N ° d'ordre : 16/2011−M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTE DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse : Equations aux dérivées partielles

Par

SEKOUCHI Kahina

THÈME

STABILITÉ ET CONTRÔLABILITÉ D'UN SYSTÈME DE L'ÉLASTO-MAGNÉTISME PAR DES FEEDBACKS NON LINÉAIRES

Soutenu publiquement le : 12/12/2011 à 14h45, devant le jury composé de :

M.	D. TENIOU	Professeur	à l'U.S.T.H.B	Président
M.	A. HEMINNA	Professeur	à l'U.S.T.H.B	Directeur de mémoire
M.	A. KHEMMOUDJ	Maître de Conférences|A	à l'U.S.T.H.B	Examinateur
Mlle.	O. ZAIR	Maître de Conférences|A	à l'U.S.T.H.B	Examinateur

REMERCIEMENTS

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur **A. HEMINNA**, mon directeur de thèse, je le remercie pour sa contribution à l'aboutissement de ce travail, sa disponibilité et ses précieuses remarques et suggestions, je le remercie infiniment.*

*Je remercie vivement Monsieur **D. TENIOU**, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.*

*Mes remerciements tout aussi vifs vont à Monsieur **A. KHEMMOUDJ**, Maître de conférence à l'U.S.T.H.B et Madame **O. ZAIR**, Maître de conférence à l'U.S.T.H.B. qui ont accepté d'examiner ce travail.*

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à ma famille. Je remercie du fond du coeur mes parents pour tout l'amour qu'ils me portent et pour m'avoir permis de réaliser mes études dans les meilleures conditions possibles et pour leur patience aussi. Je souhaite remercier mes fréres Lahcene, Hocine, Hakim et Nassim pour m'avoir soutenu et encouragé et j'adresse une pensée toute particulière à mon mari Azzedine.

*Merci enfin à mes amies, en paarticulier Hanane, Saliha et Zahia et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, je remércie particuliérement madame **HARNANE** et madame **AIT-YAHIA** .*

Table des matières

Introduction **1**

1 Rappels et définitions **5**

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle 5

1.1.1 L'espace $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ 5

1.1.2 L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ 6

1.1.3 Théorèmes de traces 7

1.1.4 Espaces de Sobolev fractionnaires 8

1.1.5 Espaces de Sobolev des distributions à valeurs vectorielles 11

1.2 Résultats préliminaires 12

1.2.1 Opérateurs différentiels usuels 12

1.2.2 Equations de la mécanique en élasticité linéaire 13

1.2.3 Projection orthogonale 16

1.2.4 Problèmes variationnels 16

1.2.5 Rappels sur les opérateurs non linéaires 17

2 Solution du problème non linéaire **19**

2.1 Existence, unicité et régularité des solutions 20

2.1.1 Résultat de densité 24

2.1.2 Théorème d'existence, unicité et régulirité des solutions 27

3 Stabilité exponentielle dans le cas linéaire **46**

3.1 Stabilité exponentielle dans le cas linéaire 46

4 Contrôlabilité exacte **53**

4.1 Contrôlabilité exacte 53

5 La stabilité dans le cas non linéaire **59**

5.1 La stabilité dans le cas non linéaire 59

5.2 Cas particuliers 75

Conclusion **77**

Bibliographie **78**

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un article de S.NICAISE [27], portant sur la stabilité du système de l'élasto-magnétisme, par des feedbacks frontières non linéaires. Soit Ω un ouvert non vide et borné dans $\mathbb{R}^3$, de frontière lipschitzienne Γ.
Soient $g_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (i = 1, 2)$, des fonctions continues et vérifiant :

$$g_i(0) = 0, \tag{1}$$

il existe une constante $M \geq 0$, telle que pour tout $E \in \mathbb{R}^3$,

$$|g_i(E)| \leq M(1 + |E|), \tag{2}$$

il existe une constante $m > 0$, telle que pour tout $E \in \mathbb{R}^3,\ |E| \geq 1$,

$$g_i(E) \cdot E \geq m|E|^2, \tag{3}$$

ainsi que la condition de monotonie :

$$(g_i(E) - g_i(F)) \cdot (E - F) \geq 0,\ \forall E, F \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

On considère le système de l'élasto-magnétisme suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \mathrm{div}\sigma(u) + \xi \,\mathrm{rot}\, E = 0, & \text{dans } Q := \Omega\times]0, +\infty[\\ \varepsilon \partial_t E - \mathrm{rot}\, H - \xi \,\mathrm{rot}\, \partial_t u = 0, & \text{dans } Q \\ \mu\, \partial_t H + \mathrm{rot}\, E = 0, & \text{dans } Q \\ \mathrm{div}(\varepsilon\, E) = \mathrm{div}(\mu\, H) = 0, & \text{dans } Q \\ H \times \nu + \xi\, \partial_t u \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur } \Sigma := \Gamma\times]0, \infty[\\ \sigma(u) \cdot \nu + A\, u + g_2(\partial_t u) = 0, & \text{sur } \Sigma \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Ce système modélise le couplage entre le système de Maxwell et le système de l'élasticité, dans lequel :

- $E(x,t), H(x,t)$ et $u(x,t)$ désignent respectivement le champ électrique, le champ magnétique et le champ déplacement en chaque point x et à l'instant t,
- ε, μ désignent respectivement la permitivité électrique et la perméabilité magnétique, supposées positives et dans $L^\infty(\Omega)$.

- $\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))_{i,j=1}^3$ est le tenseur symétrique des contraintes défini par :

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}e_{kl}(u)$$

  (ici et dans toute la suite, on utilisera la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés) où
  $e(u) = (e_{ij}(u)_{i,j=1}^3$ est le tenseur des déformations linéarisé donné par :

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

  et $(a_{ijkl})_{i,j=1,2,3}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, satisfaisant à la condition de symétrie :

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$$

  et la condition d'ellipticité :

$$a_{ijkl}\lambda_{ij}\lambda_{kl} \geq \alpha\,\lambda_{ij}\lambda_{ij} \tag{6}$$

  pour tout tenseur symétrique (λ_{ij}) et $\alpha > 0$, $\mathrm{div}\sigma(u)$ est le champ de vecteurs défini par :

$$\mathrm{div}\sigma(u) = (\partial_j\sigma_{ij}(u))_{i=1}^3.$$

- ν désigne le vecteur normal exterieur à Γ,

- A est une constante positive,

- ξ est une constante positive représentant le paramètre de couplage magnéto-élastique.

On note que si $\xi = 0$, le système (5) se découple en deux systèmes indépendants : le système de l'élasticité et le système de Maxwell.
L'étude de la contrôlabilité du système de l'élasto-magnétisme avec condition au bord de type Dirichlet est faite dans [14].
Le but de ce travail est d'adapter les résultats récents sur le système de Maxwell [9, 15, 25, 28], et sur le système de l'élasticité [1, 4, 11] pour étudier le système couplé (5). Il s'agit d'obtenir une estimation de l'énergie du système non linéaire (5) (stabilité), en faisant des

hypothèses sur g_1 et g_2, et en se basant sur l'estimation de EE-stabilité, qui est équivalente à la décroissance exponentielle de l'énergie du système linéaire.
Ce mémoire est organisé comme suit :
Le premier chapitre est consacré aux définitions et aux rappels de quelques notions de base d'analyse fonctionnelle.
Dans le deuxième chapitre, on étudie l'existence, l'unicité et la régularité de la solution, en utilisant la théorie des opérateurs non linéaires.
Dans le troisième chapitre, on donne une équivalence entre la stabilité exponentielle du système linéaire ($g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$) associé au système (5), par des feedbacks frontières linéaires et l'estimation de EE-stabilité.
Dans le quatrième chapitre, on déduit des résultats de contrôlabilité exacte du système linéaire, en utilisant le principe de Russell.
Dans le cinquième chapitre, on donne une estimation de l'énergie de (5), en utilisant le principe de Liu [24], (basé sur le principe de Russell) et une inégalité intégrale. On construit pour cela une suite particulière de fonctions globalement Lipschitzienne g_2^k, qui approche la fonction g_2 (non globalement Lipschitzienne).
Le résultat principal de ce mémoire est le théorème suivant :

Théorème 0.0.1. *Soient g_1 et g_2 deux fonctions continues, vérifiant les hypothèses* (1), (2), (3) *et* (4) *ainsi que :*

$$|E|^2 + |g_i(E)|^2 \leq G(g_i(E) \cdot E), \quad \forall |E| \leq 1, \; i = 1, 2 \tag{7}$$

où $G : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est une fonction concave strictement croissante avec $G(0) = 0$. Si Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité, alors il existe deux constantes positives c_2, c_3 et un temps $T_1 > 0$ (qui dépend de $T, \mathcal{E}(0)$ et $|\Gamma|$) tels que :

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G\left(\frac{\psi^{-1}(c_2 t)}{c_2 T^2 |\Gamma| t}\right) \quad \forall t \geq T_1 \tag{8}$$

pour toute solution $(u(t), E(t), H(t))$ de (5)*, où $\psi(t) = \int_t^\infty \dfrac{1}{\phi(s)}\, d\, s, \;\; \forall t > 0$ pour ϕ définie par*

$$\phi(s) = T|\Gamma| G^{-1}\left(\frac{s}{c_3}\right). \tag{9}$$

On termine par donner quelques cas particuliers de décroissance de l'énergie, à noter, décroissance exponentielle, polynomiale et logarithmique.

1

Rappels et définitions

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 L'espace $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$

Définition 1.1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

a) *On désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions f définies et mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :*

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty. \tag{1.1}$$

Les intégrales sont prises au sens de Lebesgue.
L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

est un espace de Banach.

b) *On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions f définies, mesurables et bornées presque partout sur Ω.*
L'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |f(x)| \tag{1.3}$$

est un espace de Banach.

Si $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx. \tag{1.4}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz ([5])

Soient f et g dans $L^2(\Omega)$. On a alors

$$\left|\int_\Omega f \cdot g\, dx\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

Inégalité de Young ([5])

Pour tous réels a et b et pour tout réel $\theta > 0$, on a

$$|ab| \leq \frac{\theta}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\theta}|b|^2. \tag{1.6}$$

1.1.2 L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.1.2. *On définit l'espace de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\} \tag{1.7}$$

où on a posé pour tout multi-index $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n$,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \quad \textit{et} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.8}$$

► Pour $p = 2$, on remplacera la notation $W^{m,2}(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$. On remarquera c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x)\, D^\alpha v(x)\, dx \tag{1.9}$$

et la norme associée est

$$\|u\|_m = \|u\|_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

►On a les inclusions suivantes :

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset \cdots \subset H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega).$$

On a le théorème de densité suivant :

Théorème 1.1.1. *$D(\overline{\Omega}) = \{u_{|\overline{\Omega}}, u \in D(\mathbb{R}^n)\}$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

1.1.3 Théorèmes de traces

Lorsque u est une fonction de $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on ne peut pas considérer la restriction de la fonction à un ensemble de mesure nulle, car les fonctions de $L^2(\Omega)$ sont justement définies à un ensemble de mesure nulle près.
En revanche, les fonctions des espaces de Sobolev sont plus régulières que les fonctions L^2, par exemple lorsque $m > \frac{n}{2}$, les fonctions de $H^m(\Omega)$ admettent un représentant continu.
Nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire que la fonction ait un représentant continu, pour que l'on puisse considérer sa restriction à $\Gamma = \partial\Omega$.
C'est ce que nous appellerons la trace de la fonction sur le bord du domaine.

Proposition 1.1.1. *Si Ω est un ouvert borné, lipschitzien alors l'application :*

$$\begin{gathered} D(\overline{\Omega}) \to C(\Gamma) \\ u \to u|_\Gamma, \end{gathered}$$

se prolonge en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.
Ce prolongement est appelé opérateur de trace, noté γ_0.

Définition 1.1.3. *Soit Ω un ouvert borné, lipschitzien. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ le noyau de γ_0 défini par*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = 0 \ sur\ \Gamma\}. \tag{1.11}$$

Théorème 1.1.2. *$D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.*

Remarque 1.1.1. *Toute forme linéaire continue sur $H_0^m(\Omega)$, s'identifie à une distribution sur Ω. On désigne par $H^{-m}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^m(\Omega)$ par cette identification. On a alors*

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega).$$

Définition 1.1.4. *L'espace image de γ_0, noté $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, est un espace de Hilbert pour la norme :*

$$\|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0 u = \mu}} \|u\|_1. \tag{1.12}$$

Théorème 1.1.3. *Sous les hypothèses de la proposition 1.1.1, l'application $u \to \gamma_0 u$ est linéaire, continue et surjective de $H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Théorème 1.1.4. *(de Relèvement) Soit Ω un ouvert borné, lipschitzien. Alors pour tout $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe $u \in H^1(\Omega)$ tel que $u_{|\Gamma} = \mu$ et*

$$\|u\|_1 \leq C\|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{1.13}$$

1.1.4 Espaces de Sobolev fractionnaires

Soit $s \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.5. *(Espace de Sobolev fractionnaire sur $\mathbb{R}^n$).*
On définit pour $s > 0$, l'espace de Sobolev fractionnaire d'ordre s sur $\mathbb{R}^n$ par

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n), \textit{telle que}: \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s \, d\xi \, < \infty\}, \tag{1.14}$$

où $\widehat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u. On définit pour $s < 0$, l'espace de Sobolev fractionnaire d'ordre s sur $\mathbb{R}^n$ par

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \textit{telle que}: \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s \, d\xi \, < \infty\}, \tag{1.15}$$

où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions infiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$.

Muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) \cdot \widehat{v}(\xi)(1+|\xi|^2)^s \, d\,\xi, \tag{1.16}$$

l'espace $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert, et la norme associée est notée par :

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s \, d\,\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.17}$$

Théorème 1.1.5. *Si s est un entier naturel, alors $H^s(\mathbb{R}^n)$ coincide avec l'espace de Sobolev $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$. De plus, les normes définies par* (1.10) *et* (1.17) *sont équivalentes.*

Théorème 1.1.6. *Pour $s > 0$, l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^n)'$ coincide avec l'espace dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Proposition 1.1.2. *$D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Espaces de Sobolev d'ordre réel sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$.
Sans conditions de régularité sur la frontière $\partial\Omega = \Gamma$, on peut définir des espaces de Sobolev d'ordre non entier, en utilisant la notion d'espaces intermédiaires.
Soit $s > 0$ un nombre non entier et $m > s$ un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre $s > 0$ sur Ω, l'espace noté $H^s(\Omega)$ et défini par :

$$H^s(\Omega) = \left[H^0(\Omega), H^m(\Omega)\right]_{1-\frac{s}{m}}. \tag{1.18}$$

Théorème 1.1.7. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est une variété de classe et $\mathcal{C}^k$ tel que : Ω est localement d'un seul côté de Γ. Alors, pour tout $s \leq k$, on a :*

$$H^s(\Omega) = \{u|_\Omega, u \in H^s(\mathbb{R}^n)\} \tag{1.19}$$

et l'équivalence des normes :

$$\|\cdot\|_{[H^m(\mathbb{R}^n),H^0(\mathbb{R}^n)]_{1-\frac{s}{m}}} \quad et\ u \mapsto \inf\{\|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} : U = u \quad p.partout\ sur\ \Omega\}. \tag{1.20}$$

De plus, si $0 < s \leq k$ on a :

$$D(\overline{\Omega})\ dense\ dans\ H^s(\Omega).$$

Espaces de Sobolev sur le bord d'un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est une variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension $n-1$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de Ω.
On appelle *partition* de l'unité de classe $\mathcal{C}^\infty$ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$, une famille de fonctions $(\alpha_i)_{i\in I}$ de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à valeurs positives ou nulles, indexée par le même ensemble d'indices I, et vérifiant les conditions suivantes :

- Pour tout $i \in I$, $supp(\alpha_i) \subset U_i$;

- Pour tout compact $K \subset\subset \Omega$, il existe une partie finie $J_K \subset I$ telle que pour tout $i \in I - J_K$, on a $\alpha_{i|K} \equiv 0$;

- Pour tout $x \in \Omega$, $\sum_{i\in I} \alpha_i(x) = 1$.

On montre que pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$, il existe pour chaque recouvrement ouvert $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et une partition de l'unité $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ subordonnée à ce recouvrement.
On suppose que l'ouvert Ω est borné. L'ensemble $\overline{\Omega} = \Omega\cup\Gamma$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. De tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$, on peut alors en extraire un sous recouvrement fini $(U_{ik})_{k\in\{1,\cdots,m\}}$. Soit $(O_j)_{j\in\{1,\cdots,p\}}$ une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ recouvrant en particulier la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et telle que pour tout $j \in \{1,\cdots,p\}$, il existe une application φ_j de classe $\mathcal{C}^\infty$: dont l'application réciproque :

$$\begin{aligned} \varphi_j^{-1} : U &\to O_j \\ y &\to \varphi_j^{-1}(y) = x \end{aligned} \tag{1.21}$$

est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie :

$$\varphi_j(O_j \cap \Omega) = \{y \in U : \text{tel que} : y_n > 0\} = U_+, \tag{1.22}$$

$$\varphi_j(O_j \cap \Gamma) = \{y \in \mathbb{R}^n : y \in U : \text{tel que} : y_n = 0\} = U_0, \quad (1.23)$$

$$\varphi_j(O_j \cap (\mathbb{R}^n - \overline{\Omega})) = \{y \in U : \text{tel que} : y_n < 0\} = U_-. \quad (1.24)$$

De plus, si $O_i \cap O_j \neq 0$, il existe un homéomorphisme $J_{i,j}$ indéfiniment differentiable à Jacobien positif telle que :

$$\begin{aligned} J_{i,j} \ : \ & \varphi_i(O_i \cap O_j) \to \varphi_j(O_i \cap O_j) \\ & J_{i,j}(\varphi_i(x)) = \varphi_j(x) \quad \forall x \in O_i \cap O_j. \end{aligned} \quad (1.25)$$

En associant au recouvrement fini par les ouverts $(O_j)_{j\in\{1,\cdots,p\}}$ de $\mathbb{R}^n$, la famille finie des traces $(O_j \cap \Gamma)_{j\in\{1,\cdots,p\}}$ de $\mathbb{R}^n$ sur Γ, on obtient un recouvrement de Γ par des ouverts de Γ, auquel on peut subordonner une partition de l'unité $(\varphi_j)_{j\in\{1,\cdots,p\}}$ sur Γ vérifiant :

$$supp(\varphi_j) \subset O_j \cap \Gamma \ \text{ et } \quad \varphi_j \in D(\Gamma) \ \ \forall\, j \in \{1, \cdots, p\}, \quad (1.26)$$

$$\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1 \ \ \forall\ x \ \in \Gamma, \quad (1.27)$$

où $D(\Gamma)$désigne l'espace des fonctions de $\Gamma \to \mathbb{R}$ indéfiniment différentiable à support compact contenu dans Γ. Ainsi toute fonction $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ définie (p.p) sur Γ se décompose d'après (1.27) comme suit :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j(x) \cdot u(x) \quad \text{presque partout sur } \ \Gamma. \quad (1.28)$$

La fonction $(\alpha_j \cdot u) \circ \varphi_j^{-1}$ est à support compact dans $\varphi_j(O_j \cap \Gamma) = \{y \in U : \text{tel que} : y_n = 0\}$.
Elle se prolonge par 0 en une fonction définie sur $\mathbb{R}^{n-1}_{y'} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.
On définit alors l'application continue notée $\phi_j^* : L^1(\Gamma) \to L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ qui à tout élément $u \in L^1(\gamma)$ associe l'élément de $\phi_j^*(u) \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ défini de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(y_1, \cdots, y_{n-1}) \mapsto \phi_j^*(u)(y_1, \cdots, y_{n-1}) = \begin{cases} (\alpha_j \cdot u) \circ \varphi_j^{-1}(y_1, \cdots, y_{n-1}, 0) \ \text{ si } \ \left(\sum_{i=1}^{n-1} |y|^2\right) < 1 \\ \\ 0 \quad \text{si} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |y|^2\right) > 1 \end{cases} \quad (1.29)$$

L'application :$\phi_j^* \ : \ D(\Gamma) \to D(\mathbb{R}^{n-1})$ est linéaire continue et de plus :

$$v \in D(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ et } supp(v) \subset \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : \left(\sum_{i=1}^{n-1} |y|^2\right) < 1\} \Rightarrow \exists u \in D(\Gamma) \text{ tq } \ : \phi_j^*(u) = v \quad (1.30)$$

ou encore :

$$(\phi_j^*)^{-1}(v) = u \quad (1.31)$$

Signalons enfin la continuité de l'application :

$$\phi_j^* : D'(\Gamma) \to D'(\mathbb{R}^{n-1}).$$

l'espace $H^s(\Gamma)$

Définition 1.1.6. *Soit $s \in \mathbb{R}$. On appellera espace de Sobolev d'ordre s sur Γ, l'espace noté $H^s(\Gamma)$ et défini par :*

$$H^s(\Gamma) = \{u \in L^2(\Gamma) \text{ tel que} : \phi_j^*(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \forall j \in \{1, \cdots, p\}\} \tag{1.32}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^{p} \|\phi_j^*(u)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^s(\Gamma) \tag{1.33}$$

Remarque 1.1.2. *La définition (1.32) ne dépend pas du choix des cartes locales $(O_j, \varphi_j)_{j\in\{1,\cdots,p\}}$ et de la partition de l'unité $(\varphi_j)_{j\in\{1,\cdots,p\}}$.*
La norme $\|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}$, par contre dépend du choix du système $(O_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j\in\{1,\cdots,p\}}$ mais les différentes normes sont équivalentes.
Muni de chacune des normes définie par un système $(O_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j\in\{1,\cdots,p\}}$, on vérifie que l'espace $H^s(\Gamma)$ est un espace de Hilbert.
En identifiant $H^0(\Gamma)$ avec son dual, on montre que l'espace dual $(H^s(\Gamma))'$ n'est autre que l'espace de Sobolev d'ordre $-s$ sur Γ :

$$(H^s(\Gamma))' = H^{-s}(\Gamma) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.34}$$

1.1.5 Espaces de Sobolev des distributions à valeurs vectorielles

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, et T un nombre réel strictement positif.

Distributions vectorielles

Définition 1.1.7. *On appelle espace des distributions vectorielles sur $]0, T[$ à valeurs dans $\mathcal{H}$, et on note $D'(]0, T[; \mathcal{H})$, l'espace des applications linéaires, continues de $D(]0, T[)$ à valeurs dans $\mathcal{H}$:*

$$D'(]0, T[; \mathcal{H}) = \mathfrak{L}\left(D(]0, T[; \mathcal{H})\right).$$

L'espace $L^2(0, T; \mathcal{H})$

Définition 1.1.8. *On désigne par $L^2(0, T; \mathcal{H})$, l'espace des (classes de) fonctions mesurables de $[0, T]$ dans $\mathcal{H}$, telles que :*

$$\|u\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})} = \left(\int_0^T \|u\|^2_{\mathcal{H}}\, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{1.35}$$

Proposition 1.1.3. *Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)_{\mathcal{H}}$, alors $L^2(0, T; \mathcal{H})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u, v)_{L^2(0,T;\mathcal{H})} = \int_0^T (u(t), v(t))_{\mathcal{H}}\, dt. \tag{1.36}$$

Les espaces $H^m(0,T;\mathcal{H}), m \in \mathbb{N}^*$

Définition 1.1.9. *Pour $m \geq 1$, on définit l'espace*

$$H^m(0,T;\mathcal{H}) = \{u \in L^2(0,T;\mathcal{H}); u^{(k)} \in L^2(0,T;\mathcal{H}), \forall k \in \mathbb{N}, k \leq m\};$$

(les dérivées étant prises au sens des distributions).
On munit $H^m(0,T;\mathcal{H})$ de la norme

$$\|u\|_{H^m(0,T;\mathcal{H})} = \left(\sum_{k=0}^{m} \|u^k\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.37}$$

Proposition 1.1.4. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$. L'espace $H^m(0,T;\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m(0,T;\mathcal{H})} = \sum_{k=0}^{m} \int_0^T (u^{(k)}, v^{(k)})_X \, dt. \tag{1.38}$$

► Soient V et $\mathcal{H}$ deux espaces de Hilbert, de normes respectives $\|\|_V$ et $\|\|_{\mathcal{H}}$ tels que V s'injecte continûment dans $\mathcal{H}$, et V dense dans $\mathcal{H}$. En identifiant $\mathcal{H}$ à son dual, on obtient $V \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow V'$.
Soit alors $v \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ tel que $\frac{dv}{dt} \in L^2(0,T;V')$.
On montre alors qu'après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la fonction $t \rightarrow v(t)$ est continue de $[0,T] \rightarrow \mathcal{H}$.

