UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse : Equations aux dérivées partielles

Thème

Sur la stabilité et contrôlabilité d'un système de l'élasto-magnétisme par des feedbacks non linéaires

Présenté par[1] :

Kahina SEKOUCHI

Résumé

Notre travail consiste à étudier la stabilité d'un système élasto-magnétique par des feedbacks frontières non linéaires.

La stabilité du système non linéaire est obtenue à partir de l'exponentielle stabilité du système linéaire associé et la contrôlabilité du système linéaire rétrograde.

Pour montrer l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème non linéaire nous avons utilisé des propriétés des opérateurs non linéaires.

Mots clefs : *Elasticité, équations de Maxwell, stabilité, contrôlabilité et feedbacks non linéaires.*

[1] Sous la direction de : Mr :A.HEMINNA (Professeur, USTHB)

1 Introduction

Ce travail est consacré à l'étude d'un article de S.NICAISE portant sur la stabilité du système de l'élasto-magnétisme par des feedbacks non linéaires .
Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^3$, de frontière Lipschitzienne Γ.
Soient $g_i, i = 1, 2$, des fonctions continues croissantes vérifiant :

$$g_i(0) = 0 \tag{1}$$

$$|g_i(E)| \leq M(1 + |E|), \text{pour tout } E \in \mathbb{R}^3 \tag{2}$$

où M est une constante positive

$$g_i(E) \cdot E \geq m|E|^2, \ \forall E \in \mathbb{R}^3, \ |E| \geq 1 \tag{3}$$

ainsi que la condition de monotonie

$$(g_i(E) - g_i(F))(E - F) \geq 0, \ \forall E, F \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \nabla\sigma(u) + \xi \, Rot\, E = 0, & \text{dans } Q := \Omega \times]0, \infty[\\ \varepsilon\partial_t E - Rot\, H - \xi \, Rot\, \partial_t u = 0, & \text{dans } Q \\ \mu \, \partial_t H + Rot\, E = 0, & \text{dans } Q \\ div(\varepsilon\, E) = div(\mu\, H) = 0, & \text{dans } Q \\ H \times \nu + \xi \, \partial_t u \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur } \Sigma := \Gamma \times]0, \infty[\\ \sigma(u) \cdot \nu + A\, u + g_2(\partial_t u) = 0, & \text{sur } \Sigma \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Ce système modélise le couplage entre le système de Maxwell et le système de l'élasticité, dans lequel $E(x, t), H(x, t)$ désignent respectivement le champ éléctrique et le champ magnétique en chaque point x à l'instant t.
$u(x, t)$ est le champ déplacement.
ε, μ sont respectivement la permetivité éléctrique et la permeabilité magnétique, elles sont supposées des fonctions réelles positives dans $L^\infty(\Omega)$.
$\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))_{i,j=1}^3$ est le tenseur des contraintes défini par :

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)$$

(sommation par rapport à l'indice répété)
où
$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)_{i,j=1}^3$ est le tenseur des déformations defini par :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

$(a_{ijkl})_{i,j=1,2,3}$ sont des éléments de $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$$

et satisfont la condition d'ellipticité suivante :

$$a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \alpha \, \varepsilon_{i,j}\varepsilon_{i,j} \tag{6}$$

pour tout tenseur symétrique (ε_{ij}) et $\alpha > 0$, $\nabla\sigma(u)$ est le champ de vecteurs défini par :

$$\nabla\sigma(u) = (\partial_j \sigma_{ij}(u))_{i=1}^3$$

ν désigne le vecteur normal exterieur à Γ,
A est une constante positive,
ξ est le paramètre de couplage entre le système de Maxwell et le système de l'élasticité ;c est une constante positive.
Pour $\xi = 0$ le système (5) donne deux systèmes indépendants qui sont le système de Maxwell et le système de l'élasticité.

Le but de ce travail est d'adapter les résultats récents sur le système de Maxwell [5, 3, 6, 7] et sur le système de l'élasticité [1, 2, 4] pour étudier le système couplé (5). Il s'agit d'obtenir une estimation de l'énergie du système non linéaire (5) (stabilité) en faisant des hypothèses sur g_1 et g_2 et en se basant sur l'estimation de EE-stabilité qui est équivalente à la décroissance exponentielle de l'énergie du système linéaire.

