

N° d'ordre : 26/ 2008-M/ MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMÉDIENNE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse - Systèmes Dynamiques

Par

TAHAR SOUHILA

THÈME

Etude Géométrique de certains Systèmes Dynamiques

Dynamique Symbolique et Théorie Ergodique

Soutenu publiquement, le 30/04/2008, devant le jury composé de :

Mr.	A.KESSI	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	R.BEBBOUCHI	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	K.BETINA	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mme.	I.DJELLIT	Professeur	Université d'Annaba.	Examinatrice
Mme.	M.BENHASSINE	Chargée de cours	E.N.S de Kouba.	Invitée

Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier au Professeur R. Bebbouchi pour m'avoir permis cette jolie rencontre avec les systèmes dynamiques.

Je tiens à remercier M. Benhassine qui a été à l'initiative du thème de ce mémoire. Je remercie aussi les Professeurs A.Kessi, K.Bétina et I.Djellit pour l'intérêt qu'ils ont accordés à mon travail.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à mon amie Rahida Zoghbi et à sa famille.

Je dédie ce mémoire à ma famille avec une pensée toute particulière à mon défunt père, ainsi qu'à mon grand ami Haboub Abdelkader décédé malheureusement avant l'aboutissement de ce mémoire.

Etude Géométrique de certains Systèmes Dynamiques Dynamique Symbolique et Théorie Ergodique

Résumé

Ce mémoire illustre quelques concepts qui permettent l'étude des systèmes dynamiques qui présentent une tendance au chaos selon deux approches ; topologique et probabiliste. On s'est basé sur un modèle

hyperbolique, la dynamique étant dans ce cas **chaotique**, même en basse dimension. On a considéré principalement les **automorphismes linéaires hyperboliques du tore**, puisque, sur le tore, les différentes structures interfèrent de façon compatible. Le codage de tels systèmes est rendu possible par l'existence des **partitions de Markov**.

Mots-clés : Systèmes dynamiques; chaos; théorie ergodique; dynamique symbolique; codage du tore.

Table des matières

Liste des figures	vi
Introduction générale	1
1 Préliminaires	4
1.1 Systèmes dynamiques topologiques.	4
1.2 Propriétés topologiques des orbites	7
1.2.1 Orbite periodique	7
1.2.2 Orbite récurrente	8
1.2.3 Transitivité et Minimalité	9
1.2.4 Mélange topologique	10
1.3 Chaos	11
1.4 Conjugaison et semi-conjugaison topologiques.	14
2 Systèmes hyperboliques	16
2.1 Automorphismes linéaires hyperboliques de \mathbb{R}^k	16
2.2 Automorphismes linéaires hyperboliques du tore \mathbf{T}^k	18
2.2.1 Propriétés topologiques	21
2.3 Ensemble hyperbolique	22
2.3.1 Exemple du fer à cheval	23
2.3.2 Fer à cheval dans \mathbb{R}^n	30
2.4 Difféomorphisme d'Anosov	32
2.4.1 Cas linéaire	32
2.4.2 Classification	34
2.5 Dynamique hyperbolique	35
2.5.1 Décomposition spectrale	35

2.6	Variétés stables et variétés instables.	38
2.6.1	Existence de variétés locales	38
2.6.2	Existence de fers à cheval	42
2.7	Partition de Markov	42
2.7.1	Existence de partition de Markov	48
3	Dynamique symbolique	49
3.1	Systèmes symboliques	49
3.1.1	Ensemble des suites	49
3.1.2	Structure topologique	49
3.1.3	Application Shift ou décalage	51
3.2	Sous-shift de type fini	52
3.3	Propriétés topologiques	54
3.3.1	Orbite périodique	54
3.3.2	Transitivité-mélange	54
3.4	Représentation symbolique	56
3.4.1	Partition de Markov pour les Anosov linéaire du tore	57
4	Systèmes dynamiques et théorie ergodique	61
4.1	Espaces mesurés et mesures	61
4.1.1	Application mesurable	63
4.1.2	Intégrabilité des applications mesurables	64
4.2	Mesure invariante	65
4.2.1	Application préservant la mesure	65
4.2.2	Existence de mesure invariante	66
4.3	Systèmes dynamiques mesurés.	66
4.4	Récurrence et Ergodicité.	68
4.4.1	Existence de mesure ergodique	70
4.5	Caractérisation de l'ergodicité	71
4.6	Théorèmes ergodiques	72
4.7	Mélange	77
4.8	Rigidité	78
4.9	Ergodicité des Anosov linéaire du tore.	78
4.10	Ergodicité du sous-shift	79
4.10.1	Mesure de Markov	79

4.11	Equivalence mesurable	80
5	Entropie	81
5.1	Entropie d'une partion mesurable	81
5.1.1	Entropie d'une mesure invariante	82
5.2	Entropie topologique	83
5.2.1	Entropie d'un recouvrement ouvert.	83
5.2.2	Entropie topologique	83
5.2.3	Propriétés de l'entropie topologique	83
5.3	Principe variationnel	84
5.4	Application et exemples	84
5.4.1	Entropie des systèmes symboliques	84
5.4.2	Entropie des automorphismes hyperboliques du tore	85
 Conclusion et perspectives		 87
 Bibliographie		 88

Liste des Figures

1.3.1 de haut en bas: régime stationnaire, périodique.	13
1.3.2 de haut en bas: quasipériodique, chaotique.	13
2.3.1 1 ^{ère} itération	24
2.3.2 3 ^{ème} itération	26
2.3.3 3 ^{ème} itération horizontale	26
2.3.4 2 ^{ème} et 3 ^{ème} itération	27
2.3.5 fer à cheval de Smale	31
2.6.1 variétés locales en dimension 2	39
2.6.2 variétés locales en dimension 3	39
2.7.1 feuille stable et instable	43
2.7.2 configuration de partition de Markov possible	44
2.7.3 configuration de partition de Markov impossible	44
2.7.4 extraite de [1]	45
2.7.5 un autre domaine fondamental de \mathbb{T}^2	45
2.7.6 Préimages de S_0 et S_1	46
2.7.7 Partition de $S_0 \cup S_1$ dans \mathbb{T}^2	47
2.7.8 Image de la partition dans \mathbb{T}^2	47
3.4.1 le graphe Γ_A	57
3.4.2 sous-rectangles stables et instables	59

Introduction générale

A la fin du 19^e siècle, *Henri Poincaré* a montré les limites des méthodes **analytiques** de certaines équations différentielles (problème des trois corps). Il développe alors une approche dite **qualitative**, qui privilégie une compréhension globale de toutes les solutions du système, sans connaître leur forme explicite en s'appuyant sur des propriétés **géométriques** et **topologiques**. Ce changement de point de vue a marqué la naissance des systèmes dynamiques en tant que branche mathématique.

On rappelle qu'un système dynamique est la donnée d'un ensemble X (*muni d'une structure topologique, algébrique, de variété ou d'espace mesuré*), appelé "espace des phases", défini comme étant l'ensemble de tous les états possibles du système, et d'une dynamique d'évolution qui décrit la **variation temporelle** de l'**état** du système, représentée par un semi-groupe de transformations $\{f^t\}_{t \in G}$ qui préservent la structure de X , G étant le groupe additif \mathbb{R} ou \mathbb{Z} . Pour $x \in X$, l'ensemble $\{f^t(x), t \in G\}$ est appelé "trajectoire" ou "orbite" de x . " $f^t(x)$ désigne l'état de x à l'instant t avec $f^0(x) = x$, l'état initial".

Comprendre la dynamique d'un système revient à étudier le comportement asymptotique des trajectoires. L'intérêt est donc porté sur leur caractérisation (périodicité, récurrence, quantités invariantes, etc...). Des questions se posent alors sur la possibilité de décrire ces trajectoires et comment en mesurer la complexité. C'est dans ce cadre que s'inscrit donc ce présent mémoire.

H.Poincaré énonce un théorème en 1890 (*théorème de récurrence de Poincaré*), dans son étude sur la stabilité des trajectoires dans le "*problème restreint des trois corps et les équations de la dynamique*", qui établit le fait qu'un système repasse une infinité de fois à proximité de sa position d'origine (état initial).

Poincaré constate alors que sous certaines conditions (*volume invariant par exemple, pour des systèmes mécaniques*), il est beaucoup plus *probable* qu'un système retrouve son état d'origine qu'il ne s'en éloigne, les exceptions n'étant pas *exclues* mais plutôt *négligeables*, ce que Poincaré appelle «la stabilité au sens de Poisson». Cette propriété de récurrence produit un comportement topologique complexe de la dynamique. *Lorsque les systèmes présentent une telle complexité on parle alors de **Chaos**.*

Pour exhiber les comportements chaotiques de certains systèmes dynamiques, une **représentation symbolique** du système (*ou codage*) est parfois nécessaire. Cette approche envisagée par *Hadamard* en 1898 revient à "associer" à un système dynamique une situation codée. La technique, développée entre autres par *Hedlund et Morse* (1920 – 1930), appelée **dynamique symbolique**, consiste en l'étude d'une classe spécifique de systèmes dynamiques topologiques, généralement pour un espace métrique compact, qui peuvent être **semi-conjugués** ou **conjugués** à un sous-ensemble invariant de l'espace des suites sur lequel agit une application appelée **shift** (décallage). L'idée est de trouver un ensemble invariant pour cette dynamique, le décomposer en cellules et traduire le passage d'une orbite dans une cellule par un nombre. La suite de nombres ainsi obtenue s'appelle "code" de l'orbite. **L'exemple du fer à cheval de Smale est une illustration très intéressante de cette technique.**

L'introduction de la théorie de la mesure par *Lebesgue* a permis d'élargir le domaine d'étude de certains systèmes dynamiques, aux propriétés «*probabilistes et statistiques*» des trajectoires. L'intérêt est alors porté aux moyennes des fonctions plutôt qu'à leurs valeurs ponctuelles. A partir de 1930 *Birkhoff, Von Neumann et Kolmogorov* s'inspirent de concepts empruntés à la mécanique statistique (thermodynamique) et développent un formalisme mathématique utile à l'étude du comportement asymptotique de certaines classes de systèmes dynamiques, connu sous le nom de **théorie ergodique**.

Effectivement, c'est dans le cadre de l'étude de la théorie cinétique des gaz, que *Boltzmann* (1871 – 1885) formule l'hypothèse suivante: "*étudier le comportement d'une molécule de gaz au cours du temps, revient au même qu'étudier statistiquement la configuration de toutes les molécules du gaz à un instant donné*". D'où la notion de **moyenne temporelle** égale à la **moyenne spa-**

tiale qui porte le nom d'**hypothèse ergodique**, «*ergodique*» étant un mot d'éthymologie grecque signifiant «*chemin d'énergie*». Les recherches théoriques pour justifier une telle hypothèse ont donné naissance à cette théorie. Le **théorème ergodique de Birkhoff** est l'un des premiers résultats qui affirme cette hypothèse.

Puisqu'il s'agit de l'étude des propriétés statistiques des systèmes dynamiques (notion de moyenne), la théorie ergodique a donc pour objet l'étude des **espaces mesurés** sur lesquels agissent des **transformations préservant la mesure**, qui vérifient justement la propriété de récurrence.

Le concept d'**entropie**, adapté de celui de *Clausius et Boltzmann* dans le cadre de la thermodynamique a permis aussi de mesurer la complexité d'une dynamique (*où les codes*).

En effet *Kolmogorov* en 1958, puis *Sinai* en 1959 introduisent l'idée d'entropie associée à une partition de l'espace puis d'entropie d'une mesure invariante, fournissant alors un invariant dans l'étude des systèmes dynamiques mesurés. En 1965, *Adler, Konheim et Mac Andrew*, introduisent une nouvelle notion d'entropie, l'entropie topologique, qui modélise l'entropie d'une mesure invariante.

Pour présenter ces notions, on se basera sur un modèle **hyperbolique**, du fait que l'hyperbolicité est un phénomène qui relate une dynamique **chaotique**, même en basse dimension (transitivité, orbites périodiques denses, sensibilités aux conditions initiales, récurrences,...). On considérera principalement les **automorphismes linéaires hyperboliques du tore**, qui sont une classe de systèmes dynamiques appelés "**difféomorphismes Anosov**" découverte par *Dimitri Anosov* dans les années 60. (On fera remarquer que sur le tore les différentes structures interfèrent de façon compatible). Le codage de tels systèmes est rendu possible par l'existence des **partitions de Markov**. *Rufus Bowen* a montré l'existence de telles partitions pour les systèmes dont la dynamique est hyperbolique.

1

Préliminaires

Ce chapitre concerne un développement, dans un cadre topologique, de concepts essentiels à l'étude des systèmes dynamiques. On commence donc par rappeler quelques notions et propriétés caractéristiques. *Comme la plupart de ces notions sont plus ou moins adaptables au cas $G = \mathbb{R}$ (temps continu), on se limitera au cas $G = \mathbb{Z}$ (temps discret).* Il s'agit dans ce cas d'étudier le comportement asymptotique des itérés d'une seule transformation. Le comportement parfois complexe a conduit à la recherche de la meilleure définition de certaines notions: l'ensemble des points périodiques, récurrents, non errants, qui en général ne coïncident pas.

1.1 Systèmes dynamiques topologiques.

Définition 1.1.1 *le couple (X, f) est un système dynamique topologique si X est un espace topologique et $f : X \rightarrow X$ une application continue. Si f est un homéomorphisme, le système (X, f) est dit inversible.*

*L'ensemble $\{f^n(x)/n \in \mathbb{N}\}$ est appelé **orbite positive** de $x \in X$ (où futur de x).*

Si f est inversible, l'orbite de x est l'ensemble $\{f^n(x)/n \in \mathbb{Z}\}$. Dans ce cas, l'ensemble $\{f^{-n}(x)/n \in \mathbb{N}\}$ désigne l'orbite négative de x (où passé de x) avec $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-fois}}$.

Remarque 1.1.1 *Si X est une **variété différentiable** compacte et $f : X \rightarrow X$ un **difféomorphisme** (i.e une bijection telle que sa différentielle et la différentielle de son inverse soient continues), (X, f) est dit **système dynamique différentiable**.*

Exemple 1.1.1 *Translations du tore*

◆ L'espace des phases considéré est le tore à k -dimensions.

Structure algébrique

Pour $k \geq 1$, le tore \mathbf{T}^k de dimension k est le groupe quotient du groupe $(\mathbb{R}^k, +)$ par le sous-groupe $(\mathbb{Z}^k, +)$,

on note $\mathbf{T}^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$, c'est en fait l'ensemble des classes pour la relation d'équivalence suivante :

$$x, y \in \mathbb{R}^k, x \sim y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}^k; x - y = z$$

Soit $\pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ la projection canonique, Un point $x \in \mathbf{T}^k$ est représenté par:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \bmod (1) = \pi(\tilde{x}) \quad \text{avec } \tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$$

Le tore \mathbf{T}^k muni de l'addition définie par $\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y)$ est un groupe abélien, avec $\pi(0)$ comme élément neutre et $\pi(-x)$ comme inverse de $\pi(x)$.

Structure topologique et de variété

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^k , \mathbf{T}^k est alors muni de la topologie quotient correspondante induite par la distance d définie par:

$$d(x, y) = \inf \{ \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\mathbb{R}^k}; x = \pi(\tilde{x}), y = \pi(\tilde{y}) \}$$

et donc

U est un ouvert de \mathbf{T}^k si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^k

L'ensemble $\wp = \{(U, \varphi); U = \pi(V)\}$, où V est un ouvert de \mathbb{R}^k tel que $\pi|_V$ est injective et $\varphi = (\pi|_V)^{-1}$, constitue un atlas de \mathbf{T}^k .

Proposition 1.1.1 π est continue et ouverte pour la topologie de \mathbf{T}^k .

Preuve. .

-Soient $x, y \in \mathbb{R}^k, d(\pi(x), \pi(y)) = \inf \{ \|x' - y'\|; \pi(x') = \pi(x), \pi(y') = \pi(y) \}$,

donc $d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y})) \leq \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\mathbb{R}^k}$. π est alors 1-lipschitzienne donc continue.

- π est ouverte.

En effet, soient U un ouvert non vide de \mathbb{R}^k et $x \in \pi(U)$, il existe $\tilde{x} \in U$ tel que $x = \pi(\tilde{x})$.

D'où l'existence de $r > 0$ tel que $B^\circ(\tilde{x}, r) \subset U$.

Montrons que $B^\circ(\pi(\tilde{x}), r) \subset \pi(U)$

Soit $y \in \mathbf{T}^k; y \in B^\circ(\pi(\tilde{x}), r)$ alors: $d(\pi(\tilde{x}), y) < r$.

Or $\exists \tilde{y} \in \mathbb{R}^k$ tel que $\pi(\tilde{y}) = y$ et donc, $\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\mathbb{R}^k} < r$.

Alors $y \in B^\circ(\tilde{x}, r) \subset U$, i.e $\tilde{y} \in U$, donc $\pi(y) = y \in \pi(U)$. ■

Proposition 1.1.2 \mathbf{T}^k est compact.

Preuve. On a $\mathbf{T}^k = \pi([0, 1]^k)$, Le résultat est immédiat puisque $[0, 1]^k$ est un compact de \mathbb{R}^k et π ouverte. ■

◆ **La dynamique** en notation additive, pour $\alpha \in \mathbf{T}^k$, est l'application:

$$T_\alpha : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$$

$$x \mapsto T_\alpha(x) = (\tilde{x}_1 + \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{x}_k + \tilde{\alpha}_k) \bmod (1)$$

pour $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k), \tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k) \in \mathbb{R}^k$, tels que $\alpha = \pi(\tilde{\alpha})$ et $x = \pi(\tilde{x})$.

T_α est appelée **translation du tore**.

Définition 1.1.2 (voir [11]) On appelle *domaine fondamental* pour l'action de \mathbb{Z}^k sur \mathbb{R}^k un ensemble fermé D tel que:

1. La fermeture de l'intérieur de D est D lui même.
2. Toute \mathbb{Z}^k -orbite (classe d'équivalence) contient au moins un membre dans D .
3. Aucun point de l'intérieur de D (i.e à l'exception des points du bord), ne se trouve dans la même classe qu'un autre.

En d'autres termes un domaine fondamental pour l'action de \mathbb{Z}^k sur \mathbb{R}^k , est l'ensemble des représentants de classes d'équivalences.

Remarque 1.1.2 le cube $D = [0, 1]^k$ est un domaine fondamental de \mathbf{T}^k , (on dit aussi *région fondamentale*).

◆ T_α est continue, car lipschitzienne.

En effet pour $x, y \in \mathbf{T}^k$, on a $x = \pi(\tilde{x}), y = \pi(\tilde{y})$ et $\alpha = \pi(\tilde{\alpha})$ où $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^k$.

On a alors :

$$\begin{aligned} d(T_\alpha(x), T_\alpha(y)) \bmod(1) &= d((\tilde{x}_1 + \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{x}_k + \tilde{\alpha}_k), (\tilde{y}_1 + \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{y}_k + \tilde{\alpha}_k)) \bmod(1) \\ &\leq \|(\tilde{x}_1 + \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{x}_k + \tilde{\alpha}_k) - (\tilde{y}_1 + \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{y}_k + \tilde{\alpha}_k)\| \\ &\leq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \end{aligned}$$

Remarquons que $\alpha^{-1} = \pi(-\tilde{\alpha}) = (-\tilde{\alpha}_1, -\tilde{\alpha}_2, \dots, -\tilde{\alpha}_k) \bmod(1)$, il est alors clair que

$$T_\alpha(T_{\alpha^{-1}}(x)) = x, \text{ donc } T_\alpha^{-1} = T_{\alpha^{-1}}.$$

On conclut que (\mathbf{T}^k, T_α) est un système dynamique topologique inversible.

1.2 Propriétés topologiques des orbites

1.2.1 Orbite periodique

Définition 1.2.1 soit (X, f) un système dynamique, un point x est dit **périodique** de période n , si $f^n(x) = x$ (n étant le plus petit entier vérifiant cela). $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est l'orbite **périodique** de $x \in X$.

Notation 1.2.1 $Per(f)$ est l'ensemble des points périodiques pour f .

Définition 1.2.2 Soit (X, f) un système dynamique topologique inversible. Un point x est dit **non errant**, si pour tout voisinage U de x , il existe $n > 0$, $U \cap f^n(U) \neq \emptyset$.

Notation 1.2.2 on note $\Omega(f)$ l'ensemble des points non errants.

Définition 1.2.3 Soit (X, f) un système dynamique topologique. Une partie A de X est dite invariante par f ou f -invariante, si $f^{-1}(A) = A$. (ou $f(A) = A$).

Proposition 1.2.1 Etant donné un système dynamique topologique (X, f) on a :

1. $Per(f) \subset \Omega(f)$
2. $\Omega(f)$ est un ensemble fermé, invariant par f .

Preuve. .

1- soit $x \in \text{Per}(f)$ alors $\exists n \in \mathbb{N}; f^n(x) = x$, et soit U un voisinage de x .

Alors $U \cap f^n(U) \neq \emptyset$ car $x \in U \cap f^n(U)$. D'où $x \in \Omega(f)$.

2- Soit $x \in \mathbb{C}\Omega(f)$ alors x est un point errant, i.e, il existe un voisinage U de x ,

tel que: $\forall n > 0, U \cap f^n(U) = \emptyset$, donc il existe V ouvert tel que :,

$x \in V \subset U$.

Alors tous les points de V sont non errants.

D'où $V \subset \mathbb{C}\Omega(f)$ i.e $\mathbb{C}\Omega(f)$ est ouvert.

3-On a: $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$, puisque si $y \in \Omega(f)$ et V un ouvert contenant $f(y)$, alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert contenant y .

Il existe alors $n_0 > 0$ tel que $f^{-1}(V) \cap f^{n_0}(f^{-1}(V)) \neq \emptyset$.

Cela implique que $V \cap f^{n_0}(V) \neq \emptyset$, d'où $f(y) \in \Omega(f)$.

Cela signifie que l'image d'un point non errant, est un point non errant. ■

Remarque 1.2.1 *L'ensemble $\Omega(f)$ joue un grand rôle dans le codage des systèmes hyperboliques. En effet Smale par son théorème de décomposition spectrale, a montré que l'ensemble des points non errants qui est alors hyperbolique, se décompose en union finie de sous-ensembles fermés, invariants par la dynamique, appelés pièces basiques.*

Il se trouve que dans le cas de systèmes Anosov, l'ensemble des points périodiques est dense dans l'ensemble des points non errants, ce que nous verrons plus loin.

1.2.2 Orbite récurrente

Définition 1.2.4 *Etant donné un système dynamique topologique (X, f) , un point x de X est dit **récurrent** pour f si pour tout voisinage V de x , il existe un entier n tel que $f^n(x) \in V$. L'orbite de x est dite récurrente.*

Notation 1.2.3 *On note $\text{Rec}(f)$ l'ensemble des points récurrents.*

Théorème 1.2.1 *Soit (X, f) un système dynamique, avec X un espace métrique. Un point x de X est dit récurrent pour f si et seulement si, il existe une suite d'entiers n_i tendant vers l'infini tels que $f^{n_i}(x)$ tend vers x .*

Corollaire 1.2.1 *Soit (X, f) un système dynamique, avec X un espace métrique compact alors $\text{Rec}(f) \neq \emptyset$.*

Remarque 1.2.2 *il est clair que* $Per(f) \subset Rec(f) \subset \Omega(f)$.

1.2.3 Transitivité et Minimalité

Définition 1.2.5 *Un système dynamique topologique* (X, f) *est dit* **topologiquement transitif** *s'il existe une orbite dense dans* X .

$$i.e \text{ il existe } x \in X \text{ tel que } \overline{\{f^n(x)/n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}} = X$$

Proposition 1.2.2 *Soit* $f : X \rightarrow X$ *continue, avec* X *un espace métrique compact. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. f est topologiquement transitif.
2. Si U est un ouvert de X tel que: $f(U) = U$ alors $\bar{U} = X$ ou $U = \emptyset$.
3. Pour tous U, V ouverts non vides de X ,

$$\exists n \in \mathbb{N}; f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Preuve. voir [3] ■

Définition 1.2.6 *Un système dynamique topologique* (X, f) *est dit* **minimal** *si pour tout* $x \in X$, $\{f^n(x)/n \in \mathbb{N}\}$ (ou $\{f^n(x)/n \in \mathbb{Z}\}$ si f est un homéomorphisme) *est dense dans* X .

