

N° d'ordre : ../...../..

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en mathématiques

Spécialité : Analyse (Systèmes Dynamiques)

Par

ZOGHBI dit ZANABI Rachida

THÈME

L'OSCILLATEUR DE VAN DER POL

Soutenu publiquement, le 28 / 04 / 2008, devant le jury composé de :

Mr. A. KESSI	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr. R. BEBBOUCHI	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr. A. BENMEZAI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr. M. MEDJDEN	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.

...وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا ﴿١٠﴾

من سورة: طه

Remerciements

Ne pouvant dire en quelques mots ce que je dois au Professeur R.Bebbouchi, je ne retiendrai ici qu'une seule démarche intellectuelle qu'il m'a apprise : Il m'a fait comprendre, grâce à son optimisme, et sa persuasion, que l'étude d'exemples même élémentaires, peut rendre accessibles des études générales.

Mes anciens collègues de l'enseignement qui m'ont encouragée à mener à la fin ce mémoire malgré mes obstacles : Qu'ils en soient remerciés.

Les liens étroits que notre groupe a toujours eus avec l'université de la Rochelle (France) m'ont mis régulièrement en contact avec le Professeur E.Benoit. Les discussions que j'ai eues avec lui m'ont souvent ouvert de nouveaux horizons.

Je remercie aussi le Professeur A.Kessi qui a accepté de présider mon jury; ainsi que Messieurs A.Benmezai, et M.Medjden, sans oublier mes meilleures amies du groupe A.C, à leur tête S.Tahar.

Mon adorable famille, y compris mon défunt père a été sans cesse pour moi un stimulant.

Je voudrais remercier aussi ma belle famille pour sa gentillesse, et sa patience constantes pendant ces deux dernières années.

Mes plus vifs remerciements s'adressent évidemment à mon Mari A.Hounas, qui a toujours été à mes côtés.

L'oscillateur de Van der pol

Résumé

Dans ce travail, seront présentés les principaux résultats concernant la théorie des perturbations singulières, de son étude en A.N.S, et surtout une approche de cette théorie dans l'espace. Nous commencerons par définir les solutions particulières appelées canards (cycles ou non). Nous donnerons ensuite une extension à cette définition en dimension 3.

Pour terminer, on donnera des généralisations de ces résultats sous forme d'exemples déjà traités en Analyse classique. Il s'agit des black swans (cygnes noirs).

Mots-clés : black swan; canard; integral manifold.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Notions d'analyse non standard	3
1.1 <i>Introduction</i>	3
1.2 <i>Théorie des ensembles internes</i>	3
1.2.1 <i>Notations et Définitions</i>	4
1.2.2 <i>Les Axiomes de Nelson</i>	4
1.3 <i>Systèmes différentiels perturbés</i>	6
1.3.1 <i>Lemme de l'ombre courte</i>	6
1.4 Les canards	7
1.4.1 Définitions	7
1.4.2 Les premiers canards	11
2 Black swans de cycles pour les systèmes en dimension trois	14
2.1 Définition	14
2.2 Exemples de black swans de cycles	15
2.2.1 Exemple -1-	15
2.2.2 Exemple -2-	18
3 Variétés intégrales (invariantes), canards, et black swans de Shchepakina	25
3.1 Définitions	25
3.2 Les variétés intégrales stables et instables des mouvements lents	27
3.3 Exemples	30
3.4 Comparaison	36
Conclusion et perspectives	37

Bibliographie

38

Introduction générale

Dans ce mémoire, on s'intéressera à des cas particuliers du problème de la convergence, pour $\varepsilon > 0$ infiniment petit, des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 du type :

$$(E_\varepsilon) \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{y} = g(x, y, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} = h(x, y, z, \alpha, \varepsilon) \end{cases}$$

α étant un paramètre.

Une idée géométrique développée par F.Takens (voir [8]) est que le champ (E_ε) doit ressembler en un sens à préciser au système défini sur la variété $h(x, y, z, \alpha, 0) = 0$ (variété qu'on appellera surface lente) par les équations :

$$\dot{x} = f(x, y, z, 0) , \dot{y} = g(x, y, z, 0)$$

Une première difficulté apparaît aux points où $\partial_z h$ est nul (ces points forment ce qu'on appellera le pli).

De plus, pour pouvoir parler de convergence de (E_ε) vers (E_0) , nous aurons besoin de définir les trajectoires de (E_0) dont la condition initiale n'appartient pas à la surface lente. En fait, il s'agit de convergence de trajectoires y compris les trajectoires particulières, nommées canards, qui longent la nappe attractive puis la nappe répulsive de la surface lente.

Dans [16], E.A.Shchepakina définit des variétés invariantes à stabilité variable (black swans), mais n'utilise que le langage classique pour énoncer et démontrer les propriétés des black swans (cygnes noirs); il s'ensuit une définition relativement floue et difficilement utilisable.

Pour mieux comprendre ce phénomène, on va utiliser les outils non-standard en théorie des perturbations singulières d'équations différentielles ordinaires dans les cas où la dimension de la variable lente est strictement supérieure à 1.

Les méthodes géométriques non-standard (voir [4], [6], [7]) ont donné un certain nombre de résultats généraux qui montraient l'importance des canards dans ces problèmes.

R.Bebbouchi (voir [3]) a construit des familles continues de cycles canards et en a donné quelques caractéristiques. On pourrait les appeler black swans de cycles.

Dans le cas où la dimension lente est 1, le problème est résolu avec beaucoup de généralités dans [18].

Notre travail comporte deux exemples d'étude d'une famille de systèmes différentiels singulièrement perturbés dans \mathbb{R}^3 . Il est constitué essentiellement de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les principes de l'analyse non-standard et donnons quelques définitions utiles pour la compréhension des techniques utilisées par la suite.

Le second chapitre est consacré à l'étude de deux systèmes différentiels singulièrement perturbés dans \mathbb{R}^3 , dépendant d'un paramètre.

On montrera que pour les valeurs du paramètre α infiniment proches de 1, le premier système admet un black swan de cycles.

Pour le second système, on trouvera un autre black swan de cycle, pour des valeurs autres que 1, et qui a une forme différente de la première.

Au troisième chapitre, on s'intéresse aux systèmes de Elina Shchepakina. Elle les a traité à l'aide de méthodes classiques, en utilisant les techniques ardues des développements asymptotiques, et a même travaillé dans \mathbb{R}^n ; elle a montré ainsi l'existence de variétés de canards (black swans) lorsqu'elle considère le paramètre α comme une fonction (gluing fonction).

Une conclusion générale clôture le travail.

Chapitre 1

Notions d'analyse non standard

1.1 *Introduction*

L'analyse non standard a pris naissance dans la tête de A.Robinson en 1960, année où il lui est apparu que les concepts et les méthodes de la logique mathématique étaient en mesure de fournir un fondement à une présentation du calcul différentiel et intégral reposant sur des méthodes infinitésimales. L'ouvrage de Robinson "Non standard Analysis" fut publié en 1963.

L'usage des techniques non standard a porté ses fruits dans différents domaines, notamment celui des perturbations singulières où l'A.N.S a été d'un apport capital.

1.2 *Théorie des ensembles internes*

E.Nelson a proposé (voir [12]), en s'inspirant des travaux de Robinson (voir [15]), d'enrichir le langage de la théorie Z.F.C (théorie axiomatique des ensembles) par un nouveau prédicat unaire $st()$. $st(x)$ sera dit : x standard. Pour en définir l'usage, il introduit trois axiomes désignés sous le nom :

Transfert (T) , Standardisation (S) et Idéatisation (I).

La théorie ainsi obtenue sera appelée théorie des ensembles internes, et notée théorie ZFCIST.

Résultats.

- 1) L'extension ZFCIST de la théorie ZFC est une extension conservative.
- 2) La théorie ZFCIST est consistante si la théorie ZFC l'est.

1.2.1 Notations et Définitions

$F(x_1, \dots, x_n)$ désigne une formule dans le sens classique, et x_1, \dots, x_n sont les variables libres de F .

Définition 1.1. Soient x et y des réels. On dit que x est infinitésimal si $|x|$ est plus petit que tout réel standard positif non nul. On dit que x est limité s'il existe un entier n standard tel que $|x| \leq n$. Il est dit appréciable s'il est à la fois limité et non infinitésimal. On dira que x est équivalent à y , et on notera $x \simeq y$, si $x - y$ est infinitésimal.

Toutes les dénominations ou prédicats : "infinitésimal" , "limité" , "appréciable" , "équivalent" , dérivent de $st()$, et sont donc également appelés *externes*.

De façon générale, une formule sera dite externe si le prédicat $st()$ intervient sur ses variables, et sera dite interne (ou classique) si elle est écrite avec le langage de la théorie ZFC.

Définition 1.2. Le réel x est dit infiniment grand (i.g) si $|x|$ est plus grand que tout réel standard positif.

Définition 1.3. On appelle ensembles internes, tous les ensembles définis classiquement et auxquels s'appliquent sans restriction tous les théorèmes classiques. On appelle ensemble externe tout ensemble défini au moyen d'une formule externe et pour lequel le fait de le considérer interne introduit une contradiction dans la théorie.

Quelques exemples d'ensembles externes

$G = \{x \in \mathbb{R} , x \text{ limité}\}$ appelé galaxie principale de \mathbb{R} .

$H = \{x \in \mathbb{R} , x \simeq 0\}$ appelé halo de 0 et noté $hal(0)$.

1.2.2 Les Axiomes de Nelson

Le principe de transfert

Pour toute formule standard $F(x, t_1, \dots, t_n)$ n'ayant pas d'autres variables libres que x, t_1, \dots, t_n , on a l'énoncé suivant :

$$\forall^{st} t_1, \dots, t_n [\forall^{st} x F(x, t_1, \dots, t_n) \implies \forall x F(x, t_1, \dots, t_n)]$$

De même, l'énoncé équivalent (le dual) :

$$\forall^{st} t_1, \dots, t_n \left[\exists x F(x, t_1, \dots, t_n) \implies \exists^{st} x F(x, t_1, \dots, t_n) \right]$$

En particulier, si F est une formule standard ne dépendant que d'une variable, on a :

$$\forall^{st} x F(x) \implies \forall x F(x)$$

Conséquences.

