{2}}$ définit une structure presque complexe sur S. Cette structure est intégrable car $\nabla^S(A_S) = 0$; par conséquent, S est une variété complexe, munie de la métrique hermitienne $h_S = g_S + 2i\omega_S$, elle devient une variété kählérienne. Ainsi, le feuilletage symplectique $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Kähler-Riemann.

Théorème 4.3.1 *Soit (M, π, g^*) une variété de Riemann-Poisson régulière, alors la métrique g est quasi-fibrée et le feuilletage symplectique est un feuilletage de Kähler-Riemann.*

Preuve. Nous venons de prouver que $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Kähler-Riemann et d'après le précédent lemme, pour tout $X = \sharp_g(\alpha)$, $Y = \sharp_g(\beta)$ où $\alpha, \beta \in \Omega^1_b(M)$, la fonction $g(X,Y) = g^*(\alpha, \beta)$ est une fonction de Casimir, par conséquent, la métrique g est quasi-fibrée. ∎

Inversement, on a :

Théorème 4.3.2 *Soit $(M, \mathcal{F}, g)$ une variété différentiable munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$. On note F la distribution tangente aux feuilles et on suppose qu'il existe $\omega \in \Gamma(\wedge^2 F)$ qui vérifie :*

1) *Pour toute feuille S, la restriction de ω à S est une forme symplectique parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de la restriction de g à S.*

2) *Pour tout champ de vecteurs feuilleté X, localement perpendiculaire aux feuilles, et pour tout couple (U, V) de F, on a*

$$\mathcal{L}_X \omega(U, V) = 0.$$

Alors, il existe un couple (π, k), tel que (M, π, k) est une variété de Riemann-Poisson régulière de feuilletage symplectique $\mathcal{F}$.

Preuve. La démonstration se fait en effectuant le chemin inverse de la démonstration du théorème précédent, nous donnerons les principales idées.

On a

$$TM = F \oplus F^{\perp}, \quad T^*M = F^{\circ} \oplus (F^{\circ})^{\perp},$$

avec

$$F^{\circ} = \{\alpha \in T^*M \ tq \ \alpha(X) = 0 \ \ \forall X \in F\}.$$

On note $\sharp_g : T^*M \to TM$ l'isomorphisme induit par g, ainsi $\sharp_g(F^{\circ}) = F^{\perp}$ et $\sharp_g((F^{\circ})^{\perp}) = F$.

On prolonge la forme ω à M en posant

$$i_u \omega = 0, \quad \forall u \in F^{\perp};$$

par conséquent, l'application $\omega : F \to (F^{\circ})^{\perp}$ qui à chaque u associe $\omega(u, .) = i_u\omega$ est un isomorphisme d'inverse $\omega^{-1} : (F^{\circ})^{\perp} \to F$. On définit le champ de bivecteurs π par

$$\pi(\alpha, \beta) := \begin{cases} \omega(\omega^{-1}(\alpha), \omega^{-1}(\beta)), & si \ \ \alpha, \beta \in (F^{\circ})^{\perp} \\ 0, & sinon, \end{cases}$$

et une métrique riemannienne k par

$$k(\alpha, \beta) := \begin{cases} g(\omega^{-1}(\alpha), \omega^{-1}(\beta)), & si \ \ \alpha, \beta \in (F^{\circ})^{\perp} \\ g(\sharp_g(\alpha), \sharp_g(\beta)), & si \ \ \alpha, \beta \in F^{\circ} \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Enfin, on démontre que (M, π, k) est une variété de Riemann-Poisson régulière. ∎

4.3.4 La cohomologie de Poisson d'une variété de Riemann-Poisson régulière

On rappelle que la cohomologie de Poisson est la cohomologie du complexe $(\chi^*(M), \delta_\pi)$. On définit les deux sous-espaces vectoriels $\chi_0^p(M)$ et $\chi_1^p(M)$ de $\chi^p(M)$, $1 \leq p \leq \dim M$, par

$$\chi_0^p(M) = \{Q \in \chi^p(M), \text{ tel que } i_\alpha Q = 0, \quad \forall \alpha \in Ker\sharp_\pi\} \tag{4.3.11}$$

et

$$\chi_1^p(M) = \{Q \in \chi^p(M), \text{ tel que } Q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) = 0, \ \forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in (Ker\sharp_\pi)^\perp\}. \tag{4.3.12}$$

Lemme 4.3.3 1) *On a* $\chi^p(M) = \chi_0^p(M) \oplus \chi_1^p(M), \quad 1 \leq p \leq \dim M.$
2) *De plus,* $\delta_\pi(\chi_j^p(M)) \subset \chi_j^{p+1}(M), \quad j = 0, 1.$

Preuve. 1) On considère l'application linéaire $\sharp_\pi^p : \Omega^p(M) \to \chi^p(M)$ définie dans le chapitre précédent (définition 3.1.4). Ainsi $\chi_0^p(M)$ est isomorphe à l'image de $\sharp_\pi^p$ et $\chi_1^p(M)$ est isomorphe à son noyau; par conséquent

$$\chi^p(M) = \chi_0^p(M) \oplus \chi_1^p(M).$$

2) Soit $Q \in \chi_0^p(M)$ et soit $\alpha \in Ker\sharp_\pi$. On remarque que $\mathcal{L}_\alpha Q = 0$, ce qui est équivalent à

$$\delta_\pi(i_\alpha Q) + i_\alpha(\delta_\pi Q) = 0,$$

mais $i_\alpha Q = 0$ par hypothèse, donc $\delta_\pi Q \in \chi_0^{p+1}(M)$.