Théorème 1.2.2 *Un système dynamique topologique* (X, f) *est minimal si et seulement si les seules parties*

fermées f -*invariantes de* X , *sont* X *ou* \emptyset .

Exemple 1.2.1 ***Translation du tore** \mathbf{T}^k .

$$T_\alpha : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$$

$$x \mapsto T_\alpha(x) = (\tilde{x}_1 + \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{x}_k + \tilde{\alpha}_k) \bmod (1)$$

La dynamique d'une translation du tore, dépend de son vecteur de translation.

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbf{T}^k, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{k\text{-fois}}$$

$(1, \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ *sont dits rationnellement indépendants, si pour tout*

$$k\text{-uplets } (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n - \{0\}, \quad \sum_{i=1}^k k_i \alpha_i \notin \mathbb{Z}.$$

D'où le résultat suivant:

Proposition 1.2.3 $T_\alpha : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est minimale si et seulement si $(1, \alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_k)$ sont rationnellement indépendants.

Preuve. voir [1] ■

1.2.4 Mélange topologique

Définition 1.2.7 Un système dynamique topologique (X, f) est dit **topologiquement mélangeant** si:

$$\forall U, V \subset X, \text{ ouverts non vides, } \exists N; \forall n \geq N \text{ on a } f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Exemple 1.2.2 Considérons un groupe topologique G (un groupe muni d'une topologie telle que les deux applications composition:

$$\begin{array}{ll} G \times G \rightarrow G & \text{et passage à l'inverse} \quad G \rightarrow G \\ (x, y) \mapsto xy & x \mapsto x^{-1} \end{array}$$

soient continues), notons e son élément neutre.

Soient $A, B : G \rightarrow G$ deux homomorphismes de groupe continus tels que $A \circ B = Id_G$, et

$$H_A = \left\{ x \in G / \underset{n \rightarrow \infty}{A^n x} \rightarrow e \right\} \text{ et } H_B = \left\{ x \in G / \underset{n \rightarrow \infty}{B^n x} \rightarrow e \right\}$$

sont deux ensembles denses dans G .

Proposition 1.2.4 Le système (A, G) est topologiquement mélangeant.

Preuve. .

En effet soient U, V deux ouverts non vides de G , on choisit $x \in U \cap H_A$ et $y \in V \cap H_B$.

On a donc

$$\underset{n \rightarrow \infty}{(A^n x)y} \rightarrow y \text{ et } \underset{n \rightarrow \infty}{x(B^n y)} \rightarrow x$$

Alors $\exists N ; \forall n \geq N, x(B^n y) \in U$ et $(A^n x)y \in V$

On a, $A^n B^n = A^{n-1} Id_G B^{n-1} = \dots = A \circ B = Id_G$.

$$A^n(xB^n y) \in A^n(U)$$

or $A^n(xB^n y) = (A^n x)(A^n B^n y) = (A^n x)y$ car A^n est un homomorphisme de groupe.

et $(A^n x)y \in V$

D'où l'existence d'un entier N tel que $A^N(U) \cap V \neq \emptyset$. ■

1- Il est évident que topologiquement mélangeant \Rightarrow topologiquement transitif.

2- La réciproque est fautive, en effet les translations irrationnelles du tore sont topologiquement transitives, mais

non topologiquement mélangeantes.

Exemple 1.2.3 *Considérons le système $T_\alpha : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ définie par $T_\alpha(x) = (x + \alpha) \bmod (1)$, pour α irrationnel. Toutes les orbites sont denses.*

Soient $x, y, z \in \mathbf{T}^k$, posons $\varepsilon = \frac{1}{5}d(y, z)$ et supposons T_α topologiquement mélangeante, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall n \geq N, T_\alpha^n(B(x, \varepsilon)) \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset, \quad \text{et} \quad T_\alpha^n(B(x, \varepsilon)) \cap B(z, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

d'où l'existence de

$$x_1 \in T_\alpha^n(B(y, \varepsilon)) \cap B(x, \varepsilon) \quad \text{et} \quad x_2 \in T_\alpha^n(B(z, \varepsilon)) \cap B(x, \varepsilon)$$

Cela entraîne l'existence de $t_1 \in B(y, \varepsilon)$ et $t_2 \in B(z, \varepsilon)$, tels que:

$$x_1 = T_\alpha^n(t_1) \quad \text{et} \quad x_2 = T_\alpha^n(t_2).$$

$$\text{Or} \quad d(x_1, x_2) = d(T_\alpha^n(t_1), T_\alpha^n(t_2)) = d(t_1, t_2)$$

Comme $x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon)$, alors $d(x_1, x_2) \leq 2\varepsilon$.

Par conséquent : $5\varepsilon = d(y, z) \leq d(y, t_1) + d(t_1, t_2) + d(t_2, z) \leq 4\varepsilon$, ce qui est absurde.

Donc T_α n'est pas topologiquement mélangeante.

1.3 Chaos

Définition 1.3.1 *Un système dynamique topologique (X, f) où X est métrique, est **sensible aux conditions initiales** si:*

$$\exists \varepsilon > 0; \forall x \in X; \forall \delta > 0, \exists y \in X; d(x, y) \leq \delta, \exists n \geq 0; d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$$

En d'autres termes, deux états initiaux proches ou éloignés, ont des trajectoires qui s'éloignent l'une de l'autre après un certain temps.

Définition 1.3.2 *Un système dynamique topologique (X, f) où X est métrique est dit **expansif** s'il satisfait à la propriété suivante:*

$$\exists \varepsilon > 0; \forall x, y \in X, x \neq y \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$$

Si f est inversible le sup est pris sur $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.3.1 *Un système expansif est donc sensible aux conditions initiales.*

Définition 1.3.3 *Un système dynamique topologique (X, f) est dit chaotique si :*

1. (X, f) est transitif.
2. $\overline{Per(f)} = X$.
3. (X, f) est sensible aux conditions initiales.

Remarque 1.3.2 1/- *On peut alors dire qu'un système est chaotique lorsqu'il disperse des états initialement proches .*

2/- *la notion de chaos est introduite dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques discrets par **Li** et **Yorke** en 1975. Elle recouvre l'idée d'imprédictibilité des comportements observés. suite à des erreurs de mesures.*

3/- *Au sens de Devaney 1989 le chaos est une propriété uniforme du système qui doit vérifier les propriétés énoncées dans la définition précédente.*

4/- *on a $\overline{Per(f)} = X$ qui implique la transitivité de X , ce qui réduit la définition aux propriétés (2) et (3).*

Définition 1.3.4 *Soit (X, f) un système dynamique topologique inversible; on dit qu'un ensemble $\Lambda \subset X$ est un attracteur s'il existe un ouvert U contenant Λ tel que:*

$$f(U) \subset U \quad \text{et} \quad \Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$$

L'ensemble $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$ est appelé bassin d'attraction de Λ .

Remarque 1.3.3 *Cet ensemble est en général le lieu d'une dynamique chaotique.*

Représentation Géométrique de comportements dynamiques à gauche la série temporelle, à droite la trajectoire du point représentatif dans l'espace des phases.

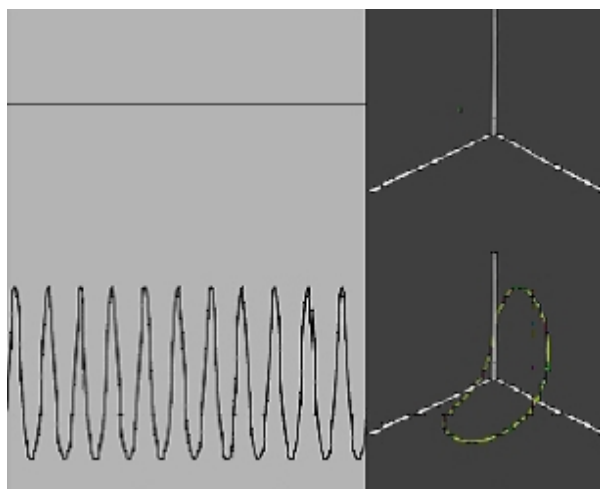


Figure 1.3.1 : de haut en bas: régime stationnaire, périodique.

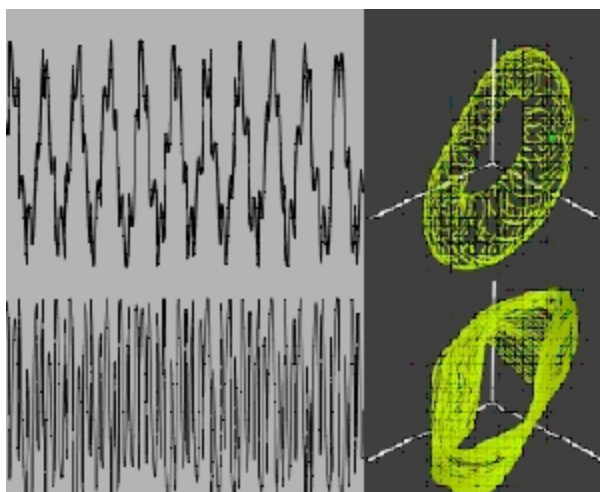


Figure 1.3.2 : de haut en bas: quasipériodique, chaotique.

1.4 Conjugaison et semi-conjugaison topologiques.

Définition 1.4.1 Deux systèmes dynamiques topologiques (X, f) et (Y, g) sont topologiquement **conjugués**, s'il existe un **homéomorphisme** $\varphi : X \rightarrow Y$ tel que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Si une telle application $\varphi : X \rightarrow Y$ est seulement **surjective continue** on parle de **semi-conjugaison**.

Remarque 1.4.1 Dans le cas de systèmes différentiables, si φ est un difféomorphisme, on parle alors d'**équivalence** (ou de conjugaison différentiable).

Proposition 1.4.1 Deux systèmes (X, f) et (Y, g) topologiquement conjugués ou semi-conjugués ont même dynamique (topologique).

Preuve. .

S'il existe un **homéomorphisme** $\varphi : X \rightarrow Y$ tel que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$, par récurrence sur n on a: $\varphi \circ f^n = g^n \circ \varphi$.

Donc les orbites de f sont envoyées par φ sur des orbites de g .

Soit $x \in X$, un point périodique de période n pour f on a

$$\{\varphi(x), \varphi(f(x)), \varphi(f^2(x)), \dots, \varphi(f^{n-1}(x))\} = \{\varphi(x), g(\varphi(x)), \dots, g^{n-1}(\varphi(x))\}$$

et

$$g^n(\varphi(x)) = \varphi(f^n(x)) = \varphi(x)$$

d'où $\varphi(x)$ est un point périodique de période n de g .

φ envoie donc une orbite périodique de f sur une orbite périodique de g .

Il en est de même pour une orbite dense et pour toutes les autres propriétés. (voir [3]) ■

Le système dynamique $m_p : S^1 \rightarrow S^1$

$$z \mapsto z^p$$

et le système dynamique $\sigma_p : \Omega_p^+ \rightarrow \Omega_p^+$

$$\omega \mapsto \sigma_p(\omega) \text{ avec } (\sigma_p(\omega))_n = \omega_{n+1}$$

où $\Omega_p^+ = \{0, 1, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie induite par la métrique

$$d(\omega, \nu) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\omega_n - \nu_n|}{p^n}, \quad \text{sont semi-conjugués.}$$

Notons $\varphi_p : \Omega_p^+ \rightarrow [0, 1]$ l'application définie par: $\varphi_p(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\omega_n - 1}{p^{n+1}}$.

φ_p est surjective puisque pour $x \in [0, 1]$ $x = 0, x_0 x_1 x_2 \dots x_n \dots$,

Exemple 1.4.1 *il existe alors $(\omega_n)_n \in \Omega_p^+$ tel que $\omega_n = x_n + 1$ et donc*

$$\varphi_p(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\omega_n - 1}{p^{n+1}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{p^{n+1}} \quad \text{qui est le développement en base } p \text{ de } x$$

◆ φ_p est continue car lipschitzienne; en effet soient $\omega, v \in \Omega_p^+$ on a

$$\begin{aligned} |\varphi_p(\omega) - \varphi_p(v)| &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\omega_n - 1}{p^{n+1}} - \frac{v_n - 1}{p^{n+1}} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\omega_n - v_n|}{p^{n+1}} \\ \text{et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\omega_n - v_n|}{p^{n+1}} &= \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\omega_n - v_n|}{p^n} = \frac{1}{p} d(\omega, v) \end{aligned}$$

On définit alors $\psi_p : \Omega_p^+ \rightarrow S^1$ par: $\psi_p(\omega) = e^{2i\pi\varphi_p(\omega)}$.

Elle est surjective et continue, on a alors pour $\omega \in \Omega_p^+$:

$$\begin{aligned} \psi_p \circ \sigma_p(\omega) &= e^{2i\pi\varphi_p(\sigma_p(\omega))} = e^{2i\pi \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\omega_{n+1} - 1}{p^{n+1}}} = e^{2i\pi \sum_{n \in \mathbb{N}} p \frac{\omega_{n+1} - 1}{p^{n+2}}} = e^{2i\pi p \varphi_p(\omega)} \\ &= e^{2i\pi p \varphi_p(\omega)} = (e^{2i\pi\varphi_p(\omega)})^p = m_p \circ \psi_p(\omega) \end{aligned}$$

ψ_p n'est pas injective. Pour le voir, il suffit de considérer $\omega, \omega' \in \Omega_p^+$,

$$\text{avec } \omega_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \omega'_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{donc } \omega \neq \omega'$$

$$\text{Par contre } \psi_p(\omega) = \psi_p(\omega') \quad \text{car } \varphi_p(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\omega_n - 1}{p^{n+1}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{-1}{p^{n+1}} = \frac{-1}{p}$$

$$\text{et } \varphi_p(\omega') = \frac{-1}{p}$$

Définition 1.4.2 *Considérons (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques; on dit que (X, f) est une **extension** de (Y, g)*

*et que (Y, g) est un **facteur** de (X, f) , s'il existe une application $\pi : X \rightarrow Y$ surjective, continue telle que $g \circ \pi = \pi \circ f$.*

(π est appelée application facteur).

1. Dans certains cas, un difféomorphisme est localement topologiquement conjugué, au voisinage d'un point fixe, à sa différentielle. (voir [1] théorème de Hartmann-Grobmann).

2. Une façon d'obtenir un système conjugué à un système donné, est de le coder. Alors à quelle condition et comment?.

C'est l'objet du chapitre (3).

2

Systèmes hyperboliques

Ce sont des systèmes dynamiques qui ont un comportement riche et complexe. Ils présentent une forte sensibilité aux conditions initiales, et des orbites périodiques partout denses, dont le nombre croît de façon exponentielle. Les modèles linéaires "compactifiés" sont les plus connus.

2.1 Automorphismes linéaires hyperboliques de \mathbb{R}^k

Définition 2.1.1 Notons E l'espace vectoriel \mathbb{R}^k et $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^k . Soit $L : E \rightarrow E$ une bijection linéaire continue. L est dite hyperbolique si:

1. Il existe deux sous espaces E^s et E^u , fermés, L -invariants, *i.e* $L(E^s) = E^s$ et $L(E^u) = E^u$, tels que:

$$E = E^s \oplus E^u$$

2. Si on note $S = L|_{E^s}$ et $U = L|_{E^u}$, il existe $n \geq 1$ tel que:

$$\|S^n\| < 1 \quad \text{et} \quad \|U^{-n}\| < 1.$$

Proposition 2.1.1 Soit $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ une bijection linéaire continue. L est hyperbolique si et seulement si sa matrice représentative (dans la base canonique de \mathbb{R}^k) qu'on note aussi L , n'a pas de valeur propre de module égal à 1.

Preuve. .

\implies / Soit $n \geq 1$ tel que $\|S^n\| < 1$ et $\|U^{-n}\| < 1$.

Les valeurs propres (λ_s) de S et (λ_u) de U^{-1} sont aussi de modules inférieurs à 1, puisque si on considère par exemple $v_s \in E_s$ tel que: $S(v_s) = \lambda_s v_s$

On a alors:

$$\|S^n(v_s)\| = |\lambda_s|^n \|v_s\| \implies |\lambda_s|^n < 1 \implies |\lambda_s| < 1$$

Or on a par le *théorème de Jordan* que

$$E_s = \bigoplus_{\lambda_s} E_{\lambda_s} \text{ et } E_u = \bigoplus_{\lambda_u} E_{\lambda_u}$$

D'où le résultat. $E = E_s \oplus E_u$.

\Leftarrow / On a $E = \bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}$, λ valeur propre L dans $E = \mathbb{R}^k$ avec $E_{\lambda} = \ker(L - \lambda I)^{m_{\lambda}}$, m_{λ} multiplicité de λ .

et $L(E_{\lambda}) = E_{\lambda}$ (*théorème de Jordan*). On peut alors écrire \mathbb{R}^k sous la forme:

$$E = E_s \oplus E_u \text{ avec } E_s = \bigoplus_{|\lambda| < 1} E_{\lambda} \text{ et } E_u = \bigoplus_{|\lambda| > 1} E_{\lambda}$$

Les valeurs propres de $S = L|_{E_s}$ sont de modules strictement inférieurs à 1; il existe une base de E_s telle que la matrice de S soit de la forme:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \ddots & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & A_p \end{bmatrix} \text{ avec } A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdot & \ddots & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \lambda_i \end{bmatrix} \text{ bloc de Jordan}$$

$$\|S^n\| = \max_{v \in E_s} \|S^n(v)\| = |\lambda|^n \|v_{\lambda}\| \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n\| = 0$$

D'où l'existence de $n \geq 1$ tel que: $\|S^n\| < 1$.

Il en est de même pour U^{-1} . ■

Définition 2.1.2 Une norme est dite adaptée à L , si on a $\|S\| < 1$ et $\|U^{-1}\| < 1$ et si pour tous $x_s \in E_s$ et $x_u \in E_u$

On a:

$$\|x_s + x_u\| = \max(\|x_s\|, \|x_u\|)$$

On appelle constante d'hyperbolicité de L et on note

$$Ch(L) := \max(\|S\|, \|U^{-1}\|)$$

Lemme 2.1.1 Soit $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ hyperbolique, il existe une norme adaptée à L sur \mathbb{R}^k .

Preuve. .

Considérons $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^k , il existe $n \geq 1$; $\|S^n\| < 1$, $\|U^{-n}\| < 1$.

On pose

$$\|x_s + x_u\|_1 = \max(\|S^{n-1}(x_s)\|, \|U^{-n+1}(x_u)\|)$$

Il est clair que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur \mathbb{R}^k .

On a:

$$\|x_s\|_1 = \|S^{n-1}(x_s)\| \quad \text{et} \quad \|x_u\|_1 = \|U^{-n+1}(x_u)\|$$

Par conséquent,

$$\|x_s + x_u\|_1 = \max(\|x_s\|_1, \|x_u\|_1)$$

On a aussi : $\|S(x_s)\|_1 = \|S^n(x_s)\| \implies \|S\|_1 < 1$ et $\|U^{-1}(x_u)\|_1 = \|U^{-n}(x_u)\| \implies$

$\|U^{-1}\|_1 < 1$ ■

Proposition 2.1.2 Soit $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application linéaire hyperbolique. Alors:

1. Pour tout $v \in E^s$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} L^n(v) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} L^n(v) = \infty$.
(E^s est appelé aussi sous-espace contractant)
2. Pour tout $v \in E^u$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} L^n(v) = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} L^n(v) = 0$.
(E^s est appelé aussi sous-espace expansif).
3. Pour tout $v \in \mathbb{R}^k \setminus E^s \cup E^u$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} L^n(v) = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} L^n(v) = \infty$.

Preuve. .voir [1] ■

2.2 Automorphismes linéaires hyperboliques du tore \mathbf{T}^k

Définition 2.2.1 (Relèvements). Soit $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ une application continue, un relèvement de f est une application continue $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ telle que: $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$

Remarque 2.2.1 Deux relèvements d'une même application $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ diffèrent par un vecteur à composantes entières.

i.e \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 deux relèvements de f , alors $\exists z \in \mathbb{Z}^k; \tilde{f}_1 = z + \tilde{f}_2$

Définition 2.2.2 Soit $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ un endomorphisme continu tel que $L(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$.

On appelle endomorphisme linéaire relativement à L du tore, l'application, $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ définie par:

$$\pi \circ L = f_L \circ \pi.$$

L est alors un relèvement de f_L . On dit aussi que f_L est un endomorphisme induit par L .

Théorème 2.2.1 Soit $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ un endomorphisme linéaire, alors:

1. f_L est continu.
2. f_L est un homéomorphisme si et seulement si $\det L = \pm 1$.

Preuve. .

1/- L étant continue alors $\pi \circ L$ continue, donc $f_L \circ \pi$ continue.

Soit U un ouvert de \mathbf{T}^k alors $(\pi)^{-1}(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^k ,

donc $L^{-1}(\pi)^{-1}(U) = (\pi \circ L)^{-1}(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^k .

Alors $\pi \circ (f_L \circ \pi)^{-1}(U) = \pi \circ (\pi \circ L)^{-1}(U)$ est un ouvert de \mathbf{T}^k , or

$$\pi \circ (f_L \circ \pi)^{-1}(U) = f_L^{-1}(U)$$

2/- Si f_L est un homéomorphisme, alors f_L^{-1} est un homéomorphisme induit par L^{-1} .

En effet:

$$f_L \circ \pi = \pi \circ L \implies f_L^{-1} \circ \pi \circ L = \pi \implies f_L^{-1} \circ \pi = \pi \circ L^{-1}$$

et $L^{-1}(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$ car si $x \in L^{-1}(\mathbb{Z}^k)$ alors $L(x) \in \mathbb{Z}^k$ et $\pi(L(x)) = 0$

Donc

$$f_L(\pi(x)) = 0 \implies \pi(x) = 0 \implies x \in \mathbb{Z}^k$$

$L(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$ et $L^{-1}(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$ impliquent que L et L^{-1} sont à coefficients entiers.

Donc $\det L$ et $\det L^{-1}$ sont entiers.

Or

$$\det L = \frac{1}{\det L^{-1}}, \quad \text{d'où} \quad \det L \det L^{-1} = 1$$

Inversement:

si $\det L = \pm 1 \neq 0$ alors L^{-1} existe et est à coefficients entiers, i.e $L^{-1}(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$

L^{-1} est aussi continue, elle induit donc un homomorphisme $f_{L^{-1}}$.

Et on a:

$$\pi \circ L^{-1} = f_{L^{-1}} \circ \pi \implies \pi = f_{L^{-1}} \circ \pi \circ L = f_{L^{-1}} \circ f_L \circ \pi \implies f_{L^{-1}} \circ f_L = Id_{\mathbf{T}^k}$$

Donc $f_{L^{-1}} = f_L^{-1}$. ■

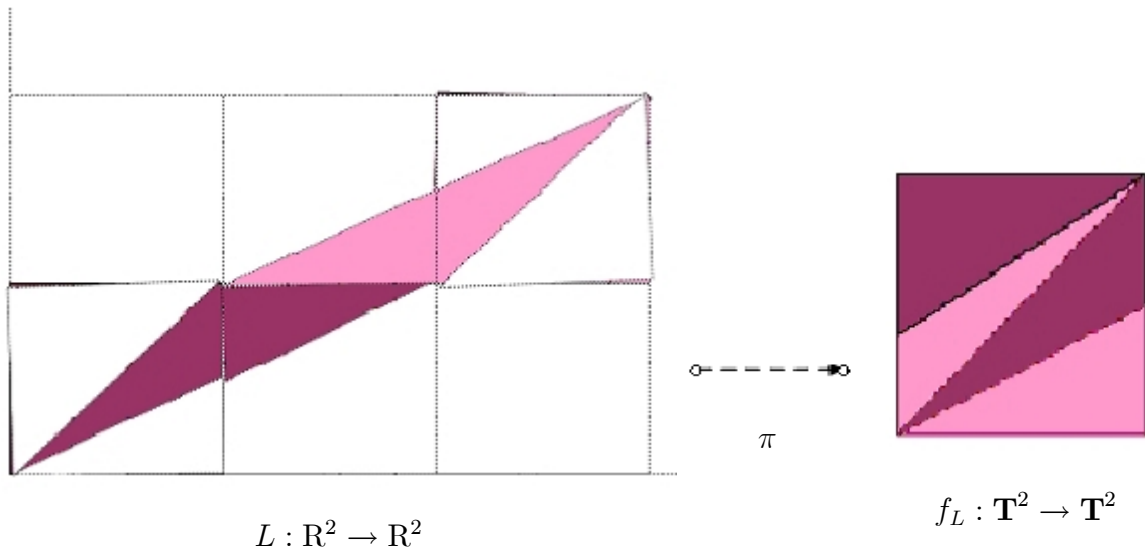
Définition 2.2.3 L'endomorphisme linéaire $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est appelé automorphisme linéaire du tore si f_L est un homéomorphisme.

