N$^0$ d'ordre : 28 / 2013 - M / MT

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieure Et De La Recherche Scientifique**

**Université Des Sciences Et De La Technologie Houari Boumedienne**

**Faculté Des Mathématiques**

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER**

**En MATHEMATIQUE**

**Spécialité : Modélisation Mathématique et Numérique**

**Par TSAMDA Hocine**

**SUJET**

# Etude mathématique d'un problème parabolique issue de la biologie

Soutenu publiquement, le 25/06/2013, devant le jury composé de :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mr. | M.MOULAY | Professeur | à L'U.S.T.H.B. | Président. |
| Mme. | N.AISSA | Maître de Conférences/A | à L'U.S.T.H.B. | Directeur de Mémoire. |
| Mr. | D.TENIOU | Professeur | à L'U.S.T.H.B. | Examinateur. |
| Mr. | T.ALI ZIANE | Maître de Conférences/A | à L'U.S.T.H.B. | Examinateur. |

## *Remerciements*

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements au Professeur M.Moulay de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Mme N.Aïssa pour les conseils efficaces, les encouragements ainsi que pour le temps qu'elle m'a consacré pour me poursuivre ce travail.

Je remercie vivement Monsieur D. Teniou, Professeur à l'U.S.T.H.B et Monsieur T.Ali Ziane, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury, qu'ils trouvent ici toute ma gratitude.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis et toute l'équipe pédagogique qui a contribué, de près ou de loin à ma formation.

### Résumé

L'objet de ce travail est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution pour une certaine classe de systèmes de réaction-diffusion (systèmes paraboliques non linéaires) . Plus précisément, on traite l'existence globale, l'unicité ainsi que le comportement asymptotique de la solution.

**Mots clefs**:Réaction diffusion, équation parabolique, existence global, comportement asymptotique.

### Abstract

This work is devoted to study existence of solutions to some reaction-diffusion systems ( nonlinear parabolic systems) . Specifically, it deals with global existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions.

**Key words**:reaction diffusion, parabolic équations, global existence, asymptotic behavior.

# Table des matières

# Liste des principales notations

$\Omega$ : Ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\partial\Omega$ : Frontière régulière de $\Omega$.

$Q_T = \Omega \times \left]0, T\right[$ .

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ : Un point de $\mathbb{R}^n$.

$d/dt$ : Dérivée par rapport à $t$ .

$\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$ : Dérivée partielle par rapport à $x$ .

$\nabla = \left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, ..., \partial_{x_n}\right)$ : Gradient par rapport à $x$.

$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$.

$L^p(\Omega)$ : Ensemble des fonctions de puissances $p^{ième}$ intégrable sur $\Omega$.

$W^{s,p}(\Omega)$ : Espace de Sobolev construit sur $L^p(\Omega)$ et $s$ réel .

$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ .

$\Gamma$ : Variété de dimention $(n-1)$ plongée dans $\mathbb{R}^n$.

$d\sigma$ : Mesure superficielle sur $\Gamma$.

$\nu$ : la normal extrieure à $\partial\Omega$.

$\partial/\partial\nu$ : Dérivée normale .

$\| \bullet \|$ : La norme de $L^2(\Omega)$.

$\| \bullet \|_{H^s(\Omega)}$ : La norme de $H^s(\Omega)$.

# Introduction

L'objet de ce mémoire est l'étude de quelques équations paraboliques non linéaires issues de la biologie.

Ce mémoire est divisé en deux parties. On trouvera dans la première partie une contribution personnelle à la résolution d'un modèle simplifié proposé par M.A.J chaplin et al [1] et dans lequel nous avons négligé le terme de chemotaxis, nous nous focalisons sur la migration cellulaire dûe à l'haptotaxie ou encore à l'invasion-dégradation de la matrice extracellulaire par les cellules tumorales .

On établit pour ce modèle un résultat d'existence et d'unicité d'une solution locale en temps, puis en adaptant les idées de [6], on montre que cette solution est en fait globale en temps avant de nous pencher sur le comportement asymptotique en temps de cette dernière.

La deuxième partie est une synthèse des travaux de A. Kubo-T.Suzuki [3]. Ce modèle diffère du modèle précédent par la présence d'un terme de chemotaxis ajoutant une difficulté supplémentaire au problème mais il plus simple que le problème initial proposé par M.A.J chaplin et al [1] dans la mesure où l'équation est couplée à des équations différentielles ce qui a permis à [3] de transformer le modèle parabolique en un modèle hyperbolique dont l'énergie est contrôlable.

••Notons que la deuxième partie de ce mémoire correspond à des articles qui ont été publiés

( [1, 2]).

Le phénomène biologique décrit la migration des cellules tumorales.

Le phénomène se déroule selon un schéma de plusieurs étapes. Chaque étape est décrite par un système d'équations de réaction-diffusion

La migration cellulaire intervient dans d'autres phénomènes tels que l'invasion et l'angiogénèse.

Dans notre travail on a deux modèles, le premier décrit l'invasion tandis que le deuxième l'angiogénèse.

– ces deux modèles font partie des divers modèles proposés par **Anderson** et **Chaplin.**

∴ Décrivons brièvement le modèle d'invasion.

L'invasion du tissu sain par les cellules tumorales se déroulerait selon un schéma classique en quatre étapes :

**1)** Détachement des cellules de la masse tumorale,

**2)** Adhérence des cellules à la matrice extracellulaire (MEC),

**3)** Dégradation de la MEC,

**4)** Migration.

Le modèle est gouverné par deux facteurs : hypoxiques ; diffusion. Il est décrit par le modèle suivant [1]

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \overbrace{D\triangle n}^{diffusion} - \overbrace{\rho\nabla.\left(n\nabla f\right)}^{haptotaxie} \\ \\ \dfrac{df}{dt} = \overbrace{-\gamma mf}^{dégradation} & \text{dans } [0,\infty[\times\Omega \\ \\ \dfrac{dm}{dt} = \overbrace{\varepsilon\triangle m}^{diffusion} + \overbrace{\alpha n}^{production} - \overbrace{\upsilon m}^{mortalité} \end{cases} \qquad (\wp_{\mathbf{1}})$$

$n = n(t,x)$ : densité de la cellule tumorale.

$m = m(t,x)$ : concentration de matrice dégradative d'enzyme (MDE)

$f = f(t,x)$ : concentration de matrice extracellulaire (ECM).

les solution :$n; c; f$ dépend de deux variables : $x$, et $t$.

$t \geq 0, t$ :le temps.

$x \in \Omega$ ; $\Omega$ : domaine borné de $\mathbb{R}^n$ .

$D; \rho; \gamma; \upsilon; \alpha; \varepsilon$ : constantes positives.

$\therefore$Le deuxième modèle concerne l'angiogenèse [3].

L'angiogénèse est un processus biologique qui permet, à partir de vaisseaux sanguins existants, de créer de nouveau vaisseaux par la migration des cellules endothéliales.

Le modèle est gouverné par trois facteurs : hypoxiques ; chimiotactique ; diffusion.

Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \overbrace{D\triangle n}^{diffusion} - \overbrace{\nabla.\left(\chi(c)n\nabla c\right)}^{chemotaxis} - \overbrace{\rho\nabla.\left(n\nabla f\right)}^{haptotaxis} \\ \\ \dfrac{df}{dt} = \overbrace{kn}^{production} - \overbrace{\xi nf}^{consommation} \qquad\qquad \text{dans} \quad [0,\infty[\times\Omega \\ \\ \dfrac{dc}{dt} = \overbrace{-\eta nc}^{dégradation} \end{cases} \qquad (\wp_{\mathbf{2}})$$

$n = n(t,x)$ : densité de cellule tumorale.

$c = c(t,x)$ : concentration du facteur d' angiogénèse tumorale (TAF)

$f = f(t,x)$ : concentration de fibronectine

les solution :$n; c; f$ dépend de deux variables : $x$ et $t$.

$t \geq 0, t$ :le temps.

$x \in \Omega$ ; $\Omega$ : domaine borné de $\mathbb{R}^n$ .

$D; \rho; \xi; k; \eta$ : constants positives.

$\chi(c) = \dfrac{\chi_0}{1+\alpha c}$. où $\chi_0$ représente la sensitivité, $\alpha$ est une constante positives.

Nous allons maintenant présenter les différents chapitres de ce mémoire.

Les deuxième et troisième chapitres correspondent à l'étude du premier modèle .

Le quatrième chapitres est consacrés à l'étude du deuxième modèle.

Dans la première partie, nous donnons quelques rappels généraux.

Dans le troisième chapitre, nous traitons l'existence locale d'une solution faible pour $(\wp_{\mathbf{1}})$.

L'outil principal est le théorème du **point fixe** de **Schauder.**

le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence pas l'unicité, alors on montrera après.

Dans le quatrième chapitre, nous montrons que la solution locale précédemment construite est en fait **une solution globale** pour $(\wp_{\mathbf{1}})$

L'idée est multiplier l'équation satisfaite par $n$ par le terme d'entropie $\log(n+1)$ et d'utiliser la décroissance exponentielle de $f$ qui découle du fait que $m \geq \gamma_*$ dès que $m_0 \geq \gamma_*$. Cette méthode est due à [6] et nous permet de montrer que$\|n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ est bornée indépendamment de $T$ d'où l'existence d'une solution globale en temps .

En utilisant encore une fois la décroissance exponentielle de $f$ , on aboutit à un résultat de comportement asymptotique en temps**.**

Dans le cinquième chapitre, nous étudions l'**existence globale** d'une solution pour $(\wp_{\mathbf{2}})$

En résolvant les équations différentielles satisfaites par $c$ et $f$ et en remplaçant dans l'équation satisfaite par $n$, on transforme le problème parabolique $(\wp_{\mathbf{2}})$ en un problème hyperbolique qu'on traitera par la méthode de Galerkin adaptée au problème non linéaire

L'idée est d'introduire un schéma itératif de telle sorte qu'à chaque étape nous ayons affaire à un problème linéaire.

Nous achevons la preuve en montrant que la suite ainsi contruite est une suite de Cauchy et converge vers une solution classique de notre problème

La méthode repose sur le contrôle du terme $\|u_t\|_{L^2(0,+\infty;H^2(\Omega))}$ qui assure la convergence de la suite.

On achève le mémoire par un résultat de comportement asymptotique de la solution de $(\wp_{\mathbf{2}})$.

# Première partie

# Rappels

# Chapitre 1

# Rappels générales

## Sommaire



L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail, en premier lieu, nous rappelons quelques défnitions et les inégalités sur les espaces de Sobolev et les espaces $L^p\left(0,T;X\right)$, et après on rappele un cértain nombre d'outils d'analyse, théorème de point fixe de Schauder l'inégalité de Gronwall et autres inégalités qui seront utilisées dans le suite, à la fin de chapitre on étudie l'existence et l'unicité de solutions de problèmes de neumann qui l'on fait la preuve par la méthode de compacité.

## 1.1 Définition d'éspace de Sobolev

$\Omega$ : Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière.

**Définition 1.1.1** *On définit l'espaces de* Sobolev *d'ordre $m$ sur $L^p(\Omega)$ que l'on note $W^{m,p}(\Omega)$ par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u,\ u \in L^p(\Omega),\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\quad |\alpha| \leq m\}$$

*On le munit de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},\ 1 \leq p < \infty\,;$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

**Remarque 1.1.1** *On posera*

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)\,,$$

*$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :*

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}\,.$$

**Théorème 1.1.1** ***(Inégalité de Poincaré)***

*On suppose que $\Omega$ est un ouvert borné.Alors il existe une constante $C$ (dépendant de $\Omega, p$) tel que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,,\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\quad (1 \leq p < \infty) \tag{1.1.1}$$

**Théorème 1.1.2** ***(Inégalité de Poincaré-Wirtinger)***

*$\Omega$ est un ouvert connexe de classe $C^1$ .*

*Alors il existe une constante $C$ (dépendant de $\Omega, p$) tel que*

$$\|u - \overline{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,,\ \forall u \in W^{1,p}(\Omega)\quad (1 \leq p < \infty), \tag{1.1.2}$$

*où*

$$\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx$$

**Théorème 1.1.3** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ régulière, tel que $n \leq 3$.*

*Alors, il existe une constante $C(\Omega)$, telle que*

$$\|u-\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \;\; \forall u \in H^2(\Omega), \; \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{1.1.3}$$

**Preuve :** On applique la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla(u(x)-\overline{u})|^2 dx = \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial(u-\overline{u})}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma - \int_\Omega (u-\overline{u})\Delta(u-\overline{u})dx,$$

si $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$, on a

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega (u-\overline{u})\Delta u dx$$

on applique l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega (u-\overline{u})\Delta u dx \\ &\leq \|u-\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} . \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (1.1.2)

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|u-\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} . \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq k\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

On déduit alors

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq k\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} . \tag{1.1.4}$$

comme $n \leq 3$, d'après $(1.2.3)$, on a $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u-\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq c\|u-\overline{u}\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq c(\|u-\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

donc d'après (1.1.4) et l'inégalité de Poincaré-Wirtinger $(1.1.2)$, on a

$$\|u-\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

**Remarque 1.1.2** *On montre que si $\Omega$ est assez régulier, avec $\partial\Omega$ borné, alors la norme de $W^{m,p}(\Omega)$ est équivalente à la norme*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} .$$

*Plus précisément, on montre que pour tout multi-indice $\alpha$ avec $0 < |\alpha| < m$ et tout $\varepsilon > 0$ il exist une constante $C($dépendant de $\Omega, \varepsilon, \alpha)$ tel que*

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \left\|D^\beta u\right\|_{L^p(\Omega)} + C\|u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W^{m,p}(\Omega). \tag{1.1.5}$$

**Preuve :** Voir Adams.

**Théorème 1.1.4** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ régulière. Si $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$, et $\Delta u \in H^m(\Omega)$, alors il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\|u\|_{H^{2+m}(\Omega)} \leq c(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{H^m(\Omega)}). \tag{1.1.6}$$