1.2 Résultats préliminaires

1.2.1 Opérateurs différentiels usuels

Définition 1.2.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, φ une fonction scalaire définie sur Ω régulière, et $u = (u_1, u_2, u_3)$ une fonction vectorielle définie sur Ω et à valeurs $\mathbb{R}^3$, où, pour $i = 1,2,3$, les u_i sont des fonctions scalaires régulières. On désigne respectivement par* ∇, div, rot *et* Δ *les opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien définis par :*

$$\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}),$$

$$\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

$$\nabla u = (\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3),$$

$$\operatorname{rot} u = \nabla \wedge u = (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2})$$

et

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}.$$

▶ L'opérateur rot apparaît comme son propre transposé formel. Plus précisément, on a

$$\langle \operatorname{rot} u, \varphi \rangle = \langle u, \operatorname{rot} \varphi \rangle \ , \quad \forall u \in D'(\Omega)^3, \forall \varphi \in D(\Omega)^3.$$

L'espace $H(\operatorname{rot}, \Omega)$

On considère l'espace

$$H(\operatorname{rot}, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{rot} u \in L^2(\Omega)^3\} \tag{1.39}$$

doté du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H(\operatorname{rot},\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v \rangle_{L^2(\Omega)^3},$$

et de la norme associée :

$$\|u\|_{H(\operatorname{rot},\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{rot} u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.40}$$

Théorème 1.2.1. *$D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H(\operatorname{rot}, \Omega)$.*

On a la formule de Green sur $H(\operatorname{rot}, \Omega)$ (voir [10]) :

$$\forall\, E \in H(\operatorname{rot}, \Omega),\ \forall\, v \in\ H^1(\Omega)^3 \ \int_\Omega \operatorname{rot} E \cdot v\, d\, x = \int_\Omega \operatorname{rot} v \cdot E - \langle E \times \nu, v \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \tag{1.41}$$

Si de plus $E \times \nu \in L^2(\Gamma)^3$, on aurra :

$$\int_\Omega \operatorname{rot} E \cdot v\, d\, x = \int_\Omega \operatorname{rot} v \cdot E - \int_\Gamma E \times \nu \cdot v\, d\, \sigma. \tag{1.42}$$

1.2.2 Equations de la mécanique en élasticité linéaire

Soit $T > 0$. On considére un solide occupant à un instant $t \in]0, T[$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ un volume Ω, supposé un ouvert, borné et à frontière $\partial\Omega = \Gamma$. On suppose que ce solide n' est soumis qu à des forces de surface de densité $g = (g_i)_{i=1,2,3}$ (où $g_i : \Gamma \times]0, T[\to \mathbb{R}$). Sous l'effet de ces forces, le solide se déplace. On note $u(M, t) = (u_i)_{i=1,2,3}$ le vecteur déplacement au point $M \in \Omega$ à l'instant t avec $u_i : \Omega \times]0, T[\to \mathbb{R}$.

Loi de comportement

On désigne par $e(u) = (e_{ij}(u))_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur de Green des déformations linéarisé associé au champ de déplacement $u = u_i$ où

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}), \quad 1 \leq i,j \leq 3. \tag{1.43}$$

On note $\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur symétrique des contraintes. La loi de comportement du materiau que l'on considére dans ce travail, est celle de l'elasticité linéaire anisotrope qui se traduit par

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl} e_{kl}(u). \tag{1.44}$$

Les coefficients a_{ijkl} sont supposés de classe $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et vérifiant la condition de symetrie

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl}, \tag{1.45}$$

et la condition d'ellipticité : il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a_{ijkl}\lambda_{ij}\lambda_{kl} \geq \alpha\lambda_{ij}\lambda_{ij} \tag{1.46}$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout tenseur symétrique $\lambda = (\lambda_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$.
Le problème de l'élasticité linéaire est : trouver un champ de déplacement u, vérifiant le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \text{div}\sigma(u) = 0, \\ \sigma(u)\cdot\nu = g, \\ u(0) = u_0, \partial_t u = u_1. \end{cases}$$

Inégalité de Korn ([8])

Il existe une constante positive C_1 (dépendant seulement du diamètre de Ω) telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)^3$

$$\sum_{i,j=1}^{3} \|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \sum_{i,j=1}^{3} \|e_{ij}(u)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.47}$$

Inégalité de Poincarré ([8])

Il existe une constante positive C_2 (dépendant seulement du diamètre de Ω) telle que pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \sum_{i=1}^{3} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.48}$$

Inégalité de Jensen ([9, 31])

Lemme 1.2.1. *soit $f \in L^1(I)$ (où $I \subset \mathbb{R}$ est une partie mesurable et $long(I) := \int_I dx < \infty$) et tel qu'il existe a et b, pour lesquels $a < f(x) < b$ pour tout $x \in I$(les cas $a = -\infty$ et $b = +\infty$ ne sont pas exlus). Soit φ une fonction convexe sur $]a, b[$, alors :*

$$\varphi\left(\frac{1}{long(I)}\int_I f(x)\,d\,x\right) \leq \frac{1}{(long(I)}\int_I (\varphi \circ f(x))\,d\,x. \tag{1.49}$$

Remarque 1.2.1. *On sait que φ est concave si et seulement si $(-\varphi)$ est convexe. L'inégalité de Jensen pour les fonctions concaves φ est alors :*

$$\frac{1}{long(I)}\int_I \varphi(f(x))\,d\,x \leq \varphi\left(\frac{1}{long(I)}\int_I f(x)\,d\,x\right). \tag{1.50}$$

On a le lemme de densité suivant :

Lemme 1.2.2. *On considére l'espace*

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)^3, \mathrm{div}\sigma(u) \in L^2(\Omega)^3\}, \tag{1.51}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{V}(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\mathrm{div}\sigma(u)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.52}$$

$D(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{V}(\Omega)$.

Preuve. *Soit $u \in \mathcal{V}(\Omega)$. Posons $f = u - \mathrm{div}\sigma(u)$. On a $f \in L^2(\Omega)^3$ car $u \in H^1(\Omega)^3 \subset L^2(\Omega)^3$ et $\mathrm{div}\sigma(u) \in L^2(\Omega)^3$.*
Comme $D(\overline{\Omega})^3$ est dense dans $L^2(\Omega)^3$ et $D(\Gamma)^3$ est dense dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$, il existe alors deux suites $\{f_k\}$ et $\{g_k\}$ telles que : pour tout $f \in D(\overline{\Omega})^3$ et $g \in D(\Gamma)^3$ avec

$$f_k \to f \ \ dans\ L^2(\Omega)^3$$

et

$$g_k \to u|_\Gamma \ \ dans\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3.$$

Soit u_k la solution du problème

$$\begin{cases} u_k - \mathrm{div}\sigma(u_k) = f_k \quad dans\ \Omega \\ \\ \qquad\qquad u_k|_\Gamma = g_k \quad sur\ \Gamma \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} (u_k - u) - (\mathrm{div}\sigma(u_k) - u) = f_k - f \quad dans\ \Omega \\ \\ \qquad\qquad\qquad u_k - u|_\Gamma = g_k - u \quad sur\ \Gamma. \end{cases}$$

On a alors

$$\|u_k - u\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C\left[\|f_k - f\|_{L^2(\Omega)^3} + \|g_k - u|_\Gamma\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}\right].$$

D'où $u_k \to u$ *dans* $H^1(\Omega)^3$. *Par conséquent* $\mathrm{div}\sigma(u_k) \to \mathrm{div}\sigma(u)$ *dans* $L^2(\Omega)^3$ *et* $u_k \to u$ *dans* $\mathcal{V}(\Omega)$.

1.2.3 Projection orthogonale

Théorème 1.2.2. *Soit* K *un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *réel, soit* $x \in \mathcal{H}$, *alors il existe un élément unique* $x_0 \in K$ *tel que*

$$\|x - x_0\|_{\mathcal{H}} = \inf_{\zeta \in K} \|x - \zeta\|_{\mathcal{H}}. \tag{1.53}$$

L'élément $x_0 = Px$, x_0 *est la projection de* x *sur* K.

Proposition 1.2.1. *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert,* V *un sous espace fermé sur* $\mathcal{H}$ *et* $u \in \mathcal{H}$. *Alors il existe un unique* $u_0 \in V$ *tel que*

$$(u - u_0, \varphi)_{\mathcal{H}} = 0 \text{ pour tout } \varphi \in V, \tag{1.54}$$

qu'on note $u_0 = Pu$. *on a* $P \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, V), V = P(\mathcal{H})$.

1.2.4 Problèmes variationnels

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ et soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme biliniéaire continue sur $\mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{H}'$ ($\mathcal{H}'$ le dual de $\mathcal{H}$).
La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est dite continue sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, s'il existe $M \geq 0$ telle que pour tout u, $v \in \mathcal{H}$

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_{\mathcal{H}} \cdot \|v\|_{\mathcal{H}},$$

et elle est dite coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que : pour tout $v \in \mathcal{H}$

$$|a(v,v)| \geq \varphi\|v\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Lemme 1.2.3. *(Lax-Milgram) ([5])*
Soit $a(\cdot,\cdot)$ *une forme bilinéaire continue et coercive sur* $\mathcal{H}$. *Alors pour tout* $f \in \mathcal{H}'$, *il existe un unique* $u \in \mathcal{H}$ *tel que : pour tout* $v \in \mathcal{H}$ *:*

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}},$$

où le crochet $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}}$ *désigne la dualité entre* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$. *Si de plus, la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :*

$$u \in \mathcal{H} \text{ et } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, v\rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}} = \min_{v\in\mathcal{H}}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}}\right\}.$$

Ensemble résolvant d'un opérateur linéaire non borné

Définition 1.2.2.

$$\rho(A) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } A - \lambda I : D(A) \to R(A - \lambda I) \text{ est surjective,} \quad (a) \\ \\ \|v\|_{\mathcal{H}} \leq c\|Av - \lambda v\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in D(A) \text{ et} \quad (b) \\ \\ R(A - \lambda I) \text{ dense dans } \mathcal{H} \quad (c) \end{array} \right\}$$

Spectre et valeurs propres d'un opérateur linéaire non borné

Définition 1.2.3. *On appelle spectre de l'opérateur A, l'ensemble noté $\sigma(A)$ défini par :*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A).$$

L'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant les conditions (a) et (c) est appelé spectre continu de l'opérateur A. On le notera $\sigma_c(A)$. L'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ existe mais n'est pas à domaine dense est appelé spectre résiduel de l'opérateur A et on le notera : $\sigma_\tau(A)$. Lorsque l'opérateur $A - \lambda I : D(A) \to R(A - \lambda I)$ n'est pas injectif, on dira que λ est une valeur propre de A et on écrira $\lambda \in VP(A)$. Il existe alors $u \in D(A)$ tel que : $u \neq 0$ et $A(u) = \lambda u$. Et on appellera espace propre associé à λ, l'espace défini par $N(A - \lambda I) = \{u \in A \text{ tel que } Au - \lambda u = 0\}$.

1.2.5 Rappels sur les opérateurs non linéaires

Définition 1.2.4. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel, muni du produit scalaire $(.,.)_{\mathcal{H}}$ et Soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur non linéaire. Alors :*

i) *A est monotone si :*

$$(A(u - v), u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in D(A). \tag{1.55}$$

ii) *A est maximal monotone si A est monotone et $R(I + A) = \mathcal{H}$.*

Définition 1.2.5. *On dit que $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est hémi-continu si, pour tous u, v et w dans $\mathcal{H}$, l'application*

$$t \to (A(u + tv), w)_{\mathcal{H}}$$

est continu sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.6. *On dit que $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est coercif si*

$$\frac{(Au, u)_{\mathcal{H}}}{\|u\|_{\mathcal{H}}} \to +\infty \quad \text{lorsque} \quad \|u\|_{\mathcal{H}} \to +\infty.$$

Définition 1.2.7. *On dit que $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ est borné si pour toute partie S dans $\mathcal{H}$, l'image $A(S)$ est bornée dans $\mathcal{H}'$.*

Théorème 1.2.3. *([31]) Soit $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur non linéaire. Si A est monotone, hémi-continu, borné et coercif, alors A est surjectif.*

Théorème 1.2.4. *([16, 31]) Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une unique solution (au sens faible)*

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$$

telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \quad \textit{dans } [0, +\infty[\\ \\ u(0) = u_0, \quad \textit{donnée initiale.} \end{cases} \tag{1.56}$$

De plus, si $v_0 \in \overline{D(A)}$ et v est la solution correspondante de ((1.56)), alors la fonction

$$t \to \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{H}},$$

est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Si $u_0 \in D(A)$, alors la solution (dite forte)

$$u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}),$$

et on a la fonction $t \to \|Au(t)\|_{\mathcal{H}}$ est définie partout et est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 1.2.2. *Si A est un opérateur linéaire, alors $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$.*

2

Solution du problème non linéaire

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière lipschitzienne Γ. On considère le système non stationnaire de l'élasto-magnétisme, avec des conditions au bord non linéaires

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \mathrm{div}\sigma(u) + \xi \,\mathrm{rot}\, E = 0, & \text{dans } Q := \Omega\times]0,\infty[\\ \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot}\, H - \xi\,\mathrm{rot}\,\partial_t u = 0, & \text{dans } Q \\ \mu\,\partial_t H + \mathrm{rot}\, E = 0, & \text{dans } Q \\ \mathrm{div}(\varepsilon\, E) = \mathrm{div}(\mu\, H) = 0, & \text{dans } Q \\ H\times\nu + \xi\,\partial_t u\times\nu + g_1(E\times\nu)\times\nu = 0, & \text{sur } \Sigma := \Gamma\times]0,\infty[\\ \sigma(u)\cdot\nu + A\,u + g_2(\partial_t u) = 0, & \text{sur } \Sigma \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ce système modélise le couplage entre le système de Maxwell et le système de l'élasticité, dans lequel $E(x,t)$, $H(x,t)$ et $u(x,t)$ désignent respectivement le champ électrique, le champ magnétique et le champ déplacement en chaque point x à l'instant t. Les fonctions ε et μ représentent respectivement la permitivité électrique et la perméabilité magnétique et sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et appartiennent à $L^\infty(\Omega)$.

Le tenseur $\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))_{i,j=1}^3$ est le tenseur des contraintes défini par :

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}e_{kl}(u),$$

où, ici et dans la suite, la convention de sommation d'Enstein est adaptée. Le tenseur $e(u) = (e_{ij}(u)_{i,j=1}^3$ est le tenseur des déformations linéarisé défini par :

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}).$$

$a = (a_{ijkl})_{i,j=1,2,3}$, ses coefficients $(a_{ijkl})_{i,j=1,2,3}$ sont dans $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et vérifient la condition de symétrie :

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

et la condition d'ellipticité : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout tenseur symétrique (λ_{ij})

$$a_{ijkl}\lambda_{ij}\lambda_{kl} \geq \alpha\, \lambda_{i,j}\lambda_{i,j}. \tag{2.2}$$

$\text{div}\sigma(u)$ est le champ de vecteurs défini par :

$$\text{div}\sigma(u) = (\partial_j\sigma_{ij}(u))_{i=1}^3.$$

Le vecteur ν désigne le vecteur normal exterieur à Γ. Enfin A est une constante positive et ξ est le paramètre de couplage entre le système de Maxwell et le système de l'élasticité. On notera que, pour $\xi = 0$ le système (2.1) se scinde en deux systèmes indépendants : le système de Maxwell et le système de l'élasticité.

2.1 Existence, unicité et régularité des solutions

ε et μ étant dans $L^\infty(\Omega)$, il existe $\varepsilon_0 \geq 0$ et il existe $\mu_0 \geq 0$ tels que pour presque tout $x \in \Omega$:

$$\varepsilon(x) \leq \varepsilon_0 \text{ et } \mu(x) \leq \mu_0.$$

On va supposer dans toute la suite de ce travail, qu'il existe $\varepsilon_1 \geq 0$ et $\mu_1 \geq 0$ tels que pour presque tout $x \in \Omega$

$$\varepsilon(x) \geq \varepsilon_1 > 0 \text{ et } \mu(x) \geq \mu_1 > 0.$$

Introduisons maintenant les espaces de Hilbert suivants :

$$J(\Omega, \varepsilon) = \{E \in L^2(\Omega)^3 | \text{div}(\varepsilon\, E) = 0 \;\text{ dans } \Omega\}, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{H} = H^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3 \times J(\Omega, \varepsilon) \times J(\Omega, \mu), \tag{2.4}$$

munis respectivement des produits scalaires suivants :

$$(E, E')_\varepsilon = \int_\Omega \varepsilon(x)\, E(x)\, E'(x)\, dx \qquad \forall E, E' \in J(\Omega, \varepsilon),$$

$$((u, v, E, H), (u', v', E', H'))_{\mathcal{H}} = (u, u')_1 + (v, v')_0 + (E, E')_\varepsilon + (H, H')_\mu$$

$$\forall (u, v, E, H), (u', v', E', H') \in \mathcal{H},$$

$$(v, v')_0 = \int_\Omega v(x)\, v'(x)\, dx,$$

et

$$(u, u')_1 = \int_\Omega \sigma(u)(x) : e(u')(x)\, dx + A \int_\Gamma u(x)\, u'(x)\, dx$$

avec

$$\sigma(u) : e(u') = \sigma_{ij}(u) e_{ij}(u').$$

Remarque 2.1.1. *On a* $\|u\|_* = (u, u)_1^{\frac{1}{2}} = \int_\Omega \sigma(u)(x) : e(u)(x)\, d\,x + A \int_\Gamma |u(x)|^2 d\,\sigma$ *est une norme sur* $H^1(\Omega)^3$*, équivalente à la norme usuelle de* $H^1(\Omega)^3$*.*

Lemme 2.1.1. *Soit*

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)^3 \,|\, \mathrm{div}\sigma(u) \in L^2(\Omega)^3\} \tag{2.5}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{V}} = \left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)^3} + \|\mathrm{div}\sigma(u)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

on peut définir une application continue de

$$\mathcal{V}(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$$
$$u \to \sigma(u) \cdot \nu|_\Gamma$$

et pour tout élément $w \in H^1(\Omega)^3$ *et tout élément* $u \in \mathcal{V}(\Omega)$ *on a :*

$$\langle \sigma(u) \cdot \nu, w \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \int_\Omega (\sigma(u) : e(w) + w\, \mathrm{div}\sigma(u)) dx.$$

Preuve. *Soit* $w \in D(\overline{\Omega})$*. L'application* $u \to \gamma_0 u$ *est linéaire continue et surjective de* $H^1(\Omega)^3 \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$*. D'après le théorème (1.1.4), pour tout* $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$*, il existe un relèvement* $u \in H^1(\Omega)^3$ *tel que :*

$$\varphi = \gamma_0 u = u|_\Gamma$$

et il existe une constante $C > 0$*, pour laquelle on a*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C \,\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}.$$

On définit ainsi un relèvement continu R par

$$\begin{aligned} R : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 &\to H^1(\Omega)^3 \\ \varphi &\to R\varphi = u. \end{aligned}$$

On remarque que $R\varphi|_\Gamma = \varphi$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} T_w :\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\to T_\omega(\varphi) = \int_\Gamma ((\sigma(w)\cdot\nu)\cdot(R\varphi) d\,\sigma. \end{aligned}$$

Montrons d'abort que $T_w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$. En effet la formule de Green nous donne :

$$\begin{aligned} |T_\omega(\varphi)| &= \left|\int_\Gamma ((\sigma(w)\cdot\nu)\cdot(R\varphi)d\sigma\right| \\ &= \left|\int_\Omega (\sigma(w) : e(R\varphi) + (R\varphi)\mathrm{div}\sigma(w))\,dx\right| \end{aligned}$$

et en appliquant Cauchy Schwarz, l'inégalité de Korn, on trouve :

$$\begin{aligned} |T_\omega(\varphi)| &\leq \|\sigma(w)\|_{L^2(\Omega)^9}\|e(R\varphi)\|_{L^2(\Omega)^9} + \|R\varphi\|_{L^2(\Omega)^3}\|\mathrm{div}\sigma(w)\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &\leq C\|w\|_{H^1(\Omega)^3}\|e(R\varphi)\|_{L^2(\Omega)^9} + \|R\varphi\|_{L^2(\Omega)^3}\|\mathrm{div}\sigma(w)\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &\leq C\left(\|w\|^2_{H^1(\Omega)^3} + \|\mathrm{div}\sigma(w)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|e(R\varphi)\|^2_{L^2(\Omega)^9} + \|R\varphi\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\|w\|_{\mathcal{V}(\Omega)}\|R\varphi\|_{H^1(\Omega)^3} \\ &\leq C\|w\|_{\mathcal{V}(\Omega)}\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \end{aligned}$$

on a donc

$$|T_w(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3},$$

et par suite

$$T_w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3.$$

Donc T est continue sur $D(\overline{\Omega})$ pour la norme de $\mathcal{V}(\Omega)$. Comme $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{V}(\Omega)$, alors T_w se prolonge en une application linéaire, continue de $\mathcal{V}(\Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ et on a

$$\begin{aligned} \langle T_w, \varphi\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \langle \sigma(w)\cdot\nu, R\varphi\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\ &= \int_\Omega (\sigma(w) : e(R\varphi) + (R\varphi)\mathrm{div}\sigma(w))\,dx \\ &\forall w \in \mathcal{V}(\Omega)\ ,\ \forall\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3. \end{aligned}$$

Définissons maintenant l'opérateur non linéaire $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ comme suit :

$$\begin{aligned} D(A) = \{(u, v, E, H) \in \mathcal{H} \mid \operatorname{div}\sigma(u), \operatorname{rot} E, \operatorname{rot} H \in L^2(\Omega)^3; \qquad (2.7) \\ v \in H^1(\Omega)^3; E \times \nu, H \times \nu \in L^2(\Gamma)^3 \text{ satisfont} \\ H \times \nu + \xi\, v \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu \;=\; 0 \text{ sur } \Gamma, \qquad (2.8) \\ \sigma(u) \cdot \nu + A\, u + g_2(v) \;=\; 0 \text{ sur } \Gamma\}. \qquad (2.9) \end{aligned}$$

Pour tout $(u, v, E, H) \in D(A)$, on pose

$$A(u, v, E, H) = (-v, -\operatorname{div}\sigma(u) + \xi \operatorname{rot} E, -\varepsilon^{-1}(\operatorname{rot} H + \xi \operatorname{rot} v), \mu^{-1}\operatorname{rot} E).$$

Pour donner un sens aux conditions au bord (2.8) et (2.9), on suppose que g_i, $i = 1, 2$ vérifie : il existe une constante positive M telle que :

$$|g_i(E)| \le M(1 + |E|), \quad \forall E \in \mathbb{R}^3. \tag{2.10}$$

Remarque 2.1.2. *Soit $u \in \mathcal{V}(\Omega)$, alors d'après le lemme 2.1.1 on peut définir $\sigma(u) \cdot \nu$ comme un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$, et on a la formule de Green suivante :*

$$\langle \sigma(u) \cdot \nu, w \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_\Omega (\sigma(u) : e(w) + w \operatorname{div}\sigma(u))\, dx \quad \forall w \in H^1(\Omega)^3.$$

Grace à $u, v \in H^1(\Omega)^3$ et la propriété (2.10), on peut définir $A\, u + g_2(v)$ comme un élément de $L^2(\Gamma)^3$. La condition au bord (2.9) a un sens dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ et on a $\sigma(u) \cdot \nu = -A\, u - g_2(v) \in L^2(\Gamma)^3$.

Le théorème suivant nous donne un résultat de densité, qui nous permettra des intégrations par parties

Théorème 2.1.1. *([3, 28]) Soit W l'espace de Hilbert défini par*

$$W = \{E \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{rot} E \in L^2(\Omega)^3 \text{ et } E \times \nu \in L^2(\Gamma)^3\}, \tag{2.11}$$

muni de la norme

$$\|E\|_W^2 = \int_\Omega (|E|^2 + |\operatorname{rot} E|^2) dx + \int_\Gamma |E \times \nu|^2\, d\sigma, \tag{2.12}$$

alors $H^1(\Omega)^3$ est dense dans W.