- 1) L'ensemble vide est un ensemble standard.
- 2) Tous les objets spécifiques construits d'une manière unique des mathématiques classiques sont standard.

Le Principe d'idéalisation

Pour toute formule interne B , contenant au moins deux variables libres x et y , on a :

$$\forall^{st \text{ fini}} Z \exists x \forall y \in Z B(x, y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{st} y B(x, y)$$

$\forall^{st \text{ fini}} Z$ signifie tout ensemble Z standard et fini.

Ce principe a permis entre autre de montrer que l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} contenait des infiniments grands et à donner une autre définition d'un ensemble standard infini à savoir un ensemble contenant des éléments non standard.

Le principe de standardisation

Pour toute formule $F(z)$ (interne ou externe), on a:

$$\forall^{st} X \exists^{st} Y \forall^{st} z [z \in Y \Leftrightarrow z \in X F(z)]$$

Ce principe assure l'existence d'un ensemble standard Y n'ayant pour éléments standard que les éléments standard z de X satisfaisant $F(z)$.

Définition 1.4. Soient X un ensemble et $E = \{z \in X / F(z)\}$ un sous-ensemble (interne ou externe) de X . On appelle standardisé de E noté ${}^s E$ l'unique ensemble standard ayant pour éléments standard les éléments standard de E .

Théorème 1.1. (voir [2])

Pour tout réel limité x , il existe un unique réel standard $\overset{\circ}{x}$ tel que $\overset{\circ}{x} \simeq x$. Ce réel s'appelle l'ombre de x ou encore la partie standard de x .

Définition 1.5. Un réel qui possède une ombre est appelé presque standard.

1.3 Systèmes différentiels perturbés

Soit la famille $(P_\varepsilon)_\varepsilon$ de systèmes différentiels. Le problème P_0 (obtenu en remplaçant ε par 0 dans P_ε) est dit problème réduit du problème perturbé P_ε .

Définition 1.6. *Un système est perturbé régulièrement (respect. singulièrement) si le système perturbé et le système réduit sont (respect. ne sont pas) de même ordre.*

i) Considérons le champ de vecteurs suivant :

$$X_\varepsilon = \begin{cases} x' &= f(t, x, y, \varepsilon). \\ y' &= g(t, x, y, \eta). \end{cases} \quad \varepsilon, \eta \text{ i.p.}$$

avec : $f(t, x, y, \varepsilon) \simeq \tilde{f}(t, x, y)$, $g(t, x, y, \eta) \simeq \tilde{g}(t, x, y)$

\tilde{f} et \tilde{g} standard continues sur un domaine donné; f et g sont continues en ε et η .

Le champ X_ε représente une perturbation régulière.

ii) Soit le champ de vecteurs suivant :

$$Y_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon x' &= f(t, x, y) \\ y' &= g(t, x, y) \end{cases}$$

avec : f et g standard continues.

Le champ Y_ε représente une perturbation singulière.

Remarque 1.1. *Il y a des systèmes qui représentent un mélange des deux types de perturbations.*

Définition 1.7. *Un champ de vecteurs est dit champ lent-rapide si ses trajectoires adoptent alternativement deux types de comportements: des phases lentes, où la solution est une fonction régulière de temps, et des phases rapides, où la solution change d'une valeur à une autre au bout d'un temps court. On appelle saut (ou point de transition), le passage d'une phase à une autre.*

1.3.1 Lemme de l'ombre courte

En comparant une équation standard :

$$y' = f_0(x, y)$$

avec une équation infiniment proche :

$$y' = f(x, y), \quad f \approx f_0$$

des propriétés de f se conservent pour f_0 ou entraînent d'autres propriétés pour f_0 .

Par contre que peut-on dire du problème inverse: connaissant les propriétés de f_0 , peut-on en déduire des propriétés de f ? Le lemme de l'ombre courte, qu'on énoncera comme théorème, répond au problème inverse.

Théorème 1.2. (voir [2])

Soient les équations :

$$y' = f_0(x, y) \quad \text{et} \quad y' = f(x, y)$$

avec f_0 standard, continue, choisie de telle sorte qu'il y ait existence et unicité locales des solutions (on prend f_0 localement lipschitzienne) et f infiniment proche de f_0 sur une partie H de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Soit $I_0 = [a_0, b_0]$ un intervalle standard de \mathbb{R} , u_0 une solution standard de l'équation standard, définie sur I_0 et γ_0 son graphe.

S'il existe une partie interne K de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ telle que : $\text{hal}(\gamma_0) \subset K \subset H$, alors toute solution u de l'équation non standard, issue d'un point $(x_1, u(x_1))$ du halo de γ_0 , x_1 étant dans $]a_0, b_0[$, est prolongeable à I_0 tout entier, et sa restriction à I_0 admet u_0 comme ombre.

1.4 Les canards

Les canards ont été découverts grâce à l'analyse non standard et tout laisse à penser que l'ANS est actuellement l'outil le mieux adapté à leur étude.

1.4.1 Définitions

Sans perdre la généralité, on ne définira les canards que pour un cas particulier de problèmes de perturbation singulière.

Soit, pour $\varepsilon > 0$ infiniment petit, le système :

$$S(\varepsilon, a) : \begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{\varepsilon} f(x, y, a) \\ \dot{y} &= g(x, y, a) \end{cases}$$

avec f et g deux fonctions standard des variables x et y et du paramètre a . Nous supposerons que f et g sont suffisamment régulières pour avoir existence et unicité des

solutions pour le système $S(\varepsilon, a)$ et que $f(x, y, a)$ ne présente que des singularités du type "col" (partie quadratique de signature $(+1, -1)$ aux points singuliers).

Définition 1.8. *Pour toute valeur finie de a , la courbe lente standard \mathcal{C} du système $\mathcal{S}(\varepsilon, a)$ est la courbe $\left\{f(x, y, \overset{\circ}{a}) = 0\right\}$.*

Définition 1.9. *Un point (x_0, y_0) de cette courbe lente sera dit attractif (resp. répulsif) si $f'_x(x_0, y_0, \overset{\circ}{a}) < 0$ (resp. $f'_x(x_0, y_0, \overset{\circ}{a}) > 0$).*

Nous pouvons génériquement supposer que les points de \mathcal{C} où f'_x s'annule sont isolés.

Définition 1.10. *Un point où f'_x s'annule sera dit critique si son halo peut contenir des points attractifs et des points répulsifs (il sera dit attractif dégénéré si son halo ne contient que des points attractifs et répulsif dégénéré dans le cas contraire).*

Définition 1.11. *Un segment standard de \mathcal{C} est dit attractif (resp. répulsif) si tous ses points sont attractifs (resp. répulsifs).*

Définition 1.12. *On distingue deux types de points critiques.*

Points Pli : définis par :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, \overset{\circ}{a}) \neq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, \overset{\circ}{a}) \neq 0.$$

Points de Morse : définis par :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, \overset{\circ}{a}) = 0 \text{ et } \text{hess } f(x_0, y_0, \overset{\circ}{a}) < 0$$

où le hessien de f est donné par:

$$\text{hess } f(x_0, y_0, \overset{\circ}{a}) = \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) (x_0, y_0, \overset{\circ}{a})$$

Soit s une application d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^2 définie par la solution locale du système $\mathcal{S}(\varepsilon, a)$. Soit (x_0, y_0) l'ombre de $s(0)$ et σ l'ombre de $s(I)$.

Définition 1.13. *s est un **canard** (ou une solution canard, ou une trajectoire canard) au point (x_0, y_0) pour la valeur a du paramètre si:*

i) σ est un segment de la courbe lente \mathcal{C} tel que (x_0, y_0) divise σ en un segment attractif σ_{at} et un segment répulsif $\sigma_{rép}$, tous deux non vides.

ii) s longe σ_{at} pour $t < 0$ et $\sigma_{rép}$ pour $t > 0$.

Remarque 1.2. On peut trouver une trajectoire qui satisfait l'inverse de la condition ii), à savoir s longe $\sigma_{rép}$ pour $t < 0$ et σ_{at} pour $t > 0$: C'est un faux canard. Canard et faux canard n'ont pas les mêmes propriétés.

Remarque 1.3. S'il existe un canard au point (x_0, y_0) de la courbe \mathcal{C} , alors (x_0, y_0) est nécessairement un point critique.

On peut donc avoir des canards en un point de Morse ou en un point pli (voir fig.1.1 et fig.1.2).

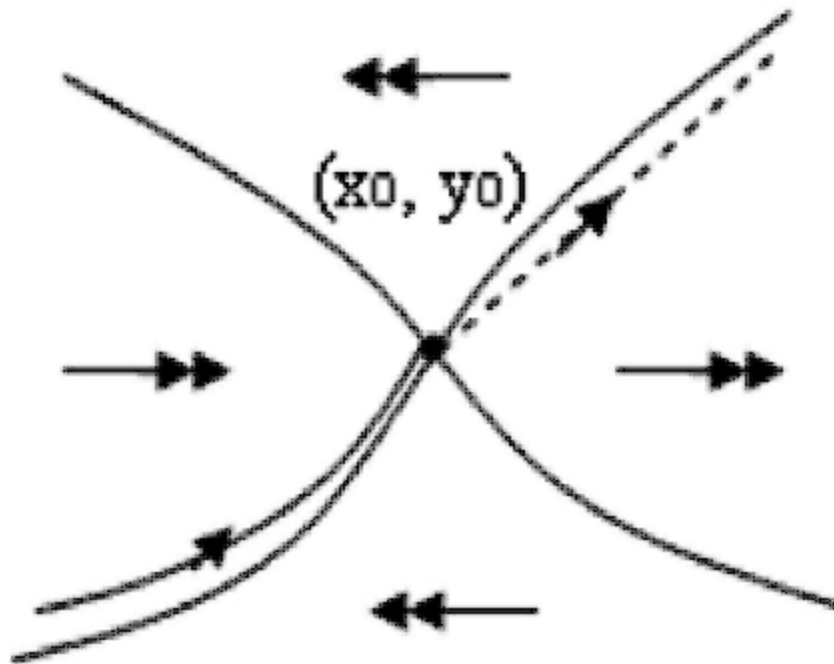


Figure 1.1: canard en un point de Morse

On désigne par trajectoires canards un type de solutions des systèmes différentiels lents rapides qui apparaissent lors des bifurcations de ces systèmes et permettent ainsi d'expliquer la brutalité des changements de comportement des solutions qui sont ressenties comme des discontinuités ou des catastrophes. En effet, elles traduisent un retard à la bifurcation.