De plus si L est hyperbolique, f_L est dit **automorphisme linéaire hyperbolique** du Tore.

Exemple 2.2.1 Considérons

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et la projection sur les classes, } \pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x + y, x + y) \quad (x, y) \mapsto \pi(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$$



Cette figure illustre comment l'application L induit un automorphisme linéaire du tore en observant comment les images par L des points de \mathbb{R}^2 , se projettent dans le domaine fondamental de \mathbf{T}^2 .

Remarquons comment est ce que le carré $[0, 1]^2$ se déforme par L en un parallélogramme et comment est ce qu'on récupère les points représenté en couleurs par l'action de π , dans ce carré.

On a bien: $L(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$ et $\det L = 1$.

Les valeurs propres associées sont:

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 < \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

L est donc hyperbolique, elle induit l'automorphisme linéaire hyperbolique du tore

$$f_L : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto f_L(\bar{x}, \bar{y}) = (2x + y, x + y) \bmod (1)$$

Théorème 2.2.2 Soit $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ un automorphisme continu, il existe un unique relèvement linéaire $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ à coefficients entiers ($\tilde{f}(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$) qui relève f .

Inversement, pour toute application linéaire $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ telle que $\tilde{f}(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$, il existe un automorphisme $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ tel que: $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$.

Preuve. . voir.[2] ■

2.2.1 Propriétés topologiques

Proposition 2.2.1 Pour tout automorphisme $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ on a :

1. $\mathbb{Q}^k / \mathbb{Z}^k \subset \text{Per}(f_L)$.
2. $\overline{\text{Per}(f_L)} = \mathbf{T}^k$.

Preuve. .

1- Pour $q \in \mathbb{Z}$, notons Δ_q l'ensemble $\left\{ x = \pi \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_k}{q} \right) \in \mathbb{Q}^k / \mathbb{Z}^k, (p_1, p_2, \dots, p_k) \in \mathbb{Z}^k \right\}$.

On a $\text{card} \Delta_q = q^k$ puisque le reste modulo q de p_i ne peut prendre que q valeurs de 0 à $q - 1$.

On a $f_L \left(\pi \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_k}{q} \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{q} L(p_1, p_2, \dots, p_k) \right) \in \Delta_q$ car $L(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$.

Donc pour tout $x \in \Delta_q, x = \pi \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_k}{q} \right)$,

il existe deux entiers $n < m$ tels que $f_L^n(x) = f_L^m(x)$ ce qui implique que :

$$\pi \left(\frac{1}{q} L^n(p_1, p_2, \dots, p_k) \right) = \pi \left(\frac{1}{q} L^m(p_1, p_2, \dots, p_k) \right)$$

i.e $L^n(p_1, p_2, \dots, p_k) - L^m(p_1, p_2, \dots, p_k) \in \mathbb{Z}^k$, or $L^{-1}(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$

donc $L^{n-m}(p_1, p_2, \dots, p_k) - (p_1, p_2, \dots, p_k) \in \mathbb{Z}^k$ alors $x \in \text{Per} L$.

2- Sachant que $\overline{\mathbb{Q}^k} = \mathbb{R}^k$, par passage au quotient on a $\overline{\mathbb{Q}^k / \mathbb{Z}^k} = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k = \mathbf{T}^k$.

D'où $\overline{\text{Per}(f_L)} = \mathbf{T}^k$. ■

Remarque 2.2.2 Comme $\overline{\text{Per}(f_L)} = \mathbf{T}^k$, $\text{Per}(f_L) \subset \Omega(f_L)$ et $\Omega(f_L) = \overline{\Omega(f_L)}$, alors $\Omega(f_L) = \mathbf{T}^k$.

2.3 Ensemble hyperbolique

Soient M une variété C^∞ , $U \subset M$ un ouvert, et $f : U \rightarrow M$ un difféomorphisme C^r et $Df : TM \rightarrow TM$ la différentielle de f , définie par : $Df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$ où $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ est le fibré tangent de M .

Définition 2.3.1 Soit $\Lambda \subset U$, un sous-ensemble compact invariant par f , Λ est dit *hyperbolique* pour f , s'il existe une métrique riemannienne sur U , et si pour chaque $x \in \Lambda$, il existe deux sous espaces notés E_x^s, E_x^u tels que:

$$T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$$

vérifiant les assertions suivantes:

(1)

$$Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s \quad \text{et} \quad Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$$

(2) $\exists c > 0, \exists \lambda \in]0, 1[$ tels que:

$$\|Df^n_{/E_x^s}\| \leq c\lambda^n, \forall n > 0 \quad \text{et} \quad \|Df^{-n}_{/E_x^u}\| \leq c\lambda^n, \forall n > 0$$

(3) E_x^s et E_x^u varient continûment avec x .

1. La condition (3) est en fait une conséquence directe de (1) et (2)

2. Notons $T_\Lambda M$ le fibré tangent de Λ ,

$$T_\Lambda M = \bigcup_{x \in \Lambda} T_x M$$

On pose

$$E^s = \bigcup_{x \in \Lambda} E_x^s \quad \text{et} \quad E^u = \bigcup_{x \in \Lambda} E_x^u$$

E^s et E^u sont alors des sous-fibres continues et on a:

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$$

3. La norme $\|\cdot\|$ est celle induite par la métrique Riemannienne de M .

Remarque 2.3.1 Si $\Lambda \neq M$, Λ a une structure de Cantor.

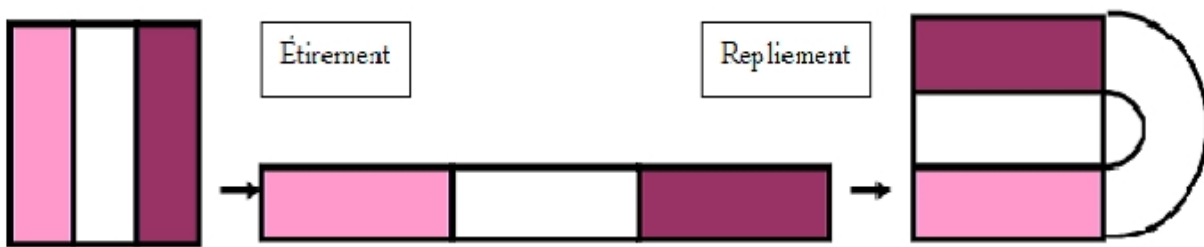
Définition 2.3.2 Un sous-ensemble K d'un intervalle I , est dit de **Cantor** s'il est **fermé**, **totalemtent discontinu** (K ne contient pas d'intervalles), et **parfait** (tout point de K est un point d'accumulation c'est à dire limite d'autres points de K).

2.3.1 Exemple du fer à cheval

En 1965, *Smale* a construit un difféomorphisme qui agit sur le plan \mathbb{R}^2 , avec une dynamique complexe, la motivation étant de décrire un système chaotique en terme de dynamique symbolique et cela par des mécanismes d'étirements et de repliements.

Le procédé est le suivant:

On considère un carré de base du plan, qu'on étire pour obtenir un ruban. C'est "l'étirement", réalisé par l'action d'une application linéaire hyperbolique. Puis on replie le ruban de la manière d'un fer à cheval, de sorte qu'il intersecte le carré. Ce "repliement" est dû à l'action d'une application non linéaire.



1. Les deux bandes horizontales ont pour préimages les deux bandes verticales. En fait les points de ces dernières sont ceux qui restent dans le carré de base par l'action "étirement- repliement"..
2. Que se passe t-il si on itère encore une fois, puis une autre, et ainsi de suite.... ?

Exemple 2.3.1 *Considérons $\Delta = [0, 1]^2$, $L : (x, y) \mapsto (3x, \frac{y}{3})$ une application linéaire hyperbolique (puisque ses valeurs propres sont de modules différents de 1) et soit φ une application non linéaire.*

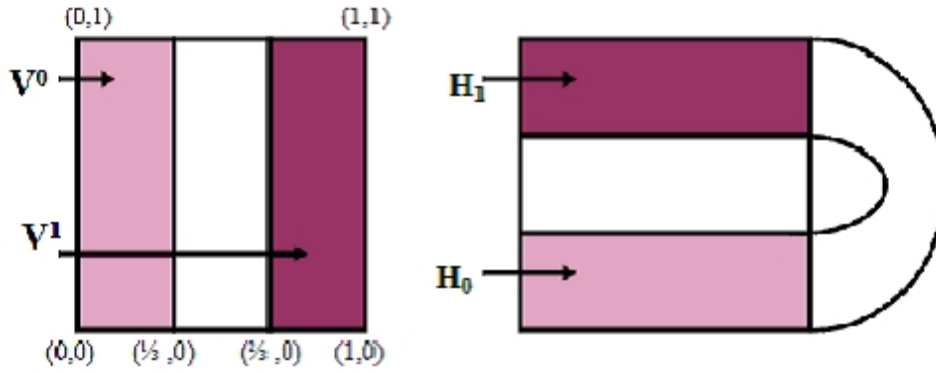
La composée $f = \varphi \circ L$ est définie comme suit:

$$f_{/V^0} : (x, y) \mapsto \left(3x, \frac{y}{3}\right)$$

$$f_{/V^1} : (x, y) \mapsto \left(-3x + 3, -\frac{y}{3} + 1\right)$$

i.e

$$f(V^0) = H_0 \quad \text{et} \quad f(V^1) = H_1$$


 Figure 2.3.1 : 1^{ère} itération

1^{ère} itération:

$$f^{-1}(\Delta) \cap \Delta = \{(x, y) \in \Delta / f(x, y) \in \Delta\} = V^0 \cup V^1$$

$$f(\Delta) \cap \Delta = \{(x, y) \in \Delta / f^{-1}(x, y) \in \Delta\} = H_0 \cup H_1.$$

2^{ème} itération:

$$\begin{aligned} f^{-2}(\Delta) \cap f^{-1}(\Delta) \cap \Delta &= \{(x, y) \in \Delta / f(x, y) \in \Delta \text{ et } f^2(x, y) \in \Delta\} \\ &= f^{-1}(V^0 \cup V^1) \cap (V^0 \cup V^1) \end{aligned}$$

Plus explicitement on a pour $(x, y) \in f^{-1}(V^0 \cup V^1) \cap (V^0 \cup V^1)$,

$$(x, y) \in (V^0 \cup V^1) \quad \text{et} \quad f(x, y) \in (V^0 \cup V^1)$$

Donc il ya quatre possibilités:

1. $(x, y) \in V^0$ alors $0 \leq x \leq \frac{1}{3}, 0 \leq y \leq 1$, et $f(x, y) \in V^0$

Alors $(3x, \frac{y}{3}) \in V^0$, donc $0 \leq 3x \leq \frac{1}{3}, 0 \leq \frac{y}{3} \leq 1$, d'où $0 \leq x \leq \frac{1}{9}, 0 \leq y \leq 1$,

i.e $(x, y) \in [0, \frac{1}{9}] \times [0, 1]$

On pose :

$$V^{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \times [0, 1]$$

2. $(x, y) \in V^0$ alors $0 \leq x \leq \frac{1}{3}, 0 \leq y \leq 1$ et $f(x, y) \in V^1$

Alors $(3x, \frac{y}{3}) \in V^1$ donc $\frac{2}{3} \leq 3x \leq 1, 0 \leq \frac{y}{3} \leq 1,$

d'où $\frac{2}{9} \leq x \leq \frac{1}{3}, 0 \leq y \leq 1,$ i.e $(x, y) \in [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \times [0, 1].$

On pose:

$$V^{01} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \times [0, 1]$$

3. $(x, y) \in V^1$ alors $\frac{2}{3} \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$ et $f(x, y) \in V^0$

Alors $(-3x + 3, -\frac{y}{3} + 1) \in V^0$ donc $0 \leq -3x + 3 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq -\frac{y}{3} + 1 \leq 1,$

d'où $\frac{8}{9} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ i.e $(x, y) \in [\frac{8}{9}, 1] \times [0, 1].$

On pose:

$$V^{10} = \left[\frac{8}{9}, 1 \right] \times [0, 1]$$

4. $(x, y) \in V^1$ alors $\frac{2}{3} \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$ et $f(x, y) \in V^1$ alors $(-3x + 3, -\frac{y}{3} + 1) \in V^1,$

donc $\frac{2}{3} \leq -3x + 3 \leq 1, 0 \leq -\frac{y}{3} + 1 \leq 1,$

d'où $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{9}, 0 \leq y \leq 1$ i.e $(x, y) \in [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \times [0, 1].$

On pose:

$$V^{11} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \times [0, 1]$$

$$f^{-2}(\Delta) \cap f^{-1}(\Delta) \cap \Delta = \left(\left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right] \right) \times [0, 1]$$

On obtient donc:

$$f^{-2}(\Delta) \cap f^{-1}(\Delta) \cap \Delta = V^{00} \cup V^{01} \cup V^{11} \cup V^{10}$$

Notation 2.3.1 On note $f^{-2}(\Delta) \cap f^{-1}(\Delta) \cap \Delta = \cup V^{\omega_{-1}, \omega_0}$ avec $\omega_{-1}, \omega_0 \in \{0, 1\}.$

Remarque 2.3.2 De 2 rectangles verticaux de largeur $\frac{1}{3}$ chacun, on est passé à 4 rectangles de largeur $\frac{1}{9}$ chacun. De la même façon on obtient:

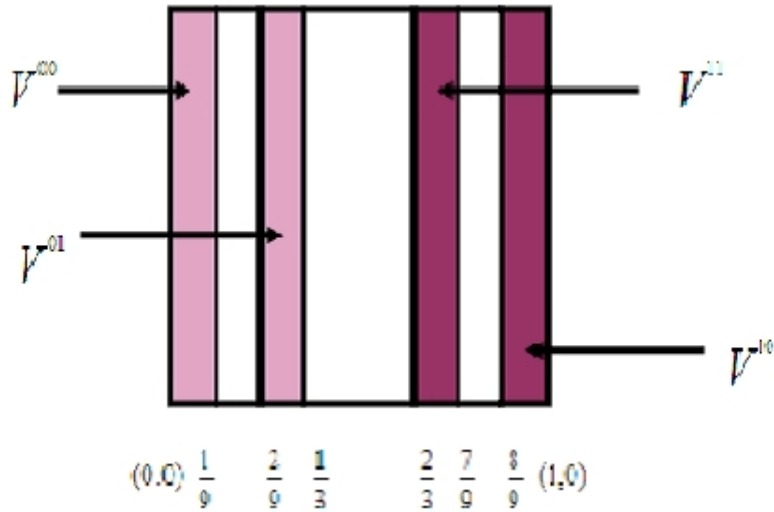


Figure 2.3.2 : 3^{ème} itération

$$\Delta \cap f^1(\Delta) \cap f^2(\Delta) = \cup H_{\omega_1, \omega_2} \quad \text{avec } \omega_1, \omega_2 \in \{0, 1\}$$

$$\Delta \cap f^1(\Delta) \cap f^2(\Delta) = [0, 1] \times \left(\left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right] \right)$$



Figure 2.3.3 : 3^{ème} itération horizontale

Après n itérations successives, on peut alors écrire:

$$f^{-n}(\Delta) \cap f^{-(n-1)}(\Delta) \cap \dots \cap \Delta = \cup V^{\omega_{-n}, \dots, \omega_{-1}, \omega_0} \quad \text{où } (\omega_{-n}, \dots, \omega_0) \in \{0, 1\}^{n+1}$$

$V^{\omega_{-n}, \dots, \omega_{-1}, \omega_0}$ est un rectangle vertical de largeur $\frac{1}{3^n}$,

et

$$\Delta \cap \dots \cap f^{n-1}(\Delta) \cap f^n(\Delta) = \cup H_{\omega_1, \dots, \omega_n} \quad \text{où} \quad (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n$$

$H_{\omega_1, \dots, \omega_n}$ est un rectangle horizontal de largeur $\frac{1}{3^n}$.

Notation 2.3.2

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(\Delta) &= \cup V^{\omega_{-n}, \dots, \omega_{-1}, \omega_0} \\ \bigcap_{i=1}^n f^i(\Delta) &= \cup H_{\omega_1, \dots, \omega_n} \end{aligned}$$

Remarque 2.3.3 *A la suite de n itérations par exemple, on obtient une réunion de 2^n rectangles verticaux (et 2^n horizontaux). La largeur décroît alors exponentiellement.*

Définition 2.3.3 *Un ensemble de Cantor se reconnaît par le fait que chacune de ses pièces ressemble à la pièce d'origine.*

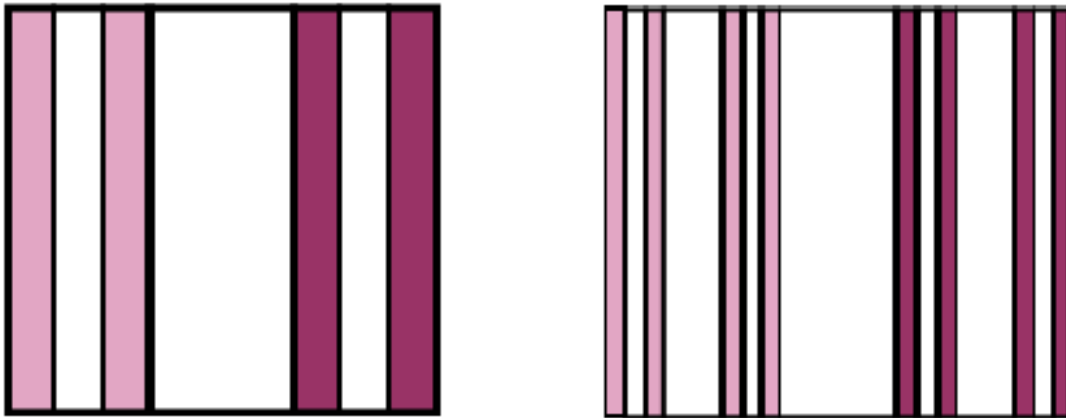
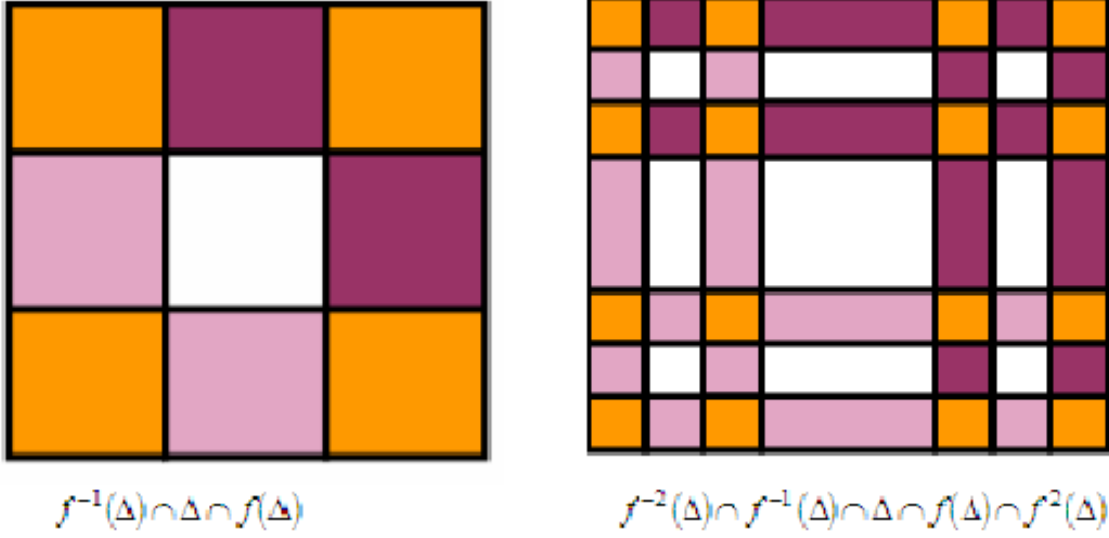


Figure 2.3.4 : 2^{ème} et 3^{ème} itération

En observant ces figures on peut deviner l'ensemble de Cantor Λ , en remarquant que les carrés de couleur orange sont les ensembles concernés par l'intersection infinie.

$$f^{-1}(\Delta) \cap \Delta \cap f^1(\Delta) = (V^0 \cup V^1) \cap (H_0 \cup H_1) = \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right) \cap \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right)$$



$$\begin{aligned}
 \bigcap_{i=-2}^2 f^{-i}(\Delta) &= (\cup V^{\omega_{-1}, \omega_0}) \cap (\cup H_{\omega_1, \omega_2}) \\
 &= \left(\left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right] \right) \cap \left(\left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right] \right)
 \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(\Delta) = \bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\Delta) = K_V \times [0, 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^n f^i(\Delta) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^i(\Delta) = [0, 1] \times K_H$$

Avec K_V et K_H ensembles de Cantor **triadique** (*third-middle set*), car il s'obtiennent en enlevant à chaque itération, le **tier** de chaque intervalle à partir de son milieu).

Proposition 2.3.1 *L'ensemble $\Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} f^i(\Delta) = K_V \times K_H$ est un ensemble hyperbolique pour f .*

Preuve. .

$f_{/V^0} : (x, y) \mapsto (3x, \frac{y}{3})$ qu'on peut aussi écrire:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

donc pour $n \geq 0$,

$$f^n(x, y) = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{et } f^{-n}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$f_{/V^1} : (x, y) \mapsto (-3x + 3, -\frac{y}{3} + 1)$, on a aussi

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } f^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Donc pour $n \geq 0$,

$$f^n(x, y) = \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{3^n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_n \\ \varpi_n \end{bmatrix}$$

$$\text{et } f^{-n}(x, y) = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{3^n}) & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta'_n \\ \varpi'_n \end{bmatrix}$$

par conséquent:

$$Df^n(u, v) = \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{3^n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\text{et } Df^{-n}(u, v) = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{3^n}) & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Les sous-espaces stables (resp. instables) correspondent aux directions horizontales (resp. verticales).

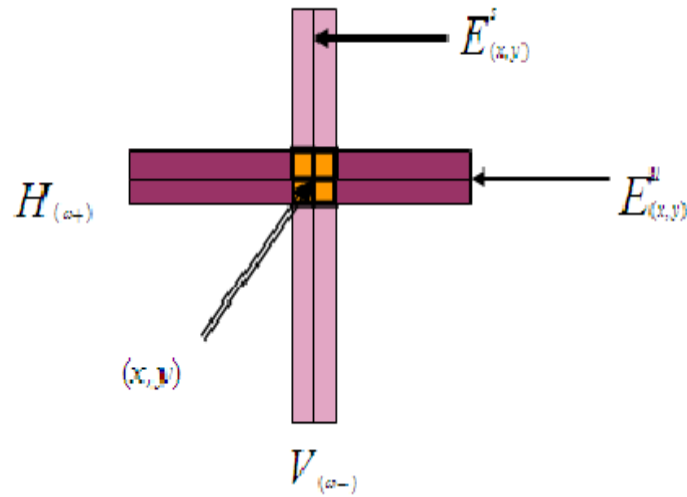
puisque Df a pour vecteur propres : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ pour la valeur propre 3, et $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ pour $\frac{1}{3}$.

Ainsi $T\Lambda = \mathbb{R}v_s \oplus \mathbb{R}v_u$ où $v_s = (1, 0)$ et $v_u = (0, 1)$.

Sachant que pour tout $n \geq 0$, f^n (resp. f^{-n}) est définie sur des rectangles verticaux (resp. *horizontaux*) de largeur $\frac{1}{3^n}$. La métrique riemannienne étant celle générée par la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 , il est clair qu'il existe $c = 1$ et $\lambda = \frac{1}{3} \in]0, 1[$ tels que :

$$\left\| Df^n_{/E^s(x,y)} \right\| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \text{ et } \left\| Df^n_{/E^s(x,y)} \right\| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \text{ pour } n \geq 0.$$

(La norme est adaptée car $c = 1$). ■



2.3.2 Fer à cheval dans \mathbb{R}^n

En prenant comme modèle l'exemple de \mathbb{R}^2 , on définit le fer à cheval de manière générale dans \mathbb{R}^n .

Notation 2.3.3 On note $\Delta = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$ qu'on appelle rectangle de \mathbb{R}^n où $D_1 \subset \mathbb{R}^k$ et $D_2 \subset \mathbb{R}^l$ sont deux disques. On note aussi $\pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ et $\pi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ les projections canoniques.

Définition 2.3.4 Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme.