Lemme 2.1.2. *([28]) Soit W_0 l'espace défini par*

$$W_0 = \{(E, H) \in J(\Omega, \varepsilon) \times J(\Omega, \mu) | \operatorname{rot} E, \operatorname{rot} H \in L^2(\Omega)^3;$$
$$E \times \nu, H \times \nu \in L^2(\Gamma)^3 \text{ satisfont } H \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Alors pour tout $(E, H) \in W_0$, on a

$$\int_\Omega (\operatorname{rot} E \cdot H - \operatorname{rot} H \cdot E)\, dx = \int_\Gamma H \times \nu \cdot E\, d\sigma. \tag{2.13}$$

Preuve. *Pour* $(E,H) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3$, *grace à la formule de Green on obtient*

$$\int_\Omega (\operatorname{rot} E \cdot H - \operatorname{rot} H \cdot E)\, dx = \int_\Gamma H \times \nu \cdot E\, d\sigma$$

par densité de $H^1(\Omega)^3$ *dans* W *(voir théorème 2.1.1), la formule* (2.13) *reste vraie dans* $W \times W$, *d'où le lemme puisque* $W_0 \in W \times W$.

Remarque 2.1.3. *Pour* $(u,v,E,H) \in D(A)$, *on a* $H \times \nu \in L^2(\Gamma)^3$ *et on a aussi* $g_1(E \times \nu) \times \nu \in L^2(\Gamma)^3$, *par coséquent la condition au bord* (2.8) *est une égalité dans* $L^2(\Gamma)^3$.

Le système (2.1) s'écrit formellement

$$\begin{cases} \partial_t U + AU = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.14}$$

avec $U = (u,v,E,H)$, $U_0 = (u_0,u_1,E_0,H_0)$.

On va montrer que le problème (2.14) admet une solution unique, en utilisant la théorie des opérateurs non linéaires.

2.1.1 Résultat de densité

Lemme 2.1.3. *([26]) Soit* $J^1_\tau(\Omega,\varepsilon)$ *l'espace défini par*

$$J^1_\tau(\Omega,\varepsilon) = \{E \in J(\Omega,\varepsilon) | \operatorname{rot} E \in L^2(\Omega)^3 \text{ et } E \times \nu = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \tag{2.15}$$

alors $J^1_\tau(\Omega,\varepsilon)$ *est dense dans* $J(\Omega,\varepsilon)$.

Preuve. *Soit* P_ε *la projection orthogonale sur* $J(\Omega,\varepsilon)$ *dans* $L^2(\Omega)^3$, *muni du produit scalaire* $(.,.)_\varepsilon$

$$P_\varepsilon : L^2(\Omega)^3 \to J(\Omega,\varepsilon),$$

P_ε *est une application continue et surjective.*
$D(\Omega)^3$ *dense dans* $L^2(\Omega)^3 \Leftrightarrow P_\varepsilon D(\Omega)^3$ *dense dans* $J(\Omega,\varepsilon)$.
Pour avoir le résultat de densité de $J^1_\tau(\Omega,\varepsilon)$ *dans* $J(\Omega,\varepsilon)$, *il suffit d'établir l'inclusion suivante :*

$$P_\varepsilon D(\Omega)^3 \subset J^1_\tau(\Omega,\varepsilon)$$

et pour cela, il suffit de montrer que

$$\begin{cases} \operatorname{rot} P_\varepsilon \chi = \operatorname{rot} \chi & \textit{dans } \Omega \\ P_\varepsilon \chi \times \nu = \chi \times \nu = 0 & \textit{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comme $(\chi - P_\varepsilon \chi) \in J(\Omega, \varepsilon)^\perp$, *alors*

$$\langle \varepsilon(\chi - P_\varepsilon \chi), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)^3} = 0, \quad \forall \varphi \in J(\Omega, \varepsilon)$$

par suite

$$\int_\Omega \varepsilon\, \varphi\, \chi\, dx = \int_\Omega \varepsilon\, \varphi\, (P_\varepsilon \chi)\, dx, \quad \forall \varphi \in J(\Omega, \varepsilon).$$

Pour $\chi \in D(\Omega)^3$, *soit* $\varphi \in D(\Omega)^3$ *on a*

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{rot} P_\varepsilon \chi, \varphi \rangle_{D',D} &= \int_\Omega (P_\varepsilon \chi) \operatorname{rot} \varphi dx \\ &= \int_\Omega \varepsilon\, \chi\, (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \varphi)\, dx = \langle \operatorname{rot} \chi, \varphi \rangle_{D',D} \quad \forall \varphi \in D(\Omega)^3, \end{aligned}$$

car $(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \varphi) \in J(\Omega, \varepsilon)$,

d'où $\operatorname{rot} P_\varepsilon \chi = \operatorname{rot} \chi$ *dans* $D'(\Omega)^3$ *et* $\operatorname{rot} P_\varepsilon \chi = \operatorname{rot} \chi$ *dans* $L^2(\Omega)^3$.

Soit $\varphi \in D(\overline{\Omega})^3$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varphi \operatorname{rot} (P_\varepsilon \chi)\, dx = \int_\Omega P_\varepsilon \chi \operatorname{rot} \varphi d\, x - \int_\Gamma (P_\varepsilon \chi \times \nu) \varphi\, d\, \sigma \\ &= \int_\Omega \varphi \operatorname{rot} \chi\, dx = \int_\Omega \chi \operatorname{rot} \varphi d\, x - \int_\Gamma (\chi \times \nu) \varphi\, d\sigma \\ &\qquad \Rightarrow \int_\Gamma (P_\varepsilon \chi \times \nu) \varphi\, d\sigma = \int_\Gamma (\chi \times \nu) \varphi\, d\sigma, \quad \forall \varphi \in D(\overline{\Omega})^3, \end{aligned}$$

d'où $P_\varepsilon \chi \times \nu = \chi \times \nu = 0$ *sur* Γ,
finalement $J^1_\tau(\Omega, \varepsilon)$ *est dense dans* $J(\Omega, \varepsilon)$.

Lemme 2.1.4. *Soit* $\widetilde{H}^1(\Omega)^3$ *l'espace défini par*

$$\widetilde{H}^1(\Omega)^3 = \{u \in H^1(\Omega)^3 |\ \operatorname{div} \sigma(u) \in L^2(\Omega)^3 | \sigma(u) \cdot \nu + A\, u = 0 \textit{ sur } \Gamma\}, \tag{2.16}$$

muni de de la norme

$$\|u\|_*^2 = \int_\Omega \sigma(u) : e(u)\, dx + A \int_\Gamma |u|^2\, d\sigma,$$

alors $\widetilde{H}^1(\Omega)^3$ *est dense dans* $H^1(\Omega)^3$.

Preuve. *Soit* $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)^{3\perp}$, *on a :*

$$\int_\Omega \sigma(u) : e(v)\,dx + A\int_\Gamma u\cdot v\,d\sigma = 0 \quad \forall v \in \widetilde{H}^1(\Omega)^3,$$

d'après le lemme 2.1.1 et la remarque 2.1.2 on obtient :

$$-\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(v)\cdot u\,dx + \langle \sigma(v)\cdot\nu, u\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + A\int_\Gamma u\cdot v\,d\sigma = 0 \quad \forall v \in \widetilde{H}^1(\Omega)^3,$$

$$\textit{c'est à dire} \quad -\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(v)\cdot u\,dx + \langle \sigma(v)\cdot\nu + A\,v, u\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall v \in \widetilde{H}^1(\Omega)^3,$$

comme $\sigma(v)\cdot\nu + A\,v = 0$ *sur* Γ, *alors*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(v)\cdot u\,dx = 0 \quad \forall v \in \widetilde{H}^1(\Omega)^3.$$

Pour montrer que $u = 0$, *il suffit de montrer que l'application*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}^1(\Omega)^3 & \longrightarrow & L^2(\Omega)^3 \\ v & \longrightarrow & \mathrm{div}\sigma(v) \end{array}$$

est surjective, et pour cela il suffit de résoudre le problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\sigma(v) = f & \textit{dans } L^2(\Omega)^3 \\ \sigma(v)\cdot\nu + A\,v = 0 & \textit{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2.17}$$

dont la formulation variationnelle est

$$\int_\Omega \sigma(v) : e(w)\,dx + A\int_\Gamma v\cdot w\,d\sigma = \int_\Omega f\,w\,dx \quad \forall w \in H^1(\Omega)^3. \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} a(v,w) = & \int_\Omega \sigma(v) : e(w)\,dx + A\int_\Gamma v\cdot w\,d\sigma \\ L(w) = & \int_\Omega f\,w\,dx \end{cases}$$

- *a bilinéaire*
- *Montrons que* $a(\cdot,\cdot)$ *est continue sur* $H^1(\Omega)^3$. *Soient* v *et* $w \in H^1(\Omega)^3$, *on a*

$$|a(v,w)| = \left|\int_\Omega \sigma(v) : e(w)\,dx + A\int_\Gamma v\cdot w\,d\sigma\right|$$

$$\leq C\|v\|_{H^1(\Omega)^3}\|w\|_{H^1(\Omega)^3},$$

d'où la continuité de $a(\cdot,\cdot)$.

- *Montrons que* $a(\cdot,\cdot)$ *est coercive sur* $H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3$.

Soit $w \in H^1(\Omega)^3$, *on a*

$$a(w,w) = \int_\Omega \sigma(w) : e(w)\,dx + A\int_\Gamma |w|^2\,d\sigma$$

$$= \|w\|^2_{H^1(\Omega)^3},$$

d'où la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.
• $L(\cdot)$ *est linéaire sur* $H^1(\Omega)^3$.
• $L(\cdot)$ *est continue sur* $H^1(\Omega)^3$. *D'après le lemme de Lax Milgram, le problème* (2.18) *admet une solution unique* $v \in H^1(\Omega)^3$,
ce qui prouve que l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{H}^1(\Omega)^3 &\longrightarrow L^2(\Omega)^3 \\ v \quad &\longrightarrow \mathrm{div}\sigma(v) \end{aligned}$$

est surjective, d'où $u = 0$ *et* $\widetilde{H}^1(\Omega)^3$ *est dense dans* $H^1(\Omega)^3$.

Lemme 2.1.5. *Pour* $g_1(0) = g_2(0) = 0$, *le domaine de l'opérateur* A *est dense dans* $\mathcal{H}$.

Preuve. *Pour montrer que* $D(A)$ *est dense dans* $\mathcal{H}$, *il suffit d'établir l'inclusion suivante :*

$$D_0 = \widetilde{H}^1(\Omega)^3 \times D(\Omega)^3 \times P_\varepsilon\, D(\Omega)^3 \times P_\mu\, D(\Omega)^3 \subset D(A)$$

car D_0 *est dense dans* $\mathcal{H}$ *et pour cela, on prend un élément* $(u, v, E, H) \in D_0$, *on montre que* $(u, v, E, H) \in D(A)$

$$(u, v, E, H) \in D_0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} u \in \widetilde{H}^1(\Omega)^3 \\ v \in D(\Omega)^3 \\ E \in P_\varepsilon\, D(\Omega)^3 \\ H \in P_\mu\, D(\Omega)^3 \end{array} \right.$$

avec $E = P_\varepsilon\, \chi$ *et* $H = P_\mu\, \theta$ *et on a*

$$E = P_\varepsilon\, \chi\ \in P_\varepsilon\, D(\Omega)^3 \Rightarrow \mathrm{rot}(P_\varepsilon\, \chi) = \mathrm{rot}\, \chi\ \in L^2(\Omega)^3$$

$$H = P_\mu\, \theta \in\ D(\Omega)^3 \Rightarrow \mathrm{rot}(P_\mu\, \theta) = \mathrm{rot}\, \theta \in L^2(\Omega)^3,$$

et puisque $P_\varepsilon\, \chi \times \nu = \chi \times \nu = 0$ *et* $g_1(0) = g_2(0) = 0$, *alors* $(u, v, E, H) \in D(A)$ *donc* $D_0 \subset D(A)$,
finalement $D(A)$ *est dense dans* $\mathcal{H}$.

2.1.2 Théorème d'existence, unicité et régulirité des solutions

Lemme 2.1.6. *On suppose que l'application* $g_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(i = 1, 2)$ *est continue et vérifiant la condition* (2.10). *De plus on suppose que :*

$$(g_i(E) - g_i(F))(E - F) \ \geq\ 0 \ \ \forall E, F \in \mathbb{R}^3 \tag{2.19}$$

$$g_i(0) \ =\ 0 \tag{2.20}$$

$$g_i(E)E \ \geq\ m|E|^2 \ \ \forall E \in \mathbb{R}^3, |E| \geq 1 \tag{2.21}$$

pour une constante positive m, *alors* A *est un opérateur maximal monotone.*

Preuve. $\bullet A$ ***monotone***
L'opérateur A est monotone si et seulement si

$$(AU - AV, U - V)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall U, V \in D(A).$$

Soit $U = (u, v, E, H)$, $V = (u', v', E', H') \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned}
&(A(u, v, E, H) - A(u', v', E', H'), (u, v, E, H) - (u', v', E', H'))_{\mathcal{H}} \\
&= ((-v + v', -\mathrm{div}\sigma(u) + \mathrm{div}\sigma(u') + \xi \mathrm{rot}\, E - \xi \mathrm{rot}\, E', \\
&- \varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}\, H + \xi \mathrm{rot}\, v) + \varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}\, H' + \xi \mathrm{rot}\, v'), \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E - \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E'), \\
&(u, v, E, H) - (u', v', E', H'))_{\mathcal{H}} \quad ; \ \forall (u, v, E, H), (u', v', E', H') \in D(A),
\end{aligned}$$

d'après la définition du produit scalaire dans $\mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned}
&(A(u, v, E, H) - A(u', v', E', H'), (u, v, E, H) - (u', v', E', H'))_{\mathcal{H}} \\
&= (-v + v', u - u')_1 + (-\mathrm{div}\sigma(u - u') + +\xi \mathrm{rot}(E - E'), v - v')_0 \\
&+ (\varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}(H - H') - \xi \mathrm{rot}(v - v'), E - E')_{\varepsilon} \\
&+ (\mu^{-1}\mathrm{rot}(E - E'), H - H')_{\mu} \quad ; \ \forall (u, v, E, H), (u', v', E', H') \in D(A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-v + v', u - u')_1 - \int_{\Omega} (\mathrm{div}\sigma(u - u') - \xi \mathrm{rot}(E - E'))(v - v')\, d\,x \\
&- \int_{\Omega} (\mathrm{rot}(H - H') + \xi \mathrm{rot}(v - v'))(E - E')\, d\,x \\
&+ \int_{\Omega} \mathrm{rot}(E - E')(H - H')\, dx \quad ; \ \forall (u, v, E, H), (u', v', E', H') \in D(A).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1.2 et la remarque 2.1.2 on aura

$$\begin{aligned}
&(A(u, v, E, H) - A(u', v', E', H'), (u, v, E, H) - (u', v', E', H'))_{\mathcal{H}} = \\
&(-v + v', u - u')_1 + \int_{\Omega} (\sigma(u - u') : e(v - v')\, dx - \int_{\Gamma} \sigma(u - u') \cdot \nu\, (v - v')\, d\sigma \\
&+ \int_{\Gamma} (H - H') \times \nu \cdot (E - E')\, d\sigma + \xi \int_{\Omega} \mathrm{rot}(E - E')(v - v')\, dx - \\
&\xi \int_{\Omega} \mathrm{rot}(v - v')(E - E')\, dx \ ; \ \forall (u, v, E, H), (u', v', E', H') \in D(A).
\end{aligned}$$

En utilisant la formulation de Green (1.41) *et la définition du produit scalaire* $(.,.)_1$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
&(A(u, v, E, H) - A(u', v', E', H'), (u, v, E, H) - (u', v', E', H'))_{\mathcal{H}} = \\
&- A \int_{\Gamma} (u - u')(v - v')\, d\sigma - \int_{\Gamma} \sigma(u - u') \cdot \nu\, (v - v')\, d\sigma \\
&+ \xi \int_{\Gamma} (v - v') \times \nu(E - E')\, d\sigma \\
&+ \int_{\Gamma} (H - H') \times \nu \cdot (E - E')\, d\sigma \ ; \ \forall (u, v, E, H), (u', v', E', H') \in D(A),
\end{aligned}$$

d'aprés les conditions (2.8) *et* (2.9), *on a*

$$g_1(E \times \nu) \times \nu = -H \times \nu - \xi\, v \times \nu$$
$$g_1(E' \times \nu) \times \nu = -H' \times \nu - \xi\, v' \times \nu,$$

et

$$g_2(v) = -\sigma(u) \cdot \nu - Au$$
$$g_2(v') = -\sigma(u') \cdot \nu - Au'$$

alors

$$g_2(v) - g_2(v') = -\sigma(u - u') \cdot \nu - A(u - u')$$

et

$$(g_1(E \times \nu) - g_1(E' \times \nu)) \times \nu = -(H - H') \times \nu - \xi\,(v - v') \times \nu.$$

La condition de monotonie (2.19) *sur* g_1 *et* g_2 *nous permet de conclure que*

$$(A(u,v,E,H) - A(u',v',E',H'), (u,v,E,H) - (u',v',E',H'))_{\mathcal{H}} =$$

$$\int_\Gamma (g_1(E \times \nu) - g_1(E' \times \nu))(E \times \nu - E' \times \nu). + (g_2(v) - g_2(v'))(v - v')d\,\sigma \geq\ 0,$$

d'où, l' opérateur A *est monotone.*

•A ***maximal***

Soit $(f, g, F, G) \in \mathcal{H}$, *cherchons un élément* $(u, v, E, H) \in D(A)$ *vérifiant :*

$$(I + A)(u, v, E, H) = (f, g, F, G). \tag{2.22}$$

On a

$$(I + A)(u, v, E, H) = (u - v, v - \mathrm{div}\sigma(u) + \xi \mathrm{rot}\, E, E - \varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}\, H + \xi \mathrm{rot}\, v), H + \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E)$$

c'est à dire

$$u - v = f \tag{2.23}$$
$$v - \mathrm{div}\sigma(u) + \xi \mathrm{rot}\, E = g \tag{2.24}$$
$$E - \varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}\, H + \xi \mathrm{rot}\, v) = F \tag{2.25}$$
$$H + \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E = G \tag{2.26}$$

l'équation (2.23) *donne*

$$u = v + f, \tag{2.27}$$

et l'équation (2.26) *donne*

$$H = G - \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E, \tag{2.28}$$

en remplaçant u *dans* (2.24) *et* H *dans* (2.25), *on trouve*

$$\begin{cases} v - \mathrm{div}\sigma(v+f) + \xi \mathrm{rot}\, E = g \\ E - \varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}(G - \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E) + \xi\mathrm{rot}\, v) = F, \end{cases}$$

d'où

$$v - \mathrm{div}\sigma(v) + \xi\mathrm{rot}\, E = \mathrm{div}\sigma(f) + g \tag{2.29}$$

$$\varepsilon E + \mathrm{rot}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\, E) - \xi\mathrm{rot}\, v = \varepsilon F + \mathrm{rot}\, G. \tag{2.30}$$

Le système sur (v, E) *sera bien défini, en ajoutant des conditions au bord sur* v *et* E, *et en utilisant* (2.27) *et* (2.28) *dans* (2.8) *et* (2.9) *on aura*

$$\begin{gathered} \sigma(v+f)\cdot\nu + A(v+f) + g_2(v) = 0 \\ (G - \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E)\times\nu + \xi v\times\nu + g_1(E\times\nu)\times\nu = 0, \end{gathered}$$

alors

$$\sigma(v)\cdot\nu + Av + g_2(v) = -\sigma(f)\cdot\nu - Af \tag{2.31}$$

$$-(\mu^{-1}\mathrm{rot}\, E)\times\nu + \xi v\times\nu + g_1(E\times\nu)\times\nu = -G\times\nu \quad , \tag{2.32}$$

en multipliant (2.29) *par* $v' \in H^1(\Omega)^3$ *et* (2.30) *par* $E' \in W_\varepsilon$ *avec*

$$W_\varepsilon = \{E \in L^2(\Omega)^3 \,|\, \mathrm{rot}\, E \in L^2(\Omega)^3, \mathrm{div}(\varepsilon\, E) \in L^2(\Omega)^3 \text{ et } E\times\nu \in L^2(\Gamma)^3\}, \tag{2.33}$$

muni de la norme

$$\|E\|^2_{W_\varepsilon} = \int_\Omega (|E|^2 + |\mathrm{rot}\, E|^2 + |\mathrm{div}(\varepsilon\, E)|^2)d\,x + \int_\Gamma |E\times\nu|^2 d\,\sigma \tag{2.34}$$

et en utilisant les conditions au bord (2.31) *et* (2.32) *on obtient*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (v - \mathrm{div}\sigma(v) + \xi\mathrm{rot}\, E)\, v'\, d\,x + \int_\Omega (\varepsilon E + \mathrm{rot}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\, E) - \xi\mathrm{rot}\, v)E'\, d\,x \\ &= \int_\Omega (\mathrm{div}\sigma(f) + g)v' + \int_\Omega (\varepsilon F + \mathrm{rot}\, G)E'\, d\,x, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega v\cdot v'\,dx-\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(v)\cdot v'\,dx+\xi\int_\Omega \mathrm{rot}\,E\cdot v'\,dx$$
$$+\int_\Omega \varepsilon E\cdot E'\,dx+\int_\Omega \mathrm{rot}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,E)E'\,dx-\xi\int_\Omega \mathrm{rot}\,v\cdot E'\,dx$$
$$=\int_\Omega (\mathrm{div}\sigma(f)v'\,dx+\int_\Omega g\cdot v'\,dx+\int_\Omega \varepsilon F\cdot E'\,dx+\int_\Omega \mathrm{rot}\,G\cdot E'\,dx$$

en utilisant la formule de Green (1.42) *pour tout* $E\in W_\varepsilon$ *et pour tout* $v\in H^1(\Omega)^3$, *on aura*

$$\int_\Omega v\cdot v'\,dx+\int_\Omega \sigma(v):e(v')\,dx-\int_\Gamma \sigma(v)\cdot\nu\cdot v'\,d\sigma+\xi\int_\Omega \mathrm{rot}\,v'\cdot E\,dx$$
$$-\xi\int_\Gamma E\times\nu\cdot v'\,d\sigma+\int_\Omega \varepsilon E\cdot E'\,dx+\int_\Omega \mu^{-1}\mathrm{rot}\,E\cdot\mathrm{rot}\,E'\,dx$$
$$-\int_\Gamma (\mu^{-1}\mathrm{rot}\,E)\times\nu\cdot E'\,d\sigma-\xi\int_\Omega \mathrm{rot}\,v\cdot E'\,dx$$
$$=-\int_\Omega (\sigma(f):e(v')\,dx+\int_\Omega g\cdot v'\,dx+\int_\Omega \varepsilon F\cdot E'\,dx+\int_\Omega G\cdot\mathrm{rot}\,E'\,dx$$
$$-\int_\Gamma G\times\nu\cdot E'\,d\sigma+\int_\Gamma \sigma(f)\cdot\nu\cdot v'd\sigma,$$

alors

$$\int_\Omega \{v\cdot v'+\sigma(v):e(v')\}\,dx+\int_\Omega \{\varepsilon E\cdot E'+\mu^{-1}\mathrm{rot}\,E\cdot\mathrm{rot}\,E'\}\,dx$$
$$+\xi\int_\Omega \{\mathrm{rot}\,v'\cdot E-\mathrm{rot}\,v\cdot E'\}\,dx-\int_\Gamma \sigma(v)\cdot\nu\cdot v'\,d\sigma$$
$$-\xi\int_\Gamma E\times\nu\cdot v'\,d\sigma-\int_\Gamma (\mu^{-1}\mathrm{rot}\,E)\times\nu\cdot E'\,d\sigma$$
$$=-\int_\Omega (\sigma(f):e(v')\,dx+\int_\Omega g\cdot v'\,dx+\int_\Omega \varepsilon F\cdot E'\,dx+\int_\Omega G\cdot\mathrm{rot}\,E'\,dx$$
$$-\int_\Gamma G\times\nu\cdot E'\,d\sigma+\int_\Gamma \sigma(f)\cdot\nu\cdot v'd\sigma,$$

