

N° d'ordre : .../.../.....

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en mathématiques

Spécialité : Analyse : Équations aux dérivées partielles

Par

MENOUER Mohammed Amine

THÈME

**MODÉLISATION D'UNE STATION
D'ÉPURATION DES EAUX USÉES**

Soutenu publiquement, le mardi 11/09/2007 devant le jury composé de :

Mr.	D. E. TENIOU	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	K. LEMRABET	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de mémoire.
Mr.	A. HEMINNA	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mme.	O. ZAIR	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr.	R. H. BELLOUT	Chargé de Cours	U.S.T.H.B.	Examineur.

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **R. H. Bellout**, Chargé de Cours à l'U.S.T.H.B pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée.*

*Je voudrais aussi remercier Monsieur **K. Lemrabet**, Professeur à l'U.S.T.H.B pour avoir accepté de diriger mon mémoire, ainsi que pour sa patience.*

*J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **D. E. Teniou**, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de mon mémoire.*

*Je remercie vivement Monsieur **A. Heminna**, Professeur à l'U.S.T.H.B. et Madame **O. Zair**, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B. qui ont bien voulu faire partie du jury.*

Je ne saurais oublier de remercier toutes les personnes ayant contribuées de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, en particulier la responsable de l'unité de traitement des eaux usées de Aïn el Hout, Tlemcen, ainsi qu'a l'ingénieur chimiste de l'unité pour l'accueil et les amples explications qu'ils m'ont donnés.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma très chère famille et mes amis, pour leur soutient et leur compréhension tout au long de mes études.

Modélisation d'une station d'épuration des eaux usées

Résumé

Nous étudions dans ce mémoire un problème de contrôle rencontré lors de la modélisation des stations d'épuration des eaux. Comme dans tous les cas des procédés biochimiques, le modèle est souvent mal connu et il n'est plus possible de construire des observateurs exactes. Aussi nous avons appliqué un observateur par intervalle et avons adopté la démarche qui consiste à borner supérieurement et inférieurement l'incertitude sur le modèle, et à déduire ensuite une estimation supérieure et inférieure des variables d'état à estimer. Nous observons sur les résultats numériques que cet observateur permettrait de tenir compte des bornes dynamiques données à priori. De plus cet observateur peut être réglé et adapté à d'autres situations.

Mots-clés : Observateur par intervalles, observabilité, modélisation, bioréacteur, station d'épuration.

Table des matières

Liste des figures	v
Introduction	1
1 La Station d'Épuration des Eaux Usées	2
1.1 Introduction	2
1.2 L'utilisation des micro-organismes	4
1.3 Les installations à boues activées	4
1.4 Les types de bioréacteurs	5
1.5 Modélisation du bioréacteur	6
1.5.1 La modélisation des bilans de matières	6
1.5.2 Modèle du bioréacteur	8
2 Observabilité des systèmes linéaires	10
2.1 Contrôlabilité	11
2.2 Observabilité	15
2.3 Equivalence des systèmes	21
2.4 Décomposition de KALMAN et Dualité	26
3 Observateurs pour les systèmes linéaires	34
3.1 Introduction	34
3.2 Les observateurs	35
3.2.1 Observateur de LUENBERGER	36
3.2.2 Système linéaire à une injection de sortie près	42
3.2.3 L'observateur réduit	43

4	Observateurs pour systèmes avec incertitudes	49
4.1	Introduction	49
4.2	Les incertitudes	50
4.3	L'observateur asymptotique	52
4.4	Les observateurs par intervalles	57
4.4.1	Observateur par intervalles pour un procédé à boues activées	64
5	Résultats numériques	68
	Conclusion	74
	Annexe	75
	Bibliographie	78

Liste des Figures

1.1.1 Les phases de traitement dans une station d'épuration des eaux usées	3
1.3.1 Schéma fonctionnel du procédé d'épuration par boues activées	5
1.5.1 Schéma fonctionnel de l'aérateur	8
2.2.1 Le chariot équilibriste	20
3.2.1 Principe de l'observateur	35
4.4.1 Principe de l'estimation par intervalles.	57

Introduction

Les stations d'épuration essayent de réduire la pollution se trouvant en grande concentration dans les eaux usées avant de les rejeter dans les milieux naturels dont les capacités auto épuratoires ne peuvent venir à bout d'une telle concentration. L'opération effectuée par ces stations s'appelle *Le traitement des eaux usées*.

En tant que mathématiciens nous allons nous intéresser à une étape dans le traitement des eaux usées qui bénéficie de l'aide apportée par les théories et outils mathématiques, en l'occurrence *la théorie du contrôle*. Cette étape c'est celle du traitement biologique qui a lieu dans ce que nous appellerons le *bioréacteur*. Notre but sera d'observer (estimer) certains composants essentiels du bioréacteur, sous certaines conditions (observabilité, mesures en ligne...), et ceci pour palier au manque de capteurs capables de fournir ces estimations. Nous construirons pour cela des *observateurs* ou capteurs logiciels, nous présenterons aussi des méthodes pour venir à bout de certains obstacles (erreurs de modélisation, données incertaines, ...), l'une d'elle sera la construction d'*observateurs par intervalles*, qui se base sur la propriété de coopérativité du modèle de bioréacteur.

Notre mémoire est structuré comme suit Chapitre 1: nous décrirons les stations d'épurations et les différentes étapes dans leur fonctionnement, ainsi que le procédé des boues activées, et nous exhiberons un modèle de bioréacteur. Chapitre 2 : Nous ferons un rappel concernant certains aspect de la théorie du contrôle : Contrôlabilité, Observabilité, Décomposition canonique, Dualité. Chapitre 3 : Nous introduirons la notion d'observateur et nous donnerons quelques exemples. Chapitre 4: Nous exposerons le cas où les systèmes étudiés sont incertains, et donc les observateurs adéquats. Chapitre 5 : nous afficherons des résultats numériques de l'implémentation de certains observateurs, et nous finirons par une conclusion.

Chapitre 1

La Station d'Épuration des Eaux Usées

1.1 Introduction

Collectées par les réseaux d'assainissement d'une agglomération, les eaux usées urbaines contiennent de nombreux éléments polluants provenant de la population (eaux ménagères, rejet de toilettes, etc) et des activités industrielles. Elles sont acheminées vers une station d'épuration où elles subissent plusieurs *phases* de traitement, dont le but est de diminuer suffisamment la quantité de substances polluantes :

Phase 1 : *Les traitements préliminaires ou prétraitements*

De nature mécanique : dégrillage (élimination des polluants solides les plus grossiers), dessablage, dégraissage.

Phase 2 : *Le traitement primaire*

C'est une décantation⁽¹⁾ primaire ayant pour but d'éliminer les matières organiques séparables par sédimentation.

Phase 3 : *Les traitements secondaires*

Ce sont des traitements biologiques analogue à ceux qui ont lieu dans les étangs de façon naturelle, mais à rendement plus élevé.

Phase 4 : *Les traitements tertiaires*

⁽¹⁾action de débarrasser un liquide de ses impuretés en les laissant se déposer au fond d'un récipient.

Ils ont pour but de compléter plus ou moins l'épuration selon les normes de qualité requises.

Vient ensuite le rejet dans les milieux naturels [16].

On s'intéresse à la "Phase 3".

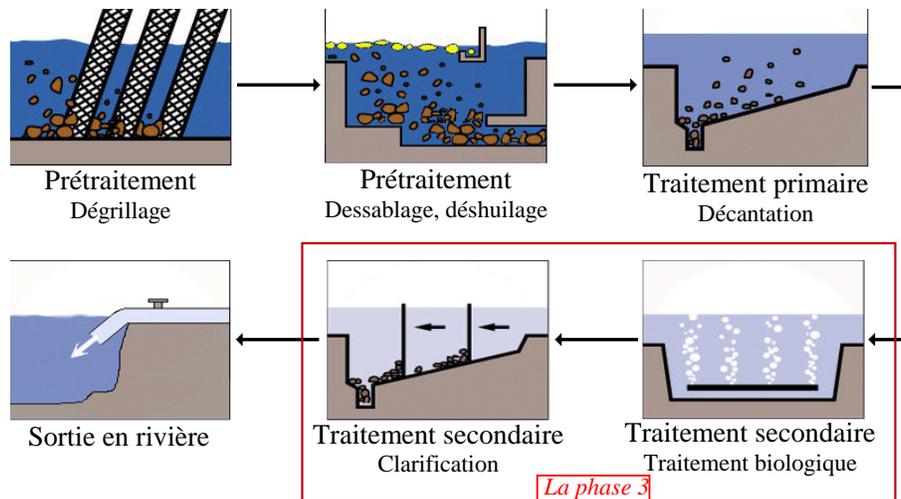


Figure 1.1.1 : Les phases de traitement dans une station d'épuration des eaux usées

Dans la grande majorité des cas, l'élimination des polluants carbonés (organiques) et azotés s'appuie sur des traitements biologiques.

Ces traitements biologiques reproduisent artificiellement les phénomènes d'auto-épuration existant dans la nature, et ceci en leur assurant une plus grande vitesse d'exécution.

Ces phénomènes d'auto-épuration des eaux consistent en la dégradation des éléments polluants sous l'action des *micro-organismes* (*bactéries, protozoaires*). Cette dégradation exige, souvent, une quantité d'oxygène appelée DBO (Demande Biologique en Oxygène) exprimée en mg/l, ou bien DCO (Demande Chimique en Oxygène). On a alors un renseignement sur la quantité de polluants (*substrat*) dans l'eau usée.



1.2 L'utilisation des micro-organismes

La fermentation microbienne est un procédé qui consiste à faire croître une population de micro-organismes (bactéries, levures, ...), qu'on appelle *biomasse* et qu'on note souvent X_i , au dépend de certains éléments nutritifs, qu'on appelle *substrat* et qu'on note souvent S_i , sous des conditions environnantes (pH, température, aération, ...) favorables. Il résulte de cette activité métabolique des produits qu'on note P_i . Ces réactions naturelles, peuvent être apprivoisées pour diverses utilisations :

- a) Croissance microbienne : l'objectif est la croissance du micro-organisme. Exemple : fermentation pour produire de la levure de boulanger.
- b) Production métabolique : l'objectif est de faire synthétiser par les cellules (biomasse) un produit favorisé. Exemple : Pénicilline, Ethanol...
- c) Consommation de substrat : dans ce cas c'est la dégradation du substrat qui est visée. Exemple : procédé de dépollution.
- d) Etude phénoménologique : le but est l'étude du micro-organisme. Exemple : comprendre son développement.

La majorité des procédés biotechnologiques développés à l'échelle industrielle utilisent des cultures bactériennes composées d'une seule espèce de micro-organisme (culture pure), contrairement aux milieux naturels composés de diverses espèces.

1.3 Les installations à boues activées

Dans les traitements secondaires, il existe plusieurs types de traitements biologiques, l'un d'entre eux est *le procédé des Boues Activées*.

C'est le traitement biologique le plus simple, son concept remonte au début du siècle passé (vers 1914) (voir [14]), son principe de fonctionnement consiste à maintenir une concentration désirée de culture bactérienne en suspension dans les eaux résiduaires, par des dispositifs d'aération et de mélange. Il fonctionne selon la technique des cultures libres : les micro-organismes sont dispersés dans un bassin de sorte que la biomasse ou micro-organismes entre constamment en contact avec les polluants. Ce procédé a l'avantage d'avoir un traitement plus homogène et une meilleure maîtrise des facteurs d'épuration (apport d'eau résiduaire (eau usée) et de masse bactérienne) comparé aux techniques à cultures fixes.

Les installations à *boues activées* sont des systèmes d'épuration *aérobie*, c'est à dire nécessitant un apport d'oxygène. La culture bactérienne est maintenue dans un bassin (*aérateur*), alimenté par les eaux usées provenant d'un premier décanteur. Ce bassin est aéré, par un système d'aération, et brassé car le brassage est nécessaire pour homogénéiser le mélange et éviter les dépôts.

L'eau usée aérée, il se forme des flocons, qu'on appelle "*boues*", constitués des micro-organismes et de particules colloïdales⁽¹⁾. Les matières organiques, entrant en contact avec ces flocons (contenant les bactéries), sont alors dégradées pour donner de l'eau, du dioxyde de carbone et d'autres éléments non organiques.

Après un temps de séjour dans l'aérateur, le nouveau fluide mixte formé de *boues* et d'eau épurée se dirige vers le *clarificateur*, qui est un décanteur secondaire, l'eau épurée est ainsi séparée des *boues* par décantation.

Les *boues* constituent à cette étape un déchet encore très liquide, elles sont alors envoyées dans une unité de traitement spécifique, en vue de leur épandage agricole ou de leur élimination, mais une partie de ces boues est réinjectées dans l'aérateur, cette opération s'appelle "*la recirculation des boues*", ceci permet de maintenir la masse bactérienne contenue dans l'aérateur à un niveau compatible avec les performances épuratoires attendues [12].

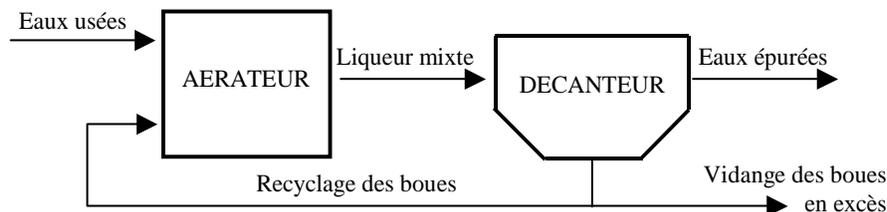


Figure 1.3.1 : Schéma fonctionnel du procédé d'épuration par boues activées

1.4 Les types de bioréacteurs

Le bioréacteur est un microcosme contrôlé et contenant des organismes vivant, dont les flux de matière à l'entrée et à la sortie sont maîtrisés. L'aérateur, cité ci-dessus, peut alors être considéré comme un bioréacteur. Du point de vue de la modélisation mathématique, il existe deux types de bioréacteurs :

⁽¹⁾Particules organiques ou non de petites dimensions, ne pouvant être décantées.

- I) Les réacteurs infiniment mélangés : pour lesquels le milieu réactionnel est homogène et les réactions sont décrites par des équations différentielles ordinaires.
- II) Les réacteurs à gradient spatial de concentration : pour lesquels les réactions sont décrites par des équations aux dérivées partielles.

Le deuxième type de bioréacteurs est plus réaliste, en dépit des efforts d'homogénéisation par le brassage. Cependant, on se bornera à étudier le premier type dont on présentera un modèle, même si la tendance actuelle est de construire des modèles faisant intervenir des EDP.

1.5 Modélisation du bioréacteur

1.5.1 La modélisation des bilans de matières

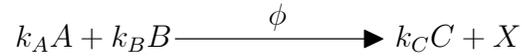
L'informatique, comme outil puissant de modélisation, a participé à l'émergence d'un large éventail de modèles pour les systèmes biologiques. Cette diversité pourrait nous amener à croire en une liberté de choix du modèle à utiliser, or cette diversité est beaucoup plus un casse-tête qu'une liberté de choix : les règles de construction et la méthodologie suivie pour faire ces modèles ne sont pas toujours les mêmes, et ceci nous laisse perplexe devant l'appréciation de leur qualité et le bien fondé de la prétention qu'ils ont de traduire la réalité biologique.

Les différences entre ces modèles viennent surtout du fait qu'il n'y a pas de règles ou lois, régissant les phénomènes biologiques, admises par tous comme en physique. On peut aussi citer comme autre raison, la complexité de ces phénomènes, cette complexité génère parfois une mauvaise connaissance des systèmes biologiques. On se retrouve ainsi devant des systèmes le plus souvent non-linéaires, certaines parties de ces systèmes sont mal connues ou carrément inconnues, les mesures sur ces systèmes sont alors difficiles par manque de capteurs, et les mesures possibles sont souvent bruitées.

Il reste toute fois les règles physiques auxquels les systèmes biologiques obéissent aussi, comme la conservation de la matière.

Nous présentons dans cette section *une* méthode pour construire des modèles biologiques, et plus précisément des modèles à *bilan de matière*, comme décrite dans [6]. Dans cette méthode pour arriver à notre modèle, nous devons suivre les étapes suivantes :

1. Le schéma réactionnel du procédé biochimique : Il décrit au niveau macroscopique l'ensemble des réactions biologiques et chimiques, en définissant la transformation de deux réactifs A et B en un produit C . On adopte pour ce schéma un formalisme semblable à celui de la chimie.



où ϕ est la vitesse de réaction, correspondant ici à la vitesse de formation de la biomasse X .

k_A et k_B : Les rendements de consommation de A et B , et k_C le rendement de production de C .

2. Le choix des réactions et des variables : Le choix des réactions à prendre en compte ainsi que les composants qui interviennent dans ces réactions, se fera sur la base de la connaissance dont on dispose sur le procédé et des mesures qui auront pu être réalisées. Il faut donc bien choisir le schéma réactionnel en ayant à l'esprit l'objectif du modèle (observer le système, le simuler, recueillir des informations...), et la précision qui en est attendue.
3. Formulation des comportements dynamiques : En réacteur infiniment mélangé, le comportement dynamique des différents composants du procédé découle directement de l'expression du *bilan de matière* qui exprime que *la variation de la quantité d'un composé est égale à la somme de ce qui est produit ou apporté, diminué de ce qui est consommé ou soutiré*.
4. Validation du modèle : cette dernière étape est la plus importante vu les hypothèses, souvent invérifiables, qui sont faites. L'objectif général est de vérifier que le modèle répond bien aux objectifs qui lui ont été fixés. La validation doit se faire à partir d'un jeu de données n'ayant pas servi à construire le modèle, et pour des conditions expérimentales différentes.

Ainsi construit le modèle à bilan de matière peut être utilisé pour surveiller le procédé (observateur) ou bien pour le gouverner (contrôleur). Par contre, si l'objectif de la modélisation est la simulation, il faudra expliciter les vitesses des réactions en fonction des variables d'état du système et des variables environnementales, ce qui est une étape assez délicate [6].

1.5.2 Modèle du bioréacteur

La modélisation du *procédé des boues activées* en entier nécessite la modélisation de l'aérateur, du décanteur secondaire et faire le lien entre les deux modèles, un modèle pour ce procédé est présenté dans [14], dans notre travail on va se limiter au modèle du bioréacteur (l'aérateur).

L'aérateur est un bioréacteur alimenté en continu en eau usée. L'objectif du modèle présenté ci-dessous est de décrire de façon générale les dynamiques mises en jeu dans l'aérateur sans spécifier les processus biochimiques. On fera comme hypothèse l'homogénéité du mélange dans l'aérateur.

Les dynamiques de variation de chaque composant dans le bioréacteur sont régies par deux phénomènes :

- Le premier est un processus de conversion dû aux réactions chimiques, biologiques et biochimiques.
- Le second est un processus de transfert de masse dû aux échanges gazeux et liquides avec le milieu extérieur.

La composition du milieu liquide étant supposée homogène, les dynamiques des deux processus peuvent être exprimés par des équations différentielles ordinaires mettant en jeu les concentrations uniformes des composés dans l'aérateur.

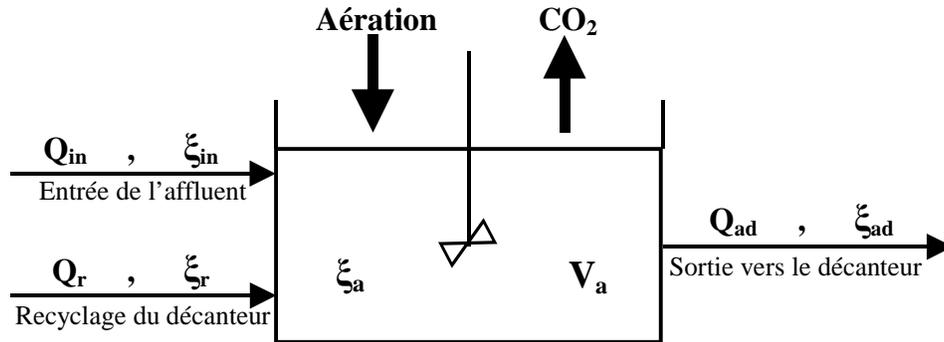


Figure 1.5.1 : Schéma fonctionnel de l'aérateur

On a alors le modèle d'aérateur suivant, qui considère l'existence de n composés (C_1, \dots, C_n) mettant en jeu m réactions (R_1, \dots, R_m) avec $m < n$, écrit sous forme matricielle :

$$\frac{d\xi_a}{dt} = K\Phi_a(\xi_a) - (1 + q_r)D\xi_a + q_r D\xi_r + D\xi_{in} + U \quad (1.5.1)$$

avec :

$\xi_a = [\xi_{1a} \ \dots \ \xi_{na}]^{* (1)}$, représente le vecteur des concentrations de chaque composé dans l'aérateur (c'est l'état du système).

⁽¹⁾Le symbole (*) est utilisé pour indiquer la transposée.

$\xi_r = [\xi_{1r} \ \cdots \ \xi_{nr}]^*$, représente le vecteur des concentrations de chaque composé provenant de la *recirculation des boues* et déversé dans l'aérateur.