Pour démontrer $\delta_\pi(\chi_1^p(M)) \subset \chi_1^{p+1}(M)$ il suffit d'écrire la formule de $\delta_\pi Q$ et de remarquer que $(Ker\sharp_\pi)^\perp$ est stable par le crochet $[.,.]_\pi$. ∎

Corollaire 4.3.2 *Les deux injections canoniques* $\chi_0^p(M) \hookrightarrow \chi^p(M)$ *et* $\chi_1^p(M) \hookrightarrow \chi^p(M)$ *induisent deux morphismes* $H_0^p(M) \to H_\pi^p(M)$ *et* $H_1^p(M) \to H_\pi^p(M)$ *où* $H_j^*(M)$ *est la cohomologie de* $(\chi_j^p(M), \delta_\pi)$, $j = 0, 1$.

Définition 4.3.6 *La* ***cohomologie feuilletée*** *d'une variété* M *munie d'un feuilletage régulier* $\mathcal{F}$ *est la cohomologie du complexe* $(\Omega_\mathcal{F}^p(M) = \Gamma(M; \wedge^p(T\mathcal{F})), d_\mathcal{F} = d)$. *On note* $H_\mathcal{F}^*(M)$ *cette cohomologie.*

Proposition 4.3.5 *Pour tout entier* p *tel que* $1 \leq p \leq \dim M$, *la restriction de* $\sharp_\pi^p$ *à* $\Omega_\mathcal{F}^p(M)$ *établit un isomorphisme entre* $\Omega_\mathcal{F}^p(M)$ *et* $\chi_0^p(M)$, *lequel induit un isomorphisme de groupes de cohomologie* $H_\mathcal{F}^p(M)$ *et* $H_0^p(M)$.

Preuve. Provient du fait que $\Omega^p_{\mathcal{F}}(M) = (\sharp^p_\pi)^{-1}(\operatorname{Im}\sharp^p_\pi)$. ■

Lemme 4.3.4 *Pour toute forme basique $\omega \in \Omega^p_b(M)$, on a $\delta_\pi(\sharp^p_\pi(\omega)) = 0$.*

Preuve. C'est une application directe de la définition d'une forme basique. ■

Par conséquent, on obtient une application injective $\sharp^p_\pi : \Omega^p_b(M) \to H^p_1(M)$.

Avec ce lemme et la proposition qui le précède, on vient de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.3.3 *Soit $(M,\ \pi,\ g^*)$ une variété de Riemann-Poisson régulière. Pour tout $1 \le p \le \dim M$ on a une application injective*

$$\Omega^p_b(M) \oplus H^p_{\mathcal{F}}(M) \hookrightarrow H^p_\pi(M). \tag{4.3.13}$$

En particulier

$$\Omega^1_b(M) \oplus H^1_{\mathcal{F}}(M) \simeq H^1_\pi(M). \tag{4.3.14}$$

4.4 Algèbres de Lie pseudo-riemanniennes

Soit $(\mathcal{G},\ [.,.])$ une algèbre de Lie munie d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée a. On définit sur $\mathcal{G}$ une application bilinéaire

$$\begin{array}{rccc} A: & \mathcal{G}\times\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & (u,v) & \longmapsto & A_u v \end{array}$$

par

$$2a(A_u v, w) = a([u,v]\,, w) + a([w,v]\,, u) + a([w,u]\,, v), \quad \text{pour tout} \ \ u,v,w \in \mathcal{G}. \tag{4.4.1}$$

Proposition 4.4.1 *Pour tout $u,v,w \in \mathcal{G}$, l'application A satisfait*

$$\begin{array}{ll} 1) & A_u v - A_v u = [u,v]\,; \\ 2) & a(A_u v, w) + a(v, A_u w) = 0. \end{array} \tag{4.4.2}$$

Preuve. 1) On a

$$2a(A_u v, w) - 2a(A_v u, w) = 2a([u,v]\,, w),$$

donc

$$a(A_u v - A_v u, w) = a([u,v]\,, w).$$

2) On a

$$\begin{aligned} 2a(A_u v, w) &= a([u,v],w) + a([w,v],u) + a([w,u],v) \\ &= -(a([u,w],v) + a([v,u],w) + a([v,w],u)) \\ &= -2a(A_u w, v), \end{aligned}$$

d'où l'égalité. ■

Définition 4.4.1 *Le triplet* $(\mathcal{G}, [.,.], a)$ *est une algèbre de* ***Lie pseudo-riemannienne*** *si*

$$[A_u v, w] + [v, A_u w] = 0, \quad \textit{pour tout} \quad u, v, w \in \mathcal{G}. \tag{4.4.3}$$

Si de plus a *est définie positive, on dit que* $(\mathcal{G}, [.,.], a)$ *est une algèbre de* ***Lie-Riemann.***

Le théorème suivant démontre que la notion d'algèbre de Lie pseudo-riemannienne est la version infinitésimale de la notion de variété de Poisson pseudo-riemannienne.