Un rectangle $\Delta = D_1 \times D_2 \subset U \subset \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^n$ est dit fer à cheval pour f si $\Delta \cap f(\Delta)$ contient au moins deux composantes Δ_0 et Δ_1 vérifiant:

1. $\pi_2(\Delta_0 \cup \Delta_1) \subset \text{int}(D_2)$, $\pi_1(f^{-1}(\Delta_0 \cup \Delta_1)) \subset \text{int}(D_1)$,
2. $f^{-1}(\Delta_0 \cup \Delta_1)$ est invariant par $Df|_{f^{-1}(\Delta_0 \cup \Delta_1)}$,
3. $\Delta_0 \cup \Delta_1$ est invariant par $Df|_{\Delta_0 \cup \Delta_1}$.

Remarque 2.3.4 Nous verrons plus loin une condition d'existence.

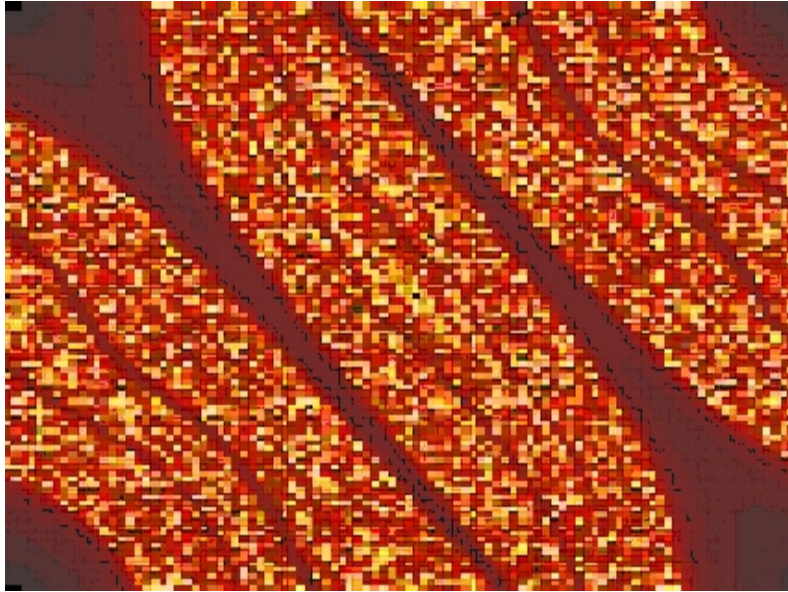


Figure 2.3.5 : fer à cheval de Smale

Image extraite de (Yves Coudene.htm), obtenue à l'aide du logiciel libre " fractint".

Proposition 2.3.2 *Le difféomorphisme du fer à cheval $f_{/\Lambda}$, est conjugué à (Σ_2, σ_2) où $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ et $\sigma_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ est définie par $\sigma_2((\omega_n)_n) = (\varpi_n)_n$ avec $\varpi_n = \omega_{n+1}$.*

Preuve. .

On introduit les ensembles $\Delta(\omega_{-n}, \dots, \omega_0, \dots, \omega_n) = H_{\omega_{-n}, \dots, \omega_0} \cap V^{\omega_1, \dots, \omega_n}$, sur lesquels on construit $h : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda$. En munissant Σ_2 de la topologie produit, on déduit que h est homéomorphisme et que $f_{/\Lambda} \circ h = h \circ \sigma_2$. (voir [1], [15]) ■

Remarque 2.3.5 *Si $\Lambda = M$, $f : M \rightarrow M$ est dit système d'Anosov ou difféomorphisme d'Anosov.*

C'est l'objet du paragraphe suivant.

2.4 Difféomorphisme d'Anosov

Définition 2.4.1 *Soient M une variété riemannienne C^∞ compacte de dimension finie, et $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme C^∞ . f est dit difféomorphisme d'Anosov, si M est hyperbolique pour f .*

Le couple (M, f) est dit système d'Anosov.

2.4.1 Cas linéaire

Définition 2.4.2 *Soit $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ une application et \tilde{f} un relèvement de f . On dit que f est dans $C^1(\mathbf{T}^k, \mathbf{T}^k)$ si \tilde{f} est continûment différentiable. i.e \tilde{f} est de classe C^1 .*

Notons $D_p f$ la différentielle de f au point p de \mathbf{T}^k . On a :

$$D_p f = D_x \tilde{f} \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^k \quad \text{est tel que } \pi(x) = p$$

De même $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est dans $C^r(\mathbf{T}^k, \mathbf{T}^k)$ si \tilde{f} est de classe C^r .

Remarque 2.4.1 *$D_p f$ ne dépend pas du choix du représentant x , en effet si y est un autre représentant de p , alors $\pi(x) = \pi(y)$ d'où $D_p f = D_y \tilde{f} = D_x \tilde{f}$.*

Remarque 2.4.2 *Un automorphisme linéaire hyperbolique $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est C^∞ , car son relevé L est linéaire,*

donc pour $p = \pi(x)$ on a : $D_p f_L = D_x L = L$. Il en est de même pour son inverse, ce qui implique que f_L est un difféomorphisme C^∞ .

Proposition 2.4.1 *L'automorphisme hyperbolique $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est un difféomorphisme d'Anosov.*

Preuve. .

En effet en munissant \mathbf{T}^k de la métrique Riemannienne. $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_k^2$, induite par la norme Euclidienne de \mathbb{R}^k , on obtient que \mathbf{T}^k est hyperbolique pour f_L .

effectivement les assertions de la définitions (2.6) sont aisément vérifiées puisque $D_p f_L = L$ est hyperbolique donc vérifie les assertions de la définition (2.1).

On peut voir aussi une démonstration dans [4]. ■

Exemple 2.4.1 *Considérons l'automorphisme*

$$f_L : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$$

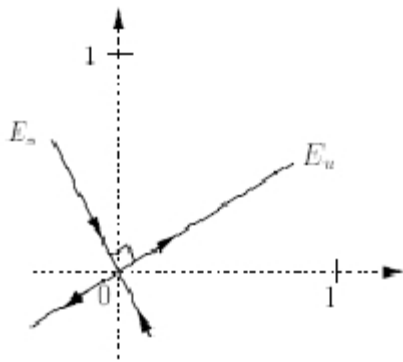
$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (2x + y, x + y) \text{ mod } 1$$

induit par $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de vecteurs propres

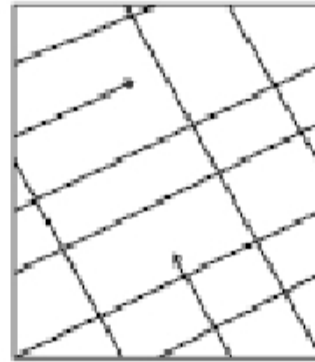
$$v_s \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right\}, \leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < 1, \text{ et } v_u \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} > 1$$

On a alors $E^s = \mathbb{R}v_s$ et $E^u = \mathbb{R}v_u$ les sous espaces propres associés, qui sont évidemment L -invariants. et $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}v_s \oplus \mathbb{R}v_u$.

(\mathbb{R}^2 étant le revêtement universel de \mathbf{T}^2 (voir [15])



sous espaces stable et instable



espaces propres

Exemple 2.4.2 *Posons $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$, (k est connu sous le nom du nombre d'or) on remarque alors que les valeurs propres sont telles que :*

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} &= 0.38197 = k^{-2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} &= 2.618 = k^2 \end{aligned} \quad \text{de plus } \|L\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\| = 2.618 = k^2,$$

donc en posant $\lambda = k^{-2}$, on aura $\|L_{/E^s}^n\| \leq \lambda^n$ et $\|L_{/E^u}^{-n}\| \leq \lambda^n$.

Remarque 2.4.3 Les automorphismes linéaires hyperboliques du tore sont aussi appelés *Anosov linéaires du tore*.

2.4.2 Classification

Ce paragraphe ne tient compte que d'une petite classe des difféomorphismes d'Anosov, il en existe d'autres pour plus de détails voir [7]. On la met en évidence pour voir que ces systèmes sont en fait obtenus à partir des Anosov linéaires du tore. Les démonstrations étant trop technique, on se contentera juste d'énoncer les résultats avec quelques références.

Théorème 2.4.1 (Anosov) Soit $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ un Anosov linéaire. Il existe un voisinage U de f dans $C^1(\mathbf{T}^k, \mathbf{T}^k)$, tel que toute application $g \in U$ soit topologiquement conjuguée à f .

Plus généralement on a :

Théorème 2.4.2 (J.Franks, Manning) Tout difféomorphisme d'Anosov du tore est topologiquement équivalent à un Anosov linéaire.

Preuve. .

voir [6] la démonstration repose sur la théorie des revêtements. ■

Définition 2.4.3 On dit d'un système Anosov (M, f) , qu'il est de codimension 1, si $\dim E^s$ ou $\dim E^u$ est égale à 1.

Théorème 2.4.3 (J.Franks) Soit (M, f) un système d'Anosov de codimension 1, avec $\Omega(f) = M$.

Alors f est topologiquement conjugué à un automorphisme hyperbolique du tore.

Remarque 2.4.4 1- La condition $\Omega(f) = M$ dans le cas où $\dim M = 2$ est toujours satisfaite.

2- Si $\dim M \leq 3$, tout difféomorphisme d'Anosov est de codimension 1.

3- Il se trouve que la condition $\Omega(f) = M$ est toujours satisfaite dans le cas où il existe une mesure de Lebesgue pour f . sur M , invariante par f . (voir [6]).

Théorème 2.4.4 (*J.Franks, Newhouse*) Toute variété qui admet un difféomorphisme d'Anosov de codimension 1, est homéomorphe à un tore. (voir [4], [5])

Remarque 2.4.5 Il existe des variétés qui admettent des difféomorphismes d'Anosov, qui ne sont pas un tore. Smale a construit un exemple, en considérant une variété compacte $M = G/\Gamma$ de dimension 6 avec G l'espace de matrices d'une forme particulières (voir [4]) et Γ un sous groupe nilpotent, non abélien. Il montre alors que M n'est pas homéomorphe à \mathbf{T}^6 . (voir [4], [1]).

2.5 Dynamique hyperbolique

Définition 2.5.1 Soit (M, f) un système dynamique où M est une variété C^∞ compacte de dimension finie et $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme C^∞ . On dit de la dynamique f qu'elle est hyperbolique, si:

- 1/ l'ensemble $\Omega(f)$ est hyperbolique pour f
- 2/ $\overline{Per f} = \Omega(f)$.

On dit aussi que f vérifie l'**Axiome A** ou que f est un **Axiome A-difféomorphisme**.

Lemme 2.5.1 (lemme de fermeture d'Anosov) Si $f : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme d'Anosov, alors f vérifie l'**Axiome A**.

2.5.1 Décomposition spectrale

Théorème 2.5.1 Si $f : M \rightarrow M$ vérifie l'Axiome A, il existe des ensembles fermés deux à deux disjoints $(\Omega_i)_{i=1,\dots,s}$ vérifiant :

1. $f(\Omega_i) = \Omega_i$ et $f|_{\Omega_i}$ topologiquement transitive.
2. $\Omega_i = X_{1,i} \cup X_{2,i} \cup \dots \cup X_{n_i,i}$ où $X_{j,i}$ fermés deux à deux disjoints tels que $f(X_{j,i}) = X_{j,i}$ et $f|_{X_{j,i}}$ topologiquement mélangeant et :

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_s$$

Remarque 2.5.1 Le sous-ensemble Ω_i est appelé pièce basique et il est hyperbolique pour f . (voir [14]).

Exemple 2.5.1 Pour les Anosov linéaires du tore on a vu que $\Omega(f) = \mathbf{T}^k$ qui est connexe, la seule pièce basique est \mathbf{T}^k lui même.

Remarque 2.5.2 *Il se trouve que pour les Axiome A-difféomorphisme , l'ensemble des points non errants est un domaine fondamental.*

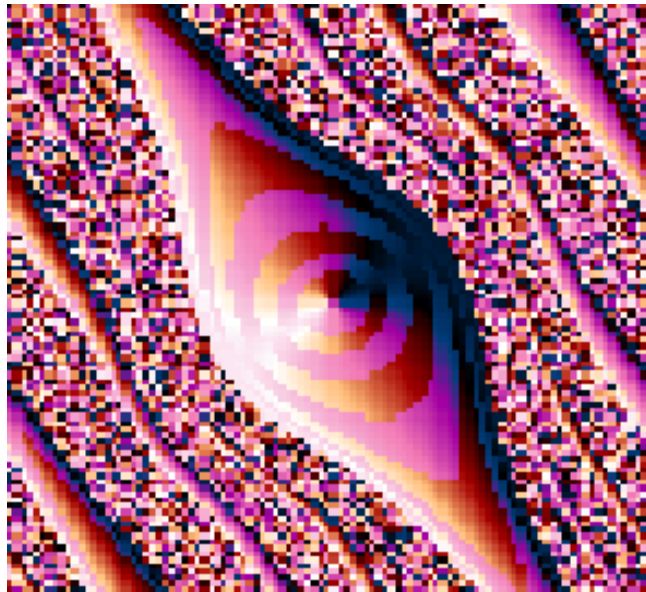
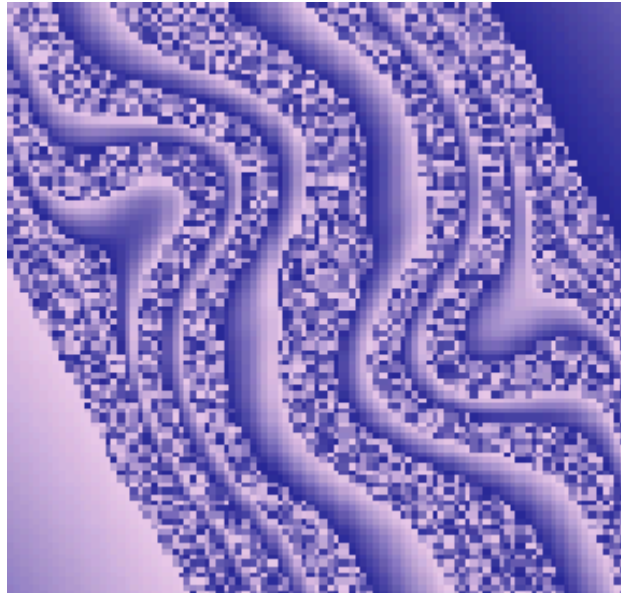
On a le résultat suivant:

Si $f : M \rightarrow M$ vérifie l'Axiome A, il existe un voisinage U de $\Omega(f)$ tel que ;

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U) = \Omega(f)$$

Pour plus de détails voir [14] paragraphe 3.9.

Dérivés d'Anosov



images extraites de "Yves coudene.htm".
obtenues à l'aide du logiciel libre "fractint"

2.6 Variétés stables et variétés instables.

Définition 2.6.1 Soit X un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme on définit les ensembles suivants:

$$\begin{aligned} W^s(x) &= \left\{ y \in X / \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\} \\ W^u(x) &= \left\{ y \in X / \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0 \right\} \end{aligned}$$

appelés respectivement variétés stable et instable de x .

Pour $\varepsilon > 0$ on définit les variétés locales stables et instables par :

$$\begin{aligned} W_\varepsilon^s(x) &= \{y \in X / d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq 0\} \\ W_\varepsilon^u(x) &= \{y \in X / d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq 0\} \end{aligned}$$

2.6.1 Existence de variétés locales

Théorème 2.6.1 (Anosov) Si $f : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme d'Anosov de classe C^r . Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

1. Pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et tout $x \in M$, il existe des ensembles $W_\varepsilon^s(x)$ et $W_\varepsilon^u(x)$, C^r - difféomorphes à des espaces euclidiens (i.e des disques) et on a :

$$T_x W_\varepsilon^s(x) = E^s(x) \quad \text{et} \quad T_x W_\varepsilon^u(x) = E^u(x)$$

2. Pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que ; $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ est réduite à un point noté $[x, y]$, pour tous $x, y \in \Omega(f)$ tels que $d(x, y) \leq \delta$.

De plus l'application $[\cdot, \cdot] : \{(x, y) \in \Omega(f) \times \Omega(f); d(x, y) \leq \delta\} \rightarrow \Omega(f)$ appelée produit local, $(x, y) \mapsto [x, y]$

est continue.

Théorème 2.6.2 Soit $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ un automorphisme hyperbolique linéaire du tore, où \mathbb{R}^k est muni d'une norme adaptée, \mathbf{T}^k est donc muni de la distance associée. On a alors:

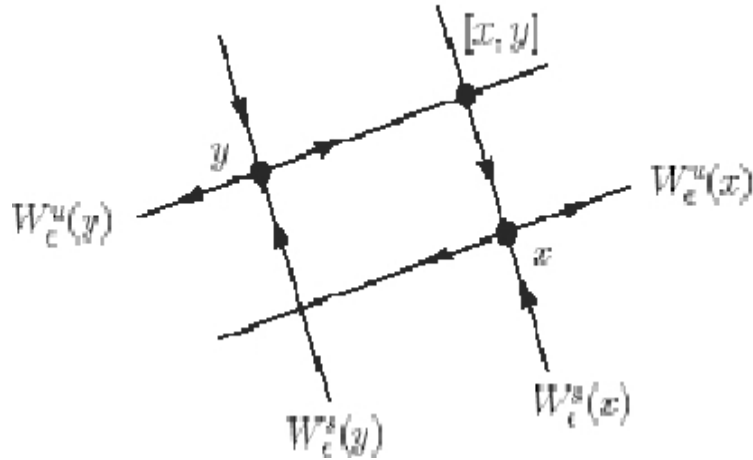


Figure 2.6.1 : variétés locales en dimension 2

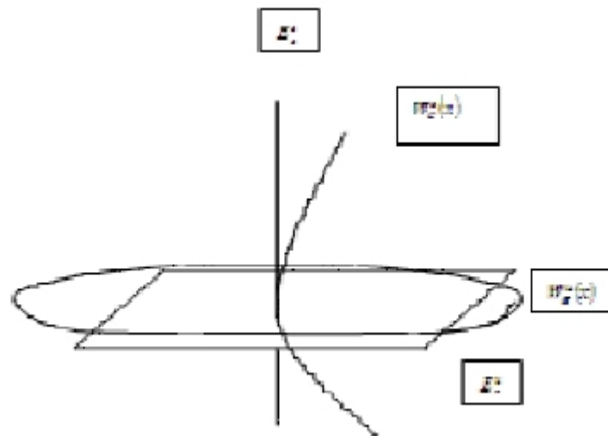


Figure 2.6.2 : variétés locales en dimension 3

1. $W^s(0) = \pi(E^s)$ et $W^u(0) = \pi(E^u)$.
2. pour tout $x \in \mathbf{T}^k$ on a: $W^s(x) = x + W^s(0)$ et $W^u(x) = x + W^u(0)$
3. $W^s(x)$ et $W^u(x)$ sont denses dans \mathbf{T}^k .

Preuve. .

1- on montre d'abord que: $W^s(0) = \pi(E^s)$

Soit $y \in \pi(E^s)$, il existe $v \in E^s$ tel que $y = \pi(v)$, d'après la proposition(2.3)

on a $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(v) = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(L^n(v)) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_L^n(\pi(v)) = 0$.

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} f_L^n(y) = 0 = f_L^n(0)$ ce qui entraîne que $\lim_{n \rightarrow \infty} (df_L^n(y), f_L^n(0)) = 0$.

Donc $y \in W^s(0)$.

Inversement, pour $y \in W^s(0)$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (df_L^n(y), f_L^n(0)) = 0$ et $y = \pi(v)$ avec $v \in \mathbb{R}^k = E^s \oplus E^u$

i.e $v = v_s + v_u$ or $v_u = L^{-n}(L^n(v_u))$, l'invariance de E^u par L

implique que $L^n(v_u) \in E^u$, d'après la proposition (2.3) $\lim_{n \rightarrow \infty} L^{-n}(L^n(v_u)) = 0$,

i.e $v_u = 0$, d'où $v = v_s \in E^s$.

Donc $y \in \pi(E^s)$.

De la même façon on montre que: $W^u(0) = \pi(E^u)$.

2- Remarquons que pour $x, y \in \mathbf{T}^k$ on a pour $n \geq 0$, $f_L^n(y) - f_L^n(x) = f_L^n(y - x)$, on obtient alors:

$$y \in W^s(x) \quad \text{si et seulement si} \quad y - x \in W^s(0)$$

qui nous permet de conclure que $W^s(x) = x + W^s(0)$. (même chose pour $W^u(x) = x + W^u(0)$).

3- Du fait que: $W^s(x) = x + W^s(0)$, la densité de $W^s(x)$ dans \mathbf{T}^k est induite par celle de $W^s(0)$.

Considérons $y \in \mathbf{T}^k$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in [0, 1]^k$ tel que $f_L^n(y) = \pi(y_n)$.

Or $y_n = y_n^s + y_n^u$, avec $y_n^s \in E^s$ et $y_n^u \in E^u$,

$$\begin{aligned} y &= f_L^n(\pi(y_n^s + y_n^u)) \\ &= \pi(L^{-n}(y_n^s) + L^{-n}(y_n^u)) \end{aligned}$$

donc

par passage à la limite on aura:

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(L^{-n}(y_n^s) + L^{-n}(y_n^u)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(L^{-n}(y_n^s)) + \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(L^{-n}(y_n^u)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(L^{-n}(y_n^s)) + 0 \end{aligned}$$

$L^{-n}(y_n^s) \in E^s$ (invariance de E^s par L) d'où $\pi(L^{-n}(y_n^s)) \in W^s(0)$. ■

Exemple 2.6.1 *Considérons*

$$f_L : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (2x + y, x + y) \bmod 1$$

On rappelle que $E^s = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, et $W^s(0) = \pi(E^s)$.

Soit un vecteur $v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E^s$ alors $v = \alpha v_s$ i.e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,

d'où l'équation $x = (-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2})y$

Cela entraîne que $W^s(0)$ est la droite d'équation:

$$y = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)x \bmod(1).$$

De la même façon on obtient que $W^u(0)$ est la droite d'équation:

$$y = \left(\frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\right)x \bmod(1)$$

Proposition 2.6.1 *Les automorphismes linéaires d'Anosov du tore sont expansifs.*

Preuve. .

Soit $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ un Anosov linéaire du tore.

Supposons que f n'est pas expansif, alors quelque soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$,

il existe $x, y \in \mathbf{T}^k; x \neq y$ et $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$.

Cela implique que $y \in W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x)$.

On a $d(x, x) = 0 < \varepsilon$, alors d'après le théorème (2.17), $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x) = \{x\}$, ce qui donne $x = y$

donc contradiction. ■

Proposition 2.6.2 *Les Anosov linéaires du tore sont topologiquement mélangeants.*

Preuve. .

Soient $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ un Anosov linéaire du tore et U, V deux ouverts non vides de \mathbf{T}^k .

La densité de $W^s(0)$ (resp. $W^u(0)$) dans \mathbf{T}^k implique qu'il existe $x \in U \cap W^s(0)$

(resp. $y \in V \cap W^u(0)$).

On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(y) = 0$).

On peut donc trouver N assez grand de sorte que pour $n \geq N$ on ait :

$$x + f^{-n}(y) \in U \quad \text{et} \quad f^n(x) + y \in V.$$

Or $f^n(x) + y = f^n(x + f^{-n}(y)) \in f^n(U)$. i.e $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. ■

Conclusion 2.6.1 *Les Anosov linéaires du tore sont des systèmes dynamiques chaotiques.*

2.6.2 Existence de fers à cheval

Définition 2.6.2 *On dit qu'un point x périodique de période m est un point périodique (ou fixe) hyperbolique, si $Df^m(x)$ a ses valeurs propres de modules différents de 1.*

Définition 2.6.3 *Soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme de l'espace métrique (X, d) ;*

Un point $x \in X$ est dit homoclinique au point $y \in X$, si $\lim_{|n| \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

Définition 2.6.4 *Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de la variété différentiable M , soit $x \in M$ un point fixe hyperbolique, $q \in M$ est dit homoclinique transverse, s'il est dans $W^s(p) \cap W^u(p)$.*

Théorème 2.6.3 *Soient M une variété C^∞ , $U \subset M$ un ouvert, $f : M \rightarrow M$ un plongement, et $p \in M$ un point fixe hyperbolique avec un point homoclinique transverse $q \in M$.*

Alors il existe dans un voisinage assez petit de p un fer à cheval pour des itérées de f .

De plus l'ensemble hyperbolique de ce fer à cheval contient un itéré de q .

Preuve. .