Le résultat principal de ce mémoire est le théorème suivant :

Théorème 1.1 *Soit g_1, g_2 deux fonctions continues, croissantes vérifiant les hypothèses (1), (2), (3) et (4) ainsi que :*

$$|E|^2 + |g_i(E)|^2 \leq G(g_i(E)\cdot E), \quad \forall |E| \leq 1,\ i = 1,2 \tag{7}$$

où $G : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est une fonction concave strictement croissante telle que $G(0) = 0$.
Si Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité alors il existe $c_2, c_3 > 0$ et $T_1 > 0$ (qui dépend de $T, \mathcal{E}(0)$ et $|\Gamma|$) telle que :

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G\left(\frac{\psi_{-1}(c_2 t)}{c_2 T^2 |\Gamma| t}\right) \quad \forall t \geq T_1 \tag{8}$$

pour toute solution $(u(t), E(t), H(t))$ de (5), où $\psi(t) = \int_t^\infty \frac{1}{\phi(s)}\, ds, \quad \forall t > 0$ pour ϕ définie par

$$\phi(s) = T|\Gamma| G^{-1}\left(\frac{s}{c_3}\right). \tag{9}$$

2 Solution du problème non linéaire

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière lipschitzienne Γ.

Dans ce paragraphe on va étudier l'existence, l'unicité et la régularité du système (5)

2.1 Existence, unicité et régularité des solutions

Introduisons les espaces de Hilbert suivants :

$$J(\Omega, \varepsilon) = \{E \in L^2(\Omega)^3 / div(\varepsilon\, E) = 0 \quad dans \ \ \Omega\} \tag{10}$$

$$\mathcal{H} = H^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3 \times J(\Omega, \varepsilon) \times J(\Omega, \mu) \tag{11}$$

munis des produits scalaires suivants :

$(E, E')_\varepsilon = \int_\Omega \varepsilon(x)\, E(x)\, E'(x)\, dx \qquad \forall E, E' \in J(\Omega, \varepsilon)$

$((u, v, E, H), (u', v', E', H'))_{\mathcal{H}} = (u, u')_1 + (v, v')_0 + (E, E')_\varepsilon + (H, H')_\mu \quad \forall (u, v, E, H), (u', v', E', H') \in \mathcal{H}$

$(v, v')_0 = \int_\Omega v(x)\, v'(x)\, dx$

$(u,u')_1 = \int_\Omega \sigma(u)(x) : \varepsilon(u')(x)\,dx + A\int_\Gamma u(x)\,u'(x)\,dx$

avec $\sigma(u):\varepsilon(u') = \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u')$.

Remarque 2.1 $(u,u)_1^{\frac{1}{2}} = \int_\Omega \sigma(u)(x) : \varepsilon(u)(x)dx + A\int_\Gamma |u(x)|^2 d\sigma$ est une norme sur $H^1(\Omega)^3$ équivalente à la norme usuelle.

Lemme 2.1 Soit

$$D_E(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)^3 \,|\, \nabla\sigma(u) \in L^2(\Omega)^3\} \tag{12}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{D_E} = \left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)^3} + \|\nabla\sigma(u)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

on peut définir une application continue de

$$\begin{aligned} D_E(\Omega) &\to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \\ u &\to \sigma(u)\cdot\nu/_\Gamma \end{aligned}$$

et pour tout élément $w \in H^1(\Omega)^3$ et tout élément $u \in D_E(\Omega)$ on a :

$$<\sigma(u)\cdot\nu, w>_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_\Omega (\sigma(u):\varepsilon(w) + w\,\nabla\sigma(u))dx.$$

Définissons maintenant l'opérateur non linéaire $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ comme suit :

$$D(A) = \{(u,v,E,H) \in \mathcal{H} \,|\, \nabla\sigma(u), Rot\,E, Rot\,H \in L^2(\Omega)^3; \tag{14}$$

$$v \in H^1(\Omega)^3; E\times\nu, H\times\nu \in L^2(\Gamma)^3 \text{ satisfont}$$

$$H\times\nu + \xi\,v\times\nu + g_1(E\times\nu)\times\nu = 0 \text{ sur } \Gamma, \tag{15}$$

$$\sigma(u)\cdot\nu + A\,u + g_2(v) = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \tag{16}$$

Pour tout $(u,v,E,H) \in D(A)$, on pose

$$A(u,v,E,H) = (-v, -\nabla\sigma(u) + \xi\,Rot\,E, -\varepsilon^{-1}(Rot\,H + \xi\,Rot\,v), \mu^{-1}Rot\,E).$$

Pour donner un sense aux conditions au bord (15) et (16) on suppose que g_i , $i = 1,2$ vérifie

$$|g_i(E)| \le M(1+|E|), \quad \forall E \in \mathbb{R}^3. \tag{17}$$

où M est une constante positive.