$\xi_{in} = [\xi_{1in} \ \cdots \ \xi_{nin}]^*$, représente le vecteur des concentrations de chaque composé déversé dans l'aérateur.

$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix}$, où les k_{ij} ($\begin{matrix} i=1 \cdots n \\ j=1 \cdots m \end{matrix}$) sont des constantes stœchiométriques.

$\Phi_a(\xi_a) = [\Phi_{1a}(\xi_a) \ \cdots \ \Phi_{ma}(\xi_a)]^*$ le vecteur des taux des réactions $(R_1, \dots, R_m)^{(1)}$

$D = \frac{Q_{in}}{V_a}$, est le taux de dilution, avec $\begin{cases} Q_{in} : \text{Le débit d'eau entrant dans l'aérateur.} \\ V_a : \text{Le volume d'eau dans l'aérateur.} \end{cases}$

$q_r = \frac{Q_r}{Q_{in}}$, avec Q_r : Le débit d'eau recirculée entrant dans l'aérateur.

$U = [u_1 \ \cdots \ u_n]^*$, où $u_i = u_{ie} - u_{is}$ pour $i = 1 \cdots n$, est la différence entre le flux gazeux par unité de volume à l'entrée (représenté par l'indice e), et celui à la sortie (représenté par l'indice s), pour un composé C_i .

Dans la figure (1.5.1) les termes Q_{ad} et ξ_{ad} représentent respectivement : le débit du fluide et les concentrations des composants du fluide sortant de l'aérateur et se dirigeant vers le décanteur.

Remarque 1.5.1 *Le terme $K\Phi_a(\xi_a)$ décrit les cinétiques des réactions, les autres termes représentent les dynamiques de transport à travers l'aérateur.*

L'inconnue de l'équation (1.5.1) et l'état ξ_a , tous les autres termes sont théoriquement connus et il ne reste qu'à résoudre l'équation différentielle pour avoir l'état du système $\xi_a(t)$. Malheureusement, en réalité certaines parties de l'équation (1.5.1) sont mal connues comme les cinétiques, ou bien les entrées du système, et souvent des parties de l'état sont inconnues car inaccessibles à la mesure et donc la condition initiale $\xi_a(0)$ est inconnue et on ne peut pas déterminer une solution unique pour l'équation (1.5.1).

Dans la suite de notre mémoire, nous déduirons de cette structure générale du modèle du bioréacteur (aérateur) un modèle à bilan de matière, qui ne prendra pas en compte les cinétiques des réactions, et ceci en raison de l'objectif qui est de construire des observateurs pour le bioréacteur.

⁽¹⁾Le taux de conversion de chaque composé C_i impliqué dans une réaction R_j est proportionnel au taux de réaction Φ_{ja} avec une constante stœchiométrique k_{ij} .

Chapitre 2

Observabilité des systèmes linéaires

On se limite aux systèmes linéaires en dimension finie.

Soit donc le système linéaire général (2.0.1) constitué des deux équations (2.0.1a) et (2.0.1b) :⁽¹⁾

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.0.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad , \quad t \geq 0 \quad (2.0.1b)$$

avec:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état.

$y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des sorties (les observations effectuées).

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le *Contrôle* ou l'*entrée*, c'est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ localement intégrable.

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice système qui est connue.

$B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ représente la façon dont l'état $x(t)$ est affecté par l'entrée $u(t)$ c'est aussi une matrice connue.

$C \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ représente la façon dont l'état $x(t)$ affecte la sortie $y(t)$, qui est connue.

L'équation différentielle (2.0.1a) est l'équation représentant l'évolution du système étudié.

L'équation (2.0.1b) est l'équation des sorties ou des mesures effectuées sur le système étudié.

La solution de ce système sera notée $x^{x_0, u}(\cdot)$, pour mettre en évidence la dépendance par rapport à la condition initiale x_0 et l'entrée u . Elle est donnée par :

$$x^{x_0, u}(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (2.0.2)$$

On peut consulter pour ce chapitre, par exemple : [21], [20], [15], [2].

⁽¹⁾Le point dans l'écriture : $\dot{x}(t)$, signifie : $\frac{dx}{dt}$.

Dans notre mémoire nous allons nous intéresser en premier lieu à l'observabilité des systèmes du type (2.0.1)

Le problème est le suivant : étant donné un système du type (2.0.1) mais avec une condition initiale x_0 inconnue, peut-on déterminer de façon unique l'état du système $x(t)$ (la solution de l'équation différentielle (2.0.1a)) à chaque instant t ? Si oui alors le système (2.0.1) est dit observable.

Avec une condition initiale inconnue on ne peut pas déterminer une solution unique pour l'équation différentielle (2.0.1a). Cependant nous avons l'équation des sorties (ou mesures) (2.0.1b) qui va nous fournir à chaque instant t les valeurs de certains composants de l'état $x(t)$ mais pas tous, car ça dépend de la forme de la matrice C qui en réalité n'est jamais égale à l'identité. La forme de cette matrice C ainsi que la forme de la matrice A peuvent nous dire si le système (2.0.1) est observable ou non (voir théorème 2.2.1).

Une fois assuré de l'observabilité du système (2.0.1) on construira un observateur qui produira une estimation de l'état $x(t)$.

En fait nous avons besoins de déterminer de façon unique l'état du système pour deux raisons :

- 1) Avoir des renseignements sur la dynamique du système.
- 2) Appliquer des contrôles en boucle fermée (qui prennent en compte l'état du système $x(t)$), c'est à dire appliquer un contrôle u qui dépend de t et de x pour amener le système vers un état désiré.

2.1 Contrôlabilité

Même si l'estimation des états des systèmes, en elle même, a un intérêt indéniable comme la détection des perturbations de fonctionnement, un grand intérêt réside toute fois dans l'utilisation de ces estimations pour contrôler automatiquement le système étudié. C'est pour cette raison qu'on va donner dans cette partie, quelques notions sur la contrôlabilité des systèmes.

Définition 2.1.1 *On dit qu'un contrôle u transfère l'état $a \in \mathbb{R}^n$ vers l'état $b \in \mathbb{R}^n$ à l'instant T si :*

$$x^{a,u}(T) = b$$

On dit aussi que l'état b est atteignable à partir de l'état a au temps T .

Définition 2.1.2 Le système (2.0.1) est contrôlable si n'importe quel état $b \in \mathbb{R}^n$ peut être atteint à partir de n'importe quel état $a \in \mathbb{R}^n$, à un temps $T > 0$.

Définition 2.1.3 On appelle Gramian de Contrôlabilité une application linéaire continue L_B^T telle que :

$$\begin{aligned} L_B^T : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto L_B^T x = \int_0^T e^{As} B B^* e^{A^*s} x ds \end{aligned}$$

La matrice $L_B^T = \int_0^T e^{As} B B^* e^{A^*s} ds$ est dite Matrice de Contrôlabilité.

Remarque 2.1.1 Le théorème et les propositions qui vont suivre ne seront pas démontrés, mais nous démontrerons ceux de la section suivante, on peut retrouver leurs démonstrations dans la référence [21].

Théorème 2.1.1 Critère de KALMAN

Le système (2.0.1) est contrôlable si, et seulement si la matrice $\mathcal{C} = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B)$ est de rang complet par les lignes égal à n (c'est à dire que toutes les n lignes de \mathcal{C} sont linéairement indépendantes).

On dit alors que la paire (A, B) est contrôlable.

Remarque 2.1.2 La matrice \mathcal{C} est obtenue en concaténant $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$. Puisque chaque matrice $A^k B$ est de même dimension que B , soit $n \times m$, la matrice résultante \mathcal{C} est alors de taille $n \times nm$.

Proposition 2.1.1 Le système (2.0.1) est contrôlable si, et seulement si la matrice de contrôlabilité L_B^T est régulière pour tout $T > 0$.

Proposition 2.1.2 La matrice de contrôlabilité L_B^T est régulière si, et seulement si la matrice \mathcal{C} est de rang complet n .

Exemple 2.1.1 Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = u \\ x(0) = \xi_1, \quad \xi_1 \in \mathbb{R} \\ \dot{x}(0) = \xi_2, \quad \xi_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On réécrit l'équation sous la forme d'un système du premier ordre, on pose pour cela : $z(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}$, donc :

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + BU \\ z(0) = z_0 = (\xi_1, \xi_2)^* \end{cases}$$

avec : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$.

On calcule l'exponentiel matriciel :

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} + 0_{2 \times 2} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On trouve alors la matrice de contrôlabilité :

$$\begin{aligned} L_B^T &= \int_0^T e^{As} B B^* e^{A^*s} ds \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & s^2 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\det(L_B^T) = \frac{T^4}{12} > 0$, la matrice L_B^T est donc non singulière et le système est alors contrôlable.

On peut aussi vérifier que la matrice :

$$C = (B \ AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang complet $n = 2$.

Un exemple de contrôle est le suivant :

$$u(t) = -B^* e^{A^*(T-t)} (L_B^T)^{-1} (e^{AT} a - b) \quad \text{pour } t \in [0, T]$$

Ce contrôle transfère n'importe quel état a vers n'importe quel état b à l'instant T .

En prenant par exemple $a = (\xi_1, \xi_2)^*$ et $b = (0, 0)^*$, le contrôle U s'écrit :

$$\begin{aligned} U(t) &= \begin{pmatrix} u(t) \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & T-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{T} & -\frac{6}{T^2} \\ -\frac{6}{T^2} & \frac{12}{T^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ T\xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, en revenant à notre équation d'origine, le contrôle $u(t)$ qui transfère l'état initial $(x(0), \dot{x}(0)) = (\xi_1, \xi_2)$ vers l'état final $(0, 0)$ à l'instant T est :

$$u(t) = -\frac{12}{T} \left(\frac{T^2}{3} \xi_1 - \frac{tT}{2} \xi_1 + \frac{T}{2} \xi_2 - t\xi_2 \right)$$

Définition 2.1.4 Un système en boucle ouverte est un système où le contrôle (l'entrée) est indépendant de la sortie.

Ce type de contrôle suppose une connaissance parfaite du système, c'est à dire que pour avoir une sortie \hat{y} , il faut appliquer le "bon" contrôle \hat{u} . C'est le cas du contrôle dans l'exemple précédent où on a pris des conditions initiales $(x(0), \dot{x}(0)) = (\xi_1, \xi_2)$ et donc qu'on a supposés connaître parfaitement, alors qu'en réalité on ne les connaît pas aussi bien.

Définition 2.1.5 Un système en boucle fermé est un système où le contrôle dépend d'une façon ou d'une autre de la sortie. On appelle ce type de contrôle "feedback".

On effectue ainsi, avec ce type de contrôle, un retour de l'information [19].

Définition 2.1.6 On appelle bouclage d'état linéaire ou régulateur linéaire ou feedback du système (2.0.1), un contrôle du type :

$$u(t) = Kx(t), \quad t \geq 0 \tag{2.1.1}$$

où $K \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est dite matrice de gains de contre réaction.

Un système dont le contrôle est sous la forme du feedback précédent est donc un système en boucle fermée, si on suppose bien sûr que la sortie du système est l'état lui même c'est à dire que dans l'équation (2.0.1b) on a $C = I_{n \times n}$.

Un tel contrôle est dit *stabilisant* s'il assure la stabilité asymptotique du point d'équilibre du système (l'origine), c'est à dire que la solution (2.0.2) du système (2.0.1) doit vérifier :

$$x^{x_0, u}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

On dit aussi que le système est *stabilisable*.

A vrai dire tout système (2.0.1) contrôlable est *stabilisable* par un *feedback*, voir [2], [21].

Il suffit de voir qu'en remplaçant le feedback (2.1.1) dans le système (2.0.1), il devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases}$$

dont la solution est

$$x^{x_0, u}(t) = e^{(A+BK)t} x_0$$

du coup, en choisissant la matrice K , de telle sorte que $A + BK$ n'ait que des valeurs propres à parties réelles strictement négatives, on a :

$$x^{x_0, u}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Pour arriver à ce résultat de stabilisabilité, on a pris un contrôle qui dépend de la sortie (un *feedback*), mais cette sortie n'est pas n'importe laquelle, c'est l'état lui-même. Ceci se traduit en prenant la matrice $C = I_{n \times n}$ dans l'équation (2.0.1b).

Ce choix d'une sortie égale à l'état tout entier n'est pas seulement en exigence mathématique pour assurer la stabilisabilité du système, il a aussi d'autres justificatifs comme l'étude générale du système réel. Par exemple, pour les bioréacteurs, on a besoin de données sur l'état $x(t)$ pour : les détections de pannes (manque d'oxygène, mauvais brassage,...), la détermination des stades d'évolution du système (mortalité de la biomasse, saturation en substrat,...),....

Toute fois, chercher à connaître tout l'état $x(t)$ est une chose qui n'est pas toujours possible en pratique, car mesurer tout l'état peut être très coûteux, d'un point de vu financier (le coût élevé des instruments de mesures), technique (la rareté des capteurs fiables), mais aussi d'un point de vue du temps⁽¹⁾.

2.2 Observabilité

Puisqu'on ne peut pas toujours mesurer tout l'état, deux solutions se présentent :

- Adopter une nouvelle approche du problème qui prendra en compte la connaissance incomplète de l'état.

⁽¹⁾Certaines mesures en biochimie peuvent prendre beaucoup de temps. Exemple : la mesure de la DBO₅ prend au moins cinq jours.

- Essayer de *reconstruire* cet état à partir des mesures (ou observations) disponibles et de l'entrée appliquée.

La première solution étant difficile, c'est la deuxième solution qui est la plus utilisée. Si cette *reconstruction* est possible, théoriquement, alors le système est dit *observable*.

Définition 2.2.1 *Le système (2.0.1), est dit observable si pour tout vecteur x_0 de \mathbb{R}^n , il existe un temps T fini et un contrôle u définie sur $[0, T]$ tels que si $x(0) = x_0$ et qu'on applique u , alors la connaissance de la sortie y sur l'intervalle $[0, T]$ permet de déterminer x_0 .*

Remarque 2.2.1 *Pour retrouver l'état $x(t)$, il suffit d'utiliser la formule (2.0.2).*

Définition 2.2.2 *On appelle Gramian d'observabilité une application linéaire continue L_C^T telle que :*

$$\begin{aligned} L_C^T : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto L_C^T x = \int_0^T e^{A^*s} C^* C e^{As} x ds \end{aligned}$$

*La matrice $L_C^T = \int_0^T e^{A^*s} C^* C e^{As} ds$ est dite Matrice d'observabilité.*

Théorème 2.2.1 Critère de KALMAN

Le système (2.0.1) est observable si, et seulement si la matrice $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ est de

rang complet n (C'est à dire que les n colonnes de \mathcal{O} sont linéairement indépendantes).

On dit alors que la paire (A, C) est observable.

Remarque 2.2.2 *La taille de la matrice \mathcal{O} est $np \times n$.*

Avant de démontrer ce théorème on va énoncer un *lemme* et donner sa preuve :

Lemme 2.2.1 *Le système (2.0.1) est observable si, et seulement si la matrice d'observabilité L_C^T est définie, ou bien inversible, pour au moins un $T > 0$.*

Preuve. Remarquons d'abord que L_C^T est une matrice symétrique non négative. En effet soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned}
 \langle L_C^T x, y \rangle &= \left\langle \int_0^T e^{A^*s} C^* C e^{As} x ds, y \right\rangle \\
 &= \int_0^T \langle e^{A^*s} C^* C e^{As} x, y \rangle ds \\
 &= \int_0^T \langle x, e^{A^*s} C^* C e^{As} y \rangle ds \\
 &= \left\langle x, \int_0^T e^{A^*s} C^* C e^{As} y ds \right\rangle \\
 &= \langle x, L_C^T y \rangle
 \end{aligned}$$

donc L_C^T est bien symétrique.

Soit maintenant $z \in \mathbb{R}^n$, on a donc :

$$\begin{aligned}
 \langle L_C^T z, z \rangle &= \left\langle \int_0^T e^{A^*s} C^* C e^{As} z ds, z \right\rangle \\
 &= \int_0^T \langle C e^{As} z, C e^{As} z \rangle ds \\
 &= \int_0^T \|C e^{As} z\|^2 ds \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Donc L_C^T est une matrice non négative.

A présent, montrons que L_C^T est inversible.

Soit la solution du système (2.0.1) donnée par (2.0.2) :

$$x^{x_0, u}(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds$$

En multipliant les deux cotés de l'égalité par la matrice C , on trouve :

$$y(t) = C e^{At} x_0 + \int_0^t C e^{A(t-s)} B u(s) ds$$

et donc :

$$C e^{At} x_0 = y(t) - \int_0^t C e^{A(t-s)} B u(s) ds \quad (2.2.1)$$

On multiplie encore les deux cotés par $e^{tA^*} C^*$, et on intègre entre 0 et T . Ceci nous donne :

$$\int_0^T e^{A^*t} C^* C e^{At} dt x_0 = \int_0^T e^{A^*t} C^* f(t) dt$$

⁽¹⁾Le symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans \mathbb{R}^n et la norme associée est notée par $\|\cdot\|$.

où $f(t) = y(t) - \int_0^t C e^{A(t-s)} B u(s) ds$ est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^p connue, car dépendante seulement de $y(t)$ et de $u(t)$ qui sont connus sur $[0, T]$. Donc

$$L_C^T x_0 = \int_0^T e^{A^*t} C^* f(t) dt$$

cette écriture nous permet, si L_C^T est inversible pour ce T , de tirer l'état initial x_0 à partir de $y(t)$ et de $u(t)$ sur $[0, T]$, et donc le système est observable. En utilisant (2.0.2) on reconstruit enfin l'état $x(t)$ pour tout t dans $[0, T]$.

Inversement, on va supposer que le système (2.0.1) est observable et L_C^T n'est inversible pour aucun $T > 0$.

$$L_C^T \text{ n'est pas inversible} \Leftrightarrow \text{Ker } L_C^T \neq \{0\}$$

donc $\exists v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ tel que $\langle L_C^T v, v \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle L_C^T v, v \rangle &= \langle v, L_C^T v \rangle \text{ car } L_C^T \text{ est symétrique} \\ &= \int_0^T \langle v, e^{A^*t} C^* C e^{At} v \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle C e^{At} v, C e^{At} v \rangle dt \\ &= \int_0^T \|C e^{At} v\|^2 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$C e^{At} v = 0 \quad pp \text{ sur } [0, T]$$

On peut écrire donc :

$$\forall t \in [0, T] \quad C e^{At}(v + x_0) = C e^{At} x_0$$

donc d'après (2.2.1) on confond les états x_0 et $x_0 + v$, puisque $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, c'est à dire qu'on a déterminé deux états initiaux pour la même sortie $y(t)$ et la même entrée appliquée au système $u(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$. Donc le système (2.0.1) n'est pas observable, contradiction.

■

Vient maintenant la démonstration du théorème :

Démonstration. Nous venons de montrer que le système est observable si, et seulement si L_C^T est inversible pour au moins un $T > 0$.

Nous allons montrer alors :

$$L_C^T \text{ n'est pas inversible} \Leftrightarrow rg(\mathcal{O}) < n$$

$$\begin{aligned}
 L_C^T \text{ n'est pas inversible} &\Leftrightarrow \exists v \neq 0_{\mathbb{R}^n}, \langle L_C^T v, v \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists v \neq 0_{\mathbb{R}^n}, \langle v, L_C^T v \rangle = 0 \text{ car } L_C^T \text{ est symétrique} \\
 &\Leftrightarrow \exists v \neq 0_{\mathbb{R}^n}, \int_0^T \langle C e^{As} v, C e^{As} v \rangle ds = 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists v \neq 0_{\mathbb{R}^n}, \int_0^T \|C e^{As} v\|^2 ds = 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists v \neq 0_{\mathbb{R}^n}, C e^{As} v = 0 \quad pp \text{ sur } [0, T] \\
 &\Leftrightarrow \exists v \neq 0_{\mathbb{R}^n}, \frac{d^m (C e^{As} v)_{s=0}}{ds^m} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ car } e^{As} \text{ est une fonction} \\
 &\quad \text{analytique sur } \mathbb{R}, \text{ donc c'est un polynôme infini en } s \text{ dont} \\
 &\quad \text{les coefficients sont } \frac{d^m (e^{As})_{s=0}}{m! ds^m} \\
 &\Leftrightarrow \exists v \neq 0_{\mathbb{R}^n}, C A^m v = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ car } \frac{d^m (e^{As})_{s=0}}{ds^m} = A^m \\
 &\Leftrightarrow \exists v \neq 0_{\mathbb{R}^n}, C A^m v = 0 \quad \forall m \leq n-1 \text{ la première implication} \\
 &\quad \text{est évidente, la seconde est un résultat rapporté par} \\
 &\quad \text{le théorème de CAYLEY-HAMILTON}^{(1)} \\
 &\Leftrightarrow \exists v \neq 0_{\mathbb{R}^n} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} v = 0 \\
 &\Leftrightarrow rg(O) < n
 \end{aligned}$$

Donc

$$L_C^T \text{ inversible pour un certain } T > 0 \Leftrightarrow rg(\mathcal{O}) = n$$

Conclusion :

$$\text{Le système (2.0.1) est observable} \Leftrightarrow rg(\mathcal{O}) = n$$

■

Exemple 2.2.1 Soit le modèle d'état de ce qu'on appelle communément "Le chariot équilibré" [2]:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \\ \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \\ \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + Bu \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$a, b, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

ξ et $\dot{\xi}$: sont respectivement la position du chariot et sa vitesse.