Les grandes lignes de la démonstration consistent à considérer le point $p \in M$ comme le point origine afin d'adapter les coordonnées dans un voisinage O de p , la construction du rectangle Δ puis on considère les composantes connexes de l'intersection de O avec les variétés locales pour construire D_1 et D_2 à partir d'un itéré de $q \in M$. (voir [1] pour plus de détails). ■

2.7 Partition de Markov

Définition 2.7.1 *Soit $f : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme d'Anosov de classe C^r . On pose $\delta_1 := \delta(\varepsilon_1)$ avec $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$ où ε_0 est celui donné par le théorème (2.16).*

Un sous ensemble $R \subset M$, est appelé rectangle si:

$$\text{diam}(R) \leq \inf(\delta_1, \varepsilon_0) \quad \text{et} \quad W_{\varepsilon_1}^s(x) \cap W_{\varepsilon_1}^u(y) \in R, \quad \text{pour tous } x, y \in R.$$

De plus si on considère Ω une pièce basique de $\Omega(f)$, un rectangle $R \subset \Omega$ est dit propre si $\overline{R} = R$,

l'intérieur de R étant relatif à Ω .

Notation 2.7.1 Pour $x \in R$, on note

$$W^s(x, R) = W_{\varepsilon_1}^s(x) \cap R \quad \text{et} \quad W^u(x, R) = W_{\varepsilon_1}^u(x) \cap R.$$

On les appelle respectivement feuilles stables et instables de x dans R .

Définition 2.7.2 Une partie S de R est appelée sous-rectangle stable (resp. instable) si pour tout x dans S

on a : $W^s(x, R) \subset S$ (resp. $W^u(x, R) \subset S$).

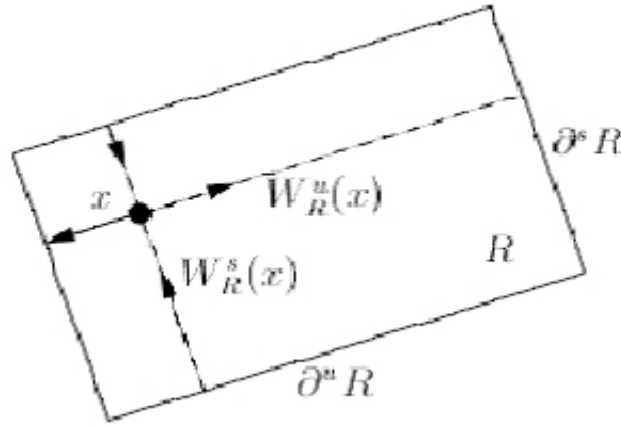


Figure 2.7.1 : feuille stable et instable

Définition 2.7.3 Une famille $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ de rectangles propres est une partition de Markov pour Ω si:

1. $\Omega = \bigcup_{j=1}^m R_j$;
2. $R_j \cap R_i = \partial R_i \cap \partial R_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq m$.
3. Pour tous $1 \leq i, j \leq m$ tels que $f(R_i) \cap \overset{\circ}{R}_j \neq \emptyset$ et tout $x \in R_i \cap f^{-1}(\overset{\circ}{R}_j)$

on a :

$$f(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f(x), R_j)$$

4. Pour tous $1 \leq i, j \leq m$ tels que $f^{-1}(R_i) \cap \overset{\circ}{R}_j \neq \emptyset$ et tout $x \in R_i \cap f(\overset{\circ}{R}_j)$

on a :

$$W^u(f(x), R_j) \subset f(W^u(x, R_i))$$



Figure 2.7.2 : configuration de partition de Markov possible

Remarque 2.7.1 Les assertions 3/ et 4/ peuvent se résumer de la façon suivante: Si $x \in \mathring{R}_i$ et $f(x) \in \mathring{R}_j$,
 alors: $f(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f(x), R_j)$ et $W^u(f(x), R_j) \subset f(W^u(x, R_i))$

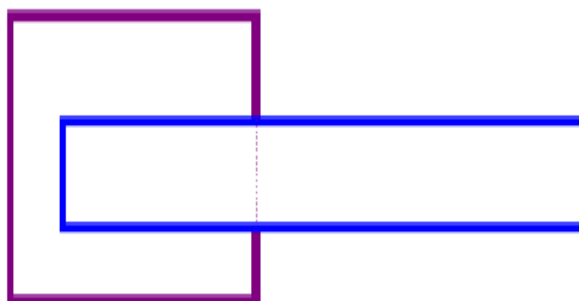


Figure 2.7.3 : configuration de partition de Markov impossible

Exemple 2.7.1 Considérons la transformation

$$f_L : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (2x + y, x + y) \bmod (1)$$

On découpe \mathbf{T}^2 , en traçant des morceaux des variétés stables et instables . Leurs intersections sépare le tore en deux rectangles

En fait,

$[acd]$ est le segment porté par la droite affine E^u ,

$[ba]$ est le segment porté par la droite affine $(1, 1) + E^u$,

$[bc]$ est le segment porté par la droite affine $(1, 0) + E^u$,

$[ab]$ est le segment porté par la droite affine E^s ,

$[adc]$ est le segment porté par la droite affine $(1, 1) + E^s$,

$[bc]$ est le segment porté par la droite affine $(0, 1) + E^s$.

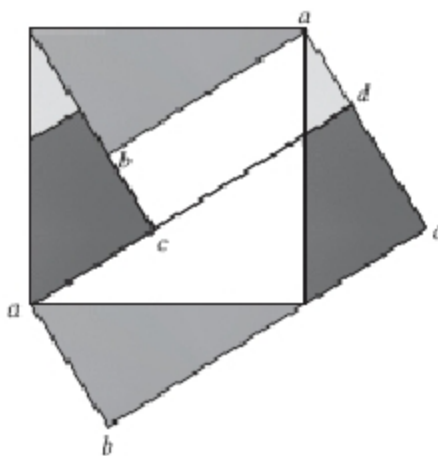


Figure 2.7.4 : extraite de [1]

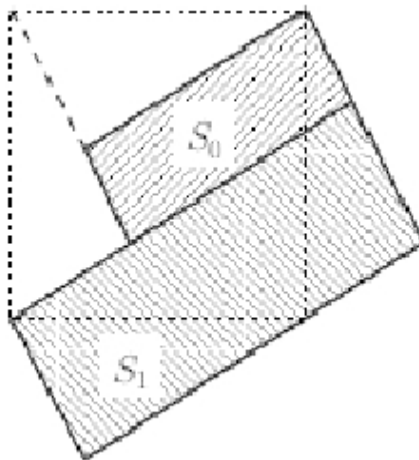


Figure 2.7.5 : un autre domaine fondamental de \mathbb{T}^2

Sachant que le carré $[0, 1]^2$ est un domaine fondamental dans le sens de la définition (1.2), on remarque qu'en procédant aux identifications selon la figure

ci-dessus, que l'on retrouve dans $S_0 \cup S_1$ tous les points de $[0, 1]^2$. De plus $S_0 \cup S_1$ vérifie les conditions de la définition (1.2).

Comme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a alors

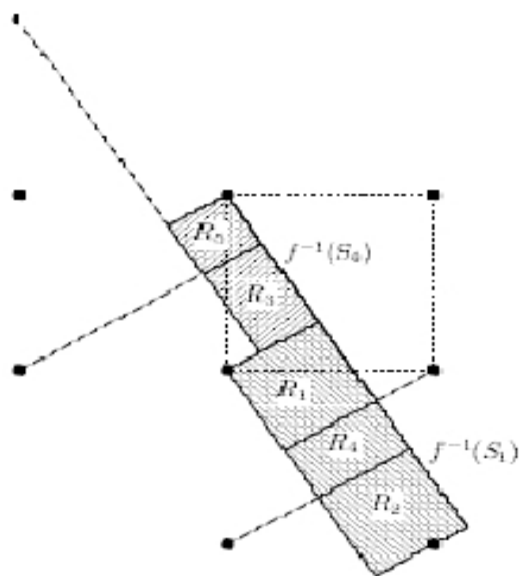
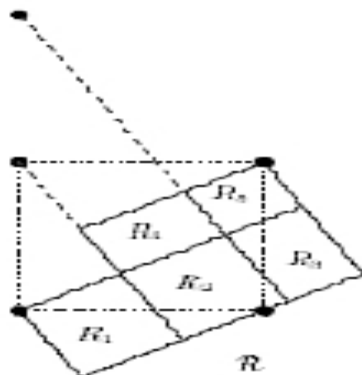


Figure 2.7.6 : Préimages de S_0 et S_1

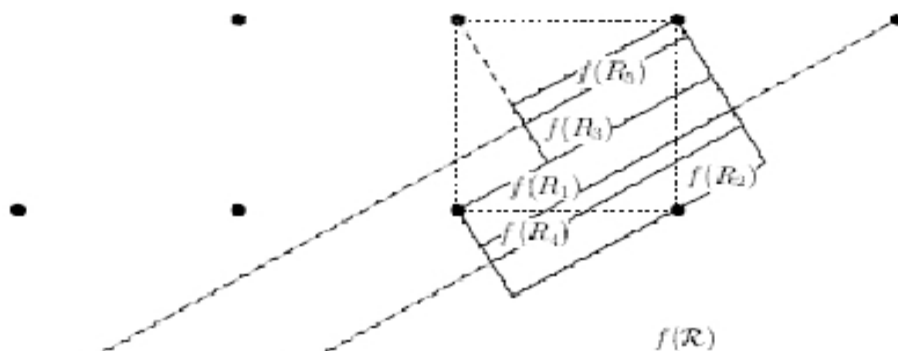
On obtient une famille de rectangles propres $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$.

on constate que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\hat{S}_0) \cap \hat{S}_0 &= \hat{R}_5 \\ f^{-1}(\hat{S}_0) \cap \hat{S}_1 &= \hat{R}_3 \\ f^{-1}(\hat{S}_1) \cap \hat{S}_0 &= \hat{R}_4 \\ f^{-1}(\hat{S}_1) \cap \hat{S}_1 &= \hat{R}_1 \cup \hat{R}_2 \end{aligned}$$

Figure 2.7.7 : Partition de $S_0 \cup S_1$ dans \mathbb{T}^2

et que $f(\mathfrak{R})$ est telle que: $f(S_0) = f(R_5) \cup f(R_4)$ et $f(S_1) = f(R_3) \cup f(R_1) \cup f(R_2)$ dans \mathbb{R}^2 .

Figure 2.7.8 : Image de la partition dans \mathbb{T}^2

Proposition 2.7.1 $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ est une partition de Markov.

Preuve. .

On peut voir que \mathfrak{R} vérifie les conditions de la définition (2.19), en utilisant les figures.

■

Remarque 2.7.2 Tout d'abord il faudra observer que le diamètre des rectangles obtenus n'est pas très petit. Il a été établi que pour $\varepsilon'_1 \simeq 0,3618$, la projection canonique est injective

sur la boule de rayon strictement inférieure à ε'_1 Pour être dans les conditions d'existence de variétés locales théorème (2.16) on considère

$$\varepsilon_0 < \frac{\varepsilon'_1(1 - ch(L))}{2 \sup \{\|L\|, \|L^{-1}\|\}} \simeq 0.042$$

avec la norme adaptée à L définie par $\|v\| = \max\{|x|, |y|\}$ où $v = xv_s + yv_u$, $v_s \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $v_u \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $ch(L) = \frac{1}{k^2}$.

En principe la partition qu'on obtiendrait de diamètre strictement inférieure à ε_0 , aurait un nombre plus grand de rectangles. En fait Il n'ya pas unicité de partitions de Markov.

2.7.1 Existence de partition de Markov

Théorème 2.7.1 Pour toute pièce basique Ω_i pour l'Axiom A difféomorphisme f , il existe une partition de Markov de diamètre suffisamment petit. (voir[14]).

Remarque 2.7.3 Dans l'exemple précédent on a trouvé une partition de 5 rectangles et si on considère la somme des coefficients de la matrice L on trouve aussi 5. On peut alors se poser la question sur un lien possible, il serait alors intéressant de voir cela de plus près

3

Dynamique symbolique

Dans ce chapitre on verra essentiellement le codage des Anosov linéaires du tore, l'exemple le plus connu étant celui du tore de dimension 2. L'existence de partition de Markov permet de déduire une représentation symbolique d'un système dynamique. Une bonne représentation symbolique est celle qui permet de caractériser les orbites (périodicité, densité, etc.).

Deux difficultés fondamentales se présentent, la première est que l'on ne peut pas toujours obtenir une correspondance bijective et continue, la seconde est que le système symbolique n'est pas forcément de type fini.

3.1 Systèmes symboliques

3.1.1 Ensemble des suites

Notation 3.1.1 Pour $q \geq 2$,

$$\Omega_q = \{\omega = (\dots\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) / \omega_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}\}$$

$\Omega_q = \{0, 1, \dots, q-1\}^{\mathbb{Z}}$ appelé ensemble des suites.

$\{0, 1, \dots, q-1\}$ est appelé alphabet.

3.1.2 Structure topologique

On muni Ω_q de la topologie induite par la métrique définie pour $\lambda > 1$, par :

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d(\omega_n, \omega'_n)}{\lambda^{|n|}}$$

avec

$$d(\omega_n, \omega'_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_n \neq \omega'_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons $\omega, \omega' \in \Omega_q$ avec $\omega \neq \omega'$, alors $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega_n \neq \omega'_n$ d'où $d(\omega_n, \omega'_n) = 1$

Notons

$$N = \min \{n \in \mathbb{N} / \omega_n \neq \omega'_n \text{ ou } \omega_{-n} \neq \omega'_{-n}\}$$

alors

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \frac{1}{\lambda^N}$$

(en effet $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d(\omega_n, \omega'_n)}{\lambda^{|n|}}$ correspond à la plus petite valeur $|n|$ telle que $\omega_n \neq \omega'_n$)

Donc pour $r > 0$, $d_\lambda(\omega, \omega') < r$ entraîne $\frac{1}{\lambda^N} < r$ donc $N > -\frac{\log r}{\log \lambda}$

On a: $\forall n \in \mathbb{Z}; \quad |n| < N, \quad \omega_n = \omega'_n.$

Définition 3.1.1 On appelle *cylindre* l'ensemble

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}^{n_1 n_2 \dots n_p} = \{\omega \in \Omega_q / \omega_{n_i} = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, p\}$$

Pour $n_1 < n_2 < \dots < n_p \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Et pour $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$C_{\alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_{k-1}}^{-k+1, \dots, k-1}$$

est appelé *cylindre symétrique*.

Proposition 3.1.1 Soient $\alpha \in \Omega_q$, $r > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k > -\frac{\log r}{\log \lambda}$.

Le cylindre $C_{\alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_{k-1}}^{-k+1, \dots, k-1}$ correspond à la boule ouverte de centre α et de rayon r pour la métrique d_λ . i.e

$$C_{\alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_{k-1}}^{-k+1, \dots, k-1} = \{\omega \in \Omega_q / d_\lambda(\alpha, \omega) < r\}$$

Preuve. .

Soit $\omega \in C_{\alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_{k-1}}^{-k+1, \dots, k-1}$ on a donc pour tout i tel que ;

$$-k+1 \leq i \leq k-1, \quad \omega_i = \alpha_i$$

$$\left| \begin{array}{c} i \\ \alpha \\ \omega \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \dots\dots \\ \dots\dots \alpha_{-k} \\ \dots\dots \omega_{-k} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} -k+1, \dots\dots, 0, \dots\dots, k-1 \\ \alpha_{-k+1}, \dots\dots, \alpha_0, \dots\dots, \alpha_{k-1} \\ \alpha_{-k+1}, \dots\dots, \alpha_0, \dots\dots, \alpha_{k-1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \dots\dots \\ \alpha_k \dots\dots \\ \omega_k \dots\dots \end{array} \right|$$

◇ Si $\omega \neq \alpha$; alors il existe n ; $|n| \geq k$ tel que $\omega_n \neq \alpha_n$.

Notons $N = \min \{n \in \mathbb{N} / \omega_n \neq \alpha_n \text{ ou } \omega_{-n} \neq \alpha_{-n}\}$, alors $N \geq k$, donc:

$$d_\lambda(\alpha, \omega') = \frac{1}{\lambda^N} \leq \frac{1}{\lambda^k} < r$$

D'où

$$\omega \in B^0(\alpha, r)$$

◇ Inversement, si $\omega \in B^0(\alpha, r)$, $\omega \neq \alpha$; on a:

$$d_\lambda(\alpha, \omega) < r < \frac{1}{\lambda^k} \quad \text{car} \quad k > -\frac{\log r}{\log \lambda}.$$

Comme $d_\lambda(\alpha, \omega') = \frac{1}{\lambda^N} < r < \frac{1}{\lambda^k}$, alors $N > k$

$$\left| \begin{array}{c} i \\ \alpha \\ \omega \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \dots\dots \\ \dots\dots\alpha_{-k} \\ \dots\dots\omega_{-k} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} -N+1, \dots, -k+1, \dots, 0, \dots, k-1, \dots, N-1 \\ \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{N-1} \\ \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{N-1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \dots\dots \\ \alpha_k \dots\dots \\ \omega_k \dots\dots \end{array} \right|$$

i.e

$$\forall n \in \mathbb{Z}; |n| < k, \text{ on a } \omega_n = \alpha_n$$

D'où $\omega \in C_{\alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_{k-1}}^{-k+1, \dots, k-1}$. ■

Lemme 3.1.1 *Le cylindre $C_{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_p}}^{n_1 n_2 \dots n_p}$ est un ouvert pour la topologie induite par d_λ .
où $(n_1 < n_2 < \dots < n_p)$.*

Preuve. .

Notons k l'entier tel que $-k < n_1$ et $n_p < k$, on a que:

$$C_{\alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_{k-1}}^{-k+1, \dots, k-1} \subset C_{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_p}}^{n_1 n_2 \dots n_p}$$

en effet si $\omega \in C_{\alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_{k-1}}^{-k+1, \dots, k-1}$, alors $\omega_i = \alpha_i$, pour tout i , $(-k+1) \leq i \leq (k-1)$, donc en particulier pour tout i , $n_1 \leq i \leq n_p$.

Cela implique que $C_{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_p}}^{n_1 n_2 \dots n_p}$ est voisinage de chacun de ses points. ■

3.1.3 Application Shift ou décalage

Définition 3.1.2 *On appelle **shift** (vers la gauche) l'application $\sigma_q : \Omega_q \rightarrow \Omega_q$ définie par $(\sigma_q(\omega))_n = \omega_{n+1}$.*

Proposition 3.1.2 *σ_q est un homéomorphisme.*

Preuve. .

Soient $\alpha, \beta \in \Omega_q$ on a:

$$d_\lambda(\sigma_q(\alpha), \sigma_q(\beta)) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})}{\lambda^{|n|}}$$

or

$$|n+1| \leq |n| + 1 \implies \lambda^{|n+1|} < \lambda^{|n|+1}$$

d'où:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})}{\lambda^{|n|}} \leq \left[\lambda \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})}{\lambda^{|n+1|}} = \lambda \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d(\alpha_n, \beta_n)}{\lambda^{|n|}} \right]$$

i.e $d_\lambda(\sigma_q(\alpha), \sigma_q(\beta)) < \lambda d_\lambda(\alpha, \beta)$ donc σ_q est continue car λ -lipschitzienne.

Soit $\varpi = \sigma_q(\omega)$ alors $\varpi_n = \omega_{n+1}$ donc $\omega_n = \varpi_{n-1}$.

D'où σ_q est inversible et son inverse est définie par $(\sigma_q^{-1}(\omega))_n = \omega_{n-1}$.

Deux suites $\alpha, \beta \in \Omega_q$ tels que $\alpha \neq \beta$ ont leurs images par σ_q différentes,

car il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha_m \neq \beta_m$ et donc,

$$(\sigma_q(\alpha))_{m-1} \neq (\sigma_q(\beta))_{m-1} \quad \text{d'où} \quad \sigma_q(\alpha) \neq \sigma_q(\beta),$$

ce qui signifie que σ_q est injective. ■

* Le couple (Ω_q, σ_q) constitue un système dynamique topologique inversible. appelé **système symbolique**.

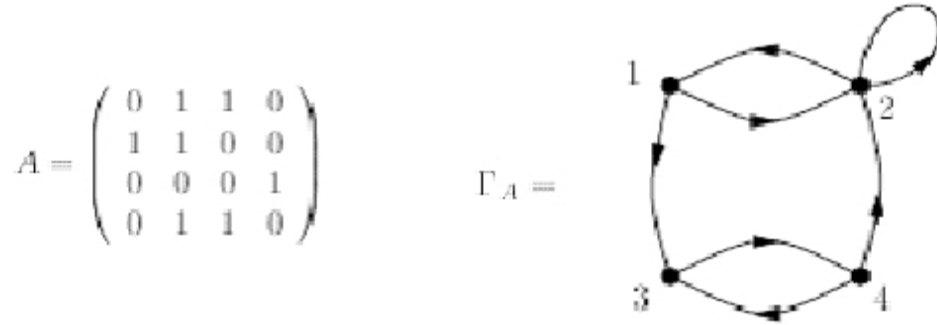
3.2 Sous-shift de type fini

$A = (A_{ij})$ une matrice carrée $q \times q$ telle que $A_{ij} = 0$ ou 1 on note

$$\Omega_A = \{ \omega \in \Omega_q / \forall n \in \mathbb{Z}, A_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1 \}$$

Définition 3.2.1 On appelle **sous-shift de type fini** le système dynamique (Ω_A, σ_A) , avec Ω_A est l'espace muni de la topologie induite par celle de Ω_q et σ_A est la restriction de σ_q à Ω_A .

1. (Ω_A, σ_A) est aussi appelé système (ou chaîne) de **Markov**.
2. A est appelée matrice d'**incidence**.
3. Si $A_{ij} = 1 \forall i, j$ on a $(\Omega_A, \sigma_A) = (\Omega_q, \sigma_q)$.



4. On associe à A un graphe Γ_A qui constitue un ensemble d'arêtes allant d'un sommet à un autre, lorsqu'elles existent. En d'autres termes, il existe une arête allant du sommet i vers le sommet j , qu'on représente par $i \rightsquigarrow j$, si et seulement si le coefficient $A_{ij} = 1$.

Lemme 3.2.1 On note pour $\alpha \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, $C_\alpha = \{\omega \in \Omega_A / \omega_0 = \alpha\}$. Alors,

$$\text{Card} \left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1, \dots, q-1\}^{n+1} / C_{\alpha_0} \cap \sigma^{-1}(C_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \sigma^{-n}(C_{\alpha_n}) \neq \emptyset, \alpha_0 = \alpha, \alpha_n = \beta \right\} = (A^n)_{\alpha\beta}$$

Preuve. .

.Remarquons que

$$\left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1, \dots, q-1\}^{n+1} / C_{\alpha_0} \cap \sigma^{-1}(C_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \sigma^{-n}(C_{\alpha_n}) \neq \emptyset, \alpha_0 = \alpha, \alpha_n = \beta \right\}$$

est aussi l'ensemble

$$\left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1, \dots, q-1\}^{n+1} / \alpha_0 = \alpha, \alpha_n = \beta \text{ et } \forall k = 0, \dots, n-1, A_{\alpha_k \alpha_{k+1}} = 1 \right\}.$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0j} & \dots & \dots & A_{0,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i0} & \dots & \dots & A_{ij} & \dots & \dots & A_{i,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q-1,0} & \dots & \dots & A_{q-1,j} & \dots & \dots & A_{q-1,q-1} \end{bmatrix}$$

alors $(A^2)_{ij} = A_{i0}A_{0j} + A_{i1}A_{1j} + \dots + A_{ij}A_{ij} + \dots + A_{i,q-1}A_{q-1j}$.

$A_{ik}A_{kj} = 1$ signifie qu'il existe une arête allant de i à j passant par le sommet k .

On dit que le "chemin" allant de i vers j est de longueur deux car passant par le sommet k .

Ainsi le nombre de "chemins" de longueur 2 allant de i vers j est égal au coefficient $(A^2)_{ij}$.