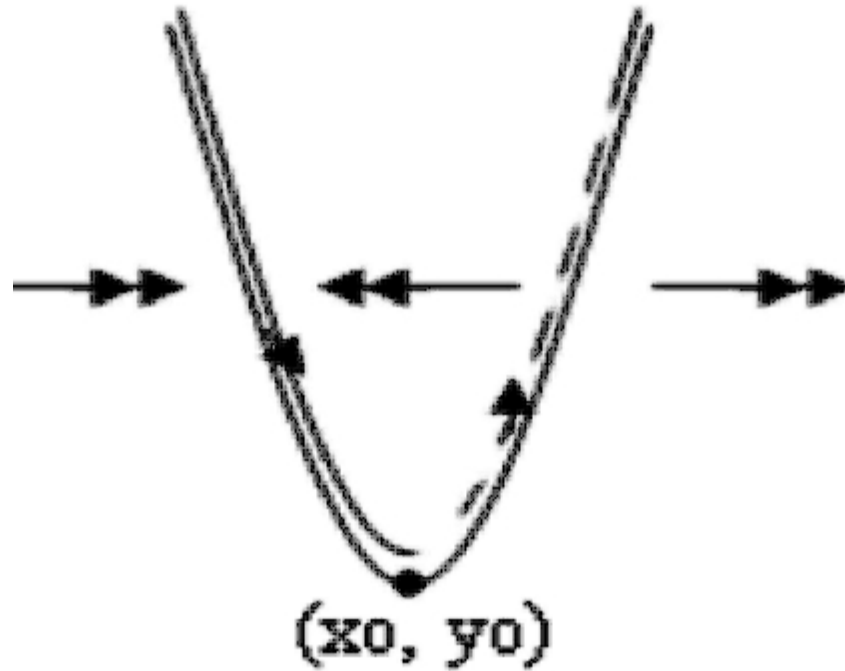


Figure 1.2: canard en un point Pli

Théorème 1.3. (voir [2])

Théorème local d'existence de valeurs à canards en un point pli :

Soit (x_0, y_0) un point pli de la courbe lente \mathcal{C} pour $a = a_0$. Il existe une valeur à canard au point (x_0, y_0) infiniment proche de a_0 si et seulement si $g(x_0, y_0, a_0) = 0$ et $f'_y(x_0, y_0, a_0) \cdot g'_x(x_0, y_0, a_0) < 0$.

Remarque 1.4. *Ce théorème permet de déterminer la partie standard $\overset{\circ}{a}$ des valeurs à canards.*

Théorème 1.4. (voir [2])

Si un système lent-rapide $(\mathcal{S}, \varepsilon)$ présente une bifurcation de Hopf au point (x, y) pour la valeur a du paramètre, alors il existe une valeur à cycle canard \bar{a} au point (x, y) infiniment proche de a .

Remarque 1.5. *Ce théorème met en évidence la relation étroite qu'il ya entre existence de cycles canards et bifurcation de Hopf.*

Remarque 1.6. *Les cycles canards accompagnent généralement la bifurcation de Hopf: Ce sont des cycles de taille intermédiaire situés entre les cycles infiniment petits et les grands cycles.*

1.4.2 Les premiers canards

Les cycles canards ont été découverts en appliquant les méthodes de l'ANS (voir [10], [11]) lors de l'étude de l'équation de Van der Pol :

$$\varepsilon x'' + (x^2 - 1)x' + x = a$$

où ε infiniment petit positif, et a un nombre réel standard.

Dans le plan de Liénard des (x, u) , où

$$u = \varepsilon x' + F(x)$$

et

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

l'étude des solutions de l'équation de Van der Pol est ramenée à celle des trajectoires du champ de vecteurs lent-rapide:

$$\mathcal{U}_a \begin{cases} x' &= \frac{1}{\varepsilon}(u - F(x)) \\ u' &= a - x \end{cases}$$

Ce champ \mathcal{U}_a est vertical sur la cubique \mathcal{C} d'équation $u = F(x)$.

Désignons par \mathcal{P} "le parallélogramme curviligne" représenté sur la fig.1.3.

Définition 1.14. *On appellera grand cycle une trajectoire périodique de \mathcal{U}_a dont l'ombre est égale à \mathcal{P} , et canard avec tête (resp. sans tête) une trajectoire périodique de \mathcal{U}_a dont l'ombre est une courbe du type représenté sur la fig.1.4 (resp fig.1.5). Un cycle infiniment petit est un cycle de \mathcal{U}_a dont l'ombre est réduite au point $(1, \frac{2}{3})$ (cette ombre est donnée par $(a, \overset{\circ}{F}(a))$ lorsque a est infiniment proche de 1).*

Pour tout canard ou grand cycle, notons x_b et x_q ($x_b < x_q$) les abscisses des points d'intersection de ce cycle avec la cubique \mathcal{C} (abscisse du bec et de la queue).

Pour tout canard avec tête, soit x_c l'abscisse du point (standard) non infiniment proche au bec et à la queue, où l'ombre de ce cycle n'est pas différentiable ($\overset{\circ}{x}_b < x_c < \overset{\circ}{x}_q$).

Résultats de l'étude géométrique

Proposition 1.5. *Pour $|a| \ll 1$, le champ \mathcal{U}_a admet un unique cycle limite.*

Proposition 1.6. *Pour $|a| \gg 1$, le champ \mathcal{U}_a ne possède pas de cycle limite.*

