N^0 d'ordre : 30 / 2004-M / MT

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

FACULTE DES SCIENCES MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES

Mémoire Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse (Systèmes dynamiques)

Par : MOULOUD Aïcha

THEME

ETUDE D'UN PROBLEME D'ELASTICITE MOMENTIQUE DANS DES DOMAINES NON BORNES

Soutenu le: 13 / 12 / 2004, Devant le jury:

M. R. Bebbouchi	***Professeur à L'U.S.T.H.B***	***Président***
M. M. Abid	***Maître de conférences à L'U.S.T.H.B***	***Directeur de Mémoire***
M. A. Kessi	***Professeur à L'U.S.T.H.B***	***Examinateur***
M. M. Medjden	***Maître de conférences à L'U.S.T.H.B***	***Examinateur***

Table des matières

Introduction

Le travail présenté dans ce mémoire concerne un problème d'élasticité momentique (ou micropolaire). C'est un problème qui généralise au sens physique le problème de l'élasticité classique.

Il décrit les déplacements à partir de l'état naturel d'un solide élastique, micropolaire, homogène et isotrope, dans un domaine Ω donné.

L'idée essentielle de cette théorie est l'introduction d'une variable représentant la rotation des particules constituant le solide élastique, relativement à leur voisinage, ainsi qu'un tenseur de contraintes, anti-symétrique, que balance l'action des forces d'interactions entre les particules (les particules exercent constamment des forces les unes sur les autres).

La théorie de l'élasticité micropolaire réunie donc, les rotations locales des points aussi bien que les translations (les déplacements) réalisées dans la théorie de l'élasticité classique, et le tenseur des couples de contraintes, ainsi que le tenseur de contraintes.

L'objet de ce travail consiste à développer un cadre fonctionnel adéquat, assurant l'existence et l'unicité de la solution du problème dans des domaines qui ne sont bornés dans aucune direction, ce qui est le cas des domaines extérieurs, c'est-à-dire des complémentaires de domaines bornés.

Les espaces de Sobolev classiques ne sont plus adaptés à ce genre de problème. Le cadre fonctionnel adéquat est en revanche donné par les espaces de Sobolev avec poids, qui coïncident localement (sur un borné) avec les espaces de Sobolev classiques.

Ces espaces ont été introduits par de nombreux auteurs pour étudier en particulier l'équation de Poisson, citons par exemple, sans être exaustif: Hanouzet [16], Cantor [8], Leroux [22], puis Giroire [15].

Schématiquement, le principe de ces espaces est de sélectionner des fonctions en les comparant, ainsi que leurs dérivées à l'infini avec une fonction de type r^{α} dans les espaces $L^{p}(\Omega)$; avec $1 < p < +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Plus fondamentalement encore, les poids sont choisis de sorte que les inégalités de Hardy se substituent à l'inégalité de Poincaré défaillante dans un domaine non borné.

Dans ces espaces, on établit des théorèmes de traces, d'existence et d'unicité, dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, dans un premier lieu, ensuite dans un domaine extérieur de $\mathbb{R}^n$, avec $n = 3$ puis $n = 2$, et la technique utilisée à cette occasion est celle des méthodes variationnelles.

Notons finalement que le cas bidimensionnel nécessite des arguments spécifiques que nous détaillerons ultérieurement.

Chapitre 1

Rappels – Définitions

Ce chapitre rassemble les définitions et propriétés essentielles, qui seront utilisées de façon constante dans les chapitres ultérieurs.

1.1 Généralités sur l'analyse fonctionnelle

1.1.1 Notions de base

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\bar{\Omega}$ sa fermeture.

► soit k $\in \mathbb{N}$, $C^K(\Omega)$ est l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω.

► $C^K\left(\bar{\Omega}\right)$ est le sous espace de $C^K(\Omega)$ tel que $\partial^\alpha u$ se prolonge continûment sur $\bar{\Omega}$ pour tout $|\alpha| \leq k$.

► soit k $\in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1[$, on a :

$$C^{0,\,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C^{0}(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty \ ; \forall x \ , \ y \in \Omega \right\}$$

et

$$C^{K,\,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C^{K}(\Omega) \ ; \ \partial^{\beta} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \ , \ |\beta| \leq k \right\}$$

En particulier, si on pose $\alpha = 1$ dans $C^{0,\alpha}$, on obtient l'espace des fonctions **lipschitziennes**.

▶ On définit $D(\Omega)$ par l'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans Ω, et $D\left(\overline{\Omega}\right)$ l'espace des restrictions des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$ à Ω.

▶ $D'(\Omega)$ est l'espace des distributions définies sur Ω (applications linéaires, continues sur $D(\Omega)$).On note par $\langle .,. \rangle$ le produit de dualité entre $D'(\Omega)$ et $D(\Omega)$.

Définition 1.1. ***(cf.****[7])*

on désigne par $L^2(\Omega)$ *l' espace des fonctions*

$$\begin{array}{rccc} u: & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

de carré sommable sur Ω*,*

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx < +\infty$$

relativement à la mesure de Lebesgue $(dx = dx_1.dx_2...dx_n)$ *dans* $\mathbb{R}^n$*.*

Rappelons que:

▶ $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x).dx.$$

▶On note par

$$\|u\|_0 = (u,u)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega (u(x))^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

la norme correspondante.

▶ $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_0$.

Proposition 1.1. (***inégalité de Cauchy Schwartz , cf.****[7]*) *:*

Soient u*,* $v \in L^2(\Omega)$ *alors :*

$$uv \in L^1(\Omega)$$

et

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_2 \|v\|_2 .$$

Définition 1.2. *(**injections continues- injections compactes**) .*
X, Y deux espaces de Banach tels que : Y⊂X (algébriquement) .
1) On dit que Y s'injecte de manière continue dans X si l'opérateur identité :

$$\begin{array}{rccc} id: & Y & \rightarrow & X \\ & y & \mapsto & y \end{array}$$

est continu.
2) On dit que Y s'injecte de manière compacte dans X si l'opérateur identité est compact de Y dans X .

1.1.2 opérateurs différentiels usuels

Définition 1.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et soient, φ une fonction scalaire, $u = (u_1, u_2, u_3)$ une fonction vectorielle de $\mathbb{R}^3$, où les u_i sont des fonctions scalaires de classe $C^1(\Omega)$ pour $i = 1, 2, 3$.*
On désigne par $\triangle$, ∇ , div , et rot les opérateurs différentiels usuels, laplacien, gradient divergence et rotationnel, définis par :

$$\triangle\varphi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \qquad , \ \nabla\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)$$

$$\nabla u = (\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3) \qquad / \qquad \nabla u_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right) \qquad i = 1, 2, 3$$

$$divu = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

▶***Dans le cas n=3 :*** *pour tout $u = (u_1, u_2, u_3)$, on pose :*

$$rotu = \nabla \wedge u = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

▶***<u>Dans le cas n=2 :</u>*** *pour tout* $u = (u_1, u_2)$, *on pose :*

$$rotu = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

définissant ainsi l'opérateur différentiel noté encore rot *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.

▶*On est aussi amené à utilisé dans le cas n=2, l'opérateur différentiel linéaire, noté* Rot *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *défini par :*

$$Rot\ \varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1})$$

pour tout φ *fonction scalaire .*

De plus dans le cas n=3 *: L'opérateur* rot *apparaît comme son propre « transposé formel » c à d:*

$$\langle rotu, \varphi \rangle = \langle u, rot\varphi \rangle \qquad \forall u \in [D'(\Omega)]^3 \ , \ \forall \varphi \in [D(\Omega)]^3$$

Par contre dans le cas n=2 *: L'opérateur* rot *apparaît comme le transposé formel de l'opérateur* Rot *c à d :*

$$\langle rotu, \varphi \rangle = \langle u, Rot\ \varphi \rangle \ , \ \forall u \in [D'(\Omega)]^2 \ , \ \forall \varphi \in D(\Omega)$$

1.1.3 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

Définition 1.4. *(cf.[27]) :*

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$.

On définit l'espace de Sobolev H^m *par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ \ / \quad \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \ , \ \ |\alpha| \leq m \right\}$$

où

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \quad , \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

et

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}.} \ .$$

▶Il est muni du produit scalaire :

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u.\partial^\alpha v dx.$$

▶La norme induite par le produit scalaire est notée par $\|.\|_m$:

$$\|u\|_m = (\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Muni de cette norme, $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable .

▶En particulier on a :

$$H^{\,0}(\Omega) = L^2(\Omega).$$

▶Pour m $\in \mathbb{N}$, on a les injections suivantes :

$$H^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega) \hookrightarrow ... \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega) = L^2(\Omega).$$

▶La fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ est appelée $H_0^m(\Omega)$.

▶Le dual de $H_0^m(\Omega)$ est noté $H^{-m}(\Omega)$.

1.2 Trace d'une fonction

La notion de trace étend la notion de restriction d'une fonction continue au bord Γ. De manière générale, la notion de restriction au bord n'a pas de sens pour les fonctions de $L^p(\Omega)$, car ces fonctions sont définies pp et la mesure du bord Γ est nulle par rapport à la mesure du domaine Ω .

Théorème 1.1. *Si Ω est lipschitzien , alors $D\left(\bar{\Omega}\right)$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Proposition 1.2. *Si Ω est un ouvert borné, lipschitzien, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} D\left(\bar{\Omega}\right) & \rightarrow & C(\Gamma) \\ u & \mapsto & u_{|\Gamma} \end{array}$$

se prolonge en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. Ce prolongement est appelé opérateur trace, noté γ_0. De plus on a :

$$\int_\Gamma |\gamma_0(u)|^2 \, d\Gamma \leq c \, \|u\|_1 \ .$$

Corollaire 1.1. *Si Ω est un ouvert borné lipschitzien, alors :*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \ \ / \ \ \gamma_0(u) = 0 \ \ sur \ \Gamma \right\}$$

c à d :

$$H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$$

Remarque 1.1. *L'image de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ par l'application γ_0 est un sous espace fermé de $L^2(\Gamma)$, muni de la topologie induite par celle de H^1 est appelé, **espace de trace**, noté $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$:*

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \gamma_0\left(H^1(\Omega)\right) \subset L^2(\Gamma)$$

et

$$\|g\|_{\frac{1}{2}} = \inf_{\gamma_0(u)=g} \|u\|_1 \leq \|u\|_1 \, .$$

Théorème 1.2. *(**de relèvement**) :*
Soit Ω un ouvert borné, lipschitzien, alors :

$$\begin{aligned} \forall g \ &\in \ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \ , \ \exists u \in H^1(\Omega) \ \ tel \ que \\ u_{|\Gamma} \ &= \ g \quad et \quad \|u\|_1 \leq c \ \|g\|_{\frac{1}{2}} \, . \end{aligned}$$

- **Vecteur normal , dérivée normale :**

Si le domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ est lipschitzien, on peut définir presque partout le plan tangent à Γ (bord de Ω) ainsi que le vecteur normal. On note par $\overrightarrow{n}(x) = (n_1(x), n_2(x), ..., n_N(x))$ le vecteur normal unitaire extérieur à Ω tel que :

$$\|n(x)\| = \left(n_1^2(x) + n_2^2(x) + ... + n_N^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Il est clair que si Γ est borné, $n(x) \in L^p(\Gamma)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.5. *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *de classe* $C^1\left(\bar{\Omega}\right)$.

On appelle dérivée normale de f, *l'expression :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right) n_i\left(x\right).$$

1.3 Formule de Green

Théorème 1.3. Ω *ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, *lipschitzien de frontière* Γ. *Soient* u, v *deux éléments de* $H^1(\Omega)$. *On a :*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{x_i} dx = -\int_{\Gamma} \gamma_0\left(u\right) n_i d\Gamma.$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{x_i} v dx = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{x_i} dx + \int_{\Gamma} \gamma_0\left(u\right).\gamma_0\left(v\right) n_i d\Gamma.$$

Si $u \in H^2, v \in H^1$.*alors :*

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} \gamma_0\left(v\right).\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\Gamma.$$

Théorème 1.4. ***(Inégalité de poincaré-Friedrichs) :***

Soit Ω $\left(\subset \mathbb{R}^n\right)$ *un ouvert borné. Alors il existe une constante* $c > 0$ *telle que :*

$$\left\|v\right\|_0 \leq c\left\|\nabla v\right\|_0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme conséquence de cette inégalité :

$\left|v\right|_1 = \left\|\nabla v\right\|_0$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle de H^1 i.e.

$$c_1\left\|v\right\|_1 \leq \left\|\nabla v\right\|_0 \leq c_2\left\|v\right\|_1 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Lemme 1.1. ***(Inégalité de Korn, cf. [23])*** *:*

Il existe une constante positive c telle que :

$$\left\|\nabla u\right\|_0^2 - \frac{1}{2}\left\|rot\ u\right\|_0^2 + \left\|u\right\|_0^2 \geq c\left\|u\right\|_1^2 \quad \forall u \in \left[H^1\left(\Omega\right)\right]^3 .$$

Théorème 1.5. *(**Injection de Sobolev**) :*

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné et lipschitzien, alors on a les injections suivantes :

1) $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $\quad \forall m \in \mathbb{N}$ *telle que :* $m - \frac{n}{2} \geq -\frac{n}{p}$.