Par récurrence on obtient que le nombre de "chemins" de longueur n allant de i vers j est exactement égal au coefficient $(A^n)_{ij}$. ■

3.3 Propriétés topologiques

3.3.1 Orbite périodique

Lemme 3.3.1 Soit $P_k = \{\omega \in \Omega_A / \sigma_A^k(\omega) = \omega\}$ l'ensemble des points périodiques de période k alors

$$\text{Card } P_k = \text{tr } A^k$$

Preuve. .

$$(\sigma_A^2(\omega))_n = (\sigma_A(\sigma_A(\omega)))_n = (\sigma_A(\omega))_{n+1} = \omega_{n+2},$$

$$\text{par récurrence on obtient: } (\sigma_A^k(\omega))_n = \omega_{n+k}, \quad k \geq 0$$

$$\omega \in P_k \implies (\omega) = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) \text{ et } (\sigma_A^k(\omega))_n = \omega_{n+k} = \omega_n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

on a pour tout $\omega \in P_k$, il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \in \{0, 1, \dots, q-1\}^k$ tel que :

$$\alpha_0 = \omega_0, \alpha_{k-1} = \omega_{k-1}, \alpha_k = \omega_0, \text{ et } \forall i = 0, \dots, k-1, A_{\alpha_i \alpha_{i+1}} = 1,$$

posons $\alpha = \omega_0$, et notons

$$P_k^\alpha = \left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \in \{0, 1, \dots, q-1\}^k / \alpha_0 = \alpha, \alpha_k = \alpha \text{ et } \forall k = 0, \dots, n-1, A_{\alpha_k \alpha_{k+1}} = 1 \right\}$$

ce qui veut dire que $P_k = \bigcup_{\alpha} P_k^\alpha$, $\text{Card } P_k^\alpha = (A^k)_{\alpha\alpha}$, or $\text{tr } A^k = \sum_{\alpha} (A^k)_{\alpha\alpha}$.

D'où le résultat. ■

Remarque 3.3.1 On a soit $\text{tr } A = 0$, soit $\text{tr } A \geq 1$, ce qui entraîne que le nombre de points périodiques d'un sous-shift croît exponentiellement.

3.3.2 Transitivité-mélange

Proposition 3.3.1 Soit (Ω_A, σ_A) un sous shift de type fini, pour $k \geq 0$, notons $(A^k)_{ij}$ les coefficients de

$$A^k, 0 \leq i, j \leq q-1. \text{ On a alors:}$$

1. (Ω_A, σ_A) est transitif si et seulement pour tous $0 \leq i, j \leq q-1$, il existe $k > 0$, tel que $(A^k)_{ij} > 0$
2. (Ω_A, σ_A) est topologiquement mélangeant si et seulement si pour tous $0 \leq i, j \leq q-1$, il existe $k > 0$, tel que $(A^l)_{ij} > 0, \forall l \geq k$.

Preuve. . voir [3]. ■

Remarque 3.3.2 (Ω_q, σ_q) n'est pas minimal puisque par exemple la suite $\omega = (\omega_n)_n$ avec $\forall n \in \{0, \dots, q-1\}, \omega_n = \omega_0$ est un point fixe.

On peut aussi le voir autrement, les orbites périodiques étant des ensembles fermés non vides σ_q -invariants et différents de Ω_q .

Proposition 3.3.2 (Ω_q, σ_q) est transitif

Preuve. .

Puisque $(A)_{ij} = 1 \forall i, j$ donc pour tous $0 \leq i, j \leq q-1$, il existe $k > 0$, tel que $(A^k)_{ij} > 0$.

On peut aussi le voir autrement, en effet il existe un point d'orbite dense.

L'ensemble des suites finies à valeurs dans $\{0, \dots, q-1\}$ est dénombrable,

donc en mettant l'ensemble de ces suites bout à bout on obtient un point d'orbite dense.

■

Proposition 3.3.3 On a $\overline{Per\sigma_q} = \Omega_q$.

Preuve. .voir[15]

Soit $\varpi \in \Omega_q$, comment l'approcher par une suite de points périodiques de Ω_q .

Remarquons que si $\omega = (\omega^m)_m \subset \Omega_q$ est une suite de points périodiques de Ω_q ,

i.e chaque $\omega^m = (\omega_n^m)_n \in \Omega_q$ est un point périodique, alors pour chaque m

il existe k_m tel que $\sigma_q^{k_m}(\omega^m) = \omega^m$ ce qui équivaut à $\omega_{n+k_m}^m = \omega_n^m$.

On peut trouver un entier k tel que $\sigma_q^k(\omega) = \omega$, i.e $\omega_{n+k}^m = \omega_n^m$.

En d'autres termes, ω est un point périodique de Ω_q .

Soit U un ouvert contenant ϖ ,

$$U = \bigcup_p C_{\varpi_{n_1}, \dots, \varpi_{n_p}}^{m_1 n_2 \dots n_p}$$

On choisit N le plus grand possible de sorte que $C_{\varpi_{-N}, \dots, \varpi_N}^{-N, \dots, N}$ contienne une suite de points périodiques. ■

Proposition 3.3.4 (Ω_q, σ_q) est sensible aux conditions initiales.

Preuve. .

Soient $\omega, \varpi \in \Omega_q$ avec $\omega \neq \varpi$ alors il existe n tel que $\omega_n \neq \varpi_n$.

Comme $\sigma_q^n(\omega) = \sigma_q^n((\omega_k)_k) = (\omega_{n+k})_k$ donc $(\sigma_q^n(\omega))_0 = \omega_n$.

Il en résulte que $(\sigma_q^n(\omega))_0 \neq (\sigma_q^n(\varpi))_0$

d'où

$$d((\sigma_q^n(\omega)), (\sigma_q^n(\varpi))) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d(\omega_{n+k}, \varpi_{n+k})}{\lambda^{|k|}} \geq d(\omega_n, \varpi_n) = 1$$

(Ω_q, σ_q) est donc expansif. ■

Conclusion 3.3.1 (Ω_q, σ_q) est un système chaotique.

3.4 Représentation symbolique

Nous allons nous contenter de voir la technique de codage sur un exemple simple sachant que

Définition 3.4.1 Soit $\mathfrak{R} = \{R_\alpha\}_{\alpha \in \Upsilon}$ une partition de Markov, On appelle matrice d'incidence associée à \mathfrak{R} ,

la matrice $A = (A_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Upsilon}$ définie par :

$$A_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\overset{\circ}{R}_\alpha) \cap \overset{\circ}{R}_\beta \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 3.4.1 Reprenons l'exemple (10), de la partition de Markov $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$, on a:

$$\begin{aligned} f(\overset{\circ}{R}_5) \cap \overset{\circ}{R}_j &\neq \emptyset && \text{pour } j = 4, 5 \\ f(\overset{\circ}{R}_5) \cap \overset{\circ}{R}_i &= \emptyset && \text{pour } i = 1, 2, 3. \\ f(\overset{\circ}{R}_4) \cap \overset{\circ}{R}_i &\neq \emptyset && \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ f(\overset{\circ}{R}_4) \cap \overset{\circ}{R}_j &= \emptyset && \text{pour } j = 4, 5 \\ f(\overset{\circ}{R}_3) \cap \overset{\circ}{R}_i &= \emptyset && \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ f(\overset{\circ}{R}_3) \cap \overset{\circ}{R}_j &\neq \emptyset && \text{pour } j = 4, 5 \\ f(\overset{\circ}{R}_2) \cap \overset{\circ}{R}_i &\neq \emptyset && \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ f(\overset{\circ}{R}_2) \cap \overset{\circ}{R}_j &= \emptyset && \text{pour } j = 4, 5. \\ f(\overset{\circ}{R}_1) \cap \overset{\circ}{R}_i &\neq \emptyset && \text{pour } i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$f(\dot{R}_1) \cap \dot{R}_j = \emptyset \quad \text{pour } i = 4, 5$$

On obtient la matrice d'incidence associée suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{à laquelle on associe le graphe } \Gamma_A \text{ suivant :}$$

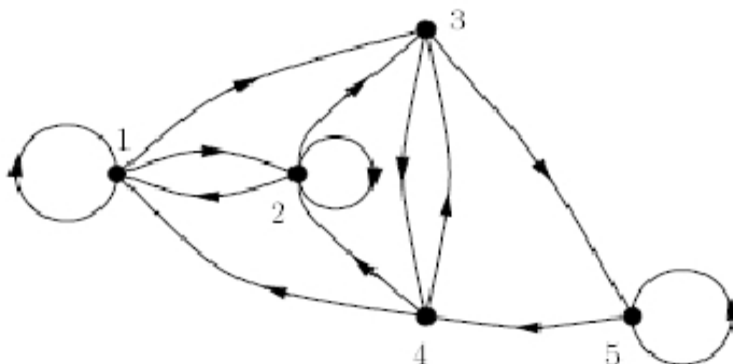


Figure 3.4.1 : le graphe Γ_A

Question: On peut alors se demander quelle est la nature de la correspondance entre le sous-shift de type fini associé à la matrice A , et la transformation du tore de l'exemple (10).

C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.4.1 Partition de Markov pour les Anosov linéaire du tore

Théorème 3.4.1 Soit $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ un automorphisme linéaire hyperbolique, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition de Markov \mathfrak{R} pour f_L par des rectangles de diamètre au plus ε .

Notons $\mathfrak{R} = (R_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}$ une partition de Markov pour f_L , A la matrice d'incidence associée à \mathfrak{R} et (Ω_A, σ_A) le sous-shift de type fini associé. On a alors :

1. Pour tout $\omega \in \Omega_A$, l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_L^{-n}(R_{\omega_n})$ est réduite à un point, qu'on note $\pi(\omega)$.
2. L'application $\pi : \Omega_A \rightarrow \mathbf{T}^k$ est continue, surjective et vérifie $f_L \circ \pi = \pi \circ \sigma_A$.

La démonstration repose sur les outils suivants:

Définition 3.4.2 Soit (X, f) un système dynamique topologique inversible, on appelle ε - pseudo - orbite de f toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de X telle que:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \varepsilon.$$

Définition 3.4.3 On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de X est ε - pistée par l'orbite de $x \in X$ si on a:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} d(f^n(x), x_n) \leq \varepsilon.$$

Lemme 3.4.1 (Lemme de pistage) Si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, alors toute ε - pseudo - orbite de f_L est $\frac{\varepsilon}{1 - ch(L)}$ - pistée par une unique orbite de f_L .

Corollaire 3.4.1 (Lemme de fermeture) Pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et tout $x \in \mathbf{T}^k$ tel que $d(f^n(x), x) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $y \in \mathbf{T}^k$ tel que:

$$f^n(y) = y \text{ et } \forall i = 0, \dots, n-1 \ d(f^i(x), f^i(y)) \leq \frac{\varepsilon}{1 - ch(L)}.$$

Remarque 3.4.1 Voir [1] pour des versions générales de ce lemme (Closing lemma)

Ce lemme permet de construire des orbites périodiques près de tout point récurrent, ce qui nous ramène au lemme de fermeture d'Anosov.(2.14) dans le paragraphe (2.5)

Preuve. du théorème (3.10).

(La démonstration étant trop technique, j'en donne juste les idées essentielles pour plus de détails voir [14], [16]).

On choisit $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

1- On procède par récurrence pour montrer que, $\bigcap_{n=0}^m f_L^{-n}(R_{\omega_n})$ est un sous-rectangle stable.

Il en est de même pour $\bigcap_{n \leq 0} f_L^{-n}(R_{\omega_n})$ qui est alors un sous rectangle instable.

Par passage à la limite on obtient que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_L^{-n}(R_{\omega_n})$ est un sous-rectangle non vide.

Le lemme de pistage permet de conclure, puisque deux points de l'intersection auraient des orbites qui se ε_0 - pistent.

2- la compacité et (1) donnent $\lim_{m \rightarrow +\infty} \text{diam} \left(\bigcap_{n=-m}^m f_L^{-n}(R_{\omega_n}) \right) = 0$.

Cela implique la continuité de π .

Considérons $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_L^{-n}(\hat{\mathfrak{R}})$, rappelons le théorème de Baire

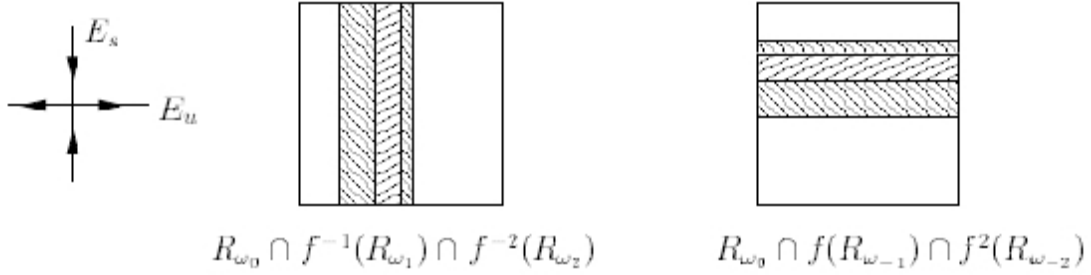


Figure 3.4.2 : sous-rectangles stables et instables

Théorème 3.4.2 (de Baire) Soit X un espace métrique compact, Si $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ouverts denses dans X alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset X$ est dense.

L'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_L^{-n}(\hat{\mathfrak{R}})$ est dense dans \mathbf{T}^k .

De plus tout point de $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_L^{-n}(\hat{\mathfrak{R}})$ est dans $\pi(\Omega_A)$ qui est compact.

On conclut que π est surjective.

Pour la construction de la partition de Markov, nous en donnons juste une ébauche , voir [15]

La première étape consiste à choisir un recouvrement fini de \mathbf{T}^k par des boules $B(x_i, \eta)$, où

$$\eta \leq \frac{\varepsilon(1 - ch(L))}{2(1 + \|L\|)}.$$

On note \hat{A} la matrice donnée par:

$$\hat{A}_{i,j} = 1 \text{ si et seulement si } f(x_i) \in B(x_j, \eta(1 + \|L\|))$$

et $(\Omega_{\hat{A}}, \sigma_{\hat{A}})$ le sous shift associé.

Pour ω dans $\Omega_{\hat{A}}$, on construit une $\eta(1 + \|L\|)$ - pseudo - orbite (x_{ω_n})

puis on applique le lemme de pistage, qui affirme $(x_{\omega_n})_n$ est $\frac{\eta(1+\|L\|)}{1-ch(L)}$ - pistée par l'unique orbite d'un point noté $\rho(\omega)$ de \mathbf{T}^k .

On continue en utilisant (1) et (2) et on obtient $\rho : \Omega_{\hat{A}} \rightarrow \mathbf{T}^k$.

On note $\Omega_i^0 = \{\omega \in \Omega_{\hat{A}} / \omega_0 = i\}$ et $\hat{R}_i = \rho(\Omega_i^0)$, on montre alors que le recouvrement

$\hat{\mathfrak{R}} = (\hat{R}_i)_{i \in I}$ convient. ■

Conclusion 3.4.1 Pour tout Anosov linéaire du tore, il existe un sous-shift de type fini qui lui est topologiquement semi-conjugué. De là, on peut se demander si cette

semi-conjugaison pourrait être en fait une conjugaison quitte à enlever un ensemble négligeable.

D'où l'intérêt du chapitre suivant.

De manière générale, on a :

Théorème 3.4.3 *Un système dynamique (X, f) **expansif** est **facteur** d'un sous-shift de type fini (Ω_A, σ_A) , si et seulement si (X, f) possède une **partition de Markov**. (voir[11]).*

4

Systèmes dynamiques et théorie ergodique

Le recours à la théorie ergodique s'est imposé du fait que dans certaines expériences sont apparus des phénomènes que le point de vue topologique à lui seul n'a pu expliquer.

4.1 Espaces mesurés et mesures

Définition 4.1.1 Soit X un ensemble. Une famille \mathcal{A} de sous ensembles de X est appelée σ -algèbre ou tribu si:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3. $A_i \in \mathcal{A}, i \geq 1 \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

le couple (X, \mathcal{A}) est appelé espace de mesure ou **espace mesurable**.

Définition 4.1.2 On dit que \mathcal{A} est engendré par \mathcal{A}_0 si $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ et toute σ -algèbre contenant \mathcal{A}_0 contient \mathcal{A} , ce qui signifie que \mathcal{A} est la plus petite σ -algèbre contenant \mathcal{A}_0 .

Exemple 4.1.1 Soit X un espace topologique. La famille des ouverts de X engendre une σ -algèbre appelée " σ -algèbre de Borel" ou "tribu des Boréliens". Les éléments de cette tribu sont appelés **Boréliens**. Cette tribu contient les fermés de X , donc engendrée par les fermés aussi.

Remarque 4.1.1 Une σ -algèbre est une famille plus large qu'une topologie. Notons \mathcal{A}_0 la famille des ouverts d'un espace topologique X et \mathcal{A} une σ -algèbre contenant \mathcal{A}_0 .

Soient $A_i \in \mathcal{A}_0, i \geq 1$. On a $\bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$ car $\bigcap_{i \geq 1} A_i = \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i^c \right)^c$ et puisque $A_i^c \in \mathcal{A}$, alors $\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i^c \right)^c \in \mathcal{A}$. Par contre $\bigcap_{i \geq 1} A_i$ n'est pas forcément dans \mathcal{A}_0 .

Définition 4.1.3 Un espace métrique X est dit séparable, s'il contient un sous ensemble dénombrable dense.

Une famille $(V_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X est une base de la topologie, si tout ouvert V de X est tel que $V = \bigcup_{i \in J} V_i$ où $J \subset I$.

Théorème 4.1.1 Un espace métrique X est séparable si et seulement si X est à base dénombrable d'ouverts.

Remarque 4.1.2 Un espace métrique compact est séparable.

Définition 4.1.4 Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. L'application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ est une **mesure** si pour toute famille $(A_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints,

on a:

$$\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$$

Exemple 4.1.2 masses de Dirac

Soit X un espace métrique compact et B_X la tribu des boréliens de X , on définit pour $x \in X$, l'application $\delta_x : B_X \rightarrow [0, +\infty]$ par $\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour $A \in B_X$,

δ_x est une mesure.

En effet si on considère une famille de sous ensembles disjoints $(A_i)_i \subset B_X$

Soit $x \in \bigcup_i A_i$ alors $\exists i \geq 1$ tel que $x \in A_i$ donc $\delta_x(A_i) = 1$ et $\delta_x\left(\bigcup_i A_i\right) = 1$,

puisque $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall j \neq i$ alors $\sum_i \delta_x(A_i) = \delta_x(A_i) = 1$.

Exemple 4.1.3 mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^k .

Soit \mathcal{A} la tribu des boréliens de \mathbb{R}^k . L'application $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ définie pour tout ouvert

$$A :=]a_1, b_1[\times \dots \times]a_N, b_N[$$

par:

$$\lambda(A) = (b_1 - a_1) \dots (b_N - a_N)$$

est une mesure, appelée **mesure de Lebesgue**.

Exemple 4.1.4 Mesures de Radon.

Soit E un espace de Banach localement compact, on désigne par,

$$L(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ continue / supp } f \text{ compact}\}$$

On appelle mesure de **Radon** sur E , l'application linéaire $\mu : L(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par:

$$\mu(f) = \int_E f(x) d\mu(x)$$

Sur un groupe topologique G localement compact, une mesure de Radon μ est dite de **Haar** si et seulement si

$$\forall g \in G \int_G f(x) d\mu(x) = \int_G f(g^{-1}x) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(gx)$$

i.e μ est invariante à gauche.

Définition 4.1.5 Un espace mesuré est le triplet (X, \mathcal{A}, μ) où (X, \mathcal{A}) est un espace mesurable et μ une mesure sur X .

1. Si $X = \bigcup_{i \geq 1} A_i$ avec $\mu(A_i) < +\infty$, on dit que X est σ -fini.
2. Si $\mu(X) = 1$ on dit que (X, \mathcal{A}, μ) est un espace de probabilité.

Définition 4.1.6 Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, un élément $A \in \mathcal{A}$ est dit μ -négligeable si $\mu(A) = 0$.

Exemple 4.1.5 L'ensemble de Cantor est un ensemble de mesure (de Lebesgue) nulle.

4.1.1 Application mesurable

Définition 4.1.7 Soient X et Y deux ensembles et \mathcal{A} et \mathcal{B} leurs σ -algèbres respectives. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite mesurable si:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \text{ pour tout } B \in \mathcal{B}$$

Définition 4.1.8 Soient f, g deux applications mesurables sur (X, \mathcal{A}, μ) . On dit que $f = g$ μ -presque partout si l'ensemble $\{f \neq g\}$ est μ -négligeable.

On note $f = g \mu - p.p$

Définition 4.1.9 Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} mesurable et $f : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que φ est f -invariante si

$$\varphi \circ f = \varphi \quad \mu.p.p$$

Remarque 4.1.3 Dans le cas où X et Y sont deux espaces **topologiques**, munis de leurs tribus **boréliennes** respectives, toute application $f : X \rightarrow Y$ **continue** est **mesurable**.

Exemple 4.1.6 On se donne un espace mesurable (X, \mathcal{A}) . On définit pour $A \in \mathcal{A}$ la fonction $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie

$$\text{par: } \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A^c \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \quad \text{qu'on appelle fonction } \mathbf{caractéristique} \text{ de } A.$$

Soit $B \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbf{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B \\ A & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \in B \\ A^c & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \\ X & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \in B \end{cases} \quad \text{et donc } \mathbf{1}_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

4.1.2 Intégrabilité des applications mesurables

Définition 4.1.10 Soit (Ω, F) un espace mesurable, μ une mesure sur Ω et $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C}) est μ -intégrable si:

1. ϕ est mesurable
2. $\int_{\Omega} |\phi| d\mu < \infty$, où $|\phi| = \phi^+ + \phi^-$ avec $\phi^+ = \max(\phi, 0)$ et $\phi^- = \max(-\phi, 0)$ sont de signe positif sur Ω .
3. si $A \in F$, ϕ est μ -intégrable sur A si $\phi \mathbf{1}_A$ est μ -intégrable au sens si dessus.

Remarque 4.1.4 En considérant $\phi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$, on peut écrire $\phi = \phi^+ - \phi^-$. On a alors,

$$\int_{\Omega} \phi d\mu \text{ existe si et seulement si } \int_{\Omega} \phi^+ d\mu \text{ et } \int_{\Omega} \phi^- d\mu \text{ existent, puisque } |\phi| = \phi^+ + \phi^-.$$

Il en est de même si $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on considère alors $\text{Re}(\phi)$ et $\text{Im}(\phi)$ on aura,

$$\int_{\Omega} \phi d\mu \text{ existe si et seulement si } \int_{\Omega} \text{Re}(\phi) d\mu \text{ et } \int_{\Omega} \text{Im}(\phi) d\mu \text{ existent.}$$

En d'autres termes une fonction ϕ est μ -intégrable si et seulement si $\int_{\Omega} |\phi| d\mu < \infty$.

Notation 4.1.1 On note $L^1(\Omega, F, \mu)$, l'ensemble des fonctions μ -intégrables sur Ω .

Théorème 4.1.2 (de transfert) Soient $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables et $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ une application mesurable. Soit μ une mesure sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ et $\nu := \mu \circ \varphi^{-1}$ sa mesure image sur

$(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$. Soit $h : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{k} \sqsubseteq (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ une application mesurable. Alors, h est ν -intégrable si et seulement si $h \circ \varphi$ est μ -intégrable et on a :

$$\int_{\Omega_1} h \circ \varphi \, d\mu = \int_{\Omega_2} h \, d\nu$$

Théorème 4.1.3 (représentation de Riesz) Soit X un espace métrique compact muni de sa tribu de Borel. Pour chaque application linéaire $\alpha : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique mesure de probabilité μ sur X telle que :

$$\alpha(f) = \int_X f \, d\mu$$

4.2 Mesure invariante

4.2.1 Application préservant la mesure

Définition 4.2.1 Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux espaces mesurables, $f : X \rightarrow Y$ une application mesurable et μ une mesure définie sur \mathcal{A} . On appelle mesure image de μ par f , la mesure notée $\mu_* f$ définie sur \mathcal{B} par :

$$\mu_* f(B) = \mu(f^{-1}(B)) \quad \text{pour } B \in \mathcal{B}.$$

Définition 4.2.2 Soient (X, \mathcal{A}, μ) et (Y, \mathcal{B}, ν) deux espaces mesurables et $f : X \rightarrow Y$ une application mesurable. On dit que f **préserve** la mesure si :

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad , \quad \mu(f^{-1}(B)) = \nu(B).$$

Remarque 4.2.1 Si $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu)$, on dit que la **mesure est invariante** pour f ou f -invariante.

Proposition 4.2.1 Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace de probabilité et $f : X \rightarrow X$ une transformation \mathcal{A} -mesurable, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f préserve μ .

(ii) pour tout $\phi : X \rightarrow [0, \infty)$ \mathcal{A} -mesurable, on a $\int_X \phi \, d\mu = \int_X \phi \circ f \, d\mu$.

Preuve. .