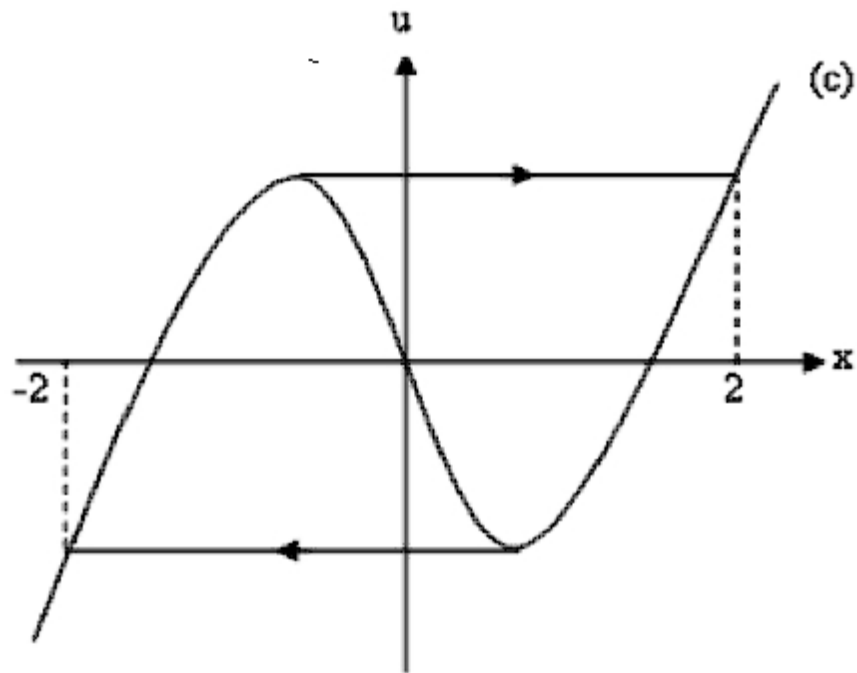


Figure 1.3: ombre d'un grand cycle

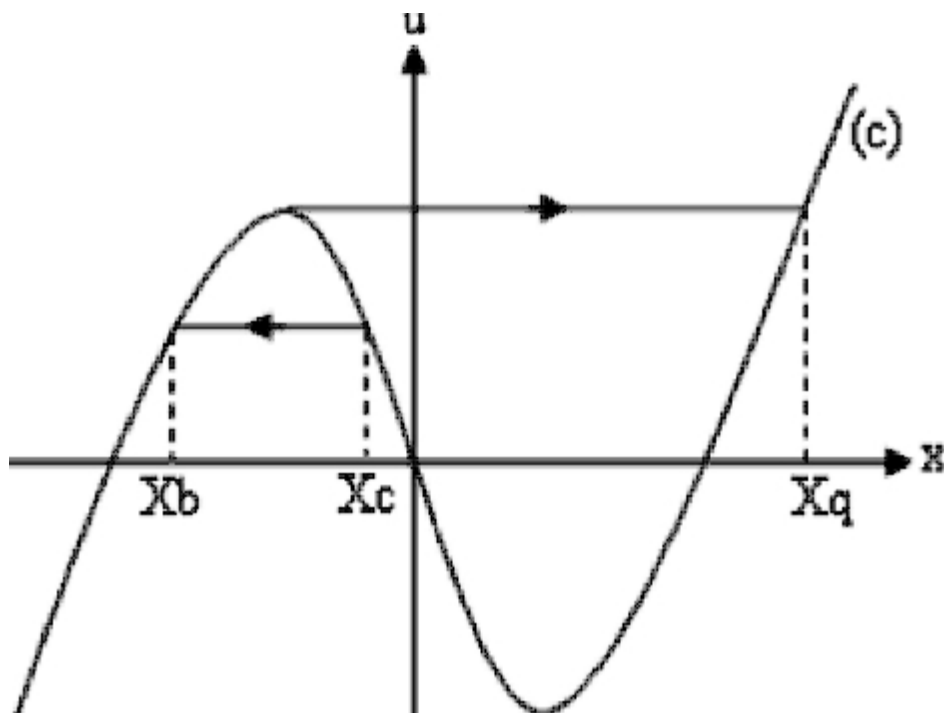


Figure 1.4: ombre d'un canard avec tête

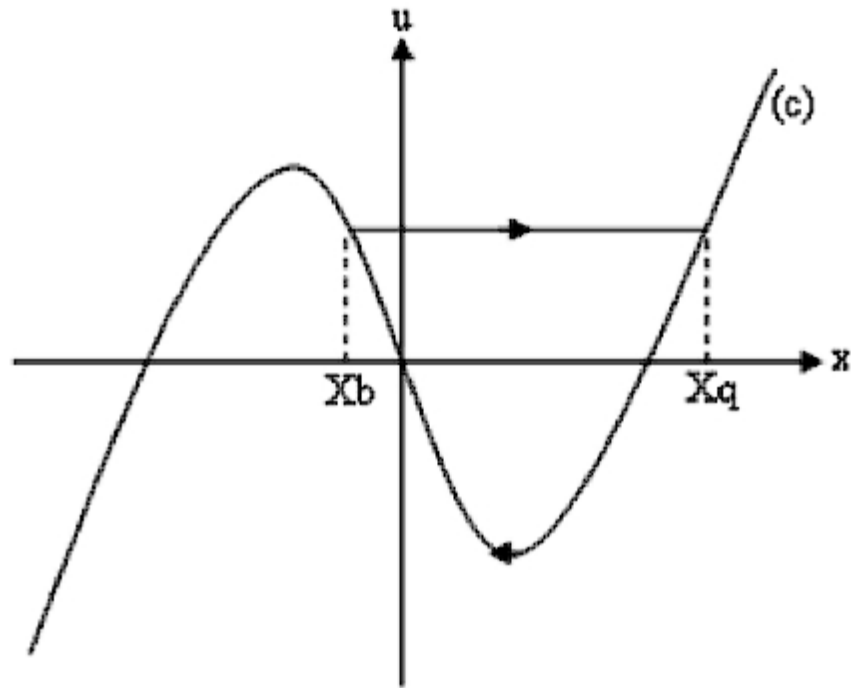


Figure 1.5: ombre d'un canard sans tête

Remarque 1.7. On a donc disparition d'un cycle pour une valeur a infiniment proche de 1. L'unique point singulier qu'admet le champ \mathcal{U}_a est un noeud stable (ou foyer stable) pour $a > 1$, et un noeud instable (ou foyer instable) pour $a < 1$. On a donc inversion de la stabilité du point singulier $(a, F(a))$ pour $a = 1$.

C'est une bifurcation de Hopf et d'après le théorème 2, on a bien existence de cycles canards.

Proposition 1.7. Pour $a \approx 1$, on a des cycles canards.

Chapitre 2

Black swans de cycles pour les systèmes en dimension trois

2.1 Définition

On appelle **black swan de cycles** une famille continue de cycles canards.

Remarque 2.1. *E.A.Shchepakina a choisi la dénomination "black swan" ou cygne noir pour deux raisons. La première est qu'un cygne est un oiseau qui appartient à la famille des canards. La seconde raison est reliée à la signification habituelle de "cygne noir" dans le sens que c'est un phénomène rare.*

La notion de black swan définie dans les articles de E.A.Shchepakina et de V.A.Sobolev (voir [16],[17]) considère une famille de trajectoires canards, mais la définition proposée semble trop floue pour être utilisable.

2.2 Exemples de black swans de cycles

2.2.1 Exemple -1-

Considérons le système différentiel suivant :

$$(X_\varepsilon) \begin{cases} \dot{z} &= 0 \\ \varepsilon \dot{x} &= y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} &= \alpha - x \end{cases}$$

où ε infiniment petit positif, et α un nombre réel, standard.

la composante en x de ce champ est infiniment grande sauf dans la ε galaxie de la surface cylindrique (S) d'équation :

$$(S) : y = \frac{1}{3}x^3 - x$$

De plus, le champ (X_ε) admet une intégrale première :

$$(P) : z = k \quad (k = \text{constante})$$

qui détermine des plans (P) invariants par le champ de vecteurs (X_ε) .

L'étude des trajectoires du champ (X_ε) dans un plan $z = k$ se ramène à celle des trajectoires du champ (X_α) induit par l'équation de Van der Pol dans le plan.

Soit :

$$(X_\alpha) \begin{cases} \varepsilon \dot{x} &= y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} &= \alpha - x \end{cases}$$

Ce champ a un unique point singulier, de coordonnées $(\alpha, h(\alpha))$ où $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.

Sur la cubique (c) (courbe lente d'équation : $y = \frac{x^3}{3} - x$), il est vertical, et il est presque horizontal en tout point fini n'appartenant pas au halo de (c) ($\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ est infiniment grand).

Proposition 2.1. *Si $\alpha \simeq 1$ ($0 < \alpha < 1$) ou $\alpha \simeq -1$ ($-1 < \alpha < 0$), le champ (X_ε) admet un black swan de cycles.*

Preuve. *Cette preuve s'inspire des travaux de F.et M.Diener .(voir [9] , [10] , [11])*

- Lorsque $0 < \alpha < 1$

· Existence du cycle limite :

Soit $[a , b]$ un intervalle standard sur l'axe des ordonnées tel que $a < \frac{2}{3} < b$; la trajectoire issue d'un point x_0 de cet intervalle a une ombre horizontale tant qu'elle ne rencontre pas

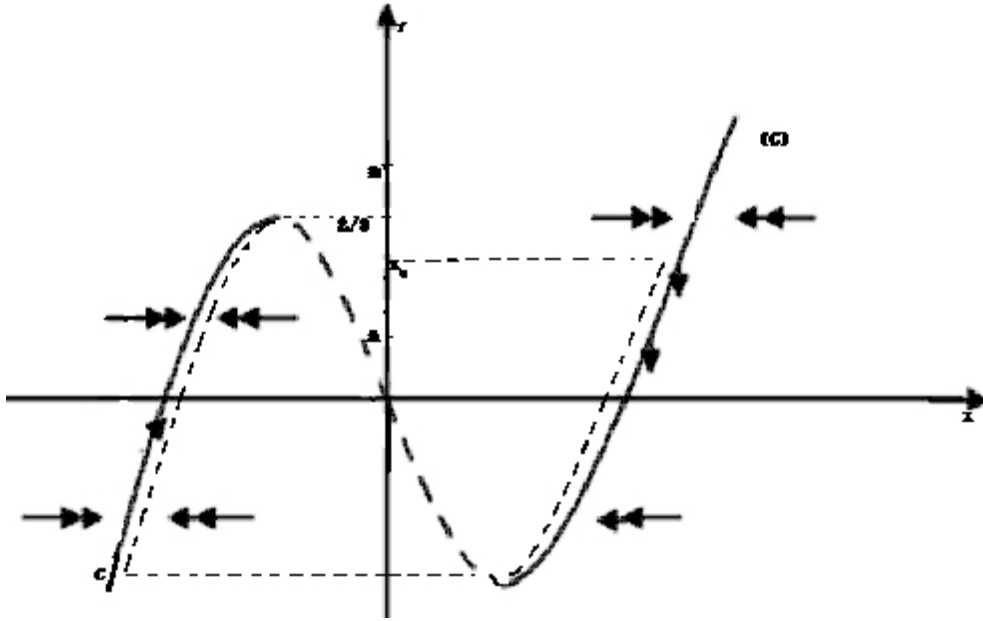


Figure 2.1: la courbe lente (c)

le halo de la cubique (c), ensuite elle longe la cubique vers le bas; arrivée au voisinage du minimum de la cubique, elle quitte le halo de (c) pour reprendre sa course horizontale puis coupe le halo de (c) au point c, longe la cubique vers le haut et la quitte au sommet pour recouper l'intervalle $[a, b]$ dans le halo du point d'intersection de cet intervalle avec la droite horizontale passant par le maximum. (voir fig.2.1)

On déduit de ce raisonnement que l'image de $[a, b]$ par l'application de premier retour de Poincaré est un intervalle infiniment petit.

Cette application est donc contractante et, par le théorème du point fixe, on a bien l'existence du cycle.

.. Unicité du cycle limite :

La preuve se trouve dans [2].

- Lorsque $-1 < \alpha < 0$ le principe est le même.

Une première difficulté apparaît aux points de la courbe lente $y = h(x)$ pour lesquels

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, \alpha) = 0.$$

Les points $(1, -\frac{2}{3})$ et $(-1, \frac{2}{3})$ ainsi obtenus divisent cette courbe en parties stables et instables.

Une analyse classique montre que le point singulier est instable lorsque $-1 < \alpha < 1$ et stable lorsque $\alpha > 1$ ou $\alpha < -1$.

Lorsque $\alpha \in (-1, +1)$, on rappelle qu'on peut utiliser l'analyse non-standard pour montrer que le champ admet un unique cycle limite.

Lorsque $\alpha > 1$ ou $\alpha < -1$, il n'y a pas de cycle limite.

La question est comment le cycle limite disparaît lorsque α passe la valeur -1 ou $+1$.

La réponse a déjà été trouvée par l'analyse non-standard (voir [2], [5], [11]) et on peut observer le phénomène canard au voisinage du point $(1, -\frac{2}{3})$ avec $\alpha = 1 - \frac{\varepsilon}{8} + \varepsilon^2 + \dots$ ou bien au voisinage du point $(-1, \frac{2}{3})$ avec $\alpha = -1 + \frac{\varepsilon}{8} + \varepsilon^2 + \dots$ ■

Conclusion 2.1. Le système (X_ε) admet une famille continue à un paramètre de cycles canards.

Chaque cycle se trouve dans un plan (P) d'équation $z = k$. Les cycles canards sont translatés les uns des autres suivant un vecteur parallèle à l'axe des z . Ils sont de même forme topologique.

2.2.2 Exemple -2-

Considérons le système différentiel suivant :

$$(Y_\varepsilon) \begin{cases} \dot{z} &= x \\ \varepsilon \dot{x} &= y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} &= -xz \end{cases}$$

avec ε infiniment petit positif.

Ce champ a l'avantage de posséder une intégrale première :

$$(P) \quad y = -\frac{z^2}{2} + k \quad (k = \text{constante}).$$

La composante en x est infiniment grande partout sauf dans la ε galaxie de la surface lente

$$(S) : y = \frac{x^3}{3} - x$$

Le problème ainsi posé ressemble au précédent, la différence reposant sur le fait que l'intégrale première détermine des surfaces (P) qui ne sont plus planes.

