N° d'ordre : 19/2011-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En : Mathématiques

Spécialité : Equations différentielles dans le Champ Complexe

Par

MAMMA NADIA

Sujet

Sur l'Irrégularité des Systèmes Différentiels Linéaires Singuliers

Soutenu publiquement le 02-02-2011, devant le jury composé de :

M^r.	BAHLOUL	DJILALI	Maître de Conférences,	*à l'*U.S.T.H.B.	Président.
M^r.	REZAOUI	MED-SALEM	Maître de Conférences,	*à l'*U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
M^r.	BETINA	KAMEL	Professeur,	*à l'*U.S.T.H.B.	Examinateur.
M^{elle}.	LAOUDI	AINI	Maître de Conférences,	*à l'*U.S.T.H.B.	Examinatrice

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur BAHLOUL Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur REZAOUI M.SALEM mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé.

Je remercie vivement Mademoiselle ***LAOUDI****, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B., et Monsieur* ***K. BETINA,*** *Professeur à l'U.S.T.H.B., qui ont bien voulu faire partie du jury.*

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis spécialement ceux qui ont contribué, de près ou de loin à ma formation..

Sur l'irrégularité des systèmes différentiels linéaires

Table des matières

Introduction

L'objet de ce mémoire est d'étudier l'irrégularité des systèmes différentiels linéaires de la forme :

$$z^p \frac{d}{dz} Y = A(z) Y \tag{0.0.1}$$

où $A(z)$ est une matrice à coefficients holomorphes, et de mesurer l'ordre de leurs singularités .

Tout système différentiel (0.0.1) est équivalent à l´opérateur différentiel de la forme $D = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dz^i}$ avec $a_i \in \mathbb{C}\{z\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ et $a_n \neq 0$

Ce travail est réparti en trois chapitres.

Le chapitre I est consacré à quelques rappels qui seront utiles pour notre étude

Dans le chapitre II on introduit les notions d'invariants de Gérard-Levelt ρ_s $(1 \leq s \leq p)$ mesurant l´irrégularité de la singularité du système différentiel (0.0.1); si l est l´ordre de la singularité on définit une suite de nombres positifs $\rho_1 \succ \rho_2 \succ \cdots \succ \rho_{l-1} \succ \rho_l = 0$

où $l = \inf \{s \in \mathbb{N}^* / \rho_s = 0\}$

Dans le chapitre III le théorème 3.1.1 donne les invariants de Gérard-Levelt à l´aide d´un vecteur cyclique, ensuite on calcule l´indice formel et l´indice analytique de l´opérateur différentiel D notés respectivement $\chi(D, \mathbb{C}[[z]])$ et $\chi(D, \mathbb{C}\{z\})$

L'irrégularité de l´opérateur D est défini par :

$$i(D) = \chi(D, \mathbb{C}[[z]]) - \chi(D, \mathbb{C}\{z\})$$

qui est égale au premier invariant de Gérard- Levelt ρ_1 dont la nullité caractérise les points singuliers réguliers.

Par la suite est introduit le nombre r de N.katz qui vérifie la relation $\frac{\rho_1}{n} \leq r \leq \rho_1$ donc les relations $\rho_1 = 0$ et $r = 0$ sont équivalentes

Enfin on en déduit à l´aide du critère de L.Fuchs le lien entre l'irrégularité de l´opérateur D et la croissance modérée de ses solutions au voisinage de 0.

En conclusion on fait le lien entre le premier invariant de Gérard- Levelt ρ_1, le nombre r de N.Katz, l'irrégularité de l´opérateur D et la croissance modérée des solutions de l´opérateur D au voisinage de 0

Chapitre 1

Rappels algébriques

Dans ce chapitre nous donnerons quelques notions et définitions dont nous aurons besoin

1.1 Anneau d'une valuation discrète

1.1.1 Valuation sur un corps

Définition 1.1.1 *: Une valuation discrète sur un corps K est une application ν de K sur $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ayant les propriétés suivantes :*

1. $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ pour tout $x \in K$ et $y \in K$

2. $\nu(x + y) \geq inf\ \{\nu(x), \nu(y)\}$ pour tout $x \in K$ et $y \in K$

3. $\nu(0) = \infty$ et $\nu(1) = 0$

1.1.2 Anneau de la valuation

$A = \{x \in K; \nu(x) \geq 0\}$ est un sous anneau local de K appelé anneau de la valuation ν

$\eta(A) = \{x \in A; \nu(x) > 0\}$ est l'idéal maximal de A appelé idéal de la valuation

$A^* = A - \eta(A) = \{x \in A; \nu(x) = 0\}$ est l'ensemble des éléments inversibles de A

1.1.3 Anneau d'une valuation discrète

Définition 1.1.2 *: Un anneau local intègre A distinct de son corps des fractions est un anneau d'une valuation discrète s'il existe une valuation discrète sur son corps des fractions tel que A soit l'anneau de cette valuation.*

1.1.4 Uniformisante

Définition 1.1.3 *: Si A est l'anneau d'une valuation discrète ν sur son corps des fractions K, on appelle uniformisante de ν, tout élément t de K tel que $\nu(t) = 1$.*

Remarque 1.1.1 *: Pour tout $x \in K - \{0\}$ il existe :*

1. un entier $n \in Z$
2. un élément $u \in A^*$ tel que $x = ut^n$ avec $\nu(x) = n$

Remarque 1.1.2 *: L'anneau A est un anneau principal les idéaux non nuls de A sont de la forme $\eta(A)^n = t^n A$*

1.2 Réseau

Définition 1.2.1 *Soient A un anneau de valuation discrète et K son corps des fractions, V un espace vectoriel de dimension finie sur K. Un réseau de V est un sous $A-$module de type fini de V engendrant V comme $K-$espace vectoriel*

c'est-à- dire Λ est un réseau de V si et seulement si, il existe $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ base de V sur K qui engendre Λ

Remarque 1.2.1 *Si M et M' sont deux réseaux de V, alors il existe deux entiers q et q' tel que*

$M \subset t^{-q'} M'$ *et* $M' \subset t^{-q} M$

1.3 Dérivation et connexion linéaire

Soit A un anneau d'une valuation discrète sur son corps des fractions K. Une dérivation sur A est une application additive $d: \; A \; \rightarrow \; \Omega$ qui vérifie l'identité de Leibniz : pour tout $f \in A$ et $g \in A$

$$d(fg) = fd(g) + gd(f)$$

où Ω est un $A-$module libre de rang un engendré par dt, t est une uniformisante de la valuation ν.

d se prolonge en une dérivation sur K

$$d : K \rightarrow \Omega_K$$

où $\Omega_K = K \bigotimes\limits_A \Omega$

Remarque 1.3.1 *:* $\nu\left(\dfrac{df}{dt}\right) \geq \nu(f) - 1$

où f est un élément de K et $\dfrac{df}{dt}$ l'élément de K défini par $df = \dfrac{df}{dt}dt$

Définition 1.3.1 *:Une connexion linéaire sur V est une application additive*

$\nabla : \; V \; \rightarrow \; \Omega_K \bigotimes\limits_K V$ *satisfaisant à l'identité de Leibniz*

$$\nabla(fv) = df \otimes v + f\nabla v$$

pour tout $f \in K$ et $v \in V$

Pour tout $\tau \in \breve{\Omega}_K = K \bigotimes\limits_A \breve{\Omega}$ et $\breve{\Omega} = Hom(\Omega, A)$ (dual de Ω) on note :

$$\begin{array}{rcccl} \partial_\tau : & K & \rightarrow & K & \\ & f & \rightarrow & \partial_\tau(f) & = \langle df, \tau \rangle \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccl} \nabla_\tau : & V & \rightarrow & V & \\ & v & \rightarrow & \nabla_\tau(v) & = \langle \nabla v, \tau \rangle \end{array}$$

1.3.1 Propriétés

1. ∂_τ est une dérivation

2. ∇_τ est une application additive

3. $\nabla_\tau(fv) = d_\tau f.v + f\nabla_\tau(v)$ pour tout $f \in K$ et $v \in V$

4. $\nabla_{f\tau}(v) = f\nabla_\tau(v)$ pour tout $f \in K$ et $v \in V$

1.3.2 Vecteur cyclique

Définition 1.3.2 *Un vecteur v de V est dite cyclique pour ∇_τ si le système $\left(v, \nabla_\tau(v), \ldots, \nabla_\tau^{n-1}(v)\right)$ est libre sur K*

1.3.3 Existence d'un vecteur cyclique

Lemme 1.3.1 *: Si K est de caractéristique zéro, il existe pour tout $\tau \neq 0$ et tout ∇ un vecteur cyclique*

Preuve. : se conférer à [3] ■

1.4 Relation entre connexion linéaire et système différentiel

Soit $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de V alors pour tout i $(1 \leq i \leq n)$ on a
$\nabla_\tau(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$ avec $a_{ji} \in K$ pour tout j $(1 \leq j \leq n)$ et pour tout i $(1 \leq i \leq n)$

Soit $v \in V$ alors $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ avec $v_i \in K$ donc

$$\begin{aligned}
\nabla_\tau(v) &= \nabla_\tau(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_\tau(v_i e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\partial_\tau(v_i) e_i + v_i \nabla_\tau(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_\tau(v_i) e_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \nabla_\tau(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_\tau(v_i) e_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_\tau(v_i) e_i + \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ji} v_i e_j \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \partial_\tau(v_i) e_i + \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} v_j e_i \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} (\partial_\tau(v_i) + \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} v_j) e_i
\end{aligned}$$

Donc avec ce choix de base on identifie V à K^n et on obtient une application

$$\begin{array}{cccc}
\nabla_\tau(e) : & K^n & \longrightarrow & K^n \\
& v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} & \longmapsto & (\partial_\tau + B) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

où $B \in M_n(K)$ (une matrice carrée d'ordre n à coefficient dans le corps K)

$B = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ où a_{ij} donnés par l'équation $\nabla_\tau(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$; cette matrice sera notée $Mat(\nabla_\tau, (e))$.

d'autre part, le choix d'une base (e) dans V identifie ∇ à une application.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} dv_1 \\ \vdots \\ dv_n \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

où C est une matrice à élément dans Ω_K. Cette matrice sera notée $Mat(\nabla, (e))$

Donc à tout système différentiel $\frac{df}{dt} - Bf = 0$ on peut lui associe la connexion $\nabla = d - Bdt$ et Réciproquement

Remarque 1.4.1 *Si (e') est une autre base de V et S la matrice de passage de la base (e) à (e')*

$$(e') = (e)S$$

alors :

$$(\nabla_\tau)_{(e')} : \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto (\partial_\tau + S^{-1}BS + S^{-1}\partial_\tau S) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

1.5 Relation entre opérateur différentiel et système différentiel

A une é**quation** différentiel $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ tel que $a_i \in A$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ et $a_n \neq 0$ on peut lui associe le système différentiel

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{((n-1))} \end{pmatrix}$$

Réciproque : à un système différentiel on peut lui associer un opérateur différentiel, si K est de caractéristique 0

Soit $\dfrac{df}{dt} - Bf = 0$ un système différentiel, on peut lui associe la connexion $\nabla = d - Bdt$

Soient $\tau \in \breve{\Omega}_K$ et v un vecteur cyclique pour ∇_τ, avec le choix de la base $(v) = \left(v, \nabla_\tau(v), \ldots, \nabla_\tau^{n-1}(v)\right)$ en identifiant V à K^n on déduit une application

$$\begin{array}{cccc} (\nabla_\tau)_{(v)} : & K^n & \longrightarrow & K^n \\ & \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{pmatrix} & \longmapsto & (\partial_\tau + N)\begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

où $N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ et les a_i les éléments de K données par la formule

$$\nabla_r^n v = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \nabla_r^i v$$

On considère l'espace dual $\breve{V}$ de V que l'on munit de la connexion duale $\breve{\nabla}_\tau$ de ∇_τ définie par le crochet de dualité

$\langle v', \breve{\nabla}_\tau(\varphi)\rangle = \partial_\tau\langle v', \varphi\rangle - \langle \nabla_\tau(v'), \varphi\rangle$, pour tous $v' \in V$, $\varphi \in \breve{V}$

Relativement à la base $(\breve{v})$ dual de (v), $\breve{V} \backsimeq K^n$ on aura le produit scalaire dans K^n :