θ et $\dot{\theta}$: sont respectivement la position de la masse et sa vitesse.

⁽¹⁾voir l'annexe A.

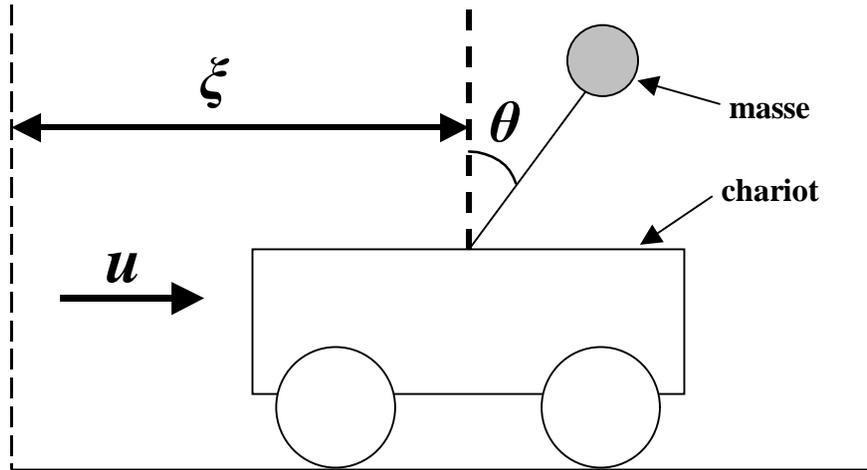


Figure 2.2.1 : Le chariot équilibriste

Posons : $x = \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \\ \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$

Si on suppose que seules les positions sont mesurées, alors on a le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

avec $C = (I_{2 \times 2} \quad 0_{2 \times 2})$.

En écrivant : $A = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ A_1 & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, où $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix}$, où $B_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, on obtient la matrice :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ A_1 & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & A_1 \end{pmatrix}$$

dont le rang est : $rg(\mathcal{O}) = 4$. Donc le système est observable.

Remarque 2.2.3 Il est clair que la notion d'observabilité ne dépend que de la sortie $y(t)$ et de l'état $x(t)$ et est complètement indépendante de l'entrée appliquée $u(t)$, dans le sens où quelque soit l'entrée appliquée, on peut toujours déterminer si le système est observable ou non. C'est en contraste complet avec la notion de contrôlabilité qui est indépendante de la sortie $y(t)$ et n'est dépendante que de l'état $x(t)$ et de l'entrée $u(t)$.

2.3 Equivalence des systèmes

Soit (Σ_1) et (Σ_2) deux systèmes linéaires sous forme d'état ayant le même nombre m d'entrées et le même nombre p de sorties :

$$(\Sigma_1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\Sigma_2) \quad \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \tilde{A}\xi(t) + \tilde{B}U(t) \\ \zeta(t) = \tilde{C}\xi(t) \end{cases}$$

Définition 2.3.1 Les systèmes (Σ_1) et (Σ_2) sont dits équivalents si, et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par un changement de coordonnées inversible, c'est à dire si, et seulement s'il existe une matrice $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$\xi(t) = Px(t), \quad U(t) = u(t), \quad \zeta(t) = y(t) \quad (2.3.1)$$

donc:

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PB, \quad \tilde{C} = CP^{-1}$$

Remarque 2.3.1 La matrice P peut être vue comme une matrice de passage de la nouvelle base vers l'ancienne.

Théorème 2.3.1 La contrôlabilité et l'observabilité sont invariantes par changement de coordonnées.

Preuve. Remarquons que :

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \left(\tilde{B} \ \tilde{A}\tilde{B} \ \dots \ \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \right) = (PB \ PAB \ \dots \ PA^{n-1}B) \\ &= P(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) \\ &= PC \end{aligned}$$

et que :

$$\tilde{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CP^{-1} \\ CAP^{-1} \\ \vdots \\ CA^{n-1}P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} = \mathcal{O}P^{-1}$$

P et P^{-1} étant non singulières, $rg(\tilde{C}) = rg(C)$ et $rg(\tilde{\mathcal{O}}) = rg(\mathcal{O})$ [4].

Donc :

la paire (A, B) est contrôlable si, et seulement si la paire (\tilde{A}, \tilde{B}) est contrôlable.

la paire (A, C) est observable si, et seulement si la paire (\tilde{A}, \tilde{C}) est observable.

■

Proposition 2.3.1 Prenons, dans le système (2.0.1), A une matrice $n \times n$ et B une matrice $n \times 1$. On notera :

$$\chi_A(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

le polynôme caractéristique de A .

Si la paire (A, B) est contrôlable, il existe une matrice inversible P telle que :

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PB$$

avec \tilde{A} et \tilde{B} sous la forme :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, le système (2.0.1) est équivalent au système :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{A}\xi + \tilde{B}u \\ \zeta = CP^{-1}\xi \end{cases}$$

dite forme canonique ou compagnon contrôlable du système (2.0.1).

Preuve. Soit l la dernière ligne de l'inverse de la matrice C :

$$l = (0 \dots 0 1) C^{-1} = (0 \dots 0 1)(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^{-1}$$

Ainsi définie, l vérifie :

$$lC = (0 \dots 0 1) C^{-1}C = (0 \dots 0 1) \quad \text{donc} : (lB \ lAB \ \dots \ lA^{n-1}B) = (0 \dots 0 1)$$

c'est-à-dire :

$$lB = lAB = \dots = lA^{n-2}B = 0 \quad \text{et} \quad lA^{n-1}B = 1 \quad (2.3.2)$$

Montrons que la matrice carrées suivante : $P = \begin{pmatrix} l \\ lA \\ \vdots \\ lA^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible. Il suffit pour

cela de montrer que PC l'est, car C est carrée et de rang complet égale à n .

La matrice PC est constituée des lignes : $\mathcal{C}, \mathcal{LAC}, \dots, \mathcal{L}A^{n-1}\mathcal{C}$. Or

$$\mathcal{C} = (0 \cdots 0 \ 1)$$

et par (2.3.2) et le théorème de CAYLEY-HAMILTON

$$\begin{aligned} \mathcal{LAC} &= \mathcal{L}A(B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B) = (\mathcal{L}AB \ \mathcal{L}A^2B \ \cdots \ \mathcal{L}A^{n-1}B \\ &\quad - \alpha_1 \mathcal{L}A^{n-1}B - \cdots - \alpha_n \mathcal{L}B) = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ - \alpha_1) \\ \mathcal{L}A^2\mathcal{C} &= \mathcal{L}A^2(B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B) = (\mathcal{L}A^2B \ \mathcal{L}A^3B \ \cdots \ \mathcal{L}A^{n-1}B \ - \alpha_1 \mathcal{L}A^{n-1}B - \cdots - \alpha_n \mathcal{L}B \\ &\quad - \beta_1 \mathcal{L}A^{n-1}B - \cdots - \beta_n \mathcal{L}B) = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ - \alpha_1 \ - \beta_1) \end{aligned}$$

Continuant ainsi, on trouve que les lignes : $\mathcal{C}, \mathcal{LAC}, \mathcal{L}A^2\mathcal{C}, \dots, \mathcal{L}A^{n-1}\mathcal{C}$ sont linéairement indépendantes et donc PC mais aussi P sont inversibles.

Si $x(t)$ satisfait le système (2.0.1), posons $\xi(t) = Px(t)$, on a donc $\xi_1 = \mathbf{l}x$, et d'après (2.3.2), on a :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \mathbf{l}\dot{x} = \mathcal{L}Ax + \mathcal{L}Bu = \mathcal{L}Ax = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \mathcal{L}A\dot{x} = \mathcal{L}A(Ax + Bu) = \mathcal{L}A^2x + \mathcal{L}ABu = \mathcal{L}A^2x = \xi_3 \\ &\quad \vdots \\ \dot{\xi}_n &= \mathcal{L}A^{n-1}\dot{x} = \mathcal{L}A^{n-1}(Ax + Bu) = \mathcal{L}A^n x + \mathcal{L}A^{n-1}Bu = \mathcal{L}A^n x + u \end{aligned}$$

La dernière ligne s'écrit, sachant que $A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \cdots - \alpha_n$ et donc $\mathcal{L}A^n x = -\alpha_1 \mathcal{L}A^{n-1}x - \cdots - \alpha_n \mathbf{l}x$:

$$\dot{\xi}_n = -\alpha_1 \xi_{n-1} - \cdots - \alpha_n \xi_1 + u$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{A}\xi + \tilde{B}u \\ \zeta = CP^{-1}\xi \end{cases}$$

avec \tilde{A} et \tilde{B} comme indiquées dans la proposition.

■

Proposition 2.3.2 Soient A une matrice $n \times n$ et B une matrice $n \times 1$. On notera toujours :

$$\chi_A(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

le polynôme caractéristique de A .

Si la paire (A, C) est observable, il existe une matrice inversible P telle que :

$$\tilde{A} = P^{-1}AP, \quad \tilde{C} = CP$$

avec \tilde{A} et \tilde{C} sous la forme :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, le système (2.0.1) est équivalent au système :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{A}\xi + P^{-1}Bu \\ \zeta = \tilde{C}\xi \end{cases}$$

dite forme canonique ou compagnon observable du système (2.0.1).

Preuve. Supposons que $C \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ et que le système (2.0.1) est observable, alors la matrice \mathcal{O} est une matrice $n \times n$ inversible. Soit \mathbf{h} la dernière colonne de l'inverse de la matrice \mathcal{O} , c'est-à-dire :

$$\mathbf{h} = \mathcal{O}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi définie, \mathbf{h} est telle que :

$$\mathcal{O}\mathbf{h} = \mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} : \quad \begin{pmatrix} C\mathbf{h} \\ CA\mathbf{h} \\ \vdots \\ CA^{n-1}\mathbf{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que :

$$C\mathbf{h} = CA\mathbf{h} = \cdots = CA^{n-2}\mathbf{h} = 0 \quad \text{et} \quad CA^{n-1}\mathbf{h} = 1 \quad (2.3.3)$$

Soit :

$$P = (\mathbf{h} \quad A\mathbf{h} \quad \cdots \quad A^{n-1}\mathbf{h})$$

Montrons que P est une matrice $n \times n$ inversible, ou encore que ses colonnes sont linéairement indépendantes, il suffit pour cela de montrer que la matrice $\mathcal{O}P$ est inversible.

$$\mathcal{O}P = (\mathcal{O}\mathbf{h} \ \mathcal{O}A\mathbf{h} \ \dots \ \mathcal{O}A^{n-1}\mathbf{h}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{O}\mathbf{h} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

par (2.3.3) est le théorème de CAYLEY-HAMILTON on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}A\mathbf{h} &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} A\mathbf{h} = \begin{pmatrix} CA\mathbf{h} \\ CA^2\mathbf{h} \\ \vdots \\ CA^{n-1}\mathbf{h} \\ CA^n\mathbf{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA\mathbf{h} \\ CA^2\mathbf{h} \\ \vdots \\ CA^{n-1}\mathbf{h} \\ -\alpha_1 CA^{n-1}\mathbf{h} - \dots - \alpha_n C\mathbf{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{O}A^2\mathbf{h} &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-3} \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} A^2\mathbf{h} = \begin{pmatrix} CA^2\mathbf{h} \\ CA^3\mathbf{h} \\ \vdots \\ CA^{n-1}\mathbf{h} \\ CA^n\mathbf{h} \\ CA^{n+1}\mathbf{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA^2\mathbf{h} \\ CA^3\mathbf{h} \\ \vdots \\ CA^{n-1} \\ -\alpha_1 CA^{n-1}\mathbf{h} - \dots - \alpha_n C\mathbf{h} \\ -\beta_1 CA^{n-1}\mathbf{h} - \dots - \beta_n C\mathbf{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\alpha_1 \\ -\beta_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en continuant ainsi, on trouve que les colonnes de $\mathcal{O}P$ sont linéairement indépendantes, donc $\mathcal{O}P$ et P sont inversibles.

Posons maintenant $x(t) = P\xi(t)$, on a alors :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \dot{\xi}_i A^{i-1} \mathbf{h} \quad (2.3.4)$$

d'autre part, on a :

$$\dot{x} = Ax + Bu = A \sum_{i=1}^n \xi_i A^{i-1} \mathbf{h} + Bu = \sum_{i=1}^n \xi_i A^i \mathbf{h} + Bu \quad (2.3.5)$$

de (2.3.4) et (2.3.5), on a :

$$\dot{\xi}_1 \mathbf{h} + (\dot{\xi}_2 - \xi_1) A \mathbf{h} + \dots + (\dot{\xi}_n - \xi_{n-1}) A^{n-1} \mathbf{h} - \xi_n A^n \mathbf{h} - Bu = 0$$

en appliquant le théorème de CAYLEY-HAMILTON sur le terme $\xi_n A^n \mathbf{h}$, on trouve :

$$(\dot{\xi}_1 + \alpha_n \xi_n) \mathbf{h} + (\dot{\xi}_2 - \xi_1 + \alpha_{n-1} \xi_n) A \mathbf{h} + \dots + (\dot{\xi}_n - \xi_{n-1} + \alpha_1 \xi_n) A^{n-1} \mathbf{h} - Bu = 0$$

Les lignes de P étant linéairement indépendantes, elles forment une base dans \mathbb{R}^n . La matrice

$$\text{(vecteur) } B \text{ dans cette base s'écrit alors : } B = b_1 \mathbf{h} + b_2 A \mathbf{h} + \dots + b_n A^{n-1} \mathbf{h} = P \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On arrive enfin à l'écriture :

$$(\dot{\xi}_1 + \alpha_n \xi_n - b_1 u) \mathbf{h} + (\dot{\xi}_2 - \xi_1 + \alpha_{n-1} \xi_n - b_2 u) A \mathbf{h} + \dots + (\dot{\xi}_n - \xi_{n-1} + \alpha_1 \xi_n - b_n u) A^{n-1} \mathbf{h} = 0$$

On obtient donc la représentation d'état dans les coordonnées $\xi_i, i = 1..n$.

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\alpha_n \xi_n + b_1 u \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 - \alpha_{n-1} \xi_n + b_2 u \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = \xi_{n-1} - \alpha_1 \xi_n + b_n u \end{cases}$$

et $\zeta = CP\xi = \xi_n$ puisque $CP = (00 \dots 1)$ d'après (2.3.3).

Donc le système (2.0.1), étant observable, est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{A}\xi + P^{-1}Bu \\ \zeta = \tilde{C}\xi \end{cases}$$

avec \tilde{A} et \tilde{C} comme données dans la proposition. ■

Remarque 2.3.2 Une méthode plus pratique, qui ne nécessite pas le calcul de l'inverse de la matrice \mathcal{O} (resp. \mathcal{C}), pour déterminer la matrice de passage P est présentée dans l'annexe C.

2.4 Décomposition de KALMAN et Dualité

Maintenant si le système n'est pas contrôlable (resp. observable), on n'est pas pour autant complètement bloqué, les théorèmes suivants vont nous permettre de décomposer notre système non-contrôlable (resp. non-observable) en deux parties, l'une contrôlable (resp. observable) et l'autre non-contrôlable (resp. non-observable):

Théorème 2.4.1 Décomposition de KALMAN 1

Supposons que $\text{rg}(\mathcal{C}) = l < n$ (ce qui est équivalent à dire que le système (2.0.1) n'est pas contrôlable), alors il existe une matrice $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ non singulière telle que :

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $\tilde{A}_{11} \in M_{l \times l}(\mathbb{R})$, $\tilde{A}_{22} \in M_{n-l \times n-l}(\mathbb{R})$, $\tilde{A}_{12} \in M_{l \times n-l}(\mathbb{R})$, $\tilde{B}_1 \in M_{l \times m}(\mathbb{R})$, et la paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ est contrôlable.

Donc d'après le théorème, le système (2.0.1) est équivalent au système :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \tilde{A}_{11}\xi_1 + \tilde{A}_{12}\xi_2 + \tilde{B}_1 u & \xi_1(0) \in \mathbb{R}^l \\ \dot{\xi}_2 = \tilde{A}_{22}\xi_2 & \xi_2(0) \in \mathbb{R}^{n-l} \\ \zeta = \tilde{C}_1\xi_1 + \tilde{C}_2\xi_2 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

La première équation décrit la partie *contrôlable* du système, alors que la seconde décrit la partie *non-contrôlable*.

Avant de démontrer le théorème, montrons que $E_0 = [\mathcal{C}]$, le sous espace engendré par les colonnes de \mathcal{C} , est stable par A .

Preuve. En effet :

Soit $x \in E_0 \Leftrightarrow x$ est engendré par les colonnes de $B, AB, \dots, A^{n-1}B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \mu_s^{j+1} \in \mathbb{R} \text{ pour } j = 0, \dots, n-1, \text{ et } s = 1 \dots m \text{ tels que:} \\ x = \mu_1^1 b_1 + \mu_2^1 b_2 \dots + \mu_m^1 b_m + \mu_1^2 A b_1 + \dots + \mu_m^2 A b_m + \dots \\ \dots + \mu_1^n A^{n-1} b_1 + \dots + \mu_m^n A^{n-1} b_m \end{cases}$$

avec $A^j b_i$ étant la $i^{\text{ème}}$ colonne de $A^j B$.

$$\Leftrightarrow x = B \begin{pmatrix} \mu_1^1 \\ \vdots \\ \mu_m^1 \end{pmatrix} + AB \begin{pmatrix} \mu_1^2 \\ \vdots \\ \mu_m^2 \end{pmatrix} + \dots + A^{n-1}B \begin{pmatrix} \mu_1^n \\ \vdots \\ \mu_m^n \end{pmatrix}$$

$$= Bu_1 + ABu_2 + \dots + A^{n-1}Bu_n \text{ qui n'est autre que l'image de } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

par \mathcal{C} . On aurait pu prendre donc $E_0 = \text{Im}(\mathcal{C})$.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} Ax &= ABu_1 + A^2Bu_2 + \dots + A^nBu_n \\ &= ABu_1 + A^2Bu_2 + \dots - \alpha_1 A^{n-1}Bu_n - \dots - \alpha_n Bu_n \\ &\quad \text{(En utilisant le théorème de CAYLEY-HAMILTON)} \\ &= B\tilde{u}_1 + AB\tilde{u}_2 + \dots + A^{n-1}B\tilde{u}_n \end{aligned}$$

Donc $Ax \in E_0$, c'est à dire que E_0 est stable par A . ■

Démonstration. $rg(\mathcal{C}) = l < n$.

Donc $E_0 = [\mathcal{C}]$ est de dimension l .

Soit E_1 un supplémentaire quelconque de E_0 dans \mathbb{R}^n , et choisissons une nouvelle base de \mathbb{R}^n dont les vecteurs sont tels que : les l premiers d'entre eux $\{e_1, \dots, e_l\}$ forment la nouvelle base de E_0 , et les $n - l$ derniers $\{e_{l+1}, \dots, e_n\}$ forment la nouvelle base de E_1 . Ce choix est toujours possible du fait que $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_1$.

Soit P la matrice de passage de la nouvelle base $\{e_1, \dots, e_l, e_{l+1}, \dots, e_n\}$, vers l'ancienne.

On a alors les nouvelles matrices:

$$\tilde{A} = PAP^{-1} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = PB$$

qu'on va utiliser pour écrire un système équivalent au système (2.0.1) non contrôlable.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors x s'écrit dans la nouvelle base :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in E_1 \\ &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \xi_1 \in \mathbb{R}^l \quad \text{et} \quad \xi_2 \in \mathbb{R}^{n-l} \end{aligned}$$

on écrit donc :

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}\xi_1 + \tilde{A}_{12}\xi_2 \\ \tilde{A}_{21}\xi_1 + \tilde{A}_{22}\xi_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}u = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1u \\ \tilde{B}_2u \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad u \in \mathbb{R}^m$$

Donc pour $\tilde{x} \in E_0$, on a $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\xi_1 \in \mathbb{R}^l$, et :

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}\xi_1 \\ \tilde{A}_{21}\xi_1 \end{pmatrix}$$

E_0 étant stable par A , alors $\tilde{A}\tilde{x} \in E_0$, donc :

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}\xi_1 \\ \tilde{A}_{21}\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}\xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

par conséquent la matrice \tilde{A}_{21} est nulle.

Pour la matrice \tilde{B} , on déduit de la preuve précédente que : $Bu \in E_0$ pour $u \in \mathbb{R}^m$.

Donc :

$$\tilde{B}u = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1u \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est à dire que la matrice \tilde{B}_2 est nulle.