en utilisant les conditions au bord (2.31) *et* (2.32) *on obtient*

$$\int_\Omega \{v\cdot v'+\sigma(v):e(v')\}\,dx+\int_\Omega \{\varepsilon E\cdot E'+\mu^{-1}\mathrm{rot}\,E\cdot\mathrm{rot}\,E'\}\,dx$$
$$+\xi\int_\Omega \{\mathrm{rot}\,v'\cdot E-\mathrm{rot}\,v\cdot E'\}\,dx+A\int_\Gamma v\cdot v'd\sigma+\int_\Gamma g_2(v)\cdot v'd\sigma$$
$$-\xi\int_\Gamma E\times\nu\cdot v'\,d\sigma-\xi\int_\Gamma v\times\nu\cdot E'\,d\sigma-\int_\Gamma g_1(E\times\nu)\times\nu\cdot E'\,d\sigma$$
$$=-\int_\Omega (\sigma(f):e(v')\,dx+\int_\Omega g\cdot v'\,dx+\int_\Omega \varepsilon F\cdot E'\,dx+\int_\Omega G\cdot\mathrm{rot}\,E'\,dx$$
$$-\int_\Gamma G\times\nu\cdot E'\,d\sigma+\int_\Gamma \sigma(f)\cdot\nu\cdot v'd\sigma-\int_\Gamma \sigma(f)\cdot\nu\cdot v'd\sigma$$

or $g_1(E \times \nu) \times \nu \cdot E' = -g_1(E \times \nu) \cdot E' \times \nu$, *alors*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \{v \cdot v' + \sigma(v) : e(v')\}\, dx + \int_\Omega \{\varepsilon E \cdot E' + \mu^{-1} \mathrm{rot}\, E \cdot \mathrm{rot}\, E'\}\, dx \\
&+ \xi \int_\Omega \{\mathrm{rot}\, v' \cdot E - \mathrm{rot}\, v \cdot E'\}\, dx + \int_\Gamma \{A\, v \cdot v' + g_2(v) \cdot v' + g_1(E \times \nu) \cdot E' \times \nu\} d\sigma \\
&- \xi \int_\Gamma \{E \times \nu \cdot v' + v \times \nu \cdot E'\}\, d\sigma \\
&= \int_\Omega \{g \cdot v' - \sigma(f) : e(v') + \varepsilon F \cdot E' + G \cdot \mathrm{rot}\, E'\}\, dx \\
&- A \int_\Gamma f \cdot v' d\sigma \qquad \forall (v', E') \in H^1 \times W_\varepsilon.
\end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème (2.29)-(2.30) *est donnée par*

$$a((v, E), (v', E')) = F(v', E') \quad , \quad \forall (v', E') \in V \tag{2.35}$$

avec $V = H^1(\Omega)^3 \times W_\varepsilon$, *la forme* a *est définie par*

$$\begin{aligned}
a((v, E)(v', E')) = &\int_\Omega \{v \cdot v' + \sigma(v) : e(v')\}\, dx \\
&+ \int_\Omega \{\varepsilon\, E \cdot E' + \mu^{-1} \mathrm{rot}\, E \cdot \mathrm{rot}\, E' + s\, \mathrm{div}(\varepsilon\, E) \cdot \mathrm{div}(\varepsilon\, E')\}\, dx \\
&+ \xi \int_\Omega \{\mathrm{rot}\, v' \cdot E - \mathrm{rot}\, v \cdot E'\}\, dx \\
&+ \int_\Gamma \{A\, v \cdot v' + g_2(v) \cdot v' + g_1(E \times \nu) \cdot E' \times \nu\} d\sigma \\
&- \xi \int_\Gamma \{E \times \nu \cdot v' + v \times \nu \cdot E'\}\, d\sigma,
\end{aligned}$$

tel que $s > 0$ *est un paramètre qui sera choisi plus tard. La forme* F *est définie par*

$$F(v', E') = \int_\Omega \{g \cdot v' - \sigma(f) : e(v') + \varepsilon F \cdot E' + G \cdot \mathrm{rot}\, E'\}\, dx - A \int_\Gamma f \cdot v' d\sigma.$$

Soit A_1 *un opérateur non linéaire défini comme suit :*

$$\begin{aligned}
&A_1 : V \to V' \\
&(v, E) \to A_1(v, E)
\end{aligned}$$

où $A_1((v, E)(v', E')) = a((v, E)(v', E'))$. *Comme* $F \in V'$, *alors résoudre le problème* (2.35) *est équivalent à la surjectivité de* A_1, *et la surjectivité de* A_1 *montre qu'il existe* $(v, E) \in V$ *telle que* (2.35).
Pour montrer que A_1 *est surjectif , il suffit de montrer d'après le théorème 1.2.3 que* A_1 *est monotone, hémicontinu, borné et coercif.*

$\bullet A_1$ ***monotone***

Soient $(v,E),(v',E') \in V = H^1(\Omega)^3 \times W_\varepsilon$ *on a*

$$\langle A_1(v,E) - A_1(v',E'),(v-v',E-E')\rangle_{V',V}$$

$$\begin{aligned}
&= a((v,E),(v-v',E-E')) - a((v',E'),(v-v',E-E'))\\
&= \int_\Omega \{v\cdot(v-v') + \sigma(v) : e(v-v')\}\,d\,x\\
&+ \int_\Omega \{\varepsilon\,E\cdot(E-E') + \mu^{-1}\mathrm{rot}\,E\cdot\mathrm{rot}\,(E-E') + s\,\mathrm{div}(\varepsilon\,E)\cdot\mathrm{div}(\varepsilon\,(E-E')\}\,d\,x\\
&+ \xi\int_\Omega \{\mathrm{rot}\,(v-v')\cdot E - \mathrm{rot}\,v\cdot(E-E')\}\,d\,x\\
&+ \int_\Gamma \{A\,v\cdot(v-v') + g_2(v)\cdot(v-v') + g_1(E\times\nu)\cdot(E-E')\times\nu\}d\,\sigma\\
&- \xi\int_\Gamma \{E\times\nu\cdot(v-v') + v\times\nu\cdot(E-E')\}\,d\,\sigma\\
&- \int_\Omega \{v'\cdot(v-v') + \sigma(v') : e(v-v')\}\,d\,x\\
&- \int_\Omega \{\varepsilon\,E'\cdot(E-E') + \mu^{-1}\mathrm{rot}\,E'\cdot\mathrm{rot}\,(E-E') + s\,\mathrm{div}(\varepsilon\,E')\cdot\mathrm{div}(\varepsilon\,(E-E')\}\,d\,x\\
&- \xi\int_\Omega \{\mathrm{rot}\,(v-v')\cdot E' - \mathrm{rot}\,v'\cdot(E-E')\}\,d\,x\\
&- \int_\Gamma \{A\,v'\cdot(v-v') + g_2(v')\cdot(v-v') + g_1(E'\times\nu)\cdot(E-E')\times\nu\}d\,\sigma\\
&+ \xi\int_\Gamma \{E'\times\nu\cdot(v-v') + v'\times\nu\cdot(E-E')\}\,d\,\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega \{|v-v'|^2 + \sigma(v-v') : e(v-v')\}\,d\,x\\
&+ \int_\Omega \{\varepsilon\,|E-E'|^2 + \mu^{-1}|\mathrm{rot}\,(E-E')|^2 + s\,|\mathrm{div}(\varepsilon\,(E-E')|^2\}\,d\,x\\
&+ \xi\int_\Omega \{\mathrm{rot}\,(v-v')\cdot(E-E') - \mathrm{rot}\,(v-v')\cdot(E-E')\}\,d\,x\\
&+ \int_\Gamma \{A\,|v-v'|^2 - \xi\int_\Gamma \{-(E-E')\times\nu\cdot(v-v') + (v-v')\times\nu\cdot(E-E')\}\,d\,\sigma\\
&+ \int_\Gamma (g_1(E\times\nu) - g_1(E'\times\nu)(E\times\nu - E'\times\nu)d\,\sigma + \int_\Gamma (g_2(v) - g_2(v'))(v-v')d\,\sigma
\end{aligned}$$

la condition de monotonie (2.19) *sur* g_1 *et* g_2 *nous permet de conclure que* $\langle A_1(v,E) - A_1(v',E'), (v-v', E-E')\rangle_{V',V} \geq 0$
d'où l'opérateur A_1 *est monotone.*

$\bullet A_1$ ***hémicontinu***

Soient $(v,E), (v',E'), (v", E") \in V$.
Pour montrer que A_1 *est hémicontinu, il suffit de montrer que l'application :*

$$t \mapsto \langle A_1(v+tv', E+tE'), (E", V")\rangle_{V,V'} \text{ est continue sur } \mathbb{R},$$

cela revient à dire que

$$\lim_{t\to 0}\langle A_1(v+tv', E+tE'), (E", V")\rangle_{V,V'} = \langle A_1(v,E), (E", V")\rangle_{V,V'} \text{ sur } \mathbb{R}$$

on a

$$\begin{aligned}
\langle A_1(v+tv', E+tE'), (E", V")\rangle_{V,V'} =& a((v+tv', E+tE')(v", E"))\\
&= \int_\Omega \{(v+tv')\cdot v" + \sigma(v+tv') : e(v")\}\, d\,x\\
&+ \int_\Omega \{\varepsilon\,(E+tE')\cdot E" + \mu^{-1}\mathrm{rot}\,(E+tE')\cdot \mathrm{rot}\,E"\\
&+ s\,\mathrm{div}(\varepsilon\,(E+tE'))\cdot \mathrm{div}(\varepsilon\, E")\}\, d\,x\\
&+ \xi \int_\Omega \{\mathrm{rot}\,v"\cdot(E-E') - \mathrm{rot}\,(v-v')\cdot E"\}\, d\,x\\
&+ \int_\Gamma \{A\,(v+tv')\cdot v" + g_2(v+tv')\cdot v"\\
&+ g_1(E+tE')\times\nu)\cdot E"\times\nu\} d\,\sigma\\
&- \xi \int_\Gamma \{E+tE')\times\nu\cdot v" + (v+tv')\times\nu\cdot E"\}\, d\,\sigma,
\end{aligned}$$

alors on montre que :

$$\lim_{t\to 0}\int_\Gamma \{g_2(v+tv')\cdot v" + g_1(E+tE')\times\nu)\cdot E"\times\nu\} d\,\sigma = \int_\Gamma \{g_2(v)\cdot v" + g_1(E)\times\nu)\cdot E"\times\nu\} d\,\sigma$$

comme g_1 *et* g_2 *sont continues, alors* $\forall (v,E), (v',E'), (v",E") \in V$

$$g_1(E+tE')\times\nu)\cdot E"\times\nu \;\to g_1(E)\times\nu)\cdot E"\times\nu \text{ pp sur } \Gamma \text{ quand } t\to 0$$

et

$$g_2(v+tv')\cdot v" \to g_2(v)\cdot v" \text{ pp sur } \Gamma \text{ quand } t\to 0,$$

d'autre part g_1 *et* g_2 *vérifient la propriété* (2.10), *l'application du théorème de la convergence monotone donne*

$$\lim_{t\to 0}\int_\Gamma \{g_2(v+tv')\cdot v" + g_1(E+tE')\times\nu)\cdot E"\times\nu\} d\,\sigma = \int_\Gamma \{g_2(v)\cdot v" + g_1(E)\times\nu)\cdot E"\times\nu\} d\,\sigma$$

d'où

$$\lim_{t\to 0}\langle A_1(v+tv', E+tE'), (v", E")\rangle_{V,V'} = \langle A_1(v,E), (v", E")\rangle_{V,V'} \text{ sur } \mathbb{R}$$

alors A_1 est hémicontinu.

• A_1 ***coercif***

A_1 est coercif si pour $(v,E) \in V$

$$\frac{\langle A_1(v,E),(v,E)\rangle_{V,V'}}{\|(v,E)\|_V} = \frac{a((v,E)(v,E))}{\|(v,E)\|_V} \to 0 \quad \text{quand} \quad \|(v,E)\|_V \to \infty. \tag{2.36}$$

On fixe $E \in W_\varepsilon$ et on pose

$$\Gamma_E^+ = \{x \in \Gamma, |(E\times\nu)(x)| > 1\}$$

$$\Gamma_E^- = \{x \in \Gamma, |(E\times\nu)(x)| \le 1\}$$

on a

$$\begin{aligned} a((v,E)(v,E)) = & \int_\Omega \{|v|^2 + \sigma(v) : e(v)\}\, dx \\ & + \int_\Omega \{\varepsilon\, |E|^2 + \mu^{-1} |\mathrm{rot}\, E|^2 + s\, |\mathrm{div}(\varepsilon\, E)|^2\}\, dx \\ & + \int_\Gamma \{A\, |v|^2 + g_2(v)\cdot v + g_1(E\times\nu)\cdot E\times\nu\} d\sigma \\ & - \xi \int_\Gamma \{E\times\nu\cdot v + v\times\nu\cdot E\}\, d\sigma \\ & + \int_\Omega \{E\cdot \mathrm{rot}\, v - E\, \mathrm{rot}\, v\, dx\} \end{aligned}$$

puisque $E\times\nu\cdot v = -v\times\nu\cdot E$, alors $-\xi\int_\Gamma\{E\times\nu\cdot v + v\times\nu\cdot E\}\, d\sigma = 0$ et en utilisant les propriétés (2.21) et $(g_2(v)\cdot v \ge 0)$ on obtient

$$\begin{aligned} a((v,E)(v,E)) \ge & \int_\Omega \{|v|^2 + \sigma(v) : e(v)\}\, dx \\ & + \int_\Omega \{\varepsilon\, |E|^2 + \mu^{-1} |\mathrm{rot}\, E|^2 + s\, |\mathrm{div}(\varepsilon\, E)|^2\}\, dx \\ & + m \int_{\Gamma_E^+} |E\times\nu|^2 d\sigma, \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\|(v,E)\|_V^2 &= \|v\|_{H^1(\Omega)^3}^2 + \|E\|_{W_\varepsilon}^2\\ &\le C\int_\Omega \{|v|^2 + \sigma(v):e(v)\}\,dx\\ &+ \int_\Omega \{|E|^2 + |\mathrm{rot}\,E|^2 + |\mathrm{div}(\varepsilon\,E)|^2\}\,dx\\ &+ \int_\Gamma |E\times\nu|^2 d\,\sigma,\end{aligned}$$

à partir de la définition de Γ_E^- et la remarque 2.1.1 il vient :

$$\begin{aligned}\|(v,E)\|_V^2 \le C &\int_\Omega \{|v|^2 + \sigma(v):e(v)\}\,dx\\ &+ \int_\Omega \{|E|^2 + |\mathrm{rot}\,E|^2 + |\mathrm{div}(\varepsilon\,E)|^2\}\,dx\\ &+ \int_{\Gamma_E^+} |E\times\nu|^2 d\,\sigma + |\Gamma|\end{aligned}$$

comme $0<\varepsilon_1\le\varepsilon(x)\le\varepsilon_0$ *et* $\mu_0^{-1}\le\mu^{-1}(x)\le\mu_1^{-1}$, *alors*

$$\begin{aligned}a((v,E)(v,E)) \ge &\int_\Omega \{|v|^2 + \sigma(v):e(v)\}\,dx\\ &+ \min(\varepsilon_0,\mu_0^{-1},s,m)\int_\Omega \{|E|^2 + |\mathrm{rot}\,E|^2 + |\mathrm{div}(\varepsilon\,E)|^2\}\,dx\\ &+ \int_{\Gamma_E^+} |E\times\nu|^2 d\,\sigma + |\Gamma|\\ &\ge \min(1,\gamma_1)(C'\|(v,E)\|_V^2 - |\Gamma|)\end{aligned}$$

avec $\gamma_1=\min(\varepsilon_0,\mu_0^{-1},s,m)$ *alors*

$$a((v,E)(v,E)) \ge \beta(C'\|(v,E)\|_V^2 - |\Gamma|)$$

avec $\beta=\min(1,\gamma_1)$, *d'où on a* (2.36).
$\bullet A_1$ ***borné***
La bornitude de A_1 découle des propriétés de g_1, g_2 et (2.10).

Il reste à montrer que la solution $(v,E)\in V$ de (2.35) *et u,H donnés par* (2.27) *et* (2.28), *vérifient $(u,v,E,H)\in D(A)$ et satisfont* (2.22), (2.23)-(2.26).
premièrement on va montrer que $\mathrm{div}(\varepsilon E)=0$, *pour cela on prend $v'=0$ et $E'=\nabla\phi$ avec $\phi\in D(\Delta_\varepsilon)$, où $D(\Delta_\varepsilon)$ est le domaine de l'opérateur Δ_ε avec les conditions de Dirichlet sur le bord, défini par*

$$D(\Delta_\varepsilon)=\{\phi\in H_0^1(\Omega)\,|\,\Delta_\varepsilon\phi=\mathrm{div}(\varepsilon\phi)\in L^2(\Omega)\}$$

alors(2.35) *est donnée par :*

$$\int_\Omega \{\varepsilon\, E\cdot E' + \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E\cdot \mathrm{rot}\, E' + s\,\mathrm{div}(\varepsilon\, E)\cdot \mathrm{div}(\varepsilon\, E')\, d\,x$$
$$-\,\xi \int_\Omega \mathrm{rot}\, v\cdot E'\, d\,x + \int_\Gamma g_1(E\times\nu)\cdot E'\times\nu d\,\sigma$$
$$-\,\xi \int_\Gamma v\times\nu\cdot E'\, d\,\sigma = \int_\Omega \varepsilon F\cdot E'\, d\,x$$

grace à la formule de Green (1.41)

$$\int_\Omega \{\varepsilon\, E\cdot E' + \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E\cdot \mathrm{rot}\, E' + s\,\mathrm{div}(\varepsilon\, E)\cdot \mathrm{div}(\varepsilon\, E')\, d\,x$$
$$-\,\xi \int_\Omega \mathrm{rot}\, E'\cdot v\, d\,x + \xi \int_\Gamma v\times\nu\cdot E'\, d\,\sigma$$
$$+ \int_\Gamma g_1(E\times\nu)\cdot E'\times\nu\, d\,\sigma - \xi\int_\Gamma v\times\nu\cdot E'\, d\,\sigma$$
$$= \int_\Omega \varepsilon F\cdot E'\, d\,x,$$

on a $\mathrm{rot}(\nabla\phi) = 0$ *et* $g_1(E\times\nu)\nabla\phi\times\nu = 0$ *(comme* $\phi = 0$ *sur* Γ*, alors* $\nabla\phi\times\nu = 0$*) par conséquent*

$$\int_\Omega \{\varepsilon\, E\cdot\nabla\phi + s\,\mathrm{div}(\varepsilon\, E)\cdot\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\phi)\}\, d\,x$$
$$= \int_\Omega \varepsilon F\cdot\nabla\phi\, d\,x$$

en appliquant la formule de Green on obtient :

$$\int_\Omega \{-\mathrm{div}(\varepsilon\, E)\,\phi + s\,\mathrm{div}(\varepsilon\, E)\cdot\Delta_\varepsilon\phi\}\, d\,x = -\int_\Omega \mathrm{div}(\varepsilon F)\cdot\phi\, d\,x$$

comme $F\in J(\Omega,\varepsilon)$*, alors* $\mathrm{div}(\varepsilon F) = 0$*, d'où*

$$\int_\Omega \{-\mathrm{div}(\varepsilon\, E)\,\phi + s\,\mathrm{div}(\varepsilon\, E)\cdot\Delta_\varepsilon\phi\}\, d\,x = 0 \quad \forall\phi\in D(\Delta_\varepsilon)$$

on va choisir s *de telle sorte que* s^{-1} *ne soit pas une valeur propre de* Δ_ε *et cela est vrai si l'opérateur* Δ_ε *est négatif, autoadjoint avec un spectre discret.*

•Δ_ε *est négatif*

Pour $\phi\in D(\Delta_\varepsilon)$*, on a*

$$\langle\Delta_\varepsilon\phi,\phi\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \mathrm{div}(\varepsilon\phi)\,\phi\, d\,x \quad \forall\phi\in D(\Delta_\varepsilon)$$
$$= -\int_\Omega \varepsilon|\nabla\phi| d\,x \leq 0 \quad \forall\phi\in D(\Delta_\varepsilon)$$

d'où Δ_ε *est négatif*

$\bullet\Delta_\varepsilon$ ***est autoadjoint***
Soit

$$D(\Delta_\varepsilon^*) = \{\psi \in H_0^1(\Omega) \,|\, \phi \to \langle \Delta_\varepsilon \phi, \psi\rangle \text{ est continue sur } D(\Delta_\varepsilon) \text{ pour la topologie de } L^2(\Omega)\}$$

montrons que $D(\Delta_\varepsilon^*) \subset D(\Delta_\varepsilon)$
soit $\psi \in D(\Delta_\varepsilon^*) \Leftrightarrow \exists\theta \in L^2(\Omega)$ *telle que*

$$\langle \Delta_\varepsilon \phi, \psi\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \phi, \theta\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \phi \in D(\Delta_\varepsilon).$$

Soit $\phi \in D(\Omega) \subset D(\Delta_\varepsilon)$, *on a*

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_\varepsilon \phi, \psi\rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \operatorname{div}(\varepsilon\nabla\phi), \psi\rangle \quad \forall\phi \in D(\Omega)\\
&= \langle \phi, \operatorname{div}(\varepsilon\nabla\psi)\rangle \quad \forall\phi \in D(\Omega)\\
&= \langle \phi, \Delta_\varepsilon\psi\rangle \qquad \forall\phi \in D(\Omega)\\
&= \langle \phi, \theta\rangle \qquad \forall\phi \in D(\Omega)
\end{aligned}$$

d'où $\Delta_\varepsilon\psi = \theta \in L^2(\Omega)$
alors on a

$$\begin{cases} D(\Delta_\varepsilon^*) \subset D(\Delta_\varepsilon) \quad \textit{et} \\ \Delta_\varepsilon^*\psi = \Delta_\varepsilon\psi \quad \forall\psi \in D(\Delta_\varepsilon^*) \end{cases}$$

montrons que $D(\Delta_\varepsilon) \subset D(\Delta_\varepsilon^*)$
soit $\psi \in D(\Delta_\varepsilon)$ *et* $\phi \in D(\Delta_\varepsilon)$
on a

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_\varepsilon \phi, \psi\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \Delta_\varepsilon\phi \cdot \psi \, d\,x\\
&= \int_\Omega (\varepsilon\nabla\phi)\psi \, d\,x\\
&= \langle \phi, \Delta_\varepsilon\psi\rangle_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

comme $\phi \to \int_\Omega \phi\, \Delta_\varepsilon\, \psi \, d\,x$ *est continue sur* $D(\Delta_\varepsilon)$ *pour la topologie de* $L^2(\Omega)$, *alors* $D(\Delta_\varepsilon) \subset D(\Delta_\varepsilon^*)$
d'où

$$\begin{cases} D(\Delta_\varepsilon^*) = D(\Delta_\varepsilon) \\ \Delta_\varepsilon^*\psi = \Delta_\varepsilon\psi \end{cases}$$

on déduit que Δ_ε *est autoadjoint.*

• ***le spectre de Δ_ε est discret***

Montrer que le spectre de l'opérateur Δ_ε est discret, revient à montrer que sa résolvante est compacte avec

$$\Delta_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

soit $\rho(\Delta_\varepsilon)$ la résolvante de Δ_ε et $R(\lambda, \Delta_\varepsilon) = (\lambda I - \Delta_\varepsilon) : L^2(\Omega) \to D(\Delta_\varepsilon)$ pour ϕ_n, $\psi_n \in D(\Delta_\varepsilon)$, on pose

$$\phi_n = (\lambda I - \Delta_\varepsilon)^{-1} \psi_n \quad alors \quad \psi_n = (\lambda I - \Delta_\varepsilon) \phi_n \in L^2(\Omega)$$

on a $\{\phi_n\}_n$ est bornée pour la norme du graphe dans $D(\Delta_\varepsilon)$

$$\|\phi_n\|^2_{D(\Delta_\varepsilon)} = \|\phi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\Delta_\varepsilon \phi_n\|^2_{L^2(\Omega)}$$

l'injection de $D(\Delta_\varepsilon)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte car l'injection de H_0^1 dans $L^2(\Omega)$ est compacte, alors on peut extraire une suite convergente dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire

$$\phi_n \to \phi \quad dans \ L^2(\Omega),$$

d'où la résolvante de Δ_ε est compacte, et le spectre de Δ_ε est discret.