Théorème 4.4.1 *Soit* (M, π, g^*) *une variété de Poisson pseudo-riemannienne, soit* $x \in M$, *tel que la restriction de la pseudo-métrique* g_x^* *à* $Ker(\sharp_\pi(x)) := \mathcal{G}_x$ *est non dégénérée. Alors la structure d'algèbre de Lie sur* $\mathcal{G}_x$ *obtenue en linéarisant le tenseur de Poisson au point* x *est une algèbre de Lie pseudo-riemannienne.*

Preuve. Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{G}_x$, le crochet de Lie $[.,.]_x$ sur $\mathcal{G}_x$ est défini par

$$[\alpha, \beta]_x := d_x(\pi(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})), \qquad \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \Omega^1(M) \;\; tq \;\; \widetilde{\alpha}_x = \alpha, \; \widetilde{\beta}_x = \beta. \tag{4.4.4}$$

Le couple $(\mathcal{G}_x, [.,.]_x)$ est ainsi l'algèbre de Lie obtenue en linéarisant le tenseur de Poisson au point x.

On note a_x la restriction de g_x^* à $\mathcal{G}_x$, qui est non dégénérée, et on définit A_x par

$$2a_x(A_{x\alpha}\beta, \gamma) = a_x([\alpha,\beta]_x, \gamma) + a_x([\gamma,\beta]_x, \alpha) + a_x([\gamma,\alpha]_x, \beta) \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{G}_x. \tag{4.4.5}$$

On a pour tout $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} \in \Omega^1(M)$ tels que $\widetilde{\alpha}_x = \alpha$, $\widetilde{\beta}_x = \beta$, $\widetilde{\gamma}_x = \gamma$,

$$\begin{aligned} 2.g_x^*((D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta})_x, \gamma) &= 2.\{g^*((D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta}), \widetilde{\gamma})\}(x) \\ &= \sharp_\pi(\widetilde{\alpha})_x . g_x^*(\beta,\gamma) + \sharp_\pi(\widetilde{\beta})_x . g_x^*(\alpha,\gamma) - \sharp_\pi(\widetilde{\gamma})_x . g_x^*(\alpha,\beta) \\ &\quad + g_x^*([\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}]_\pi(x), \gamma) + g_x^*([\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta}]_\pi(x), \alpha) + g_x^*([\widetilde{\gamma},\widetilde{\alpha}]_\pi(x), \beta); \end{aligned}$$

or $\sharp_\pi(\widetilde{\alpha})_x = \sharp_\pi(\widetilde{\beta})_x = \sharp_\pi(\widetilde{\gamma})_x = 0$ par hypothèse et

$$[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]_\pi(x) = d_x(\pi(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})) = [\alpha, \beta]_x,$$

on trouve

$$\begin{aligned}2.g_x^*((D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta})_x,\gamma) &= g_x^*([\alpha,\beta]_x,\gamma)+g_x^*([\gamma,\beta]_x,\alpha)+g_x^*([\gamma,\alpha]_x,\beta)\\ &= a_x([\alpha,\beta]_x,\gamma)+a_x([\gamma,\beta]_x,\alpha)+a_x([\gamma,\alpha]_x,\beta)\\ &= 2.a_x(A_{x\alpha}\beta,\gamma).\end{aligned}$$

Reste à démontrer que $(D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta})_x\in\mathcal{G}_x$, auquel cas, on aura

$$A_{x\alpha}\beta=(D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta})_x.$$

En effet, pour tout $\mu\in\Omega^1(M)$, on a

$$\begin{aligned}\mu(\sharp_\pi(D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta})) &= \pi(D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta},\mu)=\sharp_\pi(\widetilde{\alpha}).\pi(\widetilde{\beta},\mu)-\pi(\widetilde{\beta},D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\mu)\\ &= \sharp_\pi(\widetilde{\alpha}).\pi(\widetilde{\beta},\mu)-D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\mu(\sharp_\pi(\widetilde{\beta}));\end{aligned}$$

comme $\sharp_\pi(\widetilde{\alpha})_x=\sharp_\pi(\widetilde{\beta})_x=0$, on déduit que $\sharp_\pi(D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta})_x=0$ ainsi $(D^\pi_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\beta})_x\in\mathcal{G}_x$.

Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ tel que $d_xf=\gamma\in\mathcal{G}_x$, comme (M,π,g^*) est une variété de Poisson pseudo-riemannienne, alors

$$\pi(D^\pi_{\widetilde{\alpha}}df,\widetilde{\beta})+\pi(\widetilde{\alpha},D^\pi_{\widetilde{\beta}}df)=0,$$

ainsi

$$\begin{aligned}[A_{x\alpha}\gamma,\beta]_x+[\alpha,A_{x\beta}\gamma]_x &= \left[D^\pi_{\widetilde{\alpha}}df,\widetilde{\beta}\right]_\pi(x)+\left[\widetilde{\alpha},D^\pi_{\widetilde{\beta}}df\right]_\pi(x)\\ &= d_x(\pi(D^\pi_{\widetilde{\alpha}}df,\widetilde{\beta})+\pi(\widetilde{\alpha},D^\pi_{\widetilde{\beta}}df))=0.\end{aligned}$$

Par conséquent, le triplet $(\mathcal{G}_x,[.,.]_x,a_x)$ est une algèbre de Lie pseudo-riemannienne. ■

Comme le dual d'une algèbre de Lie est muni d'une structure de Poisson linéaire naturelle, le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que le dual d'une algèbre de Lie soit une variété de Poisson pseudo-riemannienne.