$\breve{\nabla}_\tau(\varphi) \cdot v' = \partial_\tau(\varphi \cdot v') - \varphi \cdot \nabla_\tau(v')$, pour tous v' , $\varphi \in K^n$

avec d'une part

$$\partial_\tau(\varphi \cdot v') = \varphi \cdot \partial_\tau(v') + v'\partial_\tau\varphi$$

et

$$\varphi \cdot \nabla_\tau(v') = \varphi \cdot (\partial\tau + N) \cdot v' = \varphi \cdot \partial_\tau(v') + \varphi \cdot (N \cdot v')$$

ce qui donne

$\breve{\nabla}_\tau(\varphi) \cdot v' = v'\partial_\tau\varphi - \varphi \cdot (N \cdot v')$

et d'autre part $\varphi\cdot\left(N\cdot v'\right)=\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_o k_{n-1}\\ k_0+a_1k_{n-1}\\ \vdots\\ k_{n-2}+a_{n-1}k_{n-1}\end{pmatrix}$ où $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_{n-1}\end{pmatrix}$

et $v'=\begin{pmatrix} k_0 & \cdots & \cdots & \cdots & k_{n-1}\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\varphi\cdot\left(N\cdot v'\right) &= \sum_{0\leq i\leq n-1}\varphi_i\left(k_{i-1}+a_ik_{n-1}\right);\ k_{-1}=0\\
&= \sum_{0\leq i\leq\leq n-1}\varphi_ik_{i-1}+\left(\sum_{0\leq i\leq n-1}\varphi_ia_i\right)k_{n-1};\ k_{-1}=0\\
&= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & 1 & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \varphi_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_0 & \cdots & \cdots & \cdots & k_{n-1}\end{pmatrix}\\
&= \left(N^T\varphi\right)\cdot v';\ \text{où } N^T\text{est la Transposée de } N
\end{aligned}$$

donc $\breve{\nabla}_\tau\left(\varphi\right)\cdot v'=\partial_\tau\varphi\cdot v'-\left(N^T\varphi\right)\cdot v'$

d'ou $\begin{array}{cccc}\breve{\nabla}_\tau: & k^n & \longrightarrow & k^n\\ & \varphi & \longmapsto & \partial_\tau\varphi-N^T\cdot\varphi\end{array}$ pour tout $\varphi\in K^n$

Le noyau ker $\left(\breve{\nabla}_\tau\right)$ de cet opérateur est le sous espace vectoriel de K^n des vecteurs φ qui vérifient l'équation $\partial_\tau\varphi=N^T\cdot\varphi$

Ce qui avec $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_{n-1}\end{pmatrix}$, constituent un système de n équations différentielles

$$\begin{cases}\partial_\tau\varphi_i= & \varphi_{i+1} & ;0\leq i\leq n-1\\ \partial_\tau^n\varphi_0= & \sum_{0\leq i\leq n-1}a_i\partial_\tau\varphi_0 & ;\varphi_0\in K\end{cases}$$

en particulier pour $\tau=\dfrac{d}{dz}$

1.6 Définition des différents types de singularité d´une connexion

Soit $\tau \in \breve{\Omega}_K$

1. La connexion linéaire ∇ est dite τ-régulière s'il existe une base (e) de V telle que : $Mat(\nabla_\tau, (e)) \in End(A^n)$
2. La connexion linéaire ∇ est dite régulière si elle est $\frac{d}{dt}$ régulière
3. l a connexion linéaire ∇ est dite de Fuchs ou singulière régulière si elle est $t\frac{d}{dt}$ régulière c'est-à-dire il existe une base (e) de V telle que $Mat\left(\nabla_{t\frac{d}{dt}}, (e)\right) \in End(A^n)$.
4. La connexion linéaire ∇ est dite à singularité irrégulière si elle n'est pas régulière et elle n'est pas singulière régulière

Exemple 1.6.1 *: l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine $A = \mathbb{C}\{z\}$ est un anneau de valuation discrète relativement à la valuation ν définie sur son corps des fractions $K = \mathbb{C}\{z\}\left[z^{-1}\right]$ qui est le corps des germes de fonctions méromorphes à l'origine par :*

$$\begin{array}{cccc} \nu: & K & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ & \sum\limits_{\substack{i \geq p \\ p \in \mathbb{Z}}} a_i z^i & \longrightarrow & \inf\{i \in Z\,; a_i \neq 0\} \end{array}$$

et $\nu(0) = \infty$

Soit $A(z)$ une matrice à coefficients méromorphes à pôle en $z = 0$ sur un voisinage de $z = 0$, la singularité $z = 0$ du système différentiel $\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z)$ est

-régulière s'il existe une matrice méromorphe inversible $\wp(z)$ telle que la matrice $\wp(z)^{-1} A(z) \wp(z) + \wp(z)^{-1} \frac{d}{dz}\wp(z)$ ait au plus un pôle simple

- irrégulière dans le cas contraire

Chapitre 2

Construction des invariants

Dans ce chapitre nous introduisons les notions d'invariants mesurant l'irrégularité de la singularité et l'ordre de la singularité d'une connexion

2.1 Construction des réseaux $\mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda)$ et $Q_{\tau}^{m}(\Lambda)$

Lemme 2.1.1 *: Pour tout réseau Λ de V et tout $\tau \in \breve{\Omega}$*

$$\mathcal{F}_{\tau}^{1}(\Lambda) = \Lambda + \nabla_{\tau}(\Lambda)$$

est également un réseau de V

Preuve. : se conférer à [7] ■

Corollaire 2.1.1 *: Pour tout $m \geq 0$*

$$\mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda) = \Lambda + \nabla_{\tau}(\Lambda) + \nabla_{\tau}^{2}(\Lambda) + \cdots + \nabla_{\tau}^{m}(\Lambda)$$

est un réseau de V et on a :

$$\mathcal{F}_{\tau}^{0}(\Lambda) = \Lambda \sqsubset \mathcal{F}_{\tau}^{1}(\Lambda) \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda) \subset \ldots$$

Preuve. : se conférer à [7] ■

Remarque 2.1.1 $\mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda) = \mathcal{F}_{g\tau}^{m}(\Lambda)$ *pour tout $m \geq 0$ et $g \in A^{*}$*

Théorème 2.1.1 *: Soient A un anneau principal, M un A-module libre de rang fini n et M' un sous-A-module de M. Alors*

1. M' est libre de rang $q \leq n$
2. il existe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de M et des éléments non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_q$ de A tels que $(a_1e_1, \ldots, a_qe_q)$ soit une base de M' et a_i divise a_{i+1} pour $1 \leq i \leq q$

$a_1, a_2, \ldots, a_q$ sont appelés diviseurs élémentaires de $\dfrac{M}{M'}$

Lemme 2.1.2 *: Pour tout entier $m \geq 0$ le A-module quotient $Q_{\tau}^{m}(\Lambda) = \dfrac{F_{\tau}^{m+1}(\Lambda)}{F_{\tau}^{m}(\Lambda)}$ est de longueur finie. De plus ∇_{τ} induit un homomorphisme surjectif $\bar{\nabla}_{\tau}^{m}$ du A-module $Q_{\tau}^{m}(\Lambda)$ sur le A-module $Q_{\tau}^{m+1}(\Lambda)$*

Preuve. $\mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda)$ est un réseau pour tout m donc $\mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda)$un sous A- module de rang n

de $\mathcal{F}_{\tau}^{m+1}(\Lambda)$ comme A est principal il existe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{F}_{\tau}^{m+1}(\Lambda)$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ éléments de A tel que $(a_1e_1, a_2e_2, \ldots, a_ne_n)$ base de $\mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda)$.

$$\begin{aligned} Q_{\tau}^{m}(\Lambda) &= \frac{\bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i}{\bigoplus_{i=1}^{n} Aa_ie_i} \\ &\backsimeq \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{Ae_i}{Aa_ie_i} \\ &\backsimeq \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{A}{Aa_i} \end{aligned}$$

$\dfrac{A}{Aa_i}$ est fini car $a_i = ut^s$ avec $s \in \mathbb{N}$ donc $Q_{\tau}^{m}(\Lambda)$ est de longueur fini

2) On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\tau}^{m+1}(\Lambda) & \xrightarrow{\nabla_{\tau}} & \mathcal{F}_{\tau}^{m+2}(\Lambda) \\ q_m \downarrow & & \downarrow q_{m+1} \\ Q_{\tau}^{m}(\Lambda) & \xrightarrow{\bar{\nabla}_{\tau}^{m}} & Q_{\tau}^{m+1}(\Lambda) \end{array}$$

$\mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda) \subset Ker\left(q_{m+1} \circ \nabla_{\tau}\right)$ en effet

Soit $x \in \mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda)$

$\nabla_{\tau}(x) \in \mathcal{F}_{\tau}^{m+1}$ donc $q_{m+1} \circ \nabla_{\tau}(x) = 0$ par suite $x \in Ker\left(q_{m+1} \circ \nabla_{\tau}\right)$

d'ou l'application $\bar{\nabla}_{\tau}^{m}$ existe

Soient u et v deux éléments $\mathcal{F}_{\tau}^{m+1}(\Lambda)$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\tau}^{m}(\bar{u}+\bar{v}) &= \bar{\nabla}_{\tau}^{m}(q_m(u+v) \\
&= q_{m+1}[\nabla_{\tau}(u+v)] \\
&= q_{m+1}[\nabla_{\tau}(u)+\nabla_{\tau}(v)] \\
&= q_{m+1}[\nabla_{\tau}(u)]+q_{m+1}[\nabla_{\tau}(v)] \\
&= \bar{\nabla}_{\tau}^{m}(\bar{u})+\bar{\nabla}_{\tau}^{m}(\bar{v})
\end{aligned}$$

Soient $f \in A$ et $\bar{v} \in Q_{\tau}^{m}(\Lambda)$ donc $v \in \mathcal{F}_{\tau}^{m+1}(\Lambda)$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\tau}^{m}(f\bar{v}) &= \bar{\nabla}_{\tau} \circ q_m(fv) \\
&= q_{m+1} \circ \nabla_{\tau}(fv) \\
&= q_{m+1}[\partial_{\tau} f.v + f.\nabla_{\tau} v] \\
&= \partial_{\tau} f.q_{m+1}(v) + f.q_{m+1}[\nabla_{\tau}(v)] \\
&= \partial_{\tau} f.0 + f.\left[\bar{\nabla}_{\tau}^{m}(q_m(v))\right] \text{ car } v \in \mathcal{F}_{\tau}^{m+1}(\Lambda) \\
&= f\bar{\nabla}_{\tau}^{m}(\bar{v})
\end{aligned}$$

d'ou

$$\bar{\nabla}_{\tau}^{m}(f\bar{v},) = f\bar{\nabla}_{\tau}^{m}(\bar{v})$$

Montrons que $\bar{\nabla}_{\tau}^{m}$ est surjectif

Soit $(e_{1,}e_2,\ldots,e_n)$ base de Λ donc $\mathcal{F}_{\tau}^{m}(\Lambda)$ est engendré par

$(e_1,e_2,\ldots,e_n,\nabla_{\tau}(e_1),\ldots,\nabla_{\tau}(e_n),\ldots,\nabla_{\tau}^{m}(e_1),\ldots,\nabla_{\tau}^{m}(e_n))$ pour tout $m \in \mathbb{N}$

donc $Q_{\tau}^{m}(\Lambda)$ est engendré par$(q_m\ \left[\nabla_{\tau}^{m+1}(e_1)\right], q_m[\nabla_{\tau}^{m+1}(e_2)],\ldots,q_m[\nabla_{\tau}^{m+1}(e_n)\right])$ pour tout $m \in \mathbb{N}$

Soit $\bar{v}$ un élément de $Q_{\tau}^{m+1}(\Lambda)$ donc

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_{m+1} \nabla_\tau^{m+2}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_{m+1} \nabla_\tau \left(\nabla_\tau^{m+1}(e_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\nabla}_\tau^{m} \circ q_m \left(\nabla_\tau^{m+1}(e_i)\right) \\ &= \bar{\nabla}_\tau^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(q_m \nabla_\tau^{m+1}(e_i)\right)\right]\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(q_m \nabla_\tau^{m+1}(e_i)\right) \in Q_\tau^m(\Lambda)$ donc $\bar{\nabla}_\tau^m$ est un homomorphisme surjectif . ■

Corollaire 2.1.2 *: Il existe un entier $m_0 \geq 0$ tel que pour $m \geq m_0$*

$$\bar{\nabla}_\tau^m : Q_\tau^m(\Lambda) \to Q_\tau^{m+1}(\Lambda)$$

soit un isomorphisme

Preuve. : posons $f^m = \bar{\nabla}_\tau^{m-1} \circ \bar{\nabla}_\tau^{m-2} \circ \cdots \circ \bar{\nabla}_\tau^{0} : Q_\tau^0(\Lambda) \to Q_\tau^m(\Lambda)$

f^mest surjectif car $\bar{\nabla}_\tau^i$ est surjectif $\quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

Posons $N_q = K\,\mathrm{erf}^q$

on aura $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_q \subset \ldots$ est une suite de sous module de $Q_\tau^0(\Lambda)$ et $Q_\tau^0(\Lambda)$ est un $A-$module de longueur fini donc la suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire donc il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq q_0$ $N_p = N_{q_0}$

Soient $p \in \mathbb{N}$, $p \geq q_0$ et $x \in Q_\tau^p(\Lambda)$ tel que $\bar{\nabla}_\tau^p(x) = 0$

on a f^p est surjectif donc il existe $y \in Q_\tau^0(\Lambda)$ tel que $x = f^p(y)$

on a $0 = \bar{\nabla}_\tau^p(x) = \bar{\nabla}_\tau^p[f^p(y)] = f^{p+1}(y)$ donc $y \in N_{p+1} = N_p$ par suite $x = f^p(y) = 0$

d´ou $\bar{\nabla}_\tau^p$ est injectif $\forall p \geq q_0$. ■

2.2 Définition des nombres $\rho_\tau(\Lambda)$

Désignons par $t^{\epsilon_\tau^1(\Lambda)}, t^{\epsilon_\tau^2(\Lambda)}, \ldots, t^{\epsilon_\tau^n(\Lambda)}$ les diviseurs élémentaires de $Q_\tau^{m_0}(\Lambda)$

On a

$$o \leq \epsilon_\tau^1(\Lambda) \leq \epsilon_\tau^2(\Lambda) \leq \ldots \leq \epsilon_\tau^n(\Lambda)$$

et on pose

$$\rho_\tau(\Lambda) = l\left(Q_\tau^{m_0}(\Lambda)\right) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_\tau^i(\Lambda)$$

où $l\left(Q_\tau^{m_0}(\Lambda)\right)$ désigne la longueur du $A-$ module $Q_\tau^{m_0}(\Lambda)$

Proposition 2.2.1 *: Si $\tau = t^r \dfrac{d}{dt}$ avec $r \geq 1$ alors $\rho_\tau(\Lambda)$ ne dépend pas du choix du réseau Λ de V*

Preuve. : se conférer à [7] ■

Si $\tau = t^r \dfrac{d}{dt}$ (t uniformisante arbitraire) avec $r \geq 1$, on remplace dans la suite l'indice $t^r \dfrac{d}{dt}$ par l'indice r.