2) $H^m(\Omega) \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$, $\quad \forall m \in \mathbb{N}$ *telle que :* $m - \frac{n}{2} \geq 0$.

Théorème 1.6. *(**de Rellich**) :*

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné de classe C^0, alors on a les injections compactes suivantes:

$H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega)$, $\quad \forall m \in \mathbb{N}^*$.

En particulier :

$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $\quad \forall m \in \mathbb{N}^*$.

- **Théorème de Lax Milgram :**

► Soit V un espace de Hilbert muni du produit scalaire (u, v) et de la norme $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. V' le dual topologique de V, c à d :

$$L \in V' \iff \begin{array}{rccc} L: & V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & L(u) \end{array}$$

tel que

$$|L(u)| \leq c \|u\|_V \qquad \forall u \in V.$$

► $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue sur V :

$$\begin{array}{rccc} a(.,.): & V \times V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \rightarrow & a(u, v) \end{array}$$

s'il existe $c > 0$ tel que: $u,\, v \in V$,

$$|a(u, v)| \leq c \|u\| . \|v\| .$$

Définition 1.6. *(**Problème variationnel**) :*

On appelle problème variationnel le problème suivant :

Soit $L \in V'$, trouver u dans V tel que :

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall\ v\ \in V.$$

Définition 1.7. *Une forme bilinéaire est dite V-elliptique ou bien coercive, s'il existe une constante α $(\alpha > 0)$ tel que :*

$$a(u,v) \geq \alpha \|u\|^2 \qquad \forall u \in V$$

Théorème 1.7. *(**de LAX MILGRAM**) :*

Soit V un espace de Hilbert. $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur V. Alors pour tout L dans V' $(L \in V')$; il existe une unique solution u dans V tel que :

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall\ v\ \in V$$

De plus, il existe une constante c telle que :

$$\|u\|_V \leq c\,\|L\|_{V'} \qquad \forall L \in V'$$

1.4 Espaces de sobolev avec poids

Nous allons introduire les espaces de Sobolev avec poids adaptés au cas non borné, introduits initialement par Hanouzet [16] dans $\mathbb{R}^3$, puis développés notamment par Giroire [15] dans $\mathbb{R}^2$, dans le cadre hilbertien.

Ces espaces fournissent un cadre fonctionnel adéquat car, les fonctions appartenant à ce type d'espaces satisfont des inégalités de type Poincaré qui sont optimales .

Afin de définir ces espaces, nous introduisons les notations suivantes :

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (n=2 ou 3), on note par :

1) $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un point de Ω.

2) $r = |x| = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^{\frac{1}{2}}$, la distance de x par rapport à l'origine .

3) $\rho\,(r) = (1 + r^2)^{\ \frac{1}{2}}$ et $lg(r) = log(2 + r^2)$, les deux fonctions poids de base .

Définition 1.8. *Soient $m \geq 0$ un entier , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On définit l'entier :*

$$k = \begin{cases} m - \frac{n}{2} - \alpha & si \quad \frac{n}{2} + \alpha \ \in \ \{1, 2, ..., m\}\,. \\ -1 & sinon. \end{cases}$$

et l'espace :

$$W_{\alpha,\beta}^{\ m}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in D'(\Omega) : \forall\lambda = (\lambda_2, \lambda_2, ..., \lambda_n) \ : \lambda_i \geq 0 \ , \ 0 \leq |\lambda| \leq k \ . \\ \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta - 1} \partial^\lambda u \in L^2(\Omega) \ ; \\ k + 1 \leq |\lambda| \leq m \ ; \ \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta} \partial^\lambda u \in L^2(\Omega) \ . \end{array} \right\}$$

$W_{\alpha,\beta}^{\ m}(\Omega)$ est muni d'une structure d'espace de Hilbert pour la norme :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{\alpha,\beta}^m(\Omega)} &= \Big(\sum_{0 \leq |\lambda| \leq k} \left\| \frac{\rho^{\alpha - m + |\lambda|}}{(\lg r)^{1-\beta}} \partial^\lambda u \right\|_0^2 \\ &\quad + \sum_{k+1 \leq |\lambda| \leq m} \left\| \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta} \partial^\lambda u \right\|_0^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On définit aussi la semi norme :

$$|u|_{W_{\alpha,\beta}^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda| = m} \left\| \rho^\alpha (\lg r)^\beta \partial^\lambda u \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

La résolution du problème conduit à introduire l'espace $W_{\alpha,0}^{\ m}(\Omega)$ i.e pour $\beta = 0$, et qui sera noté plus simplement $W_\alpha^m(\Omega)$:

$$W_\alpha^{\ m}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in D'(\Omega) : \forall\lambda = (\lambda_2, \lambda_2, ..., \lambda_n) \ : \ \lambda_i \geq 0 \ , \ 0 \leq |\lambda| \leq k \ . \\ \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{-1} \partial^\lambda u \in L^2(\Omega) \ ; \\ k + 1 \leq |\lambda| \leq m \ ; \ \rho^{\alpha - m + |\lambda|} \partial^\lambda u \in L^2(\Omega) \ . \end{array} \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^m(\Omega)} = \|u\|_{m,\alpha} = \left(\sum_{0\leq|\lambda|\leq k} \left\| \frac{\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u}{\lg r} \right\|_0^2 + \sum_{k+1\leq|\lambda|\leq m} \left\|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u\right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et la semi norme :

$$|u|_{W_\alpha^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \left\|\rho^\alpha \partial^\lambda u\right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Remarque 1.2. *Le rôle des poids est de préciser le comportement à l'infini des éléments de ces espaces .*
Ils n'ont aucune influence sur les propriétés, qui sont identiques, quelque soit α, *à celles des espaces de Sobolev usuels* $H^m(\Omega)$, *lorsque* Ω *est borné. En particulier dans le cas qui nous intéresse principalement où* Ω *est le complémentaire d'un compact* Ω', *tous les théorèmes sur les traces des éléments de* $H^m(\Omega)$ *sur la frontière* Γ, *restent exacts pour les traces sur* Γ *des éléments de* $W_\alpha^m(\Omega)$.

Remarque 1.3. $\rho(r)$ *et* $lg(r)$ *ont à l'infini le comportement de* r *et* $log(r)$ *respéctivement. Lorsque l'intérieur du complémentaire de* Ω *n'est pas vide, il est loisible d'y placer l'origine, ce qui permet de remplacer dans la définition de* $W_\alpha^m(\Omega)$, $\rho(r)$ *par* r *et éventuellement après un changement d'unité,* $lg(r)$ *par* $log(r)$ *.*

Remarque 1.4. *Les poids ont été choisis de manière à permettre l'obtention d'inégalité de corcivité .*

Remarque 1.5. *Les valeurs de* $(\frac{n}{2}+\alpha)$ *sont dites :*
▶ ***Critiques*** *si elles vérifient :* $(\frac{n}{2}+\alpha) \in \{1, 2, ..., m\}$.
▶ ***Non critiques*** *dans le cas contraire .*
On notera que la présence du poids logarithmique n'intervient que pour les exposants critiques. Leur introduction est indispensable pour prolonger certains résultats obtenus dans les cas non critiques .

1.4.1 Propriétés fondamentales des espaces $W_{\alpha}^{m}(\Omega)$

Dans Amrouche [6], Hanouzet [16], Giroire [15] sont démontrées les propriétés suivantes :

Proposition 1.3. *$W_{\alpha}^{m}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$\begin{aligned}(u,v)_{W_{\alpha}^{m}(\Omega)} &= \sum_{0\leq|\lambda\leq k|}\left(\frac{\rho^{\alpha-m+|\lambda|}}{\lg r}\partial^{\lambda}u,\frac{\rho^{\alpha-m+|\lambda|}}{\lg r}\partial^{\lambda}v\right)_0+\\ &\sum_{k+1\leq|\lambda|\leq m}\left(\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^{\lambda}u,\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^{\lambda}v\right)_0.\end{aligned}$$

Contrairement aux espaces de Sobolev classiques, les espaces de Sobolev avec poids ne forment pas une famille d'espaces emboîtées; cependant on a:

Proposition 1.4. *on a les inclusions suivantes avec injections continues:*

$$W_{\alpha}^{m}(\Omega)\hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1}(\Omega)\hookrightarrow ......\hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0}(\Omega)$$

Proposition 1.5. *soit $u\in W_{\alpha}^{m}(\Omega)$. Alors, Si $\lambda\in\mathbb{N}^n$ tel que : $0\leq|\lambda|\leq m$*

$$\partial^{\lambda}u\in W_{\alpha}^{m-|\lambda|}(\Omega)$$

c à d l' application :

$$u\in W_{\alpha}^{m}(\Omega)\rightarrow\partial^{\lambda}u\in W_{\alpha}^{m-|\lambda|}(\Omega)$$

est continue .

Les démonstrations des trois propositions précédentes sont identiques à celles du cas $H^{m}(\Omega)$.

Proposition 1.6. *$\gamma\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{N}^n$. L'application définie par :*

$$u\in W_{\alpha}^{m}(\Omega)\rightarrow\rho^{\gamma}u\in W_{\alpha-\gamma}^{m}(\Omega)$$

est un isomorphisme. De plus on a :

$$\left|\partial^{\lambda}(\rho^{\gamma})\right|\leq C_{\lambda\gamma}\rho^{\gamma-|\lambda|}\ .$$

Preuve. Giroire [15] . ■

Les deux théorèmes suivants nous permettront, lorsque nous voudrons démontrer une propriété des éléments de W_α^m, de la démontrer pour des fonctions régulières, puis de raisonner par densité pour achever .

Théorème 1.8. *$D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_\alpha^m(\mathbb{R}^n)$. $n = 2$ ou 3 .*

Preuve. Giroire [15] pour n=2, Hanouzet [16] pour n=3. ■

Le théorème suivant généralise le résultat précédent pour un ouvert $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.9. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $D\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $W_\alpha^m(\Omega)$.*

Preuve. Giroire [15] ■

Nous pouvons maintenant introduire la :

Définition 1.9. *pour $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $\overset{0}{W}{}_\alpha^m$ désignera l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W_\alpha^m(\Omega)$ tel que: $\overset{0}{W}{}_\alpha^m = \left\{u \in W_\alpha^m(\Omega),\ \frac{\partial^j u}{\partial n^j}\ |_\Gamma = 0\ ,\ j = 0, ..., m-1\right\}$ où $\frac{\partial}{\partial n}$ =la dérivée normale.*
Son espace dual est noté par $W_{-\alpha}^{-m}(\Omega)$.

Lemme 1.2. ***(Inégalité de Hardy).***
Soient β et p deux réels tels que $\beta \neq -1$ et $p \in]1, +\infty[$. Soit f une fonction positive et mesurable, définie sur $[0, +\infty[$ telle que:

$$\int_0^{+\infty} |f\ (r)|^{\ p}\ r^{\beta+p} dr < +\infty$$

Soit:

$$F(r) = \begin{cases} -\int_r^{+\infty} f(t)\, dt & si \quad \beta > -1 \\ \int_0^{+\infty} f(t)\, dt & si \quad \beta < -1 \end{cases}$$

Alors:

$$\int_0^{+\infty} |F\ (r)|^p\, r^{\ \beta} dr \leq \left(\frac{p}{|\beta+1|}\right)^p \int_0^{+\infty} |f\ (r)|^p\, r^{\beta+p} dr\ .$$

Preuve. Hardy [17] ■

Lemme 1.3. ***(Inégalité de Hardy généralisée) .***

Soient $p \in]1, +\infty[$ *et* f *une fonction donnée dans* $D\left(]R, +\infty[\right)$, *alors si* σ *et* γ *sont deux réels tel que* $\sigma \neq -1$, *et si* $R > exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\sigma+1|}\right)$ *on a :*

$$\int_R^{+\infty} |f \ (r)|^p \, r^{\ \sigma} \ln^\gamma (r) \, dr \leq \left(\frac{2p}{|\sigma+1|}\right)^p \int_R^{+\infty} \left|\frac{df \ (r)}{dr}\right|^p r^{\sigma+p} \ln^\gamma (r) \, dr.$$

Quand $\sigma = -1$, *alors pour tout réel* γ *tel que* $\gamma \neq -1$ *et si* $R > 1$, *on a :*

$$\int_R^{+\infty} |f \ (r)|^p \, r^{\ -1} \ln^\gamma (r) \, dr \ \leq \left(\frac{p}{|\gamma+1|}\right)^p \int_R^{+\infty} \left|\frac{df \ (r)}{dr}\right|^p r^{\ -1+p} \ln^{(\gamma+p)} (r) \, dr.$$

Preuve. Kufner, A [20] ■

Définition 1.10. *Les fonctions de* $W_\alpha^m(\Omega)$ *sont des distributions tempérées, qui peuvent être dans certains cas des polynômes. En effet , on introduit l'entier* $j = j(m, n, \alpha)$ *qui vaut :*

▶ $\left[m - \left(\frac{n}{2} + \alpha\right)\right]$ *([s] désigne la partie entière du réel s), lorsque* $\left(\frac{n}{2} + \alpha\right) \notin \{i \in \mathbb{Z} \ ; \ i \leq m\}$.