Remarque 2.2 Soit $u \in D_E(\Omega)$, alors d'après le lemme 2.1 on peut définir $\sigma(u)\cdot\nu$ comme un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ et on a la formule de green suivante :

$$<\sigma(u)\cdot\nu, w>_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_\Omega (\sigma(u):\varepsilon(w) + w\,\nabla\sigma(u))\,dx \quad \forall w \in H^1(\Omega)^3$$

en utilisant le fait que $u, v \in H^1(\Omega)^3$ et la propriété (17) on peut définir $A\,u + g_2(v)$ comme un élément de $L^2(\Gamma)^3$. La condition au bord (16) a un sens dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ et
on a $\sigma(u)\cdot\nu = -A\,u - g_2(v) \in L^2(\Gamma)^3$.

Le théorème suivant nous donne un résultat de densité qui nous permettra des intégrations par parties

Théorème 2.1 *Soit W l'espace de Hilbert défini par*

$$W = \{E \in L^2(\Omega)^3 |\ Rot\, E \in L^2(\Omega)^3 \ \ et\ E \times \nu \in L^2(\Gamma)^3\} \tag{18}$$

muni de la norme

$$\|E\|_W^2 = \int_\Omega (|E|^2 + |Rot\, E|^2) dx + \int_\Gamma |E \times \nu|^2\, d\sigma \tag{19}$$

$H^1(\Omega)^3$ est dense dans W.

Soit W_0 l'espace définit par

$$\begin{aligned} W_0 = \{(E, H) \in J(\Omega, \varepsilon) \times J(\Omega, \mu) | Rot\, E, Rot\, H \in L^2(\Omega)^3; \\ E \times \nu, H \times \nu \in L^2(\Gamma)^3 \text{ satisfont} \\ H \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0 \text{ sur}\Gamma\} \end{aligned}$$

Lemme 2.2 Pour tout $(E, H) \in W_0$ on a

$$\int_\Omega (Rot\, E \cdot H - Rot\, H \cdot E)\, dx = \int_\Gamma H \times \nu \cdot E\, d\sigma \tag{20}$$

Remarque 2.3 Pour $(u, v, E, H) \in D(A)$, on a $H \times \nu \in L^2(\Gamma)^3$ et $g_1(E \times \nu) \times \nu \in L^2(\Gamma)^3$, alors la condition au bord (15) est une égalité dans $L^2(\Gamma)^3$.

Le système (5) s'écrit formellement

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U + A\, U = 0 \\ \\ U(0) = U_0 \end{array} \right. \tag{21}$$

avec $U = (u, v, E, H), U_0 = (u_0, u_1, E_0, H_0)$.

On va montrer que le problème (21) admet une solution unique, en utilisant la théorie des opérateurs non linéaires.

et avant on va donner le résulat de densité suivant :

2.1.1 Résultat de densité

Lemme 2.3 Soit $J_\tau^1(\Omega, \varepsilon)$ l'espace défini par

$$J_\tau^1(\Omega, \varepsilon) = \{E \in J(\Omega, \varepsilon) | Rot\, E \in L^2(\Omega)^3 \text{ et } E \times \nu = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \tag{22}$$

$J_\tau^1(\Omega, \varepsilon)$ est dense dans $J(\Omega, \varepsilon)$

Lemme 2.4 Soit $\widetilde{H}^1(\Omega)^3$ l'espace défini par

$$\widetilde{H}^1(\Omega)^3 = \{u \in H^1(\Omega)^3 |\ \nabla \sigma(u) \in L^2(\Omega)^3, \sigma(u) \cdot \nu + A\, u = 0 \text{ sur } \Gamma\} \tag{23}$$

muni de de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)^3}^2 = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dx + A \int_\Gamma |u|^2\, d\sigma$$

$\widetilde{H}^1(\Omega)^3$ est dense dans $H^1(\Omega)^3$

Lemme 2.5 Si $g_1 = g_2 = 0$, alors le domaine de l'opérateur A est dense dans $\mathcal{H}$.