On écrira donc $\mathcal{F}_r^m(\Lambda)$, ρ_r, $Q_r^m(\Lambda)$, $\epsilon_r^i(\Lambda)$ et ∇_r. à la place de $\mathcal{F}_\tau^m(\Lambda)$, ρ_τ, $Q_\tau^m(\Lambda)$, $\epsilon_\tau^i(\Lambda)$ et ∇_τ.

Proposition 2.2.2 *: Il existe un entier positif r tel que $\rho_r = 0$*

et si

$$l = \inf\{r \in \mathbb{N}^*; \rho_r = 0\}$$

On a

$$\rho_1 \succ \rho_2 \succ \cdots \succ \rho_{l-1} \succ 0$$

(respectivement rien si $l = 1$)

Preuve. Soit Λ un réseau de V

Λ un réseau de V alors $\Lambda + \nabla_{\frac{d}{dt}}(\Lambda)$ est un réseau de V

donc il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Lambda + \nabla_{\frac{d}{dt}}(\Lambda) \subset t^{-r}\Lambda$, par suite $t^r\left(\Lambda + \nabla_{\frac{d}{dt}}(\Lambda)\right) \subset \Lambda$,

par conséquent $t^r\ \nabla_{\frac{d}{dt}}(\Lambda) = \nabla_{t^r\frac{d}{dt}}(\Lambda) \subset \Lambda$, donc $\mathcal{F}_r^m(\Lambda) = \Lambda$ pour tout $m \geq 0$

d'ou $\rho_r = 0$

Pour montrer que $\rho_1 \succ \rho_2 \succ \cdots \succ \rho_{l-1} \succ \rho_l = 0$, il suffit de montrer $\rho_p \succ 0$ entraine $\rho_{p+1} \prec \rho_p$

$\rho_p = l\left(Q_p^{m_0}(M)\right)$ avec M réseau arbitraire on a

$$\begin{aligned} Q_p^{m_0}(M) &= \frac{\mathcal{F}_p^{m_0+1}(M)}{\mathcal{F}_p^{m_0}(M)} \\ &= \frac{\mathcal{F}_p^{m_0}(M) + \nabla_p\left(\mathcal{F}_p^{m_0}(M)\right)}{\mathcal{F}_p^{m_0}(M)} \end{aligned}$$

Posons $\Lambda = \mathcal{F}_p^{m_0}(M)$
$\rho_p = l\left(\dfrac{\Lambda + \nabla_p(\Lambda)}{\Lambda}\right)$
Montrons que $\Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda) \subset \Lambda + \nabla_p(\Lambda)$ en effet :

Soit $v \in \Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda)$

$$\begin{aligned}
v &\in \Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda) \Longrightarrow \exists v_1 \in \Lambda \; et \; v_2 \in \Lambda; v = v_1 + \nabla_{p+1}(v_2) \\
v &\in \Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda) \Longrightarrow \exists v_1 \in \Lambda \; et \; v_2 \in \Lambda; v = v_1 + t\nabla_p(v_2) \\
v &\in \Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda) \Longrightarrow \exists v_1 \in \Lambda \; et \; v_2 \in \Lambda; v = v_1 + \nabla_p(tv_2) - \partial_\tau t.v_2
\end{aligned}$$

$t \in A$ donc $\partial_\tau t.v_2 \in \Lambda$ et $tv_2 \in \Lambda$ car Λ est un réseau, par suite $v \in \Lambda + \nabla_p(\Lambda)$

Montrons que $\Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda) \neq \Lambda + \nabla_p(\Lambda)$

Supposons qu'on a :

$$\Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda) = \Lambda + \nabla_p(\Lambda) \tag{2.2.1}$$

$\nabla_{p+1}(\Lambda) = t\nabla_p(\Lambda) \subset t(\Lambda + \nabla_p(\Lambda))$ donc

$$\Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda) \subset \Lambda + t(\Lambda + \nabla_p(\Lambda)) \tag{2.2.2}$$

2.2.1 et 2.2.2 donne

$$\Lambda + \nabla_p(\Lambda) \subset \Lambda + t(\Lambda + \nabla_p(\Lambda)) \tag{2.2.3}$$

$\nabla_p(\Lambda) + \Lambda$ est un réseau donc $t(\Lambda + \nabla_p(\Lambda)) \subset \Lambda + \nabla_p(\Lambda)$ donc

$$\Lambda + t(\nabla_p(\Lambda) + \Lambda) \subset \Lambda + \nabla_p(\Lambda) \tag{2.2.4}$$

2.2.3 et 2.2.4 donne $\Lambda + t(\Lambda + \nabla_p(\Lambda)) = \Lambda + \nabla_p(\Lambda)$

D'après le lemme de Nakayama $\Lambda + \nabla_p(\Lambda) = \Lambda$

par conséquent $\rho_p = 0$,ce qui contredit $\rho_p \succ 0$
donc $\dfrac{\Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda)}{\Lambda} \subsetneqq \dfrac{\Lambda + \nabla_p(\Lambda)}{\Lambda}$ d'ou

$$\rho_{p+1} \prec \rho_p$$

■

2.3 Ordre de la singularité de la connexion ∇

Définition 2.3.1 *: On appelle ordre de la singularité de ∇ l'entier positif l de la proposition* 2.2.2*. Les entiers $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{l-1}$ sont les invariants de ∇ appelés invariants de* ***Gérard-Levelt*** *de ∇. L'entier ρ_1 est aussi appelé l'invariant de* ***Fuchs*** *de ∇.*

Les nombres $\epsilon_r^i(\Lambda)$ $(r = 1, 2, \ldots, l-1; i = 1, 2, \ldots, n)$ sont appelés les invariants de ∇ associés à Λ

Chapitre 3

Lien entre invariants de Gérard-Levelt, le nombre de N.Katz, l'irrégularité de B.Malgrange et croissance modérée

Dans ce chapitre nous calculons les invariants de Gérard-Levelt ρ_s avec la méthode d'un vecteur cyclique, nous introduisons l'irrégularité de l´opérateur D, $i(D)$ qui est égale au premier invariant de Gérard- Levelt ρ_1 et le nombre r de N.Katz, dont la nullité caractérisent les points singuliers réguliers, ainsi que le critère de L.Fuchs qui établit l'équivalence entre l'irrégularité de l´opérateur D et la croissance modérée de ses solutions multiformes au voisinage de 0.

En conclusion on fait le lien entre ces différents invariants et la croissance modérée

3.1 Calcul des invariants de Gérard-Levelt $\rho_r\,(r \geq 1)$

Théorème 3.1.1 *: Pour tout vecteur cyclique $v \in V$ on a :*

$$\rho_r = Sup\,(0, \nu_0)$$

où

$$\nu_0 = \sup_{0 \leq i \leq \leq n-1} (-\nu(a_i))$$

et les a_i les éléments de K donnés par la formule

$$\nabla_r^n v = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \nabla_r^i v$$

Preuve. : Désignons par Λ le réseau engendré par $v, \nabla_r v, \nabla_r^2 v, \ldots, \nabla_r^{n-1} v$

- Si $\nu_0 \leq 0$, $-\nu(a_i) \leq 0$ $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, par suite $\nu(a_i) \geq 0$

$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ donc $a_i \in A$ $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. on a $\mathcal{F}_r^1(\Lambda)$ est engendré par $v, \nabla_r v, \ldots, \nabla_r^{n-1} v, \nabla_r^n v$ comme $\nabla_r^n v = \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i \nabla_r^i v$ et $a_i \in A$ donc $\nabla_r^n v \in \Lambda$ par suite $\mathcal{F}_r^1(\Lambda) = \Lambda$ et $\mathcal{F}_r^m(\Lambda) = \mathcal{F}_r^{m-1}(\Lambda) + \nabla_r(\mathcal{F}_r^{m-1})$ donc $\mathcal{F}_r^m(\Lambda) = \Lambda$ $\forall m \geq 0$ donc

$Q_r^m(\Lambda) = \{0\}$ $\forall m \geq 0$ par suite $\rho_r = 0$

d'ou dans ce cas la relation $\rho_r = Sup(0, \nu_0)$ est vrais

- Si $\nu_0 \succ 0$ on utilise les deux lemmes suivants ■

Lemme 3.1.1 *: Si*

$$k = sup\{i/0 \leq i \leq n-1, \nu(a_i) = -\nu_0\}$$

alors, pour tout entier $m \geq 0$: il existe

a$_m$) $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1+m}, \ldots, b_{n+m} \in A$ tels que :

$$\nabla_r^k v = b_0 v + \ldots + b_{k-1} \nabla_r^{k-1} v + b_{k+m+1} \nabla_r^{k+m+1} v + \ldots + b_{n+m} \nabla_r^{n+m} v \qquad (A_m)$$

avec

$$\nu(b_i) \succ 0 \text{ si } i \geq k+m+1$$

et

$$\nu(b_{n+m}) \geq \nu_0 \text{ (l´égalité n´ayant lieu que pour } m = 0)$$

b$_m$) $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, c_{k+m+1}, \ldots, c_{m+n} \in A$ vérifiant :

$$\nabla_r^{k+m} v = c_0 v + \ldots + c_{k-1} \nabla_r^{k-1} v + c_{k+m+1} \nabla_r^{k+m+1} v + \ldots + c_{n+m} \nabla_r^{n+m} v \qquad (B_m)$$

avec

$$\nu(c_i) \succ 0 \text{ si } i \geq k+m+1$$

et

$$\nu(c_{m+n}) = \nu_0$$

Preuve. : se conférer à [7] ■

Lemme 3.1.2 : *Pour tout entier $m \geq 0$, le réseau $\mathcal{F}_r^m(\Lambda)$ est engendré par*

$v, \nabla_r v, \ldots, \nabla_r^{k-1} v$, $\nabla_r^{k+m} v, \ldots, \nabla_r^{n+m-1} v$

Preuve. : se conférer à [7] ■

On termine la démonstration de Théorème 3.1.1

Preuve. -Si $\nu_0 \succ 0$ $Q_r^0(\Lambda)$ est engendré par la classe de $\nabla_r^n v$ et on a $t^{\nu_0}\nabla_r^n v = \sum_{i=0}^{i=n-1} t^{\nu_0} a_i \nabla_r^i v$, $\nu(t^{\nu_0} a_i) = \nu_0 + \nu(a_i) \geq 0$ car $\nu_0 \geq -\nu(a_i)$ $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, donc $t^{\nu_0} a_i \in A$, par suite $t^{\nu_0}\nabla_r^n v \in \Lambda$ donc la longueur de $Q_r^0(\Lambda)$ est au plus ν_0, comme les homomorphismes $\bar{\nabla}_r^m : Q_r^m(\Lambda) \to Q_r^{m+1}(\Lambda)$ sont surjectifs $l(Q_r^m(\Lambda)) \leq \nu_0$ pour tout $m \geq 0$ par suite $l(Q_r^{m_0}(\Lambda)) = \rho_r \leq \nu_0$ pour m_0 assez grand

Supposons que $\rho_r \prec \nu_0$

pour m assez grand $Q_r^m(\Lambda)$ est engendré par la classe du vecteur $\nabla_r^{n+m}(v)$

donc $t^{\nu_0 - 1}\nabla_r^{n+m}(v) \in \mathcal{F}_r^m(\Lambda)$ d'après le lemme 3.1.1 on a :

$\nabla_r^{k+m} v = c_0 v + \cdots + c_{k-1}\nabla_r^{k-1} v + c_{k+m+1}\nabla_r^{k+m+1} v + \cdots + c_{n+m}\nabla_r^{n+m} v$

En multipliant par t^{-1}on aura :

$$-t^{-1}c_{n+m}\nabla_r^{n+m} v = t^{-1}c_0 v + \cdots + t^{-1}c_{k-1}\nabla_r^{k-1} v - t^{-1}\nabla_r^{k+m} v + t^{-1}c_{k+m+1}\nabla_r^{k+m+1} v + \cdots + t^{-1}c_{n+m-1}\nabla_r^{n+m-1} v \tag{3.1.1}$$

comme

$\nu(c_{n+m}) = \nu_0$, $\nu(-t^{-1}c_{m+n}) = -1 + \nu_0 \geq 0$ donc il existe $g \in A^*$ tel que