L'écriture de la matrice C dans la nouvelle base étant comme suit :

$$\tilde{C} = CP^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \tilde{C}_1 \in M_{p \times l}(\mathbb{R}) \quad \text{et } \tilde{C}_2 \in M_{p \times n-l}(\mathbb{R})$$

on retrouve l'écriture (2.4.1), dans la nouvelle base, qui est équivalente à celle du système (2.0.1) non contrôlable.

Pour montrer la dernière affirmation du théorème, qui est que la paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ est contrôlable, nous avons signalé dans la preuve du théorème (2.3.1) que :

$$rg(\mathcal{C}) = rg(\tilde{\mathcal{C}}) \quad \text{avec: } \tilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{pmatrix}$$

or $\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$, et on a par récurrence que :

$$\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^k & D \\ 0 & \tilde{A}_{22}^k \end{pmatrix}, \quad \text{avec } D \in M_{l \times n-l}(\mathbb{R})$$

On trouve alors : $\tilde{A}^k \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^k \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \dots & \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

puisque $rg(\mathcal{C}) = l$ (système non contrôlable), et sachant que :

$$rg(\tilde{\mathcal{C}}) = rg \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \dots & \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1 \end{pmatrix},$$

alors :

$$rg \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \dots & \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1 \end{pmatrix} = l$$

en d'autres termes : la matrice $\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \dots & \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1 \end{pmatrix}$ est de rang complet, donc la paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ est contrôlable. ■

Remarquons enfin que le contrôle u n'a aucun effet sur les composantes ξ_2 du vecteur d'état \tilde{x} . En plus, pour que cet état soit contrôlable il faut et il suffit qu'il puisse s'écrire $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\tilde{x} \in E_0 = [\mathcal{C}]$.

Pareil que dans le cas où le système (2.0.1) est non contrôlable, si notre système est non observable, on cherchera à distinguer la partie observable de celle qui ne l'est pas :

Théorème 2.4.2 Décomposition de KALMAN 2

Supposons que $\text{rg}(\mathcal{O}) = l < n$ (c'est à dire que le système (2.0.1) est non observable), il existe alors une matrice $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ non singulière telle que :

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad CP^{-1} = (\tilde{C}_1 \quad 0)$$

où $\tilde{A}_{11} \in M_{l \times l}(\mathbb{R})$, $\tilde{A}_{22} \in M_{n-l \times n-l}(\mathbb{R})$, $\tilde{A}_{21} \in M_{l \times n-l}(\mathbb{R})$, $\tilde{C}_1 \in M_{p \times l}(\mathbb{R})$ et la paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ est observable.

Donc il existe une base dans \mathbb{R}^n dans laquelle le système (2.0.1) s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \tilde{A}_{11}\xi_1 + \tilde{B}_1u \\ \dot{\xi}_2 = \tilde{A}_{21}\xi_1 + \tilde{A}_{22}\xi_2 + \tilde{B}_2u \\ \zeta = \tilde{C}_1\xi_1 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

$B_1 \in M_{l \times m}(\mathbb{R})$, $B_2 \in M_{n-l \times m}(\mathbb{R})$ et où la paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ est observable.

Montrons cette fois-ci que $\ker(\mathcal{O})$ est stable par A .

Preuve. Soit $x \in \ker(\mathcal{O})$

$$\begin{aligned} x \in \ker(\mathcal{O}) &\Leftrightarrow \mathcal{O}x = 0_{np \times 1} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = 0_{np \times 1} \\ &\Leftrightarrow Cx = CAx = \dots = CA^{n-1}x = 0_{p \times 1} \end{aligned}$$

d'autre part, toujours en utilisant le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}Ax &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} Ax \\ &= \begin{pmatrix} CAx \\ CA^2x \\ \vdots \\ -\alpha_1 CA^n x - \dots - \alpha_n Cx \end{pmatrix} \\ &= 0_{np \times 1} \text{ d'après l'égalité matricielle précédente.} \end{aligned}$$

c'est à dire : $Ax \in \ker(\mathcal{O})$. Donc $\ker(\mathcal{O})$ est stable par A . ■

Démonstration. La démonstration est quasiment identique à celle de la décomposition de KALMAN pour un système non contrôlable.

$$rg(\mathcal{O}) = rg(\mathcal{O}^*) = l < n.$$

Soit cette fois-ci $E_1 = \ker(\mathcal{O})$ le noyau de l'application linéaire représentée par la matrice \mathcal{O} .

Soit E_0 un supplémentaire quelconque de E_1 dans \mathbb{R}^n , on peut prendre par exemple $E_0 = \text{Im}(\mathcal{O}^*)^{(1)}$. Puisque $\dim(\text{Im}(\mathcal{O}^*)) = \dim E_0 = rg(\mathcal{O}^*) = l$, alors $\dim E_1 = n - l$.

Choisissons une nouvelle base de \mathbb{R}^n dont les vecteurs sont tels que : les l premiers d'entre eux $\{e_1, \dots, e_l\}$ forment la nouvelle base de E_0 et les $n - l$ derniers $\{e_{l+1}, \dots, e_n\}$ forment la nouvelle base de E_1 .

Soit P la matrice de passage de la nouvelle base vers l'ancienne, on a alors :

$$\tilde{A} = PAP^{-1} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = CP^{-1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors x s'écrit dans la nouvelle base :

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \xi_1 \in \mathbb{R}^l \quad \text{et} \quad \xi_2 \in \mathbb{R}^{n-l}$$

on écrit donc :

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}\xi_1 + \tilde{A}_{12}\xi_2 \\ \tilde{A}_{21}\xi_1 + \tilde{A}_{22}\xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix}$$

donc pour $\tilde{x} \in E_1$, on a : $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, avec $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n-l}$, et :

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{12}\xi_2 \\ \tilde{A}_{22}\xi_2 \end{pmatrix}$$

E_1 étant stable par A , alors $\tilde{A}\tilde{x} \in E_1$, donc :

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{12}\xi_2 \\ \tilde{A}_{22}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{A}_{22}\xi_2 \end{pmatrix}$$

on conclut que la matrice \tilde{A}_{12} est nulle.

⁽¹⁾Remarquons que : $\mathbb{R}^n = \text{Im}(\mathcal{O}^*) \oplus (\text{Im}(\mathcal{O}^*))^\perp = \text{Im}(\mathcal{O}^*) \oplus \ker(\mathcal{O})$.

Le symbole $(^\perp)$ représentant l'orthogonal.

Pour $x \in \ker(\mathcal{O})$ on a $\mathcal{O}x = 0_{np \times 1}$, et donc en particulier : $Cx = 0_{p \times 1}$ qui s'écrit dans la nouvelle base :

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0_{p \times 1}$$

donc $\tilde{C}_2 \xi_2 = 0_{p \times 1}$, pour $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n-l}$. On conclut que la matrice \tilde{C}_2 est nulle. Donc $\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'écriture de la matrice B dans la nouvelle base étant comme suit :

$$\tilde{B} = PB = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \tilde{B}_1 \in M_{l \times m}(\mathbb{R}) \quad \text{et } \tilde{B}_2 \in M_{n-l \times m}(\mathbb{R})$$

on retrouve l'écriture d'un système équivalent au système (2.0.1), dans la nouvelle base sous la forme (2.4.2).

Pour montrer que la paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ est observable, nous avons signaler dans la preuve du théorème (2.3.1) que :

$$rg(\mathcal{O}) = rg(\tilde{\mathcal{O}}) \quad \text{avec:} \quad \tilde{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix}$$

or $\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$, et on a par récurrence que :

$$\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^k & 0 \\ E & \tilde{A}_{22}^k \end{pmatrix}, \quad \text{avec } E \in M_{n-l \times l}(\mathbb{R})$$

On trouve alors : $\tilde{C}\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^k & 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\tilde{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

alors : $l = rg(\mathcal{O}) = rg(\tilde{\mathcal{O}}) = rg \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{n-1} \end{pmatrix}$, c'est à dire que cette matrice est de rang

complet, donc la paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ est observable. ■

Pour clore ce chapitre on énonce une propriété qui relie la contrôlabilité et l'observabilité, c'est la propriété de *dualité*.

Proposition 2.4.1 Dualité

Les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité sont duales :

La paire (A, B) est contrôlable si, et seulement si la paire (A^, B^*) est observable*

La paire (A, C) est observable si, et seulement si la paire (A^, C^*) est contrôlable*

Preuve. En effet :

$$\begin{aligned}
 (A, B) \text{ contrôlable} &\Leftrightarrow \text{rg}(\mathcal{C}) = \text{rg}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n \\
 &\Leftrightarrow \text{rg}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^* = \text{rg} \begin{pmatrix} B^* \\ B^*A^* \\ \vdots \\ B^*A^{*n-1} \end{pmatrix} = n \\
 &\Leftrightarrow (A^*, B^*) \text{ est observable}
 \end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned}
 (A, C) \text{ observable} &\Leftrightarrow \text{rg}(\mathcal{O}) = \text{rg} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \\
 &\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^* = \text{rg}(C^* \ A^*C^* \ \dots \ (A^{n-1})^* C^*) = n \\
 &\Leftrightarrow (A^*, C^*) \text{ est contrôlable.}
 \end{aligned}$$

■

Le système dual au système (2.0.1) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^*x(t) + C^*u(t) & u(t) \in \mathbb{R}^p \\ y(t) = B^*x(t) & y(t) \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Chapitre 3

Observateurs pour les systèmes linéaires

3.1 Introduction

Comme nous l'avons souligné avant, l'automatisation des procédés d'épuration biologique se heurte à un grand obstacle qui est la difficulté de mesurer les variables chimiques ou biologiques dans le bioréacteur à cause du manque de capteurs performants, leurs coûts élevés quand ils existent, et le temps que ça prend pour mesurer certaines variables.

Les mesures possibles se résument souvent dans des facteurs physico-chimiques tels que : température, pression, débit, pH, composition gazeuse,... Tandis que les mesures les plus difficiles et qui sont aussi les plus intéressantes, se trouvent être celles des variables biochimiques telles que : concentration en biomasse, concentration en substrat,....

Dès lors, nous essayons de développer d'autres capteurs alternatifs pour faire face à ces difficultés. Des capteurs, dénommés *capteurs logiciels* ou *observateurs*, qui utilisent un compromis entre la connaissance à priori du procédé, transcrite sous forme de modèle, et l'information partielle de l'état réel du système, fournie par les mesures disponibles.

Dans le chapitre précédent, on s'est assuré de l'observabilité de notre système (2.0.1), c'est à dire qu'on est sûr qu'on peut déterminer l'état de notre système sur un intervalle de temps à partir de la connaissance de sa sortie et de son entrée sur cet intervalle, on va dans l'étape suivante, reconstruire concrètement cet état.

3.2 Les observateurs

N'ayant accès à la mesure que d'une partie de l'état, on va essayer d'observer (estimer) cet état en entier en utilisant un autre système dynamique, lié au premier au moyen des sorties mesurées, et qu'on appelle *observateur*.

Il tentera de reconstituer la variable d'état $x(t)$ du premier système en fournissant, comme sortie, une estimation $\hat{x}(t)$ qui doit vérifier :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$$

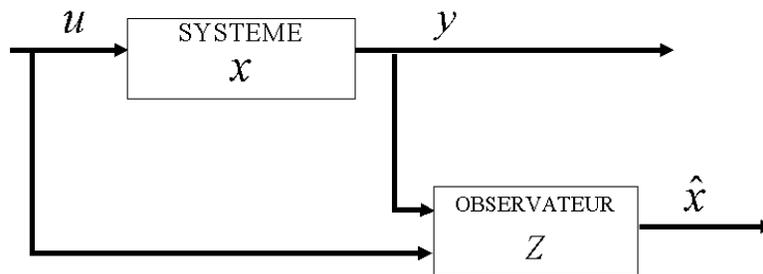


Figure 3.2.1 : Principe de l'observateur

Définition 3.2.1 *Considérons un système de la forme (2.0.1).*

On appelle observateur pour ce système un système auxiliaire qui lui est couplé. Il prend la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Ky(t) + Du(t) & t \geq 0, z(0) = z_0 \\ \hat{x}(t) = Wz(t) + Vy(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

avec : $F \in M_{r \times r}(\mathbb{R})$, $K \in M_{r \times p}(\mathbb{R})$, $D \in M_{r \times m}(\mathbb{R})$, $V \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, $W \in M_{n \times r}(\mathbb{R})$

et le système doit vérifier :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$$

c'est à dire que l'erreur d'estimation $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ doit converger vers 0.

La première équation différentielle ainsi que le nombre r (dimension du vecteur $z(t)$) sont respectivement l'équation et la dimension de l'observateur.

La deuxième équation est la sortie de l'observateur qui est l'estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$, donnée par l'observateur.

La condition initiale de l'observateur z_0 est choisie au hasard.

On cherche souvent, en plus de la condition précédente, à régler la vitesse de décroissance de l'erreur d'estimation. Expliquons pourquoi sur un exemple simple :

Exemple 3.2.1 *Soit le système linéaire :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

avec A une matrice stable, c'est-à-dire que l'état $x(t)$ tend vers l'état d'équilibre du système qui est l'origine ici. La condition initiale est inconnue.

On peut construire un observateur trivial en recopiant simplement le système, on obtient alors un observateur sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) & z(0) = z_0 \\ \hat{x}(t) = z(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 = z_0$$

On voit bien que l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ suit la même dynamique, imposée par la matrice A :

$$\dot{e}(t) = Ae(t)$$

et donc elle tend aussi vers 0.

Dans cet exemple on a utilisé seulement le fait que la dynamique du système est stable pour pouvoir observer l'état d'équilibre final, et seulement lui, car $\hat{x}(t)$ n'est une "bonne estimation" ($e(t) \rightarrow 0$) de $x(t)$ que quand ce dernier tend vers l'équilibre, puisque l'observateur et le système observé ont même dynamique.

Donc on aimerait bien pouvoir régler la vitesse de convergence de l'erreur pour reconstruire (observer) l'état plus rapidement que la dynamique du système.

Cet exemple dévoile une notion plus faible que celle de l'observabilité appelée *déTECTABILITÉ* ou *observabilité asymptotique* (voir définition 3.2.3).

3.2.1 Observateur de LUENBERGER

David LUENBERGER est le premier à avoir introduit cette notion d'observateur en 1964, ce qui fait que souvent on appelle certains observateurs : "OBSERVATEURS DE LUENBERGER".

Pour LUENBERGER, tout système contrôlé par les sorties de notre système étudié (2.0.1), c'est à dire un système ayant pour contrôle ou entrée les sorties $y(t)$ du système (2.0.1), peut-être considéré comme un observateur pour ce système.

Prenons, dans la définition générale (3.2.1), comme cas particulier :

$$F = A - KC, \quad D = B, \quad \text{et } V = 0, \quad W = Id$$

on a alors l'observateur de dimension n :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A - KC)z(t) + Ky(t) + Bu(t) & t \geq 0, \quad z(0) = z_0 \\ \hat{x}(t) = z(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

ce qui nous conduit à l'OBSERVATEUR DE LUENBERGER :

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(t) - K(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (3.2.2)$$

qui est une copie de l'équation différentielle du système initial (2.0.1) avec un terme en plus (un terme de correction) qui représente la différence entre les mesures estimées $C\hat{x}(t)$ et les mesures réelles $y(t)$, multipliée par une matrice K appelée *matrice de gains*.

Nous avons un peu précipité les chose en donnant à l'équation (3.2.2) le qualificatif d'observateur, sans vérifier que l'erreur d'estimation converge bien vers 0. vérifions le maintenant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) &= A(\hat{x}(t) - x(t)) - K(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ &= A(\hat{x}(t) - x(t)) - KC(\hat{x}(t) - x(t)) \\ &= (A - KC)(\hat{x}(t) - x(t)) \end{aligned}$$

La dynamique de l'erreur est décrite donc par l'équation: $\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$ qui a pour solution:

$$e(t) = e^{(A-KC)t}e(0)$$

avec $e(0)$ l'erreur (normalement inconnue) à l'instant $t = 0$.

Cette erreur ne tend vers 0 quand t tend vers l'infini, que si, et seulement si les valeurs propres de $A - KC$ sont à parties réelles strictement négatives (c'est à dire $A - KC$ est une matrice stable). C'est justement le rôle assigné à la matrice de gains K : faire de $A - KC$ une matrice stable, puisque les matrices A et C sont fixées par le système initial. Donc, il nous faut choisir la matrice K appropriée, et l'équation (3.2.2) mérite ainsi son qualificatif d'observateur.

Théorème 3.2.1 *Si la paire (A, C) est observable, alors on peut choisir une matrice de gains K pour placer arbitrairement les valeurs propres de $A - KC$. En conséquence, tout système (2.0.1) observable admet un observateur du type (3.2.2).*

Preuve. Le système (2.0.1) étant observable, remplaçons-le par son compagnon observable. En gardant les mêmes notations que dans la section 2.3 et en se mettant dans les mêmes conditions i.e. un système à mono-sortie ($B \in M_{n \times 1}$), on trouve la dynamique de l'erreur :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = (\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C})\tilde{e}(t), \quad \text{où } \tilde{K} = P^{-1}K = \begin{pmatrix} \tilde{k}_n \\ \vdots \\ \tilde{k}_1 \end{pmatrix}$$

et avec :

$$(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{k}_n - \alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{k}_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{k}_2 - \alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\tilde{k}_1 - \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Comme $\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C} = P^{-1}(A - KC)P$ alors $\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}$ et $A - KC$ ont le même polynôme caractéristique dont les coefficients sont donnés par la dernière colonne de $\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}$ (revoir la section 2.3).

$$\chi_{\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}}(s) = \chi_{A - KC}(s) = \det(sI - \tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C}) = s^n + (\tilde{k}_1 + \alpha_1)s^{n-1} + \cdots + (\tilde{k}_n + \alpha_n)$$

Le CRITÈRE DE ROUTH (Annexe D ainsi que : [21], [2]) est suffisant pour nous permettre de choisir des \tilde{k}_i tels que ce polynôme caractéristique ait des racines à parties réelles strictement négatives, puisque les \tilde{k}_i sont présent dans tous les coefficients du polynôme excepté le premier qui est positif. Donc nous avons :

$$s^n + (\tilde{k}_1 + \alpha_1)s^{n-1} + \cdots + (\tilde{k}_n + \alpha_n) = (s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)$$

avec λ_i pour $i = 1..n$ des complexes à parties réelles strictement négatives. En choisissant les \tilde{k}_i à l'aide du CRITÈRE DE ROUTH on déduira les valeurs propres λ_i , ou bien en fixant les valeurs propres λ_i d'une manière arbitraire, on déduira la matrice \tilde{K} . ■

Remarque 3.2.1 *Le théorème reste valable pour le cas multi-sorties où $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ voir [2].*

Définition 3.2.2 On dit que (3.2.1) est un observateur exponentiel si, pour tout λ positif, on peut régler le gain K tel que :

$$\forall (x_0, z_0), \quad \forall t > 0, \quad \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| \quad (3.2.3)$$

Remarque 3.2.2 Du théorème 3.2.1 l'OBSERVATEUR DE LUENBERGER est alors un observateur exponentiel, puisque la liberté de choisir la matrice K nous permet de fixer les valeurs propres de $A - KC$ de manière arbitraire et donc de fixer n'importe quel $\lambda > 0$ tel que $\lambda \leq \inf\{\operatorname{Re}(\mu), \mu \in \sigma(A - KC)\}$, où $\sigma(A - KC)$ est l'ensemble des valeurs propres de $A - KC$, ce λ qui vérifiera (3.2.3).

Définition 3.2.3 On dit que la paire (A, C) ou que le système (2.0.1) est détectable s'il existe une matrice K telle que la matrice $A - KC$ soit stable. On a le test de détectabilité suivant [11] :

$$(A, C) \text{ détectable} \Leftrightarrow \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mu I - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad \forall \mu \text{ tel que } \operatorname{Re}(\mu) \geq 0$$

Remarque 3.2.3 Donc si (A, C) est détectable alors le système (3.2.2) est bien un observateur et la réciproque est aussi vraie.

Du théorème 3.2.1 on déduit donc que :

$$(A, C) \text{ observable} \implies (A, C) \text{ détectable}$$

Vu le théorème 3.2.1, on serait tenté de fixer les valeurs propres de $A - KC$ le plus loin possible du côté gauche du plan complexe pour faire décroître l'erreur d'estimation le plus rapidement possible, or ceci conduit à une sensibilité de l'observateur aux perturbations (les bruit de mesures par exemple). Il faut trouver donc un compromis entre stabilité et précision [2].

Exemple 3.2.2 Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (3.2.4a)$$

ce système est observable puisque :

$$\operatorname{rg}(\mathcal{O}) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Un observateur de Luenberger pour ce système a la forme suivante :

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) - K \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) - y(t) \right), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

ou encore :

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (\hat{x}_1(t) - x_1(t)), \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (3.2.5)$$

avec $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$, $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) = x_1(t)$.

On a pris $\hat{x}(0) = 0$ comme condition initiale mais ce n'est pas restrictif.

La dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right) e(t) \\ &= \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 - k_2 & -1 \end{pmatrix} e(t) \end{aligned}$$

qui a pour solution :

$$e(t) = e^{\begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 - k_2 & -1 \end{pmatrix} t} e(0)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 - k_2 & -1 \end{pmatrix} t} = 0 \text{ si, et seulement si : } \forall \lambda \text{ valeur propre de } \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 - k_2 & -1 \end{pmatrix},$$

alors $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Donc, le polynôme caractéristique de $A - KC$ étant :

$$\chi_{A-KC}(s) = \det(sI - A + KC) = s^2 + (k_1 + 1)s + k_1 + k_2 + 1$$

le CRITÈRE DE ROUTH nous fournit les conditions nécessaires et suffisantes suivantes :

$$\begin{aligned} k_1 + 1 &> 0 \\ k_1 + k_2 + 1 &> 0 \end{aligned}$$

pour que le polynôme précédent n'ait que des valeurs propres à parties réelles strictement négatives.

Donc n'importe quels k_1, k_2, k_3 vérifiant ces deux conditions, nous donneront des valeurs propres à parties réelles strictement négatives, et on a déterminé notre matrice des gains K .

On peut aussi commencer par choisir d'abord les valeurs propres qu'on veut avoir. Prenons par exemple $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$. Donc:

$$\begin{aligned}\chi_{A-KC}(s) &= s^2 + (k_1 + 1)s + k_1 + k_2 + 1 \\ &= (s + 1 - i)(s + 1 + i) \\ &= s^2 + 2s + 2\end{aligned}$$

par identification, on a : $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$ (ils vérifient bien les deux conditions précédentes), et on a notre matrice des gains $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notre observateur s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) - y(t) \right), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y(t), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \text{ou bien } \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = -\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) + x_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = -\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t) + u(t) \end{cases}, \quad \hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = 0\end{aligned}$$

L'équation de l'erreur ayant pour solution :

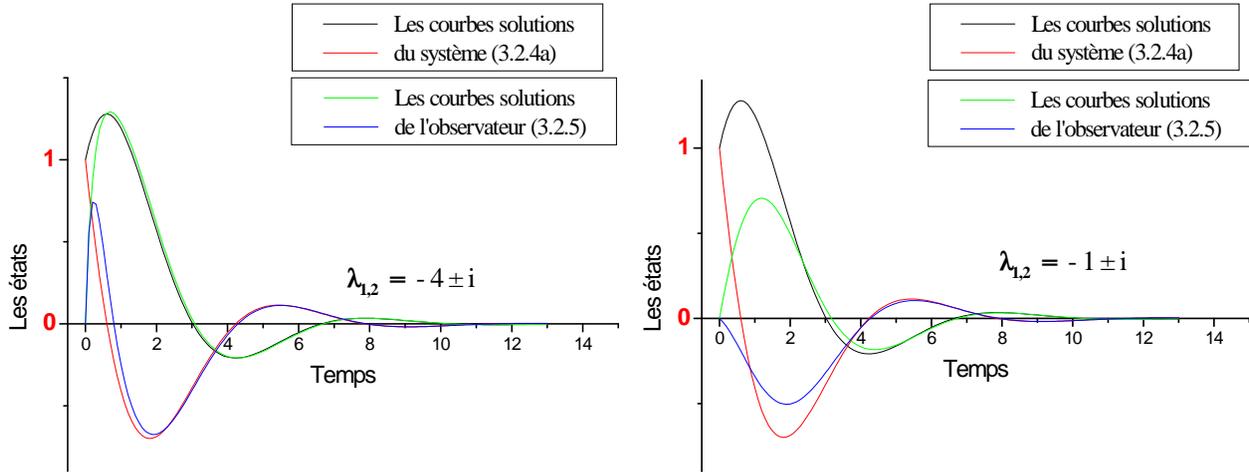
$$\begin{aligned}e(t) &= e^{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} t} e(0) \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} e(0),\end{aligned}$$

elle tend vers 0 pour toute condition initiale $e(0)$.

Remarque 3.2.4 Enfin remarquons que si nous initialisons notre observateur avec la vraie valeur initiale i.e. $e(0) = \hat{x}(0) - x(0) = 0$, alors nous avons pour tout $t \geq 0$ $\hat{x}(t) = x(t)$.

Nous pouvons voir sur les figures qui suivent les courbes solutions du système étudié (3.2.4a), ainsi que les courbes solutions de l'observateur de LUENBERGER (3.2.5) avec deux matrices de gains différentes pour deux valeurs propres différentes choisies arbitrairement. On a pris comme conditions initiales arbitraires pour l'observateur (3.2.5) : $\hat{x}(0) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(0) \\ \hat{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et on s'est aussi fixé des conditions initiales pour le système (3.2.4a), dont les conditions initiales sont en réalité inconnues mais pour tracer les solutions on a besoins

de ces conditions initiales qui sont : $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remarque qu'on a pris des conditions initiales $\hat{x}(0)$, $x(0)$ différentes pour rester dans le cas général où on ne connaît pas les vraies conditions initiales.



Solutions pour valeurs propres $\tilde{\lambda}_{1,2} = -4 \pm i$. Solutions pour valeurs propres $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.

Le gain correspondant aux valeurs propres $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ vaut : $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et celui correspondant aux valeurs propres $\tilde{\lambda}_{1,2} = -4 \pm i$ vaut : $\tilde{K} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. On remarque qu'avec le meilleur gain \tilde{K} , on a une convergence plus rapide des solutions de l'observateur (3.2.5) (les courbes en **vert** et en **bleu**) vers les solutions du système (3.2.4a) (les courbes en **noir** et en **rouge**) que la convergence avec le gain K . Le gain \tilde{K} est meilleur que le gain K parce qu'il correspond à des valeurs propres plus négatives.

3.2.2 Système linéaire à une injection de sortie près

Hormis les systèmes linéaires pour lesquels on sait construire des observateurs, il existe un cas particulier de systèmes non-linéaires pour lesquels on sait aussi construire des observateurs, c'est le cas des systèmes avec une linéarité qui dépend seulement de la sortie $y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \Phi(t, y(t)) + Bu \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

avec Φ une fonction non-linéaire (connue) à valeurs dans \mathbb{R}^n lipschitzienne par rapport à y . On peut alors construire pour ce système un observateur "de type LUENBERGER" :

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + \Phi(t, y(t)) + Bu - K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

L'erreur d'estimation est alors

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$$

avec une convergence arbitraire si la paire (A, C) est observable.

Ce type de système apparaît souvent dans les modèles biologiques.

3.2.3 L'observateur réduit

D'après la définition de l'observateur, le vecteur des états estimés peut être de dimension différente de celle du vecteur d'état du système initial, l'observateur réduit est donc un observateur de dimension inférieure à celle du système initial, il exploite les mesures disponibles mais n'estime que le reste de l'état qui n'est pas mesuré, son intérêt est qu'il évite la redondance des mesures.

Soit le système (2.0.1) et supposons que $rg(C) = p < n$. Donc l'équation de la sortie représente p équations algébriques linéairement indépendantes des n inconnues des variables d'état $x(t)$. Notre but est de construire un observateur d'ordre réduit $n - p$ pour estimer les $n - p$ variables restantes.

La méthode pour obtenir cet observateur n'est pas unique, en voici une :

Soit une matrice $C_1 \in M_{(n-p) \times p}(\mathbb{R})$ telle que :

$$rg \begin{pmatrix} C \\ C_1 \end{pmatrix} = n$$

Soit $h(t) \in \mathbb{R}^{(n-p)}$ tel que :

$$h(t) = C_1 x(t) \tag{3.2.6}$$

sachant que :

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.2.7}$$

on alors :

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C_1 \end{pmatrix} x(t) \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} C \\ C_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$$

si on connaît le vecteur $h(t)$, alors on peut déterminer l'état du système $x(t)$.

On va donc estimer le vecteur $h(t)$ à l'aide d'un observateur de même dimension c'est à dire d'ordre $n - p$.

Soit $L_1 \in \mathbb{R}^p$, $L_2 \in \mathbb{R}^{(n-p)}$ telle que :

$$\begin{pmatrix} C \\ C_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix}$$

donc :

$$x(t) = L_1 y(t) + L_2 h(t) \quad (3.2.8)$$

Pour construire un observateur de LUENBERGER pour estimer le vecteur $h(t)$, il nous faut d'abord son équation dynamique, laquelle est obtenue de (3.2.6), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= C_1 \dot{x}(t) \\ &= C_1 A x(t) + C_1 B u(t) \\ &= C_1 A (L_2 h(t) + L_1 y(t)) + C_1 B u(t) \\ &= C_1 A L_2 h(t) + C_1 A L_1 y(t) + C_1 B u(t) \end{aligned}$$

il nous faut maintenant des sorties (les mesures), or les seules sorties qu'on a sont celles de l'équation (3.2.7), malheureusement ces sorties ne contiennent aucune information concernant le vecteur $h(t)$, néanmoins en différentiant la formule (3.2.7) on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= C \dot{x}(t) \\ &= C A x(t) + C B u(t) \\ &= C A (L_2 h(t) + L_1 y(t)) + C B u(t) \\ &= C A L_2 h(t) + C A L_1 y(t) + C B u(t) \end{aligned}$$

qui contient bien des informations explicites sur $h(t)$.

Donc un observateur de LUENBERGER pour le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = C_1 A L_2 h(t) + C_1 A L_1 y(t) + C_1 B u(t) \\ \dot{y}(t) = C A L_2 h(t) + C A L_1 y(t) + C B u(t) \end{cases}$$

s'écrit :

$$\dot{\hat{h}}(t) = C_1 A L_2 \hat{h}(t) + C_1 A L_1 y(t) + C_1 B u(t) - K_1 (\dot{\hat{y}}(t) - \dot{y}(t)) \quad (3.2.9)$$

où

$$\dot{\hat{y}} = C A L_2 \hat{h}(t) + C A L_1 y(t) + C B u(t)$$

et $K_1 \in M_{(n-p) \times p}(\mathbb{R})$ est un gain qu'on peut ajuster pour assurer la convergence de l'observateur.

Pour éviter d'utiliser la dérivée $\dot{y}(t)$, on introduit le changement de variables suivant :

$$\hat{g} = \hat{h} - K_1 y$$

on a alors l'observateur d'ordre $n - p$ du vecteur g suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{g}} &= \dot{\hat{h}} - K_1 \dot{y} \\ &= C_1 AL_2 \dot{\hat{h}} + C_1 AL_1 y + C_1 Bu - K_1 (\dot{\hat{y}} - \dot{y}) - K_1 \dot{y} \\ &= C_1 AL_2 \dot{\hat{h}} + C_1 AL_1 y + C_1 Bu - K_1 \dot{\hat{y}} \\ &= C_1 AL_2 \dot{\hat{h}} + C_1 AL_1 y + C_1 Bu - K_1 (CAL_2 \dot{\hat{h}} + CAL_1 y + CBu) \\ &= C_1 AL_2 (\hat{g} + K_1 y) + C_1 AL_1 y + C_1 Bu - K_1 CAL_1 y - K_1 CAL_2 (\hat{g} + K_1 y) - K_1 CBu \\ &= A_g \hat{g} + K_g y + B_g u \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_g &= C_1 AL_2 - K_1 CAL_2, \quad B_g = C_1 B - K_1 CB \\ K_g &= C_1 AL_2 K_1 + C_1 AL_1 - K_1 CAL_1 - K_1 CAL_2 K_1 \end{aligned}$$

Pour le choix de K_1 , on calcul l'erreur d'estimation :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{g}}(t) - \dot{g}(t) &= \dot{\hat{g}}(t) - \dot{h} + K_1 \dot{y} \\ &= A_g \hat{g} + K_g y + B_g u - C_1 AL_2 h(t) - C_1 AL_1 y(t) - C_1 Bu(t) \\ &\quad + K_1 (CAL_1 y(t) + CAL_2 h(t) + CBu(t)) \\ &= (C_1 AL_2 - K_1 CAL_2) \hat{g} + (C_1 AL_2 K_1 - K_1 CAL_2 K_1) y + (K_1 CAL_2 - C_1 AL_2) h \\ &= (C_1 AL_2 - K_1 CAL_2) \hat{g} - C_1 AL_2 (h - K_1 y) + K_1 CAL_2 (h - K_1 y) \\ &= (C_1 - K_1 C) AL_2 (\hat{g}(t) - g(t)) \end{aligned}$$

La solution de cette équation est :

$$\hat{g}(t) - g(t) = e^{(C_1 - K_1 C) AL_2 t} (\hat{g}(0) - g(0))$$

qui converge vers 0 si, et seulement si $(C_1 - K_1 C) AL_2$ est une matrice stable. Cette stabilité est garantie sous la condition présentée ci-dessous :

En effet, reprenons les notations (3.2.6) et (3.2.7) que nous pouvons considérer comme changement de variables ainsi :

$$\begin{pmatrix} y_n(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C_1 \end{pmatrix} x(t)$$

en utilisant la formule (3.2.8), nous arrivons à la formulation du système (2.0.1) dans les nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{y}_n(t) \\ \dot{h}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\dot{x}(t) \\ C_1\dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CAL_1 & CAL_2 \\ C_1AL_1 & C_1AL_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n(t) \\ h(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} CB \\ C_1B \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = C \begin{pmatrix} C \\ C_1 \end{pmatrix}^{-1} x(t) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n(t) \\ h(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *Le système (3.2.10) est détectable si, et seulement si la paire (C_1AL_2, CAL_2) est détectable.*

Preuve. En utilisant le test de la détectabilité (Voir définition 3.2.3), on a :

$$\begin{aligned} \text{Le système (3.2.10) est détectable} &\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} \mu I - CAL_1 & -CAL_2 \\ -C_1AL_1 & \mu I - C_1AL_2 \\ I_p & 0 \end{pmatrix} = n \quad \forall \mu ; \text{Re}(\mu) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} -CAL_2 \\ \mu I - C_1AL_2 \end{pmatrix} = n - p \quad \forall \mu ; \text{Re}(\mu) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{La paire } (C_1AL_2, CAL_2) \text{ est détectable.} \end{aligned}$$

■

Donc sous la condition de détectabilité du système (3.2.10), $\exists K_1$ tel que $C_1AL_2 - K_1CAL_2$ est stable, et donc la convergence de l'erreur est assurée.

Remarque 3.2.5 *Si nous imposons que le système (3.2.10) soit observable, alors nous pouvons fixer la matrice K_1 de manière arbitraire pour avoir une convergence de l'erreur plus rapide [18].*

Enfin l'estimation de l'état $x(t)$ se fera à l'aide de la formule (3.2.8) :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= L_1 y(t) + L_2 \hat{h}(t) \\ &= L_1 y(t) + L_2 (\hat{g}(t) + K_1 y(t)) \\ &= L_2 \hat{g}(t) + (L_1 + L_2 K_1) y(t) \end{aligned}$$

Exemple 3.2.3 Reprenons l'exemple (3.2.2), où le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

avait pour observateur (de dimension complète) de LUENBERGER :

$$\frac{d\hat{x}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y(t), \quad \hat{x}(0) = 0$$

Construisons un observateur réduit pour ce système.

L'équation des sorties a pour matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{rg}(C) = 1 < 2$, soit alors une matrice $C_1 \in M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ telle que : $\text{rg} \begin{pmatrix} C \\ C_1 \end{pmatrix} = 2$. La matrice $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient parfaitement.

Soit un vecteur $h \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\begin{aligned} h(t) &= C_1 x(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} x(t) &= L_1 y(t) + L_2 h(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(t) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant estimer le vecteur $h(t)$. Le système suivant contient l'équation différentielle de $h(t)$ et l'équation des mesures:

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = C_1 A L_2 h(t) + C_1 A L_1 y(t) + C_1 B u(t) \\ \dot{y}(t) = C A L_1 y(t) + C A L_2 h(t) + C B u(t) \end{cases}$$

L'observateur réduit pour ce système est :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{h}}(t) &= C_1 A L_2 \hat{h}(t) + C_1 A L_1 y(t) + C_1 B u(t) - K_1 (\hat{y}(t) - y(t)) \\ &= -\hat{h}(t) - y(t) + u(t) - K_1 (\hat{y}(t) - y(t)) \end{aligned}$$

avec $K_1 \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$ donc c 'est un scalaire, notons-le à partir de maintenant k .

Après le changement de variables :

$$\hat{g} = \hat{h} - ky$$

on se retrouve avec l'observateur réduit (débarrassé des dérivées) :

$$\dot{\hat{g}}(t) = A_g \hat{g}(t) + K_g y(t) + B_g u(t)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_g &= -1 - k, & B_g &= 1 \\ K_g &= -1 - k^2 \end{aligned}$$

Pour le choix de k , calculons l'erreur d'estimation :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{g}}(t) - \dot{g}(t) &= (C_1 - kC) AL_2 (\hat{g}(t) - g(t)) \\ &= -(k+1) (\hat{g}(t) - g(t)) \end{aligned}$$

La solution de cette équation est :

$$\hat{g}(t) - g(t) = e^{-(k+1)t} (\hat{g}(0) - g(0))$$

Donc pour $k > -1$, par exemple $k = 0$, nous avons :

$$\hat{g}(t) - g(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

L'observateur de dimension réduite :

$$\dot{\hat{g}}(t) = -\hat{g}(t) - y(t) + u(t), \quad \hat{g}(0) = \hat{h}(0) = 0$$

nous fournira une estimation $\hat{g}(t)$, qui nous servira à estimer le vecteur d'état complet $x(t)$:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= L_2 \hat{g}(t) + (L_1 + L_2 K_1) y(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{g}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y(t) \end{aligned}$$

Remarque 3.2.6 On s'est limité dans ce chapitre au cas linéaire, où la théorie de construction d'observateurs est bien développée, contrairement au cas nonlinéaire où les idées prédominantes se basent sur l'adaptation des techniques linéaires comme l'observateur de LUENBERGER étendu et le filtre de KALMAN étendu, ou bien sur des changement de coordonnées pour ces système comme l'observateur à grand gain ou à gain variable [9].

Chapitre 4

Observateurs pour systèmes avec incertitudes

4.1 Introduction

Les observateurs classiques qu'on a présentés dans le chapitre précédent supposent implicitement que le modèle utilisé est un "bon modèle", c'est à dire qu'il traduit assez fidèlement la réalité. Or on a vu à la section 1.5 que dans les procédés biologiques le modèle est souvent mal connu et peut même comporter des parties inconnues. On a alors ce qu'on appelle "des incertitudes". Pour les modèles biologiques basés sur les bilans de matière, par exemple, les incertitudes se situent souvent dans les vitesses des réactions qui sont décrites souvent de manière spéculative.

Comment se comporter alors face à ces obstacles?. Plusieurs méthodes ont été développées pour venir à bout de ces incertitudes : certaines éliminent les incertitudes et comptent sur la stabilité structurel du système (Observateur asymptotique), d'autres conservent les incertitudes et tentent, de diverses façons, de réduire leurs incidences sur l'estimation (Filtre de KALMAN [1]).

Une autre voie possible, parmi d'autres, consiste à borner supérieurement et inférieurement les incertitudes, et à en déduire une estimation supérieure et inférieure des variables à estimer, ce sont les observateurs par intervalles qu'on va présenter. Mais d'abord parlons des incertitudes :

4.2 Les incertitudes

Les incertitudes sont un problème inhérent aux bioprocédés en raison entre autre de la complexité spécifique aux aspects biologiques qui les caractérisent, contrairement aux procédés physiques ou chimiques qui sont assez bien maîtrisés. Les incertitudes peuvent apparaître à trois niveaux :

1. *Des incertitudes sur les entrées* : Elles peuvent avoir comme raison d'être la sensibilité du système aux facteurs extérieurs comme les activités humaines, le climat qui, dans le cas des stations d'épuration des eaux usées, sont sources de perturbations (incertitudes) sur l'entrée de l'affluent.
2. *Des incertitudes sur le modèle lui même* : Celles-ci sont engendrées par la complexité des bioprocédés et le manque de connaissances les concernant, elles apparaissent au moment de la modélisation (cinétique mal connue, paramètre indéterminé, . . .)
3. *Des incertitudes sur les sorties (les mesures effectuées)* : Comme il a été fait mention avant, une instrumentation faisant défaut ou des capteurs en ligne peu fiables sont sources de bruit de mesures.

Pour illustrer ces incertitudes, nous allons exposer un exemple typique des incertitudes affectant le modèle. Cet exemple a été rapporté dans [10].

Exemple 4.2.1 *Considérons une population de poissons structurée en âge : Larves, Juvéniles et Adultes. Le stock de chaque classe suit une dynamique décrite dans le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - m_1 x_1 + r(t, x_3) \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - m_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = \alpha_2 x_2 - m_3 x_3 - c(t) x_3 \\ y = x_3 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

avec : x_1 : La classe des larves, x_2 : La classe des juvéniles et x_3 : La classe des adultes.

$\alpha_i > 0$, $m_i > 0$ pour $i = 1 \dots 3$, sont respectivement : les taux de croissance et de mortalité.