2.1.2 Théorème d'existence, unicité et régularité des solutions

Lemme 2.6 Pour $i = 1, 2$, on suppose que l'application $g_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est continue et satisfait la condition (17) ainsi que les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (g_i(E) - g_i(F))(E - F) &\geq 0 \;\; \forall E, F \in \mathbb{R}^3 \text{ (Monotonie)} \quad &(24)\\ g_i(0) &= 0 \quad &(25)\\ g_i(E)E &\geq m|E|^2 \;\; \forall E \in \mathbb{R}^3, |E| \geq 1 \quad &(26)\end{aligned}$$

pour une constante positive m, alors A est un opérateur maximal monotone.

Remarque 2.4 Pour g_2 globalement lipschitzienne $g_2(v)/_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ et pour tout $(u, v, E, H) \in D(A)$, $u \in H^1(\Omega)^3$ et $v \in H^1(\Omega)^3$ alors $A\,u + g_2(v) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ et d'après (16) on a

$$\sigma(u) \cdot \nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$$

si de plus Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$u \in H^2(\Omega)^3.$$

La théorie des opérateurs non linéaires nous permet de déduire le théorème d'unicité et de régularité des solutions suivant :

Théorème 2.2 *on suppose que g_1 et g_2 vérifient (17) ainsi que (24)-(26)*
• *pour toute donnée initiale $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$; le problème (5) admet une solution (faible) unique qui vérifie :*

$$(u, \partial_t u, E, H) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$$

qui est équivalent à :

$$u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)^3),$$
$$E \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \varepsilon))$$
$$H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu))$$

• *Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(A)$, le problème (5) admet une solution forte (u, E, H) qui vérifie :*

$$(u, \partial_t u, E, H) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, D(A))$$

qui est équivalent à

$$u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, D_E(\Omega))$$
$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \varepsilon)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\varepsilon)$$
$$H \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\mu)$$

et satisfont (15) et (16) et $D_E(\Omega)$ défini par (12).
Si de plus g_2 est globalement Lipschitzienne alors la solution (u, E, H) du problème (5) possède la propriété de régularité plus forte suivante :

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)^3)$$
$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \varepsilon)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\varepsilon)$$
$$H \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\mu)$$

Lemme 2.7 Si g_1 et g_2 sont continues et satisfont les propriétés (17) et(24)-(26), l'énergie du système donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}(|\partial_t u(x,t)|^2 + \sigma(u)(x,t) : \varepsilon(u)(x,t))\,d\,x \\ &+ \frac{A}{2}\int_{\Gamma}|u(x,t)|^2 d\,\sigma \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\varepsilon(x)|E(x,t)|^2 + \mu(x)|H(x,t)|^2)d\,x\end{aligned} \tag{27}$$

est décroissante.
De plus pour $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(A)$ on a pour tout $0 \leq S < T < \infty$

$$\mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T) = \int_S^T \int_{\Gamma}\{g_1(E(t)\times\nu)\cdot E(t)\times\nu + g_2(\partial_t\,(u)\,(t))\,\partial_t\,(u)\,(t)\}\,d\,\sigma\,d\,t \tag{28}$$

et pour tout $t \geq 0$

$$\mathcal{E}'(t) = -\int_{\Gamma}\{g_1(E(t)\times\nu)\cdot E(t)\times\nu + g_2(\partial_t\,(u)\,(t))\,\partial_t\,(u)\,(t)\}\,d\,\sigma. \tag{29}$$

3 Stabilité exponentielle dans le cas linéaire

Dans ce paragraphe, on donne une équivalence entre la stabilité exponentielle du système linéaire associé au système (5) ($g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$)par des feedbacks frontières linéaires et l'estimation de EE-stabilité.

On commence par donner la définition suivante :

Définition 3.1 On dit que Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité s'il existe $T > 0$ et deux constantes positives C_1, C_2 (qui peuvent dépendre de T) avec $C_1 < T$ telle que

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2\int_0^T\int_{\Gamma}(|\partial_t u(t)|^2 + |E(t)\times\nu|^2)\,d\sigma\,dt \tag{30}$$

pour toute solution (u, E, H) de (5) avec $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$.

Dans ce qui suit, on montrera que l'estimation de EE-stabilité est une condition nécéssaire et suffisante pour la stabilité exponentielle avec feedbacks linéaires.