▶ $m - \left(\frac{n}{2} + \alpha\right) - 1$ *, sinon .*

Alors p_j *est le plus grand espace de polynômes contenu dans* $W_\alpha^m(\Omega)$.

La norme de l'espace quotient $W_\alpha^m(\Omega) \diagup p_j$ *est donnée par :*

$$[u]_{W_\alpha^m(\Omega)} = \|u\|_{W_\alpha^m(\Omega) \diagup p_j} = \inf_{Q \in p_j} \|u + Q\|_{W_\alpha^m(\Omega)} \ .$$

La propriété fondamentale qui suit, découle de l'inégalité généralisée de Hardy.

Théorème 1.10. *Soit* $m \geq 1$ *un entier et* α *un réel quelconque. Alors il existe une constante* $c = c(m, n, \alpha) > 0$ *telle que :*

$$\forall u \in W_\alpha^m(\Omega) : \|u\|_{W_\alpha^m(\Omega) \diagup P_{j'}} \leq c \ \ |u|_{W_\alpha^m(\Omega)} \ .$$

où $j' = \min\ (j, m-1)$. *En particulier, la semi norme* $|.|_{W_\alpha^m(\Omega)}$ *définit une norme équivalente à la norme de l'espace quotient* $W_\alpha^m(\Omega) \diagup p_{j'}$ *.*

Preuve. Amrouche [6] ■

Théorème 1.11. *La semi norme* $|.|_{W_\alpha^m(\Omega)}$ *est une norme sur* W_α^m *équivalente à la norme* $\|.\|_{W_\alpha^m}$.

En particulier :

$$\|u\|_{1,0} \leq c\,|u|_{1,0} \qquad \forall u \in W_0^1(\Omega)\ .$$

Preuve. Ce résultat découle de l'inégalité de Hardy. La démonstration est dans Giroire [15] ou bien Hanouzet [16] . ■

Lemme 1.4. *Soient* α *un réel et* m *un entier strictement positif tels que:* $\frac{n}{2}+\alpha \in \{1,2,...,m\}$ *alors,* $\forall$ *R un réel assez grand, il existe une constante* C_R *telle que:*

$$\forall \varphi \in D\left(B_R'\right) : \|\varphi\|_{W_\alpha^m\left(B_R'\right)} \leq C_R\ \ |\varphi|_{W_\alpha^m\left(B_R'\right)}\ .$$

En d'autres termes, la semi norme $|.|_{W_\alpha^m\left(B_R'\right)}$ *est une norme sur* $D\left(B_R'\right)$ *équivalente à la norme de* $W_\alpha^m\left(B_R'\right)$.

B_R' = complémentaire de B_R tel que:

$B_R = B(R) = B\left(0,R\right)$ =la boule de centre 0 et de rayon R .

Preuve. Amrouche [6] . ■

1.4.2 Traces et relèvements

Définition 1.11. *Soit* Ω' *un ouvert borné compact et simplement connexe de* $\mathbb{R}^n$, $(n=2,3)$. Ω *le complémentaire de l'adhérence de* Ω' *dans* $\mathbb{R}^n$ *(* $\Omega = \mathbb{R}^n - \overline{\Omega'}$ *),* $\Gamma = \partial\Omega$ *sa frontière supposée régulière (cf.[27]). Dans toute la suite, un tel ouvert sera désigné par l'appellation générique de "domaine extérieur" .*

Par définition, la frontière d'un domaine extérieur est bornée. Si elle est de plus lipschitzienne, il existe γ un opérateur de trace sur le bord, continu de $W_0^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ comme pour un domaine borné. Cet opérateur est de plus surjectif comme le montre la

Proposition 1.7. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine extérieur lipschitzien et* $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. *Il existe* $u \in W_0^1(\Omega)$ *, à support compact dans* $\bar{\Omega}$ *et* $C = C(n,\Omega) > 0$ *tels que :*

$$\gamma u = \varphi \quad \text{ et } \quad \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \leq C\,\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\ .$$

Preuve. F .Alliot [4]. ■

Remarque 1.6. – $W_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Dans la suite du travail, on utilisera fréquemment les espaces suivants :

– Pour n=2 :

$W_0^1(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) : \rho^{-1}(r)\ \ (\lg r)^{-1}u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\}$

$W_{1,1}^0(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) : \rho(\lg r)u \in L^2(\Omega)\}$

– pour n=3 :

$W_0^1(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) : \rho^{-1}(r)\, u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\}$

$W_1^0(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) : \rho u \in L^2(\Omega)\}$

Ces espaces sont munis de leur norme naturelle et leur semi norme .

Remarque 1.7. $W_0^1(\Omega)$ *(pour n=3) ne contient pas les polynômes, ni les constantes. Par contre* $W_0^1(\Omega)$ *(pour n=2) contient les constantes .*

Chapitre 2

Etude du problème dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$

2.1 Position du problème

Le problème décrit les déplacements à partir de l'état naturel d'un solide élastique momentique (micropolaire), homogène et isotrope, dans un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ supposée assez régulière.

Les équations générales se définissent comme suit (cf.[21]):

$$(P)\left\{\begin{array}{c} (\mu+\alpha)\triangle u + (\lambda+\mu-\alpha)\nabla div\ u + 2\alpha rot\ w = -f_1\ . \\ (\nu+\beta)\triangle w + (\epsilon+\nu-\beta)\nabla div\ w - 4\alpha w + 2\alpha rot\ u = -f_2\ . \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où les paramètres $\alpha, \beta, \mu, \nu, \lambda$ et ϵ, sont des constantes physiques du milieu devant vérifier:

$$\alpha > 0\ ,\ \beta > 0\ ,\ \mu > 0\ ,\ \nu > 0\ ,\ 3\lambda + 2\mu > 0\ , 3\epsilon + 2\nu > 0. \tag{2.2}$$

Les inconnues sont u et w tels que u , w , f_1 , f_2 sont des vecteurs à trois dimensions qui représentent respectivement : les déplacements, la microrotation, la densité volumique et le moment massique.

Aux équations du système (P), on ajoute des conditions aux limites de type:

1. **Neumann pour u :**

$$\sigma(u)\mid_{\Gamma} = g_1 \tag{2.3}$$

2. **Dirichlet pour w :**

$$w\mid_{\Gamma} = g_2 \tag{2.4}$$

où σ est le vecteur de contraintes .

2.2 Formulation variationnelle

Pour simplifier l'écriture du système (P), on pose :

$U = (u, w)$, $F = (-f_{1,} - f_2)$, $G = (g_1, g_2)$ et on définit l'opérateur :

$$AU = A(u, w) = \begin{pmatrix} A_1(u, w) \\ A_2(u, w) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

tel que :

$$\begin{cases} A_1(u, w) = (\mu + \alpha) \triangle u + (\lambda + \mu - \alpha) \nabla divu + 2\alpha rotw \\ A_2(u, w) = (\nu + \beta) \triangle w + (\epsilon + \nu - \beta) \nabla divw - 4\alpha w + 2\alpha rotu \end{cases}$$

Le problème (P) devient :

$$(P^*) \begin{cases} AU = F. \\ T(U) = G \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.6}$$

tel que : $T(U) = (\sigma(u), w)$.

On introduit les espaces:

$$D = \left\{ U = (u, w) \quad / \quad u \in \left[D\left(\bar{\Omega}\right) \right]^3 \ , w \in [D(\Omega)]^3 \text{ et } \int_\Omega u \, dx \ = 0 \right\} \tag{2.7}$$

et la fermeture de D dans $[H^1(\Omega)]^6$:

$$V = \left\{ U = (u, w) \quad / \quad u \in \left[H^1(\Omega) \right]^3 \ , w \in \left[H_0^1(\Omega) \right]^3 \text{ et } \int_\Omega u \, dx \ = 0 \right\} \tag{2.8}$$

V est un espace de Hilbert pour la norme de $\left[H^1(\Omega)\right]^6$, et on a :

$$|U|_V^2 = \|(u,w)\|_1^2 = \|u\|_1^2 + \|w\|_1^2 . \tag{2.9}$$

On introduit aussi l'espace:

$$H = \left\{ U = (u,w) \in V \ / \ k(u) \in \left[L^2(\Omega)\right]^3 \right\} \tag{2.10}$$

tel que :

$$k(u) = (\mu + \alpha) \triangle u + (\lambda + \mu - \alpha) \nabla div\ u$$

H est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$|(u,w)|_H^2 = \|u\|_1^2 + \|w\|_1^2 + \|k(u)\|_0^2 . \tag{2.11}$$

Nous associons au problème (p^*) le problème variationnel suivant :

$$(P^{**}) \left\{ \begin{array}{c} \text{Pour tout } f_1 \in \left[L^2(\Omega)\right]^3 \ , \ f_2 \in \left[H^{-1}(\Omega)\right]^3 \\ \text{Trouver } U \in V \text{ tel que :} \\ a\left(U, \acute{U}\right) = \left\langle F, \acute{U} \right\rangle_\Omega + \left\langle G, \acute{U} \right\rangle_\Gamma \qquad \forall \acute{U} \in V \end{array} \right. \tag{2.12}$$

où V est l'espace défini dans (2.8) et $a\left(U, \acute{U}\right)$ la forme bilinéaire définie par :

$$a\left(U, \acute{U}\right) = \int_\Omega E\left(U, \acute{U}\right) d\ \Omega \tag{2.13}$$

avec :

$$\begin{aligned} E\left(U, \acute{U}\right) &= 2\mu \left(\nabla u\ \nabla \acute{u} - \frac{1}{2} rot\ u\ rot\ \acute{u}\ - \frac{1}{3} div\ u\ div\ \acute{u} \right) \\ &+ 2\nu \left(\nabla w\ \nabla \acute{w} - \frac{1}{2} rot\ w\ rot\ \acute{w}\ - \frac{1}{3} div\ w\ div\ \acute{w} \right) \\ &+ \beta rot\ w\ rot\ \acute{w}\ + \frac{3\epsilon + 2\nu}{3} div\ w\ div\ \acute{w} + \frac{3\lambda + 2\mu}{3} div\ u\ div\ \acute{u} \\ &+ \alpha \left(2\acute{w} - rot\ \acute{u}\ .\ 2w - rot\ u\ \right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dans cette expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = (u,w) = (u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3) \\ \acute{U} = (\acute{u}, \acute{w}) = (\acute{u}_1, \acute{u}_2, \acute{u}_3, \acute{w}_1, \acute{w}_2, \acute{w}_3) \end{array} \right.$$

L'ensemble des éléments U tels que $a\left(U,U\right)=0$ se réduit à l'espace :

$$\Re=\left\{U=(u,w)\ :u=a\wedge x+b\ ,\ w=a\quad /a,b\in\mathbb{R}^{3}\right\} \tag{2.15}$$

et

$$\Re\cap V=\left\{0_{\mathbb{R}^{6}}\right\}\ .$$

2.3 Formule de Green

Théorème 2.1. *(de densité)*

Ω ouvert borné, lipschitzien de $\mathbb{R}^{3}$. L'ensemble D est dense dans H .

Preuve. 1) On définit une fonction de troncature $\phi\in D\left(\mathbb{R}^{3}\right)$:

$$\begin{cases} \phi\left(x\right)=1 & \left|x\right|\leq 1\\ 0<\phi\left(x\right)<1 & 1<\left|x\right|<2\\ \phi\left(x\right)=0 & \left|x\right|\geq 2 \end{cases} \tag{2.16}$$

et pour $n>0$; on définit ϕ_{n} la restriction à Ω de la fonction $\phi\left(\frac{x}{n}\right)$ (i.e $\phi_{n}\left(x\right)=\phi\left(\frac{x}{n}\right)\in D\left(\bar{\Omega}\right)$)

On pose :

$$U_{n}=\phi_{n}U\qquad /\qquad U\in H \tag{2.17}$$

Dans cette expression, $U=(u,w)$ et $U_{n}=(u_{n},w_{n})$ tel que: $u_{n}=\phi_{n}u$, $w_{n}=\phi_{n}w$.

On montre que pour $U\in H$, $U_{n}\in H$ et

$$\left|U_{n}-U\right|_{H}\rightarrow 0 \tag{2.18}$$

avec

$$\left|U_{n}-U\right|_{H}=\left\|u_{n}-u\right\|_{1}^{2}+\left\|w_{n}-w\right\|_{1}^{2}+\left\|k\left(u_{n}-u\right)\right\|_{0}^{2}.$$

Il suffit de montrer que chaque terme tend vers zéro :

► $\|u_n - u\|_1^2 = \|u_n - u\|_0^2 + \|\nabla(u_n - u)\|_0^2$ et

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|_0^2 &= \|\phi_n u - u\|_0^2 \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\phi_n u - u)^2 \, dx \\ &\leq \int\limits_{|x|>2n} |u|^2 \, dx \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty\end{aligned}$$

Il résulte :

$$u_n \to u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad \text{quand } n \to \infty$$

et donc

$$\nabla u_n \to \nabla u \in L^2(\Omega)$$

d'où

$$\|u_n - u\|_1^2 \to 0 \ .$$

On fait de même pour $\|w_n - w\|_1$. De plus

$$u_n \to u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \Longrightarrow k(u_n) \to k(u) \in L^2(\Omega)$$

ce qui entraîne (2.18) .