Théorème 4.4.2 *Soit $(\mathcal{G},\ [.,.])$ une algèbre de Lie, son dual $(\mathcal{G}^*,\ \pi)$ admet une pseudo-métrique g^* pour laquelle $(\mathcal{G}^*,\ \pi,\ g^*)$ est une variété de Poisson pseudo-riemannienne si et seulement si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie pseudo-riemannienne.*

Preuve. On suppose qu'il existe une pseudo-métrique g^* sur $\mathcal{G}^*$ pour laquelle $(\mathcal{G}^*,\pi,g^*)$ est une variété de Poisson pseudo-riemannienne, comme la structure de Poisson linéarisée en zéro de $(\mathcal{G}^*,\ \pi)$ est exactement la structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$, d'après le théorème précédent $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie pseudo-riemannienne.

Inversement, soit a une pseudo-métrique sur $\mathcal{G}$ pour laquelle $(\mathcal{G}, [.,.], a)$ est une algèbre de Lie pseudo-riemannienne; on définit une métrique g^* sur $T^*\mathcal{G}^* := \mathcal{G}^* \times \mathcal{G}$ par

$$g^*((\mu, u), (\mu, v)) := a(u, v), \qquad \mu \in \mathcal{G}^*, \ u, v \in \mathcal{G}. \tag{4.4.6}$$

Le tenseur de Poisson est défini par

$$\pi(du, dv)(\mu) := \mu([u, v]), \qquad \mu \in \mathcal{G}^*, \ u, v \in \mathcal{G}. \tag{4.4.7}$$

On a

$$[du, dv]_\pi = d[u, v] \quad et \quad D^\pi_{du} dv = d(A_u v);$$

avec cette construction, $(\mathcal{G}^*, \pi, g^*)$ est une variété de Poisson pseudo-riemannienne. ■

Exemple 4.4.1 *En appliquant le théorème* 4.2.2*, on s'aperçoit que* $so(3)$ *munie de produit scalaire euclidien* g *n'est pas une algèbre de Lie-Riemann car* $(so^*(3), \ \pi, \ g^*)$ *n'est pas une variété de Riemann-Poisson. Cependant, l'algèbre de Lie d'Heisenberg* $\mathcal{H}$*, (qui est isomorphe à* $(\mathbb{R}^3, \ [.,.])$ *avec* $[e_1, e_2] = e_3$ *et* $[e_1, e_3] = [e_3, e_2] = 0$*), munie de la métrique* g *est une algèbre de Lie-Riemann.*

5

Application

5.1 Structure de Poisson compatible avec la métrique canonique de $\mathbb{R}^3$

Après avoir introduit la notion de variété de Poisson pseudo-riemannienne au chapitre précédent, nous allons étudier les structures de Poisson compatibles avec la métrique euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\{dx, dy, dz\}$ la base canonique de $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$; la métrique euclidienne contravariante g^* est définie dans cette base par

$$\begin{cases} g^*(dx, dx) = g^*(dy, dy) = g^*(dz, dz) = 1 \\ g^*(dx, dy) = g^*(dx, dz) = g^*(dy, dz) = 0. \end{cases}$$

Un champ de bivecteurs π sur $\mathbb{R}^3$ est donné par

$$\pi = \pi_{12}\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + \pi_{13}\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + \pi_{23}\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}, \tag{5.1.1}$$

où

$$\pi_{12} = \pi(dx, dy), \quad \pi_{13} = \pi(dx, dz), \quad \pi_{23} = \pi(dy, dz)$$

sont des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^3$.

On a donc

$$\begin{cases} \sharp_\pi(dx) = \pi_{12}\frac{\partial}{\partial y} + \pi_{13}\frac{\partial}{\partial z} \\ \sharp_\pi(dy) = -\pi_{12}\frac{\partial}{\partial x} + \pi_{23}\frac{\partial}{\partial z} \\ \sharp_\pi(dz) = -\pi_{23}\frac{\partial}{\partial y} - \pi_{13}\frac{\partial}{\partial x}, \end{cases} \tag{5.1.2}$$

et le crochet $[.,.]_\pi$ est défini par

$$\begin{cases} [dx, dy]_\pi = d(\pi(dx, dy)) = d\pi_{12} = \frac{\partial \pi_{12}}{\partial x} dx + \frac{\partial \pi_{12}}{\partial y} dy + \frac{\partial \pi_{12}}{\partial z} dz \\ [dx, dz]_\pi = d(\pi(dx, dz)) = d\pi_{13} = \frac{\partial \pi_{13}}{\partial x} dx + \frac{\partial \pi_{13}}{\partial y} dy + \frac{\partial \pi_{13}}{\partial z} dz \\ [dy, dz]_\pi = d(\pi(dx, dy)) = d\pi_{23} = \frac{\partial \pi_{23}}{\partial x} dx + \frac{\partial \pi_{23}}{\partial y} dy + \frac{\partial \pi_{23}}{\partial z} dz. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