$-t^{-1}c_{n+m} = g t^{-1+\nu_0}$ par suite $-t^{-1}c_{n+m}\nabla_r^{n+m} v \in \mathcal{F}_r^m(\Lambda)$

la formule 3.1.1 donne une contradiction car le premier membre est un élément de $\mathcal{F}_r^m(\Lambda)$ qui est engendré par $v, \nabla_r v, \nabla_r^2 v, \ldots, \nabla_r^{k-1} v, \nabla_r^{k+m} v, \ldots, \nabla_r^{n+m-1} v$

alors que dans le second membre le coefficient de $\nabla_r^{k+m} v$ n'est pas un élément de A donc le second membre n'est pas élément de $\mathcal{F}_r^m(\Lambda)$ contradiction

d'ou $\rho_r = \nu_0 = Sup(0, \nu_0)$ car $\nu_0 \succ 0$. ■

Exemple 3.1.1 *Soient $A = \mathbb{C}\{z\}$, $K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ et la connexion ∇ définit par:*

$$\nabla = d + \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z^2} & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1-z}{z^2} \end{pmatrix} dz : \; K^2 \;\to\; \Omega_K \bigotimes_K K^2$$

$\Omega_K = Kdz$

Calculer le premier invariant de Gérard- Levelt ρ_1

$$\begin{array}{rrcl} \nabla_1 = \nabla_{z\frac{d}{dz}} : & K^2 & \longrightarrow & K^2 \\ & v & \longrightarrow & \nabla_1(v) = \langle \nabla v, z\frac{d}{dz} \rangle \end{array}$$

$$\begin{aligned} \nabla_1(v) &= \langle dv + \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z^2} & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1-z}{z^2} \end{pmatrix} vdz, z\frac{d}{dz} \rangle \\ &= \langle \frac{dv}{dz} dz + \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z^2} & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1-z}{z^2} \end{pmatrix} vdz, z\frac{d}{dz} \rangle \\ &= z\frac{dv}{dz} + z \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z^2} & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1-z}{z^2} \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

Calcul de ρ_1

Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \nabla_1(v) &= z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z^2} & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1-z}{z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z} & 0 \\ \frac{1}{z} & \frac{1-z}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z} \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $\begin{vmatrix} 1 & \frac{z+1}{z} \\ 0 & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{z} \neq 0$

par conséquent la famille $\{v, \nabla_1(v)\}$ est base de K^2, c'est-à-dire v est un vecteur cyclique pour ∇_1

$$\begin{aligned}
\nabla_1^2(v) &= \nabla_1(\nabla_1(v)) \\
&= z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} \frac{z+1}{z} \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{z+1}{z^2} & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1-z}{z^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{z+1}{z} \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-z}{z^2} \\ \frac{-z}{z^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{z^2+2z+1}{z^2} \\ \frac{2}{z^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{z^2+z+1}{z^2} \\ \frac{2-z}{z^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Trouvons $\begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \end{pmatrix}$ tel que $\nabla_1^2(v) = (v, \nabla_1(v))\begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \end{pmatrix}$

$$\nabla_1^2(v) = (v, \nabla_1(v))\begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{z^2+z+1}{z^2} \\ \frac{2-z}{z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{z+1}{z} \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \end{pmatrix}$$

la matrice inverse $\begin{pmatrix} 1 & \frac{z+1}{z} \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$ est $z\begin{pmatrix} \frac{1}{z} & -\frac{z+1}{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -z-1 \\ 0 & z \end{pmatrix}$

donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -z-1 \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{z^2+z+1}{z^2} \\ \frac{2-z}{z^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{z^2+z+1}{z^2} + \frac{(-z-1)(2-z)}{z^2} \\ \frac{2-z}{z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{z^2+z+1}{z^2} + \frac{z^2-z-2}{z^2} \\ \frac{2-z}{z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2z^2-1}{z^2} \\ \frac{2-z}{z} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$a_o = \frac{2z^2-1}{z^2} = \frac{-1}{z^2} + 2$

$\nu(a_o) = -2$

$a_1 = \dfrac{2-z}{z} = \dfrac{2}{z} - 1$

$\nu(a_1) = -1$

d'ou $\rho_1 = Sup(0, Sup(1,2)) = 2$

3.2 Régularité

Théorème 3.2.1 *: La connexion ∇ est τ-régulière si et seulement si $\rho_\tau = 0$*

Preuve. : ∇ est $\tau-$régulière donc il existe une base $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de V telle que

$Mat(\nabla_\tau, (e)) \in End(A)$

Désignons par Λ le réseau de V engendré par (e) on a $\nabla_\tau(\Lambda) \subset \Lambda$ donc pour tout $m \geq 0$, $Q_\tau^m(\Lambda) = \{0\}$ par suite $\rho_\tau = 0$

Supposons que $\rho_\tau = 0$ donc pour tout réseau Λ de V, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\mathcal{F}_\tau^{m_0+1}(\Lambda)}{\mathcal{F}_\tau^{m_0}(\Lambda)} = Q_\tau^{m_0}(\Lambda) = 0$

donc $\mathcal{F}_\tau^{m_0+1}((\Lambda)) = \mathcal{F}_\tau^{m_0}(\Lambda)$ par suite $\nabla_\tau(\mathcal{F}_\tau^{m_0}(\Lambda)) \subset \mathcal{F}_\tau^{m_0}(\Lambda)$

soit $(\acute{e})$ une base de $\mathcal{F}_\tau^{m_0}(\Lambda)$; $Mat(\nabla_\tau, (\acute{e})) \in End(A)$ d'ou ∇ est $\tau-$régulière. $\blacksquare$

Corollaire 3.2.1 *: Pour tout entier $l \succ 0$ les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. ∇ est l-régulière
2. ∇ a une singularité d´ordre inférieur ou égal à l
3. il existe une base $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de V telle que : $Mat(\nabla_l, (e)) \in M_n(A)$

Preuve. 1$\Rightarrow$ 2

∇ est l-régulière, d'après le théorème 3.2.1 on a :

$\rho_l = 0$ donc ∇ a une singularité d´ordre inférieur ou égal à l

2$\Rightarrow$ 3

∇ a une singularité d´ordre inférieur ou égal à l d´ou $\rho_l = 0$ par suite ∇ est $1-$régulière donc il existe une base $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de V telle que $Mat(\nabla_l, (e)) \in M_n(A)$

3$\Rightarrow$ 2

il existe une base $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de V telle que : $Mat\,(\nabla_l, (e)) \in M_n\,(A)$ donc ∇ est l-régulière. ■

Corollaire 3.2.2 *: Une connexion $\triangledown$ sur V est dite de fuchs si et seulement si elle est un-réguliére c'est-à-dire son invariant de fuchs ρ_1 est nul*

Preuve. : d'après le théorème 3.2.1 ■

Remarque 3.2.1 *: Dans l´exemple 3.1.1 $\rho_1 \neq 0$ donc la connexion ∇ n'est pas singulière-régulière*

3.3 Comparaison de ρ_1 au nombre rationnel de N.Katz et à l'irrégularité de B.Malgrange

3.3.1 Comparaison de ρ_1 au nombre rationnel de N.Katz

Soit M un réseau de V l'application :

$$\nu_M : V \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

définie par

$$\nu_M(x) = \sup\{k; k \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \text{ et } x \in \eta^k M\}$$

(η idéal de la valuation ν)

est une valuation sur l'espace vectoriel V. C'est-à-dire que cette application possède les propriétés suivantes :

pour tout $x \in V, y \in V$ et $\lambda \in K$

1. $\nu_M(x+y) \geq \inf\{\nu_M(x), \nu_M(y)\}$
2. $\nu_M(\lambda y) = \nu(\lambda) + \nu_M(y)$

3. $\nu_M(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in M$

4. $\nu_M(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

De plus si M' est un autre réseau de V, il existe un entier N tel que

$$|\nu_M(x) - \nu_{M'}(x)| \leq N \tag{3.3.1}$$

pour tout $x \in V$

Théorème 3.3.1 : *Théorème de N.Katz. -Il existe un nombre rationnel $r \geq 0$ tel que :*

Quels que soient le réseau M de V et la base $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de V, il existe une constante C telle que pour tout $i \geq 0$

$$\left| \sup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ j \leq i}} \{-\nu_M(\nabla^j e_k)\} - ri \right| \leq C$$

r est appelé le nombre rationnel de N.Katz

Preuve. : se conférer à [7] ∎

Soient M et Λ deux réseaux de V, posons

$$-\nu_M(\Lambda) = \sup_{1 \leq i \leq n} (-\nu_M(\lambda_i))$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des vecteurs engendrant le réseau Λ

$\nu_M(\Lambda)$ est indépendant du choix de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ car on a $\nu_M(\Lambda) = \inf_{\lambda \in \Lambda}(\nu_M(\lambda))$

Remarque 3.3.1 - *Dans le théorème de Katz on peut se restreindre à un réseau M fixé, grâce à l'inégalité 3.3.1*

Nous noterons donc simplement ν la valuation de V associée à un tel M fixé

Théorème 3.3.2 *Pour toute connexion ∇ sur V, il existe un entier $\rho_1 \geq 0$ et un nombre rationnel $r \geq 0$. Vérifiant la propriété suivante :*

Quel que soit le réseau Λ de V, il existe deux constantes C_1, C_2 tels que pour tout $i \geq 0$

a) $|long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l \Lambda) - \rho_1 i| \leq C_1$

b) $|\nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) + ri| \leq C_2$

Preuve. Soient $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel V et Λ le réseau engendré par (e). d'après le Théorème de N.Katz on a :

$$\begin{aligned}
\left| \sup_{\substack{1\leq k\leq n \\ j\leq i}} \{-\nu_M(\nabla^j e_k)\} - ri \right| &\leq C \Longleftrightarrow \left| - \inf_{\substack{1\leq k\leq n \\ j\leq i}} \{\nu_M(\nabla^j e_k)\} - ri \right| \leq C \\
&\Longleftrightarrow \left| \inf_{\substack{1\leq k\leq n \\ j\leq i}} \{\nu_M(\nabla^j e_k)\} + ri \right| \leq C \\
&\Longleftrightarrow \left| \nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) + ri \right| \leq C
\end{aligned}$$

car *les* vecteurs $(\nabla^j e_k), 1 \leq j \leq i$ et $1 \leq k \leq n$ sont des vecteurs engendrant $\mathcal{F}_1^i(\Lambda)$

D'ou l'inégalité dans b) avec $C = C_2$

Montrons l'inégalité dans a)

Pour tout i on a

$$long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l \Lambda) = \sum_{1\leq j\leq i} long(\mathcal{F}_1^j(\Lambda) l \mathcal{F}_1^{j-1}(\Lambda))$$

et pour tout j supérieur à un nombre m_0 assez grand

$$long(\mathcal{F}_1^j(\Lambda) l \mathcal{F}_1^{j-1}(\Lambda)) = \rho_1$$

donc il existe une constante C_1 telle que

$$\left| long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l \Lambda) - \rho_1 i \right| \leq C_1$$

■

Proposition 3.3.1 : $\dfrac{\rho_1}{n} \leq r \leq \rho_1$

Preuve. *Soit* Λ *un réseau* *prenant $\nu = \nu_\Lambda$ et $\Lambda' = \mathcal{F}_1^i(\Lambda)$ et si $t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, \ldots, t^{\mu_n}$ sont des diviseurs élémentaires de $\Lambda' l \Lambda$, ils existent une base $(e_1^{'}, e_2^{'}, \ldots, e_n^{'})$ de Λ telle que $(t^{-\mu_1}e_1^{'}\ , t^{-\mu_2}e_2^{'}\ , \ldots, t^{-\mu_n}e_n^{'}\ )$ soit une base de $\Lambda^{'}$*

$$\begin{aligned} -\nu_\Lambda(\Lambda^{'}) &= \sup_{1\leq i\leq n}(-\nu_\Lambda(t^{-\mu_i}e_i^{'})) \\ &= \sup_{1\leq i\leq n}(-\sup\{k\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\} l t^{-\mu_i}e_i^{'}\in\eta^k\Lambda\}) \\ &= \sup_{1\leq i\leq n}(-(-\mu_i)) \\ &= \sup_{1\leq i\leq n}(\mu_i) \end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n}\mu_i \leq \sup_{1\leq i\leq n}(\mu_i) \leq \sum_{1\leq i\leq n}\mu_i$$

$$\frac{1}{n} long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l \Lambda) \leq -\nu_\Lambda(\Lambda^{'}) \leq long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l \Lambda) \tag{3.3.2}$$

Les inégalités de Théorème 3.3.2

$|long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l\Lambda) - \rho_1 i| \leq C_1$ *donne*

$$-C_1 \leq long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l\Lambda) - \rho_1 i \leq C_1 \tag{3.3.3}$$

et $|\nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) + ri| \leq C_2$ *donne*

$$-C_2 \leq \nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) + ri \leq C_2 \tag{3.3.4}$$

pour montrer $r \leq \rho_1$ il suffit de montrer que $r - \rho_1 \leq 0$

Les inégalités 3.3.3 et 3.3.4 donne

$-C_2 - C_1 \leq long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l\Lambda) - \rho_1 i + \nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) + ri \leq C_2 + C_1$ *donc*