Conclusion : Les fonctions à support compact sont denses dans H .

2) Soit $U \in H$ à support compact .

On montre par régularisation que U peut être approché par une suite de fonctions régulières de D.

Soit la fonction régularisante $\rho \in (D(\mathbb{R}^3))^3$

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \rho(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad |x| \geq 1 \\ \int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho(x) \, dx = 1 \end{cases} \tag{2.19}$$

Pour $\varepsilon \in (0,1)$, on définit :

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^3} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad / \quad \rho_\epsilon \to \delta \quad \text{quand } \epsilon \to 0.$$

On pose

$$U_\epsilon = (u_\epsilon, w_\epsilon) = \rho_\epsilon * U \tag{2.20}$$

Pour $U \in H$, on note par $\tilde{U}$ le prolongement de U à $\mathbb{R}^3$. $\tilde{U} \in \tilde{H}$ tel que $\tilde{H}$ est le prolongement de H à $\mathbb{R}^3$, de plus

$$\tilde{U}_\epsilon = (\tilde{u}_\epsilon, \tilde{w}_\epsilon) = \rho_\epsilon * \tilde{U} \in \tilde{D}$$

où $\tilde{D}$ est le prolongement de D à $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_\epsilon &= \rho_\epsilon * \tilde{U} \to \tilde{U} \quad \text{dans } L^2 \quad \text{et} \\ \nabla \tilde{U}_\epsilon &= \rho_\epsilon * \nabla \tilde{U} \to \nabla \tilde{U} \quad \text{dans } L^2 \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\tilde{U}_\epsilon \to \tilde{U} \text{ dans } H^1$$

et

$$k(\tilde{u}_\epsilon) = \rho_\epsilon * k(\tilde{u}) \to k(\tilde{u}) \in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$$

et donc :

$$\tilde{U}_\epsilon \to \tilde{U} \text{ dans } \tilde{H} \tag{2.21}$$

D'où l'existence d'une suite de fonctions $\tilde{U}_\epsilon \in \tilde{D}$ tel que (2.21) .

Dans le cas général : $\Omega \neq \mathbb{R}^3$, on utilise un recouvrement de $\bar{\Omega}$ i.e :

$$\bar{\Omega} = \bigsqcup_{i \in I} O_i \quad \text{I fini} \tag{2.22}$$

Ω strictement étoilé c à d : $\exists\ y \in \Omega$ pris pour origine tel que :

$$\theta \bar{\Omega} \subset \Omega \qquad \forall \theta \in [0,1] \quad \text{et tel que} \quad \theta_0 \subset \bar{\theta}_0 \subset \Omega \ .$$

On utilise aussi la partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement i.e :

$$\phi_i \in D(\theta_i), \quad 0 \leq \phi_i \leq 1, \quad \sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1 \ , \ x \in \Omega$$

Donc pour $U \in H$:

$$\tilde{U} = \sum_{i \in I} \phi_i \tilde{U} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

avec $\tilde{U}_i = \phi_i \tilde{U} \in \tilde{H}$ et supp $\phi_i \tilde{U} \subset \bar{\Omega}_i$.

On se ramène ainsi au cas précédent i.e régulariser le résultat. Il existe donc une suite de fonctions $\tilde{U}_{i,\, \epsilon} \in \tilde{D}$:

$$\tilde{U}_{i,\, \epsilon} \to \tilde{U}_i \quad \text{dans } \tilde{H} \ .$$

en passant à la restriction de $\tilde{U}_{i,\, \epsilon}$ à Ω_i ; on obtient :

$$U_{i,\, \epsilon} = \tilde{U}_{i,\, \epsilon} \,{}_{|\Omega} \!\to U_i = \phi_i U$$

avec $U_{i,\, \epsilon} \in D$. Ce qui achève la démonstration . ■

Théorème 2.2. *(de trace)*
Il existe un opérateur linéaire et continu γ *de* H *dans* $\left[H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]^6$ *tel que :*
$\forall \acute{U} \in V$, $\forall U \in H$, *on a la formule de Green :*

$$\left(-AU, \acute{U}\right) + a\left(U, \acute{U}\right) = \left\langle \gamma(U), \acute{U} \right\rangle_{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \tag{2.23}$$

Preuve. Soients $U = (u, w)$ dans D et $\acute{U} = (\acute{u}, \acute{w})$ dans $\left[D\left(\bar{\Omega}\right)\right]^6$.

A partir de (2.3) (2.4) , (2.5) et (2.13) , on établit par intégration par partie la formule de Green :

$$\left(-AU, \acute{U}\right) + a\left(U, \acute{U}\right) = \left\langle T(U), \acute{U} \right\rangle_{\Gamma} \tag{2.24}$$

où T est un opérateur linéaire et continu défini sur D et à image dans $(D(\Gamma))^6$.

$$\begin{array}{rccc} T: & D & \to & (D(\Gamma))^6 \\ & U & \longmapsto & T(U) \end{array}$$

Comme $D\left(\bar{\Omega}\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$, (2.24) reste vraie pour $\acute{U} \in \left[H^1(\Omega)\right]^6$ et $U \in D$. Par conséquent

$$\left| \left\langle T(U), \acute{U} \right\rangle_{\Gamma} \right| \leq C \left\| \acute{U} \right\|_1 |U|_H \ . \tag{2.25}$$

Maintenant, soit g un élément de $\left[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]^6$. Alors il existe un élément $\mathcal{U}$ de $\left[H^1(\Omega)\right]^6$ tel que $\mathcal{U}\mid_\Gamma = g$. Par conséquent, (2.25) implique

$$|\langle T(U), g\rangle_\Gamma| \leq C \|g\|_{\frac{1}{2}} |U|_H$$

ainsi

$$\|T(U)\|_{-\frac{1}{2}} \leq C |U|_H \ .$$

Le fait que D est dense dans H, alors T se prolonge en un opérateur linéaire et continu γ, défini sur H et à valeurs dans $\left[H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]^6$.De plus on a :

$$\|\gamma(U)\|_{-\frac{1}{2}} \leq C |U|_H \ .$$

Maintenant on peut donner un sens à la formule de Green (2.23) :

$$\left(-AU, \acute{U}\right) + a\left(U, \acute{U}\right) = \left\langle \gamma(U), \acute{U}\right\rangle_\Gamma \quad \forall U \in H \ , \ \forall \acute{U} \in V \ .$$

■

2.4 Existence et unicité

En utilisant le théorème de Lax Milgram nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Le problème (P^{**}) admet une solution unique $U = (u, w) \in V$.*

Preuve. 1) a(.,.) est une forme bilinéaire , continue sur $V \times V$:

En effet; en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned}
|a((u,w),(\acute{u},\acute{w}))| \leq\ & c_1(\|\nabla u\|_0 \|\nabla \acute{u}\|_0 + \|rot\ u\|_0 \|rot\ \acute{u}\|_0 + \|div\ u\|_0 \|div\ \acute{u}\|_0 + \\
& \|\nabla w\|_0 \|\nabla \acute{w}\|_0 + \|rot\ w\|_0 \|rot\ \acute{w}\|_0 + \|div\ w\|_0 \|div\ \acute{w}\|_0 + \\
& (\|2\ \acute{w} - rot\ \acute{u}\|_0).(\|2\ w - rot\ u\|_0)). \\
\leq\ & c_2(\|\nabla u\|_0 \|\nabla \acute{u}\|_0 + \|rot\ u\|_0 \|rot\ \acute{u}\|_0 + \|div\ u\|_0 \|div\ \acute{u}\|_0 + \\
& \|\nabla w\|_0 \|\nabla \acute{w}\|_0 + \|rot\ w\|_0 \|rot\ \acute{w}\|_0 + \|div\ w\|_0 \|div\ \acute{w}\|_0 + \\
& (2\ \|\acute{w}\|_0 + \|rot\ \acute{u}\|_0).(2\ \|w\|_0 + \|rot\ u\|_0)).
\end{aligned}$$

Et comme :

$$\|rot\ u\|_0 \leq c\,\|u\|_1$$

et

$$\|\nabla u\|_0 \leq \|u\|_1 \quad \forall u \in \left[L^2(\Omega)\right]^3.$$

alors :

$$\begin{aligned} |a((u,w),(\acute{u},\acute{w}))| &\leq c_3(\|u\|_1\,\|\acute{u}\|_1 + \|w\|_1\,\|\acute{w}\|_1 + (\|\acute{w}\|_1 + \|\acute{u}\|_1)(\|w\|_1 + \|u\|_1) \\ &\leq 2c_3(\|\acute{w}\|_1 + \|\acute{u}\|_1)(\|w\|_1 + \|u\|_1) \\ &\leq c_4\,\|U\|_1\,\left\|\acute{U}\right\|_1. \end{aligned}$$

d'où le résultat . ■

2) a(.,.)est coercive :

A l'aide de l'inégalité de Korn, on démontre les propositions suivantes :

Proposition 2.1. *Il existe une constante positive c_1 telle que :*

$$\|U\|_0^2 + a(U,U) \geq c_1\,\|U\|_1^2 \qquad \forall U \in \left[H^1(\Omega)\right]^6 \tag{2.26}$$

Preuve. Soit $U = (u,w) \in \left[H^1(\Omega)\right]^6$.

A l'aide de (2.2) et de l'inégalité :

$|\nabla w|^2 - \frac{1}{2}|rot\ w|^2 - \frac{1}{3}(div\ w)^2 \geq \frac{1}{6}\sum\limits_{i,j=1}^{3}(\partial_i w_j - \partial_j w_j)^2 + \frac{1}{4}\sum\limits_{i,j=1}^{3}(\partial_i w_j + \partial_j w_j)^2.$

On établit le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & 2\nu\left(|\nabla w|^2 - \frac{1}{2}|rot\ w|^2 - \frac{1}{3}(div\ w)^2\right) + \frac{3\epsilon + 2\nu}{3}(div\ w)^2 \\ \geq\ & \inf\left(2\nu, \frac{3+2\nu}{3}\right)\left(|\nabla w|^2 - \frac{1}{2}|rot\ w|^2 + \frac{2}{3}(div\ w)^2\right) \\ \geq\ & \inf\left(2\nu, \frac{3\epsilon+2\nu}{3}\right)\left(|\nabla w|^2 - \frac{1}{2}|rot\ w|^2\right) \geq 0 \end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned} & 2\mu\left(|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|rot\ u|^2 - \frac{1}{3}(div\ u)^2\right) + \frac{3\lambda + 2\mu}{3}(div\ u)^2 \\ \geq\ & \inf(2\mu, \frac{3\lambda+2\mu}{3})(|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|rot\ u|^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Compte tenu du lemme 1.1. , on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & 2\nu\left(\|\nabla w\|_0^2-\frac{1}{2}\|rot\ w\|_0^2-\frac{1}{3}\|div\ w\|_0^2\right)+\frac{3\epsilon+2\nu}{3}\|div\ w\|_0^2+\|w\|_0^2 \\ \geq\ & c\|w\|_1^2 . \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} & 2\mu\left(\|\nabla u\|_0^2-\frac{1}{2}\|rot\ u\|_0^2-\frac{1}{3}\|div\ u\|_0^2\right)+\frac{3\lambda+2\mu}{3}\|div\ u\|_0^2+\|u\|_0^2 \\ \geq\ & c'\|u\|_1^2 . \end{aligned}$$

En utilisant (2.13) , on obtient le résultat (2.26) . ■

Proposition 2.2. *Il existe une constante positive c_2 telle que :*

$$a(U,U)\geq c_2\|U\|_1^2 \quad \forall U\in V$$

c à d : $a(U,U)$ est une norme sur V , équivalente à celle induite par la norme $H^1(\Omega)$.

Preuve. 1) On a : $a(U,U)=0\Rightarrow U=0 \quad \forall U\in V.$

2) Montrons que $a(U,U)$ est équivalente à la norme induite par $H^1(\Omega)$ c à d :

$\exists\ k_1,\ k_2>0$ tels que :

$$k_1\|U\|_1^2\leq a(U,U)\leq k_2\|U\|_1^2$$

l'inégalité :

$$a(U,U)\leq k_2\|U\|_1^2$$

est évidente .

pour démontrer l'inégalité inverse, il suffit de raisonner par l'absurde .