Nous supposons que les naissances dans la classe x_1 sont causées par les seuls adultes de la classe x_3 avec une loi de reproduction : $r(t, x_3) = \frac{a(t)x_3}{b + x_3}$, $a(t) > 0$, $b > 0$. Le dernier paramètre $c(t)$ représente un effort de pêche sur les adultes.

Enfin la dernière équation indique que les seuls observations possibles en temps réel ne peuvent être effectuées que sur le stock des adultes (ce qui est biologiquement raisonnable :

les adultes, plus grand sont plus facile à observer) $y(t) = x_3(t) \quad \forall t \geq 0$. Ce modèle peut être appliqué à l'aquaculture par exemple.

Sachant l'évolution des larves au stade juvénile et ensuite au stade adulte, la connaissance des stocks x_1 et x_2 nous permettrait de prédire le futur stock x_3 , comme une possible extinction par exemple. Le problème est donc le suivant :

Comment estimer au temps présent t les stocks x_1 et x_2 à partir des observations $\{y(\tau) = x_3(\tau)\}_{\tau \leq t}$?

Si les paramètres $(\alpha_i, m_i, a(\cdot), b, c(\cdot))$ sont connus alors un observateur de type LUENBERGER avec une convergence arbitraire est très bien adapté pour estimer les stocks x_1 et x_2 .

En effet : Le système (4.2.1) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \Phi(t, y(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\text{avec : } A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - m_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 - m_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -m_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \Phi(t, y(t)) = \begin{pmatrix} r(t, y(t)) \\ 0 \\ -c(t)y(t) \end{pmatrix}$$

la nonlinéarité par rapport à la sortie $y(t)$ se trouvant dans l'expression de la loi de reproduction $r(t, y(t))$. Nous avons alors un système linéaire à une injection de sortie près.

Ce système est observable puisque :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 & -m_3 \\ -\alpha_1\alpha_2 & -\alpha_2(\alpha_2 + m_2 + m_3) & m_3^2 \end{pmatrix}$$

est de rang complet 3. Un observateur de type LUENBERGER avec convergence arbitraire pour ce système est donc :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \Phi(t, y(t)) - K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

où $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$, et dans une forme plus explicite :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\alpha_1\hat{x}_1 - m_1\hat{x}_1 + r(t, y(t)) - k_1(\hat{x}_3 - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_1\hat{x}_1 - \alpha_2\hat{x}_2 - m_2\hat{x}_2 - k_2(\hat{x}_3 - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_2\hat{x}_2 - m_3\hat{x}_3 - c(t)y(t) - k_3(\hat{x}_3 - y(t)) \end{cases}$$

Pour la convergence arbitraire, on remarquera que la dynamique de l'erreur :

$$\dot{e}(t) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - m_1 & 0 & -k_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 - m_2 & -k_2 \\ 0 & \alpha_2 & -m_3 - k_3 \end{pmatrix} e(t)$$

possède une matrice dont les valeurs propres peuvent être fixés arbitrairement pour assurer la convergence de l'erreur et ceci grâce au coefficients k_1, k_2, k_3 (revoir l'exemple 3.2.2).

Malheureusement, dans des situations plus réalistes, beaucoup d'incertitudes peuvent apparaître :

- La fonction de reproduction $r(t, x_3)$ n'est pas très bien connue. Par exemple le paramètre $a(t)$ est incertain (difficile à obtenir).
- L'effort de pêche $c(t)$ est inconnu à cause du manque de données officielles ou bien à cause d'une pêche illégale.

Une méthode pour venir à bout de ces incertitudes consiste à les considérer comme des variables aléatoires, alors l'état du système est aussi une variable aléatoire, et le modèle peut être considéré comme un processus stochastique, et le problème d'observation devient alors un problème de filtrage. Malheureusement, à l'exception du cas d'un bruit Gaussien additif dans les équations dynamiques, la théorie du filtrage est difficile. Plus encore, le fait même de supposer l'incertitude comme étant aléatoire est souvent injustifiable [9].

Fort heureusement, il existe d'autres méthodes pour neutraliser l'effet des incertitudes.

Pour chaque type d'incertitude on adoptera une méthode adéquate dont nous présentons quelques unes :

4.3 L'observateur asymptotique

Quand l'incertitude se trouve être une cinétique de réaction comme dans l'exemple précédent, qui est une incertitude totalement inconnue sur le modèle, on peut l'assimiler alors à une entrée inconnue, du coup on peut utiliser les résultats sur les observateurs à entrées inconnues [7]. Le principe de ces observateurs est de se dispenser de la partie inconnue du modèle pour construire l'observateur.

Reprenons le modèle de bilan de masse de l'aérateur (1.5.1). Ce modèle contient les cinétiques des différentes réactions $K\Phi_a(\cdot)$, il nous faut nous en débarrasser. Pour simplifier

le modèle nous allons supposer qu'il n'y a pas de recirculation des boues c'est à dire $q_r = 0$.

$$\frac{d\xi_a}{dt} = K\Phi_a(\xi_a) - D\xi_a + D\xi_{in} + U \quad (4.3.1)$$

rappelons que : $K \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, $\Phi_a \in \mathbb{R}^m$.

Supposons qu'une partie ξ_{a1} , de dimension l , de l'état ξ_a est mesurée, et notons la partie de l'état non mesurée par ξ_{a2} . Elle est de dimension $n - l$. Nous ordonnerons les composants de l'état pour avoir $\xi_a = \begin{pmatrix} \xi_{a1} \\ \xi_{a2} \end{pmatrix}$. Nous supposons aussi que d'autres mesures supplémentaires existent, et nous résumons le tout sur le vecteur des mesures disponibles suivant :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

avec :

- y_1 : L'ensemble des l variables d'état mesurées, $y_1 = \xi_{a1} \in \mathbb{R}^l$.
- y_2 : Représente le flux gazeux mesuré, $y_2 = U(\xi) \in \mathbb{R}^n$.
- y_3 : Représente les autres mesures (pH, Pression,...) pour lesquelles la relation avec l'état est connue, $y_3 = h(\xi) \in \mathbb{R}^r$.

Remarque 4.3.1 *Les mesures y_2 et y_3 sont effectuées sur des parties du système autres que les variables d'état, c'est à dire que le flux gazeux et les mesures de pH, pression,... ne sont pas des composantes du vecteur d'état ξ_a .*

Remarque 4.3.2 *Nous ne chercherons pas à savoir si le système est observable ou non, car l'étude de l'observabilité repose sur la description du système en entier, y compris les cinétiques, nous allons donc essayer d'exiger qu'une partie du système soit au moins détectable.*

Le système (4.3.1) peut être à présent réécrit en séparant la partie mesurée ($\xi_{a1} = y_1$) de celle qui ne l'est pas (ξ_{a2}):

$$\frac{d\xi_{a1}}{dt} = K_1\Phi_a(\xi_a) - D\xi_{a1} + D\xi_{in1} + U_1(\xi) \quad (4.3.2a)$$

$$\frac{d\xi_{a2}}{dt} = K_2\Phi_a(\xi_a) - D\xi_{a2} + D\xi_{in2} + U_2(\xi) \quad (4.3.2b)$$

avec : $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$, où : $K_1 \in M_{l \times m}(\mathbb{R})$ et $K_2 \in M_{(n-l) \times m}(\mathbb{R})$

$$\xi_{in} = \begin{pmatrix} \xi_{in1} \\ \xi_{in2} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } \xi_{in1}, U_1 \in \mathbb{R}^l \text{ et } \xi_{in2}, U_2 \in \mathbb{R}^{n-l}$$

Pour construire l'observateur asymptotique nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1

i) Il y a plus de quantités mesurées que de réactions : $l \geq m$.

ii) La matrice K_1 est de plein rang (Les colonnes de K_1 sont linéairement indépendantes).

L'hypothèse *1ii)* signifie qu'un vecteur Φ non nul ne peut pas annuler $K_1\Phi$ (les réactions ne peuvent pas se compenser les unes les autres au niveau des variables mesurées).

Sous l'hypothèse 1, la matrice K_1 admet un inverse à gauche (il n'est pas unique). Il existe donc une matrice $G \in M_{m \times l}(\mathbb{R})$ telle que :

$$GK_1 = I_m$$

Posons alors :

$$F = -K_2G$$

et considérons le changement de variables :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \xi_{a1} \\ \zeta_2 &= F\xi_{a1} + \xi_{a2} \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

les équations (4.3.2a) et (4.3.2b) se transforment en :

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1}{dt} &= K_1\Phi_a(T\zeta) - D\zeta_1 + D\zeta_{in1} + U_1(T\zeta) \\ \frac{d\zeta_2}{dt} &= -D(\zeta_2 - \zeta_{in2}) + FU_1(T\zeta) + U_2(T\zeta) \end{aligned}$$

avec :

$$T = \begin{pmatrix} I_{l \times l} & 0_{l, n-l} \\ -F & I_{n-l \times n-l} \end{pmatrix}, \zeta_{in2} = \begin{pmatrix} F & I_{n-l \times n-l} \end{pmatrix} \xi_{in}, \zeta_{in1} = \xi_{in1}$$

L'équation de ζ_2 peut alors être réécrite en utilisant la sortie y_2 :

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = -D(\zeta_2 - \zeta_{in2}) + My_2 \tag{4.3.4}$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} F & I_{n-l \times n-l} \end{pmatrix}$$

Remarque 4.3.3 *Le système (4.3.4) est un système linéaire à une injection de sortie près (sous section 3.2.2), la non-linéarité se trouvant dans l'expression de y_2 qui est une sortie mesurée.*

Nous allons maintenant construire un observateur asymptotique pour ce système, en recopiant simplement ses équations. Mais d'abord nous devons faire une deuxième hypothèse pour garantir la convergence de cet observateur.

Hypothèse 2

Nous supposons que le taux de dilution D reste constant et positif pour tout $t \geq 0$.

Pour le cas où D est variable, une autre condition peut être imposée [5].

Remarque 4.3.4 *La condition d'observabilité du système (4.3.4) n'étant pas possible à vérifier (aucune mesure n'est disponible), sa détectabilité, garanti par l'hypothèse 2, est suffisante pour assurer la convergence asymptotique de l'observateur.*

Lemme 4.3.1 *Sous l'hypothèse 2, la solution $\hat{\xi}_{a2}$ de l'observateur asymptotique suivant :*

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\zeta}_2}{dt} &= -D \left(\hat{\zeta}_2 - \zeta_{in2} \right) + My_2 \\ \hat{\xi}_{a2} &= \hat{\zeta}_2 - Fy_1\end{aligned}$$

converge asymptotiquement vers la solution ξ_{a2} du système réduit (4.3.2b).

Preuve.

Il est facile de voir que l'erreur d'estimation $e_2(t) = \hat{\xi}_{a2}(t) - \xi_{a2}(t) = \hat{\zeta}_2(t) - \zeta_2(t)$ vérifie l'équation :

$$\dot{e}_2(t) = -De_2(t)$$

dont la solution est :

$$e(t) = e(0)e^{-Dt}$$

qui, sous l'hypothèse 2, converge asymptotiquement vers 0 et ceci sans que l'on puisse ajuster la vitesse de convergence. ■

Remarque 4.3.5 *Cet observateur asymptotique est en boucle ouverte c'est à dire qu'il n'utilise pas de terme de correction entre les estimations et les mesures effectuées comme dans l'observateur de LUENBERGER, et pour cause il n'y a aucune mesure d'aucun composant du vecteur d'état du système réduit (4.3.2b). L'observateur asymptotique suppose donc que le modèle de bilan de matière est parfait, or des incertitudes peuvent apparaître sur les entrées ou les paramètres, on peut alors améliorer la robustesse de cet observateur en exploitant les mesures $y_3 = h(\xi)$. Pour plus de détails voir [5].*

Exemple 4.3.1 Prenons l'exemple d'une biomasse bactérienne (X) consommant du substrat (S) et métabolisant un produit (P) et ceci dans un aérateur. Le taux de croissance de ce micro-organisme $\Phi(\xi)$ est mal connu, nous le supposons alors complètement inconnu. Le modèle décrivant cet exemple est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = \Phi(\xi) - DX \\ \dot{S} = -k_1\Phi(\xi) - DS + DS_{in} \\ \dot{P} = k_2\Phi(\xi) - DP \end{cases}$$

avec S_{in} est l'entrée en substrat, k_1 et k_2 les coefficients de rendement.

Ce modèle a la même forme que (4.3.1) avec :

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ -k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \xi_{in} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{in} \\ 0 \end{pmatrix}, Q(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supposons que la partie de l'état qui est mesurée est la biomasse (X) c'est à dire $y_1 = X$. Notre objectif est donc d'estimer le substrat (S) et le produit (P) sans utiliser les cinétiques inconnues $\Phi(\xi)$.

Commençons par décomposer le système en partie mesurée et une autre non-mesurée:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \Phi(\xi) - DX \\ \begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{P} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \Phi(\xi) - D \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} S_{in} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De cette écriture nous déduisons :

$$\begin{aligned} K_1 &= 1, \xi_1 = X, \xi_{in1} = 0 \\ K_2 &= \begin{pmatrix} -k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix}, \xi_{in2} = \begin{pmatrix} S_{in} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'inverse de la matrice K_1 est $G = 1$, et nous posons $F = -K_2G = \begin{pmatrix} k_1 \\ -k_2 \end{pmatrix}$

Le changement de variables (4.3.3) nous conduit au système :

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1}{dt} &= \Phi(T\zeta) - D\zeta_1 \\ \frac{d\zeta_2}{dt} &= -D(\zeta_2 - \zeta_{in2}) \end{aligned}$$

avec :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 1 & 0 \\ k_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons enfin l'observateur asymptotique suivant, qui va estimer S et P :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\zeta}_2}{dt} &= -D (\hat{\zeta}_2 - \zeta_{in2}) \\ \hat{\xi}_2 &= \hat{\zeta}_2 - Fy_1 \end{aligned}$$

et plus explicitement, sachant que $\hat{\zeta}_2 = \begin{pmatrix} \hat{Z}_1 \\ \hat{Z}_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{Z}_1}{dt} = -D (\hat{Z}_1 - Z_{in1}) \\ \hat{Z}_1(0) = \hat{S}(0) + k_1 y_1(0) \\ \hat{S} = \hat{Z}_1 - k_1 y_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{Z}_2}{dt} = -D \hat{Z}_2 \\ \hat{Z}_2(0) = \hat{P}(0) - k_2 y_1(0) \\ \hat{P} = \hat{Z}_2 + k_2 y_1 \end{cases}$$

où $y_1(0) = X(0)$ est la mesure de la biomasse au temps $t = 0$. $Z_{in1} = S_{in}$, $\hat{S}(0)$ et $\hat{P}(0)$ sont les concentrations de substrat et de produit au temps $t = 0$, fixés au hasard.

4.4 Les observateurs par intervalles

Une propriété caractérisant souvent les incertitudes, apparaissant dans les modèles biologiques, est la possibilité de les borner avec des bornes connues a priori.

Le principe des observateurs par intervalles est d'estimer les bornes dynamiques garantissant les limites de variation des états non mesurés en s'appuyant entre autres sur les bornes connues des incertitudes. Ces observateurs fourniront à chaque instant une estimation des intervalles contenant avec certitude les valeurs inconnues des états non mesurés, à défaut de construire leurs valeurs numériques précises.

Bornes à priori sur les incertitudes $U \implies$ Bornes estimées des états non mesurés X

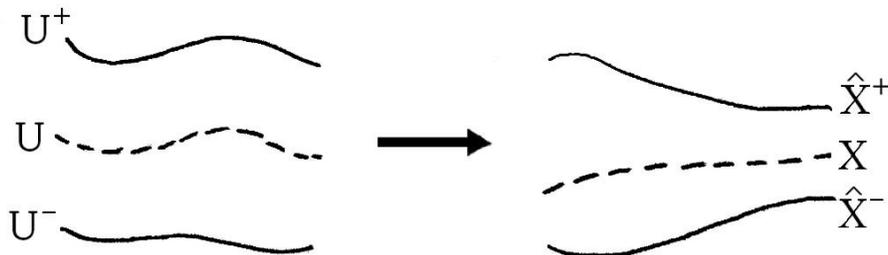


Figure 4.4.1 : Principe de l'estimation par intervalles.

Considérons le système linéaire générale suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ev(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.4.1)$$

où A, B, C, x, u, y sont comme dans (2.0.1), $E \in M_{n \times s}(\mathbb{R})$, et $v \in \mathbb{R}^s$ est la grandeur mal connue (l'incertitude), elle est néanmoins caractérisée par ses bornes supérieurs et inférieurs supposées connues:

$$Ev^-(t) \leq Ev(t) \leq Ev^+(t) \quad \forall t \geq 0$$

Remarque 4.4.1 *Les inégalités entre les vecteurs sont des inégalités entre chaque composants correspondants des vecteurs.*

Remarque 4.4.2 *L'incertitude peut se trouver aussi dans l'équation de la sortie c'est à dire :*

$$y(t) = Cx(t) + Jw(t)$$

avec :

$$w^-(t) \leq w(t) \leq w^+(t) \quad \forall t \geq 0$$

voir pour cela par exemple [17].

En se référant à la définition (3.2.1) de l'observateur, on construit un système auxiliaire au système (4.4.1), mais qui prendra la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dz^-}{dt}(t) = Fz^-(t) + Ky(t) + Du(t) + Hv^-(t) & z^-(0) = z_0^- \\ x^-(t) = Wz^-(t) + Vy(t) \\ \frac{dz^+}{dt}(t) = Fz^+(t) + Ky(t) + Du(t) + Hv^+(t) & z^+(0) = z_0^+ \\ x^+(t) = Wz^+(t) + Vy(t) \end{cases} \quad (4.4.2)$$

avec $z^-, z^+ \in \mathbb{R}^r$, $H \in M_{n \times s}(\mathbb{R})$, et $v^-, v^+ \in \mathbb{R}^s$. F, K, D, W, V sont comme dans le système (3.2.1).

Définition 4.4.1 *Le système (4.4.2) est un observateur par intervalles du système (4.4.1) si pour toute paire de conditions initiales $x_0^- \leq x_0^+$, il existe des bornes z_0^-, z_0^+ telles que le système couplé (4.4.1,4.4.2) vérifie :*

$$x^-(t) \leq x(t) \leq x^+(t) \quad \forall t \geq 0$$

Remarque 4.4.3 Les conditions initiales x_0^- , x_0^+ représentant des bornes supérieure et inférieure connues de l'état x_0 (on peut prendre un encadrement $[x_0^-, x_0^+]$ très large), on fixe les conditions initiales de l'observateur (4.4.2) z_0^- , z_0^+ en utilisant ses deux équations de sorties à l'instant $t = 0$.

On a construit ainsi deux observateurs, l'un donnera une sous-estimation $x^-(t)$ et l'autre une sur-estimation $x^+(t)$ de l'état du système $x(t)$. Le couplage de ces deux observateurs sera l'observateur par intervalles qui fournira un intervalle (dynamique) $[x^-(t), x^+(t)]$ contenant avec certitude l'état $x(t)$.

L'erreur d'estimation de cet observateur est la largeur de l'intervalle, plus elle est grande moins l'estimation est pertinente. On souhaite donc réduire cet intervalle autant que possible et le plus rapidement possible, sans exiger que l'erreur tende asymptotiquement exactement vers 0, comme dans un observateur classique, mais plutôt vers une largeur d'intervalle acceptable.

On peut maintenant ramener l'écriture de l'observateur par intervalles (4.4.2) à une écriture semblable à celle d'un observateur de LUENBERGER, à savoir :

$$\begin{cases} \frac{dx^-(t)}{dt} = Ax^-(t) + Bu(t) + Ev^-(t) - K(Cx^-(t) - y(t)) & x^-(0) = x_0^- \\ \frac{dx^+(t)}{dt} = Ax^+(t) + Bu(t) + Ev^+(t) - K(Cx^+(t) - y(t)) & x^+(0) = x_0^+ \end{cases} \quad (4.4.3a)$$

Calculons maintenant l'erreur inférieure $e^-(t)$, supérieure $e^+(t)$ et totale $e(t) = e^-(t) + e^+(t)$:

$$\begin{aligned} e^-(t) &= x(t) - x^-(t) \\ e^+(t) &= x^+(t) - x(t) \\ e(t) &= e^-(t) + e^+(t) \end{aligned}$$

elles vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{e}^-(t) &= (A - KC) e^-(t) + b^-(t) \\ \dot{e}^+(t) &= (A - KC) e^+(t) + b^+(t) \\ \dot{e}(t) &= (A - KC) e(t) + b(t) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} b^-(t) &= Ev(t) - Ev^-(t) \\ b^+(t) &= Ev^+(t) - Ev(t) \\ b(t) &= Ev^+(t) - Ev^-(t) \end{aligned}$$

donc $b^-(t)$, $b^+(t)$, $b(t)$ sont forcément positifs. On a alors le lemme suivant :

Lemme 4.4.1 *Si la matrice $A-KC$ est coopérative (c'est à dire : les éléments de la matrice sont positifs en dehors de la diagonale) alors :*

$$\begin{aligned} e^-(0) \geq 0 &\implies e^-(t) \geq 0 && \forall t \geq 0 \\ e^+(0) \geq 0 &\implies e^+(t) \geq 0 && \forall t \geq 0 \\ e(0) \geq 0 &\implies e(t) \geq 0 && \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Une définition générale de la coopérativité est donnée dans l'annexe E.