*Il suffit d'appliquer les résultats de régularité elliptique à l'opérateur $\mathcal{A}$ défini sur $L^2(\Omega)$ par $\mathcal{A} = -\triangle + 1$.*

**Preuve :** Cf [06] .

**Théorème 1.1.5** *Soit $s \geq 1$ et $s > \frac{n}{2}$. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction de classe $C^m$, où $m \geq s$.*

*Si $u \in H^s(\Omega)$, on a $F(u) \in H^s(\Omega)$, de plus*

$$\|F(u)\|_{H^s(\Omega)} \leq p(\|u\|_{H^s(\Omega)}). \tag{1.1.7}$$

*où $p(.)$ fonction croissante determinée par $F$.*

**Preuve :** Cf [06]

## 1.2 Inégalités de Sobolev

**Théorème 1.2.1** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ régulière.*

*Alors*

$$\textbf{\textit{(1)}}\ \textit{si} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0, \quad \textit{alors} \quad W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \ \textit{où}\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} . \tag{1.2.1}$$

$$\textbf{\textit{(2)}}\ si \quad \frac{1}{p}-\frac{m}{n}=0, \quad alors \quad W^{m,p}(\Omega)\subset L^{q}(\Omega)\ \ \forall q\in[p,+\infty[ \quad . \tag{1.2.2}$$

$-$

$$\textbf{\textit{(3)}}\ si \quad \frac{1}{p}-\frac{m}{n}<0, \quad alors \quad W^{m,p}(\Omega)\subset L^{\infty}(\Omega) \quad . \tag{1.2.3}$$

*Dans le cas* ***(3) :*** $W^{m,p}(\Omega)$ *est une* ***algèbre de Banach***

*(i.e) : il existe une constante* $c$ *(dépendant de* $\Omega$*) telle que*

$$\|uv\|_{W^{m,p}(\Omega)}\leq c\,\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}\,\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}\,,\forall u,v\in W^{m,p}(\Omega)\,. \tag{1.2.4}$$

*Dans ce cas*

$$\sup_{\sum_{i=1}^{l}|v_i|\leq m}\left\|\prod_{i=1}^{l}\partial_x^{v_i}u_i\right\|_{W^{m,p}(\Omega)}\leq c\prod_{i=1}^{l}\|u_i\|_{W^{m,p}(\Omega)} \tag{1.2.5}$$

*De plus si* $m-\dfrac{n}{p}>0$ *, on a*

$$W^{m,p}(\Omega)\subset\begin{cases} C\left(\overline{\Omega}\right) & ,\ \Omega \text{ bornée.} \\ \\ C(\mathbb{R}^n) & ,\ \Omega=\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

**Théorème 1.2.2** *Soit* $\Omega$ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *à frontière régulière.*

*Soient* $p,q$ *tels que* $1\leq q\leq p\leq\infty$*. Alors*

***(1)*** *si* $\ 1\leq p<n,$ *Alors*

$$W^{1,p}(\Omega)\cap L^{q}(\Omega)\subset L^{r}(\Omega)\,,$$

*avec l'estimation*

$$\|u\|_{L^{r}(\Omega)}\leq C_{p,q,r}\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{a}\,\|u\|_{L^{q}(\Omega)}^{1-a}\ \ ,\ u\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^{q}(\Omega)\,. \tag{1.2.7}$$

$q\leq r\leq\frac{np}{n-p}$*, le paramètre* $a$ *est donné par*

$$\frac{1}{r}=a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1-a}{q}$$

***(2)*** *si* $\ p=n,$ *Alors*

$$W^{1,n}(\Omega)\cap L^{q}(\Omega)\subset L^{r}(\Omega)\,,$$

*avec l'estimation*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C_{p,q,r} \|u\|^a_{W^{1,n}(\Omega)} \|u\|^{1-a}_{L^q(\Omega)}, \; u \in W^{1,n}(\Omega) \cap L^q(\Omega). \tag{1.2.8}$$

$q \leq r < \infty$*, le paramètre* $a$ *donné par*

$$\frac{1}{r} = \frac{1-a}{q}$$

***(3)*** *si* $\quad n < p \leq \infty, \quad$ *Alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega) \subset L^r(\Omega).$$

*avec l'estimation*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C_{p,q,r} \|u\|^a_{W^{1,p}(\Omega)} \|u\|^{1-a}_{L^q(\Omega)}, \; u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega). \tag{1.2.9}$$

$q \leq r \leq \infty$*, le paramètre* $a$ *donné par*

$$\frac{1}{r} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1-a}{q}$$

**Preuve :** Cf [6] , [10] .

## 1.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit $X$ un espace de Banach, on note par $C([0,T];X)$ l'espace des fonctions continues $u : [0,T] \longmapsto X$ muni de la norme

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \underset{0 \leq t \leq T}{Max} \|u(t)\|_X$$

$C([0,T];X)$ est un espace de Banach.

On définit $L^p(0,T;X)$ l'espace des fonctions $t \longrightarrow f(t)$ mesurables de $[0,T] \longrightarrow X$ (pour la mesure $dt$) de norme

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T |f(t)|^p_X \, dt\right)^{1/p} < \infty \; ,$$

si $p = \infty$

$$\|f(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \underset{t \in [0,T]}{supess} \|f(t)\|_X \, .$$

**Théorème 1.3.1** *Suppose* $u \in L^2(0,T;H^{k+2}(\Omega))$ *et* $u_t \in L^2(0,T;H^k(\Omega))$, *pour* $k \geq 0$.

*Alors* $u \in C(0,T;H^{k+1}(\Omega))$.

*de plus*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(0,T;H^{k+2}(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;H^k(\Omega))}). \tag{1.3.1}$$

*où* $C$ *depend de* $T$, $\Omega$, *et* $k$ .

**Preuve :** Cf [10] .

**Théorème 1.3.2** *Soit* $X$ *un espace de Banach, on note par* $C([a,b];X)$ *l'espace des fonctions continues* $f : [a,b] \longmapsto X$. *Alors*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\|_X \leq \int_a^b \|f(t)\|_X \,dt \tag{1.3.2}$$

**Preuve :** Cf [6] , [10] .

**Définition 1.3.1** *Soit* $X$ *,espace de Banach. On dit que la suite* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *converge faiblement vers* $u \in X$ *,et on note* $u_k \rightharpoonup u$

*si* $\langle u^*, u_k\rangle \to \langle u^*, u\rangle$ *pour toute forme linéaire* $u^* \in X^*$.

On a deux théorèmes importants :

**Théorème 1.3.3** *Soit* $X$ *un espace de Banach réflexif . On suppose que la suite* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *est bornée.*

*Alors il existe une sous-suite* $\left\{u_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *et* $u \in X$ *tq* $u_{k_j} \rightharpoonup u$ .

**Théorème 1.3.4** ***(Théorème de Aubin)*** *Si la suite* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *bornée dans* $L^2(0,T;X)$ *et* $\{u_k'\}_{k=1}^{\infty}$ *bornée dans* $L^2(0,T;Z)$ *avec les injections* $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ *continues et* $X \hookrightarrow Y$ *compact. Alors la suite*

$$\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ est relativement compacte dans } L^2(0,T;Y).$$

**Preuve :** Cf [10] .

**Théorème 1.3.5** *(Théorème du point fixe de Schauder)*

*Soit $X$ un espace de Banach, $M$ un sous ensemble non vide de $X$.*

*On suppose que*

- *$M$ est convexe et compact,*
- *$A : M \to M$ , continue.*

*Alors $A$ admet un point fixe dans $M$.*

**Preuve :** Cf [10].

## 1.4 Lemmes techniques

### 1.4.1 Inégalité différentielle

#### Inégalité différentielle classique

Soit $a(t)$, $f(t)$ deux fonctions continues sur $[0,T]$, et soit $u(t)$ une fonction dérivable sur $[0,T]$ satisfaisant l'équation différentielle suivante :

$$u'(t) + a(t)u \leq f(t),$$

alors

$$u(t) \leq e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} \left[ u(0) + \int_0^t e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} f(s)\, ds \right] \quad \text{pour } t \in [0,T] \tag{1.4.1}$$

**Preuve :** Cf [10] .

#### Inégalité de Gronwall

**Proposition 1.4.1** i) *Soit $\eta(t)$ fonction continue positive sur $[0,T]$. Si*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \quad \text{où} \quad \phi(t) \quad \text{et} \quad \psi(t) \quad \text{positives,}$$

*alors*

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[ \eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds \right] \quad \text{pour } t \in [0,T]. \tag{1.4.2}$$

ii) *En particulier, si*

$$\eta' \leq \phi.\eta \ \text{ dans } [0,T] \ \text{ et } \eta(0) = 0$$

*donc*

$$\eta \equiv 0.$$

**Preuve :** Cf [10]

### 1.4.2 Inégalités incontournables.

#### Inégalité de Cauchy

Soient $a, b > 0, \varepsilon > 0$ alors

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \tag{1.4.3}$$

#### Inégalité de Young

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.4.4}$$

#### Inégalité de Hölder

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}\,. \tag{1.4.5}$$

#### Inégalité de Hölder dans le cas général

Soient $1 \leq p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$ et $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$.

$$\int_\Omega |u_1 \ldots u_n|\, dx \leq \prod_{k=1}^{n} \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}\,. \tag{1.4.6}$$

**Inégalité de Minkowski**

Pour $p \geq 1$,

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{1.4.7}$$

**Inégalité d'interpolation dans les espaces $\mathbf{L^p}$**

Soient $1 \leq s, r, t \leq \infty$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}$ alors

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^s(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^t(\Omega)}\,, \quad \forall u \in L^s(\Omega) \cap \; L^s(\Omega). \tag{1.4.8}$$

**Formule de Green**

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ de classe $C^1$, alors

$$\int_{\Omega} \triangle u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \;;\; \forall u \in H^2(\Omega)\,, \tag{1.4.9}$$

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla \upsilon dx = -\int_{\Omega} \triangle u \upsilon dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \upsilon d\sigma \,;\, \forall u \in H^2(\Omega) \text{ et } \upsilon \in H^1(\Omega)\,, \tag{1.4.10}$$

$$\int_{\Omega} \triangle u \upsilon - \triangle \upsilon u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} u d\sigma.\; \forall u \in H^2(\Omega) \text{ et } \upsilon \in H^2(\Omega) \tag{1.4.11}$$

## 1.5 Existence, unicité et régularité de la solution pour un problème parabolique avec condition de Neumann

### 1.5.1 Position du problème.

On considére le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - a_1 \triangle u + a_2 u + \nabla.(u \nabla a_3) = b \quad ; \quad t \geq 0, x \in \ \Omega, \\ u\,(0,.) = \ u_0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5.1}$$

où $a_1, a_2 > 0$ sont des constantes, $a_3 \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega))$, $\partial_\nu a_3 = 0$ et $b(t,x) \in L^2(0,T;H^1\,(\Omega))$ pour $T > 0$ fixé,

on se propose de détailler les calculs dans le cas de Neumann homogène ($\partial_\nu u = \nabla u.\nu, \nu$ : la normal extérieure à $\partial\Omega$).

### 1.5.2 Existence et unicité de solution faible du problème (1.5.1).

**Définition 1.5.1** *Soit $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ tels que $u_t \in L^2(Q_T)$ est une solution faible de la problème parabolique* (1.5.1) *s'il vérifie la formulation suivante*

$$(\tfrac{d}{dt}u(t), \upsilon) + (a_1 \nabla u, \nabla \upsilon) + (a_2 u, \upsilon) - (u \nabla a_3, \nabla \upsilon) = (b, \upsilon),$$

*pour tout $\upsilon \in H^1\,(\Omega)$ et $0 \leq t \leq T$.*

**Théorème 1.5.1** *Supposons que $u_0 \in L^2\,(\Omega)$, alors le problème* (1.5.1) *admet une unique solution*

$$u \in L^2(0,T;H^1\,(\Omega)) \text{ telle que } u_t \in L^2(Q_T). \tag{1.5.2}$$

On utilise la méthode de Galerkin. On va construire une approximation de la solution dans un espace de dimension finie et conclut par passage à la limite.

**1.Approximation de Galerkin**

Soit $\{\lambda_i\}_{i\geq 0}$ la suite des valeurs propres de $-\triangle$ avec condition de Neumann homogène et $w_k(x)$ les fonctions propres associées : $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \to +\infty$,

$$\{w_k(x)\}_{k\geq 0} \text{ orthonormale dans } L^2(\Omega), \tag{1.5.3}$$

avec

$$\{w_k(x)\}_{k\geq 0} \text{ orthogonale dans } H^1(\Omega), \tag{1.5.4}$$

et on a

$$\begin{cases} \triangle w_k(x) = -\lambda_k w_k(x) \\ \\ \partial_\nu w_k(x) = 0 \text{ ; sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5.5}$$

on va chercher $u^j$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ $u^j : [0,T] \to H^1(\Omega)$ de la forme :

$$u^j(t) = \sum_{k=1}^{j} d_k^j(t)\, w_k, \tag{1.5.6}$$

les coefficients $d_k^j(t)$ $(0 \leq t \leq T \;\; ; \; k = 1, ..., j)$ vérifient

$$d_k^j(0) = (u_0, w_k), \tag{1.5.7}$$

et satisfont la formulation

$$(\frac{du^j}{dt}, w_k) + (a_1 \nabla u^j, \nabla w_k) + (a_2 u^j, w_k) + (u^j \nabla a_3, \nabla w_k) = (b, w_k).\, (0 \leq t \leq T, k = 1, ..., j) \tag{1.5.8}$$

**Proposition 1.5.1** *Pour tout entier $j = 1, 2, ...$il existe une unique solution $u^j$ de la forme* $(1.5.6)$ *satisfie* $(1.5.7), (1.5.8)$.