Supposons qu'il existe une suite $(V_m)_m$ de V telle que :

$$\frac{1}{m}\|V_m\|_1>a(V_m,V_m)$$

On pose :

$$U_m=\frac{V_m}{\|V_m\|_1}$$

On obtient ainsi une suite (U_m) de V telle que :

$$\|U_m\|_{1,\Omega} = 1 \quad \text{et} \quad a(U_m, U_m) < \frac{1}{m}$$

Comme U_m est bornée dans V (d'après la proposition 2.1.), on peut extraire de (U_m) une sous suite (U_n) qui converge faiblement dans V. Il existe donc U dans V tel que :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = U \quad \text{ faiblement dans } V.$$

mais

$$a(U_n, U_n) \to 0 \quad \text{ quand } n \to \infty.$$

donc en passant à la limite faible, on a :

$$a(U, U) = 0$$

et d'après la première partie de la démonstration,

$$U = 0$$

L'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte; alors :

$$U_n \to 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (\text{ fortement })$$

ce qui est impossible car :

$$\|U\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|U_n\|_1 = 1.$$

■

3) la forme linéaire,

$$L : V \to \mathbb{R}$$

définie par :

$$\begin{aligned} \left\langle L, \acute{U} \right\rangle &= \left\langle F, \acute{U} \right\rangle_{\Omega} + \left\langle G, \acute{U} \right\rangle_{\Gamma} \\ \forall \acute{U} &\in V \quad \text{et} \quad F = (-f_{1,} - f_2) \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \times \left(H^{-1}(\Omega)\right)^3 \end{aligned}$$

est continue sur V .

En effet :

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle L,\acute{U}\right\rangle\right| &\leq \left|\left\langle F,\acute{U}\right\rangle_{\Omega}\right| + \left|\left\langle G,\acute{U}\right\rangle_{\Gamma,0}\right| \\
&\leq \left|(f_1,\acute{u})_{\Omega}\right| + \left|(f_2,\acute{w})_{\Omega}\right| + \left|\left\langle G,\acute{U}\right\rangle_{\Gamma,0}\right| \\
&\leq \|f_1\|_0 \|\acute{u}\|_1 + \|f_2\|_{-1} \|\acute{w}\|_1 + |G|_{\Gamma,0} \left\|\acute{U}\right\|_1 \\
&\leq C \left\|\acute{U}\right\|_1 .
\end{aligned}$$

tel que :

$$|G|^2_{\Gamma,0} = \|g_1\|^2_{-\frac{1}{2}} + \|g_2\|^2_{\frac{1}{2}}$$

Par conséquent, en vertu du théorème de Lax Milgram, le problème (P^{**}) admet une solution unique $U = (u, w) \in V$, d'où le théorème 2.3. .

- **Retour au problème initial :**

Théorème 2.4. *Soit Ω ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^3$.*
$\forall (f_1,f_2) \in (L^2(\Omega))^3 \times (H^{-1}(\Omega))^3$; il existe une unique solution $U = (u, w) \in V$ telle que

$$(P) \begin{cases} (\mu+\alpha)\,\triangle u + (\lambda+\mu-\alpha)\,\nabla div\ u + 2\alpha rot\ w = -f_1 \\ (\nu+\beta)\,\triangle w + (\epsilon+\nu-\beta)\,\nabla div\ w - 4\alpha w + 2\alpha rot\ u = -f_2 \ . \end{cases}$$

de plus :

$$\|u\|_1 + \|w\|_1 \leq C\left(\|f_1\|_0 + \|f_2\|_{-1} + |G|_{\Gamma,0}\right) \ . \qquad (2.27)$$

Preuve. On montre que toute solution faible du problème variationnel (P^{**}) est solution du problème (P) au sens des distributions .

Soit $U = (u, w) \in V$ solution du problème (P^{**}) et on prend $\acute{U} = (\acute{u}, \acute{w}) \in [D(\Omega)]^6$ dans l'équation (2.12) du système (P^{**}),

$$a(U,\acute{U}) = \left(F,\acute{U}\right)_{\Omega} + \left\langle G,\acute{U}\right\rangle_{\Gamma}$$

on obtient :

$$a(U,\acute{U}) = \left(F,\acute{U}\right)_{\Omega}$$

i.e:

$$\int_{\Omega} E\left(U,\acute{U}\right)\ d\ \Omega = -\int_{\Omega} f_1\ \acute{u}\ d\ \Omega - \int_{\Omega} f_2\ \acute{w}\ d\ \Omega.$$

Après une dérivation au sens des distributions et le fait que : $\triangle = \nabla div - rot\ ^2$, on obtient :

$$AU = F. \qquad \text{dans } \Omega \qquad \text{(au sens des distributions)}$$

c à d:

$$(P)\begin{cases} (\mu+\alpha)\triangle u + (\lambda+\mu-\alpha)\nabla div\ u + 2\alpha rot\ w = -f_1 \\ (\nu+\beta)\triangle w + (\epsilon+\nu-\beta)\nabla div\ w - 4\alpha w + 2\alpha rot\ u = -f_2. \end{cases}$$

En comparant les équations (2.12) et (2.23) , il en découle:

$$\left\langle \gamma(U), \acute{U} \right\rangle_{\Gamma} = \left\langle G, \acute{U} \right\rangle_{\Gamma}$$

finalement on a :

$$\gamma(U) = (\sigma(u), w) = G$$

Ainsi $U = (u, w)$ est aussi solution du problème initial (P). De plus, soit $U = (u, w)$ un élément de V qui vérifie le problème (P). Si $(u, w) = (\acute{u}, \acute{w})$, on a:

$$a(U,U) \le C\left(\|f_1\|_0 + \|f_2\|_{-1} + |G|_{\Gamma,0}\right)|U|_V$$

et le fait que $a(.,.)$ est coercive sur V entraîne:

$$|U|_V \le C\left(\|f_1\|_0 + \|f_2\|_{-1} + |G|_{\Gamma,0}\right).$$

d'où on a l'estimation (2.27) . ■

Chapitre 3

Etude du problème dans un domaine non borné.

3.1 Cas d'un domaine extérieur de $\mathbb{R}^3$.

Dans ce chapitre, nous étudions à nouveau le problème de l'élasticité momentique, mais nous le posons maintenant dans un domaine différent .

Soit Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^3$, $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière supposée régulière.

Nous lui associons le problème extérieur modélisé par le système :

$$(P_{ext})\begin{cases} (\mu+\alpha)\,\triangle u + (\lambda+\mu-\alpha)\,\nabla div\ u + 2\alpha rot\ w = -f_1 \\ (\nu+\beta)\,\triangle w + (\epsilon+\nu-\beta)\,\nabla div\ w - 4\alpha w + 2\alpha rot\ u = -f_2. \end{cases} \tag{3.1}$$

avec les mêmes conditions aux limites de type :

1. **Neumann pour u :**

$$\sigma\,(u)\,_{|\Gamma} = g_1 \tag{3.2}$$

2. **Dirichlet pour w :**

$$w\,_{|\Gamma} = g_2 \tag{3.3}$$

Le système (P_{ext}) se réduit aussi au système :

$$(P_{ext}^{*}) \begin{cases} AU = F. \\ T(U) = (\sigma(u), w) = G \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{3.4}$$

- **Formulation variationnelle :**

Les espaces de Sobolev classiques, ne sont pas adaptés à la résolution du problème (P_{ext}) dans un domaine extérieur Ω .

Le cadre fonctionnel utilisé est maintenant l'espace de Sobolev avec poids $W_0^1(\Omega)$, donné par la définition 1.8. A partir des conditions aux limites citées plus haut; on introduit les espaces auxiliaires suivants:

$$D = \left\{ U = (u, w) \quad / \quad u \in \left[D\left(\bar{\Omega} \right) \right]^3 \ , w \in [D(\Omega)]^3 \right\}$$

et la fermeture de D dans $W_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$:

$$V_{ext} = \left\{ U = (u, w) \quad / \quad u \in \left[W_0^1(\Omega) \right]^3 \ , w \in \left[H_0^1(\Omega) \right]^3 \right\} \tag{3.5}$$

muni de la norme :

$$|U|_{V_{ext}}^2 = |(u, w)|_{V_{ext}}^2 = \|u\|_{1,0}^2 + \|w\|_1^2 \tag{3.6}$$

V_{ext} est un espace de Hilbert .

On pose aussi :

$$H_{ext} = \left\{ (u, w) \in V_{ext} \ / \ \rho k(u) \in \left[L^2(\Omega) \right]^3 \right\} \tag{3.7}$$

avec :

$$k(u) = (\mu + \alpha) \triangle u + (\lambda + \mu - \alpha) \nabla divu$$

muni de la norme :

$$|U|_{H_{ext}}^2 = |(u, w)|_{H_{ext}}^2 = \|u\|_{1,0}^2 + \|w\|_1^2 + \|\rho k(u)\|_0^2 . \tag{3.8}$$

Nous associons au problème (P_{ext}^{*}) le problème variationnel suivant :

$$
\left(P_{ext}^{**}\right) = \begin{cases} \text{Pour tout } f_1 \in \left[W_1^0\left(\Omega\right)\right]^3 \ , \ f_2 \in \left[H^{-1}\left(\Omega\right)\right]^3 \\ \text{Trouver } U \in V_{ext} \text{ tel que :} \\ a\left(U, \acute{U}\right) = \left\langle F, \acute{U}\right\rangle_\Omega + \left\langle G, \acute{U}\right\rangle_\Gamma \quad \forall \acute{U} \in V_{ext} \end{cases} \tag{3.9}
$$

où $a\left(U, \acute{U}\right)$ est la même forme bilinéaire donnée par les équations (2.13) , (2.14) dans le chapitre précédent, de plus, l'ensemble des éléments U tel que $a\left(U,U\right) = 0$, se réduit aussi à l'espace $\Re$ donné par l'équation (2.15) , et comme l'espace $W_0^1\left(\Omega\right)$ ne contient ni les polynômes ni les constantes, alors :

$$
\Re \cap V_{ext} = \{0_{\mathbb{R}^6}\}
$$

- **Formule de Green :**

Pour ce problème extérieur, on obtient une formule de Green dont la démonstration est en tout point identique à celle du cas intérieur (ou borné) .

Théorème 3.1. *(de densité)*
D est dense dans H_{ext} .

Preuve. On se ramène par troncature aux propriétés des espaces de Sobolev classiques.

Soit $\varphi \in \left[D\left(\mathbb{R}^3\right)\right]^3$ avec $0 \leq \varphi\left(x\right) \leq 1$, $\varphi\left(x\right) = 1$ pour $|x| \leq 1$, $\varphi\left(x\right) = 0$ pour $|x| \geq 2$ et posons: $\forall n > 0$, $\varphi_n\left(x\right) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$, $U_n\left(x\right) = \varphi_n U$ / $U = (u, w)$ et $U_n = (u_n, w_n)$

Nous montrons que, pour $U \in H_{ext}$; $U_n \in H_{ext}$ et

$$
\lim_{n \to \infty} \left|U_n - U\right|_{H_{ext}} = 0 \tag{3.10}
$$

Exprimons :

$$
\left|U_n - U\right|_{H_{ext}}^2 = \left\|u_n - u\right\|_{1,0}^2 + \left\|w_n - w\right\|_1^2 + \left\|\rho k\left(u_n - u\right)\right\|_0^2 \ .
$$

On montre que chaque terme tend vers zéro .

► $\|u_n - u\|_{1,0}^2 = \left\|\frac{u_n-u}{\rho}\right\|_0^2 + \|\nabla(u_n-u)\|_0^2$.

avec :

$* \left\|\frac{u_n-u}{\rho}\right\|_0^2 = \left\|\frac{\varphi_n u - u}{\rho}\right\|_0^2 = \left\|\frac{(\varphi_n-1)u}{\rho}\right\|_0^2 \to 0$ quand $n \to \infty$ (car $\varphi_n \to 1$ quand $n \to \infty$)

$$\begin{aligned} * \|\nabla(u_n-u)\|_0^2 &= \|\nabla(\varphi_n u) - \nabla u\|_0^2 \\ &= \|(\nabla\varphi_n)u + \varphi_n \nabla u - \nabla u\|_0^2. \\ &= \left\|\tfrac{1}{k}\nabla\varphi_n u + (\varphi_n - 1)\nabla u\right\|_0^2 \\ &\leq \tfrac{1}{n}\|\nabla\varphi_n u\|_0^2 + \|(\varphi_n-1)\nabla u\|_0^2 \to 0 \qquad \text{quand n} \to \infty. \end{aligned}$$

► $\|w_n - w\|_1^2 \to 0$ et $\|\rho k(u_n-u)\|_0^2 \to 0$, de la même manière que le premier terme, d'où (3.10) .