La dérivée de Levi-Civita contravariante D^π est définie par ces symboles de Christoffel $\left\{\Gamma_k^{ij},\ \ 1 \leq i, j, k \leq 3\right\}$ qui sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{array}{llll} \Gamma_1^{11} = \Gamma_1^{21} = \Gamma_1^{31} = 0 & \Gamma_1^{12} = -\Gamma_2^{11} = \frac{\partial \pi_{12}}{\partial x} & \Gamma_1^{13} = -\Gamma_3^{11} = \frac{\partial \pi_{13}}{\partial x} & \Gamma_1^{23} = -\Gamma_3^{21} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \pi_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{12}}{\partial z}) \\ \Gamma_2^{22} = \Gamma_2^{12} = \Gamma_2^{32} = 0 & \Gamma_1^{22} = -\Gamma_2^{21} = \frac{\partial \pi_{12}}{\partial y} & \Gamma_2^{23} = -\Gamma_3^{22} = \frac{\partial \pi_{23}}{\partial y} & \Gamma_2^{13} = -\Gamma_3^{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \pi_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{13}}{\partial y} - \frac{\partial \pi_{12}}{\partial z}) \\ \Gamma_3^{33} = \Gamma_3^{13} = \Gamma_3^{23} = 0 & \Gamma_1^{33} = -\Gamma_3^{31} = \frac{\partial \pi_{13}}{\partial z} & \Gamma_1^{33} = -\Gamma_3^{32} = \frac{\partial \pi_{23}}{\partial z} & \Gamma_2^{31} = -\Gamma_1^{32} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \pi_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \pi_{13}}{\partial y} - \frac{\partial \pi_{12}}{\partial z}) \end{array} \tag{5.1.4}$$

Le lemme suivant donne une condition nécessaire pour que $(\mathbb{R}^3, g^*, \pi)$ soit une variété de Riemann-Poisson.

Lemme 5.1.1 *Si champ de bivecteurs π est compatible avec g^* alors il existe une fonction différentiable f sur $\mathbb{R}^3$ telle que*

$$\pi = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}. \tag{5.1.5}$$

Preuve. On a vu dans le précédent chapitre que la condition de compatibilité entraîne que l'application $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$-bilinéaire

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \mathcal{L}_{H_h} g^*(\alpha, \beta) = g^*(D^\pi_\alpha dh, \beta) + g^*(\alpha, D^\pi_\beta dh)$$

est anti-symétrique pour toute fonction différentiable h sur $\mathbb{R}^3$, par conséquent elle est de trace nulle; or sa trace dans la base canonique est égale à

$$\phi(h) := g^*(D^\pi_{dx} dh, dx) + g^*(D^\pi_{dy} dh, dy) + g^*(D^\pi_{dy} dh, dy), \quad \forall h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{5.1.6}$$

On calcule $\phi(h)$, comme

$$\begin{aligned} g^*(D^\pi_{dx} dh, dx) &= \frac{\partial h}{\partial x}.g^*(D^\pi_{dx} dx, dx) + \frac{\partial h}{\partial y}.g^*(D^\pi_{dx} dy, dx) + \frac{\partial h}{\partial z}.g^*(D^\pi_{dx} dz, dx) + \sharp_\pi(dx).\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}.\Gamma_1^{11} + \frac{\partial h}{\partial y}.\Gamma_1^{12} + \frac{\partial h}{\partial z}.\Gamma_1^{13} + \left(\pi_{12}\frac{\partial}{\partial y} + \pi_{13}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial y}.\frac{\partial \pi_{12}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z}.\frac{\partial \pi_{13}}{\partial x} + \pi_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} + \pi_{13}\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} g^*(D^\pi_{dy}dh, dy) &= \frac{\partial h}{\partial x}.\Gamma_2^{21} + \frac{\partial h}{\partial y}.\Gamma_2^{22} + \frac{\partial h}{\partial z}.\Gamma_2^{23} + \left(-\pi_{12}\frac{\partial}{\partial x} + \pi_{23}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{\partial h}{\partial x}.\frac{\partial \pi_{12}}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.\frac{\partial \pi_{23}}{\partial y} - \pi_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \pi_{23}\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial y} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g^*(D^\pi_{dz}dh, dz) &= \frac{\partial h}{\partial x}.\Gamma_3^{31} + \frac{\partial h}{\partial y}.\Gamma_3^{32} + \frac{\partial h}{\partial z}.\Gamma_3^{33} + \left(-\pi_{13}\frac{\partial}{\partial x} - \pi_{23}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) \\ &= -\frac{\partial h}{\partial x}.\frac{\partial \pi_{13}}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}.\frac{\partial \pi_{23}}{\partial z} - \pi_{13}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} - \pi_{23}\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \phi(h) &= \frac{\partial h}{\partial y}.\frac{\partial \pi_{12}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z}.\frac{\partial \pi_{13}}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x}.\frac{\partial \pi_{12}}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.\frac{\partial \pi_{23}}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}.\frac{\partial \pi_{13}}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}.\frac{\partial \pi_{23}}{\partial z} \\ &= \left(-\frac{\partial \pi_{13}}{\partial z} - \frac{\partial \pi_{12}}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial \pi_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \pi_{23}}{\partial z}\right)\frac{\partial h}{\partial y} + \left(\frac{\partial \pi_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{13}}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial z} \\ &= \left\{\left(-\frac{\partial \pi_{13}}{\partial z} - \frac{\partial \pi_{12}}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial \pi_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \pi_{23}}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial \pi_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{13}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}\right\}.h; \end{aligned}$$

comme $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ est une base de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$-module libre $\chi(\mathbb{R}^3)$ alors, $\phi(h) = 0$ pour tout h dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ est équivalent au système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \pi_{12}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \pi_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \pi_{23}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \pi_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{13}}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à dire que la 1-forme différentielle