L'application

$$\begin{aligned} D(\Delta_\varepsilon) &\to L^2(\Omega) \\ \phi &\to -\phi + s\,\Delta\phi \end{aligned}$$

est surjective, alors

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\varepsilon\, E)\, f\, d\,x = 0 \quad \forall f \in L^2(\Omega),$$

d'où

$$\operatorname{div}(\varepsilon\, E) = 0 \quad sur \ \ \Omega.$$

Comme $\operatorname{div}(\varepsilon\, E) = 0$ *et d'après* (2.27) *et* (2.28), *alors* (2.35) *sera équivalente à*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \{v \cdot v' + \sigma(u) : e(v')\}\, d\,x + \int_\Omega \{\varepsilon\, E \cdot E' - H \cdot \operatorname{rot} E'\}\, d\,x \\ &+ \xi \int_\Omega \{\operatorname{rot} v' \cdot E - \operatorname{rot} v \cdot E'\}\, d\,x + \int_\Gamma \{A\,u \cdot v' + g_2(v) \cdot v' + g_1(E \times \nu) \cdot E' \times \nu\} d\,\sigma \\ &- \xi \int_\Gamma \{E \times \nu \cdot v' + v \times \nu \cdot E'\}\, d\,\sigma = \int_\Omega \{g \cdot v' + \varepsilon\, F \cdot E'\}\, d\,x \quad \forall (v', E') \in V \end{aligned}$$

on prend $v' \in D(\Omega)$ et $E' = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \{v \cdot v' + \sigma(u) : e(v')\}\, d\,x + \xi \int_\Omega \operatorname{rot} v' \cdot E\, d\,x \\ &= \int_\Omega g \cdot v'\, d\,x \end{aligned}$$

alors

$$\langle v, v' \rangle + \langle -\mathrm{div}\sigma(u), v' \rangle + \xi \langle \mathrm{rot}\, E, v' \rangle$$
$$= \langle g, v' \rangle \quad \forall v' \in D(\Omega)^3$$

$$\langle v - \mathrm{div}\sigma(u) + \xi\, \mathrm{rot}\, E, v' \rangle = \langle g, v' \rangle \quad \forall v' \in D(\Omega)^3$$

ce qui donne

$$v - \mathrm{div}\sigma(u) + \xi \mathrm{rot}\, E \; = g \quad dans \; D'(\Omega)$$

alors on a (2.24)*, et puisque* $v, \mathrm{rot}\, E, g$ *sont des éléments de* $L^2(\Omega)^3$*,*
alors $\mathrm{div}\sigma(u) \in L^2(\Omega)^3$*.*
Maintenant on prend $v' = 0$ *et* $E' = P_\varepsilon \chi$ *avec* $\chi \in D(\Omega)^3$ *alors* (2.35) *est équivalente à*

$$\int_\Omega \{\varepsilon\, E \cdot E' + \mu^{-1} \mathrm{rot}\, E \cdot \mathrm{rot}\, E'\, d\, x\} - \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \cdot E'\, d\, x$$
$$= \int_\Omega \{\varepsilon F \cdot E' + G \cdot \mathrm{rot}\, E'\}\, d\, x$$

en utilisant (2.28) *on aura*

$$\int_\Omega \{\varepsilon\, E \cdot P_\varepsilon \chi - H\, \mathrm{rot}\, P_\varepsilon \chi \cdot \mathrm{rot}\, E'\}\, d\, x - \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \cdot P_\varepsilon \chi\, d\, x = \int_\Omega \varepsilon F \cdot P_\varepsilon \chi\, d\, x$$

d'après le lemme 2.1.3 on a

$$\int_\Omega \varepsilon\, E \cdot P_\varepsilon \chi = \int_\Omega \varepsilon\, E \cdot \chi \quad \forall E \in J(\Omega, \varepsilon)$$

et

$$\mathrm{rot}\, P_\varepsilon \chi = \mathrm{rot}\, \chi \quad dans \;\; \Omega$$

par conséquent

$$\int_\Omega H \cdot \mathrm{rot}\, P_\varepsilon \chi = \int_\Omega H \cdot \mathrm{rot}\, \chi$$

comme $F \in J(\Omega, \varepsilon)$*, alors*

$$\int_\Omega \varepsilon\, F \cdot P_\varepsilon \chi = \int_\Omega \varepsilon\, F \cdot \chi$$

d'où

$$\int_\Omega \{\varepsilon\, E \cdot \chi - H \cdot \mathrm{rot}\, \chi\, d\, x\} - \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \cdot P_\varepsilon \chi\, d\, x$$
$$= \int_\Omega \varepsilon F \cdot \chi\, d\, x$$

par suite

$$\langle \varepsilon\, E, \chi \rangle - \langle \mathrm{rot}\, H, \chi \rangle - \xi \langle \mathrm{rot}\, v, \chi \rangle$$
$$= \langle \varepsilon\, F, \chi \rangle \quad \forall \chi \in D(\Omega)^3$$

d'où

$$\varepsilon E - \mathrm{rot}\, H - \xi \mathrm{rot}\, v = \varepsilon F \quad dans \quad D'(\Omega)$$

ce qui donne (2.25).
Comme $\varepsilon E \in L^2(\Omega)^3$, $\mathrm{rot}\, v \in L^2(\Omega)^3$ *et* $\varepsilon F \in L^2(\Omega)^3$ *alors* $\mathrm{rot}\, H \in L^2(\Omega)^3$. *On prend* $v' \in H^1(\Omega)^3$ *et* $E' = P_\varepsilon \chi$ *avec* $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$ *et en utilisant* (2.27) *et* (2.28), *alors* (2.35) *sera équivalente à*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v \cdot v'\, dx - \int_\Omega \mathrm{div}\sigma(u) v'\, dx - \langle \sigma(u)\cdot\nu, v'\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\
&+ \int_\Omega \varepsilon E \cdot E'\, dx - \int_\Omega \mathrm{rot}\, H \cdot E'\, dx - \int_\Gamma (H\times\nu)\cdot E' d\sigma \\
&+ \xi \int_\Gamma (E\times\nu)\cdot v' d\sigma + \xi \int_\Omega \mathrm{rot}\, E \cdot v'\, dx - \xi \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \cdot E'\, dx \\
&+ \int_\Gamma \{A\, u\cdot v' + g_2(v)\cdot v' + g_1(E\times\nu)\cdot E'\times\nu\} d\sigma \\
&- \xi \int_\Gamma \{E\times\nu\cdot v' + v\times\nu\cdot E'\}\, d\sigma = \int_\Omega \{g\cdot v' + \varepsilon F\cdot E'\}\, dx \quad \forall (v',E') \in V
\end{aligned}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *signifie la dualité entre* $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ *et* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$.

En utilisant (2.24) *et* (2.25) *on aura*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega g\cdot v'\, dx + \int_\Omega v\cdot v'\, dx + \langle\sigma(u)\cdot\nu, v'\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \int_\Omega \varepsilon E\cdot E'\, dx \\
&- \int_\Omega v\cdot v'\, dx - \int_\Omega \varepsilon E\cdot E'\, dx - \int_\Omega \mathrm{rot}\, H\cdot E'\, dx + \int_\Omega \varepsilon F\cdot E'\, dx \\
&- \int_\Gamma (H\times\nu)\cdot E' d\sigma + \xi\int_\Gamma (E\times\nu)\cdot v' d\sigma + \xi \int_\Omega \mathrm{rot}\, E\cdot v'\, dx - -\xi \int_\Omega \mathrm{rot}\, E\cdot v'\, dx \\
&+ \int_\Omega \mathrm{rot}\, v\cdot E'\, dx - \int_\Omega \mathrm{rot}\, v\cdot E'\, dx + \int_\Gamma \{A\, u\cdot v' + g_2(v)\cdot v' + g_1(E\times\nu)\cdot E'\times\nu\} d\sigma \\
&- \xi \int_\Gamma \{E\times\nu\cdot v' + v\times\nu\cdot E'\}\, d\sigma = \int_\Omega \{g\cdot v' + \varepsilon F\cdot E'\}\, dx \quad \forall (v',E')\in V
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\langle\sigma(u)\cdot\nu, v'\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - \int_\Gamma (H\times\nu)\cdot E' d\sigma + \xi \int_\Gamma (E\times\nu)\cdot v' d\sigma \\
&+ \int_\Gamma \{A\, u\cdot v' + g_2(v)\cdot v' + g_1(E\times\nu)\cdot E'\times\nu\} d\sigma \\
&- \xi \int_\Gamma \{E\times\nu\cdot v' + v\times\nu\cdot E'\}\, d\sigma = 0
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma(u)\cdot\nu, v'\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - \int_\Gamma (H\times\nu)\cdot P_\varepsilon\chi d\sigma + \xi\int_\Gamma (E\times\nu)\cdot v' d\sigma \\
&+ \int_\Gamma \{A\,u\cdot v' + g_2(v)\cdot v' + g_1(E\times\nu)\cdot P_\varepsilon\chi\times\nu\}d\sigma \\
&- \xi\int_\Gamma \{E\times\nu\cdot v' + v\times\nu\cdot P_\varepsilon\chi\}\,d\sigma = 0 \quad \forall\chi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3.
\end{aligned}$$

Comme $E'\times\nu = P_\varepsilon\chi\times\nu = \chi\times\nu$ *sur* Γ, *alors l'identité ci dessus est équivalente à*

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma(u)\cdot\nu, v'\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - \int_\Gamma (H\times\nu)\cdot\chi d\sigma + \xi\int_\Gamma (E\times\nu)\cdot v' d\sigma \\
&+ \int_\Gamma \{A\,u\cdot v' + g_2(v)\cdot v' + g_1(E\times\nu)\cdot\chi\times\nu\}d\sigma \\
&- \xi\int_\Gamma \{E\times\nu\cdot v' + v\times\nu\cdot\chi\}\,d\sigma = 0 \quad \forall\chi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma(u)\cdot\nu, v'\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - \int_\Gamma (H\times\nu)\cdot\chi d\sigma \\
&+ \int_\Gamma \{A\,u\cdot v' + g_2(v)\cdot v' + g_1(E\times\nu)\cdot\chi\times\nu\}d\sigma \\
&- \xi\int_\Gamma v\times\nu\cdot\chi\,d\sigma = 0 \quad \forall\chi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3.
\end{aligned}$$

On prend $v' = 0$ *on aura*

$$H\times\nu + g_1(E\times\nu)\times\nu + \xi v\times\nu = 0 \quad sur\ \Gamma$$

ce qui donne la condition au bord (2.8).
On prend $\chi = 0$ *alors on aura*

$$\sigma(u)\cdot\nu + g_2(v) + A\,u = 0 \quad sur\ \Gamma$$

ce qui donne la condition au bord (2.9).
La condition (2.28) *et* $div(\mu\,G) = 0$ *car* $G\in J(\Omega,\mu)$ *donne* $\operatorname{div}(\mu\,H) = 0$
d'où $(u, v, E, H)\in D(A)$ *par conséquent* A *est maximal.*

Lemme 2.1.7. *Pour* g_2 *globalement lipschitzienne, on a* $g_2(v)\in H^1(\Omega)^3$, *alors* $g_2(v)|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$.

Preuve. *Comme* g_2 *est globalement lipschitzienne et* $g_2(0) = 0$, *alors il existe une constante* $C > 0$, *telle que :*

$$|g_2(x)| \le C|x|\ , \quad \forall x\in\mathbb{R}^3$$

d'où

$$\int_\Omega |g_2(v)|^2\,d\,x \le C^2\int_\Omega |v|^2\,d\,x < +\infty,$$

d'autre part on a :

$$\partial_i(g_{2j}(v_j)) = g'_{2j}(v_j)\partial_i v_j \quad P.P,$$

alors

$$\begin{aligned} |\nabla g_2(v)|^2 &= \left| \sum_{j=1}^{3} (g'_{2j}(v_j))^2 \sum_{i=1}^{3} (\partial_i v_j)^2 \right| \\ &\leq |\nabla v|^2 \end{aligned}$$

d'où $g_2(v) \in H^1(\Omega)^3$ *et par conséquent* $g_2(v)|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$.

Remarque 2.1.4. *Pour* g_2 *globalement lipschitzienne et pour tout* $u \in H^1(\Omega)^3$ *et* $v \in H^1(\Omega)^3$, $A\,u + g_2(v) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ *et d'après* (2.9) *on a*

$$\sigma(u) \cdot \nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3.$$

Si de plus Γ *est de classe* $\mathcal{C}^2$, *alors on aura*

$$u \in H^2(\Omega)^3.$$

La théorie des opérateurs non linéaires nous permet de déduire le théorème d'unicité et de régularité des solutions suivant :

Théorème 2.1.2. *On suppose que* g_1 *et* g_2 *vérifient* (2.10) *ainsi que* (2.19)-(2.21)
• *Pour toute donneé initiale* $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$ *; le problème* (2.1) *admet une solution (faible) unique qui vérifie :*

$$(u, \partial_t u, E, H) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$$

qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)^3), \\ E &\in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \varepsilon)), \\ H &\in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)). \end{aligned}$$

• *Pour toute donnée initiale* $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(A)$, *le problème* (2.1) *admet une solution forte* (u, E, H) *qui vérifie :*

$$(u, \partial_t u, E, H) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, D(A))$$

qui est équivalent à

$$u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+\mathcal{V}(\Omega))$$

$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \varepsilon)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\varepsilon)$$

$$H \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\mu)$$

et satisfont (2.8) *et* (2.9) *avec* $\mathcal{V}(\Omega)$ *défini par* (2.5).

• *Si de plus* g_2 *est globalement Lipschitzienne, alors la solution* (u, E, H) *du problème* (2.1) *possède la propriété de régularité plus forte suivante :*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)^3)$$
$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \varepsilon)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\varepsilon)$$
$$H \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\mu)$$

Lemme 2.1.8. *Pour* g_1 *et* g_2 *continues et satisfont les propriétés* (2.10) *et*(2.19)-(2.21), *l'énergie du système* (2.1) *donnée par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\partial_t u(x,t)|^2 + \sigma(u)(x,t) : e(u)(x,t))\, dx \\ &+ \frac{A}{2}\int_\Gamma |u(x,t)|^2 d\sigma \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon(x)|E(x,t)|^2 + \mu(x)|H(x,t)|^2) dx\end{aligned} \tag{2.37}$$

est décroissante. De plus pour $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(A)$ *on a pour tout* $0 \le S < T < \infty$

$$\mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T) = \int_S^T \int_\Gamma \{g_1(E(t)\times\nu)\cdot E(t)\times\nu + g_2(\partial_t(u)(t))\,\partial_t(u)(t)\}\, d\sigma\, dt \tag{2.38}$$

et pour tout $t \ge 0$

$$\mathcal{E}'(t) = -\int_\Gamma \{g_1(E(t)\times\nu)\cdot E(t)\times\nu + g_2(\partial_t(u)(t))\,\partial_t(u)(t)\}\, d\sigma. \tag{2.39}$$

Preuve. *Comme* $D(A)$ *est dense dans* $\mathcal{H}$, *il suffit de montrer* (2.39).
Pour $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(A)$, *la fonction*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,\cdot)\ :\ [0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ t &\to \mathcal{E}(u,t)\end{aligned}$$

est partout dérivable sur $[0,+\infty[$ *et on a :*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'(t) &= \int_\Omega \{\partial_t^2 u\cdot\partial_t u + \sigma(u) : (\partial_t u)\}\, dx \\ &+ A\int_\Gamma \partial_t u\cdot u\, d\sigma + \int_\Omega \{\varepsilon E\cdot\partial_t E + \mu H\cdot\partial_t H\} dx.\end{aligned}$$

D'après (2.1) *on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'(t) &= \int_\Omega \{\partial_t u(\mathrm{div}\sigma(u) - \xi\,\mathrm{rot}\, E) + \sigma(u) : e(\partial_t u)\}\, dx \\ &+ A\int_\Gamma \partial_t u\cdot u\, d\sigma + \int_\Omega \{E(\mathrm{rot}\, H + \xi\,\mathrm{rot}\,\partial_t u) - H\cdot\mathrm{rot}\, E\}\, dx \\ &= -(A(u,\partial_t u, E, H), (u,\partial_t u, E, H))_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

En tenant compte de la régularité de u, E, H par rapport à x, des intégrations par parties donnent

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}'(t) &= -\int_\Omega \sigma(u) : e(\partial_t u)\, d\,x + \int_\Gamma \partial_t u(\sigma(u)\cdot\nu)\, d\,\sigma \\
&+ \int_\Omega \sigma(u) : e(\partial_t u)\, d\,x + A\int_\Gamma \partial_t u \cdot u\, d\,\sigma \\
&+ \int_\Gamma H\times\nu\cdot E\, d\,\sigma + \int_\Gamma E\times\nu\cdot\partial_t u\, d\,\sigma \\
&= \int_\Gamma \partial_t u(\sigma(u)\cdot\nu)\, d\,\sigma + A\int_\Gamma \partial_t u\cdot u\, d\,\sigma \\
&+ \int_\Gamma H\times\nu\cdot E\, d\,\sigma + \int_\Gamma E\times\nu\cdot\partial_t u\, d\,\sigma
\end{aligned}$$

en utilisant les conditions au bord (2.8) *et* (2.9) *on obtient* (2.39).
Pour $i = 1, 2$ *on a* $g_i(x)\cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$ *alors*

$$g_1(E(t)\times\nu)\cdot E(t)\times\nu + g_2(\partial_t\,(u)\,(t))\,\partial_t\,(u)\,(t) \geq 0$$

d'où

$$\mathcal{E}'(t) \leq 0$$

donc $\mathcal{E}$ *est décroissante pour les solutions fortes. On intégre* $\mathcal{E}'(t)$ *entre* S *et* T *on trouve* (2.38), *d'où* $\mathcal{E}(S) \geq \mathcal{E}(T)$ *pour les solutions fortes. Par densité de* $D(A)$ *dans* $\mathcal{H}$, *on aura la décroissance de l'énergie pour les solutions faibles, pour* $0 \leq S \leq T < \infty$

$$\mathcal{E}(S) \geq \mathcal{E}(T).$$

3
Stabilité exponentielle dans le cas linéaire

Dans ce chapitre, on donne une équivalence entre la stabilité exponentielle du système linéaire associé au système (2.1) avec $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$ par des feedbacks frontières linéaires et l'estimation de EE-stabilité. On rappelle que l'énergie du système (2.1) est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) = &\frac{1}{2}\int_\Omega (|\partial_t u(x,t)|^2 + \sigma(u)(x,t) : e(u)(x,t))\, d\,x \\ &+ \frac{A}{2}\int_\Gamma |u(x,t)|^2 d\,\sigma \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon(x)|E(x,t)|^2 + \mu(x)|H(x,t)|^2) d\,x.\end{aligned}$$

3.1 Stabilité exponentielle dans le cas linéaire

On commence par donner la définition suivante :[27, 28]

Définition 3.1.1. Ω *satisfait l'estimation de EE-stabilité, s'il existe* $T > 0$ *et deux constantes positives* C_1, C_2 *(qui peuvent dépendre de* T *) avec* $C_1 < T$ *tels que*

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\, dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2\int_0^T\int_\Gamma (|\partial_t u(t)|^2 + |E(t)\times\nu|^2)\, d\sigma\, dt \tag{3.1}$$

pour toute solution (u, E, H) *de* (2.1) *avec* $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$.

Dans ce qui suit, on montrera que l'estimation de EE-stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle avec feedbacks linéaires.

Théorème 3.1.1. *Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité si et seulement si il existe deux constantes positives M et ω telles que*

$$\mathcal{E}(t) \leq M\, e^{-\omega t}\mathcal{E}(0) \tag{3.2}$$

pour toute solution (u,E,H) de (2.1) *avec $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin du Lemme suivant qui nous donne une équivalence entre l'estimation de EE-stabilité et l'estimation d'observabilité.

Lemme 3.1.1. *Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité si et seulement si il existe $T > 0$ et une constante positive C (qui peut dépendre de T) telle que*

$$\mathcal{E}(T) \leq C \int_0^T \int_\Gamma (|\partial_t u|^2 + |E \times \nu|^2)\, d\sigma\, dt. \tag{3.3}$$

Preuve. *La condition est nécessaire. D'après Le Lemme 2.1.8 $\mathcal{E}(t)$ est décroissante et positive. La EE-stabilité donnée par* (3.1) *entraîne*

$$T\mathcal{E}(T) \leq \int_0^T \mathcal{E}(t)\, dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \int_\Gamma (|\partial_t u|^2 + |E \times \nu|^2)\, d\sigma\, dt$$

et en utilisant l'identité (2.38), *on obtient*

$$T\mathcal{E}(T) \leq C_1\mathcal{E}(T) + (C_1 + C_2) \int_0^T \int_\Gamma (|\partial_t u|^2 + |E \times \nu|^2)\, d\sigma\, dt,$$

par conséquent

$$\mathcal{E}(T) \leq C \int_0^T \int_\Gamma (|\partial_t u|^2 + |E \times \nu|^2)\, d\sigma\, dt$$

avec $C = \frac{C_1+C_2}{T-C_1}$, ($C_1 < T$).