Soit maintenant $U \in H_{ext}$ à support compact; alors $U \in H$ défini dans (2.10) . Par suite, il existe une suite $(\psi_l)_{l\in\mathbb{N}}$; $\psi_l \in D$, telle que U et ψ_l aient leurs support dans un compact fixe et de plus :

$$\lim_{l\to\infty} |\psi_l - U|_{H_{ext}} = 0.$$

Ce qui termine la démonstration . ■

Théorème 3.2. *(de trace)*
Il existe un opérateur linéaire et continu $\gamma \in \mathcal{L}\left(H_{ext}\ ,\ \left[H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]^6\right)$ *tel que :*
$\forall \acute{U} \in V_{ext}$, $\forall U \in H_{ext}$ *, on a la formule de Green :*

$$(-AU, \acute{U}) + a\left(U, \acute{U}\right) = \left\langle \gamma(U), \acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

Preuve. Soient $U = (u, w)$ dans D et $\acute{U} = (\acute{u}, \acute{w})$ dans $\left[D\left(\bar{\Omega}\right)\right]^6$.
A partir de (3.2) , (3.3) , (3.4) et (2.12) , on établit par intégration par partie la formule de Green :

$$(-AU, \acute{U}) + a\left(U, \acute{U}\right) = \left\langle T(U), \acute{U}\right\rangle_\Gamma$$

tel que T est un opérateur linéaire et continu, défini sur D et à image dans $[D(\Gamma)]^6$

$$\begin{aligned} T:\ D &\to [D(\Gamma)]^6 \\ U &\mapsto T(U) \end{aligned}$$

Sachant que localement (sur un borné), les topologies de $H^1(\Omega)$ et $W_0^1(\Omega)$ coïncident (cf remarque 1.2.); et le fait que D est dense dans H_{ext} ; T se prolonge par continuité en un opérateur linéaire et continu γ de H_{ext} dans $\left[H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]^6$, de plus

$$\|\gamma(U)\|_{-\frac{1}{2}} \leq C\,|U|_{H_{ext}}.$$

Ainsi on obtient l'égalité (3.11) . ■

- **Existence et unicité :**

Par le théorème de Lax Milgram, on démontre le théorème suivant :

Théorème 3.3. *Le problème* (P_{ext}^{**}) *admet une unique solution* $U = (u,w) \in V_{ext}$.

Preuve. 1) $a(.,.)$ **est une forme bilinéaire et continue sur** $V_{ext} \times V_{ext}$**.**

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a :

$$\begin{aligned}
|a((u,w),(\acute{u},\acute{w}))| \leq\ & c_1(\|\nabla u\|_0\|\nabla\acute{u}\|_0 + \|rot\ u\|_0\|rot\ \acute{u}\|_0 + \|div\ u\|_0\|div\ \acute{u}\|_0 + \\
& \|\nabla w\|_0\|\nabla\acute{w}\|_0 + \|rot\ w\|_0\|rot\ \acute{w}\|_0 + \|div\ w\|_0\|div\ \acute{w}\|_0 + \\
& (2\ \|\acute{w}\|_0 + \|rot\ \acute{u}\|_0).(2\ \|w\|_0 + \|rot\ u\|_0)).
\end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned}
\|rot\ u\|_0 &\leq c\,\|u\|_{1,0}. \\
\|\nabla u\|_0 &\leq \|u\|_{1,0}. \\
\|rot\ w\|_0 &\leq \acute{c}\,\|w\|_1. \\
\|\nabla w\|_0 &\leq \|w\|_1.
\end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned}
|a((u,w),(\acute{u},\acute{w}))| &\leq c_2(\|u\|_{1,0}\|\acute{u}\|_{1,0} + \|w\|_1\|\acute{w}\|_1 + \\
&\quad (\|\acute{w}\|_1 + \|\ \acute{u}\|_{1,0}).(\|w\|_1 + \|u\|_{1,0})) \\
&\leq 2c_2(\|w\|_1 + \|u\|_{1,0})(\|\acute{w}\|_1 + \|\ \acute{u}\|_{1,0}). \\
&\leq c_3\,|U|_{V_{ext}}\ \left|\acute{U}\right|_{V_{ext}}.
\end{aligned}$$

2) $a(.,.)$ est coercive sur V_{ext} :

On démontre la proposition suivante .

Proposition 3.1. *Il existe une constante positive c telle que :*

$$a(U,U) \geq c\,|U|^2_{V_{ext}} \qquad \forall U \in V_{ext}\ .$$

■

Preuve. On montre que $a(U,U)$ est une norme sur V_{ext} équivalente à la norme $|.|_{V_{ext}}$:

– $a(U,U) = 0 \Rightarrow U = 0 \quad \forall U \in V_{ext}$.

– On montre que: $\exists c > 0$, $\acute{c} > 0$

$$c\ \ |U|^2_{V_{ext}} < a(U,U) < \acute{c}\ \ |U|^2_{V_{ext}}\ \ .$$

L'inégalité

$$a(U,U) < \acute{c}\ \ |U|^2_{V_{ext}}$$

est évidente.

pour montrer l'inégalité inverse, on raisonne par l'absurde.

Supposons qu'il existe une suite $(U_m)_m$ de V_{ext} telle que :

$$|U_m|_{V_{ext}} = 1 \quad \text{ et },\quad a(U_m, U_m) \to 0 \quad \text{ quand } m \to \infty$$

La suite $(U_m)_m$ étant bornée dans V_{ext} , il existe alors une sous suite $(U_n)_n$qui converge faiblement dans V_{ext} vers U :

$$U_n \rightharpoonup U.$$

Mais

$$a(U_n, U_n) \to 0$$

et donc :

$$a(U,U) = 0\ ,\ U \in V_{ext}.$$

D'apès la première partie de la démonstration $U = 0$, c à d :

$$U_n \rightharpoonup 0 \qquad \text{dans } V_{ext}\ .$$

Soit B une boule contenant Ω'. Sur $(\Omega \cap B)$, qui est borné, les topologies de $W_0^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ coïncident; et le fait que l'injection de $H^1(\Omega \cap B)$ dans $L^2(\Omega \cap B)$ est compacte; alors la restriction de U_n à $(\Omega \cap B)$,

$$U_n \mid_{(\Omega \cap B)} \to 0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega \cap B)$$

or

$$a(U_n, U_n) \to 0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega)$$

ceci implique :

$$U_n \to 0 \qquad \text{dans } V_{ext} \mid_{(\Omega \cap B)}$$

et donc

$$U_n \mid_{\Gamma} \to 0 \qquad \text{dans } \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^6 .$$

ce qui entraîne

$$U_n \to 0 \qquad \text{dans } V_{ext} .$$

Contradiction avec $|U_m|_{V_{ext}} = 1$.

3) La forme linéaire définie par:

$$\left\langle L, \acute{U} \right\rangle = (-f_1, \acute{u}) + (-f_2, \acute{w}) + \left\langle G, \acute{U} \right\rangle_{\Gamma} .$$

est continue sur V_{ext} ; en effet :

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle L, \acute{U} \right\rangle\right| &\leq |(-f_1, \acute{u})| + |(-f_2, \acute{w})| + \left|\left\langle G, \acute{U} \right\rangle_{\Gamma}\right| \\
&\leq \|f_1\|_{0,1} \|\acute{u}\|_{1,0} + \|f_2\|_{-1} \|\acute{w}\|_1 + |G|_{\Gamma} \left|\acute{U}\right|_{V_{ext}} \\
&\leq C \left(\|\acute{u}\|_{1,0} + \|\acute{w}\|_1\right) \\
&\leq C \left|\acute{U}\right|_{V_{ext}} .
\end{aligned}$$

Le théorème de Lax Milgram entraîne que le problème (P_{ext}^{**}) admet une solution unique $U \in V_{ext}$, d'où le théorème 3.3. .

■

- **Retour au problème initial :**

Théorème 3.4. *soit* Ω *un ouvert extérieur de* $\mathbb{R}^3$

$\forall (f_1, f_2) \in (W_1^0(\Omega))^3 \times (H^{-1}(\Omega))^3$.

$\forall g_1 \in (H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$; $\forall g_2 \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$.

Il existe une unique solution $U = (u, w) \in V_{ext}$ *du problème* (P_{ext}) *au sens des distributions; de plus :*

$$\|u\|_{1,0} + \|w\|_1 \leq C \left(\|f_1\|_{0,1} + \|f_2\|_{-1} + |G|_{\Gamma,0} \right). \tag{3.12}$$

Preuve. On raisonne de la même manière que dans la démonstration du théorème 2.4. ■

3.2 cas d'un domaine extérieur de $\mathbb{R}^2$

Cette section est globalement construite comme la précédente, à part quelques propriétés spécifiques aux espaces de Sobolev avec poids, définis sur un domaine extérieur de $\mathbb{R}^2$. Cette spécificité repose sur deux faits:

D'une part l'espace $W_0^1(\Omega)$ contient les fonctions constantes, ce qui n'était pas le cas pour $n = 3$; d'autre part l'utilisation des poids logarithmiques .

Soit donc Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^2$, $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière. Les équations modélisant le problème de l'élasticité momentique, défini sur le domaine Ω , se définissent comme suit :

$$(P_{ext}) \begin{cases} (\mu + \alpha) \triangle u + (\lambda + \mu - \alpha) \nabla div \ u + 2\alpha Rot \ w = -f_1 \\ (\nu + \beta) \triangle w - 4\alpha w + 2\alpha rot \ u = -f_2 \end{cases} \tag{3.13}$$

Aux équations du système P_{ext} , on ajoute des conditions aux limites de type :

1. **Neumann pour** u **:**

$$\sigma(u) \mid_\Gamma = g_1 \tag{3.14}$$

2. **Dirichlet pour** w **:**

$$w \mid_\Gamma = g_2 \tag{3.15}$$

où σ est le vecteur de contraintes .

- **Formulation variationnelle :**

On pose dans le système P_{ext} :

$U = (u, w)$, $F = (f_1, f_2)$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, et $G = (g_1, g_2)$ tels que :

$u = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$, une fonction vectorielle .

$w = w(x_1, x_2)$ une fonction scalaire, et

$$\left\{ \begin{array}{r} A_1(u, w) = (\mu + \alpha) \triangle u + (\lambda + \mu - \alpha) \nabla div\ u + 2\alpha Rot\ w \\ A_2(u, w) = (\nu + \beta) \triangle w - 4\alpha w + 2\alpha rot\ u \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Rot (le rotationnel vectoriel) et rot (le rotationnel scalaire) sont les opérateurs définis dans le chapitre 1, définition 1.3. .

Le problème P_{ext} se réduit alors au système :

$$(P^*_{ext}) \left\{ \begin{array}{ll} AU = F & \text{dans } \Omega \\ T(U) = G & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \tag{3.17}$$

où $T(U) = (\sigma(u), w)$.

On introduit les espaces auxiliaires suivants :

$$\begin{aligned} V_{ext} &= \left\{ U = (u, w) \ / \ u \in \left(W_0^1(\Omega)\right)^2 \ , w \in H_0^1(\Omega) \right\} \\ &= \left(W_0^1(\Omega)\right)^2 \times H_0^1(\Omega) \ . \end{aligned} \tag{3.18}$$

V_{ext} est muni de la norme

$$|U|^2_{V_{ext}} = \|u\|^2_{1,0} + \|w\|^2_1 . \tag{3.19}$$

$$H_{ext} = \left\{ u \in \left(W_0^1(\Omega)\right)^2 \quad / \quad \rho(\lg \rho) k(u) \in (L^2(\Omega))^2 \right\}$$

tel que :

$$k(u) = (\mu + \alpha) \triangle u + (\lambda + \mu - \alpha) \nabla divu \ .$$

H_{ext} muni de la norme :

$$|U|^2_{H_{ext}} = \|u\|^2_{1,0} + \|\rho(\lg r) k(u)\|^2_0 . \tag{3.20}$$

est un espace de Hilbert.

Nous associons au problème (P^*_{ext}) la forme bilinéaire

$$a(U,\acute{U}) = \int_\Omega E(U,\acute{U})d\ \Omega \tag{3.21}$$

tel que :

$$\begin{aligned} E(U,\acute{U}) &= 2\mu(\nabla u\ \nabla \acute{u} - \frac{1}{2} rot\ u\ rot\ \acute{u} \text{-} \frac{1}{3} div\ u\ div\ \acute{u}) \\ &\quad +2\nu(\nabla w\ \nabla \acute{w} - \frac{1}{2} Rot\ w\ Rot\ \acute{w}) \\ &\quad +\beta Rot\ w\ Rot\ \acute{w} + \frac{3\lambda+2\mu}{3} div\ u\ div\ \acute{u} + \alpha(2\acute{w} - rot\ \acute{u}\cdot 2w - rot\ u). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Comme les constantes appartiennent à $W^1_0(\Omega)$, et les éléments $U \in V_{ext}$ tels que $a(U,U)=0$ vérifient :

$$U=(a,0) \quad / \quad a \text{ une constante .}$$

Nous sommes donc conduits à définir sur l'espace quotient,

$$W = \left(W^1_0(\Omega)/\mathbb{R}\right)^2 \times H^1_0(\Omega) \tag{3.23}$$

le problème variationnel :

$\forall f_1 \in (W^0_{1,1}(\Omega)/\mathbb{R})^2$, $\forall f_2 \in H^{-1}(\Omega)$.

$$(P^{**}_{ext}) \begin{cases} \text{trouver } U \in W \quad \text{ tel que :} \\ a(U,\acute{U}) = \left\langle F,\acute{U}\right\rangle_\Omega + \left\langle G,\acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \\ G=(g_1,g_2) \end{cases} \tag{3.24}$$

où:

$W^0_{1,1}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega)\ /\ \rho(\lg r)u \in (L^2(\Omega))^2\}$, $g_1 \in (H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R})^2$ et $g_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

- **Formule de Green :**

Théorème 3.5. *(de densité) :*
$\left(D(\bar{\Omega})\right)^2$ *est dense dans* H_{ext} .