$$\pi_{23}dx - \pi_{13}dy + \pi_{12}dz$$

est fermée; $\mathbb{R}^3$ étant simplement connexe, cette forme est exacte, par conséquent il existe une fonction différentiable f telle que

$$\pi_{23} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \pi_{13} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \pi_{12} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

ce qui donne le résultat recherché. ■

Corollaire 5.1.1 *Dans ce cas la dérivée D^π aura pour symbole de Christoffel*

$$\begin{array}{lll} \Gamma_1^{11} = \Gamma_1^{21} = \Gamma_1^{31} = 0 & \Gamma_1^{12} = -\Gamma_2^{11} = \frac{\partial \pi_{12}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \Gamma_1^{13} = -\Gamma_3^{11} = \frac{\partial \pi_{13}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \Gamma_2^{22} = \Gamma_2^{12} = \Gamma_2^{32} = 0 & \Gamma_1^{22} = -\Gamma_2^{21} = \frac{\partial \pi_{12}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \Gamma_2^{23} = -\Gamma_3^{22} = \frac{\partial \pi_{23}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \Gamma_3^{33} = \Gamma_3^{13} = \Gamma_3^{23} = 0 & \Gamma_1^{33} = -\Gamma_3^{31} = \frac{\partial \pi_{13}}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \Gamma_1^{33} = -\Gamma_3^{32} = \frac{\partial \pi_{23}}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{23} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial \pi_{23}}{\partial x} + \tfrac{\partial \pi_{13}}{\partial y} + \tfrac{\partial \pi_{12}}{\partial z}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = -\Gamma_3^{21} \\ \Gamma_2^{13} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial \pi_{23}}{\partial x} + \tfrac{\partial \pi_{13}}{\partial y} - \tfrac{\partial \pi_{12}}{\partial z}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = -\Gamma_3^{12} \\ \Gamma_2^{31} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial \pi_{23}}{\partial x} - \tfrac{\partial \pi_{13}}{\partial y} - \tfrac{\partial \pi_{12}}{\partial z}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = -\Gamma_1^{32}. \end{aligned}$$

Pour que la condition nécessaire du précédent lemme devient suffisante, il faut une contrainte supplémentaire sur la fonction f; d'où le théorème suivant :

Théorème 5.1.1 *Le champ de bivecteurs π est compatible avec g^* si et seulement si il existe une fonction différentiable f sur $\mathbb{R}^3$ telle que*

$$\pi = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z},$$

et f vérifie l'équation

$$d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df = 0; \tag{5.1.7}$$

où

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

est le laplacien euclidien de f.

De plus, f est une fonction de Casimir de la structure de Poisson $(\mathbb{R}^3, \pi)$.

Preuve. Pour que $(\mathbb{R}^3, g^*, \pi)$ soit une variété de Riemann-Poisson il faut et il suffit que $D^\pi\pi : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to \chi^2(\mathbb{R}^3)$ soit identiquement nul; ce qui est équivaut à

$$D^\pi_{dx}\pi = D^\pi_{dy}\pi = D^\pi_{dz}\pi = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
D^\pi_{dx}\pi &= D^\pi_{dx}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\right\} \\
&= \left(\sharp_\pi(dx).\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} - \left(\sharp_\pi(dx).\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \left(\sharp_\pi(dx).\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}D^\pi_{dx}\left(\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}D^\pi_{dx}\left(\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}D^\pi_{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\right);
\end{aligned}$$

on a d'une part

$$\begin{aligned}
\sharp_\pi(dx).\tfrac{\partial f}{\partial z} &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial z}\tfrac{\partial}{\partial y} - \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\tfrac{\partial f}{\partial z} = \tfrac{\partial f}{\partial z}\tfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\sharp_\pi(dx).\tfrac{\partial f}{\partial y} &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial z}\tfrac{\partial}{\partial y} - \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\tfrac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{\partial f}{\partial z}\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} \\
\sharp_\pi(dx).\tfrac{\partial f}{\partial x} &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial z}\tfrac{\partial}{\partial y} - \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\tfrac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{\partial f}{\partial z}\tfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
D^\pi_{dx}(\frac{\partial}{\partial x}) &= -\left\{\frac{\partial}{\partial x}(D^\pi_{dx}dx)\right\}\frac{\partial}{\partial x} - \left\{\frac{\partial}{\partial x}(D^\pi_{dx}dy)\right\}\frac{\partial}{\partial y} - \left\{\frac{\partial}{\partial x}(D^\pi_{dx}dz)\right\}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -\Gamma^{11}_1\frac{\partial}{\partial x} - \Gamma^{12}_1\frac{\partial}{\partial y} - \Gamma^{13}_1\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}$$

de la même manière

$$D^\pi_{dx}(\tfrac{\partial}{\partial y}) = -\Gamma^{11}_2\tfrac{\partial}{\partial x} - \Gamma^{12}_2\tfrac{\partial}{\partial y} - \Gamma^{13}_2\tfrac{\partial}{\partial z} = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\tfrac{\partial}{\partial x} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2})\tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$D^\pi_{dx}(\tfrac{\partial}{\partial z}) = -\Gamma^{11}_3\tfrac{\partial}{\partial x} - \Gamma^{12}_3\tfrac{\partial}{\partial y} - \Gamma^{13}_3\tfrac{\partial}{\partial z} = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2})\tfrac{\partial}{\partial y}$$