Théorème 2.2. *Le champ (Y_ε) admet une famille de cycles dépendant continûment de k appartenant à l'intervalle $\left] \frac{2}{3}, +\infty \right[$. Les cycles ont pour largeur un nombre infiniment proche de $\sqrt{2k + \frac{4}{3}} - \sqrt{2k - \frac{4}{3}}$ qui croît quand k s'approche de la valeur $\frac{2}{3}$.*

Preuve. *La preuve s'inspire des travaux de R. Bebbouchi. (voir [3])* ■

Démontrons, d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Si $k > \frac{2}{3}$, les trajectoires spiralent autour d'un cycle limite .*

Si $k \leq \frac{2}{3}$, il n'y a plus de cycle .

Preuve. Cette preuve s'inspire aussi des travaux de F.et M.Diener.

Soit une trajectoire qui part d'un point (z_0, x_0, y_0) avec

$$x_0 > 1 \text{ et } y_0 > \frac{x_0^3}{3} - x_0.$$

Elle arrive en un temps infiniment court dans le halo d'un point A_1 de la surface (S) , de composantes (z_0, x_1, y_0) , avec x_1 solution de l'équation :

$$y_0 = \frac{x_1^3}{3} - x_1.$$

Ensuite cette trajectoire longe la courbe d'équations :

$$(y = \frac{x^3}{3} - x, y = -\frac{z^2}{2} + k)$$

avec $k = y_0 + \frac{z_0^2}{2}$, jusque dans le halo du point B_1 de composantes $(z_1, 1, -\frac{2}{3})$, avec z_1 vérifiant l'équation du second degré :

$$z^2 - 2(k + \frac{2}{3}) = 0.$$

Trois cas peuvent se présenter :

1- $k < -\frac{2}{3}$

La courbe d'équations :

$$(y = \frac{x^3}{3} - x, y = -\frac{z^2}{2} + k)$$

ne coupe pas la droite $(y = -\frac{2}{3}, x = 1)$ et la trajectoire croît en y tant que z n'atteint pas la valeur 0, ensuite décroît en y mais reste dans le halo de la portion de la surface (S) correspondant à $x > 1$. Il n'y a pas de cycle.

2- $k > -\frac{2}{3}$

L'équation du second degré admet deux solutions. Comme z doit rester inférieur à 0, pour avoir la croissance en y , le seul cas possible est :

$$z_1 = -\sqrt{2(k + \frac{2}{3})}$$

La trajectoire admet donc un saut dans le halo du point B_1 ; elle retrouve le halo de la surface (S) au point C_1 de composantes $(z_1, -2, -\frac{2}{3})$, et reste dans le halo de la courbe d'équations :

$$(y = \frac{x^3}{3} - x, y = -\frac{z^2}{2} + k)$$

Comme z est toujours inférieur à 0, le champ est croissant en y et décroissant en z , et la trajectoire atteint le pli de la surface (S) dans le halo du point B de composantes $(z_2, -1, \frac{2}{3})$ avec $z_2 < 0$ et z_2 solution de l'équation du second degré :

$$z^2 + 2(\frac{2}{3} - k) = 0$$

(*) Si $k > \frac{2}{3}$, on a :

$$z_2 = -\sqrt{2k - \frac{4}{3}}$$

La trajectoire quitte le halo de la surface (S) pour le retrouver au point A_2 de composantes $(z_2, 2, \frac{2}{3})$; or ce point se trouve sur la courbe d'équations :

$$(y = \frac{x^3}{3} - x, y = -\frac{z^2}{2} + k)$$

qui relie les points A_1 et B_1 .

On déduit de ce raisonnement que l'image de tout intervalle standard contenant $\frac{2}{3}$ par l'application de premier retour de Poincaré est un intervalle infiniment petit.

Cette application est donc contractante et, par le théorème du point fixe, on a bien l'existence d'un cycle limite pour les trajectoires se trouvant sur la surface d'équation :

$$(P) \quad y = -\frac{z^2}{2} + k$$

(***) Si $-\frac{2}{3} < k < \frac{2}{3}$, il n'y a pas de cycle.

$$3- \quad k = -\frac{2}{3}$$

Le point B'_1 correspondant a pour composantes $(0, 1, -\frac{2}{3})$. Le saut a lieu et la trajectoire retrouve le halo de la surface (S) au point C'_1 de composantes $(0, -2, -\frac{2}{3})$. Mais le champ décroît en z et la trajectoire longe la courbe d'équations :

$$(y = \frac{x^3}{3} - x, y = -\frac{z^2}{2} - \frac{2}{3})$$

jusque dans le halo du point D_1 de composantes $(0, -1, \frac{2}{3})$, donc $z_2 < 0$ et le raisonnement est alors analogue au premier cas.

Il n'y a pas de cycle. (voir la représentation géométrique sur la figure 2.2.) ■

Remarque 2.2. D'après le Lemme précédent, on passe d'une situation avec cycle à une situation sans cycle : il y a donc bifurcation en $k = \frac{2}{3}$. C'est une bifurcation du type noeud-col.

Proposition 2.4. Le champ (Y_ε) admet un black swan de cycles dans le demi halo positif de $k = \frac{2}{3}$.

Preuve. On utilise le système de la forme :

$$(Y'_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dot{z} &= x \\ \varepsilon \dot{x} &= -\frac{z^2}{2} + k - \frac{1}{3}x^3 + x \end{cases}$$

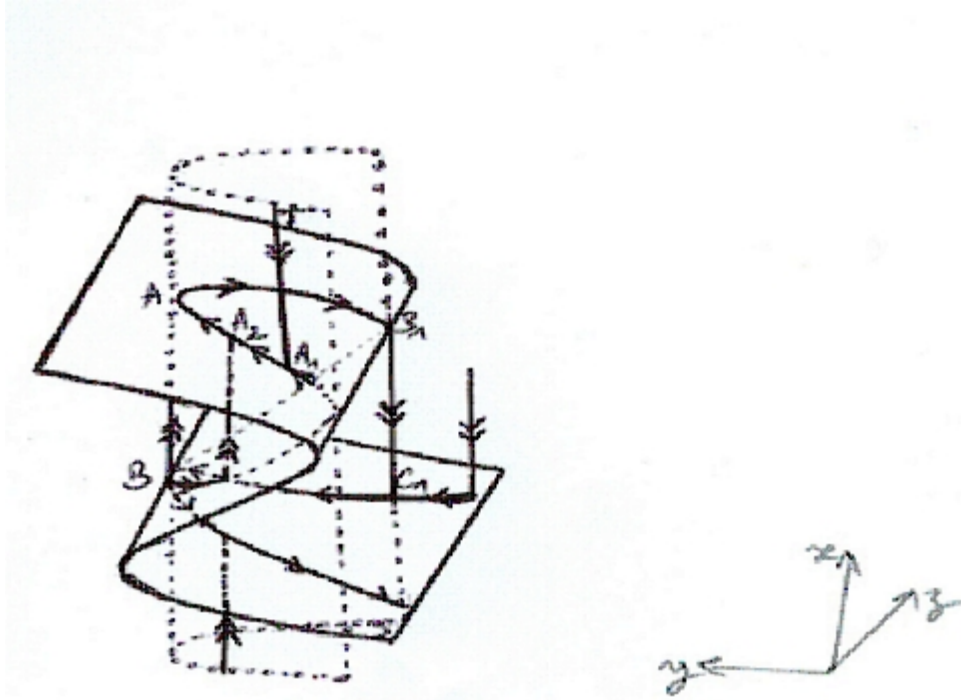


Figure 2.2: représentation géométrique

avec ε infiniment petit positif et k une constante. Ce système est la projection sur le plan (z, x) du champ (Y_ε) restreint à (P) . Sur chaque surface

$$(P) \quad y = -\frac{z^2}{2} + k$$

les trajectoires du champ (Y_ε) sont celles du champ (Y'_ε) admettant des points d'équilibre, et on cherche des conditions suffisantes sur k pour que ce système admette une famille continue de cycles canards (black swan de cycles). Autrement dit, nous nous intéressons à la bifurcation liée à ce système et à l'existence ou non de canards. Nous ferons ainsi appel à l'outil non standard.

Les propriétés du champ sont :

1- Il admet des points singuliers de la forme :

$$A_k(0, \pm\sqrt{2k}) \quad k > 0$$

2- Il est vertical sur la courbe (C_1) d'équation :

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{3k - x^3 + 3x}$$

dirigé :

- de haut en bas pour $x < 0$.
- de bas en haut pour $x > 0$.

3- Il est quasi-horizontal en dehors du halo de (C_1) , dirigé :

- dans le sens des x croissants au dessous de (C_1) .
- dans le sens des x décroissants au dessus de (C_1) .

C'est un champ lent-rapide de courbe lente (C_1) composée de morceaux attractifs et de morceaux répulsifs, selon que le champ rapide est dirigé vers la courbe ou qu'il s'en éloigne.

■

L'objet de l'étude est de trouver des valeurs de k pour lesquelles on a existence de cycles canards.

Lemme 2.5. Pour certaines valeurs de $k \simeq \frac{2}{3}$, on a des canards.

Preuve. pour $k \simeq \frac{2}{3}$, l'ombre de la courbe lente (C_2) dans le plan de phases a pour équation :

$$z = \sqrt{\frac{2}{3}} |x + 1| \sqrt{2 - x} = F(x).$$

L'étude des variations de cette courbe, et son tracé avec l'orientation du champ nous donnent la figure 2.3. ■

Conséquences : Dans le plan (z, x) , une trajectoire T qui part d'un point standard (z_0, x_0) avec

$$-1 < x_0 < 2 \text{ et } \frac{z_0^2}{2} < \frac{2}{3} - \frac{x_0^3}{3} + x_0$$

coupe la courbe (C_2) en un point de composantes (z_1, x_1) avec

$$z_1 \simeq z_0 \text{ et } \frac{z_1^2}{2} < \frac{2}{3} - \frac{x_1^3}{3} + x_1$$

longe ensuite la courbe (C_2) jusqu'au halo du point $(\sqrt{\frac{8}{3}}, 1)$ où le saut a lieu. La trajectoire T recoupe la courbe (C_2) dans le halo du point $(\sqrt{\frac{8}{3}}, -2)$, la longe jusque dans le halo du point A , coupe la branche de la courbe (C_2) située dans le demi-plan $z < 0$ et la longe en s'éloignant du point A ; elle ne spirale pas.