Pour la démonstration du théorème, on aura besoin du lemme :

Lemme 3.1. *Pour* $x \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $|x| \in \left[e^{\frac{n}{2}}, e^n\right]$, $n \geq 2$, *et* $\mu \in \mathbb{N}^2$ *Nous avons la majoration :*

$$\partial^{\mu}\varphi_n(x) \leq \frac{C\mu}{\rho(r)^{|\mu|}\lg r}.$$

la démonstration est dans Giroire [15], Amrouche [6] .

Preuve. du théorème :

Le raisonnement se fait en deux étapes :

1) Soit $u \in H_{ext}$.

Nous construisons une suite $(u_n)_n$ d'éléments de H_{ext} à support compact et convergeant vers u .

2) Nous montrons que chaque élément de la suite $(u_n)_n$, ayant un support compact, peut être approché par un élément de $\left(D(\bar{\Omega})\right)^2$.

En effet, une fois la première étape est démontrée :

$$\begin{aligned} \forall u &\in H_{ext} \text{ , } \forall \epsilon > 0 \text{ , } \exists u_n \in (u_n)_n \text{ tel que :} \\ \operatorname{supp} u_n &\subset B(R_n) \text{ et } |u - u_n|_{H_{ext}} \leq \epsilon \text{ .} \end{aligned}$$

$B(R_n)$ est une boule de rayon R_n . Comme les topologies de $W_0^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ sur ce support compact coïncident, alors il existe $v_n \in \left(D(\bar{\Omega})\right)^2$:

$$\|u_n - v_n\|_{H^1(B(R_n))} = |u - u_n|_{H_{ext}} < \epsilon \text{ .}$$

Il ne reste plus qu'a construire cette suite $(u_n)_n$.

Dans ce but, on introduit une fonction de troncature $\varphi \in C^{\infty}([0, +\infty[)$, telle que :

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0 & \forall t \in [0,1] \\ 0 \leq \varphi(t) \leq 1 & \forall t \in [1,2] \\ \varphi(t) = 1 & \forall t \in [2, +\infty[\end{cases} \tag{3.25}$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{n}{\ln|x|}\right) & \forall x \in \mathbb{R}^2 \text{ , } |x| > 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.26}$$

D'où :

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = 1 & \forall x \in \mathbb{R}^2, & |x| \leq e^{\frac{n}{2}} \\ 0 \leq \varphi_n(x) \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R}^2, & e^{\frac{1}{2}} \leq |x| \leq e^n \\ \varphi_n(x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^2, & |x| \geq e^n \end{cases}$$

φ_n est bien une fonction de troncature, de plus φ_n est définie sur $\mathbb{R}^2$ donc sur Ω .

Soit donc la suite $(u_n)_n$ telle que :

$$u_n = \varphi_n u$$

cette suite converge vers u dans H_{ext} si et seulement si :

$$|u - u_n|_{H_{ext}} \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

or

$$\begin{aligned} |u - u_n|_{H_{ext}} &= \|u - u_n\|_{1,0}^2 + \|\rho(\lg r)\ k(u - u_n)\|_0^2 \\ &= \left\| \frac{u - u_n}{\rho(\lg r)} \right\|_0^2 + \|\nabla(u - u_n)\|_0^2 + \|\rho(\lg r)\ k(u - u_n)\|_0^2 \ . \end{aligned}$$

d'où :

$$|u - u_n|_{H_{ext}} \to 0 \quad \text{si et seulement si :} \begin{cases} 1\ ) & \left\| \frac{u-u_n}{\rho(\lg r)} \right\|_0 & \to & 0 \\ 2\ ) & \|\nabla(u - u_n)\|_0 & \to & 0 \\ 3\ ) & \|\rho(\lg r)\ k(u - u_n)\|_0 & \to & 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

On a :

$$\left\| \frac{u - u_n}{\rho(\lg r)} \right\|_0 \to 0$$

car

$$\left\| \frac{u - u_n}{\rho(\lg r)} \right\|_0 = \left\| \frac{(\varphi_n - 1)u}{\rho(\lg r)} \right\|_0 \to 0 \ \text{ quand } n \to \infty$$

de plus :

$$\|\nabla(u - u_n)\|_0 \to 0 \ .$$

En effet :

$$\begin{aligned}\nabla\left(u-u_n\right) &= \nabla u-\nabla u_n \\ &= \nabla u-\nabla\varphi_n u \\ &= \nabla u-u\nabla\varphi_n-\varphi_n\nabla u \\ &= (1-\varphi_n)\nabla u-u\nabla\varphi_n.\end{aligned}$$

d'où :

$$\left\|\nabla\left(u-u_n\right)\right\|_0 \leq \left\|u\nabla\varphi_n\right\|_0+\left\|(1-\varphi_n)\nabla u\right\|_0$$

D'une part, le deuxième terme à droite dans cette inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini

D'autre part, pour le premier terme on a :

$$\left|u\nabla\varphi_n\right|^2 \leq C\frac{u^2}{\rho^2(\lg r)^2}$$

d'après le lemme 3.1. , ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left|u\nabla\varphi_n\right|^2dx &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2}C\frac{u^2}{\rho^2(\lg r)^2}\,dx \\ &\leq \int\limits_{e^{\frac{n}{2}}\leq|x|\leq e^n}C\frac{u^2}{\rho^2(\lg r)^2}\,dx\to 0 \quad \text{quand } n\to\infty\ .\end{aligned}$$

(3). Se fait de la même manière que (2), ce qui montre (3.27) .

Conclusion :

l'espace des fonctions à support compact est dense dans H_{ext} .

La deuxième étape implique, pour chaque élément u_n de $(u_n)_n$ à support compact dans H_{ext} ; il existe $v_n\in\left(D(\mathbb{R}^2)\right)^2$, donc dans $\left(D(\bar{\Omega})\right)^2$ tel que :

$$\left|v_n-u_n\right|_{H_{ext}}\to 0 \quad \text{quand } n\to\infty$$

ce qui achève la démonstration du théorème . ∎

Théorème 3.6. *(de trace)*

On pose $K=H_{ext}\times H^1(\Omega)$.

Il existe un opérateur linéaire et continu γ de K dans $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$.
de plus on a la formule de Green :

$$\left(-AU,\acute{U}\right)+a\left(U,\acute{U}\right)=\left\langle\gamma(U),\acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}. \tag{3.28}$$

Preuve. Soient U , $\acute{U}$ dans $\left(D(\overline{\Omega})\right)^3$.

Par intégration par partie, on établit la formule de Green :

$$\left(-AU,\acute{U}\right)+a\left(U,\acute{U}\right)=\left\langle T(U),\acute{U}\right\rangle_{\Gamma}.$$

où $T(U)$ est un élément de $(D(\Gamma))^3$, avec $T(U)=(\sigma_1,\sigma_2,0)$:

$$\begin{array}{rcl} T & : & \left(D(\bar{\Omega})\right)^3 \to (D(\Gamma))^3 \\ U & \to & T(U)=(\sigma_1,\sigma_2,0). \end{array}$$

Par ailleurs, pour tout élément $g\in\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^3$, il existe un élément $\mathcal{U}$ dans $(H^1(\Omega))^3$ tel que $\mathcal{U}\mid_\Gamma= g$, et donc T est un opérateur linéaire et continu de $\left(D(\bar{\Omega})\right)^3$ dans $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$.

Comme $D(\bar{\Omega})$ est dense dans H_{ext}, alors T se prolonge en un opérateur linéaire et continu γ de $K=H_{ext}\times H^1(\Omega)$ dans $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$, tel que

$$\begin{array}{rcl} \gamma & : & K=H_{ext}\times H^1(\Omega)\to(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^2\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ U & \longmapsto & \gamma(U)=(\sigma(u),w)=(g_1,g_2). \end{array}$$

et

$$\|\gamma(u)\|_{-\frac{1}{2}}\leq C\,|U|_K.$$

De plus on a la formule (3.28) ,

$$\left(-AU,\acute{U}\right)+a\left(U,\acute{U}\right)=\left\langle\gamma(U),\acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}.$$

■

- **Existence et unicité :**

En utilisant le théorème de Lax Milgram, on démontre le théorème suivant :

Théorème 3.7. *Le problème* (P_{ext}^{**}) *admet une unique solution* $U \in W$ *.*

Remarque 3.1. *Sur* W *on définit la norme quotient :*

$$|U|_W^2 = \inf_{C \, \in \, \mathbb{R}^2} \|u + c\|_{1,0}^2 + \|w\|_1^2 \ .$$

De plus,

$$u \longmapsto \|\nabla u\|_0$$

est une norme sur l'espace quotient $\left(W_0^1(\Omega)/\mathbb{R}\right)^2$*, équivalente à la norme quotient , théorème 1.10. .*

Preuve. (du théorème)

1) $a(.,.)$ **est une forme bilinéaire, continue sur** $W \times W$ **:**

Soient $U = (u, w)$, $\acute{U} = (u, w)$ dans W :

$$\begin{aligned}
\left|a(U,\acute{U})\right| &\leq c_1(\|\nabla u\|_0 \|\nabla \acute{u}\|_0 + \|rot\ u\|_0 \|rot\ \acute{u}\|_0 + \|divu\|_0 \|div\ \acute{u}\|_0 \\
&\quad + \|\nabla w\|_0 \|\nabla \acute{w}\|_0 + \|Rot\ w\|_0 \|Rot\ \acute{w}\|_0 \\
&\quad + (\|\acute{w}\|_0 + \|rot\ \acute{u}\|_0)(\|w\|_0 + \|rot\ u\|_0)). \\
&\leq c_2(\inf_{C \, \in \, \mathbb{R}^2} \|u + c\|_{1,0} \inf_{C \, \in \, \mathbb{R}^2} \|\acute{u} + c\|_{1,0} + \|w\|_1 \|\acute{w}\|_1 \\
&\quad + \left(\|\acute{w}\|_1 + \inf_{C \, \in \, \mathbb{R}^2} \|\acute{u} + c\|_{1,0}\right)\left(\|w\|_1 + \inf_{C \, \in \, \mathbb{R}^2} \|u + c\|_{1,0}\right)). \\
&\leq 2c_2 \left(\|\acute{w}\|_1 + \inf_{C \, \in \, \mathbb{R}^2} \|\acute{u} + c\|_{1,0}\right)\left(\|w\|_1 + \inf_{C \, \in \, \mathbb{R}^2} \|u + c\|_{1,0}\right) \\
&\leq c_3 \ |U|_W \ \left|\acute{U}\right|_W \ .
\end{aligned}$$

2) $a(.,.)$ **est coercive sur** W **:**

Pour montrer que $a(.,.)$ est coercive sur W , on démontre la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Il existe une constante positive c telle que :*

$$a(U,U) \geq c \ |U|^2_{V_{ext}} \qquad \forall U \in W$$

■

Preuve. On montre que $a(U,U)$ est une norme sur W équivalente à la norme quotient.

i) $a(U,U)$ est une norme sur W , en effet :

$$a(U,U) = 0 \Rightarrow U = 0 \quad \forall U \in W.$$

De plus :

$$\forall U \in W : a(U,U) \leq |U|^2_{V_{ext}}$$

ii) Il reste à montrer que :

$$\exists c > 0 : \forall U \in W \ , \ a(U,U) \geq c \ |U|^2_W \ .$$

La démonstration s'effectue en deux étapes. La première consiste à éliminer la norme quotient en choisissant un représentant adéquat de la classe de U .

Pour cela, on choisit un représentant U de la classe de $\dot{U}$ dans V_{ext}, qui satisfait :

$$\int_{B(R)} U \ dx = 0 \ , \ R \text{ un reel positif fixé} \ .$$

ce qui détermine U d'une manière unique, de plus :

$$\left|\dot{U}\right|_W \leq |U|_{V_{ext}} \ .$$

La deuxième étape consiste à montrer qu'il existe une constante c positive telle que :

$$a(U,U) \geq c \ |U|^2_{V_{ext}}$$

Raisonnons par l'absurde .

Supposons qu'il existe une suite d'éléments de V_{ext} , $(U_n)_n$ telle que :

$$|U_n|_{V_{ext}} = 1 \text{ et } a(U_n, U_n) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

$(U_n)_n$ étant bornée dans V_{ext} ; il existe alors une sous suite $(U_m)_m$ de $(U_n)_n$ telle que :

$$U_m \rightharpoonup U \quad \text{dans } V_{ext}$$

or

$$a(U_m, U_m) \to 0 \quad \text{quand } m \to \infty.$$

alors

$$a(U, U) = 0 \text{ , } U \in V_{ext}$$

D'après la première partie de la démonstration, $U = 0$, c à d :

$$U_m \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } V_{ext}$$

Maintenant, on veut une convergence forte dans V_{ext} qui aboutit à une contradiction .

Soit R , un réel suffisamment grand de sorte que la boule $B = B(0, R)$ contienne l'ouvert borné Ω' .