**Preuve :** $u^j$ a la structure $(1.5.6)$, d'après $(1.5.3)$ on a

$$(\frac{du^j}{dt}, w_k) = d_k^{j\prime}(t) \tag{1.5.9}$$

et

$$(a_1 \nabla u^j, \nabla w_k) + (a_2 u^j, w_k) - (u^j \nabla a_3, \nabla w_k) = \sum_{i=1}^{j} e_{k,i}(t) d_i^j(t) \tag{1.5.10}$$

où

$$e_{k,i}(t) = (a_1 \nabla w_i, \nabla w_k) + (a_2 w_i, w_k) - (w_k \nabla a_3, \nabla w_k) \quad (k, i = 1, ..., j) \tag{1.5.11}$$

et on écrit

$$b_k(t) = (b, w_k) \quad (k, i = 1, ..., j). \tag{1.5.12}$$

Alors de $(1.5.9), (1.5.10), (1.5.11), (1.5.12)$ on obtient un système différentielle de la forme

$$d_k^{j\prime}(t) + \sum_{i=1}^{j} e_{k,i}(t) d_i^j(t) = b_k(t) \quad (k = 1, ..., j) \tag{1.5.13}$$

le système satisfait la condition initiale $(1.5.7)$.

D'après les résultats généraux sur les systmès d'equations différentielles on est assuré l'éxistence d'une solution $d^j(t) = (d_i^1(t) ... d_i^j(t))$ de $(1.5.13), (1.5.7)$ et donc $u^j$ définie par $(1.5.6)$.

**2.Estimation d'énergie :**

**Proposition 1.5.2** *Il existe $C > 0$, depend de $\Omega, T$ tel que :*

$$\|\frac{du^j}{dt}\|^2_{L^2(Q_T)} + \|u^j\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C\left(T, \|u_0\|_{H^2(\Omega)}, \|a_3\|^2_{L^2(0,T\,;H^3(\Omega))}, \|b\|^2_{L^2(Q_T)}\right), \tag{1.5.14}$$

**Preuve :** on multiplie l'équation (1.5.8) d'indice $k$ par $d_k^j(t)$ et l'on somme en $k$, il vient

$$\tfrac{d}{2dt}\|u^j\|^2 + a_1\|\nabla u^j\|^2 + a_2\|u^j\|^2 = (b, u^j) + (u^j \nabla a_3, \nabla u^j),$$

d'aprés l'inégalité de Young $\exists c > 0$ tel que

$$(b, u^j) \leq c\|b\|^2 + \frac{a_1}{2}\|u^j\|^2, \quad (u^j \nabla a_3, \nabla u^j) \leq c\|u^j \nabla a_3\|^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla u^j\|^2$$

en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} (u^j \nabla a_3, \nabla u^j) &\leq c\|u^j \nabla a_3\|^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla u^j\|^2 \\ &\leq c\|\nabla a_3\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u^j\|^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla u^j\|^2, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{d}{2dt}\|u^j\|^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla u^j\|^2 + \frac{a_2}{2}\|u^j\|^2 \leq c\|\nabla a_3\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u^j\|^2 + c\|b\|^2,$$

et comme

$$\|a_3\|^2_{H^3(\Omega)} \leq c_T,$$

on a

$$\frac{d}{2dt}\|u^j\|^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla u^j\|^2 + \frac{a_2}{2}\|u^j\|^2 \leq c_T\|u^j\|^2 + c\|b\|^2,$$

d'après l'inégalité de Gronwall, on a

$$\|u^j\|^2 \leq \exp\left(2Tc_T\right)\left[\|u_0^j\|^2 + c\|b\|^2_{L^2(0,T\,;\Omega)}\right], \tag{1.5.15}$$

on multiplie (1.5.6) par $w_k$ avec intégration sur $\Omega$ avec l'utilisation de (1.5.7), il vient pour $t = 0$ :

$$(u_0^j, w_k) = (u_0, w_k) \tag{1.5.16}$$

on multiplie (1.5.16) d'indice $k$ par $d_k^j(0)$ et l'on somme en $k$, il vient

$$(u_0^j, u_0^j) = \left(u_0, u_0^j\right)$$

d'après Hölder

$$\|u_0^j\|^2 \leq \|u_0^j\|\|u_0\|,$$

donc on a

$$\|u_0^j\| \leq \|u_0\|, \tag{1.5.17}$$

alors

$$\|u^j\|^2 + a_1\|\nabla u^j\|^2_{L^2(Q_T)} + a_2\|u^j\|^2_{L^2(Q_T)} \leq 2Tc_T\exp\left(2Tc_T\right)\left[\|u_0\|^2 + c\|b\|^2_{L^2(Q_T)}\right], \tag{1.5.18}$$

On multiplie l'équation (1.5.8) d'indice $k$ par $d_k^{j\prime}(t)$ et l'on somme en $k$, il vient

$$\|\frac{du^j}{dt}\|^2 + a_1\frac{d}{2dt}\|\nabla u^j\|^2 + a_2\frac{d}{2dt}\|u^j\|^2 = (b, u_t^j) - (\nabla a_3 u^j, \nabla\frac{du^j}{dt}), \tag{1.5.19}$$

d'après la formule de Green, on a

$$(u^j\nabla a_3, \nabla\frac{du^j}{dt}) = \int_{\partial\Omega}\nabla a_3 u^j\frac{du^j}{dt}v d\sigma - (\nabla\left(u^j\nabla a_3\right), \frac{du^j}{dt}),$$

et comme $\nabla a_3 = 0$ sur $\partial\Omega$, (1.5.19) devient

$$\|\frac{du^j}{dt}\|^2 + a_1\frac{d}{2dt}\|\nabla u^j\|^2 + a_2\frac{d}{2dt}\|u^j\|^2 = (b, \frac{du^j}{dt}) + (\nabla(\nabla a_3 u^j), \frac{du^j}{dt}), \tag{1.5.20}$$

d'après l'inégalité de Young $\exists c > 0$ tel que

$$(b, \frac{du^j}{dt}) \leq c\|b\|^2 + \frac{a_1}{4}\|\frac{du^j}{dt}\|^2 \; ; \; (\nabla(a_3 u^j), \frac{du^j}{dt}) \leq c\|\nabla(\nabla a_3 u^j)\|^2 + \frac{a_1}{4}\|\frac{du^j}{dt}\|^2, \qquad (1.5.21)$$

en appliquant l'inégalité de Hölder

$$c\|\nabla.(\nabla a_3 u^j)\| \leq c\|u^j\|^2_{H^1(\Omega)}(\|\nabla a_3\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\triangle a_3\|^2_{L^4(\Omega)}) \qquad (1.5.22)$$

et comme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, d'après $(1.2.2)$, $(1.2.3)$, on a

$$\|\nabla a_3\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\triangle a_3\|^2_{L^4(\Omega)} \leq c\|a_3\|^2_{H^3(\Omega)}, \qquad (1.5.23)$$

on remlace $(1.5.21)$, $(1.5.22)$, $(1.5.23)$ dans $(1.5.20)$, on obtient

$$\tfrac{1}{2}\|\frac{du^j}{dt}\|^2 + a_1\frac{d}{2dt}\|\nabla u^j\|^2 + a_2\frac{d}{2dt}\|u^j\|^2 \leq c\|b\|^2 + c\|u^j\|^2_{H^1(\Omega)}\|a_3\|^2_{H^3(\Omega)}, \qquad (1.5.24)$$

et comme

$$\|a_3\|^2_{H^3(\Omega)} \leq c_T,$$

on a

$$\tfrac{1}{2}\|\frac{du^j}{dt}\|^2 + a_1\frac{d}{2dt}\|\nabla u^j\|^2 + a_2\frac{d}{2dt}\|u^j\|^2 \leq c\|b\|^2 + c_T\|u^j\|^2_{H^1(\Omega)},$$

en intégrant par rapport au temps

$$\|\frac{du^j}{dt}\|^2_{L^2(Q_T)} \leq c_T\|u_0\|^2 T(2c_T + 1)\exp(2Tc_T) + c\|b\|^2_{L^2(Q_T)} + \|u_0^j\|^2_{H^1(\Omega)}, \qquad (1.5.25)$$

d'après $(1.5.18)$, $(1.5.25)$, on a $(1.5.14)$.

**3.L'Existence :**

On fixe un entier $N$ et on choisit

$$v \in C^1\left(0, T; H^1(\Omega)\right) \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^{N} d_N^i w_i \ ,$$

En multipliant l'équation $(1.5.1)$ par $v$, avec intégration par rapport au $t$, on obtient la formulation suivante

$$\int_0^T (\frac{du^j}{dt}, v)dt + B\left[u^j, v; t\right] = \int_0^T (b, v)dt,$$

$$\text{où} \quad B\left[u^j, v; t\right] = \int_0^T (a_2 u^j, v)dt + \int_0^T (a_1\nabla u^j - (u^j\nabla a_3), \nabla v)dt \ ,$$

D'après l'éstimation d'énergie (1.5.14) on a :

$\{u^j\}$ bornée dans $L^2(0,T\,;H^1(\Omega))$ et $\{u_t^j\}$ bornée dans $L^2(Q_T)$,

donc on peut extraire une sous-suite $j_l$ pour $l\to+\infty$ on a :

$u^{j_l}\rightharpoonup u\in L^2(0,T\,;H^1(\Omega))$, $\dfrac{du^{j_l}}{dt}\rightharpoonup\dfrac{du}{dt}\in L^2(Q_T)$

on remplace $j$ par $j_l$ dans donc

$$\int_0^T(\frac{du^{j_l}}{dt},v)dt+B\left[u^{j_l},v;t\right]=\int_0^T(b,v)dt,$$

on fait $l\to+\infty$, donc on a

$$\int_0^T(\frac{du}{dt},v)dt+B\left[u,v;t\right]=\int_0^T(b,v)dt,$$

d'où le résultat d'existence pour le problème (1.5.1).

**4.L'Unicité :**

Pour montrer l'unicité on suppose qu'il existe deux solutions $u_1,u_2$ dans $L^2(0,T\,;H^1(\Omega))$ de (1.5.1), alors

$$\partial_t(u_1-u_2)-a_1\triangle(u_1-u_2)+a_2(u_1-u_2)=-\nabla.((u_1-u_2)\nabla a_3),$$

on multiplie cette dernière équation par $(u_1-u_2)$ et on intégre sur $\Omega$ :

$$\frac{d}{2dt}\|u_1-u_2\|^2+a_1\|\nabla(u_1-u_2)\|^2+a_2\|u_1-u_2\|^2=\textstyle\int_\Omega(u_1-u_2)\nabla a_3\nabla(u_1-u_2)\,dx$$

et d'après l'inégalité de Young et de Hölder :

$$\frac{d}{2dt}\|u_1-u_2\|^2+a_1\|\nabla(u_1-u_2)\|^2+a_2\|u_1-u_2\|^2\le c\|\nabla a_3\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_1-u_2\|^2+\frac{a_1}{2}\|\nabla(u_1-u_2)\|^2$$

comme $\|\nabla a_3\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_T$, alors

$$\frac{d}{dt}\|u_1-u_2\|^2\le 2c_T\|u_1-u_2\|^2$$

d'après l'inégalité de Gronwall on a pour $t\in[0,T\,]$

$$\|u_1-u_2\|^2(t)\le\|u_1-u_2\|^2(0)\exp(2tc_T),$$

comme $\|u_1-u_2\|^2(0)=0$, alors $\|u_1-u_2\|^2(t)=0$, donc

$$u_1=u_2,$$

d'où le résultat d'unicité pour le problème (1.5.1).

### 1.5.3 Régularité de la solution

**Définition 1.5.2** *Si $u \in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ tels que $u_t \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ vérifie la formulation forte suivante*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - a_1 \triangle u + a_2 u + \nabla.(u \nabla a_3) = b \quad ; \quad 0 \leq t \leq T, \ x \in \ \Omega, \\ u(0,.) = \ u_0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

*dans ce cas la solution de la problème parabolique* (1.5.1) *est une solution forte.*

**Théorème 1.5.2** *Supposons que $u_0 \in H^2(\Omega)$, alors le problème* (1.5.1) *une unique solution*

$$u \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \text{ telle que } u_t \in L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{1.5.26}$$

*On utilise la méthode de Galerkin. On va construire une approximation de la solution dans un espace de dimension finie et conclut par passage à la limite.*

**1.Approximation de Galerkin**

Pour la régularité on remplace (1.5.6) ans (1.5.8) avec multiplication par $\lambda_k^2$, alors pour $0 \leq t \leq T$, $k = 1, ..., j$

$$\sum_{i=1}^{j} d_i^{j\prime}(t)(\triangle w_i, \triangle w_k) + \sum_{i=1}^{j} d_i^j(t)(a_1 \nabla \triangle w_i, \nabla \triangle w_k) + \sum_{i=1}^{j} d_i^j(t)(a_2 \triangle w_i, \triangle w_k) \tag{1.5.27}$$
$$= \sum_{i=1}^{j} d_i^j(t)(\nabla a_3 \triangle w_k, \nabla \triangle w_k) + (b, \triangle\triangle w_k).$$

d'après la formule de Green, on a

$$(b, \triangle\triangle w_k) = \int_{\partial\Omega} b \partial_v(\triangle w_k) d\sigma - (\nabla b, \nabla \triangle w_k),$$

en utilisant (1.5.5), on a

$$\nabla \triangle w_k = -\lambda_k \nabla w_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

donc (1.5.27) devient

$$\sum_{i=1}^{j} d_i^{j\prime}(t)(\triangle w_i, \triangle w_k) + \sum_{i=1}^{j} d_i^j(t)(a_1 \nabla \triangle w_i, \nabla \triangle w_k) + \sum_{i=1}^{j} d_i^j(t)(a_2 \triangle w_i, \triangle w_k) \tag{1.5.28}$$
$$= \sum_{i=1}^{j} d_i^j(t)(\nabla a_3 \triangle w_k, \nabla \triangle w_k) - (\nabla b, \nabla \triangle w_k).$$

**2.Estimation d'énergie :**

**Proposition 1.5.3** *Il existe $C > 0$, depend de $\Omega, T$ tel que :*

$$\|\frac{du^j}{dt}\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|u^j\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leq C\left(T, \|u_0\|_{H^2(\Omega)}, \|a_3\|^2_{L^2(0,T\ ;H^3(\Omega))}, \|b\|^2_{L^2(Q_T)}\right), \tag{1.5.29}$$