Il serait donc intéressant de se pencher sur des résultats déjà obtenus, et qui sont relatifs aux canards d'un champ de vecteurs lent-rapide (perturbations singulières) afin d'achever cette preuve.

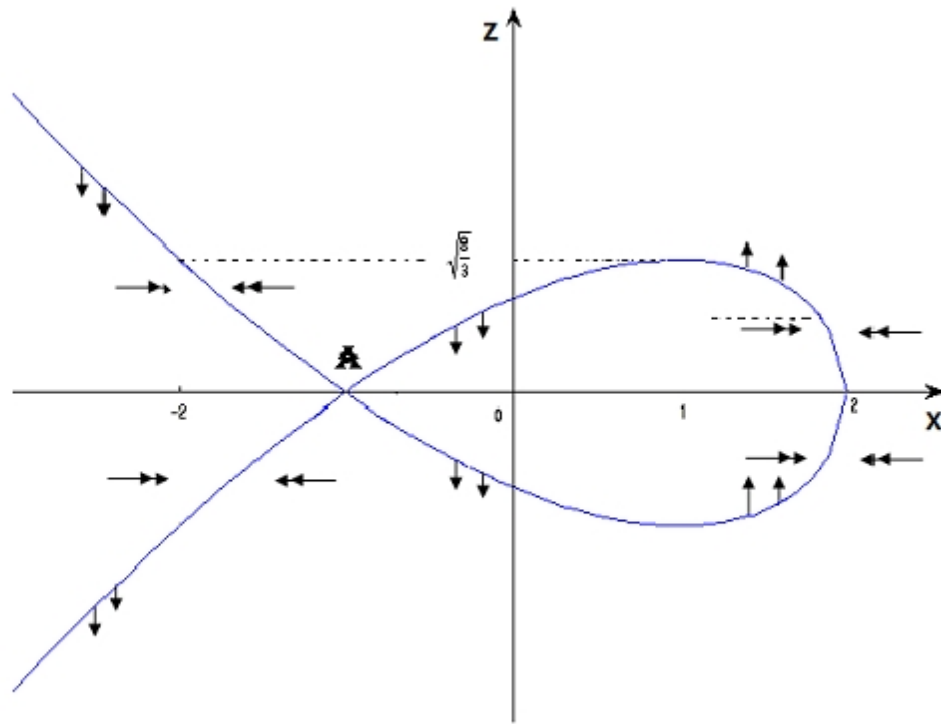


Figure 2.3: la courbe lente (C_2)

Lemme 2.6. *Si un champ de vecteurs admet une solution canard pour $a = \bar{a}$ au point critique (x_0, z_0) , on dira que \bar{a} est une valeur à canards au point (x_0, z_0) .*

posons :

$$f(x, z, k) = -\frac{z^2}{2} + k - \frac{x^3}{3} + x, \quad g(x, z, k) = x$$

Lemme 2.7. (voir [9])

Si a est une valeur à canards au point (x_0, z_0) , alors au point $(x_0, z_0, \overset{\circ}{a})$ on a :

ou bien

$$f = f'_x = f'_z = 0,$$

ou bien

$$f = f'_x = g = 0 \text{ et } f'_z \cdot g'_x \leq 0.$$

Ce lemme permet de déterminer la partie standard $\overset{\circ}{a}$ des valeurs à canards. À noter qu'il suffit que l'un de ces deux groupes de conditions soit satisfait en un point standard $(x_0, z_0, \overset{\circ}{a})$, (x_0, z_0) non isolé dans la courbe lente, pour assurer génériquement l'existence d'une valeur à canards $\bar{a} \simeq \overset{\circ}{a}$ au point (x_0, z_0) .

Compte tenu des propriétés géométriques de la courbe lente au voisinage de (x_0, z_0) , on dira dans le premier cas que (x_0, z_0) est un point de Morse (on suppose que $\text{hess } f_x = f''_{x^2} f''_{z^2} - (f''_{xz})^2 < 0$ au point $(x_0, z_0, \overset{\circ}{a})$), et dans le second cas que (x_0, z_0) est un point pli (on suppose que $f'_z \cdot g'_x \cdot f''_{x^2} \neq 0$ au point $(x_0, z_0, \overset{\circ}{a})$).

Dans notre cas, les points pli sont donnés par $(1, \pm\sqrt{\frac{8}{3}})$, et le point de Morse est donné par $(-1, 0)$.

On a :

$$g(1, \pm\sqrt{\frac{8}{3}}, k) = 1 \neq 0$$

On en déduit qu'il n'existe pas de valeurs à canards au point pli, puisque les conditions exigées sont :

$$g(x_0, z_0, k) = 0 \text{ et } f'_z \cdot g'_x(x_0, z_0, k) < 0$$

D'autre part, on a :

$$f(-1, 0, k) = f'_x(-1, 0, k) = f'_z(-1, 0, k) = 0$$

Ici, on assure l'existence d'une valeur à canards $\bar{k} \simeq \frac{2}{3}$ au point de Morse $(-1, 0)$.

Remarque 2.3. *La dynamique du champ (Y_ε) est indispensable pour la proposition précédente.*

Chapitre 3

Variétés intégrales (invariantes), canards, et black swans de Shchepakina

3.1 Définitions

Rappelons qu'une trajectoire d'un champ lent rapide est appelée un canard, si elle longe d'abord une variété invariante stable et ensuite une variété invariante instable...

On devrait noter qu'un canard peut-être considéré comme un résultat obtenu lorsqu'une trajectoire longe une variété invariante lente stable puis instable en un point de la surface lente appelé point pli.

Le but principal de cette étude est le système singulièrement perturbé suivant :

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{y} &= g(x, y, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} &= p(x, y, z, \alpha, \varepsilon) \end{cases}$$

où ε est réel positif suffisamment petit, α est un paramètre, x et z sont des variables, y est un vecteur.

Rappelons que la surface lente S_α du système (3.1.1) est la surface décrite par l'équation :

$$(3.1.2) \quad p(x, y, z, \alpha, 0) = 0.$$

Soit $z = \Phi(x, y, \alpha)$ une solution isolée de l'équation (3.1.2).

On appelle le sous ensemble S_α^s (resp. S_α^u) de S_α défini par :

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x, y, \Phi(x, y), \alpha, 0) < 0$$

(resp.)

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x, y, \Phi(x, y), \alpha, 0) > 0$$

Le sous ensemble stable (resp.instable) de S_α .

Le point de S_α défini par :

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x, y, \Phi(x, y), \alpha, 0) = 0$$

est appelé point pli de la surface.

Le théorème de la variété stable (voir [13]) est l'un des résultats les plus importants dans la théorie qualitative locale des équations différentielles ordinaires. Le théorème montre qu'au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique, le système non linéaire considéré admet des variétés stables (et instables) tangentes en ce point aux sous ensembles stables (et instables) du système linéaire correspondant.

Ainsi, dans le ε - voisinage de S_α^s (resp. S_α^u), il existe une variété invariante lente stable (resp. instable). La variété invariante lente est définie comme une surface invariante différentiable des mouvements lents.

La disponibilité du paramètre supplémentaire α assure la possibilité de coller (gluing) les variétés invariantes stables et instables en un point pli. Au voisinage d'un tel point passe un canard.

On a vu que la famille à un paramètre de canards existe. Si on prend le paramètre α comme une fonction continue de y , on peut coller (gluing) les variétés invariantes stables et instables en tout point de la surface lente continûment.

3.2 Les variétés intégrales stables et instables des mouvements lents

Dans cette section, on revoit les résultats principaux de la théorie de la variété invariante et la théorie du canard.

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires :

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} = g(t, x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

Ici x et y sont des vecteurs dans les espaces euclidiens \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n , $t \in (-\infty, +\infty)$ est une variable de temps, ε est paramètre positif suffisamment petit.

Les fonctions vectorielles f et g sont suffisamment régulières pour tous $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Le système est considéré comme un système à échelle multiple avec le paramètre ε .

Les sous systèmes lent et rapide sont représentés par les deux équations de (3.2.1). En substituant dans (3.2.1) $\varepsilon = 0$, on obtient le système qu'on appelle système dégénéré :

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y, 0) \\ 0 = g(t, x, y, 0) \end{cases}$$

La deuxième équation du système (3.2.2) détermine une variété S de dimension m appelée la variété lente. Une intersection entre S et la variété donnée par:

$$dét \left| \frac{\partial g}{\partial y}(t_0, x_0, y_0, 0) \right| = 0,$$

est une variété Γ de dimension $(m - 1)$.

Cette variété Γ divise S en feuilletés sur lesquels:

$$dét \left| \frac{\partial g}{\partial y}(t_0, x_0, y_0, 0) \right| \neq 0.$$

Par le *théorème des fonctions implicites* (voir [13]), un feuillet de la variété lente peut-être déterminé par une fonction vectorielle bien définie $y = h^{(0)}(t, x)$.

Une variété lente peut-être composée de plusieurs feuilletés déterminés par les différentes fonctions $y = h_i^{(0)}(t, x)$.

Définition 3.1. La variété (de classe C^∞) $S_\varepsilon \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est appelée une variété intégrale du système (3.1.1) si toute trajectoire issue d'un point de S_ε reste dans S_ε . Si seulement une partie des trajectoires reste dans S_ε , alors S_ε est appelée une variété intégrale locale. (par commodité on néglige "local" dans la définition).

La variété intégrale pour le système autonome:

$$(3.2.3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

a la forme $\overline{S}_\varepsilon \times \mathbb{R}$ où \overline{S}_ε est une variété dans l'espace de phase $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. La variété \overline{S}_ε est appelée une variété invariante, puisqu'elle reste invariante lorsque le système (3.2.3) évolue dans le temps.

L'exemple le plus simple de variété intégrale et invariante est la courbe intégrale.

Nous nous sommes intéressés aux variétés intégrales de dimension m (la dimension de la variété lente), qui peuvent -être représentées comme des graphes de fonctions vectorielles:

$$y = h(x, t, \varepsilon)$$

On suppose que $h(x, t, \varepsilon)$ est une fonction de ε suffisamment régulière, et satisfait la condition:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(t, x, \varepsilon) = h^{(0)}(t, x),$$

où $y = h^{(0)}(t, x)$ détermine la surface lente.