(i) \implies (ii) théorème de transfert.

(ii) \implies (i) théorème de représentation de Riesz. ■

Remarque 4.2.2 *les applications préservant la mesure sont les morphismes des espaces de mesures, autrement dit elles respectent la structure de ces espaces.*

4.2.2 Existence de mesure invariante

Définition 4.2.3 (mesure borélienne) *Soit X un espace localement compact séparable et B sa σ -algèbre des boréliens. Une mesure borélienne μ est une mesure définie sur B , telle que $\mu(K) < \infty$, si K est compact.*

Théorème 4.2.1 (Krylov-Bogolubov) *Toute application continue d'un espace compact mesurable dans lui même admet une mesure de probabilité borélienne invariante.*

Théorème 4.2.2 *Soit G un groupe topologique compact possédant une base dénombrable de la topologie. Alors il existe une **unique** mesure de Haar μ **normalisée** sur G . De plus, μ est également invariante par translation à droite.*

Plus particulièrement on a:

Théorème 4.2.3 *Il existe une unique mesure de Radon sur le tore \mathbf{T}^k invariante par les translations et de masse totale 1. On note θ la mesure de Haar de \mathbf{T}^k ; elle est donnée par la relation :*

$$\forall \varphi \in C^0(\mathbf{T}^k, \mathbb{C}), \theta(\varphi) = \int_{\mathbf{T}^k} \varphi \cdot d\theta = \int_{[0,1]^k} \varphi \circ \pi(x) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

Notation 4.2.1 *On note $M_f(X)$, l'ensemble des mesures de probabilité f -invariantes.*

Remarque 4.2.3 *$M_f(X)$ est une partie convexe de l'ensemble $M(X)$ des mesures de X muni de la topologie de la convergence faible.*

4.3 Systèmes dynamiques mesurés.

Définition 4.3.1 *Le quadruplet (X, \mathcal{A}, μ, f) , avec (X, \mathcal{A}, μ) un espace de probabilité et $f : X \rightarrow X$ une transformation \mathcal{A} -mesurable qui préserve μ , est appelé **système dynamique mesuré**.*

Exemple 4.3.1 décalage de Bernoulli unilatéral

Soit $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$, notons $\Sigma_p = \{1, 2, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
où $x_n \in \{1, 2, \dots, p\}$.

On muni Σ_p de la topologie induite par la métrique définie par:

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta(x_n, y_n)}{2^n} \quad \text{où} \quad \delta(x_n, y_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n = y_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

notons \mathbf{B} la tribu borélienne sur Σ_p .

Considérons un vecteur q de \mathbb{R}^p tel que $q_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$ et $\sum_{i=1}^p q_i = 1$.

Notons v_q l'application définie par: $v_q(A) = \sum_{i \in A} q_i$ où $A \subset \{1, 2, \dots, p\}$

Soient $(A_i)_{i \geq 1} \subset \{1, 2, \dots, p\}$ disjoints, alors

$$v_q \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i \right) = \sum_{i \in \bigcup_{j \geq 1} A_j} q_i = \sum_{j \geq 1} \sum_{i \in A_j} q_i = \sum_{j \geq 1} v_q(A_j)$$

et

$$v_q(\{1, 2, \dots, p\}) = \sum_{i=1}^p q_i = 1$$

v_q est donc une mesure de probabilité sur la tribu engendrée par les parties de $\{1, 2, \dots, p\}$.

$\sigma_p : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$ définie par:

$$\sigma_p((x_n)) = (y_n) \quad \text{telle que} \quad y_n = x_{n+1}$$

Considérons la projection $\pi_k : \Sigma_p \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$, $k \in \mathbb{N}$

$$(x_n) \mapsto x_k$$

\mathbf{B} est alors engendrée par les $\pi_k^{-1}(A)$; $A \subset \{1, 2, \dots, p\}$, $\sigma_p^{-1}(\pi_k^{-1}(A)) = \pi_{k+1}^{-1}(A)$.

En effet soit $(x_n) \in \sigma_p^{-1}(\pi_k^{-1}(A))$, alors $\sigma_p((x_n)) \in \pi_k^{-1}(A)$

d'où $\pi_k(\sigma_p((x_n))) = \pi_k((y_n)) = y_k = x_{k+1}$ i.e $(x_n) \in \pi_{k+1}^{-1}(A)$.

D'où σ_p est \mathbf{B} -mesurable.

Soit alors l'application définie par: $\mu_q(\pi_k^{-1}(A)) = \bigoplus_{q_i} v_{q_i}(A)$ mesure produit

Remarquons que

$$\bigcup_j \pi_k^{-1}(A_j) = \pi_k^{-1} \left(\bigcup_j A_j \right)$$

Soient $(A_j)_{j \geq 1} \subset \{1, 2, \dots, p\}$ une famille de sous ensembles disjoints

$$\begin{aligned} \mu_q \left(\bigcup_{j \geq 1} \pi_k^{-1}(A_j) \right) &= \mu_q \left(\pi_k^{-1} \left(\bigcup_{j \geq 1} A_j \right) \right) = v_q \left(\left(\bigcup_{j \geq 1} A_j \right) \right) \\ &= \sum_{j \geq 1} v_q(A_j) = \sum_{j \geq 1} \mu_q(\pi_k^{-1}(A_j)). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\mu_q(\sigma_p^{-1}\pi_k^{-1}(A)) = \mu_q(\pi_{k+1}^{-1}(A)) = \nu_q(A) = \mu_q(\pi_k^{-1}(A))$$

μ_q définit une mesure sur \mathbf{B} qui est invariante par σ_p .

Donc $(\Sigma_p, \mathbf{B}, \mu_q, \sigma_q)$ est un système dynamique mesuré.

Exemple 4.3.2 Rotations sur le cercle.

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la norme induite par celle de \mathbb{R} , soit $\alpha \in S^1$, on définit

$$\begin{aligned} R_\alpha &: S^1 \rightarrow S^1 \\ z &\mapsto R_\alpha(z) = \alpha z \end{aligned}$$

on munit S^1 de sa tribu de Borel $\tilde{\mathbf{B}}$

$$\|R_\alpha(z) - R_\alpha(z')\| = \|\alpha\| \|z - z'\| = \|z - z'\|$$

car $\|\alpha\| = 1$, cela pour tous $z, z' \in S^1$.

$\triangleright R_\alpha$ est lipschitzienne donc continue. Par conséquent R_α est $\tilde{\mathbf{B}}$ -mesurable.

$\triangleright R_\alpha$ préserve la mesure de Haar λ . En effet soit $\varphi : S^1 \rightarrow [0, \infty]$ $\tilde{\mathbf{B}}$ -mesurable.

λ par définition vérifie pour tout $f : S^1 \rightarrow [0, \infty]$ et tout $g \in S^1$,

$$\int_{S^1} f(x) d\lambda(x) = \int_{S^1} f(g^{-1}x) d\lambda(x) = \int_{S^1} f(x) d\lambda(gx)$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \varphi(z) d\lambda(z) &= \int_{S^1} \varphi(\alpha^{-1}(\alpha z)) d\lambda(z) = \int_{S^1} \varphi(\alpha z) d\lambda(\alpha z) \\ &= \int_{S^1} (\varphi \circ R_\alpha)(z) d\lambda(\alpha z) = \int_{S^1} \varphi \circ R_\alpha(z) d\lambda(z) \end{aligned}$$

$(S^1, \tilde{\mathbf{B}}, R_\alpha, \lambda)$ est donc un système dynamique mesuré.

4.4 Récurrence et Ergodicité.

Théorème 4.4.1 (de récurrence de Poincaré version mesurable) Soient (X, \mathcal{A}, μ, f) un système dynamique mesuré et $A \in \mathcal{A}; \mu(A) > 0$. Notons $\tilde{A} = \{x \in A / f^n(x) \in A \text{ pour une infinité de } n \geq 0\}$.

Alors

$$\tilde{A} \subset A \quad \text{et} \quad \mu(\tilde{A}) = \mu(A).$$

Preuve. .

On a évidemment $\tilde{A} \subset A$

considérons $A \setminus \tilde{A} = \bigcup_{n \geq 0} \left(A \setminus \bigcup_{i \geq n} f^{-i}(A) \right) = \bigcup_{n \geq 0} A_n$, Il est clair que $A_n \in \mathcal{A}$.

Montrons que $\mu(A_n) = 0$.

On a $A_n \subset A$ et, $A \subset \bigcup_{i \geq 0} f^{-i}(A)$ alors: $A_n \subset \bigcup_{i \geq 0} f^{-i}(A) \setminus \bigcup_{i \geq n} f^{-i}(A)$

D'où

$$0 \leq \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{i \geq 0} f^{-i}(A)\right) - \mu\left(\bigcup_{i \geq n} f^{-i}(A)\right) = 0 \text{ car } \bigcup_{i \geq 0} f^{-i}(A) = f^{-n}\left(\bigcup_{i \geq n} f^{-i}(A)\right)$$

cela implique que,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i \geq 0} f^{-i}(A)\right) &= \mu\left(f^{-n}\left(\bigcup_{i \geq n} f^{-i}(A)\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i \geq n} f^{-i}(A)\right) \end{aligned}$$

La suite des ensembles A_n est décroissante, de même mesure et $\mu(X)$ finie.

Cela entraîne que:

$$\mu(A \setminus \tilde{A}) = \mu(A) - \mu(\tilde{A}) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = 0$$

. ■

Corollaire 4.4.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, notons pour $x \in A$,*

$$r_A(x) = \min \{k \geq 1 / f^k(x) \in A\}$$

$r_A(x)$ est appelé le temps de retour de x en A . Le théorème précédent implique que $r_A(x) < \infty$.

Preuve. .

il suffit de remarquer que

$$\{x \in A / r_A(x) < \infty\} = \{x \in A / \forall k \geq r_A(x), f^k(x) \in A\} = \tilde{A}.$$

■

Remarque 4.4.1 *Soit (X, \mathcal{A}, μ, f) un système dynamique mesuré si une partie A de X est telle que $f^{-1}(A) = A$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(A) = A$ si de plus $\mu(A) > 0$, le théorème de récurrence de Poincaré implique dans ce cas que A contient l'orbite de chacun de ces points.*

Définition 4.4.1 Soit (X, \mathcal{A}, μ, f) un système dynamique mesuré avec, la transformation f est dite **ergodique**, si X ne contient aucune partie A , f -invariante (i.e $f^{-1}(A) = A$), telle que

$$0 < \mu(A) < 1$$

Autrement dit,

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{A} \quad \text{tel que } f^{-1}(A) = A \quad \text{alors } \mu(A) = 0 \text{ ou } 1$$

On dit aussi que la mesure μ est ergodique où que le système (X, \mathcal{A}, μ, f) est ergodique.

Théorème 4.4.2 Soit (X, \mathcal{B}, μ, f) un système dynamique mesuré avec X métrique compact, \mathcal{B} sa tribu borélienne, μ une mesure de probabilité telle que $\mu(U) > 0$ pour tout U ouvert non vide.

Si f est ergodique alors μ -presque tout point de X a une orbite dense.
i.e l'ensemble $\left\{x \in X; \overline{\{f^n x\}} \neq X\right\}$ est μ -négligeable.

Preuve. .

voir [16]

X est à base dénombrable d'ouverts non vides \mathfrak{D} . Soit $U \in \mathfrak{D}$, considérons $A_U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} U_k$
 $f^{-k}(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} U_k$, on a bien que $f^{-1}(A_U) = A_U$.

De plus $\left(\bigcup_{k \geq n+1} U_k\right) \subset \left(\bigcup_{k \geq n} U_k\right)$, et $\mu(U_k) = \mu(f^{-k}(U)) = \mu(U)$ d'où $\mu\left(\bigcup_{k \geq n} U_k\right) \geq \mu(U)$

alors $\mu(A_U) \geq \mu(U) > 0$, l'ergodicité implique que $\mu(A_U) = 1$

Alors en posant $A = \bigcap_{U \in \mathfrak{D}} A_U$ on a $\mu(A) = 1$ et $\forall x \in A$, on a $\overline{\{f^n(x)\}} = X$. ■

Remarque 4.4.2 Ce théorème exprime le fait que l'ergodicité est l'analogue de la minimalité, même si un système ergodique est plutôt transitif, on peut toutefois dire minimal modulo un ensemble négligeable.

4.4.1 Existence de mesure ergodique

Théorème 4.4.3 Les points extrémaux de $M_f(X)$ sont les mesures ergodiques. (voir [2]).

Remarque 4.4.3 Si $M_f(X) = \{\mu\}$ alors μ est la seule mesure ergodique du système (X, f, μ) . Dans ce cas le système est dit **uniquement ergodique**.

4.5 Caractérisation de l'ergodicité

Théorème 4.5.1 Soit (X, \mathcal{A}, μ, f) un système dynamique mesuré, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f ergodique.
2. $\varphi : X \rightarrow [0, \infty]$ \mathcal{A} -mesurable, $\varphi \circ f = \varphi$ μ p.p. $\implies f$ constante μ p.p.
3. $\varphi \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu,)$; $\varphi \circ f = \varphi$ μ p.p. $\implies f$ constante μ p.p.
4. $\varphi \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu,)$; $\varphi \circ f = \varphi$ μ p.p. $\implies f$ constante μ p.p.

Preuve. .

2/ \implies 3/ \implies 4/ est immédiat car

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu,) \subset L^1(X, \mathcal{A}, \mu,) \subset \{\varphi : X \rightarrow [0, \infty] \text{ } \mathcal{A}\text{-mesurable}\}$$

(la mesure μ étant finie).

4 \implies 1/

Soit $A \in \mathcal{A}$; $f^{-1}(A) = A$, comme $\mu(X) = 1 < \infty$ alors $\mathbf{1}_A \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu,)$ puisque $|\mathbf{1}_A|^2 \leq 1$ et donc $\int_X |\mathbf{1}_A|^2 d\mu \leq \int_X d\mu = \mu(X) < \infty$.

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \implies \int_X \mathbf{1}_A d\mu = \int_X \mathbf{1}_{f^{-1}(A)} d\mu.$$

$$\text{or } \mathbf{1}_{f^{-1}(A)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in f^{-1}(A) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \mathbf{1}_A \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{d'où } \mathbf{1}_{f^{-1}(A)} = \mathbf{1}_A \circ f$$

ce qui implique que

$$\int_X \mathbf{1}_A d\mu = \int_X (\mathbf{1}_A \circ f) d\mu$$

alors $\mathbf{1}_A \circ f = \mathbf{1}_A$ μ .p.p et donc $\mathbf{1}_A$ est constante μ p.p.

$$\text{Cela implique que } \mu(A) = \int_X \mathbf{1}_A d\mu = \begin{cases} 1. \mu(X) = 1 \\ \text{ou} \\ 0. \mu(X) = 0 \end{cases}$$

i.e $\mu(A) = 1$ où 0 .

1/ \Rightarrow 2/

considérons $\varphi : X \rightarrow [0, \infty]$ \mathcal{A} -mesurable; $\varphi \circ f = \varphi$ μ p.p et supposons φ non constante μ p.p

alors il existe $r \in [0, \infty[; 0 < \mu(\varphi^{-1}([r, \infty[)) < 1$,

notons.

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} f^{-k}(\varphi^{-1}([r, \infty[))$$

il est clair que $A \in \mathcal{A}$, et $f^{-1}(A) = A$, on a, $A = \varphi^{-1}([r, \infty[)$ μ - p.p

car $\varphi \circ f = \varphi$ μ p.p .

Donc si $x \in X$ est tel que

$$\varphi \circ f(x) = \varphi(x) \text{ alors } \varphi \circ f^k(x) = \varphi(x)$$

par conséquent:

$$\mu(A) = \mu(\varphi^{-1}([r, \infty[))$$

i.e $0 < \mu(A) < 1$. Contradiction avec l'ergodicité de μ . ■

4.6 Théorèmes ergodiques

Etant donné (X, f) un système dynamique, en considérant un sous ensemble A de X et un point x de A , alors "combien parmi les n premiers points de la trajectoire de x , reviennent dans A "?

D'où la notion de **moyenne temporelle** définie par Birkhoff, qui mesure donc la densité asymptotique de la répartition des itérés de x entre A et A^c .

Notation 4.6.1 le nombre de visites est noté $N_A(f, x, n)$, en d'autres termes;

$$N_A(f, x, n) = \# \{k \in [0, n - 1]; f^k(x) \in A\}$$

La densité asymptotique de la répartition des itérés de x entre A et A^c , s'exprime alors par:

$$N_A(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N_A(f, x, n)$$

quand la limite existe.

Définition 4.6.1 On appelle **moyenne temporelle** ou **moyenne de Birkhoff** de la fonction caractéristique de A , l'expression:

$$N_A(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_A(f^k(x))$$

De même on définit la **moyenne temporelle** d'une fonction continue φ par:

$$I_x(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

Théorème 4.6.1 (théorème ergodique de Birkhoff). Soit (X, \mathcal{A}, μ, f) un système dynamique mesuré, pour $\varphi \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$,

1. $I_x(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \varphi^*(x)$ existe pour μ -presque tout x et $\varphi^* \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.
2. De plus $\varphi^* \circ f = \varphi^*$ μ -p.p comme $\mu(X) < \infty$, alors $\int_X \varphi^* d\mu = \int_X \varphi d\mu$.
3. Si μ est une mesure de probabilité ergodique, alors pour μ -presque tout x ,

$$\varphi^*(x) = \int_X \varphi d\mu$$

Preuve. (i) [1] théorème 4.1.2.p136

(ii) [2] théorème.1 p90

(iii) découle du théorème précédent. ■

Application directe

Soit $A \in \mathcal{A}$, on a $\mathbf{1}_A \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(f^k(x)) = \int_X \mathbf{1}_A d\mu = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \mu - p.p.$$

Comme $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(f^k(x))$ représente la proportion des n premiers points de l'orbite de x dans A , et $\mu(X) = 1$, alors cette proportion est égale à la mesure de A .

(de façon générale $\int_X \mathbf{1}_A d\mu = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$ avec $\mu(X) < \infty$).

Remarque 4.6.1 1/ Ce théorème traduit la propriété d'équirépartition de presque toute orbite d'un système ergodique.

On peut donc calculer les **intégrales des fonctions** en prenant les **moyennes** des valeurs de cette fonction sur les orbites.

2/ $\varphi^*(x) = \int_X \varphi d\mu$, exprime alors l'hypothèse ergodique (chère aux physiciens) moyenne temporelle égale moyenne spatiale.

Corollaire 4.6.1 Soit (X, \mathcal{A}, μ, f) un système dynamique mesuré, on a:

$$f \text{ ergodique} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(f^{-k}(A) \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

Preuve. .

\Leftarrow / si $A \in \mathcal{A}$; $f^{-1}(A) = A$, alors $f^{-k}(A) = A$ et comme $\mu(A \cap A^c) = 0$,
alors

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap A^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(f^{-k}(A) \cap A^c) = \mu(A) \cdot \mu(A^c)$$

D'où

$$\mu(A) = 0 \text{ où } \mu(A^c) = 0$$

\Rightarrow / On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(f^k(x)) = \mu(A)$, par le théorème de la convergence monotone on a :

$$\mu(A) \cdot \mu(B) = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(f^k(x)) \right) \mathbf{1}_B d\mu$$

Par le théorème de la convergence dominée, on a donc:

$$\begin{aligned} \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(f^k(x)) \right) \mathbf{1}_B d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(f^k(x)) \right) \mathbf{1}_B d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_B \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(f^k(x)) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{f^{-k}(A)} \mathbf{1}_B d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(f^{-k}(A) \cap B) \end{aligned}$$

. ■

Exemple 4.6.1 \diamond Rotation du cercle.

On a vu que (S^1, R_α, λ) est un système dynamique mesuré, λ mesure de Haar.

Pour qu'elle condition sur α , (S^1, R_α, λ) serait-il ergodique? (pour une raison de commodité, on considère $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, et on note p au lieu de π la projection canonique, i.e $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$).

On définit alors $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ par: $R_\alpha(z) = \alpha z$ (en notation multiplicative).

Comme $z = |z| \exp(2i\pi \arg z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$, donc pour $z \in S^1$, on a $z = \exp(2i\pi \arg z)$

1^{er} cas :

◇ Si $\alpha \in S^1$ est rationnel, alors $\arg \alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, donc il existe $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Q}$ tel que $\arg \alpha = p(\tilde{\alpha})$.

Soit $z \in S^1$, il existe $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ tel que $\arg z = p(\tilde{z})$.

D'où

$$R_\alpha(z) = \alpha z = \exp(2i\pi(\tilde{z} + \tilde{\alpha}))$$

Or $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Q}$ alors $\tilde{\alpha} = \frac{m}{n}$ où $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, alors

$$\begin{aligned} R_\alpha^n(z) &= \exp(2i\pi n(\tilde{z} + \tilde{\alpha})) \\ &= \exp(2i\pi(\tilde{z} + m)) \\ &= \exp(2i\pi\tilde{z}) = z \end{aligned}$$

Cela signifie que pour α rationnel, l'orbite de tout point de S^1 est de période finie, elle ne peut être dense. La contraposée du théorème (4.9) nous permet de conclure.

« Une rotation rationnelle sur S^1 n'est pas ergodique ».

2^{ème} cas :

◇ Si $\alpha \in S^1$ est irrationnel, alors $\arg \alpha \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Soit $z \in S^1$, notons \tilde{z} et $\tilde{\alpha}$ les relevés respectifs de z et α , on a :

$$R_\alpha(z) = \alpha z = \alpha \exp 2i\pi\tilde{z}$$

Soit $g \in L^2(S^1)$ telle que $g \circ R_\alpha = g$ l.p.p.

Le développement en série de Fourier de g , nous donne

$$g(z) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n \exp 2i\pi n z$$

Donc

$$\begin{aligned} g \circ R_\alpha(z) &\sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n \exp 2i\pi n R_\alpha(z) \\ &\sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n \exp 2i\pi n \alpha z \\ &\sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n (\exp 2i\pi z)^{n\alpha} \end{aligned}$$

en identifiant $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n (\exp 2i\pi z)^{n\alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n \exp 2i\pi n z$, on obtient :

$$C_n (\exp 2i\pi z)^{n\alpha} = C_n (\exp 2i\pi z)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

cela implique que,

$$(\exp 2i\pi z)^{n(\alpha-1)} = 1$$

D'où $\alpha = 1$ ou $n = 0$, or $\alpha \neq 1$ car $\arg \alpha \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Alors $\forall n \neq 0, C_n = 0$, cela donne $g(z) \sim C_0$, en d'autres termes g est constante λ -p.p.

On applique le théorème (4.9)

***Une rotation irrationnelle est ergodique**

Exemple 4.6.2 translations du tore

Les translations du tore sont une généralisation des rotations du cercle. De ce fait, l'ergodicité dépend aussi du vecteur de translation. Comme pour la minimalité, on a donc

le résultat suivant:

Théorème 4.6.2 Soit $(\mathbf{T}^k, \tau_\alpha, \mu)$ où μ est la mesure de Haar et τ_α la translation dans \mathbf{T}^k , alors $(\mathbf{T}^k, \tau_\alpha, \mu)$ est ergodique si et seulement si $(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ sont rationnellement indépendants.

Preuve. .

Notons pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbf{T}^k$, $\exp 2i\pi x = (e^{2i\pi x_1}, e^{2i\pi x_2}, \dots, e^{2i\pi x_k})$, on procède comme pour les rotations.

Soit $\varphi \in L^2(\mathbf{T}^k)$ telle que $\varphi \circ \tau_\alpha = \varphi$ μ -p.p.

Ces coefficients de Fourier sont alors pour $n = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$

pour $x \in \mathbf{T}^k$, on a

$$\varphi(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n(\varphi) e^{2i\pi n \cdot x} \text{ et } (\varphi \circ f_L)(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n(\varphi \circ \tau_\alpha) e^{2i\pi n \cdot \tau_\alpha(x)}$$

avec $c_n(\varphi) = \int_{\mathbf{T}^k} \varphi(x) e^{2i\pi n \cdot x} d\mu$.

On aboutit au résultat suivant :

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \int_{\mathbf{T}^k} e^{2i\pi x} \cdot \varphi(x) d\mu = \int_{\mathbf{T}^k} e^{2i\pi(x+\alpha)} \cdot \varphi \circ \tau_\alpha(x) d\mu$$

Cela entraîne $C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = e^{2i\pi\alpha} C_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ qui nous ramène à

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = 0 \text{ ou } e^{2i\pi\alpha} = 1$$

\Rightarrow / Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}^k - \{0\}$ tel que $n \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$, alors $x \mapsto e^{2i\pi x}$ est une fonction de carré sommable τ_α -invariante et non constante.