**Preuve :** On multiplie l'équation (1.5.28) d'indice $k$ par $d_k^j(t)$ et l'on somme en $k$, il vient

$$\frac{d}{2dt}\|\triangle u^j\|^2 + a_1\|\nabla\triangle u^j\|^2 + a_2\|\triangle u^j\|^2 = -(\nabla b, \nabla\triangle u^j) + (\nabla a_3\triangle u^j, \nabla\triangle u^j),$$

d'après l'inégalité de Young $\exists c > 0$ tel que

$$-(\nabla b, \nabla\triangle u^j) \leq c\|\nabla b\|^2 + \frac{a_1}{4}\|\nabla\triangle u^j\|^2\ ;\ (\triangle u^j\nabla a_3, \nabla\triangle u^j) \leq c\|\nabla a_3\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle u^j\|^2 + \frac{a_1}{4}\|\nabla\triangle u^j\|^2,$$

alors

$$\frac{d}{2dt}\|\triangle u^j\|^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla\triangle u^j\|^2 + \frac{a_2}{2}\|\triangle u^j\|^2 \leq c\|\nabla b\|^2 + c\|\nabla a_3\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle u^j\|^2, \tag{1.5.30}$$

et comme

$$\|a_3\|^2_{H^3(\Omega)} \leq c_T,$$

(1.5.30) devient

$$\frac{d}{2dt}\|\triangle u^j\|^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla\triangle u^j\|^2 + \frac{a_2}{2}\|\triangle u^j\|^2 \leq c\|\nabla b\|^2 + c_T\|\triangle u^j\|^2, \tag{1.5.31}$$

d'aprés l'inegalité de Gronwall, on a

$$\|\triangle u^j\|^2 \leq \exp(2Tc_T)\left[\|\triangle u_0^j\|^2 + c\|b\|^2_{L^2(0,T\ ;H^1(\Omega))}\right], \tag{1.5.32}$$

en multipliant (1.5.16) par $\lambda_k^2$, d'après (1.5.5) on a

$$(\triangle u_0^j, \triangle w_k) = (\triangle u_0, \triangle w_k) \tag{1.5.33}$$

on multiplie (1.5.33) d'indice $k$ par $d_k^j(0)$ et l'on somme en $k$, il vient

$$\|\triangle u_0^j\|^2 \leq \|\triangle u_0^j\|\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$$

donc on a

$$\|\triangle u_0^j\| \leq \|u_0\|_{H^2(\Omega)}, \tag{1.5.34}$$

en intégrant (1.5.31) par rapport au temps et d'après (1.5.32) ,(1.5.34), on a :

$$\|\nabla\triangle u^j\|^2_{L^2(Q_T)} \leq c_T(1+\exp(2Tc_T))\left[\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + c\|b\|^2_{L^2(0,T\ ;H^1(\Omega))}\right]. \tag{1.5.35}$$

En multipliant (1.5.8) par $-\lambda_k$ et d'après (1.5.5) on obtient pour $0 \leq t \leq T$, $k = 1, ..., j$

$$\sum_{i=1}^{j} d_i'^j(t)(\nabla w_i, \nabla w_k) + \sum_{i=1}^{j} d_i^j(t)(a_1\triangle w_i, \triangle w_k) + \sum_{i=1}^{j} d_i^j(t)(a_2\nabla w_i, \nabla w_k) \tag{1.5.36}$$

$$= \sum_{i=1}^{j} d_i^j(t)(\nabla.(w_k\nabla a_3), \triangle w_k) - (\nabla b, \nabla w_k).$$

On multiplie l'équation (1.5.36) d'indice $k$ par $d_j^{k\prime}(t)$ et l'on somme en $k$, d'après l'inégalité deYoung avec l'injection de sobolev (1.2.4), il vient

$$\tfrac{1}{2}\|\nabla\frac{du^j}{dt}\|^2 + a_1\frac{d}{2dt}\|\triangle u^j\|^2 + a_2\frac{d}{2dt}\|\nabla u^j\|^2 \leq c\|\nabla b\|^2 + c\|u^j\|^2_{H^2(\Omega)}\|a_3\|_{H^3(\Omega)},$$

et comme

$$\|a_{\ 3}\|^2_{H^3(\Omega)} \leq c_T,$$

on a

$$\|\nabla\frac{du^j}{dt}\|^2_{L^2(Q_T)} \leq c_T(1+T\exp(2Tc_T))\left[\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + c\|b\|^2_{L^2(0,T\ ;H^1(\Omega))}\right], \tag{1.5.37}$$

de (1.5.35) , (1.5.37) on a (1.5.29).

**3.Passage à la limite :**

D'après l'estimation d'énergie (1.5.29) on a :

$\{u^j\}$ bornée dans $L^2(0,T\ ;H^3(\Omega))$ et $\left\{\frac{du^j}{dt}\right\}$ bornée dans $L^2(0,T\ ;H^1(\Omega))$,

donc on peut extraire une sous-suite $j_l$ pour $l \to +\infty$ on a :

$u^{j_l} \rightharpoonup u \in L^2(0,T\ ;H^3(\Omega))$, $u_t^{j_l} \rightharpoonup u_t \in L^2(0,T\ ;H^1(\Omega))$,

d'où le résultat de régularitè pour le problème (1.5.1).

# Deuxième partie

## .1$^{er}$.Modèle.

# Chapitre 2

# Existence locale en temps et unicité de la solution

## Sommaire



Dans ce chapitre, nous traitons l'existence locale pour le modèle de l'invasion.

On commencera par étudier chaque équation et fixe les autres, ces résultats permettront de définir pour tout $T > 0$, une application $\mathcal{L}$ continue dans un sous-ensemble convexe compact qui permette d'utiliser le théorème du point fixe de Schauder pour établir l'existence d'une solution locale. Le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence pas l'unicité, alors on montrera après. Pour la régularité en temps, on utilise un théorème d'Evans.

## 2.1 Introduction

On se propose d'étudier le problème suivant introduit par M.A.J. Chaplain et al [1] et dont lequel nous avons négligé le terme de chemotaxis, en tenant compte uniquement de l'invasion.

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = D\triangle n - \ \rho\nabla.\left(n\nabla f\right) \\ \\ \dfrac{df}{dt} = -\gamma m f & t \geq 0, x \in \ \Omega, \\ \\ \dfrac{dm}{dt} = \varepsilon\triangle m + \alpha n - \upsilon m \\ \\ \begin{cases} \partial_\nu n \ = \ 0, \quad \partial_\nu f_0 \ = \ 0, \quad \partial_\nu m \ = \ 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \\ n\left(0,.\right) = \ n_0 \ , m\left(0,.\right) = \ m_0, \ f\left(0,.\right) = \ f_0 \ \text{ dans } \Omega \end{cases} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

$n = n(t, x)$ : densité de la cellule tumorale.

$m = m(t, x)$ : concentration de matrice dégradative d'enzyme (MDE)

$f = f(t, x)$ : concentration de matrice extracellulaire (ECM).

$\partial_\nu u = \nabla u.\nu, \nu$ : la normal extérieure à $\partial\Omega$.

$\Omega$ : domaine borné de $\mathbb{R}^n$ , de frontière $\partial\Omega$ régulière.

$D; \rho; \gamma; \varepsilon; \alpha; \upsilon$ : constantes positives.

## 2.2 Existence d'une solution locale .

Dans toute la suite on supposera que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$. On se propose dans un premier temps de montrer le résultant d'existence locale suivant

**Théorème 2.2.1** *Supposons que* $(n_0, m_0, f_0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$. *Alors, il existe* $T > 0$ *tel que le problème* (2.1.1) *admette une solution*

$$(n, m, f) \in (C([0,T]; H^2(\Omega)))^3.$$

La preuve est basée sur le théorème du point fixe de Schauder et les sections suivantes sont des étapes préliminaires à l'application de ce dernier.

On commencera par étudier l'équation parabolique linéaire satisfaite par MDE (Matrix Degrading Enzyme) .

### 2.2.1 L'équation parabolique linéaire satisfaite par MDE

On fixe $T > 0, \gamma_* > 0$ et $n \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$, $n \geq 0$. En vue d'obtenir une solution telle que $m \geq \gamma_*$ pour le problème

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = \alpha n + \varepsilon \triangle m - \nu m \text{ dans } [0,T] \times \Omega \\ \\ \partial_\nu m = 0 \quad \text{sur} \quad [0,T] \times \partial\Omega \\ \\ m(0,x) = m_0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{2.2.1}$$

on supposera que $m_0 \geq \gamma_*$ et on considère le problème pinalisé suivant pour $\epsilon > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = \alpha n + \varepsilon \triangle m - \dfrac{vm(m-\gamma_*)}{|m-\gamma_*| + \epsilon} \text{ dans } [0,T] \times \Omega \\ \\ \partial_\nu m = 0 \quad \text{sur} \quad [0,T] \times \partial\Omega \\ \\ m(0,x) = m_0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{2.2.2}$$

La recherche de solutions $m \geq \gamma_*$ nous permettra par la suite de montrer que la solution locale ainsi construite est en fait globale et nous permettra également d'étudier le comportement asymptotique de la solution .

**Proposition 2.2.1** *Soient* $n \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ *et* $m_0 \in H^2(\Omega)$.

*Alors, il existe une unique solution de* (1) *dans* $L^2(0,T;H^3(\Omega))$.

*De plus, s'il existe* $\gamma_* > 0$ *tel que* $m_0 \geq \gamma_*$, *on a*

$$m\,(t,x) \geq \gamma_*,\ p.p.\ dans\quad [0,T] \times \Omega. \tag{2.2.3}$$

*Et on a l'estimation suivante pour* $t \in [0,T]$

$$\|\textstyle\int_0^t m\,(\tau,x)\,d\tau\|^2_{H^k(\Omega)} \leq t\ c\left(\|m_0\|_{H^{k-1}(\Omega)}\right)\ \left(\|n\|^2_{L^2(0,T;H^{k-2}(\Omega))}+1\right),\ k=2;3. \tag{2.2.4}$$

*où* $c\left(\|m_0\|_{H^{k-1}(\Omega)}\right)$ *représente une constante qui ne dépend que de* $\|m_0\|_{H^{k-1}(\Omega)}$ *et des constantes intervenant dans l'équation.*

**Preuve : 1$^{\text{èr}}$etape :** La preuve de (2.2.3) , supposons qu'il existe $\gamma_* > 0$ tel que $m_0 \geq \gamma_*$. On note

$$\begin{aligned} m^- &= sup\,\{-m,0\} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\ (m-\gamma_*)^- &= sup\,\{-(m-\gamma_*),0\} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

on comence à montrer la positivité de la solution $m$ pour $n \geq 0$, on va multiplie l'équation (2.2.1) par $-m^-$et en intégrant sur $\Omega$, on obtient :

$$\frac{d}{2dt}\|m^-\|^2 + \varepsilon\|\nabla m^-\|^2 + \alpha\textstyle\int_\Omega n m^- dx = -\nu\|m^-\|^2,$$

D'après l'inégalité de Gronwall

$$\|m^-\|^2 \leq \|m_0{}^-\|^2$$

et comme $m_0{}^- = 0$ alors $m^- = 0$ pp.

En multipliant l'équation (1) par $-(m-\gamma_*)^-$et en intégrant sur $\Omega$, on obtient :

$$\frac{d}{2dt}\|(m-\gamma_*)^-\|^2 + \varepsilon\|\nabla(m-\gamma_*)^-\|^2 + \alpha\textstyle\int_\Omega n(m-\gamma_*)^- dx = \nu\textstyle\int_\Omega \dfrac{m(m-\gamma_*)(m-\gamma_*)^-}{|m-\gamma_*|+\epsilon}dx,$$

pour $n \geq 0$ et

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{vm(m-\gamma_*)(m-\gamma_*)^-}{|m-\gamma_*|+\epsilon} dx &= -\int_{\Omega} \frac{vm(m-\gamma_*)^-(m-\gamma_*)^-}{|m-\gamma_*|+\epsilon} dx \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

alors

$$\frac{d}{dt}\|(m-\gamma_*)^-\|^2 = 0.$$

D'après l'inégalité de Gronwall

$$\|(m-\gamma_*)^-\|^2 \leq \|(m_0-\gamma_*)^-\|^2$$

et comme $(m_0-\gamma_*)^- = 0$ alors

$$(m-\gamma_*)^- = 0 \ \text{ pp.} \tag{2.2.5}$$

**2$^{\text{ème}}$etape :** Pour montrer l'éxistence de on utilise la proporieté d'opérateure pseudo-monotone, on va montrer que l'opérateur

$$Bm = -\varepsilon\triangle m + \frac{vm(m-\gamma_*)}{m-\gamma_*+\epsilon}$$

pseudomonotone, borné, coércive ; alors on peut conclure diréctement l'éxistence de solution .