$(r-\rho_1)\, i \leq C_2 + C_1$ *pour tout $i \geq 0$ car* $long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l\Lambda) + \nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) \geq 0$

d'après l'inégalité 3.3.2 par suite

$$r - \rho_1 \leq 0 \tag{3.3.5}$$

Pour montrer $\frac{\rho_1}{n} \leq r$ il suffit de montrer que $\frac{\rho_1}{n} - r \leq 0$

L'inégalité de Théorème 3.3.2

$|long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l\Lambda) - \rho_1 i| \leq C_1$ *donne*

$$\frac{-C_1}{n} \leq \frac{long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda) l\Lambda)}{n} - \frac{\rho_1}{n} i \leq \frac{C_1}{n} \tag{3.3.6}$$

Les inégalités 3.3.6 et 3.3.4 donne

$$-C_2 - \frac{C_1}{n} \leq \frac{long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)l\Lambda)}{n} - \frac{\rho_1}{n} i + \nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) + ri \leq C_2 + \frac{C_1}{n}$$

donc $\left(r - \frac{\rho_1}{n}\right) i \geq -C_2 - \frac{C_1}{n}$ *pour tout* $i \geq 0$ *car* $\frac{1}{n} long(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)l\Lambda) + \nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) \leq 0$

d'après l'inégalité 3.3.2 par suite

$$\frac{\rho_1}{n} - r \leq 0 \tag{3.3.7}$$

Les inégalités 3.3.5 et 3.3.7 donne

$$\frac{\rho_1}{n} \leq r \leq \rho_1$$

■

Conclusion 3.3.1 $\rho_1 = 0 \Longleftrightarrow r = 0$

3.3.2 Comparaison de ρ_1 à l'irrégularité de B.Malgrange

Opérateur à indice

Définition 3.3.1 *: soient E et F deux espaces vectoriels sur K. On dit qu'une application K-linéaire $u : E \longrightarrow F$ est un opérateur à indice si son noyau et son conoyau sont de dimensions finies.*

On appelle indice de u l'entier :

$$\chi(u, E, F) = \dim Keru - \dim co\ker u$$

Si $E = F$ on écrit simplement $\chi(u, E)$

Proposition 3.3.2 *(Lemme du serpent)*

Soit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M" & \longrightarrow & 0 \\ & & f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N" & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
Kerf & \underset{\rightarrow}{u_1} & Kerg & \underset{\rightarrow}{v_1} & Kerh \\
i\downarrow & & j\downarrow & & k\downarrow \\
M & \underset{\rightarrow}{u} & M' & \underset{\rightarrow}{v} & M" \\
f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow \\
N & \underset{\rightarrow}{u'} & N' & \underset{\rightarrow}{v'} & N" \\
p\downarrow & & q\downarrow & & r\downarrow \\
coKerf & \underset{\rightarrow}{u_2} & coKerg & \underset{\rightarrow}{v_2} & coKerh
\end{array}$$

où i,j,k sont des injections canoniques et p,q,r sont des surjections canoniques alors il existe une suite exacte longue :

$0 \rightarrow Kerf \underset{\rightarrow}{u_1} Kerg \underset{\longrightarrow}{v_1} Kerh \longrightarrow coK\,\text{erf} \underset{\rightarrow}{u_2} coKerg \underset{\rightarrow}{v_2} coKerh \longrightarrow 0$

Preuve. se conférer à [1] ■

Définition 3.3.2 *: une suite de $A-$modules et de $A-$morphismes de modules*

$$\ldots \underset{\longrightarrow}{h_{i-2}} M_{i-1} \underset{\longrightarrow}{h_{i-1}} M_i \underset{\rightarrow}{h_i} M_i \underset{\longrightarrow}{h_{i+1}} \ldots$$

est dite exacte en M_i si $imh_{i-1} = \ker h_i$. La suite est dite exacte si elle est exacte en chacun de ses modules. En particulier une suite exacte de la forme :

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

est appelée suite exacte courte.

Proposition 3.3.3 *: Soit K un corps*

$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$

une suite exacte de K-espaces vectoriels de dimensions finies alors :

$\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i \dim M_i = 0$

Remarque 3.3.2 *: Si E et F sont de dimensions finies, on a alors :*

$$\chi(u, E, F) = \dim E - \dim F$$

Si $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux opérateurs à indices alors $v \circ u$ est aussi opérateur à indice et

$$\chi(v \circ u, E, G) = \chi(u, E, F) + \chi(v, F, G)$$

Si E et F sont deux espaces de Banach tel que $u : E \longrightarrow F$ est un opérateur à indice et $v : E \longrightarrow F$ est un opérateur compact alors $u + v$ est à indice et

$$\chi(u + v, E, F) = \chi(u, E, F)$$

Considérons l'opérateur différentiel
$D = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p \dfrac{d^p}{dz^P}$ avec $a_p \in \mathbb{C}\{z\}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, n)$ et $a_n \neq 0$

Indice formel d'un opérateur différentiel

Proposition 3.3.4 *: L'application $D : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]$ est un opérateur à indice et*

$$\chi(D, \mathbb{C}[[z]]) = \max_{0 \leq p \leq n} (p - \upsilon(a_p))$$

et $\chi(D, \mathbb{C}[[z]])$ est appelé indice formel d'un opérateur différentiel D

Preuve. soit $k \in \mathbb{N}^*$ pour $p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
$a_p = a_p^{\nu(a_p)} z^{\nu(a_p)} + a_p^{\nu(a_p)+1} z^{\nu(a_p)+1} + \cdots$ avec $a_p^{\nu(a_p)+i}$est le coefficient de $z^{\nu(a_p)+i}$ dans a_p
et $\dfrac{d^p z^k}{dz^p} = k(k-1)\cdots(k-p+1) z^{k-p}$ par suite
$a_p \dfrac{d^p z^k}{dz^p} = a_p^{\nu(a_p)} k(k-1)\cdots(k-p+1) z^{k-p+\nu(a_p)} + Q$ avec $\nu(Q) > k - p + \nu(a_p)$
Donc $D(z^k) = \sum\limits_{j \in J} a_j^{\nu(a_j)} k(k-1)\cdots(k-j+1) z^{k-j+\nu(a_j)} + R$
avec $J = \{j \in \{0, 1, \ldots, n\} / k - j + \nu(a_j) = \inf\limits_{0 \leq p \leq n} \{k - p + \nu(a_p)\}\}$
et $\nu(R) \succ \inf\limits_{0 \leq p \leq n} \{k - p + \nu(a_p)\}\}$
On a

$$\begin{aligned}
\inf_{0 \leq p \leq n} \{k - p + \nu(a_p)\} &= k + \inf_{0 \leq p \leq n} \{-p + \nu(a_p)\} \\
&= k + \inf_{0 \leq p \leq n} \{-p + \nu(a_p)\} \\
&= k - \sup_{0 \leq p \leq n} (p - \nu(a_p)) \\
&= k - m
\end{aligned}$$

avec $m = \sup\limits_{0 \le p \le n} (p - \nu(a_p))$

par suite $D(z^k) = l(k) z^{k-m} + R$ avec $\nu(R) \gtrdot k - m$ et $l(k) = \sum\limits_{j \in J} k(k-1)\cdots(k-j+1) a_j^{\nu(a_j)}$

alors $l(k)$ est un polynome en k de degré $\sup J$ il a donc un nombre fini de racines par suite il existe $k_o \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \ge k_0 \;\; l(k) \ne 0$

Pour $k \ge k_0$ on montre que D induit une bijection $\tilde{D}$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{D}: & \eta^k & \longrightarrow & \eta^{k-m} \\ & f & \longrightarrow & D(f) \end{array}$$

$\tilde{D}$ est injectif en effet

$\tilde{D}u = 0$ admet au plus n solutions linéairements indépendantes $v_1, v_2, \cdots, v_n$

soit v_i solution de $\tilde{D}u = 0$ on montre que $v_i = 0$

on Suppose que $v_i \ne 0$ alors $v_i^{\nu(v_i)} \ne 0$ avec $v_i^{\nu(v_i)}$ est le coefficient de $z^{\nu(v_i)}$ dans v_i

$$\begin{array}{rcll} \tilde{D}(v_i) & = & 0 \Leftrightarrow \tilde{D}\left(v_i^{\nu(v_i)} z^{\nu(v_i)} + T\right) = 0 & \text{avec } \nu(T) \gtrdot \nu(v_i) \\ & \Leftrightarrow & \tilde{D}\left(v_i^{\nu(v_i)} z^{\nu(v_i)}\right) + \tilde{D}(T) = 0 & \text{avec } \nu(T) \gtrdot \nu(v_i) \\ & \Leftrightarrow & v_i^{\nu(v_i)}.l(\nu(v_i)) z^{\nu(v_i)-m} + S = 0 & \text{avec } \nu(S) \gtrdot \nu(v_i) - m \\ & \Rightarrow & v_i^{\nu(v_i)}.l(\nu(v_i)) = 0 & \\ & \Rightarrow & l(\nu(v_i)) = 0 & \end{array}$$

contradiction avec $l(\nu(v_i)) \ne 0$ car $v_i \in \eta^k$ alors $\nu(v_i) \ge k \ge k_0$ donc $l(\nu(v_i)) \ne 0$

parsuite $v_i = 0$ d´ou $\tilde{D}$ est injectif

$\tilde{D}$ est surjectif en effet

soit $g = c_{k-m} z^{k-m} + c_{k-m+1} z^{k-m+1} + \cdots \in \eta^{k-m}$ avec $c_{k-m+j} \in \mathbb{C}$ $\forall j \in \mathbb{N}$ cherchons $f = d_k z^k + d_{k+1} z^{k+1} + \cdots \in \eta^k$ avec $d_{k+j} \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{D}f = g$ on a :

$D(d_k z^k) = l(k) d_k z^{k-m} +$ termes de valuation supérieur à $k - m$

$D(d_{k+1} z^{k+1}) = l(k+1) d_{k+1} z^{k-m+1} +$ termes de valuation supérieur à $k - m + 1$

$D(d_{k+i} z^{k+i}) = l(k+i) d_{k+i} z^{k-m+i} +$ termes de valuation supérieur à $k - m + i$

$$\begin{aligned}
Df &= g \Longleftrightarrow c_{k-m} = d_k l(k) \\
\text{et } c_{k-m+1} &= d_{k+1} l(k+1) + coefficientdez^{k-m+1} dansD\left(d_k z^k\right) \\
&\text{et} \\
&\vdots \\
\text{et } c_{k-m+i} &= d_{k+i} l(k+i) + \sum_{j=0}^{j=i-1} descoefficientsdez^{k-m+i} dansD\left(d_{k+j} z^{k+j}\right)
\end{aligned}$$

par suite

$$d_k = \frac{c_{k-m}}{l(k)}$$

et

$$d_{k+i} = \frac{c_{k-m+i} - \sum_{j=0}^{j=i-1} \text{des coefficients de } z^{k-m+i} \text{ dans } D\left(d_{k+j} z^{k+j}\right)}{l(k+i)} \forall i \geqslant 0$$

d´ou la restriction de D à η^k

$$\begin{array}{rccc} \tilde{D}: & \eta^k & \longrightarrow & \eta^{k-m} \\ & f & \longrightarrow & D(f) \end{array} \text{ est un isomorphisme}$$

On considère l´application $q \circ D: \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \dfrac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^{k-m}}$

avec $q : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \dfrac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^{k-m}}$ la surjection canonique et $p : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \dfrac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^{k}}$ la surjection canonique

on a $\eta^k \subset \ker q \circ D$ donc il existe une application $\bar{D} : \dfrac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^k} \longrightarrow \dfrac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^{k-m}}$

On considère le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \ker \tilde{D} & \longrightarrow & \ker D & \longrightarrow & \ker \bar{D} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \eta^k & \longrightarrow & \mathbb{C}[[z]] & \longrightarrow & \dfrac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^k} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \tilde{D} \downarrow & & D \downarrow & & \bar{D} \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \eta^{k-m} & \longrightarrow & \mathbb{C}[[z]] & \longrightarrow & \dfrac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^{k-m}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & co\ker \tilde{D} & \longrightarrow & co\ker D & \longrightarrow & co\ker \bar{D} & &
\end{array}$$

$$0 \longrightarrow \ker \tilde{D} \longrightarrow \ker D \longrightarrow \ker \bar{D} \longrightarrow co\ker \tilde{D} \longrightarrow co\ker D \longrightarrow co\ker \bar{D} \longrightarrow 0$$

$\ker \tilde{D} = co\ker \tilde{D} = 0$ car $\tilde{D}$ est un isomorphisme

donc les suites $0 \longrightarrow \ker D \longrightarrow \ker \bar{D} \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow co\ker D \longrightarrow co\ker \bar{D} \longrightarrow 0$ sont exactes donc

$\dim \ker D = \dim \ker \bar{D}$ et $\dim co\ker D = \dim co\ker \bar{D}$

$\dfrac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^k}$ est engendré par les classes de $1, z, \ldots z^{k-1}$