La condition est suffisante. La monotonie de $\mathcal{E}(t)$ permet d'écrire

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\, dt \leq T\mathcal{E}(0)$$

de l'identité (2.38), *il vient que*

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\, dt \leq \frac{T}{2}\mathcal{E}(0) + \frac{T}{2}(\mathcal{E}(T) + \int_0^T \int_\Gamma (|\partial_t u|^2 + |E \times \nu|^2\, d\sigma\, dt))$$

En utilisant la condition (3.3) *on obtient*

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\, dt \leq \frac{T}{2}\mathcal{E}(0) + \frac{T}{2}(1 + C) \int_0^T \int_\Gamma (|\partial_t u|^2 + |E \times \nu|^2\, d\sigma\, dt$$

d'où l'inégalité (3.1) *avec $C_1 = \frac{T}{2}$, $C_2 = \frac{T}{2}(1 + C)$.*

Preuve. *(du théorème 3.1.1)* • *Montrons maintenant la condition suffisante de la stabilité exponentielle.*
La condition (3.3) *et l'identité du lemme de l'énergie nous donne :*

$$\mathcal{E}(T) \leq C(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)),$$

cette estimation est équivalente à

$$\mathcal{E}(T) \leq Y\mathcal{E}(0) \quad \textit{avec } Y = \frac{C}{1+C} \leq 1,$$

en appliquant cet argument à $[(m-1)T, mT]$*, pour* $m = 1, 2, \cdots$ *(qui est vérifié par ce que notre système est invariant par translation en temps) on obtient :*

$$\mathcal{E}(mT) \leq Y\mathcal{E}((m-1)T) \leq \cdots \leq Y^m\mathcal{E}(0), \quad m = 1, 2, \cdots$$

alors, on a

$$\mathcal{E}(mT) \leq \exp^{-\omega mT} \mathcal{E}(0), \quad m = 1, 2, 3, \cdots,$$

avec $\omega = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{Y} > 0$.
Pour un t *positif arbitraire, il existe* $m = 1, 2, 3, \cdots$ *tels que :*

$$(m-1)T \leq t \leq mT \quad \textit{avec } m = \textit{partie entière de } \frac{t}{T}$$

la décroissance de $\mathcal{E}$ *nous permet de conclure que*

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(m-1) \leq \frac{1}{Y} \exp^{-\omega T} \mathcal{E}(0)$$

par suite

$$\mathcal{E}(t) \leq M \exp^{-\omega t} \mathcal{E}(0) \quad \textit{avec } M = \frac{1}{Y} > 0$$

•*Montrons maintenant la condition nécessaire*
l'identité (2.38) *et la condition* (3.2) *nous permettent d'écrire*

$$\int_0^T \int_\Gamma (|\partial_t u|^2 + |E \times \nu|^2) \leq \mathcal{E}(0)(1 - M \exp^{-\omega T})$$

d'autre part, on a

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\, dt \leq M\mathcal{E}(0)\frac{(1 - \exp^{-\omega T})}{\omega},$$

par conséquent pour tout C_1

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\, dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + \left(M\frac{(1 - \exp^{-\omega T})}{\omega} - C_1\right)\mathcal{E}(0)$$

on choisit T *assez grand pour que* $(1 - M \exp^{-\omega T})$ *soit positif et*

$$C_1 < \min\left\{M\frac{(1 - \exp^{-\omega T})}{\omega}, T\right\},$$

d'où le résultat pour

$$C_2 = \left(M\frac{(1 - \exp^{-\omega T})}{\omega} - C_1\right)\left(1 - M \exp^{-\omega T}\right)^{-1}.$$

Lemme 3.1.2. *Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^2$, (u, E, H) une solution de (2.1) avec $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$, alors pour tout $\theta > 0$, il existe une constante $C(\theta) > 0$(qui ne dépend pas de T, elle dépend de θ, du diamètre de Ω, des coefficients a_{ijkl}, μ et du paramètre ξ) tels que :*

$$\int_{\Sigma_T} |u|^2 \, d\sigma \leq C(\theta)\mathcal{E}(0) + \theta \int_0^T \mathcal{E}(t) \, dt \tag{3.4}$$

Preuve. *Pour $t \geq 0$, on considére la fonction $z = z(t)$ solution du problème*

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma(z) = 0 & \textit{dans } \Omega \\ z = u & \textit{sur } \Gamma \end{cases} \tag{3.5}$$

z s'écrit sous la forme $z = \omega + u$, où $\omega \in H_0^1(\Omega)^3$ est la solution du problème vartionnel :

$$\int_\Omega \sigma(\omega) : e(v) \, dx = -\int_\Omega \sigma(u) : e(v) \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3,$$

ce qui donne

$$\int_\Omega \sigma(\omega) : e(v) \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3, \tag{3.6}$$

pour $v = z - u$, on a

$$\int_\Omega \sigma(z) : e(z - u) \, dx = 0$$

$$\int_\Omega \sigma(z) : e(z) \, dx - \int_\Omega \sigma(z) : e(u) \, dx = 0$$

ce qui implique

$$\int_\Omega \sigma(z) : e(z) \, dx = \int_\Omega \sigma(z) : e(u) \, dx \geq 0. \tag{3.7}$$

Montrons que z la solution du problème (3.5) vérifie aussi l'identité

$$\int_\Omega f \cdot z \, dx = -\int_\Gamma z \cdot (\sigma(v_f) \cdot \nu) \, d\sigma \quad \forall f \in L^2(\Omega)^3 \tag{3.8}$$

où $v_f \in H_0^1(\Omega)^3$ est la solution unique du problème

$$\int_\Omega \sigma(v_f) : e(\omega) \, dx = \int_\Omega f \, \omega \, dx, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega)^3 \tag{3.9}$$

en effet, l'identité (3.7) et la propriété $\sigma(z) : e(v) = \sigma(v) : e(z)$ (conséquence de $a_{ijkl} = a_{klij}$) donne

$$\int_\Omega \sigma(v_f) : e(z) \, dx = \int_\Omega \sigma(z) : e(v_f) \, dx \tag{3.10}$$

en appliquant la formule de Green, on aura

$$-\int_\Omega z \operatorname{div}\sigma(v_f) \, dx = \int_\Omega \sigma(z) : e(v_f) \, dx = 0$$

ce qui prouve (3.8) *en posant* $\mathrm{div}\sigma(v_f) = -f$
on prend $f = z$ *dans* (3.8), *on obtient*

$$\int_\Omega |z|^2 \, dx = -\int_\Gamma z\,(\sigma(v_f)\cdot\nu)\, d\sigma.$$

Comme $z = u$ *sur* Γ, *en utilisant Cauchy Schwarz, on obtient*

$$\int_\Omega |z|^2 \, dx \le \|u\|_{L^2(\Gamma)^3} \|\sigma(v_f)\cdot\nu\|_{L^2(\Gamma)^3}$$

comme Γ *est de classe* $\mathcal{C}^2$, *la régularité elliptique montre que* $v_z \in H^2(\Omega)^3$ *donc on a*

$$\|v_z\|_{H^2(\Omega)^3} \le k\|z\|_{L^2(\Omega)^3}, \quad \text{où } k \text{ est une constante positive}$$

cette estimation et le théorème standard de trace donnent

$$\|\sigma(v_z)\cdot\nu\|_{L^2(\Omega)^3} \le k_1\|z\|_{L^2(\Omega)^3} \quad \text{pour une constante } k_1 \text{ positive}$$

par conséquent

$$\int_\Omega |z|^2 \, dx \le k_1\|u\|_{L^2(\Omega)^3}\|z\|_{L^2(\Omega)^3}$$

en simplifiant par $\|z\|_{L^2(\Omega)^3}$, *on obtient*

$$\|z\|_{L^2(\Omega)^3} \le C_0\|u\|_{L^2(\Gamma)^3} \le \frac{2C_0}{A}\mathcal{E}(t) \tag{3.11}$$

d'autre part, en dérivant par rapport à t, *on voit que* $\partial_t z$ *est solution du problème*

$$\begin{cases} \mathrm{div}\sigma(\partial_t z) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_t z = \partial_t u & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et on a

$$\int_\Omega |\partial_t z|^2 \, dx \le C_0 \int_\Gamma |\partial_t u|^2 \, d\sigma$$

$$\le -C_0\mathcal{E}'(t),$$

$$\int_\Omega |\partial_t z|^2 \, dx \le -C_0\mathcal{E}'(t). \tag{3.12}$$

Maintenant on multiplie la première équation de (2.1) *par* z, *et on intégre sur* $Q_T = \Omega\times]0,T[$

$$\int_{Q_T} z(\partial_t^2 u - \mathrm{div}\sigma(u) + \xi \mathrm{rot}\, E) dx\, dt = 0$$

la formule de Green donne

$$\int_{Q_T} z\partial_t^2 u\,dx\,dt + \int_{Q_t} \sigma(u) : e(z)\,dx\,dt - \int_{\Sigma_T} z\cdot\sigma(u)\cdot\nu\,d\sigma\,dt + \xi\int_{Q_T} z\cdot\mathrm{rot}\,E\,dx\,dt = 0,$$

en utilisant la condition au bord (2.9) *et la deuxième équation de* (3.5) *sur* Γ*, on obtient :*

$$\int_{Q_T} z\cdot\partial_t^2 u\,dx\,dt + \int_{Q_T} \sigma(u) : e(z)\,dx\,dt + \int_{\Sigma_T} z(A\,u + \partial_t u)\,d\sigma\,dt + \xi\int_{Q_T} z\cdot\mathrm{rot}\,E\,dx\,dt = 0$$

$$-A\int_{\Sigma_T} |u|^2\,d\sigma\,dt - \int_{\Sigma_T} u\cdot\partial_t u\,d\sigma\,dt = \int_{Q_T} z\cdot\partial_t^2 u\,dx\,dt + \int_{Q_T} \sigma(u) : e(z)\,dx\,dt + \xi\int_{Q_T} z\cdot\mathrm{rot}\,E\,dx\,dt$$

$$A\int_{\Sigma_T} |u|^2\,d\sigma\,dt = -\int_{\Sigma_T} u\cdot\partial_t u\,d\sigma\,dt - \int_{Q_T} z\cdot\partial_t^2 u\,dx\,dt - \int_{Q_T} \sigma(z) : e(z)\,dx\,dt$$

la condition (3.7) *donne :*

$$A\int_{\Sigma_T} |u|^2\,d\sigma\,dt \le -\int_{\Sigma_T} u\cdot\partial_t u\,d\sigma\,dt - \int_{Q_T} z(\partial_t^2 u + \xi\,\mathrm{rot}\,E)\,dx\,dt$$

la troisième équation de (2.1) *mène à*

$$A\int_{\Sigma_T} |u|^2\,d\sigma\,dt \le -\int_{\Sigma_T} u\cdot\partial_t u\,d\sigma\,dt - \int_{Q_T} z(\partial_t^2 u - \xi\,\mu\,\partial_t H)\,dx\,dt$$

en intégrant par parties sur t*, on aura finalement*

$$A\int_{\Sigma_T} |u|^2\,d\sigma\,dt \le -\int_{\Sigma_T} u\cdot\partial_t u\,d\sigma\,dt + \int_{Q_T} \partial_t z(\partial_t u - \xi\,\mu\,H)\,dx\,dt - \left[\int_\Omega z(\partial_t u - \xi\,\mu\,H)\,dx\,dt\right]_0^T. \tag{3.13}$$

Il reste à estimer chaque terme du second membre de (3.13)

pour le premier terme : en appliquant l'inégalité de young ($ab \le \theta a^2 + \frac{b^2}{4\theta}$) *on obtient*

$$\int_{\Sigma_T} u\cdot\partial_t u\,d\sigma\,dt \le \frac{A}{2}\int_{\Sigma_T} |u|^2\,d\sigma\,dt + \frac{1}{2A}\int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2\,d\sigma\,dt$$

$$\le \frac{A}{2}\int_{\Sigma_T} |u|^2\,d\sigma\,dt - \frac{1}{2A}\int_0^T \mathcal{E}'(t)\,dt$$

comme l'énergie est positive on arrive à

$$\left|\int_{\Sigma_T} u \cdot \partial_t u \, d\sigma \, dt\right| \leq \frac{A}{2}\int_{\Sigma_T} |u|^2 \, d\sigma \, dt + \frac{1}{2A}(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T))$$

$$\left|\int_{\Sigma_T} u \cdot \partial_t u \, d\sigma \, dt\right| \leq \frac{A}{2}\int_{\Sigma_T} |u|^2 \, d\sigma \, dt + \frac{1}{2A}\mathcal{E}(0) \tag{3.14}$$

pour le deuxième terme, on utilise successivement l'inégalité de Young, l'inégalité de cauchy Schwarz, l'estimation (3.11) *et la définition de l'énergie, on obtient*

$$\left|\int_{Q_T} \partial_t z \, (\partial_t u - \xi \, \mu \, H) \, dx \, dt\right| \leq \frac{1}{4\theta}\int_{Q_T} |\partial_t z|^2 \, dx \, dt + \theta \int_{Q_T} |\partial_t u - \xi \, \mu \, H|^2 \, dx \, dt$$

$$\leq \frac{-C_0}{4\theta}\int_0^T \mathcal{E}'(t) \, dt + \theta \int_{Q_T} |\partial_t u - \xi \, \mu \, H|^2 \, dx \, dt$$

On a $|\partial_T u - \xi \, \mu \, H|^2 \leq 2(|\partial_t u|^2 + \xi^2 \, \mu^2 \, |H|^2)$

$$\left|\int_{Q_T} \partial_t \, z(\partial_t \, u - \xi \, \mu \, H) dx \, dt\right| \leq \frac{-C_0}{4\,\theta}\int_0^T \mathcal{E}'(t) \, dt + (1 + \xi^2 \, \mu)\theta \int_0^T \mathcal{E}(t) \, dt$$

en remplaçant $(1 + \xi^2 \, \mu)\theta$ *par* θ*, on conclut que pour tout* $\theta > 0$

$$\left|\int_{Q_T} |\partial_t \, z(\partial_t \, u - \xi \, \mu \, H) dx \, dt\right| \leq \frac{C_1}{\theta}\mathcal{E}(0) + \theta \int_0^T \mathcal{E}(t) \, dt \tag{3.15}$$

pour le troisième terme, Cauchy schwarz, l'estimation (**??**) *et la définition de l'énergie donne*

$$\left|\left[\int_\Omega z(\partial_t \, u - \xi \, \mu \; H)\right]_0^T\right| \leq \left[\int_\Omega |z|^2 \, dx\right]_0^T \left[\int_\Omega |\partial_t u - \xi \, \mu \, H|^2\right]_0^T$$

$$\leq \left[\frac{2C_0}{A}\mathcal{E}(t)\right]_0^T \theta \int_0^T \mathcal{E}(t) \, dt$$

$$\leq C_2(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)) \leq 2 \, C_2 \, \mathcal{E}(0)$$

$$\left|\left[\int_\Omega z(\partial_t \, u - \xi \, \mu \, H)\right]_0^T\right| \leq 2 \, C_2 \, \mathcal{E}(0) \tag{3.16}$$

et comme l'énergie est décroissante, le résultat découle des estimations (3.13),(3.14) *et* (3.16)

4
Contrôlabilité exacte

En utilisant la stabilité exponentielle dans le cas linéaire et le principe de Russell, on déduit la contrôlabilité exacte du système élasto-magnétique (2.1).

4.1 Contrôlabilité exacte

Pour tout $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$, on cherche un temps $T > 0$ et deux contrôles $J_1, J_2 \in L^2(\Gamma \times]0, T[)^3$ tels que la solution (u, E, H) du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \mathrm{div}\sigma(u) + \xi \,\mathrm{rot}\, E = 0, & \text{dans } Q_T = \Omega \times]0, T[\\ \varepsilon\, \partial_t E - \mathrm{rot}\, H - \xi \,\mathrm{rot}\, \partial_t u = 0, & \text{dans } Q_T \\ \mu\, \partial_t\, H + \mathrm{rot}\, E = 0, & \text{dans } Q_T \\ \mathrm{div}(\varepsilon\, E) = \mathrm{div}(\mu\, H) = 0, & \text{dans } Q_T \\ H \times \nu + \xi\, \partial_t u \times \nu = J_1, & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times]0, T[\\ \sigma(u) \cdot \nu + A\, u = J_2, & \text{sur } \Sigma_T \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

satisfait

$$u(T) = \partial_t u(T) = E(T) = H(T) = 0. \tag{4.2}$$

Théorème 4.1.1. *Si Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité, alors pour $T > 0$ suffisamment grand, pour $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$, il existe deux contrôles $J_1, J_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$ vérifiant*

$$J_1 \cdot \nu = 0 \quad \textit{sur } \Sigma_T \tag{4.3}$$

tels que la solution $(u, \partial_t u, E, H) \in \mathcal{C}([0,T], \mathcal{H})$ de (4.1) verifie (4.2) au temps T.

Preuve. *On contrôle le problème inverse pour $(y_0, y_1, P_0, Q_0) \in \mathcal{H}$ et pour $K_1, K_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$ avec K_1 vérifie (4.3). La solution $(y, \partial_t y, P, Q) \in \mathcal{C}([0,T], \mathcal{H})$ du problème*

$$\begin{cases} \partial_t^2 y - \mathrm{div}\sigma(y) + \xi \,\mathrm{rot}\, P = 0, & \textit{dans } Q_T \\ \varepsilon\, \partial_t P - \mathrm{rot}\, Q - \xi \,\mathrm{rot}\, \partial_t y = 0, & \textit{dans } Q_T \\ \mu\, \partial_t Q + \mathrm{rot}\, P = 0, & \textit{dans } Q_T \\ \mathrm{div}\,(\varepsilon P) = \mathrm{div}(\mu\, Q) = 0, & \textit{dans } Q_T \\ Q \times \nu + \xi\, \partial_t y \times \nu = K_1, & \textit{sur } \Sigma_T \\ \sigma(y) \cdot \nu + A\, y = K_2, & \textit{sur } \Sigma_T \\ y(T) = y_0, \partial_t\, y(T) = y_1, P(T) = P_0, Q(0) = Q_0, & \textit{dans } \Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

vérifie

$$y(0) = \partial_t y(0) = P(0) = Q(0) = 0. \tag{4.5}$$

Si le problème (4.4) et (4.5) admet une solution, il suffit de faire le changement de variables

$$u(t) = -y(T-t),\ E(t) = -P(T-t),\ H(t) = Q(T-t) \qquad t \in [0,T].$$

On résoud le problème (4.4) et (4.5) en utilisant le système inverse et direct avec les conditions linéaires sur le bord Γ.

Soit $(v_0, v_1, F_0, I_0) \in \mathcal{H}$*, on considère le système suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \mathrm{div}\sigma(v) + \xi \,\mathrm{rot}\, F = 0, & \textit{dans } Q_T \\ \varepsilon \partial_t F - \mathrm{rot}\, I - \xi \,\mathrm{rot}\, \partial_t v = 0, & \textit{dans } Q_T \\ \mu\, \partial_t I + \mathrm{rot}\, F = 0, & \textit{dans } Q_T \\ \mathrm{div}(\varepsilon\, F) = \mathrm{div}(\mu\, I) = 0, & \textit{dans } Q_T \\ I \times \nu + \xi\, \partial_t v \times \nu - (E \times \nu) \times \nu = 0, & \textit{sur } \Sigma_T \\ \sigma(v) \cdot \nu + A\, v - \partial_t v = 0, & \textit{sur } \Sigma_T \\ v(T) = v_0, \partial_t v(T) = v_1, F(T) = F_0, I(T) = I_0, & \textit{dans } \Omega \end{cases} \tag{4.6}$$

qui admet une solution unique $(v, \partial_t v, F, I) \in \mathcal{C}(]0, T[, \mathcal{H})$*, il suffit de faire le changement de variables :*

$$\tilde{u} = -v(T - t),\ \ \tilde{E} = -F(T - t) \ \textit{ et } \tilde{H} = I(T - t)$$

comme l'énergie de la solution $(\tilde{u}, \tilde{E}, \tilde{H})$ *est exponentiellement stable, alors*

$$\mathcal{E}(v(t), \partial_t v(t), F(t), I(t)) \leq M\, e^{-\omega(T-t)} \mathcal{E}(v_0, v_1, F_0, I_0), \qquad \forall t \in [0, T] \tag{4.7}$$

pour tout $(v_0, v_1, F_0, I_0) \in \mathcal{H}$*, tel que* $\mathcal{E}(v(t), \partial_t v(t), F(t), I(t))$ *est l'expression de l'énergie avec* $u, \partial_t u, E, H$ *remplacés par* v, ∂_t, F, I*.*
A présent, on considère le système

$$\begin{cases} \partial_t^2 \omega - \mathrm{div}\sigma(\omega) + \xi \,\mathrm{rot}\, G = 0, & \textit{dans } Q_T \\ \varepsilon\, \partial_t G - \mathrm{rot}\, J - \xi \,\mathrm{rot}\, \partial_t \omega = 0, & \textit{dans } Q_T \\ \mu\, \partial_t J + \mathrm{rot}\, G = 0, & \textit{dans } Q_T \\ \mathrm{div}\,(\varepsilon\, G) = \mathrm{div}(\mu\, J) = 0, & \textit{dans } Q_T \\ J \times \nu + \xi\, \partial_t(\omega) \times \nu + (G \times \nu) \times \nu = 0, & \textit{sur } \Sigma_T \\ \sigma(\omega) \cdot \nu \,+\, A\, \omega + \partial_t \omega = 0, & \textit{sur } \Sigma_T \\ \omega(0) = v(0), \partial_t \omega(0) = \partial_t v(0), G(0) = F(0), J(0) = I(0), & \textit{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.8}$$

qui admet une solution unique $(\omega, \partial_t \omega, G, J) \in \mathcal{C}(]0, T[, \mathcal{H})$ *car* $(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0)) \in \mathcal{H}$

On pose $y = \omega - v, P = G - F$ *et* $Q = J - I$,

d'après (4.8) *et* (4.6), (y, P, Q) *satisfait* (4.4) *avec*

$$K_1 = -(G \times \nu) \times \nu - (F \times \nu) \times \nu, \tag{4.9}$$
$$K_2 = -\partial_t \omega - \partial_t v. \tag{4.10}$$

On considère l'opérateur $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *défini par :*

$$\Lambda(v_0, v_1, F_0, I_0) = (\omega(T), \partial_t \omega(T), G(T), J(T)).$$

Pour $T > 0$, *on pose* $d = M\, e^{-\omega T} < 1$ *et on montre que* $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq \sqrt{d} < 1$

on a

$$\|\Lambda(v_0, v_1, F_0, I_0)\|^2_{\mathcal{H}} = \|(\omega(T), \partial_t \omega(T), G(T), J(T))\|^2_{\mathcal{H}}$$

$$= 2\mathcal{E}(\omega(T), \partial_t \omega(T), G(T), J(T))$$

car $\mathcal{E}(\omega(T), \partial_t \omega(T), G(T), J(T)) = \frac{1}{2}\|(\omega(t), \partial_t \omega(t), G(t), J(t))\|^2_{\mathcal{H}}$

pour tout $t \in [0, T]$ *donc vrai pour* T *d'où*

$$\|\Lambda(v_0, v_1, F_0, I_0)\|^2_{\mathcal{H}} = 2\mathcal{E}(\omega(T), \partial_t \omega(T), G(T), J(T))$$

$$\leq 2\mathcal{E}(\omega(0), \partial_t \omega(0), G(0), J(0))$$

car $\mathcal{E}$ *est décroissante, donc*

$$\|\Lambda(v_0, v_1, F_0, I_0)\|^2_{\mathcal{H}} \leq 2\mathcal{E}(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0))$$

$$\leq 2\, M\, e^{-\omega T} \mathcal{E}(v_0, v_1, F_0, I_0)$$

car $\mathcal{E}(v(t), \partial_t v(t), F(t), I(t)) \leq M\, e^{-\omega(T-t)} \mathcal{E}(v_0, v_1, F_0, I_0)$

alors pour $t = 0$, *on a*

$$\mathcal{E}(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0)) \leq M\, e^{-\omega T} \mathcal{E}(v_0, v_1, F_0, I_0)$$

$$= d\|(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$\|\Lambda(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq d\|(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2$$

on a

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq \sqrt{d} < 1$$

donc $\Lambda - I$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}$ *dans* $\mathcal{H}$.

$$(y_0, y_1, P_0, Q_0) = (\Lambda - I)(v_0, v_1, F_0, I_0) \tag{4.11}$$

$$(y_0, y_1, P_0, Q_0) = (\Lambda - I)(v_0, v_1, F_0, I_0)$$

$$= (\omega(T), \partial_t \omega(T), G(T), J(T)) - (v_0, v_1, F_0, I_0)$$

$$= (y(T), \partial_t y(T), P(T), Q(T))$$

alors on a une solution initiale (y_0, y_1, P_0, Q_0) *du problème* (4.4).
Il reste à montrer que $K_1, K_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$, *on a*

$$\mathcal{E}' = -\int_\Gamma (|(E(t) \times \nu)|^2 + |u'(t)|^2)\, d\sigma$$

$$\mathcal{E}(v(T), \partial_t v(T), F(T), I(T)) - \mathcal{E}(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0)) = \int_{\Sigma_T} (|F(t) \times \nu|^2 + |\partial_t v(t)|^2)\, d\sigma\, dt$$

$$\mathcal{E}(\omega(0), \partial_t \omega(0), G(0), J(0)) - \mathcal{E}(\omega(T), \partial_t \omega(T), G(T), J(T)) = \int_{\Sigma_T} (|G(t) \times \nu|^2 + |\partial_t \omega(t)|^2)\, d\sigma\, dt$$

en sommant les deux identités et en utilisant $(y_0, y_1, P_0, Q_0) = (\Lambda - I)(v_0, v_1, F_0, I_0)$ *et* $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_T} (|F \times \nu|^2 + |G \times \nu|^2 + |\partial_t v(t)|^2 + |\partial_t \omega(t)|^2)\, d\sigma\, dt = \\
= \;& \mathcal{E}(v(T), \partial_t v(T), F(T), I(T)) - \mathcal{E}(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0)) \\
+ \;& \mathcal{E}(\omega(T), \partial_t \omega(T), G(T), J(T)) - \mathcal{E}(\omega(0), \partial_t \omega(0), G(0), J(0)) \\
= \;& \mathcal{E}(v(T), \partial_t v(T), F(T), I(T)) - \mathcal{E}(\omega(0), \partial_t \omega(0), G(0), J(0))
\end{aligned}$$

car $v(0) = \omega(0),\ \partial_t v(0) = \partial_t \omega(0) =, F(0) = G(0),\ I(0) = J(0)$

$$\leq \mathcal{E}(v(T), \partial_t v(T), F(T), I(T))$$

$$\leq \frac{1}{2} \|(v_0, v_1, F_0, I_0)\|^2_{\mathcal{H}}$$

en utilisant l'identité (4.11) *et* $(I - A)^{-1}$ *est borné on aura*

$$\int_{\Sigma_T} \left\{ |F \times \nu|^2 \, + \, |G \times \nu|^2 \, + \, |\partial_t v(t)|^2 \, + \, |\partial_t w(t)|^2 \right\} \, d\sigma \, dt$$

$$\leq \frac{1}{2} \|(I\| - A)^{-\|1} \, (y_0, y_1, P_0, Q_0)\|^2_{\mathcal{H}} \tag{4.12}$$

$$\leq \frac{1}{2(1 - \sqrt{d})^2} \|(y_0, y_1, P_0, Q_0)\|^2_{\mathcal{H}}$$

donc $K_1, K_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$ *et l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\to \ L^2(\Sigma_T)^3 \times L^2(\Sigma_T)^3 \\ (y_0, y_1, P_0, Q_0) &\to (K_1, K_2) \end{aligned}$$

est continue.