Les variétés intégrales ci-dessus sont appelées variétés intégrales des mouvements lents.

Le système dynamique sur cette variété intégrale est décrit par l'équation suivante :

$$(3.2.4) \quad \dot{x} = f(t, x, h(t, x, \varepsilon), \varepsilon)$$

Si $x(t, \varepsilon)$ est une solution de l'équation (3.2.4), et $y(t, \varepsilon) = h(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon)$, alors le couple $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ est une solution du système originel 3.1.1, parcequ'il détermine une trajectoire sur la variété intégrale.

Définition 3.2. La variété intégrale $y = h(t, x, \varepsilon)$ du système (3.1.1) est appelée stable, si une solution $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ du système (3.1.1) qui satisfait la condition initiale

$x(t_0, \varepsilon) = x_0, y(t_0, \varepsilon) = y_0$, tel que : $\|y_0 - h(t_0, x_0, \varepsilon)\| < \rho$ avec ρ nombre positif peut-être représentée comme:

$$(3.2.5) \quad \begin{cases} x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + \Phi_1(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) = h(t, u(t, \varepsilon), \varepsilon) + \Phi_2(t, \varepsilon), \end{cases}$$

où $u(t, \varepsilon)$ est une solution de (3.2.4) et où les fonctions $\Phi_1(t, \varepsilon)$ et $\Phi_2(t, \varepsilon)$ satisfont la condition:

$$(3.2.6) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_1(t, \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_2(t, \varepsilon) = 0.$$

Remarque 3.1. *Si l'équation (3.2.6) est satisfaite pour $t \rightarrow -\infty$, alors la variété intégrale est instable.*

Considérons le système (3.1.1) qui est représenté par le système autonome suivant:

$$(3.2.7) \quad \begin{cases} \dot{y} &= f(x, y, \alpha) \\ \varepsilon \dot{x} &= g(x, y, \alpha) \end{cases}$$

où x, y sont des fonctions (scalaires) du temps, ε est un scalaire, f et g sont suffisamment régulières.

Dans le plan de phase, considérons l'ensemble des points :

$$S_\alpha = \{(x, y) : g(x, y, \alpha) = 0\}$$

c'est une courbe lente du système (3.2.7).

Une première difficulté apparaît aux points de cette courbe pour lesquels

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, \alpha) = 0.$$

Cette situation a déjà été illustrée en considérant l'exemple de l'équation de Van Der Pol. On a ainsi découvert pour la première fois, des trajectoires particulières appelées canards (voir chap. précédent).

3.3 Exemples

-1-Considérons le système différentiel suivant : (voir [18])

$$(Z_\varepsilon) \begin{cases} \dot{x} &= \alpha\left(\frac{5}{2} + y\right) - xz^2 - x, \\ \dot{y} &= z - y, \\ \varepsilon\dot{z} &= xz^2 + x - z, \end{cases}$$

où $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 0 \leq \alpha < 1$. (*) α : paramètre de bifurcation, ε est un réel positif suffisamment petit.

Proposition 3.1. *Si $\alpha \simeq \frac{2}{7}$, on a des trajectoires canards.*

Preuve. La surface lente du système (Z_ε) est décrite par l'équation :

$$F(x, y, z) = xz^2 + x - z = 0$$

Le pli, qui est décrit par :

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2xz - 1 = 0$$

est formé des points $(\frac{1}{2}, y, 1)$ avec $y \geq 0$.

La surface lente est divisée en trois feuilletts $S_1^u (z > 1)$, $S_2^u (z < -1)$, $S^s (|z| < 1)$, dont les voisinages contiennent les variétés invariantes lentes correspondantes $S_{1,\varepsilon}^u$, $S_{2,\varepsilon}^u$, et S_ε^s . (voir le théorème de la variété stable)

Notons que seules S_ε^s avec $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $S_{1,\varepsilon}^u$ satisfont les conditions (*).

D'autre part, le système (Z_ε) admet un point d'équilibre P donné par :

$$\left[\frac{10\alpha(1-\alpha)}{29\alpha^2 - 8\alpha + 4}, \frac{5\alpha}{2(1-\alpha)}, \frac{5\alpha}{2(1-\alpha)} \right].$$

Lorsque $\alpha = 0$, cet équilibre est un noeud stable à l'origine.

Lemme 3.2. *Si $0 < \alpha < \frac{2}{7}$, P est un point d'équilibre stable (noeud).*

Si $\frac{2}{7} < \alpha < 1$, P est un point d'équilibre instable (selle).

■

Preuve. Pour étudier le type de ce point d'équilibre P lorsque $0 < \alpha < 1$, on pose :

$$A = \frac{5\alpha}{2(1-\alpha)}, \quad B = \frac{10\alpha(1-\alpha)}{29\alpha^2 - 8\alpha + 4}, \quad C = 1 - 2AB, \quad \text{et } D = 1 + A^2.$$

La matrice jacobienne correspondante est :

$$\begin{bmatrix} -D & \alpha & -2AB \\ 0 & -1 & 1 \\ \varepsilon^{-1}D & 0 & -\varepsilon^{-1}C \end{bmatrix}$$

Dépendant de la valeur du paramètre α , le point d'équilibre P appartient au feuillet stable de la surface lente, ou bien au feuillet instable. P parcourt le feuillet stable de la surface lente ($0 \leq z < 1$) dans le domaine (*), si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \geq 0 \\ \frac{5\alpha}{2(1-\alpha)} < 1 \end{cases}$$

donc, pour $0 \leq \alpha < \frac{2}{7}$ le point d'équilibre P appartient au feuillet stable de la surface lente S^s ; pour $\alpha = \frac{2}{7}$ il appartient au pli ; pour $\frac{2}{7} < \alpha < 1$, il appartient au feuillet instable S_1^u .

Le polynôme caractéristique :

$$\varepsilon\lambda^3 + \lambda^2(1 - 2AB + \varepsilon(2 + A^2)) + \lambda(A^2 - 2AB + 2 + \varepsilon(1 + A^2)) + (1 + A^2)(1 - \alpha) = 0$$

est stable (i.e toutes ses racines sont à parties réelles négatives) si et seulement si les conditions :

$$\begin{cases} D(1 - \alpha) > 0 \\ C + \varepsilon(1 + D) > 0 \\ C + D + \varepsilon D > 0 \\ (C + \varepsilon(1 + D))(C + D + \varepsilon D) - \varepsilon D(1 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

sont satisfaites.

Par conséquent, P est un point d'équilibre stable (noeud) pour $0 < \alpha < \frac{2}{7}$.

L'auteur utilise une autre technique pour étudier l'équilibre sur le feuillet instable S_1^u de la surface lente, et elle constate que P est un point d'équilibre instable (selle) pour $\alpha > \frac{2}{7}$.

La surface lente est une approximation d'une variété invariante lente (pour $\varepsilon = 0$).

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition, en se basant sur les travaux de l'auteur, et qui aboutit aux résultats suivants :

Si $0 \leq \alpha < \frac{2}{7}$, une trajectoire du système (Z_ε) , part d'un point initial dans le bassin d'attraction de la variété invariante stable S_ε^s , après un temps très court, elle suit S_ε^s et tend vers le point d'équilibre stable P quand $\tau \rightarrow \infty$.

Si $\alpha > \frac{2}{7}$, une trajectoire de (Z_ε) suivra S_ε^s jusqu'au pli .

La validité du paramètre supplémentaire α donne la possibilité de coller (gluing) S_ε^s et $S_{1,\varepsilon}^u$ en un point du pli.

La trajectoire canard obtenue passe par ce point, donc un canard est un résultat du collage (gluing) des variétés invariantes lentes stable et instable en un point du pli .

Ceci nous permet de construire des variétés invariantes lentes à stabilité variable (*black swans*) formées entièrement de canards. ■

Remarque 3.2. *Pour un point donné $y = y^*$ du pli, on peut trouver la valeur $\alpha^* = \alpha(y^*, \varepsilon)$ qui correspond au canard du système. Cette trajectoire parcourt le black swan et passe par le point $y = y^*$ du pli.*

Notons que le choix du point de collage (gluing) $y = y^$ est équivalent au choix du point initial de la trajectoire .*

Le black swan du système (Z_ε) , est une surface cylindrique formée de trajectoires canard, et d'un seul cycle canard.

-2-Comme exemple de système à canard le plus simple, on propose le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1 \\ \varepsilon \dot{z} &= 2xz + \alpha \end{cases}$$

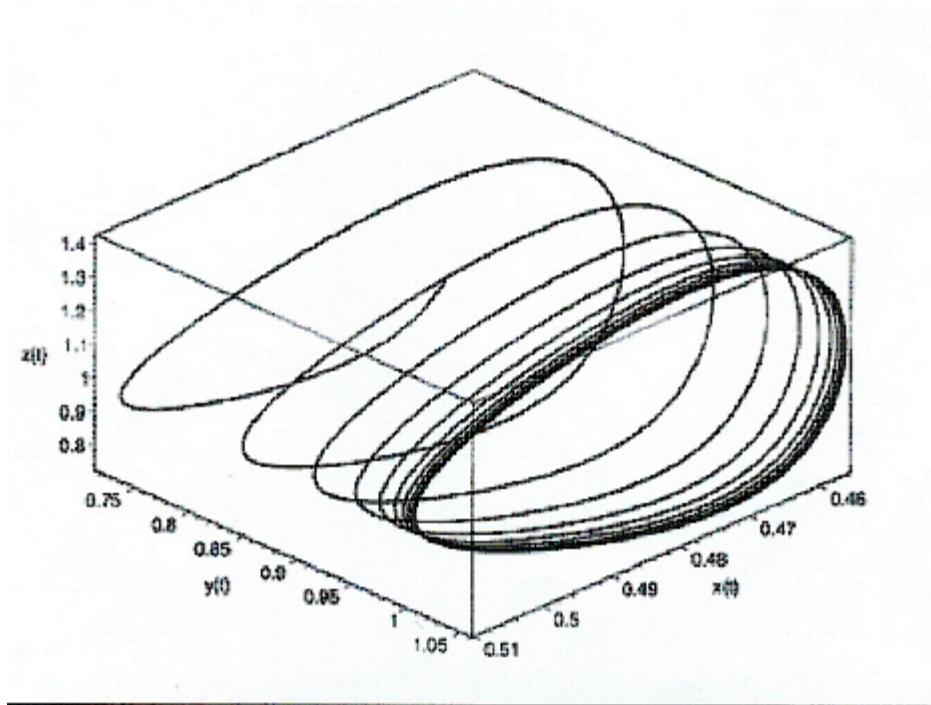
Il est clair que pour $\alpha = 0$, la trajectoire $z = 0$ est un canard.(voir [18])

-3-Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= 0 \\ \varepsilon \dot{z} &= 2xz + \alpha - y \end{cases}$$

Si α est un paramètre alors les différents canards sont déterminés par :

$$\dot{x} = 1, \quad y = y_0, \quad z = 0,$$

Figure 3.1: le black swan du système (Z_ε)

ces canards passent par l'unique point :

$$x = 0, \quad y = y_0, \quad z = 0$$

sur le pli $x = 0$ de la surface lente $2xz + y_0 - y = 0$ pour $\alpha = y_0$.