On déduit alors le théorème sur les observateurs par intervalles suivant :

Théorème 4.4.1 *Si on peut choisir un gain K tel que la matrice $A-KC$ soit coopérative, et si on a une estimation initiale :*

$$x^-(0) \leq x(0) \leq x^+(0)$$

alors (4.4.3a) est un observateur par intervalle pour (4.4.1).

Preuve. Ce théorème est une conséquence directe du lemme précédent, puisqu'on a :

$$e^-(0) = x(0) - x^-(0) \geq 0, \quad e^+(0) = x^+(0) - x(0) \geq 0$$

et donc :

$$\left. \begin{aligned} e^-(t) = x(t) - x^-(t) &\geq 0 \quad \forall t \geq 0 \\ e^+(t) = x^+(t) - x(t) &\geq 0 \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \right\} \implies x^-(t) \leq x(t) \leq x^+(t) \quad \forall t \geq 0$$

■

Théorème 4.4.2 *Si les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées, et si en plus la matrice $A-KC$ est stable et l'erreur totale sur l'incertitude est bornée c'est à dire :*

$$b(t) = Ev^+(t) - Ev^-(t) \leq B$$

où B est un vecteur positif constant, alors l'erreur totale $e(t) = x^+(t) - x^-(t)$ reste quand t tend vers l'infini dans un intervalle dont la largeur est plus petite que :

$$e_{\max} = -(A-KC)^{-1} B$$

en particulier, si des composants de e_{\max} sont nuls, alors les composants correspondants de $e(t)$ convergent vers zéro.

Pour la preuve de ce théorème nous allons utiliser une proposition de comparaison entre les solutions de deux systèmes d'équations différentielles [13] :

Soit, dans le cas général, les deux systèmes suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, t), & x(0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= g(y, t), & y(0) &= y_0\end{aligned}$$

où $f, g : U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont suffisamment régulières sur un domaine convexe $U \subset \mathbb{R}^n$.

On a alors le théorème de comparaison entre $x(t)$ et $y(t)$:

Proposition 4.4.1 *Si*

- $\forall s \in U, \forall t \geq 0, f(s, t) \leq g(s, t)$
- g est coopérative
- $x_0 \leq y_0$

Alors $x(t) \leq y(t)$ pour $t > 0$.

Preuve. Soit

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= (A - KC)e(t) + b(t) \\ \dot{e}_m(t) &= (A - KC)e_m(t) + B\end{aligned}$$

on a :

$$\forall s \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0 \quad (A - KC)s(t) + b(t) \leq (A - KC)s(t) + B$$

pour des conditions initiales identiques $e_0 = e_{m0}$, on a alors d'après la proposition précédente:

$$e(t) \leq e_m(t) \quad \forall t > 0$$

La largeur de l'intervalle $e(t)$ est donc bornée $\forall t > 0$ puisque $e_m(t)$ est borné en raison de l'entrée B fixée (donc bornée) et de la stabilité de la matrice $A - KC$ (voir La stabilité *Entrée Bornée Etat Borné* [2]).

D'un autre côté, $A - KC$ étant stable et donc inversible, on a :

$$\begin{aligned}
 e_m(t) &= e^{(A-KC)t} e_{m0} + \int_0^t e^{(A-KC)(t-s)} B ds \\
 &= e^{(A-KC)t} \left(e_{m0} + \int_0^t e^{-(A-KC)s} B ds \right) \\
 &= e^{(A-KC)t} \left(e_{m0} - \int_0^{-t} \left(I + (A-KC)w + (A-KC)^2 \frac{w^2}{2!} + (A-KC)^3 \frac{w^3}{3!} + \dots \right. \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. \left. (A-KC)^3 \frac{w^3}{3!} + \dots \right) B dw \right) \\
 &= e^{(A-KC)t} \left(e_{m0} - \left[w + (A-KC) \frac{w^2}{2!} + (A-KC)^2 \frac{w^3}{3!} + \right. \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. \left. (A-KC)^3 \frac{w^4}{4!} + \dots \right]_0^{-t} B \right) \\
 &= e^{(A-KC)t} \left(e_{m0} - (A-KC)^{-1} \left[(A-KC)(-t) + (A-KC)^2 \frac{(-t)^2}{2!} + \right. \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. \left. (A-KC)^3 \frac{(-t)^3}{3!} + \dots \right] B \right) \\
 &= e^{(A-KC)t} \left(e_{m0} - (A-KC)^{-1} [e^{-(A-KC)t} - I] B \right) \\
 &= e^{(A-KC)t} e_{m0} + e^{(A-KC)t} (A-KC)^{-1} B - (A-KC)^{-1} B \\
 &\quad \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} - (A-KC)^{-1} B \text{ puisque } (A-KC) \text{ est stable.}
 \end{aligned}$$

et donc $e(t)$ est inférieur asymptotiquement (terme à terme) à $e_{\max} = -(A-KC)^{-1} B$. ■

Exemple 4.4.1 Reprenons l'exemple 4.2.1, dans cet exemple nous avons calculé $A - KC$ qui valait :

$$A - KC = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - m_1 & 0 & -k_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 - m_2 & -k_2 \\ 0 & \alpha_2 & -m_3 - k_3 \end{pmatrix}$$

afin de vérifier les conditions imposées par le théorème 4.4.2, et sachant que $\alpha_i > 0, m_i > 0$ pour $i = 1..3$, on peut prendre par exemple $k_1 = k_2 = 0$ et $k_3 > 0$. Et on obtient que $A - KC$ est coopérative et stable.

Le terme non-linéaire étant $\Phi(t, x_3) = \begin{pmatrix} r(t, x_3) \\ 0 \\ -c(t)x_3 \end{pmatrix}$, on peut l'encadrer en utilisant les

bornes suivantes :

$$\begin{aligned}
 a^- &< a(t) < a^+ \implies \frac{a^- x_3}{b + x_3} < r(t, x_3) < \frac{a^+ x_3}{b + x_3} \\
 c^- &< c(t) < c^+ \implies -c^+ x_3 < -c(t)x_3 < -c^- x_3
 \end{aligned}$$

On a alors l'observateur par intervalle pour le système étudié suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1^- = -\alpha_1 x_1^- - m_1 x_1^- + \frac{a^- x_3}{b + x_3} \\ \dot{x}_2^- = \alpha_1 x_1^- - \alpha_2 x_2^- - m_2 x_2^- \\ \dot{x}_3^- = \alpha_2 x_2^- - m_3 x_3^- - c^+ x_3 - k_3 (x_3^- - y(t)) \\ \\ \dot{x}_1^+ = -\alpha_1 x_1^+ - m_1 x_1^+ + \frac{a^+ x_3}{b + x_3} \\ \dot{x}_2^+ = \alpha_1 x_1^+ - \alpha_2 x_2^+ - m_2 x_2^+ \\ \dot{x}_3^+ = \alpha_2 x_2^+ - m_3 x_3^+ - c^- x_3 - k_3 (x_3^+ - y(t)) \end{cases}$$

Si on arrive à borner l'erreur sur l'incertitude :

$$\begin{aligned} b(t) = \Phi^+(t, x_3) - \Phi^-(t, x_3) &= \begin{pmatrix} \frac{a^+ x_3}{b + x_3} \\ 0 \\ -c^-(t)x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a^- x_3}{b + x_3} \\ 0 \\ -c^+(t)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a^+ - a^-) x_3}{b + x_3} \\ 0 \\ (c^+ - c^-) x_3 \end{pmatrix} \\ &< \begin{pmatrix} (a^+ - a^-) \\ 0 \\ (c^+ - c^-) x_3^{\max} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec x_3^{\max} une borne supérieure des mesures x_3 .

Alors nous avons d'après le théorème 4.4.2, en posant $B = \begin{pmatrix} (a^+ - a^-) \\ 0 \\ (c^+ - c^-) x_3^{\max} \end{pmatrix}$, que

l'erreur totale d'estimation $e(t)$ (la largeur de l'intervalle $[x^-(t), x^+(t)]$) est asymptotiquement inférieure (terme à terme) à $e_{\max} = -(A - KC)^{-1} B$.

Les calculs nous donnent alors :

$$e_{\max} = \begin{pmatrix} \frac{a^+ - a^-}{\alpha_1 + m_1} \\ \frac{\alpha_1 (a^+ - a^-)}{(\alpha_1 + m_1)(\alpha_2 + m_2)} \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2 (a^+ - a^-)}{(\alpha_1 + m_1)(\alpha_2 + m_2)(m_3 + k_3)} + \frac{(c^+ - c^-) x_3^{\max}}{m_3 + k_3} \end{pmatrix},$$

donc en choisissant un k_3 suffisamment grand, et si l'erreur sur le taux de reproduction $(a^+ - a^-)$ est assez petite, alors l'erreur sur l'estimation des variables d'état sera aussi petite. En d'autres termes, si on connaît assez bien la loi de reproduction (l'erreur est assez petite), alors on peut estimer de façon correcte les classes des juvéniles et des larves en mesurant seulement la classe des adultes même s'il y a un effort de pêche inconnu (l'erreur est assez grande).

4.4.1 Observateur par intervalles pour un procédé à boues activées

Nous allons appliquer les résultats précédents à un modèle de procédé des boues activées simplifié, s'apparentant au modèle général (1.5.1). Nous ferons les hypothèses suivantes :

- Il n'y a qu'une seule population de biomasse x , et une seule population de substrat s , et aussi une seule réaction de croissance de la biomasse dont découle la dégradation du substrat.
- Aux équations décrivant l'aérateur, s'ajoute une équation provenant du couplage entre l'aérateur et le décanteur [14], décrivant la dynamique de la biomasse recyclée x_r .
- Les cinétiques biologiques sont modélisées par $\mu(\cdot)x$, où $\mu(\cdot)$ est le taux spécifique des croissance. Il est supposé inconnu.
- Nous ne mesurons que le substrat s , et nous voulons estimer x et x_r .
- L'entrée en substrat s_{in} fluctue de manière inconnue mais nous connaissons des bornes dynamiques sur ces fluctuations :

$$s_{in}^-(t) \leq s_{in}(t) \leq s_{in}^+(t) \quad \forall t \geq 0$$

- Des bornes initiales sur x et x_r sont connues à priori :

$$\begin{aligned} x_0^- &\leq x_0 \leq x_0^+ \\ x_{r0}^- &\leq x_{r0} \leq x_{r0}^+ \end{aligned}$$

Ce modèle est présenté dans [14], [10] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(\cdot)x - (1 + q_r(t))D(t)x + q_r(t)D(t)x_r \\ \dot{s} = -\frac{\mu(\cdot)x}{Y} - (1 + q_r(t))D(t)s + D(t)s_{in}(t) \\ \dot{x}_r = v(1 + q_r(t))D(t)x - v(w(t) + q_r(t))D(t)x_r \end{cases} \quad (4.4.4)$$

avec : $v = \frac{V_a}{V_s}$, $w(t) = \frac{Q_w}{Q_{in}}$, où V_s est le volume d'eau dans le décanteur, et Q_w est le débit d'eau rejetée (non recyclée) depuis le décanteur. Y est un coefficient stoechiométrique.

Remarque 4.4.4 *Les deux dernières hypothèses qu'on a exigé ne sont pas irréalistes, en effet déterminer des bornes pour l'entrée en substrat dans une station d'épuration des eaux*

n'est pas aussi difficile, vu les activités humaines ou même industrielles qui sont assez prévisibles pendant la journée mais aussi au fil des saisons, ceci nous permet d'exhiber des bornes sous forme de fonctions périodiques de période journalière ou saisonnière.

Pour les bornes initiales sur les variables à estimer x et x_r la tâche n'est pas plus compliquée, car les bornes peuvent être très grandes et du coup contenir les vraies valeurs initiales x_0 et x_{r0} qui ne peuvent dépasser ces bornes pour des raisons biologiques évidentes.

Vu que le taux de croissance $\mu(\cdot)$ est totalement inconnu, on va s'en débarrasser en utilisant les techniques de l'observateur asymptotique (section 4.3), et plus précisément on va utiliser un changement de variables.

On va prendre D , q_r , w comme étant des constantes positives, pour le cas où elles sont variables au cours du temps, il nous faut en plus de leurs vraies valeurs pour tous $t \geq 0$, les encadrer par des bornes connues pour des raisons techniques, ces bornes pouvant être physiquement justifiées [14].

Réordonnons les équations du système (4.4.4) afin de séparer les variables d'état mesurées de celles qui ne le sont pas, nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{\mu(\cdot)x}{Y} - (1 + q_r)Ds + Ds_{in}(t) \\ \dot{x} = \mu(\cdot)x - (1 + q_r)Dx + q_rDx_r \\ \dot{x}_r = v(1 + q_r)Dx - v(w + q_r)Dx_r \end{cases} \quad (4.4.5)$$

en reprenant les même notations que celles de la section 4.3, on déduit que :

$$K_1 = -\frac{1}{Y}$$

qui est de plein rang et dont l'inverse à gauche est :

$$G = -Y$$

nous prenons alors :

$$\begin{aligned} F &= -K_2G \\ &= \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous allons donc utiliser le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= s \\ \zeta_2 &= \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation de ζ_2 (en dimension 2) suivante:

$$\dot{\zeta}_2 = D(A\zeta_2 + B(t))$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -(1+q_r) & q_r \\ v(1+q_r) & -v(w+q_r) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} Y s_{in}(t) \\ -Yv(1+q_r)s \end{pmatrix}$$

$s_{in}(t)$ n'étant pas connu mais seulement bornée :

$$s_{in}^-(t) \leq s_{in}(t) \leq s_{in}^+(t) \quad \forall t \geq 0$$

on peut alors borner $B(t)$:

$$B^-(t) \leq B(t) \leq B^+(t) \quad \forall t \geq 0$$

avec :

$$B^-(t) = \begin{pmatrix} Y s_{in}^-(t) \\ -Yv(1+q_r)s \end{pmatrix}, \quad B^+(t) = \begin{pmatrix} Y s_{in}^+(t) \\ -Yv(1+q_r)s \end{pmatrix}$$

On explicite ainsi un *observateur asymptotique par intervalles* fournissant une sur-estimation et une sous-estimation de x et de x_r :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\zeta}_2^- = D(A\zeta_2^- + B^-(t)), \quad \zeta_2^-(0) = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} s_0 + \begin{pmatrix} x_0^- \\ x_{r0}^- \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^- \\ x_r^- \end{pmatrix} = \zeta_2^- - \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} s \\ \dot{\zeta}_2^+ = D(A\zeta_2^+ + B^+(t)), \quad \zeta_2^+(0) = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} s_0 + \begin{pmatrix} x_0^+ \\ x_{r0}^+ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^+ \\ x_r^+ \end{pmatrix} = \zeta_2^+ - \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} s \end{array} \right. \quad (4.4.6)$$

D étant positif et A coopérative (éléments hors-diagonaux positifs), alors DA est encore coopérative, en plus on a l'estimation initiale :

$$\zeta_2^-(0) \leq \zeta_2(0) \leq \zeta_2^+(0)$$

vu la dernière hypothèse. Donc d'après le théorème 4.4.1, (4.4.6) est un observateur par intervalles mais asymptotique (on ne peut pas fixer la matrice des gains K) pour le système (4.4.5).

L'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation est :

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{\zeta}_2^+ - \dot{\zeta}_2^- \\ &= D(Ae(t) + B^+(t) - B^-(t)) \quad e(0) = \zeta_2^+(0) - \zeta_2^-(0)\end{aligned}$$

La largeur positive de l'intervalle $e(t)$ reste bornée si on suppose que l'entrée $D(B^+(t) - B^-(t))$ est bornée et la matrice DA est stable. L'hypothèse sur la bornitude de l'entrée est réaliste puisque $B^+(t) - B^-(t)$ dépend de la différence $s_{in}^+(t) - s_{in}^-(t)$ qui ne va pas diverger dans la réalité. La stabilité de la matrice DA se vérifiera aisément avec le critère de Routh qui exigera : $1 + q_r + v(w + q_r) > 0$ et $vw(1 + q_r) > 0$, ce qui est vrai puisque $v, w, q_r > 0$ (dans la réalité).

Bornons maintenant l'entrée :

$$D(B^+(t) - B^-(t)) = D\begin{pmatrix} Y(s_{in}^+(t) - s_{in}^-(t)) \\ 0 \end{pmatrix} < D\begin{pmatrix} YM \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $s_{in}^+(t) - s_{in}^-(t) \leq M \quad \forall t \geq 0$, on a alors d'après la proposition 4.4.1, en posant :

$$\dot{e}_m(t) = D\left(Ae_m(t) + \begin{pmatrix} YM \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

l'inégalité suivante :

$$0 \leq e(t) \leq e_m(t) \quad \forall t > 0$$

Donc d'après le théorème 4.4.2, l'intervalle $e(t)$ est plus petit asymptotiquement (terme à terme) que le vecteur positif :

$$\begin{aligned}e_{\max} &= -A^{-1} \begin{pmatrix} YM \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{vw(1 + q_r)} \begin{pmatrix} v(w + q_r) & q_r \\ v(1 + q_r) & 1 + q_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} YM \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w + q_r \\ 1 + q_r \end{pmatrix} \frac{YM}{w(1 + q_r)}\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

On remarquera alors que la largeur de l'intervalle e_{\max} dépend de l'erreur maximale M sur l'entrée s_{in} .

Chapitre 5

Résultats numériques

Nous avons implémenté l'observateur (4.4.6) en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires [8].

Nous nous sommes fixés les valeurs suivantes intervenant dans les équations du système (4.4.6) :

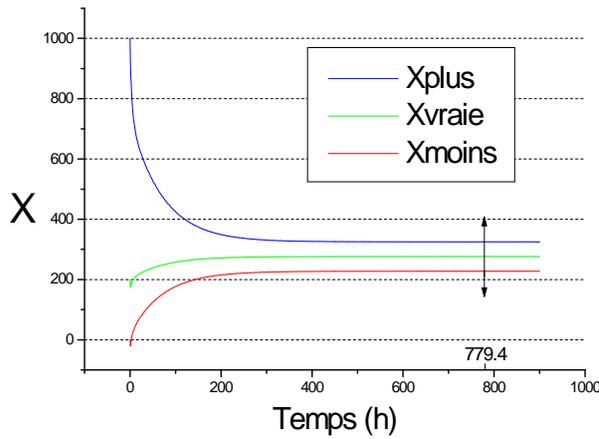
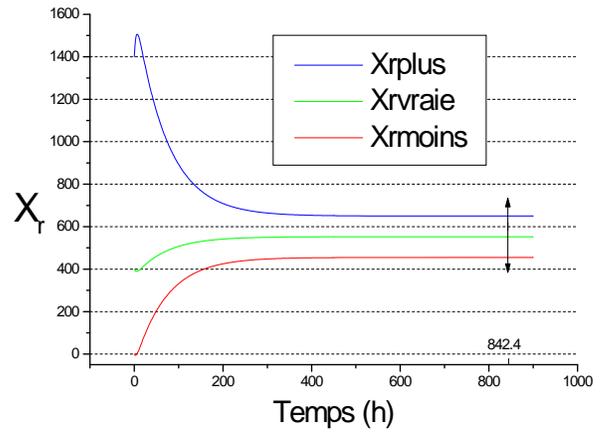
$q_r = 0.6$			$M = 60$		
$w = 0.2, v = 1$			$x_0 = 200$		
$Y = 0.65$			$x_{r0} = 400$		
$D = 0.1$			$s_0 = 50$		

s_{in0}^-	s_{in0}	s_{in0}^+	x_0^-	x_0	x_0^+	x_{r0}^-	x_{r0}	x_{r0}^+
220	250	280	0	200	1000	0	400	1400

(5.0.1)

s_{in0}, x_0, x_{r0} sont en réalité inconnues.