5

La stabilité dans le cas non linéaire

5.1 La stabilité dans le cas non linéaire

Dans cette section on montre qu'à partir de la stabilité exponentielle, le système non linéaire associé est automatiquement stable, et cela est basé sur le principe de Liu qui consiste à estimer l'énergie du système non linéaire direct, en utilisant le système rétrograde linéaire avec donnée finale égale à la valeur finale de la solution du système non linéaire direct à donnée initiale nulle. Cette estimation se déduit en utilisant la stabilité exponentielle du système rétrograde linéaire, une inégalité intégrale et une sequence adéquate.
On commence par donner l'inégalité intégrale suivante ([9]) :

Théorème 5.1.1. *Soit* $\mathcal{E} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *une fonction décroissante telle que :*

$$\int_S^\infty \phi(\mathcal{E}(t))\,d\,t \leq T\,\mathcal{E}(S), \quad \forall\, S \geq 0 \tag{5.1}$$

avec $T > 0$ *et* ϕ *une fonction convexe, strictement croissante de* $[0,+\infty[$ *dans* $[0,+\infty[$ *telle que* $\phi(0) = 0$*, alors il existe* $t_1 > 0$ *et* c_1 *dépendant de* T *et* $\mathcal{E}(0)$ *tels que :*

$$\mathcal{E}(t) \leq \phi^{-1}\left(\frac{\psi^{-1}(c_1 t)}{c_1 T t}\right), \quad \forall\, t \geq\, t_1 \tag{5.2}$$

où ψ *est donnée par :*

$$\psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\phi(s)}\,d\,s, \quad \forall t > 0 \tag{5.3}$$

Preuve. *On pose*

$$h(t) = \int_t^{+\infty} \phi(\mathcal{E}(s))\,d\,s, \quad \forall t \geq 0 \tag{5.4}$$

de (5.1), *h est bien définie et satisfait*

$$h(t) \leq T\,\mathcal{E}(t), \quad \forall\, t \geq 0 \tag{5.5}$$

comme ϕ est strictement croissante alors

$$\phi(T^{-1}h(t)) \leq \phi(\mathcal{E}(t)), \quad \forall\, t \geq 0 \tag{5.6}$$

d'après la définition de h

$$h'(t) = -\phi(\mathcal{E}(t))$$

en utilisant (5.6) *on obtient*

$$-h'(t) \geq \phi(T^{-1}h(t)), \quad \forall\, t \geq 0, \tag{5.7}$$

maintenant on considère la fonction

$$g(t) = \psi(T^{-1}h(t))$$

avec ψ une fonction définie par (5.3)

$$g'(t) = \frac{-h'(t)}{T\,\phi(T^{-1}h(t))},$$

en utilisant (5.7), *on obtient*

$$g'(t) \geq T^{-1}$$

en intégrant entre 0 *et t, on obtient*

$$\psi(T^{-1}h(t)) - \psi(T^{-1}h(0)) \geq \frac{t}{T} \tag{5.8}$$

d'après (5.4) *on a*

$$h(0) = \int_0^{+\infty} \phi(\mathcal{E}(s))\,d\,s$$

et (5.1) *donne*

$$T^{-1}h(0) \leq \mathcal{E}(0).$$

Comme ψ est décroissante, alors

$$\psi(T^{-1}h(0)) \geq \psi(\mathcal{E}(0)) \tag{5.9}$$

les inégalités (5.8) *et* (5.9) *donne*

$$\psi(T^{-1}h(t)) \geq \psi(\mathcal{E}(0)) + \frac{t}{T}. \tag{5.10}$$

Comme ϕ *est convexe et* $\phi(0) = 0$, *alors*

$$\phi(s) \leq s\,\phi(1),$$

d'où

$$\frac{1}{\phi(s)} \geq \frac{1}{s}\,(\phi(1))^{-1} \qquad s \in [0,1]$$

en intégrant entre t *et* 1, *on obtient*

$$\psi(t) \geq (\phi(1))^{-1} \log\frac{1}{t}, \quad \forall t \in [0,1]$$

alors

$$\psi(t) \to +\infty \quad \textit{quand } t \to 0 \tag{5.11}$$

$$\psi(t) \geq \psi(t_0) > 0, \ \forall t \in]0, t_0], t_0 < 1 \tag{5.12}$$

et si $\psi(\mathcal{E}(0)) + \frac{t}{T} \geq 0$ *dans* (5.10), *et comme* ψ *est décroissante on aurra :*

$$T^{-1}h(t) \leq \psi^{-1}\left(\psi(\mathcal{E}(0)) + \frac{t}{T}\right), \quad \forall t \geq -T\psi(\mathcal{E}(0)) \tag{5.13}$$

l'énergie $\mathcal{E}$ *est décroissante, alors on peut écrire*

$$\mathcal{E}(\gamma_t + t) \leq \gamma_t^{-1}\int_t^{\gamma_t + t} \mathcal{E}(s)\,d\,s.$$

Pour $\gamma_t = \psi(\mathcal{E}(0)) + \frac{t}{T}$ *et en utilisant l'inégalité de jensen (voir lemme 1.2.1), on obtient*

$$\phi(\mathcal{E}(\gamma_t + t)) \leq \gamma_t^{-1}\int_t^{\gamma_t + t} \phi(\mathcal{E}(s))\,d\,s \leq \gamma_t^{-1}\,h(t),$$

l'estimation (5.13) *donne*

$$\phi(\mathcal{E}(\gamma_t + t)) \leq \phi^{-1}\left(\psi^{-1}\frac{(\gamma_t)}{T\,\gamma_t}\right)$$

pour t_2 *qui dépend de* T *et* $\mathcal{E}(0)$, *il existe* c_1 *et* t_3 *(qui dépend de* T *et* $\mathcal{E}(0)$*) tels que :*

$$\gamma_t \geq c_1(t+\gamma_t), \quad \forall t \geq t_3$$

ces deux dernières inégalités donnent

$$\mathcal{E}(\gamma_t + t) \leq \phi^{-1}\left(\frac{\psi^{-1}(c_1(t+\gamma_t))}{c_1 T(t+\gamma_t)}\right) \quad \forall t \geq t_4$$

avec $t_4 = \max\{t_2, t_3\}$

on pose $t' = \gamma_t + t = \psi(\mathcal{E}(0)) + \frac{t}{T} + t$

on arrive à (5.2).

Lemme 5.1.1. *([16]) Soit* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *une fonction continue qui satisfait les propriétés* (2.10), (2.19), (2.20) *et* (2.21) *ainsi que la propriété suivante :*

$$|E|^2 + |g(E)|^2 \leq G(g(E)\cdot E), \quad \forall |E| \leq 1 \tag{5.14}$$

avec G *une fonction concave strictement croissante de* $[0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *et* $G(0) = 0$, *alors il existe une suite de fonctions globalement Lipschitziennes et continues*

$$g_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

qui satisfait les propriétés (2.10)*(avec la même constante que* g*),* (2.19), (2.20) *ainsi que*

$$g_k(x)\cdot x \geq m'|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad |x| \geq 2 \tag{5.15}$$

$$|x|^2 + |g_k(x)|^2 \leq \gamma G(g_k(x)\cdot x) \quad \forall |x| \leq 2 \tag{5.16}$$

avec m' *et* γ *des constantes positives indépendantes de* k*. De plus* g_k *satisfait*

$$|g_k(x)| \leq |g(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{5.17}$$

$$g_k(x) \to g(x) \quad \textit{quand } k \to \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \tag{5.18}$$

Preuve. *On pose* $g_k(x) = g((I + k^{-1}g)^{-1}(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{N}^*$,
cette définition a un sens si $(I + k^{-1}g)$ *est inversible, qui vient de la monotonie de* g.
La définition de g_k *nous donne directement*

$$g_k(x) \to g(x) \quad \textit{quand } k \to +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

- *Montrons la monotonie de* g_k

Pour $x_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2,$ *on pose*

$$y_i = (I + k^{-1}g)^{-1}(x_i),\ \ i = 1, 2 \tag{5.19}$$

alors

$$g(y_i) = g_k(x_i),\ \ i = 1, 2 \tag{5.20}$$

$$y_i + k^{-1}g(y_i) = x_i,\ \ i = 1, 2 \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} y_1 + k^{-1}g(y_1) &= x_1 \\ y_2 + k^{-1}g(y_2) &= x_2 \end{aligned}$$

la soustraction donne

$$k^{-1}(g(y_1) - g(y_2)) = x_1 - x_2 - (y_1 - y_2), \tag{5.22}$$

en utilisant le produit scalaire avec $(x_1 - x_2)$ *et l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient*

$$k^{-1}(g(y_1) - g(y_2))(x_1 - x_2) \geq |x_1 - x_2|(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \tag{5.23}$$

le produit scalaire avec $(y_1 - y_2)$ *dans* (5.22) *donne*

$$k^{-1}(g(y_1) - g(y_2))(y_1 - y_2) = ((x_1 - x_2) - (y_1 - y_2))(y_1 - y_2)$$

alors

$$(g(y_1) - g(y_2))(y_1 - y_2) = k((x_1 - x_2) - (y_1 - y_2))(y_1 - y_2),$$

par suite

$$|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2| \tag{5.24}$$

en utilisant (5.24) *dans* (5.23) *on aura*

$$k^{-1}(g(y_1) - g(y_2))(x_1 - x_2) \geq 0$$

et l'identité (5.20) *nous permet de conclure que :*

$$(g_k(x_1) - g_k(x_2)(x_1 - x_2) \geq 0$$

d'où g_k *est monotone.*

- g_k *globalement Lipschitzienne.*

Dans l'identité (5.22), *le produit scalaire avec* $(g(y_1) - g(y_2))$ *donne*

$$\begin{aligned} k^{-1}|g(y_1) - g(y_2)|^2 &= (x_1 - x_2)(g(y_1) - g(y_2)) - (y_1 - y_2)(g(y_1) - g(y_2)) \\ &\leq |x_1 - x_2||g(y_1 - g(y_2))| + |y_1 - y_2||g(y_1) - g(y_2)|. \end{aligned}$$

En utilisant (5.24), *on obtient*

$$k^{-1}|g(y_1)-g(y_2)|^2 \leq 2|x_1-x_2||g(y_1)-g(y_2))|$$

alors

$$k^{-1}|g(y_1)-g(y_2)| \leq 2|x_1-x_2|,$$

et en utilisant l'identité $g(y_i)=g_k(x_i)$, *on conclut que* g_k *est globalement Lipschitzienne.*

• *Montrons que* $|g_k(x)| \leq |g(x)|$. *On fixe* $x \in \mathbb{R}^3$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^3$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$y=(I+k^{-1}g)^{-1}(x), \tag{5.25}$$

alors, on a

$$g(y)=g_k(x), \tag{5.26}$$

d'où

$$y+k^{-1}g(y)=x \tag{5.27}$$

dans l'identité (5.27), *le produit scalaire avec* $(g(x)-g(y))$ *donne*

$$k^{-1}g(y)(g(x)-g(y))=(x-y)(g(x)-g(y)),$$

la monotonie de g *nous permet d'écrire*

$$0 \leq k^{-1}g(y)\cdot g(x)-k^{-1}|g(y)|^2$$

d'où

$$|g(y)|^2 \leq |g(y)||g(x)|,$$

par conséquent

$$|g(y)| \leq |g(x)|,$$

on remplace $g(y)$ *par* $g_k(x)$, *et on conclut que*

$$|g_k(x)| \leq |g(x)|.$$

Les propriétés (2.10) *et* (2.20) *sont satisfaites par* g_k *avec la même constante que* g, *et cela grace a la propriété* (5.17).

• *Montrons l'inégalité* (5.15).

On commence d'abord par etablir l'inégalité suivante :

$$g_k(x)\cdot x \geq g(y)\cdot y \tag{5.28}$$

d'après (5.27)*, on a*

$$k^{-1}g(y) = x - y$$

le produit scalaire avec $g(y)$ *nous donne*

$$k^{-1}|g(y)|^2 = g(y)(x - y) \geq 0,$$

d'où

$$g(y) \cdot x \geq g(y) \cdot y,$$

on conclut grace à (5.26)*.*

On fixe $|x| \geq 2$*, et soit* y *défini par* (5.25)*.*
a) *Si* $|y| \leq \frac{|x|}{2}$*, alors en utilisant* (5.26) *et* (5.27)*, on obtient*

$$k^{-1}g_k(x) \cdot x = k^{-1}g(y) \cdot x = (x - y) \cdot x,$$

et en utilisant la propriété $|y| \leq \frac{|x|}{2}$*, on obtient*

$$g_k(x) \cdot x \geq \frac{|x|^2}{2}. \tag{5.29}$$

b) *Si* $|y| \geq \frac{|x|^2}{2}$*, alors* $|y| \geq 1$ *et en utilisant* (2.21)*, on aura*

$$g(y) \cdot y \geq m|y|^2 \geq \frac{m}{4}|x|^2,$$

l'inégalité (5.28) *nous donne*

$$g_k(x) \cdot x \geq \frac{m}{4}|x|^2, \tag{5.30}$$

d'après (5.29) *et* (5.30)*,* g_k *satisfait* (5.15) *avec* $m' = \min(\frac{1}{2}, \frac{m}{4})$*.*

• *Il reste à montrer* (5.16)*.*

Les propriétés (2.10)*,* (2.21) *et* (5.14) *satisfaites par* g*, impliquent*

$$|x|^2 + |g(x)|^2 \leq c\,G(g(x) \cdot x), \quad \forall |x| \leq 2 \tag{5.31}$$

c *est une constante qui dépend seulement de* G*, en effet pour* $1 \leq |x| \leq 2$*, en utilisant* (2.10) *et* (2.21) *on obtient*

$$|x|^2 + |g(x)|^2 \leq \frac{1 + 4M^2}{m} g(x) \cdot x$$

et on a pour

$$1 \leq |x| \leq 2$$
$$1 \leq |x|^2 \leq 4$$

et

$$|g(x)| \leq M(1 + |x|)$$

$$|g(x)| \leq 6M$$

et comme G est concave alors on aura

$$z \leq C\,G(z), \quad \forall\ 0 \leq z \leq 6M, \tag{5.32}$$

(C dépend seulement de $6M$*)*
Ces trois estimations nous mènent à (5.31) *avec* $c = \max\{1, C\frac{1+4M^2}{m}\}$.

- *Pour* $|x| \leq 2$*, soit* y *donnée par* (5.25)*, d'après* (5.24) $|y| \leq |x|$ *alors* $|y| \leq 2$.

  a) *Pour* $|y| \leq \frac{|x|}{2}$*, l'inégalité* (5.29) *est vérifiée, de plus*

$$|g_k(x) \cdot x| = |g(y) \cdot x| \leq M(1 + |y|)|x| \leq 6M$$

  et d'après (5.32) *et* (5.29)*, on a*

$$\frac{|x|^2}{2} \leq g_k(x) \cdot x, ,$$

  d'où

$$\frac{|x|^2}{2} \leq c\,G\left(\frac{|x|^2}{2}\right) \leq cG(g_k(x) \cdot x)$$

  par suite

$$|x|^2 \leq 2\,c\,G(g_k(x) \cdot x). \tag{5.33}$$

  b) *Si* $|y| \geq \frac{|x|}{2}$*, l'inégalité* (5.28) *et la monotonie de G nous donne*

$$G(g_k(x) \cdot x) \geq G(g(y) \cdot y),$$

  en utilisant l'inégalité (5.31)*(valable pour* $|y| \leq 2$*), on obtient*

$$|x|^2 \leq 4|y|^2 \leq 4\,c\,G(g(y) \cdot y) \leq 4\,c\,G(g_k(x) \cdot x), \tag{5.34}$$

  les estimations (5.33) *et* (5.34) *montre que :*

$$|x|^2 \leq \gamma_1 G(g_k(x) \cdot x), \quad \forall |x| \leq 2 \tag{5.35}$$

  avec $\gamma_1 = 2\max\{C, 2c\}$.

Pour l'estimation de $|g_k(x)|^2$*, d'après l'identité* (5.26) *et l'inégalité* (5.31) *on aura :*

$$|g_k(x)|^2 = |g(y)|^2 \leq c\,G(g(y) \cdot y)$$

à partir de (5.28) *et la monotonie de G, on conclut que :*

$$|g_k(x)|^2 \leq cG(g_k(x) \cdot x), \quad \forall x \leq 2 \tag{5.36}$$

la somme de (5.35) *et* (5.36) *nous donne* (5.16) *avec* $\gamma = \gamma_1 + c$
d'où toutes les propriétés de g_k *sont satisfaites.*

Théorème 5.1.2. *([16]) Soit A et A_k, $k \in \mathbb{N}^*$ des opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tels que :*

$$(I + A_k)^{-1}w \to (I + A)^{-1}w \quad dans\ \mathcal{H},$$

pour tout $w \in \mathcal{H}$, quand $k \to \infty$.
Soient U_0, $U_{0k} \in \mathcal{H}$ avec $U_0 = (u_0, u_1, E_0, H_0)$ et $U_{0k} = (u_{0k}, u_{1k}, E_{0k}, H_{0k})$ tels que :

$$U_{0k} \to U_0 \quad dans\ \mathcal{H},$$

on a

$$U_k(t) \to U(t) \quad dans\ \mathcal{H}, \ \ quand \ \ k \to \infty\ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

d'où U_k(resp. U) est la solution de (2.1) avec la condition initiale U_{0k}(resp. U_0).

Lemme 5.1.2. *Soient g_1 et g_2 verifiant les hypothèses du lemme2.1.6, et soit g_2^k, $k \in \mathbb{N}^*$ une suite de fonctions satisfaisant les mêmes hypothèses que g_1 et g_2 telle que*

$$g_2^k(x) \to g_2(x) \quad quand\ k \to \infty, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Pour $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$, soit (u, E, H) la solution faible unique de (2.1) et soit (u_k, E_k, H_k), $k \in \mathbb{N}^*$ la solution faible unique de (2.1) avec g_2^k au lieu de g_2, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$(u_k(t), v_k(t), E_k(t), H_k(t)) \to (u(t), v(t), E(t), H(t)) \quad dans \quad quand\ k \to \infty.$$

Preuve. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit A_k l'opérateur introduit dans le lemme 2.1.6 associé au système (2.1) avec g_1 et g_2^k, d'après le théorème 5.1.2 il suffit de montrer que :*

$$(I + A_k)^{-1}(f, g, G, F) \to (I + A)^{-1}(f, g, F, G) \quad dans\ \mathcal{H} \quad quand\ t \to \infty \tag{5.37}$$

pour tout $(f, g, F, G) \in \mathcal{H}$.
Soient $(u, v, E, H) = (I + A)^{-1}(f, g, F, G)$ et $(u_k, v_k, E_k, F_k) = (I + A)^{-1}(f, g, F, G)$,
le lemme2.1.6 montre que (2.27) et (2.28) sont vérifiées ainsi que

$$u_k = v_k + f \tag{5.38}$$

$$H_k = G - \mu^{-1}\mathrm{rot}\, E_k \tag{5.39}$$

et tels que

$$a((v, E), (v', E')) = a_k((v_k, E_k), (v', E')) \ \ \forall (v', E') \in V, \tag{5.40}$$

avec

$$\begin{aligned} a((v,E)(v',E')) &= \int_\Omega \{v\cdot v' + \sigma(v) : e(v')\}\,d\,x \\ &+ \int_\Omega \{\varepsilon\,E\cdot E' + \mu^{-1}\mathrm{rot}\,E\cdot \mathrm{rot}\,E' + s\,\mathrm{div}(\varepsilon\,E)\cdot \mathrm{div}(\varepsilon\,E')\}\,d\,x \\ &+ \xi\int_\Omega \{\mathrm{rot}\,v'\cdot E - \mathrm{rot}\,v\cdot E'\}\,d\,x \\ &+ \int_\Gamma \{A\,v\cdot v' + g_2(v)\cdot v' + g_1(E\times\nu)\cdot E'\times\nu\}d\,\sigma \\ &- \xi\int_\Gamma \{E\times\nu\cdot v' + v\times\nu\cdot E'\}\,d\,\sigma, \end{aligned}$$

on substitue (2.27) *de* (5.38) *et* (2.28) *de* (5.39) *et en utilisant la propriété* $\varepsilon(E-E_k)$ *est à divergence nulle, pour montrer* (5.37), *il suffit de montrer que*

$$\|v-v_k\|_{H^1(\Omega)^3} + \|E-E_k\|_{H(\mathrm{rot},\Omega)} \to 0 \quad quand \quad k\to\infty,$$

alors (5.40) *est équivalente à*

$$a_k((v_k,E_k),(v',E')) - a_k((v,E),(v',E')) = a((v,E),(v',E')) - a_k((v,E),(v',E')) \ \ \forall (v',E')\in V,$$

on a

$$\begin{aligned} a_k((v_k,E_k)(v',E')) - a_k((v,E)(v',E')) &= a_k((v_k-v,E_k-E),(v',E')) \\ &= \int_\Omega \{(v_k-v)\cdot v' + \sigma(v_k-v) : e(v')\}\,d\,x \\ &+ \int_\Omega \{\varepsilon\,(E_k-E)\cdot E' + \mu^{-1}\mathrm{rot}\,(E_k-E)\cdot \mathrm{rot}\,E'\}\,d\,x \\ &+ \xi\int_\Omega \{\mathrm{rot}\,v'\cdot (E_k-E) - \mathrm{rot}\,(v_k-v)\cdot E'\}\,d\,x \\ &+ \int_\Gamma \{A\,(v_k-v)\cdot v' + g_2^k(v_k-v)\cdot v' + \\ &+ g_1((E_k-E)\times\nu)\cdot E'\times\nu\}d\,\sigma \\ &- \xi\int_\Gamma \{(E_k-E)\times\nu\cdot v' + (v_k-v)\times\nu\cdot E'\}\,d\,\sigma, \end{aligned}$$

$$a((v,E),(v',E')) - a_k((v,E),(v',E')) = \int_\Gamma (g_2(v) - g_2^k(v))v'\,d\,\sigma$$

on prend $v' = v_k - v$, $E' = E_k - E$, *on aura*

$$
\begin{aligned}
a_k((v_k,E_k)(v',E')) - a_k((v,E)(v',E')) = &\int_\Omega \{|v_k-v|^2 + \sigma(v_k-v) : e(v_k-v)\}\,d\,x \\
&+ \int_\Omega \{\varepsilon\,|(E_k-E)|^2 + \mu^{-1}|\mathrm{rot}\,(E_k-E)|^2\}\,d\,x \\
&+ \xi \int_\Omega \{\mathrm{rot}\,v'\cdot(E_k-E) - \mathrm{rot}\,(v_k-v)\cdot E'\}\,d\,x \\
&+ \int_\Gamma \{A\,|(v_k-v)|^2 + g_2^k(v_k-v)\cdot(v_k-v) + \\
&+ g_1((E_k-E)\times\nu)\cdot(E_k-E)\times\nu\}d\,\sigma
\end{aligned}
$$

$a((v,E)(v',E')) - a_k((v,E)(v',E')) = \int_\Gamma (g_2(v) - g_2^k(v))(v_k-v)\,d\,\sigma$

en utilisant la monontonie de g_1 et g_2^k, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \{|v_k-v|^2 + \sigma(v_k-v) : e(v_k-v)\}\,d\,x \\
&+ \int_\Omega \{\varepsilon\,|(E_k-E)|^2 + \mu^{-1}|\mathrm{rot}\,(E_k-E)|^2\}\,d\,x \\
&\leq \int_\Gamma (g_2(v) - g_2^k)(v_k-v)\,d\,\sigma
\end{aligned}
$$

d'après cauchy Schawarz's et le théorème de trace, il existe une constante K(indépendante de k) telle que :

$$
\|v_k - v\|_{H^1(\Omega)^3} + \|E_k - E\|_{H(\mathrm{rot},\Omega)} \leq K\|g_2(v) - g_2^k(v)\|_{L^2(\Gamma)^3},
$$

et comme g_2 et g_2^k satisfont la propriété (2.10), *on obtient alors*

$$
|g_2(v) - g_2^k(v)| \leq 2M(1+|v|).
$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$
\|g_2(v) - g_2^k(v)\|_{L^2(\Gamma)^3} \to 0.
$$