Cela implique que τ_α n'est pas ergodique.

\Leftarrow / Si par contre $(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ sont rationnellement indépendants,
 i.e $n.\alpha \notin \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}^k - \{0\}$, alors $C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = 0$
 sauf pour $(n_1, n_2, \dots, n_k) = (0, 0, \dots, 0)$.

D'où

$$\varphi = C_{0,0,\dots,0} \quad \mu - p.p$$

. ■

4.7 Mélange

Définition 4.7.1 Une application $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$ préservant la mesure est dite mélangeante si:

$$\forall A, B \in \mathcal{A}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

Remarque 4.7.1 par le corollaire (4.2) on déduit que le mélange est un concept plus fort que l'ergodicité.

En d'autres termes un système mélangeant est ergodique.

Critère 4.7.1 (de mélange) Soit (X, \mathcal{A}, μ, f) un système dynamique mesuré. les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est mélangeante.
2. Pour tous $\phi, \psi \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu, f)$, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi \circ (f^n \psi) d\mu = \left(\int \phi d\mu \right) \left(\int \psi d\mu \right)$$

Exemple 4.7.1 Les systèmes symboliques sont mélangeants.

L'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques est dense dans $L^2(X, \mu)$.

Si l'on considère C_1 et C_2 deux cylindres on sait que si on décale C_2 suffisamment de fois, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-n}(C_2) \cap C_1) = \mu(C_1) \cdot \mu(C_1).$$

4.8 Rigidité

Définition 4.8.1 *Le système (X, \mathcal{A}, μ, f) est rigide s'il existe une suite d'entiers (n_i) tendant vers $+\infty$*

telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A \Delta f^{-n_i} A) = 0$$

Proposition 4.8.1 *Un système rigide n'est pas mélangeant.*

Preuve. .

on a $A \setminus B = A \setminus A \cap B$ et $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.

De là on obtient $\mu(A \Delta B) = 2(\mu(A) - \mu(A \cap B))$.

Si on choisit $B = f^{-n_i} A$, la rigidité implique que $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A \cap f^{-n_i} A) = \mu(A) \neq \mu(A)^2$ ■

Exemple 4.8.1 *Les rotations du cercle sont des systèmes rigides.*

4.9 Ergodicité des Anosov linéaire du tore.

Proposition 4.9.1 *Un automorphisme linéaire hyperbolique du tore $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est ergodique.*

Preuve. .

1– f_L préserve la mesure de Haar θ de \mathbf{T}^k .i.e $\theta_* f_L = \theta$

Il suffit de vérifier que pour toute $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^k, \mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbf{T}^k} \varphi \circ f_L \cdot d\theta = \int_{\mathbf{T}^k} \varphi \cdot d\theta$

comme θ est donnée par: $\theta(\varphi) = \int_{\mathbf{T}^k} \varphi \cdot d\theta = \int_{[0,1]^k} \varphi \circ \pi(x) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_k$,

le résultat est immédiat.

2– Soit $\varphi \in L^2(\mathbf{T}^k)$, telle que $\varphi \circ f_L = \varphi - p.p.$

pour $x \in \mathbf{T}^k$, on a

$$\varphi(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n(\varphi) e^{2i\pi n \cdot x} \quad \text{et} \quad (\varphi \circ f_L)(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n(\varphi \circ f_L) e^{2i\pi n \cdot f_L(x)}$$

Or $n \cdot f_L(x) = A(n) \cdot x$ où $A(n) = {}^t(L^{-1})$ (propriété du produit scalaire)

d'où $e^{2i\pi n \cdot f_L(x)} = e^{2i\pi A(n) \cdot x}$

par invariance de θ , il vient $c_n(\varphi \circ f_L) = c_{A(n)}(\varphi) = c_n(\varphi)$

comme pour $n \neq 0$, $\{A^r(n) / r \in \mathbb{N}\}$ est infini, il existe $r \neq l$ tels que $A^r(n) = A(n)$

et A n'a pas de valeurs propres de module égal à 1, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^k - \{0\}} |c_{A^n}(\varphi)|^2 < \sum_{n \in \mathbb{Z}^k - \{0\}} |c_n(\varphi)|^2 = \int_{\mathbf{T}^k} |\varphi|^2 \cdot d\theta < \infty.$$

D'où $c_n(\varphi) = 0, \forall n \neq 0$. ■

4.10 Ergodicité du sous-shift

4.10.1 Mesure de Markov

Définition 4.10.1 On appelle matrice stochastique $S = (S_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Upsilon}$, une matrice à coefficients positifs ou nuls

tels que la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1.

$$\sum_{\alpha \in \Upsilon} S_{\alpha\beta} = 1$$

Lemme 4.10.1 Soit $S = (S_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Upsilon}$ une matrice stochastique transitive. Alors il existe un unique vecteur v^S ,

tel que $S \cdot v^S = v^S$ et $\sum_{\alpha \in \Upsilon} v_{\alpha}^S = 1$.

Les coefficients de v^S sont strictement positifs, 1 est une valeur propre simple de S , et toutes les autres sont de module inférieur à 1.

Preuve. voir [2]

On applique le théorème de Perron Frobenius.

Théorème 4.10.1 (Perron Frobenius) Soient B une matrice carrée à coefficients réels positifs ou nuls. On suppose que B est transitive i.e il existe $k > 0$ tel que $(B^k)_{ij} > 0$. Alors

(i) la matrice B admet un vecteur propre v_{\max} à coefficients strictement positifs. Tout vecteur propre à coefficients positifs ou nuls est proportionnel à v_{\max} ,

(ii) si λ_{\max} est la valeur propre correspondant à v_{\max} , alors λ_{\max} est simple, et toute autre valeur propre λ vérifie $|\lambda| < \lambda_{\max}$.

■

Remarque 4.10.1 A partir de toute matrice stochastique S , on peut construire une mesure de probabilité borélienne notée μ_S sur $\Upsilon^{\mathbb{Z}}$ donnée par la formule.

$$\mu_S(C_{\alpha_m, \dots, \alpha_n}^{m, m+1, \dots, n}) = \left(\prod_{i=m}^{n-1} S_{\alpha_i \alpha_{i+1}} \right) \cdot v_{\alpha_n}^S$$

où $v_{\alpha_n}^S$ est le vecteur vérifiant les propriétés du lemme (4.16).

μ_S est appelée **mesure de Markov**.

Proposition 4.10.1 Soit (Ω_A, σ_A) un système de Markov, si $S_{\alpha\beta}$ s'interprète comme la probabilité de passage du sommet α au sommet β , et si l'on suppose que:

$$A_{\alpha\beta} = 1 \Leftrightarrow S_{\alpha\beta} \neq 0$$

Alors le processus se déroulera selon le graphe Γ_A de A .

Par conséquent $(\Omega_A, \sigma_A, \mu_S)$ est mélangeant, donc ergodique..

Preuve. .

Soient les cylindres $C_1 = C_{\alpha_m, \dots, \alpha_n}^{m, m+1, \dots, n}$ et $C_2 = C_{\beta_p, \dots, \beta_q}^{p, p+1, \dots, q}$, on a alors pour $N \geq n - p$,

$$\mu_S(C_1 \cap \sigma_A^{-N} C_2) = \left(\prod_{i=m}^{n-1} S_{\alpha_i \alpha_{i+1}} \right) \cdot S_{\alpha_n \beta_p}^{N-n+p} \left(\prod_{i=p}^{q-1} S_{\beta_i \beta_{i+1}} \right) v_{\beta_q}^S$$

On utilise le lemme (4.15) pour conclure. ■

4.11 Equivalence mesurable

Définition 4.11.1 Soient (X, \mathcal{A}, μ, f) et (Y, \mathcal{B}, ν, g) deux systèmes dynamiques mesurés. On dit qu'ils sont isomorphes (ou mesurablement équivalents), s'il existe une application $\psi : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ bimesurable, bijective modulo des ensembles de mesure nulle dans X et Y , telle que

$$\psi \circ f = g \circ \psi \quad \text{et} \quad \psi^* \mu = \nu$$

On dit que ψ envoie la mesure μ sur ν et l'action f sur g .

Remarque 4.11.1 On a vu au chapitre précédent qu'il existe une semi-conjugaison entre les automorphismes linéaires hyperboliques du tore, et les sous-shift de type fini. On peut se poser la question si cela reste vrai dans le cadre mesurable. C'est l'objet du chapitre suivant.

5

Entropie

L'entropie d'un système dynamique mesuré donne une mesure quantitative de la complexité de la dynamique; elle en donne une valeur moyenne. L'entropie topologique par contre, mesure la complexité maximale. C'est un nombre positif ou nul qui caractérise le manque d'information sur l'évolution d'un système quand on ne connaît pas son état initial. Dans ce chapitre on introduit brièvement le concept d'entropie selon son développement hiérarchique, en illustrant cela par des exemples simples.

5.1 Entropie d'une partition mesurable

Soit (X, B, μ) un espace mesuré.

Définition 5.1.1 Une partition mesurable de X est une collection de sous ensembles de B notés $\zeta = \{C_\alpha \in B / \alpha \in I\}$ (où I est un ensemble d'indices fini ou dénombrable), telle que $\mu\left(X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha\right) = 0$ et $\mu(C_\alpha \cap C_\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

Définition 5.1.2 On appelle entropie associée à une partition mesurable ζ le nombre

$$H_\mu(\zeta) = \sum_{\alpha \in I, \mu(C_\alpha) > 0} \mu(C_\alpha) \log \mu(C_\alpha) \quad (5.1.1)$$

Remarque 5.1.1 Si f est une transformation mesurable qui préserve μ et ζ une partition mesurable on note $f^{-1}(\zeta) = \{f^{-1}(C_\alpha) / \alpha \in I\}$. On a alors $H_\mu(\zeta) = H_\mu(f^{-1}(\zeta))$.

5.1.1 Entropie d'une mesure invariante

Soit (X, B, μ, f) un système dynamique mesuré

Définition 5.1.3 Soient ζ et η deux partitions mesurables, on définit $\zeta \vee \eta$ par:

$$\zeta \vee \eta = \{C \cap D / C \in \zeta, D \in \eta, C \cap D \neq \emptyset; \mu(C \cap D) > 0\}.$$

Notons

$$\zeta_{-n}^f = \zeta \vee f^{-1}(\zeta) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\zeta) \quad (5.1.2)$$

ζ_{-n}^f est appelée partition mesurable associée à f .

Proposition 5.1.1 Soit (X, B, μ, f) un système dynamique mesuré, et ζ_{-n}^f la partition mesurable associée à f .

On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\zeta_{-n}^f)$ existe.

Définition 5.1.4 L'entropie de la transformation f relativement à la partition ζ est:

$$h_\mu(f, \zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\zeta_{-n}^f) \quad (5.1.3)$$

L'entropie de la mesure invariante μ est la quantité:

$$h(\mu, f) = \sup\{h_\mu(f, \zeta) / \zeta \text{ partition mesurable telle que } H_\mu(\zeta) < +\infty\} \quad (5.1.4)$$

Remarque 5.1.2 Si on considère $A \in B$, tel que $f^{-1}(A) = A$ et $\mu(A) > 0$, on a alors le résultat suivant:

$$h(\mu, f) = \mu(A) h(\mu|_A, f) + \mu(X \setminus A) h(\mu|_{X \setminus A}, f) \quad (5.1.5)$$

Théorème 5.1.1 Si (X, B, μ, f) et (Y, B', ν, g) sont isomorphes, alors;

$$h(\mu, f) = h(\nu, g)$$

5.2 Entropie topologique

5.2.1 Entropie d'un recouvrement ouvert.

On se donne X un espace métrique compact. on définit l'analogie topologique de l'entropie précédemment définie. Considérons un recouvrement ouvert \mathfrak{R} de X

$$\text{i.e } \mathfrak{R} = \{U_\alpha / \alpha \in J, U \text{ ouvert de } X\} \quad \text{et} \quad X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha.$$

Notons $\acute{N}(\mathfrak{R})$ le plus petit cardinal des sous recouvrements de \mathfrak{R} , $\acute{N}(\mathfrak{R}) < +\infty$ car X est compact.

Définition 5.2.1 *L'entropie d'un recouvrement ouvert \mathfrak{R} est définie comme étant le nombre*

$$H(\mathfrak{R}) = \log \acute{N}(\mathfrak{R}) \quad (5.2.1)$$

Proposition 5.2.1 *Soit (X, f) un système dynamique topologique avec X métrique compact.*

soit \mathfrak{R} un recouvrement ouvert de X . considérons l'ensemble $f^{-1}(\mathfrak{R}) = \{f^{-1}(U) / U \in \mathfrak{R}\}$.

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \acute{N}(\mathfrak{R} \vee f^{-1}(\mathfrak{R}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathfrak{R}))$ existe.

avec $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{N} = \{C \cap D / C \in \mathfrak{R}, D \in \mathfrak{N}, C \cap D \neq \emptyset\}$.

5.2.2 Entropie topologique

Définition 5.2.2 *Soit (X, f) un système dynamique topologique avec X métrique compact. On appelle entropie topologique de f , la quantité*

$$h_{top}(f) = \sup_{\mathfrak{R}} h(f, \mathfrak{R}) \quad (5.2.2)$$

où

$$h(f, \mathfrak{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \acute{N}(\mathfrak{R} \vee f^{-1}(\mathfrak{R}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathfrak{R})) \quad (5.2.3)$$

5.2.3 Propriétés de l'entropie topologique

Proposition 5.2.2 *Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques topologiquement conjugués. Alors, ils ont même entropie topologique.*

$$h_{top}(f) = h_{top}(g)$$

1. Si F est une partie fermée de X telle que $f(F) = F$ alors $h_{top}(f|_F) \leq h_{top}(f)$.
2. Si $X = \bigcup_{1 \leq i \leq m} F_i$ où F_i fermés de X tels que $f(F_i) = F_i$ alors $h_{top}(f) = m$.

5.3 Principe variationnel

C'est un résultat qui permet le passage de l'entropie métrique (au sens mesurable) à l'entropie topologique.

Théorème 5.3.1 *Soit (X, f) un système dynamique topologique, où X est un espace métrique compact. On a le résultat suivant:*

$$h_{top}(f) = \sup \{h(\mu, f) / \mu \in M_f(X)\}.$$

5.4 Application et exemples

Comme application de tous ces résultats on va considérer les deux exemples favoris.

5.4.1 Entropie des systèmes symboliques

Proposition 5.4.1 *Soit (Ω_A, σ_A) un sous shift de type fini, on note $\rho(A)$ le rayon spectral de la matrice A . On a alors*

$$h_{top}(\sigma_A) = \log \rho(A)$$

Rappelons que pour une norme matricielle $\|\cdot\|$, $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Si A est transitive, on a $\rho(A) = \lambda_{\max}(A)$ (valeur propre maximale). Plus particulièrement si tous les coefficients sont égaux à 1, $\rho(A)$ est égal à son nombre de lignes.

i.e $\rho(A) = q$ si l'alphabet est de cardinal q . Par conséquent:

$$h_{top}(\sigma) = \log q$$

Lemme 5.4.1 *Soit S une matrice stochastique transitive, alors:*

$$h_{\mu_S}(\sigma) = - \sum_{\alpha, \beta \in \Upsilon} S_{\alpha\beta} \log(S_{\alpha\beta}) v_{\beta}^n$$

Proposition 5.4.2 *Soit (Ω_A, σ_A) un sous shift de type fini tel que A est transitive. il existe une mesure invariante par σ_A , notée μ_S où S est la matrice stochastique associée à A , appelée mesure de Parry,*

telle que :

$$h_{top}(\sigma_A) = h(\mu_S, \sigma_A)$$

Construction de la mesure de Parry.

Notons pour $A = (A_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \Upsilon}$, $\lambda = \lambda_{\max}(A)$, $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}$ le vecteur propre associé et $u = (u_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}$

le vecteur propre associé à tA . On a donc par le théorème de Frobenius, pour

$$\alpha \in \Upsilon, v_\alpha > 0, u_\alpha > 0, \sum_{\beta \in \Upsilon} A_{\alpha\beta} v_\beta = \lambda v_\alpha \text{ et } \sum_{\beta \in \Upsilon} A_{\alpha\beta} u_\beta = \lambda u_\alpha.$$

On normalise u et v de sorte que $\sum_{\alpha \in \Upsilon} v_\beta u_\alpha = 1$. Notons \dot{S} la matrice stochastique de coefficients

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta} u_\alpha}{\lambda u_\beta}.$$

La mesure de Markov associée à \dot{S} est la mesure de Parry.

Remarque 5.4.1 *La mesure de Parry est donc une mesure qu'on peut obtenir à partir de la matrice d'incidence d'un sous shift de type fini. C'est une mesure qui maximise l'entropie donc par le principe variationnel on obtient l'entropie topologique du sous shift.*

5.4.2 Entropie des automorphismes hyperboliques du tore

Proposition 5.4.3 *Soit f_L un automorphisme linéaire hyperbolique de \mathbf{T}^k et θ la mesure de Haar sur \mathbf{T}^k .*

Notons $\lambda^+ = |\det(L|_{E^u})|$. Alors

$$h_{top}(f_L) = h(\theta, f_L) = \log \lambda^+$$

Preuve. voir [1] ■

Remarque 5.4.2 *La partition que l'on considère dans les calculs est bien évidemment une partition de Markov*

Exemple 5.4.1 *Si l'on reconsidère l'automorphisme*

$$f_L : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto f_L(\bar{x}, \bar{y}) = (2x + y, x + y) \bmod (1)$$

$$|\det(L|_{E^u})| = \frac{3 + \sqrt[3]{5}}{2}, \text{ donc } h_{top}(f_L) = \log \frac{3 + \sqrt[3]{5}}{2} = 0.96242$$

en admettant le résultat suivant:

Lemme 5.4.2 *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $n \geq 0$ et toute partie C non θ -négligeable de la partition mesurable ζ_{-n}^f associée. On a : $a(\lambda^+)^{-n} \leq \theta(C) \leq b(\lambda^+)^{-n}$.*

On peut déduire que $H_\theta(\zeta_{-n}^f) \in [-\log b(\lambda^+)^{-n}, -\log a(\lambda^+)^{-n}]$.

On obtient alors $h(\theta, f_L) = h_\theta(f, \zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\theta(\zeta_{-n}^f) = \log \lambda^+$.

i.e

$$h_{\text{top}}(f_L) = h(\theta, f_L) = \log \lambda^+.$$

Considérons le sous-shift semi conjugué à f_L , dont la matrice d'incidence est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ les valeurs propre sont : } 0, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}$$

On a bien $h_{\text{top}}(\sigma_A) = \log \rho(A) = \log(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}) = 0.96242$.

Remarque 5.4.3 *On a vu dans le chapitre précédent que ces deux systèmes étaient topologiquement semi-conjugués.*

Ce n'est pas une conjugaison car l'application $\pi : \Omega_A \rightarrow \mathbf{T}^2$ du théorème (3.10) ne peut être bijective puisque le nombre de points fixes de σ_A est égal à $\text{tr} A$, donc σ_A a trois points fixes, alors que f_L n'en a qu'un seul.

On vient de voir aussi qu'ils ont mêmes entropies, alors quels sont les ensembles négligeables pour que cela soit un isomorphisme.

Théorème 5.4.1 *Soit $f_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ un automorphisme linéaire hyperbolique.*

Notons $\mathfrak{R} = (R_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}$ une partition de Markov pour f_L , A la matrice d'incidence associée à \mathfrak{R} et (Ω_A, σ_A) le sous-shift de type fini associé. On a alors pour toute mesure de probabilité σ_A -invariante et ergodique ν de support Ω_A ,

$$\nu(\{\omega \in \Omega_A / \text{Card } \pi^{-1}(\pi(\omega)) > 1\}) = 0$$

Remarque 5.4.4 *Ce théorème nous permet d'identifier les ensembles négligeables qui font que lorsqu'on les enlève, l'application définie au théorème (3.10) qui est alors seulement surjective, est rendue grâce à l'existence d'une mesure ergodique, une injective. Ainsi la semi-conjugaison devient une conjugaison.*

*Voici donc un aspect de l'interférence entre les **propriétés topologiques et probabilistes des systèmes dynamiques**.*

Conclusion et perspectives

Si l'on étudie un système dynamique topologique où l'espace des phases est un espace métrique compact, on peut en le dotant de mesures invariantes sous l'action de la dynamique lui appliquer les résultats concernant les dynamiques d'espaces mesurés. Cela permet de faire une approche quantitative de ce qui n'était alors que qualitatif. De plus la démarche qui consiste à associer une situation codée, rendue possible par l'existence des partitions de Markov, et qui permet alors de considérer les orbites discrètes comme une suite de nombres s'avère très efficace dans l'étude de la complexité d'une dynamique.

Le terme de chaos se rapportant essentiellement à des phénomènes imprévisibles, l'entropie est un outil utilisé pour le définir quantitativement. C'est une quantité positive ou nulle qui mesure le désordre d'un système dynamique. Il serait intéressant de voir cela dans le détail ce qui n'a pas été le cas dans ce travail.

En fait ces démarches sont pratiquement indissociables, comme on l'a vu pour les sous-shifts de type fini, on peut trouver à partir de la matrice d'incidence, des mesures invariantes, et c'est l'ergodicité du sous-shift que l'on voit plus facilement. Le concept d'ergodicité répond en fait à la requête de pouvoir réduire l'étude de la dynamique aux états invariants par la dynamique les plus propables donc de probabilité strictement positive. On peut prétendre afin d'étudier une dynamique, pouvoir la décomposer en "sous-dynamiques" "ir-réductibles" au sens que si un état est invariant par la dynamique, son complémentaire l'est aussi. Alors trouver des mesures ergodiques sachant qu'en général on ne peut avoir une mesure de la "taille" de l'espace tout entier, on pourrait considérer des restrictions de la dynamiques aux ensembles invariants puis y construire des mesures ergodiques. Mais cela ne constitue qu'une partie des possibilités.

Bibliographie

- [1] A. Katok and B. Hasselblatt. Introduction to the moderne theory of dynamical systems. 1995.
- [2] R. Mañé, Ergodic theory and differentiable dynamics, Springer Verlag, 1987.
- [3] A.Avez "Anosov Diffeomorphisms" Faculté des Sciences, Paris, and University of Minnesota.
- [4] M. Pollicott, M. Yuri, Dynamical systems and ergodic theory, London Math. Soc. Stud. [5] Texts 40, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [6] S. Smale, Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817.
- [7] J.Franks "Anosov diffeomorphisms" in Global analysis, Proc.Sympos.Pure Math. vol. 14, Amer. Math. Soc. Providence, R.I.
- [8] J.Franks "Anosov Diffeomorphisms on Tori" Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 154 (Nov.1969), 117-124.
- [9] H.Furstenberg "Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory", Princeton University Press, Princeton, New Jersey.(1981).
- [10] A.Avez , V.I.Arnold "Ergodic Problems of Classical Mechanics" by Addison-Wesley Publishing Co, Inc. 1968, 1989
- [11] Tim Bedford, M.Keane and C.Series "Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces" Oxford University Press 1991.
- [12] Roy L. Adler Symbolic Dynamics and Markov Partitions BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 35, Number 1, January 1998, Pages 1-56 , S 0273-0979(98)00737-X.

- [13] R.L.Devaney "A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment" Boston University 1992.
- [14] R.L.Devaney "An introduction to Chaotic Dynamical Systems" Boston University 1988.
- [15] R. Bowen, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Lect. Notes 470, Springer Verlag, 1967.
- [16] K.Petersen "Attractors and Attracting Measures". Math 261, Cambridge Univ.Press,1997.
- [17] Y.Benoit, F.Paulin "Cours Au carré" Université de Paris VII , UFR de Mathématiques.
- [18] Y. Sinai, The Construction of Markov Partitions, Fun. ANal. Appl. 2 (1968), 70–80.
- [19] Y. Pesin and H. Weiss, The Multifractal Analysis of Gibbs Measures: Motivation, Mathematical Foundation, and Examples., Chaos 7 (1997), 89-106.
- [20] D. Ruelle, Thermodynamic Formalism, Addison-Wesley, 1978.
- [21] D. Lind & B. Marcus: Symbolic dynamics and coding, Cambridge University , Press, 1995.
- [22] E.Ghys "Variations autour du théorème de récurrence de Poincaré" Le journal de maths des élèves, volume 1 (1994), N^o.1.