Théorème 3.1 *Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité si et seulement s'il existe deux constantes positives M et ω tels que*

$$\mathcal{E}(t) \leq M\,e^{-\omega t}\mathcal{E}(0) \tag{31}$$

pour toute solution (u,E,H) de (5) avec $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$

Enonçons maintenant un lemme qui nous donne une équivalence entre l'estimation de EE-stabilité et l'estimation d'observabilité.

Lemme 3.1 Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité si et seulement s'il existe $T > 0$ et une constante positive C (qui peut dépendre de T) telle que

$$\mathcal{E}(T) \leq C\int_0^T\int_{\Gamma}(|\partial_t u|^2 + |E\times\nu|^2)\,d\sigma\,dt \tag{32}$$

Lemme 3.2 Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^2$, (u, E, H) une solution de (5) avec $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$,
alors pour tout $\theta > 0$, il existe une constante $C(\theta) > 0$(qui ne dépend pas de T, elle dépend de θ, du diamètre, des coefficients a_{ijkl}, μ et du paramétre ξ) telle que :

$$\int_{\Sigma_T}|u|^2\,d\sigma \leq C(\theta)\mathcal{E}(0) + \theta\int_0^T\mathcal{E}(t)\,dt \tag{33}$$

4 Controlabilité exacte

En utilisant la stabilité exponentielle dans le cas linéaire et le principe de Russell, on déduit la contrôlabilité exacte de notre système Elasto-magnétique. pour tout $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$, on cherche un temps $T > 0$ et un contrôle
$J \in L^2(\Gamma\times]0, T[)^3$ tels que la solution $(u, E, \mathcal{H})$ du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \nabla\sigma(u) + \xi\, Rot\, E = 0, & \text{dans } \mathcal{Q}_T = \Omega\times]0, T[\\ \varepsilon\, \partial_t E - Rot\, H - \xi\, Rot\, \partial_t u = 0, & \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ \mu\, \partial_t\, H + Rot\, E = 0, & \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ H \times \nu - \xi\, \partial_t u \times \nu = J_1, & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma\times]0, T[\\ \sigma(u).\nu + A\, u = J_2, & \text{sur } \Sigma_T \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{34}$$

satisfait

$$u(T) = \partial_t u(T) = E(T) = H(T) = 0 \tag{35}$$

Théorème 4.1 *Si Ω satisfait l'estimation de EE-stabilité pour $T > 0$ suffisement grand, pour $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$, il existe deux contrôles $J_1, J_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$ tel que*

$$J_1 \cdot \nu = 0 \tag{36}$$

la solution $(u, \partial_t u, E, H) \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H})$ de (34) verifie (35) au temps T.

5 La stabilité dans le cas non linéaire

Dans ce paragraphe on montre qu'à partir de la stabilité exponentielle le système non linéaire associé est automatiquement stable et cela est basé sur le principe de Liu qui consiste à estimer l'energie du système non linéaire direct en utilisant le système rétrograde linéaire avec donnée finale égale à la valeur finale de la solution du système non linéaire direct à donnée initiale nulle. Cette estimation se déduit en utilisant la stabilité exponentielle du problème rétrograde linéaire et une inégalité intégrale et une suite de fonctions adéquate.
On commence par donner l'inégalité intégrale suivante :

Théorème 5.1 *Soit $\mathcal{E} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante telle que :*

$$\int_s^\infty \phi(\mathcal{E}(t))\, d\, t \leq T\, \mathcal{E}(s), \quad \forall\, s \geq 0 \tag{37}$$

avec $T > 0$ et ϕ une fonction convexe, strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ telle que $\phi(0) = 0$,
alors il existe $t_1 > 0$ et c_1 dépendant de T et $\mathcal{E}(0)$ tels que :

$$\mathcal{E}(t) \leq \phi^{-1}\left(\frac{\psi^{-1}(c_1 t)}{c_1 T t}\right), \quad \forall\, t \geq\, t_1 \tag{38}$$

où ψ est définie par :

$$\psi(t) = \int_t^\infty \frac{1}{\phi(s)}\, d\, s, \quad \forall t > 0 \tag{39}$$