Théorème 5.1.3. *Soit g_1, g_2 deux fonctions vérifiant les hypothèses du lemme2.1.6 ainsi que :*

$$|E|^2 + |g_i(E)|^2 \leq G(g_i(E) \cdot E), \quad \forall |E| \leq 1, \ i = 1, 2 \tag{5.41}$$

où $G : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction concave strictement croissante avec $G(0) = 0$. On suppose de plus g_2 satisfait (2.21).
Si Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité, alors il existe c_2, $c_3 > 0$ et $T_1 > 0$ (qui dépend de T, de$\mathcal{E}(0)$ et de $|\Gamma|$) tels que :

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G \left(\frac{\psi^{-1}(c_2 t)}{c_2 T^2 |\Gamma| t} \right) \quad \forall t \geq T_1 \tag{5.42}$$

pour toute solution $(u(t), E(t), H(t))$ de (2.1)*, où ψ est donnée par* (5.3) *pour ϕ définie par*

$$\phi(s) = T |\Gamma| G^{-1} \left(\frac{s}{c_3} \right). \tag{5.43}$$

Preuve. *Comme $D(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$, d'après le lemme 2.1.5 et la continuité de l'énergie par rapport aux données initiales, il suffit de montrer* (5.42) *pour des données dans $D(A)$.*
Soit (u, E, H) la solution de (2.1) *et on considère (y, P, Q) la solution du problème* (4.4) *et* (4.5) *avec $y(T) = u(T)$, $\partial_t y(T) = \partial_t u(T)$, $P(T) = E(T)$ et $Q(T) = H(T)$ avec $T > 0$ suffisamment grand. A partir de* (2.1) *et* (4.4)*, on peut écrire*

$$\begin{aligned} 0 = \int_{Q_T} &\{\partial_t y(\partial_t^2 u - \mathrm{div}\sigma(u) + \xi \, \mathrm{rot}\, E) + \partial_t u(\partial_t^2 y - \mathrm{div}\sigma(y) + \xi \, \mathrm{rot}\, P) \\ &+ \varepsilon \, P \left(\partial_t E - \varepsilon^{-1} (\mathrm{rot}\, H + \xi \, \mathrm{rot}\, \partial_t u) \right) + \mu Q (\partial_t H + \mu^{-1} \mathrm{rot}\, E) \\ &+ \varepsilon \, E \left(\partial_t P - \varepsilon^{-1} (\mathrm{rot}\, Q + \xi \, \mathrm{rot}\, \partial_t y) \right) + \mu H (\partial_t Q + \mu^{-1} \mathrm{rot}\, P)\} d\, x\, d\, t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \int_{Q_T} &\{\partial_t y \cdot \partial_t^2 u + \partial_t u \cdot \partial_t^2 y - \partial_t y \mathrm{div}\sigma(u) - \partial_t u \cdot \mathrm{div}\sigma(y) \\ &+ \partial_t y \cdot \xi \mathrm{rot}\, E - \xi E \cdot \mathrm{rot} \partial_t y + \partial_t u \cdot \xi \mathrm{rot}\, P \\ &- P \, \xi \cdot \mathrm{rot} \partial_t u + \varepsilon P \cdot \partial_t E + \varepsilon E \cdot \partial_t \, P \\ &+ \mu Q \cdot \partial_t H + \mu H \cdot \partial_t Q + H \cdot \mathrm{rot}\, P - P \, \mathrm{rot}\, H\} d\, x\, d\, t \end{aligned}$$

en appliquant la formule de Green (intégration par parties par rapport a x), on obtient :

$$\begin{aligned}0 = &\int_{Q_T} \{\partial_t y \cdot \partial_t^2 y + \sigma(u) : e(\partial_t y) + \sigma(y) : e(\partial_t u)\\
&+ \varepsilon(P \cdot \partial_t E + E \cdot \partial_t P) + \mu(Q\partial_t H + H\partial_t Q)\} d\,x\,d\,t\\
&- \int_{\Sigma_T} \{\sigma(u) \cdot \nu \cdot \partial_t y + \sigma(y) \cdot \nu \cdot \partial_t u\} d\,\sigma\,d\,t\\
&+ \int_{\Sigma_T} \{(E \times \nu) \cdot P + (Q \times \nu) \cdot E + \xi(\partial_y \times \nu) \cdot E + (\partial_t u \times \nu) \cdot P\} d\,\sigma\,d\,t\end{aligned}$$

en utilisant les conditions au bord de (2.1) *et* (4.4), *on obtient*

$$\begin{aligned}0 = &\int_0^T \int_\Omega \partial_t\{y \cdot \partial_t u + \varepsilon\,E\,P + \mu\,Q\,H + \sigma(u) : e(y)\} d\,x\,d\,t\\
&+ \int_0^T \int_\Gamma A\,\partial_t\{y \cdot u\} d\,\sigma\,d\,t\\
&+ \int_0^T \int_\Gamma \{\partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - \partial_t u \cdot K_2 - P(g_1(E \times \nu) \times \nu) + E \cdot K_1\} d\,\sigma\,d\,t.\end{aligned}$$

En intégrant par parties sur t, *et en tenant compte des conditions initiales et finales de* (2.1) *et* (4.4), *on obtient*

$$\mathcal{E}(T) = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_T} \{\partial_t u \cdot K_2 - \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - (P \times \nu) \cdot g_1(E \times \nu) - E \times K_1\} d\,\sigma\,d\,t,$$

l'inégalité de cauchy schawrz's dans $\mathbb{R}^3$, *et la propriété* (4.3) *satisfaite par* K_1 *donne :*

$$\mathcal{E}(T) \le \frac{1}{2} \int_{\Sigma_T} \{|\partial_t u||K_2| + |\partial_t y||g_2(\partial_t u)| + |P \times \nu||g_1(E \times \nu)| + |E \times \nu||K_1|\} d\,\sigma\,d\,t,$$

l'inégalité de Cauchy schawrz's dans $L^2(\Gamma)^3$ *nous donne*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(T) \le &\left(\int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2\,d\,\sigma\,d\,t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Sigma_T} |K_2|^2 d\,\sigma\,d\,t\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+ \left(\int_{\Sigma_T} |\partial_t y|^2\,d\,\sigma\,d\,t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Sigma_T} |g_2(\partial_t u)|^2\,d\,\sigma\,d\,t\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+ \left(\int_{\Sigma_T} |P \times \nu|^2\,d\,\sigma\,d\,t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Sigma_T} |g_1(E \times \nu)|^2\,d\,\sigma\,d\,t\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+ \left(\int_{\Sigma_T} |E \times \nu|^2\,d\,\sigma\,d\,t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Sigma_T} |K_1|^2\,d\,\sigma\,d\,t\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{5.44}$$

l'estimation (4.12) *et les conditions* $y(T) = u(T)$, $\partial_t y(T) = \partial_t u(T)$, $P(T) = E(T)$, $Q(T) = H(T)$ *donnent*

$$\int_{\Sigma_T} \{|F \times \nu|^2 + |G \times \nu|^2 + |\partial_t v|^2 + |\partial_t w|^2\} d\,\sigma d\,t \leq \frac{1}{(1-\sqrt{d})^2} \mathcal{E}(T)$$

cette estimation, la définition de $y = w - v, P = G - F$, (4.9) *et* (4.10) *nous donnent*

$$\int_{\Sigma_T} |K_i|^2 d\,\sigma\,d\,t \leq \frac{2}{(1-\sqrt{d})^2} \mathcal{E}(T) \quad i = 1, 2$$

$$\int_{\Sigma_T} |P \times \nu|^2 d\,\sigma\,d\,t \leq \frac{2}{(1-\sqrt{d})^2} \mathcal{E}(T)$$

$$\int_{\Sigma_T} |\partial_t y|^2 d\,\sigma\,d\,t \leq \frac{2}{(1-\sqrt{d})^2} \mathcal{E}(T)$$

on insère ces estimations dans (5.44) *on arrive à*

$$\mathcal{E}(T) \leq c_4 \int_{\Sigma_T} \{|g_2(\partial_t u)|^2 + |\partial_t u|^2 + |g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2\} d\,\sigma d\,t, \tag{5.45}$$

il reste à estimer le coté droit de l'inégalité (5.45),
on pose

$$\Sigma_T^+ = \{(x,t) \in \Sigma_T \mid |E(x,t) \times \nu(x)| > 1\}$$

$$\Sigma_T^- = \{(x,t) \in \Sigma_T \mid |E(x,t) \times \nu(x)| \leq 1\}$$

d'après les propriétés (2.10) *et* (2.21) *on a*

$$\begin{aligned} |g_1(E)|^2 \leq |g_1(E)|\, M\, (1 + |E|) &\leq 2M |g_1(E)||E| \\ \leq \frac{2M}{|E|} |g_1(E)||E|^2 &\leq \frac{2M}{m} \frac{|g_1(E)|}{|E|}\, g_1(E) \cdot E \\ \leq \frac{2M^2}{m} \left(\frac{1+|E|}{|E|}\right) g_1(E) \cdot E &\leq \frac{4M^2}{m} g_1(E) \cdot E \end{aligned}$$

alors

$$\int_{\Sigma_T^+} \{|g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2\} d\,\sigma\,d\,t \leq c_5 \int_{\Sigma_T^+} (E \times \nu) \cdot g_1(E \times \nu) d\,\sigma\,d\,t$$

avec c_5 *une constante positive.*
En utilisant l'identité (2.38) *et la propriété* $g_1(\xi) \cdot \xi \geq 0$, *on obtient*

$$\int_{\Sigma_T^+} \{|g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2\} d\,\sigma\,d\,t \leq c_5 (\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)), \tag{5.46}$$

d'après l'inégalité (5.41) *satisfaite par* g_1, *on obtient*

$$\int_{\Sigma_T^-} \{|g_1(E\times\nu)|^2 + |E\times\nu|^2\} d\sigma\, dt \le \int_{\Sigma_T^-} G((E\times\nu)\cdot g_1(E\times\nu)) d\sigma\, dt,$$

l'inégalité de jensen's nous donne :

$$\int_{\Sigma_T^-} \{|g_1(E\times\nu)|^2 + |E\times\nu|^2\} d\sigma\, dt \le |\Sigma_T| G\left(\frac{1}{|\Sigma_T|}\int_{\Sigma_T^-} (E\times\nu)\cdot g_1(E\times\nu) d\sigma\, dt\right),$$

l'identité (2.38), *la propriété* $g_1(\xi)\cdot\xi \ge 0$ *et la monotonie de* G *nous donne*

$$\int_{\Sigma_T^-} \{|g_1(E\times\nu)|^2 + |E\times\nu|^2\} d\sigma\, dt \le |\Sigma_T| G\left(\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|}\right). \qquad (5.47)$$

De la même façon, on montre que

$$\int_{\Sigma_T} \{|g_1(E\times\nu)|^2 + |E\times\nu|^2\} d\sigma\, dt \le c_6\left(\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T) + |\Sigma_T| G\left(\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|}\right)\right) \qquad (5.48)$$

avec c_6 *une constante positive.*

Les estimations (5.46), (5.47) *et* (5.48) *dans* (5.45) *donne*

$$\mathcal{E}(T) \le c_7\left(\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T) + G\left(\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|}\right)\right)$$

avec c_7 *une constante positive qui dépend de* T *et* $|\Gamma|$

on a

$$\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} = \alpha\frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|}$$

avec

$$0 \le \alpha = \frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \le 1$$

comme G *est concave et* $G(0)=0$, *on obtient*

$$G\left(\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|}\right) \ge \frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{\mathcal{E}(0)}\cdot G\left(\frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|}\right)$$

d'où

$$\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \le \frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} G\left(\frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|}\right)^{-1} G\left(\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|}\right).$$

- *Si* $\frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} \leq 1$, *la concavité de* G *et* $G(0) = 0$ *donnent*

$$G\left(\frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|}\right) \geq \frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} \cdot G(1)$$

alors

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \leq (G(1))^{-1} G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|}\right) \tag{5.49}$$

- *Si* $\frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} > 1$, *comme* G *est strictement croissante ,alors*

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \leq \frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|}(G(1))^{-1} G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|}\right). \tag{5.50}$$

Des deux estimations (5.49) *et* (5.50), *on déduit l'estimation*

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \leq \max\left(\frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|}, 1\right) (G(1))^{-1}\, G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|}\right)$$

qui s'écrit

$$\mathcal{E}(0) \leq c_3 G\left(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|}\right), \tag{5.51}$$

où c_3 *est une constante positive qui dépend de* $T, \mathcal{E}(0), |\Gamma|$. *En appliquand l'estimation* (5.51) *sur* $[t, t+T[$ *au lieu de* $[0, T]$ *on obtient*

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G\left(\frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{|\Sigma_T|}\right) = \left(\phi^{-1}(\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(T+t))\right) \quad \forall t \geq 0 \tag{5.52}$$

où ϕ *est définie par :*

$$\phi(s) = T|\Gamma| G^{-1}\left(\frac{s}{c_3}\right)$$

et c_3 *dépend de* T, $\mathcal{E}(0)$ *et* $|\Gamma|$
d'où

$$\phi(\mathcal{E}(t)) \leq \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)$$

en intégrant entre S *et* N *on obtient*

$$\int_S^N \phi(\mathcal{E}) dt \leq \int_S^N \mathcal{E}(t)\, dt - \int_S^N \mathcal{E}(t+T)\, dt$$

on a

$$\begin{aligned}\int_S^N \phi(\mathcal{E}(t))dt &\leq \int_S^N \mathcal{E}(t)\,dt - \int_{S+T}^{N+T} \mathcal{E}(t)\,dt \\ &= \int_S^{S+T} \mathcal{E}(t)\,dt - \int_N^{N+T} \mathcal{E}(t)\,dt \\ &\leq T\mathcal{E}(S) - T\mathcal{E}(N+T) \\ &\leq T\mathcal{E}(S)\end{aligned}$$

d'où

$$\int_S^N \phi(\mathcal{E}(t))dt \leq T\mathcal{E}(S)$$

en faisant tendre N vers ∞, on obtient :

$$\int_S^{+\infty} \phi(\mathcal{E}(t))\,dt \leq T\mathcal{E}(S)\ ,\ \forall S \geq 0$$

on conclut grâce au théorème 5.1.1.
Si g_2 n'est pas globalement Lipschitzienne, d'après le lemme 5.1.1 il existe une suite de fonctions continues globalement Lipschitziennes g_2^k, $k \in \mathbb{N}^*$ qui satisfait (2.10), (2.19), (2.20) *et* (2.21) *pour $|x| \geq 2$ ainsi que* (5.14) *pour $|x| \leq 2$ avec $\widehat{G}$ au lieu de G ($\widehat{G}$ est multiple de G (indépendant de k)).*
Pour tout k, soit $(u_k(t), E_k(t), H_k(t))$ la solution de (2.1) *avec g_2 remplacée par g_k^2.*
En appliquant cet argument pour chaque k on obtient l'estimation

$$\mathcal{E}_k(t) \leq c_3 \left(\frac{\psi^{-1}(c_2\,t)}{c_2\,T^2|\Gamma|\,t}\right)\ ,\quad \forall t \geq T_1 \tag{5.53}$$

où $\mathcal{E}_k(t)$ désigne l'énergie de $(u_k(t), E_k(t), H_k(t))$, les constantes et les fonctions G et ψ sont indépendantes de k et on conclut grace au lemme 5.1.2 qui montre que

$$(u_k(t), v_k(t), E_k(t), H_k(t)) \to (u(t), v(t), E(t), H(t)) \text{ dans } \mathcal{H} \text{ quand } k \to +\infty,\quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

5.2 Cas particuliers

Exemple 1. *Si on suppose que g_i, $i = 1, 2$ vérifient* (2.10), (2.19), (2.20), (2.21) *et* (5.41) *ainsi que :*

$$x \cdot g_i(x) \geq c|x|^{p+1}, \text{pour } i = 1, 2\ \ \forall |x| \leq 1,$$

$$|g_i(x)| \leq c'|x|^{\alpha}, \text{pouri} = 1, 2\ \forall |x| \leq 1,$$

où c, c' sont des constantes positives, $\alpha \in (0, 1]$ et $p \geq \alpha$. Alors en faisant le choix

$$G(x) = x^{\frac{2}{q+1}} \quad et \quad q = \frac{p+1}{\alpha} - 1$$

on trouve :

a) *Si $p = \alpha = 1$, alors $q = 1$ et $G(x) = x$, alors $\psi^{-1}(t) = \exp^{-t}$, on obtient donc une décroissance exponentielle.*

b) *Si $p + 1 \geq 2\alpha$ alors $\psi^{-1} = t^{\frac{2}{1-q}}$, on obtient une décroissance de l'ordre $t^{-\frac{2\alpha}{p+1-2\alpha}}$*

Exemple 2. *Supposons que $g_i(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{|\xi|^{2p}} \frac{\xi}{|\xi|^2}\right)$ pour $i = 1, 2$ et $|\xi|$ assez petit et pour $p > 0$. Alors*

$$\xi \cdot g_i(\xi) = h(|\xi|^2), \text{ pour } i = 1, 2 \ , \ |\xi| \text{ assez petit,}$$

avec $h(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^p}\right)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\xi \cdot g_i(\xi) \geq h(|\xi|^2), \quad |g_i(\xi)| \leq c_1|\xi|^\alpha, pour \ \ i = 1, 2 \ \ \forall|\xi| \leq 1 \tag{5.54}$$

où c_1 est une constante positive, $\alpha \in (0, 1]$ et h est une fonction de $[0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et convexe telle que :

$$\lim_{s \in 0^+} \frac{h(x)}{x^\alpha} = 0, \quad si \ \ \alpha = 1 \tag{5.55}$$

d'après la condition (5.41) on a pour $\alpha = 1$

$$|g_i(\xi)|^2 \leq c_1^2|\xi|^2 \ , \ pour \ i = 1, 2\forall|\xi| \leq 1$$

ceci implique que :

$$|\xi|^2 + |g_(\xi)|^2 \leq (1 + c_1^2)|\xi|^2$$

et comme h est une fonction croissante et convexe sur $[0, 1]$, alors h^{-1} est concave et

$$G(h(x)) = (1 + c_1^2)\, x$$

ceci équivaut à dire que :
$G(x) = c\, h^{-1}(x)$, où $c = (1 + c_1^2)$ est une constante positive
d'où

$$h^{-1}(x) = \frac{1}{|\log x|^{\frac{1}{p}}}$$

ce qui entraine que

$$G(x) = \frac{c}{|\log x|^{\frac{1}{p}}}$$

où c est une constante positive. En appliquant le théorème 5.1.1, on obtient une décroissance de la forme

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{c}{|\log \, t|^{\frac{1}{p}}}.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la stabilité du système de l'élasto-magnétisme par des feedbacks non linéaires. Nous avons abordé, dans un premiers lieu, l'existence l'unicité et la régularité des solutions en utilisant la théorie des opérateurs non linéaires. Nous avons ensuite donné une équivalence entre l'estimation de EE-stabilité et la stabilité exponentielle du système linéaire associé à notre système.
A partir du principe de Russell et du principe de Liu, nous avons montré que la stabilité exponentielle du système linéaire est une condition suffisante pour obtenir la stabilité du système non linéaire.
On peut envisager comme perspective de remplacer la condition de Neumann dans le système de l'élasticité par une condition de type Ventcel.

Bibliographie

[1] F. ALABAU. AND V. KOMORNIK "Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems", *SIAM J. Control Optim* 37, pp. 521-542, (1999).

[2] C. AMROUCHE. C. BERNARDI. M. DAUGE. AND V. GIRAULT "Vector potentials in three-dimentional nonsmooth domains", *Math. Meth. Applied Sc* 21, pp. 823-864, (1998).

[3] F. BEN BELGACEM. C. BERNARDI. M. COSTABEL. AND M. DAUGE "Un résultat de densité pour les équations de Maxwell", *C. R. Acad Sc* Série I. 324, pp. 731-736, (1997).

[4] R. BEY. A. HEMINNA. AND J.P. LOHEAC "A new approach for boundary stabilization of the linear elastodynamic system", *Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid* (2003),16 ;Num 2, pp. 417-441 .

[5] H. BREZIS "*Analyse fonctionnelle théorie et applications*", Masson, Paris, 1983.

[6] G. CHEN " Energy decay estimates and exact boundary controllability for the wave equation in a bounded domain ", *J. Math. Pures Appl* 58, pp.249-274 ,1979.

[7] F. CONRAD and B. RAO "Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear feedback", *Assymptotic Analysis* 7, pp.159-177 ,1993.

[8] G. DUVAUT AND J. L. LIONS "*Les inequatios en Mécanique et en Physique*", Dunond, Paris, 1972.

[9] M. ELLER, J. E. LAGNESE AND S. NICAISE "Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping", *Comp. and Appl. Math.* 21,pp. 135-165, 2002

[10] V. GIRAULT AND P. A. RAVIART "*Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Mathematics*", **749**, Springer-Verlag, 1979.

[11] A. GUESMIA "Existence globale et stabilisation frontière non linéaire d'un système d'élasticité", *Portugaliae Mathematica* 56, pp. 361-379, (1999).

[12] M. A. HORN "Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the system of linear elasticity", *J. Math. Analysis Appl* 223, pp.126-150 ,1998 .

[13] B. V. KAPITANOV "Stabilization and exact boundary controllability for Maxwell's equations ", *SIAM J. Control Optim* 32, pp.408-420 ,1994 .

[14] B. V. KAPITANOV AND M. A. RAUPP "Exact boundary controllability in problems of transmission for the system of electromagneto-elasticity ", *Math. Meth. Appl. Sci*24, pp.193-207 ,2001 .

[15] V. KOMORNIK "Boundary stabilization, observation and control of Maxwell's equations", *PanAm. Math. J.* 4, pp. 47-61, (1994).

[16] V. KOMORNIK "*Exact Controllability and Stabilization, the Multilier Method*", RMA 36, Masson, Paris, 1994.

[17] V. KOMORNIK "Rapid boundary stabilization of Maxwell's equations.", *In :Equations Aux Derivées Partielles et Applications*, pp. 611-618, Elsevier, Paris, (1998).

[18] V. A. KOZLOV AND V. G. MAZ'YA "Spectral properties of the operator bundles generated by elliptic boundary value problems in a cone", *Funct. Analysis Appl* 22, pp. 38-46, (1988).

[19] J. E. LAGNESE "Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation", *J. Differential Equations* 50, pp. 163-182, (1983).

[20] J. E. LAGNESE "Boundary stabilisation of linear elastodynamic systems", *J. Control Optim* 21, pp. 968-984, (1983).

[21] J. E. LAGNESE "Exact controllability of Maxwell's equations in a general region ", *SIAM J. Control Optim* 27, pp. 374-388 ,1989 .

[22] I. LASIECKA AND R. TRIGGIANI "Uniform exponential energy decay in a general region $L_2(0,T;L_2(\Omega))$-feedback control in the Dirichlet boundary conditions, ", *J. Differential Equations* 66, pp.340-390 ,1987 .

[23] J. L. LIONS AND E. MAGENESE "*Problèmes aux limites non homogènes et applications*", Volume1, Dunod, Paris, 1968.

[24] W. J. LIU "Partial exact controllability and exponential stability of higher dimensional linear thermoelasticity", *ESAIM : COCV* 3, pp. 23-48, (1983).

[25] P. MARTINEZ "Uniform stabilization of the wave equation in almost star-shaped domains", *SIAM J. Control and Opt.*37, pp. 637-694, (1999).

[26] S. NICAISE "Exact boundary controllability of Maxwell's equations in heteregeneous media and an application to an inverse source problem", *SIAM J. Control and Opt.* 38, pp. 1145-1170, (2000).

[27] S. NICAISE "Stability and controllability of the electromagneto-elastic system", *Portugaliae Mathematica.* 60, pp. 37-70, (2003).

[28] S. NICAISE. M. ELLER. AND J.E. LAGNESE "Stabilization of heteregeneous Maxwell's equations by nonlinear boundary feedbacks", *Electronic J. OF Differentiel Equations*, pp.

[29] K. D PHUNG "Contrôle et stabilisation d'ondes éléctromagnétiques ", *ESAIM :COCV* 5, pp.87-137 ,2000 .

[30] J. RAUCH and M. TAYLOR "Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains ", *Ind. Univ. Math. J* 24, pp. 79-86 ,1974 .

[31] R. E. SHOWALTER "Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations ", *Math. Surveys and Monographs* 49, AMS ,1997.