Nous avons alors obtenus les résultats suivants :

Résultat 1 :Estimatin des bornes dynamiques de x Estimatin des bornes dynamiques de x_r

Remarque 5.0.5 Les flèches à deux sens dans les figures précédentes, ainsi que les points spécifiés sur les axes des abscisses, indiquent les instants à partir desquels les erreurs totales des estimations de x et de x_r (les différences entre les sur-estimations et les sous-estimations de x et de x_r) ne dépassent plus les valeurs maximales fixées par le vecteurs

$$e_{\max} = \begin{pmatrix} e_{\max x} \\ e_{\max x_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97.5 \\ 195.0 \end{pmatrix}$$

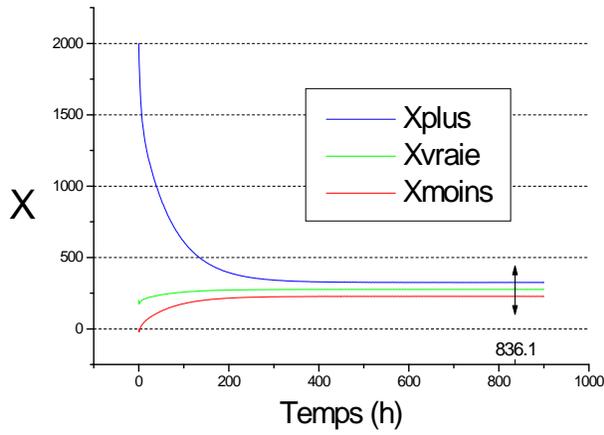
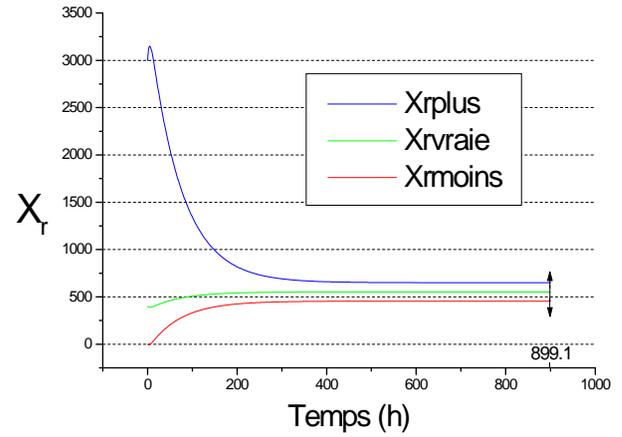
Nous vérifions bien la convergence de la différence entre les estimations supérieures et inférieures des x et x_r vers des largeurs plus petites, mais qui contiennent vraisemblablement chacun les vraies valeurs de x et de x_r . Nous constatons aussi que cette largeur d'intervalle limite reste borné par le vecteur e_{\max} .

Résultat 2 :

Pour des bornes initiales plus larges :

x_0^-	x_0	x_0^+	x_{r0}^-	x_{r0}	x_{r0}^+
0	200	2000	0	400	3000

nous avons les résultats :

Estimation des bornes dynamiques de x Estimation des bornes dynamiques de x_r

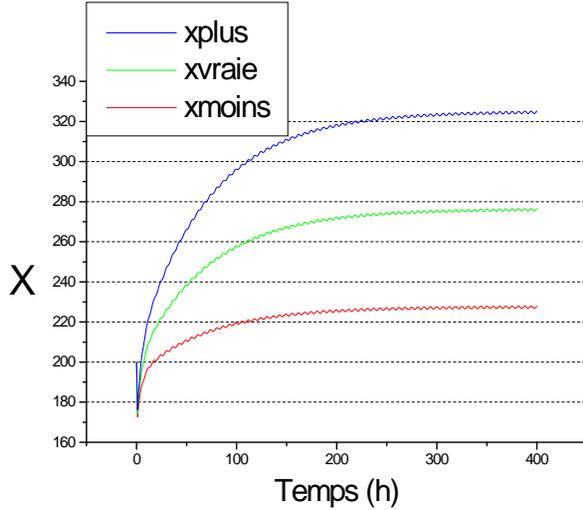
Nous remarquons que les bornes même très large au temps $t = 0$ n'affectent pas la convergence asymptotiquement des estimations supérieures et inférieures de x et x_r , vers des intervalles plus petits mais qui contiennent les vraies valeurs de x et x_r , les largeurs des intervalles finales sont fixés par $e_{\max} = \begin{pmatrix} e_{\max x} \\ e_{\max x_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97.5 \\ 195.0 \end{pmatrix}$.

Résultat 3 :

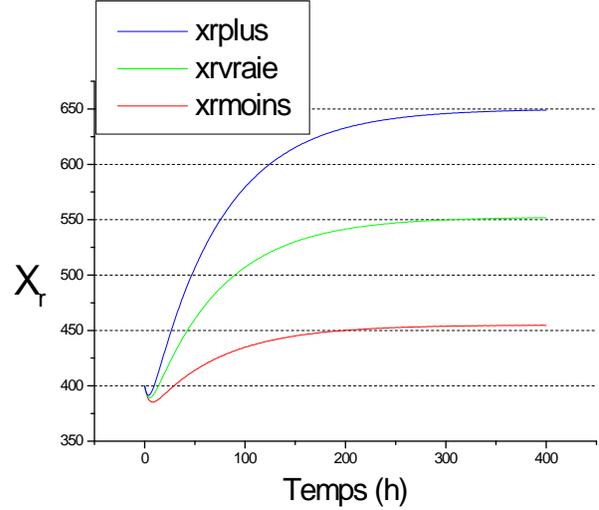
Si nous nous fixons les mêmes conditions initiales pour les estimateurs supérieurs et inférieurs que les vraies conditions initiales, c'est à dire :

x_0^-	x_0	x_0^+	x_{r0}^-	x_{r0}	x_{r0}^+
200	200	200	400	400	400

alors nous obtenons les schémas suivants :



Estimation des bornes dynamiques de x



Estimation des bornes dynamiques de x_r

Dans cet exemple, les sur-estimations et les sous-estimations de x et x_r , après des points de départ identiques, se différencient des vraies solutions certes, néanmoins les différences entre elles (les erreurs maximales) restent bornées et ne dépassent jamais les largeurs maximales $e_{\max} = \begin{pmatrix} e_{\max x} \\ e_{\max x_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97.5 \\ 195.0 \end{pmatrix}$.

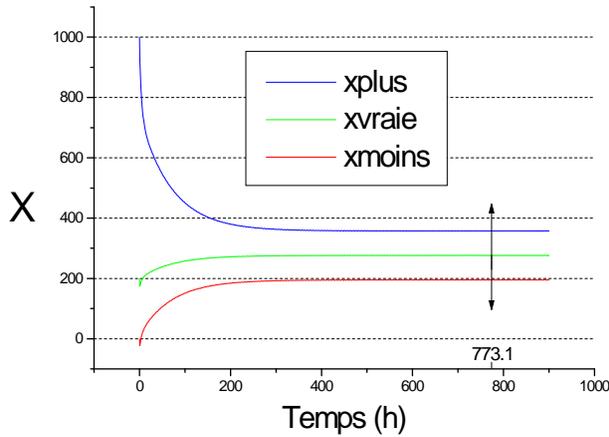
Résultats 4 :

Dans cet exemple nous allons prendre les mêmes conditions initiales (5.0.1), mais nous changerons la largeur maximale M de l'erreur sur l'entrée en substrat S_{in} . Nous avons signalé que l'expression (4.4.7) du vecteur erreur e_{\max} dépendait de l'erreur M , nous allons alors lui donner des valeurs différentes et voir quelles incidences elles auront sur les résultats.

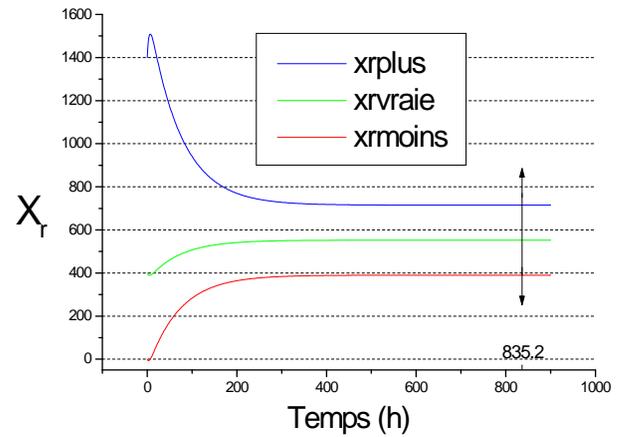
$$M = 100$$

s_{in0}^-	s_{in0}	s_{in0}^+	x_0^-	x_0	x_0^+	x_{r0}^-	x_{r0}	x_{r0}^+
200	250	300	0	200	1000	0	400	1400

Si l'erreur sur l'entrée change, alors S_{in0}^-, S_{in0}^+ changent aussi. Nous avons alors les résultats suivants :



Estimation des bornes dynamiques de x



Estimation des bornes dynamiques de x_r

Nous remarquons qu'il y a toujours convergence des estimations supérieures et inférieures vers des intervalles plus petits, même si cette convergence ne se fait pas plus rapidement, ou bien très peut, si nous comparons avec le *Résultat1*, les largeurs des intervalles limites sont beaucoup plus grands que ceux du *Résultat1*. En effet nous avons

$$e_{\max} = \begin{pmatrix} e_{\max x} \\ e_{\max x_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162.5 \\ 325.0 \end{pmatrix}$$

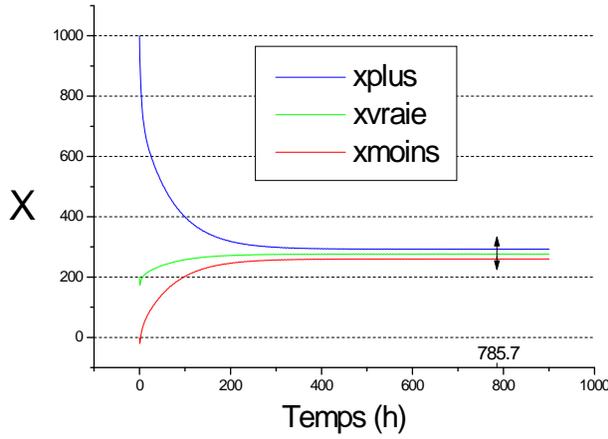
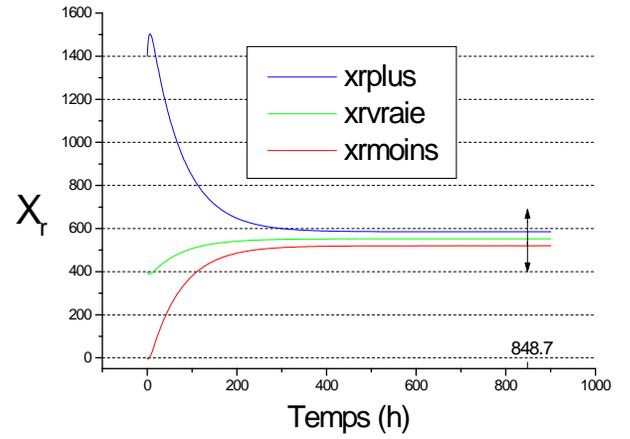
Résultat 5 :

Pour cet exemple, nous allons aussi changer la valeur de M mais nous la prendrons plus petite :

$$M = 20$$

s_{in0}^-	s_{in0}	s_{in0}^+	x_0^-	x_0	x_0^+	x_{r0}^-	x_{r0}	x_{r0}^+
240	250	260	0	200	1000	0	400	1400

Nous avons alors les résultats suivants :


 Estimation des bornes dynamiques de x

 Estimation des bornes dynamiques de x_r

Nous remarquons là aussi qu'il y a toujours convergence des estimations supérieures et inférieures vers des intervalles plus petits. Nous remarquons toujours que la convergence ne se fait pas plus rapidement que la convergence du *Résultat 1*, néanmoins les largeurs des intervalles vers lesquelles les erreurs maximales convergent sont beaucoup plus petites que ceux des *Résultat 1* et *Résultat 4*. En effet nous avons :

$$e_{\max} = \begin{pmatrix} e_{\max x} \\ e_{\max x_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.5 \\ 65.0 \end{pmatrix}$$

Remarque 5.0.6 (sur les résultats 1, 4 et 5) *Nous remarquons en comparant ces trois résultats que le changement de la largeur maximale M de l'erreur sur l'entrée en substrat S_{in} , n'affecte en rien la vitesse de convergence des estimations supérieures et inférieures, et ceci était prévisible puisque nous avons décidé dès le début de construire un observateur par intervalle asymptotique c'est à dire que la vitesse de convergence ne peut être réglée et l'estimation sera toujours asymptotique.*

Deuxième remarque c'est sur les largeurs des intervalles limites :

M	60	100	20
e_{\max}	$\begin{pmatrix} 97.5 \\ 195.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 162.5 \\ 325.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 32.5 \\ 65.0 \end{pmatrix}$

Nous voyons bien que plus il y a de précision sur l'entrée en substrat S_{in} (un M plus petit) plus il y aura de précision sur les estimations (un e_{\max} plus petit terme à terme). Ceci aussi était prévisible vu l'expression (4.4.7) du vecteur e_{\max} dépendante de M .

Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire une application concrète de certains aspects de la théorie du contrôle, en l'occurrence l'observabilité ainsi que des méthodes pour estimer les états non mesurés. L'exemple sur lequel nous avons appliqué ces méthodes était la station d'épuration des eaux usées, dont nous avons donné une esquisse de son mode de fonctionnement.

Parmi les méthodes d'estimation on a focalisé sur les observateurs par intervalles qui sont une méthode assez efficace car elle n'est pas très exigeante en demande de données à priori (des bornes sur les entrées et les états initiaux même très larges), mais aussi sur l'estimation finale qui se contente de fournir un intervalle, mais qui contient avec certitude la vraie valeur recherchée. Notons aussi que d'autres méthodes pour venir à bout des incertitudes existent dans la littérature mais que nous n'avons pas exposée ici.

Ces méthodes d'estimation ne sont pas restreintes à la station d'épuration, bien au contraire les exemples d'applications se trouvent dans de nombreux domaines, Industries pharmaceutiques, agro-alimentaires, . . . , qui sont des domaines où les méthodes d'estimation donnent des résultats beaucoup plus précis, vu les mesures disponibles réalisées avec des appareils très sophistiqués et onéreux que les stations d'épuration ne peuvent se permettre d'acquérir.

Enfin signalons que nous nous sommes limité dans ce mémoire à des systèmes linéaires et parfois à une injection de sortie près, bien que la réalité veuille que les modèles biologiques soient, comme nous l'avons signalé, non-linéaires, et ceci en raison de l'abondance des observateurs pour les systèmes linéaires, et leur rareté pour les systèmes non-linéaires, donc un travail ultérieur pourrait aborder ce côté là.

Annexe

A

Théorème A.1 Cayley-Hamilton

Si A est une matrice carrée $n \times n$ et

$$\chi_A(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

sont polynôme caractéristique, alors :

$$A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \dots - \alpha_{n-1} A - \alpha_n I$$

et, en particulier, toute matrice A^m pour $m \geq n$ est combinaison linéaire de I, A, \dots, A^{n-1} .

B

Définition B.1 Soit E un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

E est dit stable par la transformation linéaire A si : $x \in E \Rightarrow Ax \in E$. [22]

C

La matrice de passage

Pour déterminer la matrice de passage P , qui transforme le système initial en son compagnon observable, on utilise la technique suivante :

Pour le cas mono-sortie on a :

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = CP = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et, qu'on peut récrire ainsi :

$$\tilde{A}P^{-1} = P^{-1}A \text{ et } \tilde{C}P^{-1} = C \quad (5.0.2)$$

Supposons que $P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ avec p_1, \dots, p_n les lignes de P^{-1} , alors des égalités matricielles (5.0.2) on obtient les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} p_n &= C \\ p_{n-1} - \alpha_1 p_n &= p_n A \\ p_{n-2} - \alpha_2 p_n &= p_{n-1} A \\ &\vdots \\ p_1 - \alpha_{n-1} p_n &= p_2 A \\ -\alpha_n p_n &= p_1 A \end{aligned}$$

que nous devons résoudre pour trouver les lignes de P^{-1} . De la première équation jusqu'à la n ème nous tirons p_n ensuite $p_{n-1} \dots$ et enfin p_1 . On se retrouve avec la dernière équation qui est automatiquement satisfaite en écrivant :

$$\begin{aligned} p_1 A + \alpha_n p_n &= p_2 A^2 + \alpha_{n-1} p_n A + \alpha_n p_n \\ &= p_3 A^3 + \alpha_{n-2} p_n A^2 + \alpha_{n-1} p_n A + \alpha_n p_n \\ &\vdots \\ &= p_n (A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n) \\ &= 0 \text{ vu le théorème de CAYLEY-HAMILTON} \end{aligned}$$

Pour le cas multi-sorties voir [15]

La matrice de passage du système initial vers le compagnon contrôlable est déterminée par la même technique, il suffit de prendre à la place de P une matrice $T = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$ avec t_1, \dots, t_n les colonnes de la matrice T .

D

Le critère de Routh

Soit $P(s)$ le polynôme à coefficients réels :

$$P(s) = \alpha_0^1 s^n + \alpha_0^2 s^{n-1} + \alpha_1^1 s^{n-2} + \alpha_1^2 s^{n-3} + \alpha_2^1 s^{n-4} + \alpha_2^2 s^{n-5} + \dots$$

On construit la *table de Routh* :

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \alpha_0^3 & \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \alpha_0^4 & \alpha_1^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

par récurrence selon la formule :

$$\alpha_j^{i+2} = \alpha_{j+1}^i - \frac{\alpha_0^i}{\alpha_0^{i+1}} \alpha_{j+1}^{i+1}$$

tant que c'est possible. On a alors le théorème suivant, connu sous le nom de *critère de Routh* :

Théorème D.1 *Le polynôme $P(s)$ a toutes ses racines à partie réelle strictement négative si, et seulement si tous les coefficients α_0^i de la première colonne de la table de Routh sont non nuls et de même signe.*

Si tous les α_0^1 sont non nuls, le nombre de coefficients dans la première colonne de la table de Routh n'étant pas du même signe que α_0^1 correspond au nombre de racines de $P(s)$ ayant une partie réelle positive.

Remarque D.1 *Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que $P(s)$ ait toutes ses racines à partie réelle strictement négative est que tous les coefficients α_j^i de $P(s)$ soient non nuls et de même signe. Cette condition est connue sous le nom de test de Hurwitz.*

E

Définition E.1 *On dit qu'un système non-linéaire en dimension n est coopératif si sa matrice Jacobienne est positive en dehors de la diagonale sur un domaine convexe. C'est à dire pour la représentation d'état suivante :*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

la coopérativité est satisfaite si :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, t) \geq 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

Bibliographie

- [1] D. ALAZARD, *Introduction au filtre de KALMAN*, Notes de cours, Exercices corrigés, Sessions Matlab, SUPAERO 2005.
- [2] B. D'ANDREA-NOVEL, M. C. DE LARA, *Cours d'Automatique, Commande Linéaire des Systèmes Dynamiques*, Ecole des Mines de Paris, 2000.
- [3] G. BASTIN, D. DOCHAIN, *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [4] R. BELLMAN, *Introduction to Matrix Analysis*, Mc Graw-Hill, 1960
- [5] O. BERNARD, J. L. GOUZE, *Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models*, Projet COMORE INRIA, Rapport de recherche n°4905, 2003
- [6] O. BERNARD, *La modélisation des systèmes biologiques : Aller-retours le long des fleuves qui circulent entre l'océan du réel et le lac des modèles*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 2004.
- [7] B. GADDOUNA, D. MAQUIN, J. RAGOT, *Fault detection observers for systems with unknown inputs*, Centre de Recherche en Automatique de Nancy-CNRS UA 821.
- [8] S. GODOUNOV, V. RIABENKI, *Schémas aux différences*, OPU, 1987.
- [9] J. L. GOUZE, *Automatique des Bioprocédés*, Ecole CIMPA Unesco-Tlemcen Algérie 2003.
- [10] J. L. GOUZE, A. RAPAPORT, M. Z. HADJ-SADOK, *Interval observers for uncertain biological systems*, Ecological Modelling ,133 (2000) p 45-56.
- [11] M. L. J. HAUTUS and E. D. SONTAG, *An approach to detectability and observers*, Lectures in Applied Mathematics, Volume 18, 1980.

-
- [12] *Mémento Technique de l'Eau*, Degémont, Neuvième édition, Tome 1, Edition du Cinquantenaire, 1989.
- [13] R. K. MILLER et A. N. MICHEL *Ordinary Differential Equations*, Academic Press, 1982.
- [14] Z. M. HADJ-SADOK, *Modélisation et estimation dans les bioréacteurs; prise en compte des incertitudes : application au traitement de l'eau*. Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1999.
- [15] D. H. OWENS, *Multivariable and Optimal Systems*, Academic Press, 1981.
- [16] M. S. OUALI, *Cours de procédés Unitaires Biologiques et Traitement des Eaux*, OPU, 2001.
- [17] A. RAPAPORT, D. DOCHAIN, *Interval observers for biochemical process with uncertain kinetics and inputs*, *Mathematical Biosciences*, 193 (2005) p 235-253.
- [18] V. SUNDARAPANDIAN, *Reduced order observer design for nonlinear systems*, *Applied Mathematics Letters*, 19 (2006) 936-941.
- [19] P. VIDAL, *Aide-mémoire d'automatique*, 2eme édition, DUNOD, 1985.
- [20] W. L. WOLOVICH, *Linear Multivariable systems*, *Applied Mathematical Sciences*, Vol.11, Springer Verlag, 1974.
- [21] J. ZABCZYK, *Mathematical Control Theory : An Introduction*, Birkhäuser, 1992.
- [22] L. A. ZADEH et C. A. DESOER, *Linear System Theory*, Mc Graw-Hill, 1963.