$\dfrac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^{k-m}}$est engendré par les classes de $1, z, \ldots z^{k-m}$

$$\begin{aligned}\chi\left(D, \mathbb{C}[[z]], \mathbb{C}[[z]]\right) &= \dim \ker D - \dim co\ker D \\ &= \dim \ker \bar{D} - \dim co\ker \bar{D} \\ &= \chi\left(\bar{D}, \frac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^k}, \frac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^{k-m}}\right) \\ &= \dim \frac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^k} - \dim \frac{\mathbb{C}[[z]]}{\eta^{k-m}} \\ &= k - (k-m) \\ &= m \\ &= \max_{0 \leq i \leq m} \left(i - \nu\left(a_i\right)\right)\end{aligned}$$

C.Q.F.D ■

Indice analytique d'un opérateur différentiel

Lemme 3.3.1 *: Pour $0 \prec r \prec \infty$ et $p \in \mathbb{N}$ l´espace vectoriel $E_p(r)$ muni de la norme $\|f\| = \sum_{0 \leq j \leq p} \max \left|f^{(j)}(z)\right|$ est un espace de Banagh*

$E_p(r)$ est l'ensemble des fonctions f holomorphes dans la boule $B(o, r)$; ses dérivées $f^{(j)}$ $(0 \leq j \leq p)$ ont un prolongement continu dans le disque fermé $\bar{B}(0, r)$

Preuve. Soit$(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $E_p(r)$ donc pour tout $0 \leq k \leq p$ $\left(f_l^{(k)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ converge unifomement dans le disque fermé $\bar{B}(0, r)$ vers la fonction $g_k \in E_0(r)$ c'est-à-dire que continue dans le disque fermé $\bar{B}(0, r)$ et holomorphe dans la boule $B(o, r)$ en plus pour $z \in B(o, r)$ $g_k' = g_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq p-1$ donc $g_0 \in E_p(r)$

D'ou f_l converge vers g_0 dans $E_p(r)$ ■

Lemme 3.3.2 *: Soit $n \geq 1$ $D' = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \dfrac{d^p}{dz^P}$, $a_p \in E_1(r)$ alors*

$$D' : E_n(r) \longrightarrow E_0(r)$$

est un opérateur compact

Preuve. Pour montrer $D' : E_n(r) \longrightarrow E_0(r)$ est un opérateur compact on montre de toute suite $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E_n(r)$ tel que $\|f_l\| \leq 1$ $\forall l \in \mathbb{N}$ on peut extraire une sous suite $\left(f_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $D'\left(f_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans $E_0(r)$ et d'après le théorème d'Ascoli-Arzela il suffit de montrer que la famille $D'(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est équicontinue et uniformément bornée.

Posons $g_l = D'(f_l)$

Soient z et ξ deux éléments de $\bar{B}(0,r)$

$$\begin{aligned} g_l(z) - g_l(\xi) &= (z-\xi)\int_0^1 g_l'(\xi + t(z-\xi))\,dt \\ |g_l(z) - g_l(\xi)| &\leq M|z-\xi| \end{aligned}$$

avec M une constante positive indépendante de l car g_l' continu dans le disque fermé $\bar{B}(0,r)$ donc (g_l) est équicontinue en tout points de $\bar{B}(0,r)$ et (g_l) est uniformément bornée ■

Lemme 3.3.3 *:*

1. *L'opérateur* $\dfrac{d}{dz} : E_{p+1}(r) \longrightarrow E_p(r)$ *est un opérateur à indice et*

$$\chi\left(\frac{d}{dz}, E_{p+1}(r), E_p(r)\right) = 1$$

2. *L'opérateur* $a_n : E_0(r) \longrightarrow E_0(r)$ *est un opérateur à indice si* a_n *non nul dans* $\bar{B}(0,r) - \{0\}$ *et*

$$\chi(a_n, E_0(r)) = -\nu(a_n)$$

3. *L'opérateur* $D : E_n(r) \longrightarrow E_0(r)$ *est un opérateur à indice et*

$$\chi(D, E_n(r), E_0(r)) = n - \nu(a_n)$$

Preuve. 1. $\ker \dfrac{d}{dz} = \{f,\ f \text{ est constante sur } \bar{B}(0,r)\} = \mathbb{C}$ donc $\dim\ker \dfrac{d}{dz} = 1$

et $f \longrightarrow \dfrac{df}{dz}$ est surjective car $\bar{B}(0,r)$ est connexe donc admet une primitive dans $E_p(r)$ donc $\dim co\ker \dfrac{d}{dz} = 0$

par suite $\chi\left(\frac{d}{dz}, E_i, E_{i-1}\right) = 1 - 0 = 1$
2. Si $\nu(a_n) = s$ où

$$\begin{array}{rccc} a_n : & E_0\left(r\right) & \longrightarrow & E_0\left(r\right) \\ & f & \longrightarrow & a_n.f \end{array}$$

$co\ker a_n$ est engendré par les classes de $1, z, \ldots, z^{s-1}$ donc $\dim co\ker a_n = \nu\left(a_n\right)$ et a_n est injectif donc $\dim\ker a_n = 0$ par suite $\chi\left(a_n, E_0\left(r\right)\right) = 0 - \nu\left(a_n\right) = -\nu\left(a_n\right)$

3.

$$\begin{aligned} \chi\left(D, E_n\left(r\right), E_0\left(r\right)\right) &= \chi\left(a_n\frac{d^n}{dz^n} + D', E_n\left(r\right), E_0\left(r\right)\right) \\ &= \chi\left(a_n\frac{d^n}{dz^n}, E_n\left(r\right), E_0\left(r\right)\right) \end{aligned}$$

$a_n \in E_0\left(r\right)$, $a_n\frac{d^n}{dz^n}$ se factorise comme suite
$E_n\left(r\right) \underset{\longrightarrow}{\frac{d}{dz}} E_{n-1}\left(r\right) \underset{\longrightarrow}{\frac{d}{dz}} \ldots \underset{\longrightarrow}{\frac{d}{dz}} E_1\left(r\right) \underset{\longrightarrow}{\frac{d}{dz}} E_0\left(r\right) \underset{\longrightarrow}{a_n} E_0\left(r\right)$ tel que le dernier opérateur est la multiplication par a_n

donc

$$\begin{aligned} \chi\left(D, E_n\left(r\right), E_0\left(r\right)\right) &= \chi\left(a_n, E_0\left(r\right)\right) + \sum_{i=1}^{i=n}\chi\left(\frac{d}{dz}, E_i, E_{i-1}\right) \\ &= -\nu\left(a_n\right) + n \cdot 1 \\ &= n - \nu\left(a_n\right) \end{aligned}$$

C.Q.F.D

■

Proposition 3.3.5 *: L'application $D : \mathbb{C}\{z\} \longrightarrow \mathbb{C}\{z\}$ est un opérateur à indice et $\chi\left(D, \mathbb{C}\{z\}\right) = n - \nu\left(a_n\right)$*

et $\chi\left(D, \mathbb{C}\{z\}\right)$ est appelé indice analytique d'un opérateur différentiel D

Preuve. se conférer à [6] ■

Irrégularité de B.Malgrange de l'opérateur D

Définition 3.3.3 *: L'irrégularité de D est l'entier*

$$i(D) = \chi(D, \mathbb{C}[[z]]) - \chi(D, \mathbb{C}\{z\}) = \max_{0 \leq p \leq n} (p - \upsilon(a_p)) - (n - \nu(a_n))$$

Proposition 3.3.6 *: Pour tout système différentiel*

$$\frac{d}{dz} y = A(z) y$$

où $A(z) \in t^{-q} M_n(\mathbb{C}\{z\})$

on a

$$\rho_1 = i(D)$$

Preuve. L'étude du système différentiel est équivalent à l'étude de l'équation différentielle

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n y = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \left(z\frac{d}{dz}\right)^i y$$

et les b_i les éléments de K donnés par la formule:

$$\nabla^n_{z\frac{d}{dz}}(v) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \nabla^i_{z\frac{d}{dz}}(v)$$

où v vecteur cyclique

et alors si $D = \left(z\frac{d}{dz}\right)^n - \sum_{i=0}^{n-1} b_i \left(z\frac{d}{dz}\right)^i$

$$\begin{aligned}
i(D) &= \chi(D, \mathbb{C}[[z]]) - \chi(D, \mathbb{C}\{z\}) \\
&= \sup_p [p - \nu(b_p)] - (n - \nu(a_n)) \\
&= \sup_p [p - \nu(b_p) - n] \\
&= \sup_p [-(\nu(b_p) + n) + p)] \\
&= \sup_p [-(\nu(b_p) + p) + p] \\
&= \sup_p [-\nu(b_p)]
\end{aligned}$$

$\rho_1 = \sup_p \left[0, \sup_p(-\nu(b_p))\right] = \sup_p(-\nu(b_p))$ car $\sup_p(-\nu(b_p)) = i(D) \geq 0$

d'ou $\rho_1 = i(D)$ ■

Conclusion 3.3.2 $\rho_1 = 0 \Longleftrightarrow i(D) = 0$

Exemple 3.3.1 : *Calculer l'irrégularité de B.Malgrange de l'opérateur*

$$D = \frac{z^2+z+1}{z^2}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2-z}{z}\frac{d}{dz} + (z-z^2)\exp z$$

On pose :

$a_2 = \dfrac{z^2+z+1}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + 1$

$a_1 = \dfrac{2}{z} - 1$

$a_0 = (z-z^2)\exp z = (z-z^2)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!}$, on aura :

$\nu(a_2) = -2 \Rightarrow 2 - \nu(a_2(z)) = 4$

$\nu(a_1) = -1 \Longrightarrow 1 - \nu(a_1(z)) = 2$

$\nu(a_0) = 1 + 0 = 1 \Longrightarrow 0 - \nu(a_0(z)) = -1$

$i(D) = \max\limits_{0\le p\le 2}(p - \upsilon(a_p)) - (2 - \nu(a_2)) = \max(4, 2, -1) - 4 = 4 - 4 = 0$

d'ou $i(D) = 0$

Remarque 3.3.3 *: $i(D) = 0$ donc l'opérateur D est singulier-régulier*

3.4 Lien entre l'irrégularité de Malgrange -croissance modérée et les ρ_p

3.4.1 Exponentielle d'une matrice carrée

Définition 3.4.1 *: Soit $A \in End(\mathbb{C}^p)$ une matrice constante. On définit l'exponentielle de A (qu'on note $\exp[A]$) par :*

$$e^A = \exp[A] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

oũ $A^0 = I$ (matrice identité) et $A^n = A \ldots A$. n fois pour $n \geq 1$

Propriétés

1. Soient A, $T \in End(\mathbb{C}^p)$, T inversible, on a :

$$\exp[T^{-1}AT] = T^{-1}\exp[A]T$$

2 . Pour $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$

on a:

$$\exp[A] = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

3 . Soit A une matrice triangulaire en bloc dont les blocs diagonaux sont les matrices (A_k)

alors $\exp[A]$ est triangulaire en bloc dont les blocs diagonaux sont les matrices exp (A_k) dans le même ordre

4 . Soient A et B deux matrices de même ordre telles que $AB = BA$, alors :

$\exp[A + B] = \exp[A] \exp[B]$

5 . Pour toute matrice carrée A, l'inverse de $\exp[A]$ existe et est égal à $\exp[-A]$

6 . Relativement à l'exponentiel d'une matrice, pour

$$z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

et

$$A \in End(\mathbb{C}^p)$$

on définit:

$$z^A = \exp[A \log z]$$

Cette fonction est définit sur la surface de Riemann Logarithmique

On définit la dérivée de z^A par:

$\frac{d}{dz}[z^A] = Az^{A-I} = \frac{A}{z}z^A$

Pour toute matrice carrée A, l'inverse de z^A existe et est égal à z^{-A}

3.4.2 Logarithme d'une matrice carrée

Définition 3.4.2 *: Soit $B \in End(\mathbb{C}^p)$, on appelle logarithme d'une matrice B toute matrice C telle que* $\exp[C] = B$

Propriétés

1. $\log(A - I) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A^n$ avec $\|A\| \leq 1$
2. $\log(A.B) = \log(A) + \log(B)$
3. Soient $A, T \in End(\mathbb{C}^p)$, T inversible, on a : $\log[T^{-1}AT] = T^{-1}\log[A]T$
4. Pour $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0e^{2\,\pi it} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$ on a :$\log[A] = \begin{pmatrix} \log\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \log\lambda_p \end{pmatrix}$
5. $\exp[\log[A]] = A$

3.4.3 Fonction à croissance modérée

Soit $D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \diagup |z| \prec \epsilon\}$, $\qquad D_\epsilon^* = \{z \in \mathbb{C} \diagup 0 \prec |z| \prec \epsilon\}$

et $\tilde{D}_\epsilon^*$ son revêtement universel c´est-à-dire la surface de Riemann Logarithmique $\tilde{D}_\epsilon^* = \{t \in \mathbb{C} \diagup |e^{2\,\pi it}| \prec \epsilon\}$

Définition 3.4.3 *: On dit qu´une fonction multiforme*

$$f : \tilde{D}_\epsilon^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

est à croissance modérée si pour tout θ_1, θ_2 de $\mathbb{R}$, s´il existe un entier n tel que

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ \arg z \in]\theta_1, \theta_2[}} z^n |f(z)| = 0$$