Lemme 5.1 Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction continue qui satisfait les propriétés (17), (24), (25) et (26) ainsi que la propriété suivante :

$$|E|^2 + |g(E)|^2 \leq G(g(E) \cdot E), \quad \forall E \leq 1 \tag{40}$$

avec G est une fonction concave strictement croissante de $[0, +\infty[\to [0, +\infty[$ et $G(0) = 0$ alors il existe une suite de fonctions globalement Lipschitzienne et continues

$$g_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

qui satisfait les propriétés (17) (avec la même constante que g), (24), (25) ainsi que

$$g_k(x) \cdot x \geq m'|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad |x| \geq 2 \tag{41}$$

$$|x|^2 + |g_k(x)|^2 \leq \gamma G(g_k(x) \cdot x) \quad \forall |x| \leq 2 \tag{42}$$

avec m' et γ des constantes positives indépendantes de k. De plus g_k satisfait

$$|g_k(x)| \leq |g(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{43}$$

$$g_k(x) \to g(x) \quad \text{quand } k \to \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \tag{44}$$

Lemme 5.2 Soient g_1 et g_2 qui satisfont les hypothèses du lemme2.6, et soit $g_2^k, k \in \mathbb{N}^*$ une suite de fonctions qui satisfait les hypothèses du lemme2.6 et telle que

$$g_2^k(x) \to g_2(x) \quad \text{quand } k \to \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^3$$

pour $(u_0, u_1, E_0, H_k) \in H$, soit (u, E, H) la solution faible unique de (5) et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
soit (u_k, E_k, H_k) la solution faible unique de (5) avec g_2^k au lieu de g_2, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$(u_k(t), \partial_t u_k(t), E_k(t), H_k(t)) \to (u(t), \partial_t u(t), E(t), H(t)) \quad \text{dans } H \quad \text{quand } k \to \infty$$

Théorème 5.2 *Soit g_1, g_2 deux fonctions vérifiant les hypothèses du lemme2.6 ainsi que :*

$$|E|^2 + |g_i(E)|^2 \leq G(g_i(E) \cdot E), \quad \forall |E| \leq 1, \ i = 1, 2 \tag{45}$$

où $G : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est une fonction concave strictement croissante telle que $G(0) = 0$. On suppose de plus g_2 satisfait (26).
Si Ω satisfait l'estimation de stabilité alors il existe $c_2, c_3 > 0$ et $T_1 > 0$ (qui dépend de $T, \mathcal{E}(0)$ et $|\Gamma|$) telle que :

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G\left(\frac{\psi_{-1}(c_2 t)}{c_2 T^2 |\Gamma| t}\right) \quad \forall t \geq T_1 \tag{46}$$

pour toute solution $u((t), E(t), H(t))$ de (5), où ψ est donnée par (39) pour ϕ définie par

$$\phi(s) = T|\Gamma| G^{-1}\left(\frac{s}{c_3}\right) \tag{47}$$

6 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la stabilité du système de l'élasto-magnétisme par des feedbacks non linéaires. Nous avons abordé, dans un premiers lieu, l'existence l'unicité et la régularité des solutions en utilisant la théorie des opérateurs non linéaires. Nous avons ensuite donné une équivalence entre l'estimation de EE-stabilité et la stabilité exponentielle du système linéaire associé à notre système.
A partir du principe de Russell et du principe de Liu, nous avons montré que la stabilité exponentielle du système linéaire est une condition suffisante pour obtenir la stabilité du système non linéaire.
On peut envisager comme perspective de remplacer la condition de Neumann dans le système de l'élalasticité par une condition de type Vencel.

Références

[1] F. ALABAU, V. KOMORNIK "Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems", *SIAM J. Control Optim* 37,pp. 521-542, (1999).

[2] R. BEY, A. HEMINNA and J. P. LOHEAC "A new approach for boundary stabilization of the linear elastodynamic system", *Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid* (2003),16 ;Num 2, pp. 417-441, .

[3] M. ELLER, J. E . LAGNESE and S. NICAISE "Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear feedback", *Asymptotic Analysis* 7,pp. 159-177, (1993).

[4] A. GUESMIA "Existence globale et stabilisation frontière non linéaire d'un système d'élasticité", *Portugaliae Mathematica* 56,pp. 361-379, (1999).

[5] V. KOMORNIK "Boundary stabilization, observation and control of Maxwell's equations", *PanAm. Math. J.* 4,pp. 47-61, (1994).

[6] P. MARTINEZ "Uniform stabilization of the wave equation in almost star-shaped domains", *SIAM J. Control and Opt.* 37,pp. 637-694, (1999).

[7] S. NICAISE. M. ELLER. and J.E. LAGNESE "Stabilization of heteregeneous Maxwell's equations by nonlinear boundary feedbacks", *Electronic J. OF Differentiel Equations.*