$B$ **borné :**

On note $\|Bm\|_{(H^1(\Omega))'}$ la norme de l'espace dual de $H^1(\Omega)$, pour $m \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$

$$\begin{aligned}
\|Bm\|_{(H^1(\Omega))'} &\leq \left\|-\varepsilon\triangle m + \frac{vm(m-\gamma_*)}{m-\gamma_*+\epsilon}\right\|_{(H^1(\Omega))'} \\
&\leq \|-\varepsilon\triangle m\|_{(H^1(\Omega))'} + \left\|\frac{vm(m-\gamma_*)}{m-\gamma_*+\epsilon}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c\|m\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

$B$ **monotone :**

si $m_1, m_2 \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $m_1 \neq m_2$, on a

$$\langle Bm_2 - Bm_1, m_2 - m_1\rangle = \varepsilon\|\nabla m_2 - \nabla m_1\|^2_{L^2(\Omega)} + v\int_\Omega (m_2 - m_1)\left(\frac{vm_1(m_1-\gamma_*)}{m_1-\gamma_*+\epsilon} - \frac{vm_2(m_2-\gamma_*)}{m_2-\gamma_*+\epsilon}\right)dx$$

on note $I = v\int_\Omega (m_2 - m_1)\left(\frac{vm_1(m_1-\gamma_*)}{m_1-\gamma_*+\epsilon} - \frac{vm_2(m_2-\gamma_*)}{m_2-\gamma_*+\epsilon}\right)dx$, alors

$$\begin{aligned} I &= v\int_\Omega (m_2 - m_1)\left(\frac{vm_1(m_1-\gamma_*)}{m_1-\gamma_*+\epsilon} - \frac{vm_2(m_2-\gamma_*)}{m_2-\gamma_*+\epsilon}\right)dx \\ &= v\int_\Omega (m_2-m_1)^2\,dx + v\epsilon\int_\Omega \frac{(\gamma_*-\epsilon)(m_1-m_2)^2}{(m_1-\gamma_*+\epsilon)(m_2-\gamma_*+\epsilon)}dx, \end{aligned}$$

comme $\varepsilon\|\nabla m_2 - \nabla m_1\|^2_{L^2(\Omega)} > 0$, $\gamma_* - \epsilon > 0$ ( $\epsilon$ très petit ), alors

$$\langle Bm_2 - Bm_1, m_2 - m_1\rangle > 0, \text{ pour } m_2, m_1 \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),\ m_1 \neq m_2. \tag{2.2.6}$$

$B$ **hemicontinue :**

pour $m_1, m_2, m_3 \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, on a

$$\lambda \mapsto \langle B(m_1 + \lambda m_2), m_3\rangle \text{ continue pour } \lambda \in [0,1] \tag{2.2.7}$$

en effet

$$\langle B(m_1+\lambda m_2), m_3\rangle = -\varepsilon\int_\Omega m_3\triangle(m_1 + \lambda\, m_2) + \frac{v(m_1+\lambda\, m_2)(m_1+\lambda\, m_2 - \gamma_*)m_3}{m_1+\lambda\, m_2-\gamma_*+\epsilon}dx$$

pour $\epsilon > 0$, $\lambda \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} |\langle B(m_1+\lambda m_2), m_3\rangle| &= \left|\varepsilon\int_\Omega \nabla m_3\nabla m_1 + \lambda\ \nabla m_3\nabla m_2 + v\int_\Omega m_3 m_1 + \lambda\ m_3 m_2 dx\right| \\ &\le \{\varepsilon + v\}\|m_3\|_{H^1(\Omega)}(\|m_1\|_{H^1(\Omega)} + \|m_2\|_{H^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

$B$ **coércive :**

$$\begin{aligned} \lim_{\|m\|_{H^1(\Omega)}\to\infty}\frac{\langle Bm, m\rangle}{\|m\|} &= \lim_{\|m\|_{H^1(\Omega)}\to\infty}\frac{\varepsilon\|\nabla m\|^2 + v\|m\|^2_{L^2(\Omega)} - v\epsilon\int_\Omega\frac{m^2}{m-\gamma_*+\epsilon}dx}{\|m\|_{H^1(\Omega)}} \\ &\ge \lim_{\|m\|_{H^1(\Omega)}\to\infty}\frac{\min\{\varepsilon\ ; v\}\|m\|^2_{H^1(\Omega)} - v\epsilon\int_\Omega\frac{m^2}{m-\gamma_*+\epsilon}dx}{\|m\|_{H^1(\Omega)}} \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

car

$$0 \leq \lim_{\|m\|_{H^1(\Omega)} \to \infty} \frac{\int_\Omega \frac{v\epsilon m^2}{m-\gamma_*+\epsilon}dx}{\|m\|_{H^1(\Omega)}} \leq \lim_{\|m\|_{H^1(\Omega)} \to \infty} \frac{v\,|\Omega|\ \ \gamma_*^2}{\|m\|_{H^1(\Omega)}} = 0,$$

d'où

$$\lim_{\|m\| \to +\infty} \frac{\langle Bm, m\rangle}{\|m\|} = +\infty. \tag{2.2.8}$$

Finalement, d'aprés (2.2.6),(2.2.7)et(2.2.8), on a l'existene et l'unicite de solution $m$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ pour le problème (2.2.2) , si $\epsilon \to 0$ on a l'existence et l'unicite pour le problème (2.2.1) .

**3**$^{\text{ème}}$**etape :** on montre que $m \in L^2(0,\infty;H^3(\Omega))$.

On a $m \geq \gamma_*$, donc l'équation (2.2.2) devient

$$\partial_t m = \alpha n + \varepsilon \triangle m - \nu m.$$

On remplace dans le problème (1.5.1) de section 3.3 :

$a_1 = \varepsilon$, $a_2 = \nu$, $a_3 = 0$, $b(t,x) = \alpha n(t,x)$.

D'après le théorème 3.3.1, on a le résultat d'éxistence.

**Estimation d'énergie :**

D'après (1.5.10) Il existe $C > 0$, depend de $\Omega$ tel que :

$$\|\nabla \triangle m\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\triangle m\|^2_{L^2(Q_T)} + \|m\|^2_{L^2(Q_T)} \leq c_1 \|n\|^2_{L^2(0,T\,;H^1(\Omega))} + c_2 \|m_0\|^2_{H^2(\Omega)}, \tag{2.2.9}$$

avec $c_1$, $c_2$ deux constantes qui ne dépendent que $\varepsilon$, $\alpha$, $\upsilon$.et de $\Omega$

**Preuve de l'inégalité** (2.2.4) :

Pour $t \in [0,T]$ , $k = 2;3$, en utilisant l'inégalité (1.3.2) et celle de Hölder

$$\begin{aligned} \|\textstyle\int_0^t m d\tau\|^2_{H^k(\Omega)} &\leq \left(\textstyle\int_0^t \|m\|_{H^k(\Omega)} d\tau\right)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{t}\sqrt{\textstyle\int_0^t \|m\|^2_{H^k(\Omega)} d\tau}\right)^2 \leq t \textstyle\int_0^T \|m\|^2_{H^k(\Omega)} d\tau, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

or d'après (2.2.9)

$$\|m\|^2_{L^2(0,T;H^k(\Omega))} \leq c\left(\|m_0\|_{H^{k-1}(\Omega)}\right)\left(\|n\|^2_{L^2(0,T;H^{k-2}(\Omega))} + 1\right), \ \ k = 2;3,$$

donc

$$\|\textstyle\int_0^t m d\tau\|^2_{H^k(\Omega)} \leq tc\left(\|m_0\|_{H^{k-1}(\Omega)}\right)\left(\|n\|^2_{L^2(0,T;H^{k-2}(\Omega))} + 1\right), \ \ k = 2;3.$$

### 2.2.2 L'équation différentielle satisfaite par l'ECM .

On fixe $T > 0$, $\gamma_* > 0$ et $m \in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ correspondant à la donnée initiale $m_0 \geq \gamma_*$. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dt} = -\gamma m f \quad \text{dans } [0,T]\times\Omega \\ \\ f\ (0,x) = \ f_0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{2.2.11}$$

**Proposition 2.2.2** *Soient $m \in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ vérifiant les propriétés de la Proposition 5.2.1 et $f_0 \in H^3(\Omega)$. Alors il existe une unique solution de (2.2.11) dans $L^2(0,T;H^3(\Omega))$.*

*De plus*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\Omega)} e^{-\gamma\gamma_* t}\ ;\ \forall t \geq 0. \tag{2.2.12}$$

$$\|f\|^2_{H^3(\Omega)}(t) \leq c\left(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}\right) T\left(1 + T\|m\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}\right)^3 \exp(-2\gamma\gamma_* t),\ t \in [0,T].$$

*où $c\left(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}\right)$ représente une constante ne dépendant que de $\|f_0\|_{H^3(\Omega)}$ et des différentes constantes intervenant dans l'équation.*

**Preuve :** On fixe $m \in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ vérifiant les propriétés de la Proposition 5.2.1 et on considère l'équation différentielle
$\dfrac{df}{dt} = -\gamma m f,\ f(0) = f_0$ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard assure l'existence et l'unicité dans $L^2(0,T;H^3(\Omega))$ pour $f_0 \in H^3(\Omega)$.

La solution est donnée par la formule explicite suivante

$$f(t,x) = f_0(x)e^{-\int_0^t \gamma m(\tau,x)d\tau}. \tag{2.2.13}$$

Comme pour $t \geq 0$ et $x \in \Omega$, $\nabla f$ satisfait l'équation différentielle suivante

$$\frac{d}{dt}(\nabla f)(t,x) = -\gamma(\nabla m)f(t,x) - \gamma m(\nabla f)(t,x)\ , \quad \nabla f\ (0,x) = \nabla f_0,$$

d'après (2.2.13), on a

$$\frac{d}{dt}(\nabla f) = -\gamma(\nabla m)f_0 e^{-\int_0^t \gamma m(\iota,x)d\iota} - \gamma m \nabla f(t,x)\ ,$$

donc

$$\nabla f(t,x) = (\nabla f_0 - \gamma f_0 \int_0^t \nabla m(\tau,x)d\tau)e^{-\gamma\int_0^t m(\tau,x)d\tau}. \tag{2.2.14}$$

De même, pour $t \geq 0$ et $x \in \Omega$, $\triangle f$ satisfait l'équation différentielle suivante

$$\frac{d}{dt}(\triangle f)(t,x) = -\gamma f(t,x) \triangle m - 2\gamma \nabla m.\nabla f(t,x) - \gamma m \triangle f(t,x) \ , \quad \triangle f \ (0,x) = \triangle f_0,$$

d'après (2.2.14), on a

$$\frac{d}{dt}(\triangle f)(t,x) = -\gamma f_0 \triangle m \ e^{-\int_0^t \gamma m(\tau,x)d\tau} - \gamma m \ \triangle f \ -2 \ \gamma \nabla m.(\nabla f_0 - \gamma f_0 \int_0^t \nabla m(\tau,x)d\tau)e^{-\gamma\int_0^t m(\tau,x)d\tau},$$

donc d'après (1.4.1) , on a

$$\begin{aligned} \triangle f \ &= \ (\triangle f_0 - \gamma \nabla f_0 \int_0^t \nabla m(\tau,x)d\tau + \gamma f_0 \int_0^t \triangle m(\tau,x)d\tau - \\ &\quad \gamma \int_0^t \nabla m(\tau,x)d\tau(\nabla f_0 - \gamma f_0 \int_0^t \nabla m(\tau,x)d\tau))e^{-\gamma\int_0^t m(\tau,x)d\tau}, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|\triangle f\|^2 \ &\leq \ \|\triangle f_0\|^2 + \gamma \|\nabla f_0\|^2_{L^4(\Omega)} \|\int_0^t \nabla m(\tau,x)d\tau\|^2_{L^4(\Omega)} + \gamma \|f_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\int_0^t \triangle m(\tau,x)d\tau\|^2 \\ &\quad + \gamma \|\int_0^t \nabla m(\tau,x)d\tau\|^2_{L^4(\Omega)}(\|\nabla f_0\|^2_{L^4(\Omega)} + \gamma \|f_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\int_0^t \nabla m(\tau,x)d\tau\|^2_{L^4(\Omega)}) \|e^{-\gamma\int_0^t m(\tau,x)d\tau}\|^2_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

or

$$\|\triangle f_0\|^2 + \|\nabla f_0\|^2_{L^4(\Omega)} + \|f_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f_0\|^2_{H^2(\Omega)},$$

et comme $\Omega$ borné et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \leq 3$, l'injection de sobolev (1.2.1) donne $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, donc

$$\|\triangle f\|^2 \leq c\left(\|f_0\|_{H^2(\Omega)}\right)\left(1 + \|\int_0^t m(\tau,x)d\tau\|^2_{H^2(\Omega)} + (\|\int_0^t m(\tau,x)d\tau\|^2_{H^2(\Omega)})^2\right) \|e^{-\gamma\int_0^t m d\tau}\|^2_{L^\infty(\Omega)},$$

d'après (2.2.10) , on a

$$\|\int_0^t m d\tau\|^2_{H^2(\Omega)} \leq t\int_0^t \|m\|^2_{H^2(\Omega)}(\tau,x)d\tau,$$

alors

$$\|\triangle f\|^2 \leq c\left(\|f_0\|_{H^2(\Omega)}\right)(1 + t\int_0^t \|m\|^2_{H^2(\Omega)}d\tau)^2 \|e^{-\gamma\int_0^t m d\tau}\|^2_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.2.15}$$

On procède de même pour la norme $\|\nabla\triangle f\|^2$, pour $t \geq 0$ et $x \in \Omega$, on a

$$\nabla\triangle f = (\nabla\triangle f_0 - 2\gamma\triangle f_0\textstyle\int_0^t\nabla m(\tau,x)d\tau - (2\gamma+1)\nabla f_0\textstyle\int_0^t\triangle m(\tau,x)d\tau - f_0\textstyle\int_0^t\nabla\triangle m(\tau,x)d\tau$$

$$+\nabla f_0(\gamma\textstyle\int_0^t\nabla m(\tau,x)d\tau)^2 + 2f_0(\gamma\textstyle\int_0^t\triangle m(\tau,x)d\tau)(\gamma\textstyle\int_0^t\nabla m(\tau,x)d\tau) - f_0\textstyle\int_0^t\triangle m(\tau,x)d\tau$$

$$-\gamma\textstyle\int_0^t\nabla m(\tau,x)d\tau(\triangle f_0 - 2\gamma\nabla f_0\textstyle\int_0^t\nabla m(\tau,x)d\tau + f_0(\gamma\textstyle\int_0^t\nabla m(\tau,x)d\tau)^2)e^{-\gamma\int_0^t\gamma m(\tau,x)d\tau},$$

en utilisant l'inégalité (1.3.2) et celle de Hölder avec l'injection de Sobolev, $\exists c = c\left(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}\right) > 0$, tel que

$$\|\nabla\triangle f\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(1 + \|\textstyle\int_0^t m(\tau,x)d\tau\|^2_{H^3(\Omega)} + \|\textstyle\int_0^t m(\tau,x)d\tau\|^4_{H^3(\Omega)} + \|\textstyle\int_0^t m(\tau,x)d\tau\|^6_{H^3(\Omega)})\|e^{-\gamma\int_0^t m(\tau,x)d\tau}\|^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq c(1 + t\|m\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} + (t\|m\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))})^2 + (t\|m\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))})^3)\|e^{-\gamma\int_0^t m(\tau,x)d\tau}\|^2_{L^\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

donc

$$\|\nabla\triangle f\|^2 \leq c\left(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}\right)\left(1 + T\|m\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}\right)^3\|e^{-\gamma\int_0^t md\tau}\|^2_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.2.16}$$

Pour majorer la norme infinie de $f$, on a d'après (2.2.3) : $\forall t \geq 0$

$$-\textstyle\int_0^t\gamma m(\tau,x)d\tau \leq -\textstyle\int_0^t\gamma\gamma_* d\tau = -\gamma\gamma_* t,$$

alors

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(t) = \|f_0\exp(-\gamma\textstyle\int_0^t m(\tau,x)d\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\Omega)}\exp\left(-\gamma\gamma_* t\right),$$

donc il découle de (2.2.12) , (2.2.16) , (1.1.6) , pour $t \in [0,T]$ on a

$$\|f\|^2_{H^3(\Omega)}(t) \leq c\left(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}\right)T\left(1 + T\|m\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}\right)^3\exp\left(-2\gamma\gamma_* t\right). \tag{2.2.17}$$

Ce qui achève les estimations de $f$ dans $L^2(0,T;H^3(\Omega))$.