ainsi

$$\begin{aligned} D^\pi_{dx}\left(\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}\right) &= D^\pi_{dx}(\frac{\partial}{\partial x})\wedge\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\wedge D^\pi_{dx}(\frac{\partial}{\partial y}) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2})\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D^\pi_{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\right) &= D^\pi_{dx}(\frac{\partial}{\partial y})\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\wedge D^\pi_{dx}(\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^\pi_{dx}\left(\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\right) &= D^\pi_{dx}(\frac{\partial}{\partial x})\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\wedge D^\pi_{dx}(\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2})\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} D^\pi_{dx}\pi &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

de la même manière

$$\begin{aligned} D^\pi_{dy}\pi &= \left(-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^\pi_{dx}\pi &= \left(-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z} \\ &+ \left(-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{cases} D^\pi_{dx}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\right\}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\right\}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ D^\pi_{dy}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\right\}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\right\}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ D^\pi_{dz}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\right\}\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\right\}\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{5.1.8}$$

Ainsi $D^\pi\pi = 0$ est équivalent à

$$\frac{\partial}{\partial x}\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\} = \frac{\partial}{\partial y}\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\} = \frac{\partial}{\partial z}\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\} = 0,$$

mais

$$\begin{gathered} d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df = \tfrac{\partial}{\partial x}\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\}\,dx \\ +\tfrac{\partial}{\partial y}\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\}\,dy + \tfrac{\partial}{\partial z}\{d(g^*(df,df)) - \Delta(f).df\}\,dz = 0. \end{gathered}$$

On calcule le champ hamiltonien de f, on a

$$\begin{aligned} H_f \quad : \quad &= \sharp_\pi(df) = \sharp_\pi(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz) = \frac{\partial f}{\partial x}\sharp_\pi(dx) + \frac{\partial f}{\partial y}\sharp_\pi(dy) + \frac{\partial f}{\partial z}\sharp_\pi(dz) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = 0; \end{aligned}$$

donc f est une fonction de Casimir de la structure de Poisson $(\mathbb{R}^3, \pi)$. ■

5.2 Structures de Poisson linéaires compatibles avec la métrique canonique de $\mathbb{R}^3$

Une structure de Poisson linéaire est donnée par un champ de bivecteurs

$$\pi = \pi_{12}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} + \pi_{13}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \pi_{23}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z},$$

où π_{12}, π_{13}, π_{23} sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$.

Ainsi pour celles qui sont compatibles avec la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$ la fonction f donnée par le précédent théorème est une forme quadratique, une telle fonction s'écrit

$$f(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2axy + 2bxz + 2cyz; \qquad \alpha,\beta,\gamma,a,b,c \in \mathbb{R}. \tag{5.2.1}$$

Cherchons des conditions sur les constantes α, β, γ, a, b, c pour que f soit une solution de l'équation

$$dg^*(df,df) - \Delta(f)df = 0.$$

On a d'une part

$$\frac{1}{2}df(x,y,z) = (\alpha x + ay + bz)dx + (ax + \beta y + cz)dy + (bx + cy + \gamma z)dz$$

et

$$\Delta(f)(x,y,z) = 2(\alpha + \beta + \gamma),$$

donc

$$(\Delta(f)df)\,(x,y,z) = 4(\alpha+\beta+\gamma)\left\{(\alpha x + ay + bz)dx + (ax+\beta y + cz)dy + (bx + cy + \gamma z)dz\right\}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}g^*(df,df) &= (\alpha x + ay + bz)^2 + (ax + \beta y + cz)^2 + (bx + cy + \gamma z)^2 \\ &= (\alpha^2 + a^2 + b^2)x^2 + (\beta^2 + a^2 + c^2)y^2 + (\gamma^2 + b^2 + c^2)z^2 \\ &\quad +2(a(\alpha+\beta) + bc)xy + 2(b(\alpha+\gamma) + ac)xz + 2(c(\beta+\gamma) + ab)yz; \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \{dg^*(df,df)\}\,(x,y,z) &= 8\left\{(\alpha^2 + a^2 + b^2)x + (a(\alpha+\beta) + bc)y + (b(\alpha+\gamma) + ac)z\right\}dx \\ &\quad +8\left\{(a(\alpha+\beta) + bc)x + (\beta^2 + a^2 + c^2)y + (c(\beta+\gamma) + ab)z\right\}dy \\ &\quad +8\left\{(b(\alpha+\gamma) + ac)x + (c(\beta+\gamma) + ab)y + (\gamma^2 + b^2 + c^2)z\right\}dz. \end{aligned}$$