Si α est la fonction de la variable y , alors pour $\alpha = y$, la variété invariante $z = 0$ est stable pour $x < 0$ et instable pour $x > 0$.

-4-Dans le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + z^2 \\ \varepsilon \dot{z} &= xz \end{cases}$$

la ligne droite $z = 0$ joue le rôle de black swan dans le plan. On devrait noter que cette ligne représente une variété invariante, mais elle n'est pas une trajectoire canard, parcequ'elle n'est pas une trajectoire.

-5-Comme exemple de système qui donne des canards à longue vie, on propose :

$$\begin{cases} \dot{x} &= z \\ \varepsilon \dot{z} &= z^2 + x^2 - \alpha^2 \end{cases}$$

Le cercle $(x + \frac{\varepsilon}{2})^2 + z^2 = \alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}$ est un canard. Le demi-cercle supérieur est instable, et le demi-cercle inférieur est stable.

Ce canard existe pour tout $\alpha^2 > \frac{\varepsilon^2}{4}$.

-6-D'autre part, considérons le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} &= z \\ \dot{y}_i &= z, \quad i = 1, \dots, n \\ \varepsilon \dot{z} &= x^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + z^2 - \alpha^2 \end{cases}$$

Après un long calcul, on montre que la sphère de dimension $n + 1$, et d'équation :

$$(x + \frac{\varepsilon}{2})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i + \frac{\varepsilon}{2})^2 + z^2 = \alpha^2 - \frac{n+1}{4}\varepsilon^2$$

est une variété invariante lente, l'une de ses parties ($z < 0$) est stable, et l'autre ($z > 0$) est instable.

Ce black swan vit pour tout $\alpha^2 > \frac{n+1}{4}\varepsilon^2$.

-7-Dans le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1 \\ \varepsilon \dot{z} &= z^2 - x^2 + \alpha^2 \end{cases}$$

Si $\alpha = \pm\varepsilon$, les lignes $z = \pm x$ passent infiniment le long de la courbe lente :

$$z^2 - x^2 + \alpha = 0$$

Notons que le canard est seulement la trajectoire $z = x$. Dans cet exemple, le point :

$$x = 0, z = 0$$

est son point d'intersection avec la courbe lente en $\alpha = 0$.

De tels problèmes sont examinés dans [16], [17].

Les mêmes systèmes apparaissent dans les modèles d'explosion thermique dans le cas de réaction autocatalytique.

Dans ce cas, les canards sont les objets mathématiques naturels qui nous permettent de modéliser le phénomène critique, et découvrir les valeurs critiques du paramètre α comme développements asymptotiques comportant des puissances de ε (réel positif suffisamment petit).

3.4 Comparaison

En comparant les chapitres 2 et 3 de ce mémoire, les méthodes d'appréhension des mêmes problèmes semblent assez éloignées l'une de l'autre:

Pour les black swans de cycles, l'approche est très géométrique et s'attarde sur l'aspect qualitatif des phénomènes, bien que des résultats numériques peuvent-être exhibés à tout moment pour satisfaire le physicien.

En effet, tout se ramène à étudier la dynamique du champ lent-rapide non standard et l'ordinateur, bien manipulé, peut nous la reproduire. A nous de savoir interpréter les tracés obtenus.

D'ailleurs, c'est en observant les trajectoires d'un champ lent-rapide que le phénomène "canard" a été découvert, et observé qu'il est très rapide (les valeurs à canards sont très très proches) : les canards ont la vie brève.

Pour les black swans de Shchepakina, l'approche numérique tend à quantifier les résultats et l'erreur d'approximation, car l'intuition joue un rôle prépondérant et les praticiens de cette méthode ont très vite compris l'avantage à tirer d'une informatisation des problèmes.

En effet, E.Shchepakina prouve l'existence de trajectoires canard indépendamment des conditions initiales.

D'autre part, elle considère $\alpha = \alpha(y, \varepsilon)$ comme une fonction qu'elle appelle la gluing fonction, et qu'elle utilise comme un outil principal pour coller (gluing) les parties stable et instable de la variété invariante lente en tous les points du pli et d'une façon continue.

Ceci lui permet d'observer des variétés invariantes lentes à stabilité variable (black swans) formées entièrement de canards à longue vie.

Conclusion et perspectives

On voudrait, dans ce paragraphe, faire quelques commentaires sur des questions qu'on n'a pas résolues, sur des généralisations possibles des cas particuliers et sur les relations plus ou moins précises entre le problème étudié et d'autres questions voisines surtout celles concernant l'article de E.A.Shchepakina.

1. Quelques questions sur le système suivant de l'article de E.A.Shchepakina.

$$(E_\varepsilon) \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{y} = g(x, y, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} = h(x, y, z, \alpha, \varepsilon) \end{cases}$$

où ε est un réel positif suffisamment petit, α est un paramètre, x et z sont des réels, et y est un vecteur.

Les résultats démontrés dans cet article donnent un certain nombre de renseignements sur le portrait de phase de ce système.

Un point cependant reste obscur : quel est le sens du verbe "to glue"?

Il me semble qu'on ne connaît pas le sens du verbe coller en mathématiques. On s'en convainc en regardant les figures de l'article, et en remarquant qu'il s'agit seulement d'une rangée de familles de canards.

Un autre point me semble aussi obscur : pourquoi l'auteur à savoir E.A.Shchepakina définit un black swan comme une généralisation de canards, alors qu'on n'a abordé que les canards de \mathbb{R}^3 ! d'autre part, elle parle de canards à longue vie!?

2. Quelques questions sur les systèmes traités.

Ces systèmes ont beau être des cas particuliers du système de l'article, on ne sait pas à priori si on peut généraliser la notion de black swan de cycles à une notion de black swan comme famille de solutions canards et non de cycles.

Que pourrait être l'impact des black swans de cycles sur l'étude des champs lents-rapides en dimension supérieure ou égale à 3?

Il est possible que nos résultats soient un premier pas vers la démonstration de l'existence des black swans de E.A.Shchepakina en utilisant les outils non standard.

Tous les résultats obtenus pour ε infiniment petit demeureront vrais pour certains ε non infiniment petit et ce, en vertu du principe de permanence. Ceci s'interprète par le fait qu'il existera un réel ε_0 positif, appréciable tel que les résultats obtenus resteront vrais pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Pour les deux systèmes étudiés, standard, tous les résultats énoncés sont donc vrais pour tous α , et ε tel que $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, conséquence du principe de transfert.

Bibliographie

- [1] Arnold V I, Afraimovich V S, Il'yashenko Yu S and Shil'nikov L P 1994 Theory of Bifurcations (Dynamical Systems vol 5 Encyclopedia of Mathematical Sciences) ed V Arnold (New York: Springer-Verlag)
- [2] Bebbouchi R, Equations Différentielles Perturbées et Analyse Non Standard, OPU, (1990)
- [3] Bebbouchi R, Equations Différentielles Ordinaires: Troisième ordre avec perturbation singulière et non unicité d'un point de vue non classique. Thèse de doctorat d'état, IRMA, (Décembre 1982)
- [4] Benoît E, 1983 Systèmes lents-rapides dans \mathbb{R}^3 et leurs canards Société Mathématique de France. Astérisque 109-110, 159
- [5] Benoît E, Callot J L, Diener F and Diener M 1981-1982 Chasse au canard Collect. Math. 31-32 37
- [6] Benoît E, Canards de \mathbb{R}^3 Thèse de doctorat d'état, Université Paris VII, (Février 1984)
- [7] Benoît E, Canards et Enlacements, Extrait des Publications Mathématiques n° 72 (1990)
- [8] F.Takens, Constrained equations, a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions, in Structural stability, the theory of catastrophes and applications in the sciences, Springer Lecture Notes in Math., 525 (1976), 143-234.
- [9] F.Diener et M.Diener, Sept formules relatives aux canards. C.R.Acad.Sc.Paris, t.297, série I (1983), 577—584.

-
- [10] F.Diener, M.Diener, et J. L. Callot, Le problème de la "chasse aux canards". C.R.A.S.Paris, 286, série A (1978), 1059—1061.
- [11] M.Diener, Nessie et les canards, Publication IRMA, Strasbourg (1979)
- [12] Nelson E, "internal set theory: a new approach to non standard analysis", Bull. AMS Vol 83 n°6 (Nov 1977) 1165-1198.
- [13] L.Perko, Differential Equations and Dynamical Systems.Third Edition / TAM 7 Springer-Verlag, New York, 2002
- [14] Pierre Cartier, Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et A.N.S. Sémin. Bourbaki 34^{ème} année, n° 580 (1981—1982) 21—44.
- [15] Robinson A, "Non Standard Analysis", studies in Logic, North Holland publishing company (1966).
- [16] Shchepakina E.A. and Sobolev V.A. 2001 Integral manifolds, canards and black swans. Non linear Analysis A 44 897
- [17] Shchepakina E.A. and Sobolev V.A. 1998 Standard chase on black swans and canards. Preprint of Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin 426
- [18] Shchepakina E.A. Canards and black swans in a model of a 3-D autocatalator. Journal of physics : Conference Series 22 (2005) 194-207