**Remarque 2.2.1** *Nous aurons besoin pour établir l'existence globale dans la Proposition 6.1.1 de l'estimation*

$$\|\triangle f - f_0\left|\gamma\textstyle\int_0^t\nabla md\tau\right|^2 e^{-\gamma\int_0^t md\tau}\|^2 \leq C_{f_0}\left(1 + t\|n\|^2_{L^2(Q_T)}\right)e^{-\gamma\gamma_* t},\ C_{f_0} = c\left(\|f_0\|_{H^2(\Omega)}\right). \tag{2.2.18}$$

*En effet*

$$\|\triangle f - f_0\left|\gamma\textstyle\int_0^t\nabla md\tau\right|^2 e^{-\gamma\int_0^t md\tau}\|^2 = \|(\triangle f_0 - 2\gamma\nabla f_0.\textstyle\int_0^t\nabla md\tau - \gamma f_0\textstyle\int_0^t\triangle md\tau)e^{-\gamma\int_0^t md\tau}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

en répétant les arguments de la démonstration de(2.2.15) et (2.2.4) :

$$\|\triangle f - f(\gamma \int_0^t \nabla m d\tau)^2\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|e^{-\gamma \int_0^t m d\tau}\|^2_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + t\|n\|^2_{L^2(Q_T)}\right),$$

alors

$$\|\triangle f - (\gamma \int_0^t \nabla m d\tau)^2 f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\left(\|f_0\|_{H^2(\Omega)}\right) e^{-2\gamma\gamma_* t} \left(1 + t\|n\|^2_{L^2(Q_T)}\right).$$

### 2.2.3 L'équation parabolique satisfaite par la densité de cellule

On fixe $T>0$ et soit $f\in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ définie dans la Proposition 5.2.1. On considère le problème parabolique linéaire suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dn^*}{dt}=D\triangle n^*-\rho\nabla.\left(n^*\nabla f\right) \quad \text{dans } [0,T]\times\Omega, \\ \\ \partial_\nu n^* \;=\; 0 \quad \text{sur} \quad [0,T]\times\partial\Omega, \\ \\ n^*\left(0,x\right)= \; n_0 \;\; \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.2.19}$$

**Proposition 2.2.3** *Supposons* $f\in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ *et* $n_0\in L^2(\Omega)$*. Alors il existe une unique solution de* (2.2.19) *dans* $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

*De plus si* $n_0\geq 0$*, on a*

$$n^*\left(t,x\right)\geq 0,\ \forall\left(t,x\right)\in[0,T]\times\Omega \ pp.$$

**Preuve :** On montre que $n^*\in L^2(0,\infty;H^1\left(\Omega\right))$.

On remplace dans le problème (1.5.1) de section 3.3 :

$a_1=D$, $a_2=0$, $a_3(t,x)=\rho.f(t,x)$, $b=0$.

D'après le théorème 3.3.1, on a le résultat d'existence.

**L'éxistence et l'unicité :**

Pour $0\leq t\leq T$ ; d'après(2.2.4), (2.2.17) il existe $c_T>0$ vérifier $\|f\|_{H^3(\Omega)}\leq c_T$, où

$$c_T=c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)},\|m_0\|_{H^1(\Omega)})\left(1+T(\|n\ \ \|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+1)\right)^3, \tag{2.2.20}$$

donc d'après $\left(1.5.16\right),\left(1.5.18\right),\left(1.5.25\right)$, on a

$$\|n^*\|^2\leq\|n_0^*\|^2\exp\left(2Tc_T\right). \tag{2.2.21}$$

$$\|n^*\|^2+\frac{D}{2}\|\nabla n^*\|^2_{L^2(Q_T)}\leq\|n_0^*\|^2T2c_T\exp\left(2Tc_T\right), \tag{2.2.22}$$

$$\|\frac{dn^*}{dt}\|^2_{L^2(Q_T)}+D\|\nabla n^*\|^2\leq c_T\|n^*\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\|n_0^*\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{2.2.23}$$

donc on a

$$\|\frac{dn^*}{dt}\|^2_{L^2(Q_T)} + \|n^*\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C\left(T, \|n_0\|, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|n\|^2_{L^2(Q_T)}\right), \tag{2.2.24}$$

**Positivité :** Cette méthode est due à [6] et nous permet de montrer la positivité de la solution $n^*$. On note $H(s)$ la fonction de troncature définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s^2 & \text{si } s < 0, \\ 0 & \text{si } s \geq 0. \end{cases}$$

On note $\vartheta(t) = \int_\Omega H(n^*(t,x))dx$. On a $\vartheta'(t) = (\ H'(n^*),\ n^*_t) = (\ H'(n^*),\ D\triangle n^* - \rho\nabla.(n^*\nabla f))$.

En observant que $H'(s) = s$ si $s < 0$ et $H'(s) = 0$ si $s \geq 0$ et on $H'(s) \in H^1(\Omega)$ pour $s \in H^1(\Omega)$, on obtient

$$(\ H'(n^*),\ D\triangle n^*) = -D\int_\Omega \nabla(H'(n^*)).\nabla n^* dx = -D\|\nabla(H'(n^*))\|^2$$

De plus, en supposant $\dfrac{\partial f_0}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$, on aura $\dfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ et par suite en utilisant l'observation précédente

$$\begin{aligned} (\ H'(n^*), -\rho\nabla.(n^*\nabla f)) &= \rho\int_\Omega n^*\nabla(H'(n^*)).\nabla f dx \\ &= \rho\int_\Omega H'(n^*)\nabla(H'(n^*)).\nabla f dx, \end{aligned}$$

donc grâce à l'inégalité de Hölder, on a

$$(\ H'(n^*), -\rho\nabla.(n^*\nabla f)) \leq \ \rho\|\nabla(H'(n^*))\|\|H'(n^*)\|\|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

pour $0 \leq t \leq T$, d'après (2.2.16) on a $\|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_T$, où

$$c_T = c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)})\left(1 + T(\|n\ \|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + 1)\right)^3,$$

d'aprés l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} (\ H'(n^*), -\rho\nabla.(n^*\nabla f)) &\leq \ c_T\|\nabla(H'(n^*))\|\|H'(n^*)\| \\ &\leq \ \frac{D}{2}\|\nabla(H'(n^*))\|^2 + c_T\|H'(n^*)\|^2, \end{aligned}$$

alors on a

$$\vartheta'(t) \leq c_T \|H'(n^*)\|^2 \tag{2.2.25}$$

or $\|H'(n^*)\|^2 = 2\vartheta(t)$ donc d'aprés l'inegalité de Gronwall on a $\vartheta(t) \leq \vartheta(0) \exp(tc_T)$. Comme $\vartheta(0) = 0$ alors $\vartheta(t) = 0$ d'où $n^* \geq 0$.

### 2.2.4 Procédure du point fixe

Nous allons utiliser un théorème du point fixe pour établir l'existence et l'unicité d'une solution locale. On fixe $T > 0$ et on définit le sous-ensemble $V_T$ de $L^2(Q_T)$

$$V_T = \left\{ \begin{array}{c} n \geq 0,\ n \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),\ \dfrac{dn}{dt} \in L^2(Q_T) \\ \\ n(0,x) = n_0 \\ \\ \|n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq R \text{ et } \|\dfrac{dn}{dt}\|_{L^2(Q_T)} \leq R_0 \end{array} \right\}, \tag{2.2.26}$$

où $R$ et $R_0$ sont des constantes qui seront convenablement choisis par la suite. On définit ensuite un opérateur $\mathcal{L}$ de $L^2(Q_T)$ dans lui-même comme suit

Pour $n \in V_T$ on associe $\mathcal{L}(n) = n^*$ où $n^*$est la solution de (2.2.19) donnée par la Proposition 5.2.3 correspondant à $f$ solution de (2.2.11) donnée par la Proposition 5.2.2 où $m$ est la solution de (2.2.2) donnée par la Proposition 5.2.1 .

**Proposition 2.2.4** *L'ensemble $V_T$ est un sous-ensemble compact convexe de $L^2(Q_T)$.*

***Preuve : $\mathbf{V}_T$ compact :***

*$V_T$ est un sous-ensemble fermé de $L^2(Q_T)$, en effet*

*on prend une suite $n_j \in V_T$, converge vers $n$, et on montre que $n \in V_T$,*

$n_j \in V_T$,

$$\left\{ \begin{array}{c} n_j \geq 0,\ n_j \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),\ \dfrac{dn_j}{dt} \in L^2(Q_T) \\ n_j(0,x) = n_0 \\ \|n_j\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq R \ \ et \ \|\frac{dn_j}{dt}\|_{L^2(Q_T)} \leq R_0 \end{array} \right\},$$

*on a la convergence de $n_j$ vers $n$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et $\dfrac{dn_j}{dt}$ vers $v$ dans $L^2(Q_T)$,*

*d'après (1.3.1) , on a $n \in C(0,T;H^1(\Omega))$ et de (1.2.6) on a $H^1(0,T) \subset C[0,T]$ donc $v = \dfrac{dn}{dt} \in L^2(Q_T)$*

*$n_j \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et $n_j \geq 0$ alors $n \geq 0$ p.p, et $n_j(0,x) = n_0$, donc $n_j(0,x) \to n(0,x) = n_0$*

*de plus*

$$\begin{aligned}\|n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} &\leq \|n-n_j\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}+\|n_j\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}\\ &\leq \|n-n_j\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}+R,\end{aligned}$$

*donc* $\|n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq R$ *car* $\|n-n_j\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \to 0$ *quand* $j \to +\infty$,
*de même*

$$\begin{aligned}\|\frac{dn}{dt}\|_{L^2(Q_T)} &\leq \|\frac{dn}{dt}-\frac{dn_j}{dt}\|_{L^2(Q_T)}+\|\frac{dn_j}{dt}\|_{L^2(Q_T)}\\ &\leq \|\frac{dn}{dt}-\frac{dn_j}{dt}\|_{L^2(Q_T)}+R,\end{aligned}$$

*donc* $\|\frac{dn}{dt}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq R$ *car* $\|\frac{dn}{dt}-\frac{dn_j}{dt}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \to 0$ *quand* $j \to +\infty$.

*Donc* $V_T$ *est un sous-ensemble fermé de* $L^2(Q_T)$ *De plus, d'après le lemme de compacité de Lions-Aubin, il est relativement compact. D'où* $V_T$ *est compact dans* $L^2(Q_T)$ .

**$\mathbf{V}_T$ *convexe :***

*On va prouver que :* $\forall\alpha \in [0,1], \forall n_1, n_2 \in V_T$ *on a* $\alpha n_1 + (1-\alpha)n_2 \in V_T$.

*On a*

$$\begin{cases} n_1 \in V_T \text{ ; } n_1 \in L^2(Q_T)/\ \|n_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq R \text{ et } \|n_1'\|_{L^2(Q_T)} \leq R_0, \text{ avec } n_1(0,x)=n_0 \\ n_2 \in V_T \text{ ; } n_2 \in L^2(Q_T)/\ \|n_2\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq R \text{ et } \|n_2'\|_{L^2(Q_T)} \leq R_0, \text{ avec } n_2(0,x)=n_0 \end{cases}$$

*comme* $n_1, n_2 \in L^2(Q_T)$ *et* $L^2(Q_T)$ *de Banach alors* $\alpha.n_1 + (1-\alpha).n_2 \in L^2(Q_T)$ $;\forall\alpha \in [0,1]$.