L'équation $dg^*(df,df) = \Delta(f)df$ est équivalente au système

$$\begin{cases} (\alpha+\beta+\gamma)\,\alpha = 2(\alpha^2 + a^2 + b^2); & (\alpha+\beta+\gamma)\,c = 2(\beta+\gamma) + 2ab \\ (\alpha+\beta+\gamma)\,\beta = 2(\beta^2 + a^2 + c^2); & (\alpha+\beta+\gamma)\,b = 2(\alpha+\gamma) + 2ac \\ (\alpha+\beta+\gamma)\,\gamma = 2(\gamma^2 + b^2 + c^2); & (\alpha+\beta+\gamma)\,a = 2(\alpha+\beta) + 2bc, \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} (-\alpha+\beta+\gamma)\,\alpha = 2(a^2 + b^2); & (-\alpha+\beta+\gamma)\,c = -2ab \\ (\alpha-\beta+\gamma)\,\beta = 2(a^2 + c^2); & (\alpha-\beta+\gamma)\,b = -2ac \\ (\alpha+\beta-\gamma)\,\gamma = 2(b^2 + c^2); & (\alpha+\beta-\gamma)\,a = -2bc, \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{c} = -\frac{a^2+b^2}{ab} = -\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \\ \frac{\beta}{b} = -\frac{a^2+c^2}{ac} = -\frac{a}{c} - \frac{c}{a} \\ \frac{\gamma}{a} = -\frac{b^2+c^2}{bc} = -\frac{b}{c} - \frac{c}{b} \end{cases};$$

par conséquent

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{ac}{b} - \frac{bc}{a} \\ \beta = -\frac{ab}{c} - \frac{bc}{a} \\ \gamma = -\frac{ab}{c} - \frac{ac}{b}. \end{cases}$$

On pose

$$t = -\tfrac{ab}{c}; \quad s = -\tfrac{bc}{a}; \quad u = -\tfrac{ac}{b},$$

alors

$$\begin{cases} \alpha = s + u; \quad \beta = t + s; \quad \gamma = t + u; \\ a = \sqrt{tu}; \quad b = \sqrt{ts}; \quad c = \sqrt{su}. \end{cases}$$

D'où la proposition.

Proposition 5.2.1 *Un tenseur de Poisson linéaire*

$$\pi = \pi_{12}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} + \pi_{13}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \pi_{23}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}$$

sur $\mathbb{R}^3$ est compatible avec la métrique euclidienne canonique si et seulement si il existe une fonction quadratique

$$f(x,y,x) = (s+u)\,x^2 + (t+s)\,y^2 + (t+u)\,z^2 + 2\sqrt{tu}xy + 2\sqrt{ts}xz + 2\sqrt{su}yz; \qquad (5.2.2)$$

pour tout $t,s,u\in\mathbb{R}$ vérifiant $su, tu, ts \in \mathbb{R}_+$ telle que $\pi_{12} = \frac{\partial f}{\partial z}$, $\pi_{13} = -\frac{\partial f}{\partial y}$, $\pi_{23} = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Comme conséquence immédiate de cette proposition, la structure de Poisson linéaire

$$\pi_{so(3)} = z\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} \qquad (5.2.3)$$

sur $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir du produit vectoriel, ou en identifiant $\mathbb{R}^3$ à $so(3) := T_{I_3}SO(3)$ considérée comme l'algèbre de Lie du groupe de Lie $SO(3)$, n'est pas compatible avec la métrique euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$, car dans ce cas la fonction quadratique associée au tenseur $\pi_{so(3)}$ est

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).$$

Cependant on a :

Proposition 5.2.2 *La fonction $\varphi : (x,y,z) \longmapsto (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$ est une solution de l'équation*

$$dg^*(df,df) - \Delta(f)df = 0$$

et par conséquent, le tenseur $\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\pi_{so(3)}$ est compatible avec la métrique euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$.

Preuve. On a

$$d\varphi(x,y,z) = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(xdx+ydy+zdz)\,,$$

donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\pi_{so(3)}.$$

Puis d'une part

$$g^*(d\varphi,d\varphi)(x,y,z) = 9(x^2+y^2+z^2)^2,$$

ainsi

$$dg^*(d\varphi,d\varphi)(x,y,z) = 36(x^2+y^2+z^2)(xdx+ydy+zdz).$$

D'autre part

$$\Delta(\varphi)(x,y,z) = 12\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Donc

$$(\Delta(\varphi)d\varphi)\,(x,y,z) = 36(x^2+y^2+z^2)(xdx+ydy+zdz) = dg^*(d\varphi,d\varphi)(x,y,z).$$

Ainsi, le champ de bivecteurs $\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\pi_{so(3)}$ est compatible avec la métrique euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$. ■

Bibliographie

[1] **M. Boucetta**, Compatibilité des structures pseudo-riemanniennes et des structures de Poisson.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série 1, p. 763-768, 2001.

[2] **M. Boucetta**, Poisson manifolds with compatible pseudo-metric and pseudo-Riemannian Lie algebras.

Preprint math. D.G/0206102.

[3] **M. Boucetta**, Riemann Poisson manifolds and Kähler-Riemann foliations.

Preprint math. D.G/0211035.

[4] **M. Boucetta**, Poisson structures compatible with the canonical metric of $\mathbb{R}^3$.

Preprint math. D.G/0402219.

[5] **R. L. Fernandes**, Connections in Poisson geometry 1 : Holonomy and invariants.

J. Diff Geom. 54, p. 303-366, 2000.

[6] **I. Vaisman**, Lectures on the geometry of Poisson manifolds.

Progress in Mathematics, vol 118, Birkhäuser, Berlin, 1994.

[7] **J. P. Dufour, Nguyen Tien Zung**, Poisson structures and their normal forms.

Birkhäuer Verlag, Pogress in mathematics, volume 242.

[8] **Gerard Walschap**, Metric structure in differentiel geometry. Springer-Verlag, 2004.

[9] **John M.Lee**, Introduction to Smooth Manifolds. Springer.

[10] **Y. Choquet-Bruhat**, Géométrie différentielle et systèmes extérieurs. Dunod, Paris, 1968.