1. Si f est méromorphe f est à croissance modérée, en effet $f(z) = z^{-p}h(z)$ avec $h(z)$ fonction holomorphe on a

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ \arg z \in]\theta_1, \theta_2[}} z^{p+1} |f(z)| = 0$$

2. Les fonctions z^α et $\log z$ sont à croissance modérée, en effet on rappelle le corollaire suivant

Pour $|\mathrm{Im}\,(w)| \prec \pi$ on a

$$(e^w)^\alpha = e^{w\alpha}$$

Posons $w = \log z = u + iv$ et $\alpha = a + ib$ a, b, u, v éléments de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |z^\alpha| &= |e^{w\alpha}| \\ &= e^{\mathrm{Re}(w\alpha)} \\ &= e^{au-bv} \\ &= e^{au}e^{-bv} \\ &= e^{-bv}\,|z|^a \\ &\leq e^{|b|\pi}\,|z|^a \end{aligned}$$

$$|\log(z)| = |w| = \sqrt[2]{u^2+v^2} \leq \sqrt[2]{(\log|z|)^2 + \pi^2} \text{ car } e^u = |z|$$

3. La fonction matricielle z^A est à croissance modérée en effet

$z^A = \exp[A\log z] = \exp[(T^{-1}JT)\log z] = T^{-1}\exp[J\log z]\,T$ avec J forme réduite de Jordan de A avec k bloc de la forme $J_{\alpha_i} = \alpha_i I_{n_i} + N_{n_i}$ $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et N_{n_i} est une matrice nulpotente et I_{n_i} est une matrice didentité

alors la matrice $\exp[J\log z]$ est une matrice bloc diagonale de la forme

$$\exp\left[J_{\alpha_i}\log z\right] = z^{\alpha_i}\sum_{m=0}^{n_i-1}\tfrac{1}{ml}N_{n_i}^m(\log z)^m$$

la fonction matricielle $\exp\left[J_{\alpha_i}\log z\right]$ est à croissance modérée car les fonctions z^αet $\log z$ sont à croissance modérée

donc la fonction matricielle $\exp[J\log z]$ est à croissance modérée et comme T etT^{-1}sont deux éléments de $GL\left(n, \mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]\right)$ sont à croissance modérée la fonction matricielle z^A est à croissance modérée

3.4.4 La monodromie

On considère le système

$$\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z) \tag{3.4.1}$$

avec $A \in M_n\left(\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]\right)$

Dans tout secteur $S(\theta_1, \theta_2)$ ouvert ,de sommet o et d´angle inférieur à 2π, les coefficients de la matrice A sont des fonctions analytiques sur $S(\theta_1, \theta_2)$. D´après Cauchy, il existe pour tout z_0 de $S(\theta_1, \theta_2)$ une base $F = (Y_1, \ldots, Y_n)$ de solutions de système

$$\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z)$$

les Y_i ont pour composantes sur $\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]$ des fonctions analytiques sur $S(\theta_1, \theta_2)$, satisfaisant en z_0 une condition initial donnée $F(z_0) = F_0$. On suit les solutions par

continuité : on considère un deuxième secteur S' ayant avec S une intersection non vide et on prend z_1 dans cette intersection; on prend ensuite une base de solutions sur S' prenant en z_1 la valeur $F(z_1)$. On peut ainsi contourner o

Après avoir fait un tour γ autour de 0, on obtient une autre base de solutions, notée $F^\gamma(z) = F(\gamma(z))$ au voisinage de $z = z_0$. D´après Cauchy il existe donc $M_\gamma \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$F^\gamma(z) = F(z)M_\gamma$$

dans un voisinage de z_0 : $(Y_1^\gamma, \ldots, Y_n^\gamma) = (Y_1, \ldots, Y_n).M_\gamma$

M_γ s´appelle la matrice monodromique du système

Proposition 3.4.1 *: se conférer à* [4]

Tout système fondamental de solutions (multiformes) de système

$$\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z)$$

est de la forme

$$S(z) = \Psi(z)\exp(\Gamma \log z)$$

où $\Psi(z)$ est une matrice avec coefficients holomorphes en dehors de 0, et Γ est une matrice avec les coefficients constants telle que $\exp(2\pi i\Gamma) = C$ soit la matrice monodromique du système

***Corollaire 3.4.1** : Pour toute EDO $Pu = 0$ d´ordre n, il existe une solution de la forme $z^{\alpha}h(z)$, où $h(z)$ est holomorphe en dehors de 0, et $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que $e^{2\pi i\alpha}$ soit une valeur propre de la monodromie*

Preuve. *se conférer à* [4] ■

3.4.5 Systèmes équivalents

Soit un système différentiel linéaire

$$\Phi(Y) = Y' - AY$$

avec $A \in M_n\left(\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]\right)$

Effectuons sur $\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]$ un changement de base $Y = MZ$, M désignant la matrice de passage de la base canonique de $\left(\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]\right)^n$ vers la nouvelle base (M a ses coefficients dans $\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]$, ce ne sont pas des constantes). Alors :

$$\begin{aligned} \Phi(Y) &= Y' - AY \\ &= (MZ)' - A(MZ) \\ &= M'Z + MZ' - A(MZ) \\ &= M\left[Z' - \left(M^{-1}AM - M^{-1}M'\right)Z\right] \\ &= M\Phi_{[M]}(Z) \end{aligned}$$

où $\Phi_{[M]}(Z) = Z' - A_{[M]}Z$ et $A_{[M]} = M^{-1}AM - M^{-1}M'$

Dans ces conditions on dira que Φ et $\Phi_{[M]}$ sont deux systèmes différentiels équivalents sur $\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]$

Définition 3.4.4 *: $\Phi(Y) = Y' - AY$ et $\Psi(Y) = Y' - BY$ sont deux systèmes différentiels équivalents sur $\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]$, s´il existe une matrice de passage M d´une base de $\left(\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]\right)^n$ à une base de $\left(\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]\right)^n$ telle que*

$B = M^{-1}AM - M^{-1}M'$

Lemme 3.4.1 *: (L´inégalité de Grönwall). Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \bar{\mathbb{R}}$ tels que $a \prec b$ et posons $I = [a, b[$ ou $I = [a, b]$.*

Soient $\alpha,\ \beta,\ u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonctions telles que $\alpha \in L^1_{Loc}(\ I, \mathbb{R})$ et β, u soient continues. Supposons que u satisfait l´inégalité

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\, u(s)\, ds \qquad t \in I \tag{3.4.2}$$

1. Si β est positive, on a

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\, \beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)\, dr\right) ds \qquad t \in I$$

2. En particulier, si α est constante, on a

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \beta(r)\, dr\right)$$

Preuve. 1. Posons $v(s) = \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right) . \int_a^s \beta(r)\, u(r)\, dr \qquad s \in I$

$$\begin{aligned} v'(s) &= \left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right)' \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right) \int_a^s \beta(r)\, u(r)\, dr + \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right) \left(\int_a^s \beta(r)\, u(r)\, dr\right)' \\ &= -\beta(s) . \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right) . \int_a^s \beta(r)\, u(r)\, dr + \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right) .\beta(s)\, u(s) \\ &= \beta(s) . \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right) . \left[u(s) - \int_a^s \beta(r)\, u(r)\, dr\right] \\ &\leq \beta(s) . \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right) .\alpha(s) \quad \text{car on a l´inégalité 3.4.2 et } \beta \text{ est positive} \end{aligned}$$

donc

$$v(t) \leq \int_a^t \beta(s) \,.\exp\left(-\int_a^s \beta(r)\,dr\right).\alpha(s)\,ds \quad \text{car } v(a)=0$$

On a $v(s) = \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\,dr\right).\int_a^s \beta(r)\,u(r)\,dr \ pour \ s \in I$, donc

$\int_a^s \beta(r)\,u(r)\,dr = \exp\left(\int_a^s \beta(r)\,dr\right).v(s)$

par suite

$$\begin{aligned}
\int_a^t \beta(r)\,u(r)\,dr &= \exp\left(\int_a^t \beta(r)\,dr\right).v(t) \\
&\leq \exp\left(\int_a^t \beta(r)\,dr\right).\int_a^t \beta(s)\,.\exp\left(-\int_a^s \beta(r)\,dr\right).\alpha(s)\,ds \\
&\leq \exp\left(\int_a^t \beta(r)\,dr\right).\int_a^t \beta(s)\,.\exp\left(-\int_a^t \beta(r)\,dr - \int_t^s \beta(r)\,dr\right).\alpha(s)\,ds \\
&\leq \exp\left(\int_a^t \beta(r)\,dr\right).\int_a^t \beta(s)\,.\exp\left(-\int_a^t \beta(r)\,dr\right).\exp\left(-\int_t^s \beta(r)\,dr\right).\alpha(s)\,ds \\
&\leq \int_a^t \beta(s)\,.\exp\left(\int_s^t \beta(r)\,dr\right).\alpha(s)\,ds
\end{aligned}$$

cette inégalité et l´inégalité 3.4.2 donne

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\,\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\,dr\right)ds \qquad t \in I$$

C.Q.F.D

2. si α est constante, on a

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\,dr\right)ds \qquad t \in I \\
u(t) &\leq \alpha + \alpha\int_a^t \beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\,dr\right)ds \qquad t \in I \\
&\leq \alpha - \alpha\int_a^t -\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\,dr\right)ds \\
&\leq \alpha - \alpha\left[\exp\left(\int_s^t \beta(r)\,dr\right)\right]_a^t \text{ car } \int_s^t \beta(r)\,dr \text{ est la primitive de } -\beta(s) \\
&\leq \alpha - \alpha\left[\exp\left(\int_t^t \beta(r)\,dr\right) - \exp\left(\int_a^t \beta(r)\,dr\right)\right] \\
&\leq \alpha - \alpha + \alpha\exp\left(\int_a^t \beta(r)\,dr\right) \\
&\leq \alpha\exp\left(\int_a^t \beta(r)\,dr\right)
\end{aligned}$$

C.Q.F.D

■

Théorème 3.4.1 : *Pour un système*

$$\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z) \tag{3.4.3}$$

où

$$A(z) \in End\left(\mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]\right)$$

Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. (3.4.3) est équivalent à un système de la forme

$$\frac{d}{dz}V(z) = \frac{B(z)}{z}V(z)$$

où $B(z)$ est une matrice avec les coefficients holomorphes

2. (3.4.3) est équivalent à un système de la forme

$$\frac{d}{dz}V(z) = \frac{\Gamma}{z}V(z)$$

où Γ est une matrice avec les coefficients constants

3. toute solution multiforme U de 3.4.3 est à croissance modérée

Preuve. :

$3 \Rightarrow 2$

D´après la proposition 3.4.1 tout système fondamental de solutions (multifomes) du système est de la forme $S(z) = \Psi(z)\exp(\Gamma\log z)$ est à croissance modérée

donc $\Psi(z) = S(z)\exp(-\Gamma\log z)$ est à croissance modérée car $\exp(-\Gamma\log z)$ est à croissance modérée comme $\Psi(z)$ est une matrice avec coefficients holomorphes en dehors de 0, $\Psi(z) \in GL\left(n, \mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]\right)$

par suite le système 3.4.3 est équivalent au système $\frac{d}{dz}V(z) = A_{[\Phi(z)]}(z)V(z)$

$$\begin{aligned}
A_{[\Psi]} &= (\Psi(z))^{-1}A\Psi(z) - (\Psi(z))^{-1}(\Psi(z))' \\
&= z^{\Gamma}(S(z))^{-1}AS(z)z^{-\Gamma} - z^{\Gamma}(S(z))^{-1}\left(S'(z)z^{-\Gamma} - \frac{S(z)\Gamma z^{-\Gamma}}{z}\right) \\
&= z^{\Gamma}(S(z))^{-1}AS(z)z^{-\Gamma} - z^{\Gamma}(S(z))^{-1}AS(z)z^{-\Gamma} + z^{\Gamma}(S(z))^{-1}.\frac{S(z)\Gamma z^{-\Gamma}}{z} \\
&= z^{\Gamma}\frac{\Gamma}{z}z^{-\Gamma} \\
&= \frac{\Gamma}{z} \quad \text{car } \Gamma \text{ commute avec } \mathrm{z}^{\Gamma}
\end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 1$ évident.