*De plus, d'après l'inégalité triangulaire :*

$$\begin{aligned}\|\alpha.n_1+(1-\alpha).n_2\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} &\leq \alpha\|n_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+(1-\alpha)\|n_2\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\\ &\leq \alpha R+(1-\alpha)R = R\ ,\end{aligned}$$

*d'où* $\|\alpha n_1 + (1-\alpha)n_2\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq R$

*On procède de même pour la dérivée temporelle :*

$$\begin{aligned}\|\alpha n_1'+(1-\alpha)n_2'\|_{L^2(Q_T)} &\leq \alpha\|n_1'\|_{L^2(Q_T)}+(1-\alpha)\|n_2'\|_{L^2(Q_T)}\\ &\leq \alpha R_0+(1-\alpha)R_0 = R_0,\end{aligned}$$

*d'où* $\|\alpha n_1' + (1-\alpha)n_2'\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq R$ *avec*

$$\alpha n_1(0,x)+(1-\alpha)n_2(0,x) = \alpha n_0 + (1-\alpha)n_0 = n_0,$$

*d'où* $V_T$ *convexe.*

**Proposition 2.2.5** *Il existe* $T$ , $R$ , $R_0 > 0$ *tels que :*

$$\mathcal{L}(V_T) \subset V_T. \tag{2.2.27}$$

***Preuve :*** *D'après* (2.2.21) , (2.2.22) *on a :*

$$\|n^*\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \|n_0\|^2_{H^1(\Omega)} T\left(1 + 2c_T\right)\exp\left(2Tc_T\right) + \|n_0\|^2_{H^1(\Omega)}$$

*où*

$$\begin{aligned} c_T &= c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)})\left(1 + T(\|n\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + 1)\right)^3 \\ &\leq c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)})\left(1 + T(R^2 + 1)\right)^3, \end{aligned}$$

*on note*

$$c_{T,R} = 2c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)})\left(1 + T(R^2 + 1)\right)^3$$

*donc*

$$\|n^*\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \|n_0\|^2_{H^1(\Omega)} T\left(1 + c_{T,R}\right)\exp\left(Tc_{T,R}\right) + \|n_0\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{2.2.28}$$

*Il s'agit de chercher un réel positif* $R$ *tel que*

$$\|n_0\|^2_{H^1(\Omega)} T\left(1 + c_{T,R}\right)\exp\left(Tc_{T,R}\right) + \|n_0\|^2_{H^1(\Omega)} \leq R^2,$$

*On peut d'abord choisir*

$$\frac{R}{\sqrt{2}} = \|n_0\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.2.29}$$

*Puis trouver* $T > 0$ *solution de l'équation :*

$$T\left(1 + c_{R,T}\right)\exp\left(Tc_{R,T}\right) - \frac{1}{2} = 0. \tag{2.2.30}$$

*Cette dernière admet une solution* $T > 0$ *en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Donc la valeur de* $T$ *dépend de* $\|n_0\|_{H^1(\Omega)}$, $\|f_0\|_{H^3(\Omega)}$ *ainsi que de* $\|m_0\|_{H^1(\Omega)}$.

*D'après* (2.2.24) *on a*

$$\|n_t^*\|^2_{L^2(0,T.\Omega)} \leq c_T^{'}\|n^*\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|n_0\|^2_{H^1(\Omega)},$$

*où*

$$c_T^{'} = c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}) \left(1 + T(\|n\ \|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + 1)\right)^3$$

*d'après* (2.2.29) *et* (2.2.26) , *on a*

$$\|n^*\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq R^2, \ \ \|n_0\|^2_{H^1(\Omega)} = \frac{R^2}{2},$$

*donc*

$$\|n_t^*\|^2_{L^2(Q_T)} \leq c_T^{'} R^2 + \frac{R^2}{2},$$

*et*

$$c_T^{'} \leq c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}) \left(1 + T(R^2 + 1)\right)^3,$$

*il suffit choisir*

$$R_0 = c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}) R^2(\left(1 + T(R^2 + 1)\right)^3 + \frac{1}{2}), \tag{2.2.31}$$

*on conclut avec* (2.2.29) , (2.2.30) *et* (2.2.31) *qu'il existe* $R$, $R_0, T\ > 0$ *tels que* $\mathcal{L}(V_T) \subset V_T$.

**Proposition 2.2.6** *L'opérateur* $\mathcal{L}$ *est continu de* $L^2(Q_T)$ *dans lui-même.*

***Preuve :*** *Soient* $n_i \in V_T$, $n_i^* = \mathcal{L}(n_i)$, $m_i$ *la solution de* (2.2.2) *correspondant à* $n_i$ *telle que* $m_i \geq \gamma_*$, $f_i$ *la soluion de* (2.2.11) *correspond à* $m_i$; $i = 1, 2$ .

*D'après l'équation* (2.2.2) , *on a*

$$\frac{dm_1}{dt} = \alpha n_1 + \varepsilon \triangle m_1 - v m_1, \quad \frac{dm_2}{dt} = \alpha n_2 + \varepsilon \triangle m_2 - v m_2,$$

*donc*

$$\partial_t (m_1 - m_2) = \varepsilon \triangle (m_1 - m_2) - v (m_1 - m_2) + \alpha(n_1 - n_2).$$

*En multipliant les deux membres de cette dernière par* $\triangle (m_1 - m_2) + (m_1 - m_2)$ *et en intégrant par parties sur* $\Omega$ .

$$\frac{d}{2dt} \|\nabla (m_1 - m_2)\|^2 + \tfrac{d}{2dt} \|m_1 - m_2\|^2 + \varepsilon \|\triangle (m_1 - m_2)\|^2$$

$$+ \varepsilon \|\nabla (m_1 - m_2)\|^2 + v \|\nabla (m_1 - m_2)\|^2 + v \|m_1 - m_2\|^2$$

$$= \alpha \textstyle\int_\Omega \triangle (m_1 - m_2)(n_2 - n_1)\, dx + \alpha \int_\Omega (m_1 - m_2)(n_1 - n_2)\, dx,$$

*et d'après l'inégalité de Young et de Hölder :*$\exists c>0$ *dépendant uniquement des constantes* $\varepsilon$, $\nu$, $\alpha$ *tel que*

$$\frac{d}{2dt}\|m_1-m_2\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{\varepsilon}{2}\|\triangle(m_1-m_2)\|^2+v\|\nabla(m_1-m_2)\|^2+\frac{v}{2}\|m_1-m_2\|^2\leq c\|n_1-n_2\|^2 \tag{2.2.32}$$

*donc*

$$\|m_1-m_2\|^2_{L^2(Q_T)}+\|\nabla(m_1-m_2)\|^2_{L^2(Q_T)}+\|\triangle(m_1-m_2)\|^2_{L^2(Q_T)}\leq c\|n_1-n_2\|^2_{L^2(Q_T)}. \tag{2.2.33}$$

*D'autre part, d'après l'équation* $(2.2.11)$, *on a*

$$\frac{df_1}{dt}=-\gamma m_1 f_1,\ \frac{df_1}{dt}=-\gamma m_2 f_2,$$

*donc*

$$\frac{d(f_1-f_2)}{dt}=-\gamma m_1(f_1-f_2)-\gamma f_2(m_1-m_2).$$

*En multipliant cette dernière équation par* $(f_1-f_2)$ *et on intégrant sur* $\Omega$, *il existe* $c>0$ *dépendant uniquement de* $\gamma$ *tel que*

$$\tfrac{d}{2dt}\|f_1-f_2\|^2\leq c(\|m_1\|_{L^\infty(\Omega)}+1)\|f_1-f_2\|^2+c\|f_2\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|m_1-m_2\|^2. \tag{2.2.34}$$

*En utilisant l'inégalité de Young, l'injection* $(1.2.1)$ *et l'inégalité de Gronwall, on obtient pour* $0\leq t\leq T$

$$\|f_1-f_2\|^2(t)\leq\exp(\textstyle\int_0^t(c\|m_1\|^2_{H^2(\Omega)}+c)d\tau)\int_0^t c\|f_2\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|m_1-m_2\|^2d\tau,$$

*donc d'après* $(2.2.9)$, $(2.2.12)$, $(2.2.33)$

$$\|f_1-f_2\|^2(t)\leq c\|f_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}\exp(c\|n\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+c\|m_0\|^2_{H^2(\Omega)}+cT)\|n_1-n_2\|^2_{L^2(Q_T)}. \tag{2.2.35}$$

*Comme d'après l'équation* $(2.2.11)$, *on a*

$$\partial_t(\triangle f)(t,x)=-\gamma(\triangle m)f(t,x)-2\gamma\nabla m.\nabla f(t,x)-\gamma m\triangle f(t,x)\ ,$$

*alors*

$$\frac{d(\triangle(f_1-f_2))}{dt}=-\gamma(f_1-f_2)\triangle m_1-\gamma f_2\triangle(m_1-m_2)-2\gamma\nabla m_1.\nabla(f_1-f_2)$$

$$-2\gamma\nabla f_2.\nabla\left(m_1-m_2\right)-\gamma m_1\triangle(f_1-f_2)-\gamma\left(m_1-m_2\right)\triangle f_2.$$

*En multipliant cette dernière par* $\triangle(f_1-f_2)$ *et en intégrant sur* $\Omega$

$$\frac{d}{2dt}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2$$

$$\leq\gamma\|\triangle m_1\|_{L^4(\Omega)}\|f_1-f_2\|_{L^4(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|+\gamma\|f_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle\left(m_1-m_2\right)\|\|\triangle(f_1-f_2)\|$$

$$+2\gamma\|\nabla m_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(f_1-f_2)\|\|\triangle(f_1-f_2)\|+2\gamma\|\nabla f_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\left(m_1-m_2\right)\|\|\triangle(f_1-f_2)\|$$

$$+\gamma\|m_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2+\gamma\|\triangle f_2\|_{L^4(\Omega)}\|m_1-m_2\|_{L^4(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|,$$

*et par suite, d'après l'inégalité de Young, il existe* $c>0$ *dépendant uniquement des constantes intervenant dans l'équation telle que*

$$\frac{d}{2dt}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2$$

$$\leq c\|\triangle m_1\|^2_{L^4(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2+\|f_1-f_2\|^2_{L^4(\Omega)}+c\|f_2\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle\left(m_1-m_2\right)\|^2$$

$$+\|\triangle(f_1-f_2)\|^2+c\|\nabla m_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2+c\|\nabla f_2\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\left(m_1-m_2\right)\|^2+\|\triangle(f_1-f_2)\|^2$$

$$+c\|m_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2+c\|\triangle f_2\|_{L^4(\Omega)}\|m_1-m_2\|^2_{L^4(\Omega)}+\|\triangle(f_1-f_2)\|^2, \tag{2.2.36}$$

*donc, en appliquant l'inégalité de Gronwall, on obient pour* $0\leq t\leq T$

$$\|\triangle(f_1-f_2)\|^2(t)$$

$$\begin{aligned}\leq\ & \exp(\textstyle\int_0^t c\|\triangle m_1\|^2_{L^4(\Omega)}+c\|\nabla m_1\|_{L^\infty(\Omega)}+c\|m_1\|_{L^\infty(\Omega)}+cds)\\ & +\textstyle\int_0^t c\|f_2\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle\left(m_1-m_2\right)\|^2+c\|\nabla f_2\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\left(m_1-m_2\right)\|^2\\ & +c\|\triangle f_2\|_{L^4(\Omega)}\|m_1-m_2\|^2_{L^4(\Omega)}+\|f_1-f_2\|^2ds,\end{aligned}$$

*d'aprés l'inégalité de Young et l'injection* $(1.2.1)$, *on a*

$$\|\triangle(f_1-f_2)\|^2\leq\exp(\textstyle\int_0^t c\|\triangle m_1\|^2_{H^1(\Omega)}+c\|\nabla m_1\|^2_{H^2(\Omega)}+c\|m_1\|^2_{H^2(\Omega)}+cds)$$

$$.\textstyle\int_0^t c\|f_2\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle\left(m_1-m_2\right)\|^2+c\|\nabla f_2\|^2_{H^2(\Omega)}\|\nabla\left(m_1-m_2\right)\|^2ds$$

$$+\textstyle\int_0^t(c\|\triangle f_2\|^2_{H^1(\Omega)}+c)\|m_1-m_2\|^2_{L^4(\Omega)}+\|f_1-f_2\|^2ds,$$

*et par conséquent, d'après* (2.2.33) *, pour* $0 \leq t \leq T$

$$\|\triangle(f_1 - f_2)\|^2(t)$$

$$\leq \exp(\int_0^t c\|m_1\|_{H^3(\Omega)}^2 + cds).[\int_0^t (c\|f_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + c\|\nabla f_2\|_{H^2(\Omega)}^2 + c\|\triangle f_2\|_{H^1(\Omega)}^2 + c)\|m_1 - m_2\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|f_1 - f_2\|^2 ds],$$

*donc d'après* (2.2.9) *,* (2.2.17) *,* (2.2.33) *,* (2.2.35) *, on a*

$$\|\triangle(f_1 - f_2)\|^2 \leq C_T \left(\|n_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + T\right))\|n_1 - n_2\|_{L^2(Q_T)}^2 \tag{2.2.37}$$

*où* $C_T = c\left(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^2(\Omega)}\right) T^2 \left(1 + T + T\|n_2\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2\right)^3 \exp(c\left(\|m_0\|_{H^2(\Omega)}\right).$
*or, d'après l'équation* (2.2.19)

$$\partial_t n_1^* = D\triangle n_1^* - \rho\nabla.\left(n_1^*\nabla f_1\right),\ \partial_t n_2^* = D\triangle n_2^* - \rho\nabla.\left(n_2^*\nabla f_2\right),$$

*donc*

$$\partial_t\left(n_1^* - n_2^*\right) - D\triangle\left(n_1^* - n_2^*\right) = -\rho\nabla.\left(n_1^*\nabla f_1 - n_2^*\nabla f_2\right)$$

*et en multipliant par* $\left(n_1^* - n_2^*\right)$ *et on intégrant sur* $\Omega$ *:*

$$\frac{d}{2dt}\|n_1^* - n_2^*\|^2 + D\|\nabla\left(n_1^* - n_2^*\right)\|^2 = \rho\int_\Omega\left(n_1^*\nabla f_1 - n_2^*\nabla f_2\right).\nabla\left(n_1^* - n_2^*\right)dx$$

*et d'après l'inégalité de Young et de Hölder :*

$$\frac{d}{2dt}\|n_1^* - n_2^*\|^2 + D\|\nabla\left(n_1^* - n_2^*\right)\|^2 \leq c\|n_1^*\nabla f_1 - n_2^*\nabla f_2\|^2 + \frac{D}{2}\|\nabla n_1^* - \nabla n_2^*\|^2$$

*donc*

$$\frac{d}{2dt}\|n_1^* - n_2^*\|^2 + D\|\nabla\left(n_1^* - n_2^*\right)\|^2 \leq c\|n_1^*\nabla f_1 - n_2^*\nabla f_2\|^2, \tag{2.2.38}$$

*on a*

$$\|n_1^*\nabla f_1 - n_2^*\nabla f_2\|^2 = \|(n_1^* - n_2^*)\nabla f_1 + n_2^*(\nabla f_1 - \nabla f_2)\|^2,$$