Pour R fixé, l'espace des restrictions à $(B \cap \Omega)$ des éléments de V_{ext} , $V_{ext}((B \cap \Omega))$ coïncide algébriquement et topologiquement avec $[H^1(B \cap \Omega)]^3$; ce qui nous permet d'écrire:

$$U_m \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } V_{ext}$$

implique

$$U_m \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } V_{ext}((B \cap \Omega)) = \left[H^1(B \cap \Omega)\right]^3 .$$

L'injection de $H^1(B \cap \Omega)$ dans $L^2(B \cap \Omega)$ est compacte, alors :

$$U_m \to 0 \quad \text{dans } L^2(B \cap \Omega)$$

et comme en plus :

$$a(U_m, U_m) \to 0 \quad \text{dans } L^2\left(B \cap \Omega\right)$$

alors

$$U_m \to 0 \quad \text{dans } \left[H^1(B \cap \Omega)\right]^3 = V_{ext}\left((B \cap \Omega)\right)$$

et donc :

$$U_m \mid_{\Gamma} \to 0 \quad \text{dans } \left[H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)\right]^3$$

d'où

$$U_m \to 0 \quad \text{dans } V_{ext}$$

Contradiction avec :

$$|U_m|_{V_{ext}} = 1.$$

3) La forme linéaire :

$$L : W \to \mathbb{R}$$

telle que :

$$\begin{aligned}
\left\langle L, \acute{U} \right\rangle &= \left\langle F, \acute{U} \right\rangle + \left\langle G, \acute{U} \right\rangle. \\
&= (-f_1, \acute{u})_{1,1} + (-f_2, \acute{w})_{-1} + \left\langle G, \acute{U} \right\rangle_{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

est continue sur W .

En effet

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle L, \acute{U} \right\rangle\right| &= \left|(-f_1, \acute{u} + c) + (-f_2, \acute{w}) + \langle g_1, \acute{u} + c\rangle_{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} + \langle g_2, \acute{w}\rangle_{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}\right| \\
&\leq \|f_1\|_{1,1} \|\acute{u} + c\|_0 + \|f_2\|_{-1} \|\acute{w}\|_0 + \|g_1\|_{-\frac{1}{2}} \|\acute{u} + c\|_0 + \|g_2\|_{\frac{1}{2}} \|\acute{w}\|_0 \\
&\leq (\|f_1\|_{1,1} \inf_{C \,\in\, \mathbb{R}^2} \|\acute{u} + c\|_{1,0} + \|f_2\|_{-1} \|\acute{w}\|_1 + \|g_1\|_{-\frac{1}{2}} \inf_{C \,\in\, \mathbb{R}^2} \|\acute{u} + c\|_{1,0} \\
&\quad + \|g_2\|_{\frac{1}{2}} \|\acute{w}\|_1) \\
&\leq (\|f_1\|_{1,1} + \|g_1\|_{-\frac{1}{2}}) \inf_{C \,\in\, \mathbb{R}^2} \|\acute{u} + c\|_{1,0} + (\|f_2\|_{-1} + \|g_2\|_{\frac{1}{2}}) \|\acute{w}\|_1 \\
&\leq C \left|U\right|_W \qquad \text{tel que } C = max\ (c_1, c_2)
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} c_1 &= \|f_1\|_{1,1} + \|g_1\|_{-\frac{1}{2}} \\ c_2 &= \|f_2\|_{-1} + \|g_2\|_{\frac{1}{2}} \ . \end{aligned}$$

■

Le théorème de Lax Milgram entraîne que le problème (P^{**}_{ext}) admet une solution unique $U \in W$

D'où le théorème 3.7. .

- **Retour au problème initial :**

Théorème 3.8. Ω *un ouvert extérieur de* $\mathbb{R}^2$.
$\forall f_1 \in (W^0_{1,1}(\Omega)/\mathbb{R})^2$; $\forall f_2 \in H^{-1}(\Omega)$.
$\forall g_1 \in (H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R})^2$; $\forall g_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *Alors :*
au sens des distributions le problème (P^*_{ext}) *admet une unique solution* U *dans* W *, de plus*

$$|U|_W \leq C\left(\|f_1\|_{1,1} + \|f_2\|_{-1} + \|g_1\|_{-\frac{1}{2}} + \|g_2\|_{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.29}$$

Preuve. On montre que la solution faible du problème variationnel (P^{**}_{ext}) , est solution du problème (P^*_{ext}) au sens des distributions .

Soit U solution du problème variationnel. On prend $\acute{U} \in (D(\Omega))^3$ dans le problème (P^{**}_{ext}) , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{c} U \in W \\ a(U,\acute{U}) = \left\langle F,\acute{U}\right\rangle_\Omega + \left\langle G,\acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \quad \forall \acute{U} \in (D(\Omega))^3 \end{array} \right.$$

En utilisant la dérivation au sens des distributions, et le fait que :

$$\begin{aligned} \triangle u &= \nabla div\ u - Rot\ rot\ u \\ &\text{et} \\ \triangle w &= -rot\ (Rot\ w) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{cases} -\left\langle (\mu+\alpha)\,\triangle u + (\lambda+\mu-\alpha)\,\nabla div\ u + 2\alpha Rot\ w, \acute{u} \right\rangle = \left\langle f_1, \acute{u} \right\rangle \\ -\left\langle (\nu+\beta)\,\triangle w - 4\alpha w + 2rot\ u, \acute{w} \right\rangle = \left\langle f_2, \acute{w} \right\rangle . \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\,\triangle u + (\lambda+\mu-\alpha)\,\nabla div\ u + 2\alpha Rot\ w = -f_1 \\ \qquad\qquad \text{et} \\ (\nu+\beta)\,\triangle w - 4\alpha w + 2rot\ u = -f_2 \end{cases} \quad \text{au sens des distributions, dans } \Omega$$

Ainsi les équations vérifient le système (P^{*}_{ext}) c à d :

$$AU = F \quad \text{dans } \Omega \text{ au sens des distributions.}$$

Pour les conditions aux limites, en reportant cette dernière équation dans l'équation (3.24) du système (P^{**}_{ext}), on trouve :

$$a(U,\acute{U}) = \left(AU,\acute{U}\right)_{\Omega} + \left\langle G,\acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} . \tag{3.30}$$

et d'autre part, la formule de Green (3.28) entraîne :

$$a(U,\acute{U}) = \left(AU,\acute{U}\right)_{\Omega} + \left\langle \gamma\,(U)\,,\acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} . \tag{3.31}$$

en comparant les deux équations (3.30) et (3.31) , on trouve :

$$\left\langle \gamma\,(U)\,,\acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \left\langle G,\acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$$

c à d :

$$\left\langle \gamma\,(U) - G,\acute{U}\right\rangle_{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall \acute{U} \in \left(D\left(\bar{\Omega}\right)\right)^{3} .$$

d'où:

$$\begin{aligned}
(\gamma(U)-G)\mid_{\Gamma}=0 \quad &\Rightarrow \quad \gamma(U)=G \\
&\Rightarrow \quad (\sigma(u), w)=(g_1, g_2) \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma(u)\mid_{\Gamma}=g_1 \\ w\mid_{\Gamma}=g_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

de plus:

Soit $U=(u,w)$ un élément de W qui vérifie le problème (P). Si $(u,w)=(\acute{u},\acute{w})$, on a:

$$a(U,U) \leq C\left(\|f_1\|_{1,1}+\|f_2\|_{-1}+\|g_1\|_{-\frac{1}{2}}+\|g_2\|_{\frac{1}{2}}\right)|U|_W$$

et le fait que $a(.,.)$ est coercive sur W entraîne :

$$|U|_W \leq C\left(\|f_1\|_{1,1}+\|f_2\|_{-1}+\|g_1\|_{-\frac{1}{2}}+\|g_2\|_{\frac{1}{2}}\right) \; .$$

■

conclusion

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la technique des méthodes variationnelles pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème de l'élasticité momentique (micropolaire), dans des domaines non bornés, et particulièrement dans des domaines extérieurs. Le cadre fonctionnel utilisé est celui des espaces de Sobolev avec poids $W_0^1(\Omega)$, dans le cas hilbertien. Ces espaces ont fournit un cadre très approprié pour la recherche de solutions. Les démonstrations à l'exception de quelques détails techniques, sont analogues à celles du cas classique (borné), vu la nature de la frontière des domaines extérieurs qui est bornée.

Sur la frontière Γ du domaine Ω sont données des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann: $\sigma(u)\mid_\Gamma = g_1$, $w\mid_\Gamma = g_2$ où σ est le tenseur de contraintes. Il serait aussi intéressant de voir le problème avec d'autres conditions aux limites, par exemple: $\sigma(w)\mid_\Gamma = g$, $u\mid_\Gamma = h$ où σ est cette fois-ci le tenseur des couples de contraintes; et si l'on suppose que Γ est la réunion de deux parties disjointes Γ_0 et Γ_1, chacune de mesure non-nulle, on peut considérer aussi le problème mêlé, par exemple: $u\mid_{\Gamma_0} = 0$, $\sigma(u)\mid_{\Gamma_1} = g$ et $w\mid_{\Gamma_1} = h$.

L'étude du problème dans l'espace de Banach $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ pour $1 \prec p \prec +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \geq 0$ est une voie à explorer

Bibliographie

[1] M.Abid, Problème Variationnel dans un Fluide Micropolaire Visqueux et Incompressible. Maghreb Math. Rev, Volume 1, Numéro 2, p149–159, (1992)

[2] M.Abid, Problèmes Extérieur de Type Stokes dans $\mathbb{R}^3$. C. R . Acad, Paris, Série 1, p 267–270, (1993)

[3] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, (1975)

[4] F.Alliot, Etude des Equations Stationnaires de Stokes et Navier-Stokes dans des Domaines Extérieurs, Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (1998)

[5] F.Alliot–C.Amrouche, Problème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$, une Approche dans des Espaces de Sobolev avec Poids.Maths. Meth. Mod. App. Sci. Vol. 9, p 723-753, (1999)

[6] C. Amrouche–V.Girault–J.Giroire, Weighted Sobolev Spaces for Laplace's Equation in $\mathbb{R}^n$. Part 1. J.Math. Pures et Appliqués, Vol. 20, p 579–606, (1994)

[7] H. Breziz, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application. Springer–Verlag. Heidelberg (1987)

[8] M. Cantor, Boundary Value Problems for Asymptotically Homogeneous Elliptic Second Order Operators, J.of Differential Equations, Vol 9, p 102-113, (1979)

[9] P.G.Ciarlet, Mathematical Elasticity, Vol 1,Three Dimentionnal Elasticity, North Holand, (1988)

[10] R.Dautray–Lions, Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques, Vol 5, Masson (1988)

[11] G.Duvaut et J.L.Lions, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris, (1972)

[12] A.c.Eringen, Theory of Micropolar Fluids, In Fracture, Ed.H Lieboitz, vol.2, Ac Press, N.Y, London, (1968)

[13] V.Girault–P.A.Raviart, Finit Element for Navier Stokes Equations. Springer Série SCM P 1–56, (1986)

[14] V.Girault et A.Sequeira, A Well Posed Problem for the Exterior Stokes Equations in two and three Dimentions Arch Rational Mech Anl, Vol 114, p 313–333, (1991)

[15] J.Gioroire, Etude de Quelques Problèmes aux Limites Extérieurs et Résolution par Equations Intégrales, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, (1987)

[16] B. Hanouzet, Espaces de Sobolev avec Poids, Application au Problème de Dirichlet dans un Demi-espace. Rend. del Sem. Math. della Univ. di Padova, 227-272, (1971)

[17] G.H.Hardy, Littlwood, J.E.Polya, G, Inequalities, Cambridge, 3^{eme} édition (1959)

[18] J.P.Henry, Cours d'Elasticité, Dunod Université, Paris (1982)

[19] N.Kikuchi et J.T.Oden, Contact Problems in Elasticity, A Study of Variational Inequalities and Finit Element Methods, SIAM, Philadelphia, (1988)

[20] A Kufner, Weighted Sobolev Spaces, Willey, Chichester, (1985)

[21] V.D.Kupradze, T.G.Gegelia and M.O.Bashelishvili, Three Dimentional Problems of Elasticity and Thermo -Elasticity, Appl . Math . Mech, p 65-66, (1979)

[22] M.N.Leroux, Résolution Numérique du Problème du Potentiel dans le Plan par une Méthode Variationnelle d'Eléments Finis, Thése de Troisième Cycle, Université de Rennes, (1974)

[23] Lions–E.Magenes, Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications, tome 1, Dunod, Paris, (1968)

[24] J.Neças, Les Méthodes Diréctes en Théorie des Equations Elliptiques, Masson, Paris, (1967).

[25] A.Sequeira, The Coupling of Boundary Integral and Finit Element Method for the Bidimentional Exterior Steady Stokes Problem, Math Methods in the Appl.Sci.Vol.5, p 356-375, (1983)

[26] R.Temam, Navier–Stokes Equations, North Holand p 1–38 (1977)

[27] J.M.Thomas-P.A.Raviart, Itroduction à l'Analyse Numérique aux Equations aux Dérivées Partielles, Masson Paris, p 1–56 (1988)