$1 \Rightarrow 3$

Soit V une solution du système $\frac{d}{dz}V(z) = \frac{B(z)}{z}V(z)$

Dans un secteur $S = \left\{z = re^{i\theta}/\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, 0 \leq r \leq r_0\right\}$, on a

$$\left\|\frac{d}{dz}V(z)\right\| \leq \frac{K}{r}\|V(z)\|$$

où $K = \sup_{z\in S}\|B(z)\|$

comme $\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{d}{dz}V.\dfrac{\partial z}{r} = \dfrac{d}{dz}Ve^{i\theta}$, $\left\|\dfrac{\partial V}{\partial r}\right\| = \left\|\dfrac{d}{dz}V\right\|$, donc $\left\|\dfrac{d}{dz}V(z)\right\| = \left\|\dfrac{\partial V}{\partial r}\left(re^{i\theta}\right)\right\|$, par suite $\left\|\dfrac{\partial V}{\partial r}\left(re^{i\theta}\right)\right\| \leq \dfrac{K}{r}\left\|V\left(re^{i\theta}\right)\right\|$

on a $\int\limits_r^{r_0} \dfrac{\partial V}{\partial r}\left(re^{i\theta}\right)dr = V\left(r_0e^{i\theta}\right) - V\left(re^{i\theta}\right)$ et$\left\|-\int\limits_r^{r_0} \dfrac{\partial V}{\partial r}\left(re^{i\theta}\right)dr\right\| \leq \int\limits_r^{r_0}\left\|\dfrac{\partial V}{\partial r}\left(re^{i\theta}\right)\right\|dr$

donc$\left\|V\left(re^{i\theta}\right)\right\| - \left\|V\left(r_0e^{i\theta}\right)\right\| \leq \int\limits_r^{r_0}\dfrac{K}{s}\left\|V\left(se^{i\theta/}\right)\right\|ds$ par suite $\left\|V\left(re^{i\theta}\right)\right\| \leq \left\|V\left(r_0e^{i\theta}\right)\right\| + \int\limits_r^{r_0}\dfrac{K}{s}\left\|V\left(se^{i\theta}\right)\right\|ds$

$\left\|V\left(r_0e^{i\theta}\right)\right\|$ est une conststante, d´après lemme de l´inégalité de Gronwall

$$\begin{aligned}
\left\|V\left(re^{i\theta}\right)\right\| &\leq \left\|V\left(r_0e^{i\theta}\right)\right\|\exp\int\limits_r^{r_0}\frac{K}{s}ds \\
&\leq \left\|V\left(r_0e^{i\theta}\right)\right\|\exp K\left(\log r_0 - \log r\right) \\
&\leq \left\|V\left(r_0e^{i\theta}\right)\right\|\exp K\left(\log\frac{r_0}{r}\right) \\
&\leq \left\|V\left(r_0e^{i\theta}\right)\right\|\exp\left(\log\left(\frac{r_0}{r}\right)^K\right) \\
&\leq \left\|V\left(r_0e^{i\theta}\right)\right\|\left(\frac{r_0}{r}\right)^K \\
&\leq \sup_{\theta_0\leq\theta\leq\theta_1}\left\|V\left(r_0e^{i\theta}\right)\right\|\left(\frac{r_0}{r}\right)^K
\end{aligned}$$

d´ou V est à croissance modérée ■

Théorème 3.4.2 *: Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(z)\left(\dfrac{d}{dz}\right)^{n-k}$ un opérateur différentiel avec*

$a_k(z) \in \mathbb{C}\{z\}\left[\dfrac{1}{z}\right]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ et $a_0(z) \neq 0$. Alors, les solutions multiformes u de l´équation différentielle

$$Pu = 0$$

sont à croissance modérée au voisinage de 0 si et seulement si l´ordre du pôle de $\dfrac{a_i}{a_0}$ en 0 est au plus i pour $i = 1, 2, \cdots, n$.

Preuve. $\Leftarrow$)On suppose que l´ordre du pôle de $\dfrac{a_i}{a_0}$ en 0 est au plus i pour $i = 1, 2, \cdots, n$.

On introduit l´opérateur de dérivation : $\theta = z\dfrac{d}{dz}$ alors, $\theta^i(f) = \sum\limits_{k=0}^{i}\alpha_k z^k\dfrac{d^kf}{dz^k}$ avec $\alpha_k \in \mathbb{Z}$

L´équation différentielle $Pu = 0$ peut s´écrire en fonction de θ (après avoir multiplié par $z^n a_0(z)^{-1}$) dans la forme

$$Qu = \theta^n u + \sum_{i=1}^{n} b_i(z)\,\theta^{n-i} u = 0$$

avec $b_i(z) = \beta_{n-i}^{n} + \frac{z a_1(z)}{a_0(z)}\beta_{n-i}^{n-1} + \frac{z^2 a_2(z)}{a_0(z)}\beta_{n-i}^{n-2} + \cdots + \frac{z^{i-1} a_{i-1}(z)}{a_0(z)}\beta_{n-i}^{n-i+1} + \frac{z^i a_i(z)}{a_0(z)}$ et $\beta_j^k \in \mathbb{Z}$

donc la condition de l´ordre du pôle de $\frac{a_i}{a_0}$ en 0 est au plus i pour $i = 1, 2, \cdots, n$ est équivalent à la condition $b_1, \ldots, b_n$ soient holomorphes donc l´équation différentielle

$$Pu = 0$$

est équivalent au système différentiel

$$\theta \begin{pmatrix} u \\ \theta(u) \\ \theta^2(u) \\ \vdots \\ \theta^{n-1}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -b_1 & \cdots & \cdots & \ldots & -b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \theta(u) \\ \theta^2(u) \\ \vdots \\ \theta^{n-1}(u) \end{pmatrix}$$

de la forme

$$\frac{d}{dz}V(z) = \frac{B(z)}{z}V(z)$$

où $B(z)$ est une matrice avec les coefficients holomorphes, d´après le théorème 3.4.1 toute solution multiforme U de P est à croissance modérée

$\Rightarrow$)On suppose que toute solution multiforme u de l´équation différentielle

$$Pu = 0$$

est à croissance modérée au voisinage de 0 on montre que l´ordre du pôle de $\frac{a_i}{a_0}$ en 0 est au plus i pour $i = 1, 2, \cdots, n$ pour cela il suffit de montrer que les $b_i(z)$ sont holomorphes pour $i = 1, 2, \cdots, n$

On montre par, récurrence sur l´ordre n de l´équation différentielle que si toute solution multiforme u de l´équation différentielle est à croissance modérée les $b_i(z)$ sont holomorphes pour $i = 1, 2, \cdots, n$ $Pu = 0$ d´après le corollaire 3.4.1 $u(z)$ peut s´écrire dans la forme $u(z) = z^{\alpha} h(z)$. Soit v tel que vu soit une solution de $Qw = 0$

$$Qw = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{0 \le k \le i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} b_k(z) \left(\theta^{i-k} u\right) \right) \theta^{n-i} v$$

Pour $i = n$ on a $\sum_{0 \le k \le i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} b_k(z) \left(\theta^{i-k} u\right) = \sum_{0 \le k \le n} 1.b_k(z) \left(\theta^{n-k} u\right) = Qu = 0$

donc $Qw = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{0 \le k \le i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} b_k(z) \left(\theta^{i-k} u\right) \right) \theta^{n-i} v$

On a $u(z) = z^{\alpha} h(z)$ donc $z^{\alpha} = u(z) h^{-1}(z)$ et

$\theta^{i-k} u = \theta^{i-k} (z^{\alpha} h) = z^{\alpha} (\theta + \alpha)^{i-k} h$ (Leibniz)

donc $\sum_{0 \le k \le i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} b_k(z) \left(\theta^{i-k} u\right) = \sum_{0 \le k \le i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} b_k(z) z^{\alpha} (\theta + \alpha)^{i-k} h$

$= \sum_{0 \le k \le i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} b_k(z) u(z) h^{-1}(z) (\theta + \alpha)^{i-k} h$

$= u \left(\sum_{0 \le k \le i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} b_k(z) h^{-1}(z) (\theta + \alpha)^{i-k} h \right)$

$= u \left(b_i(z) + \sum_{0 \le k \prec i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} \left(h^{-1} (\theta + \alpha)^{i-k} h \right) b_k(z) \right)$

$Qw = \sum_{i=0}^{n-1} u. \left(b_i(z) + \sum_{0 \le k \prec i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} \left(h^{-1} (\theta + \alpha)^{i-k} h \right) b_k(z) \right) \theta^{n-i} v$

$Qw = u. \sum_{i=0}^{n-1} \left(b_i(z) + \sum_{0 \le k \prec i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} \left(h^{-1} (\theta + \alpha)^{i-k} h \right) b_k(z) \right) \theta^{n-i} v$

$Qw = u \sum_{i=0}^{n-1} \left(b_i(z) + \sum_{0 \le k \prec i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} \left(h^{-1} (\theta + \alpha)^{i-k} h \right) b_k(z) \right) \theta^{n-i-1} (\theta v)$

$Qw = u \sum_{i=0}^{n-1} \left(b_i(z) + \sum_{0 \le k \prec i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} \left(h^{-1} (\theta + \alpha)^{i-k} h \right) b_k(z) \right) \theta^{(n-1)-i} (\theta v)$

$Qw = uR(\theta v),\ R = \sum_{i=0}^{n-1} \left(b_i(z) + \sum_{0 \le k \prec i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} \left(h^{-1} (\theta + \alpha)^{i-k} h \right) b_k(z) \right) \theta^{(n-1)-i}$

comme $b_0 = 1$ $R = \theta^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(b_i(z) + \sum_{0 \le k \prec i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} \left(h^{-1} (\theta + \alpha)^{i-k} h \right) b_k(z) \right) \theta^{(n-1)-i}$

$R = \theta^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(z) \theta^{(n-1)-i}$ et

$$c_i(z) = b_i(z) + \sum_{0 \leq k \prec i} \begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix} \left(h^{-1}(\theta+\alpha)^{i-k} h\right) b_k(z)$$

donc $Qw = 0$ si et seulement si θv est une une solution de $R(\theta v) = 0$ d´ordre $n-1$ comme u et w sont

à croissances modérées, v donc θv l´est aussi donc les coefficients $c_i(z)$ sont holomorphes par hypothèse de récurrence donc $b_i(z)$ le sont par suite l´ordre du pôle de $\dfrac{a_i}{a_0}$ au voisinage de 0 est au plus i pour $i = 1, 2, \cdots, n$ ■

Exemple 3.4.1 *:* $D = z^2 \dfrac{d^2}{dz^2} + \dfrac{2-z}{z}\dfrac{d}{dz} + (z - z^2)\exp z$

On pose :

$a_0 = z^2$

$a_1 = \dfrac{2}{z} - 1$

$a_2 = (z - z^2)\exp z$, on aura :

l´ordre du pôle de $\dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{2}{z^3} - \dfrac{1}{z^2}$ au voisinage de 0 est 3 supérieur à 1 donc les solutions de D ne sont pas à croissance modérée au voisinage de 0

Remarque 3.4.1 *: Ce théorème signifie Soit* $D = \sum_{i=0}^{n} b_i(z) \dfrac{d^i}{dz^i}$ *un opérateur différentiel avec* $b_i(z) \in \mathbb{C}\{z\}\left[\dfrac{1}{z}\right]$ *et* $b_n(z) \neq 0$ *Alors, les solutions multiformes de l´équation différentielle*

$$Du = 0$$

sont à croissance modérée si et seulement si l´ordre du pôle de $\dfrac{b_i}{b_n}$ au voisinage de 0 est au plus $n-i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$qui est équivalent à $i(D) = 0$ en effet l´ordre du pôle de $\dfrac{b_i}{b_n}$ en 0 est au plus $n-i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$ est équivalent à $\nu(b_i) - \nu(b_n) \geq i - n$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

On a

$$\begin{aligned} \nu(b_i) - \nu(b_n) &\geq i - n \Leftrightarrow n - \nu(b_n) \geq i - \nu(a_i) \\ \nu(b_i) - \nu(b_n) &\geq i - n \Leftrightarrow n - \nu(b_n) = \max_{0 \leq i \leq n}(i - \nu(a_i)) \\ \nu(b_i) - \nu(b_n) &\geq i - n \Leftrightarrow i(D) = 0 \end{aligned}$$

Et enfin on tire

Soit $D = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(z) \frac{d^k}{dz^k}$un un opérateur différentiel avec $b_k(z) \in \mathbb{C}\{z\}\left[\frac{1}{z}\right]$ et $b_n(z) \neq 0$. Alors, les solutions multiformes u de l´équation différentielle

$$Du = 0$$

sont à croissance modérée au voisinage de 0 si et seulement si $i(D) = 0$

Conclusion 3.4.1 *les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. D est singulier régulier
2. l'invariant de Fuchs $\rho_1 = 0$
3. l'irrégularité de B.Malgrange de l'opérateur D : $i(D) = 0$
4. le nombre rationnel de N.Katz $r = 0$
5. les solutions multiformes de l´équation différentielle $Du = 0$ sont à croissance modérée

Bibliographie

[1] **N.BOURBAKI :** Elements de mathématiques, Algébre commutative, Chapitres 5 à 7, Masson, Paris, (1985).

[2] **H. Cartan :** *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, (1985).

[3] **Pierre Deligne** : Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lectures notes in mathematics n^{o}163 springer-verlag, (1970).

[4] **Kenji Iohara** : Equations différentielles ordinaires avec singularités régulières, séminaires Mathématiques lyon (ICJ) groupe de travail Théorie de Lie et géométrie symplectique, (2009).

[5] **Jean Pierre Lafon** : Algèbre commutative, langages géométrique et algébrique, Hermann, Paris, (1985).

[6] **B.Malgrange** : sur les points singuliers des équations différentielles, L'enseignement Mathématique, t. xx, 1-2, 174-176, (1974)

[7] **R.Gérard-A.H.M. levelt :** Invariants mesurant l'irrègularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires, Ann. inst. fourier, Grenoble (1973). p 157-195

[8] **Claude Tisseron** : Notion de Topologie introduction aux espaces fonctionnels, Hermann, Paris, 1985

[9] **W.Wasow :** Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publichers, (1965).