*d'après l'inégalité de Hölder*

$$\|n_1^*\nabla f_1 - n_2^*\nabla f_2\|^2 \leq \|n_1^* - n_2^*\|_{L^2(\Omega)}^2\|\nabla f_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|n_2^*\|_{L^4(\Omega)}^2\|\nabla f_1 - \nabla f_2\|_{L^4(\Omega)}^2,$$

*d'après l'injection* (1.2.1) *et l'inégalité* (1.1.4)

$$\|\nabla f_1 - \nabla f_2\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq c\|\nabla f_1 - \nabla f_2\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c\|\triangle(f_1 - f_2)\|^2,$$

*alors*

$$\|n_1^*\nabla f_1 - n_2^*\nabla f_2\|^2 \leq \|n_1^* - n_2^*\|^2\|\nabla f_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + c\|n_2^*\|_{L^4(\Omega)}^2\|\triangle(f_1 - f_2)\|^2 \qquad (2.2.39)$$

*en procédant comme dans* (2.2.15), *on a*

$$\|\nabla f_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)})(1 + T\|m_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2),$$

*alors*

$$\|\nabla f_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)})(1 + T + T\|n_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2), \qquad (2.2.40)$$

*d'après* (2.2.37) , (2.2.39) , (2.2.40) , *on a*

$$\|n_1^*\nabla f_1 - n_2^*\nabla f_2\|^2 \leq$$

$$c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)})[(1 + T + T\|n_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2)\|n_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2\|n_1^* - n_2^*\|^2$$

$$+T^2(1+T+T\|n_2\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2)^3 \exp\Big((c\left(\|m_0\|_{H^2(\Omega)}\right)(\|n_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + T)\Big)\|n_2^*\|_{L^4(\Omega)}^2\|n_1 - n_2\|_{L^2(Q_T)}^2].$$

*on note*

$$c(\|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}) = c_*,$$

*comme* $\|n_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq R$, $\|n_2\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq R$ *dans* $V_T$, *en remplaçant dans* (2.2.38) , *pour* $0 \leq t \leq T$

$$\frac{d}{2dt}\|n_1^* - n_2^*\|^2 \leq c_*R^2\left(1 + T + TR^2\right)\|n_1^* - n_2^*\|^2$$
$$+c_*T^2\left(1 + T + TR^2\right)^3\exp(c_*\left(T + R^2\right))\|n_2^*\|_{H^1(\Omega)}^2\|n_1 - n_2\|_{L^2(Q_T)}^2$$

*d'après l'inégalité de Gronwall*

$$\|n_1^* - n_2^*\|^2 \leq$$

$$c_*\left(T + T^2 + T^2R^2\right)^3\exp(c_*\left(\left(1 + T + TR^2\right)TR^2 + \left(T + R^2\right)\right))\int_0^T\|n_2^*\|_{H^1(\Omega)}^2 d\iota . \|n_1 - n_2\|_{L^2(Q_T)}^2 \qquad (2.2.41)$$

*donc*

$$\forall n_1, n_2 \in V_T : \|n_1^* - n_2^*\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq c\,(R\ ,T)\,\|n_1 - n_2\|_{L^2(Q_T)}^2 \qquad (2.2.42)$$

*avec* $\mathcal{L}(n_i) = n_i^*$ *et* $i = 1, 2$ *;*

$c\,(R\ ,T) = c_*T\,(T + T^2 + T^2R^2)^3\exp(c_*\,((1 + T + TR^2)\,TR^2 + (T + R^2)))$.

**Conclusion :**

A travers les Propositions 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6, on a établi que

$V_T$ est une sous-espace compact et convexe de $L^2(0,T\ ,\ L^2(\Omega))$, il existe $T\ ,R\ ,R_0>0$ tels que $\mathcal{L}(V_T)\subset V_T$ et $\mathcal{L}$ est Lipschitzienne donc continue de $V_T$ dans $V_T$.

Alors d'après le théoréme de poit fixe de Schauder, il existe un point fixe dans $V_T$.

Soit $n$ le point fixe de $\mathcal{L}$ dans $V_T$ , alors $(n,m,f)$ la solution de système $(\wp_1)$ telle que

$$(n,m,f)\in\ L^2(0,T;H^1(\Omega))\times\left(L^2(0,T;H^3(\Omega))\right)^2. \tag{2.2.43}$$

Le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence pas l'unicité, alors on va le montrer dans ce théorème.

**Théorème 2.2.2** *La solution de* (2.1.1) *est unique.*

**Preuve :** Pour montrer l'unicité de (2.1.1) , on suppose qu'il existe deux solutions différentes $(n_1,m_1,f_1)$, $(n_2,m_2,f_2)$.

D'après (2.2.34) , (2.2.36) , (2.2.32) , $\exists c>0$ tel que

$$\frac{d}{2dt}\|m_1-m_2\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{\varepsilon}{2}\|\triangle(m_1-m_2)\|^2+v\|\nabla(m_1-m_2)\|^2+\frac{v}{2}\|m_1-m_2\|^2\leq c\|n_1-n_2\|^2 \tag{2.2.44}$$

$$\frac{d}{2dt}\|f_1-f_2\|^2\leq c(\|m_1\|_{L^\infty(\Omega)}+1)\|f_1-f_2\|^2+c\|f_2\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|m_1-m_2\|^2. \tag{2.2.45}$$

$$\frac{d}{2dt}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2 \tag{2.2.46}$$

$$\leq\gamma\|\triangle m_1\|_{L^4(\Omega)}\|f_1-f_2\|_{L^4(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|+\gamma\|f_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle(m_1-m_2)\|\|\triangle(f_1-f_2)\|$$

$$+2\gamma\|\nabla m_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(f_1-f_2)\|\|\triangle(f_1-f_2)\|+2\gamma\|\nabla f_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(m_1-m_2)\|\|\triangle(f_1-f_2)\|$$

$$+\gamma\|m_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2+\gamma\|\triangle f_2\|_{L^4(\Omega)}\|m_1-m_2\|_{L^4(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|,$$

En utilisant l'inégalité de Young, l'injection (1.2.1), de (2.2.45), (2.2.46) on a pour $0\leq t\leq T$

$$\frac{d}{2dt}\|f_1-f_2\|^2_{H^2(\Omega)}\leq c(\|m_1\|^2_{H^3(\Omega)}+\|f_1\|^2_{H^3(\Omega)}+\|f_2\|^2_{H^3(\Omega)}+1)\left(\|m_1-m_2\|^2_{H^1(\Omega)}(t)+\|f_1-f_2\|^2_{H^2(\Omega)}(t)\right)$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\|\triangle(m_1-m_2)\|^2, \tag{2.2.47}$$

il reste la solution qui carespendant la première équation de (2.1.1) .En la multipliant par $(n_1-n_2)$ et on intégrant sur $\Omega$, de même que (2.2.41) , il suffit remplacer $n^*$ par $n$, on a

$$\frac{d}{2dt}\|n_1-n_2\|^2 \leq \|n_1-n_2\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla f_1\|^2_{L^\infty(\Omega)} + c\|n_2\|^2_{L^4(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2, \tag{2.2.48}$$

d'aprés l'injection (1.2.1), on a pour $0 \leq t \leq T$

$$\frac{d}{2dt}\|n_1-n_2\|^2 \leq c\|n_1-n_2\|^2_{L^2(\Omega)}\|f_1\|^2_{H^3(\Omega)} + c\|n_2\|^2_{H^1(\Omega)}\|\triangle(f_1-f_2)\|^2, \tag{2.2.49}$$

d'aprés (2.2.44) , (2.2.47) , (2.2.49) , on a

$$\frac{d}{2dt}\left(\|n_1-n_2\|^2(t) + \|m_1-m_2\|^2_{H^1(\Omega)}(t) + \|f_1-f_2\|^2_{H^2(\Omega)}(t)\right) \leq$$

$$c(\|m_1\|^2_{H^3(\Omega)} + \|f_1\|^2_{H^3(\Omega)} + \|f_2\|^2_{H^3(\Omega)} + \|n_2\|^2_{H^3(\Omega)} + 1)$$

$$\left(\|n_1-n_2\|^2(t) + \|m_1-m_2\|^2_{H^1(\Omega)}(t) + \|f_1-f_2\|^2_{H^2(\Omega)}(t)\right),$$

d'après l'inégalité de Gronwall

$$\|n_1-n_2\|^2(t) + \|m_1-m_2\|^2_{H^1(\Omega)}(t) + \|f_1-f_2\|^2_{H^2(\Omega)}(t) \leq$$

$$\left(\|n_1-n_2\|^2(0) + \|m_1-m_2\|^2_{H^1(\Omega)}(0) + \|f_1-f_2\|^2_{H^2(\Omega)}(0)\right)$$

$$.\exp c(\|m_1\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} + \|n_2\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} + \|f_1\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} + \|f_2\|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} + t)\ ,$$

et comme

$$\left(\|n_1-n_2\|^2(0) + \|m_1-m_2\|^2_{H^1(\Omega)}(0) + \|f_1-f_2\|^2_{H^2(\Omega)}(0)\right) = 0$$

donc pour $t \in [0,T]$, on a

$$\|n_1-n_2\|^2(t) + \|m_1-m_2\|^2_{H^1(\Omega)}(t) + \|f_1-f_2\|^2_{H^2(\Omega)}(t) \equiv 0.$$

**Preuve de théorème 2.2.1 :**

**Preuve :** On montre que $n \in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ et $n_t \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

on remplace $a_1 = \rho$, $a_2 = 0$, $a_3(t,x) = \rho.f(t,x)$, $b = 0$, dans le problème (1.5.1) de section 3.3.

Ce qui achève la preuve d'après le **théorème 1.5.2**.

On montre que $m \in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ et $m_t \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

on remplace $a_1 = \varepsilon$, $a_2 = \upsilon$, $a_3 = 0$, $b = \alpha n$, dans le problème (1.5.1) de section 3.3.

d'où le résultat d'après le **théorème 1.5.2**.

On montre que $f \in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ et $f_t \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

D'après l'équation (2.2.11), on a $\dfrac{df}{dt} = -\gamma m f$, on peut approximer $f$ par $f^j(t) = \sum_{k=1}^{j} d_j^k(t)\, w_k$,

donc, on a

$$\begin{aligned}\|\frac{df^j}{dt}\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|\gamma m f^j\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\le c\|m\|^2_{H^2(\Omega)}\|f^j\|^2_{H^2(\Omega)}\end{aligned}$$

de(2.2.9) et (2.2.15)

$$\|\frac{df^j}{dt}\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)}, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}, T).$$

$\left\{ f_t^j \right\}$ bornée dans $L^2(0,T\ ;H^1(\Omega))$

donc on peut extraire une sous-suite $j_l$ telle que quand $l \to +\infty$

on a $f_t^{j_l} \rightharpoonup f_t \in L^2(0,T\ ;H^1(\Omega))$, d'où

$$\|\frac{df}{dt}\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)}, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}, T). \tag{2.2.50}$$

Donc

$$(n,m,f) \in (L^2(0,T;H^3(\Omega)))^3,$$

et

$$(\frac{dn}{dt}, \frac{dm}{dt}, \frac{df}{dt}) \in (L^2(0,T;H^1(\Omega)))^3.$$

D'après le **théorème 1.3.1**, on a

$$(n,m,f) \in (C([0,T];H^2(\Omega)))^3.$$

# Chapitre 3

# Existence globale et comportement asymptotique.

## Sommaire



Dans ce présente chapitre, nous montrons que la solution locale précédemment construite est en fait **une solution globale** pour $(\wp_{\mathbf{1}})$

L'idée est multiplier l'équation satisfaite par $n$ par le terme d'entropie $\log(n+1)$ et d'utiliser la décroissance exponentielle de $f$ qui découle du fait que $m \geq \gamma_*$ dès que $m_0 \geq \gamma_*$, Cette méthode est due à [6] et nous permet de montrer que$\|n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ est bornée indépendamment de $T$ d'où l'existence d'une solution globale en temps .

En utilisant encore une fois la décroissance exponentielle de $f$ , on aboutit à un résultat de comportement asymptotique en temps.

## 3.1 Résultats préliminaires

Dans toute la suite on supposera que $\Omega$ est un ouvert régulier et borné de $\mathbb{R}^2$. Avant d'établir le théorème d'existence globale en temps, on commencera par prouver les résultats préliminaires suivants.

**Lemme 3.1.1** *Supposons* $n_0 \in L^1(\Omega)$, $m_0 \in L^1(\Omega)$, $f_0 \in W^{2,1}$ *et* $\dfrac{\partial f_0}{\partial \upsilon} = 0$. *Alors pour tout* $t \geq 0$ :

$$\|n(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|n_0\|_{L^1(\Omega)} \tag{3.1.1}$$

$$\|m(t)\|_{L^1(\Omega)} = \exp(-\nu t)\left(\|m_0\|_{L^1(\Omega)} - \frac{\alpha}{\nu}\|n_0\|_{L^1(\Omega)}\right) + \frac{\alpha}{\nu}\|n_0\|_{L^1(\Omega)} \tag{3.1.2}$$

**Preuve : Preuve de (3.1.1) :**

En intégrant la première équation de $(\wp_1)$ sur $\Omega$ et en appliquant la formule de Green

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_t n dx &= \rho \int_\Omega [D\triangle n + \nabla.(n\nabla f)]\, dx, \\
&= \rho \int_\Omega \nabla.[D\nabla n + n\nabla f]\, dx, \\
&= \rho \int_{\partial\Omega} (D\nabla n + n\nabla f).\vec{\nu} d\sigma,
\end{aligned}$$

on a $\nabla n.\vec{\nu} = 0$. De plus, en supposant $\nabla f_0.\vec{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ on obtient $\nabla f.\vec{\nu} = 0$ alors $\int_\Omega \partial_t n dx = 0$. Comme $n \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}\|n\|_{L^1(\Omega)} = 0,$$

alors, on a la conservation de masse :

$$\|n(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|n_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

**Preuve de** (3.1.2) **:**

D'après (2.2.9) on a $m_t \in L^2(Q_T)$, donc en intégrant l'équation $\partial_t m = \alpha n + \varepsilon \triangle m - v m$ sur $\Omega$ , on aura

$$\int_\Omega \frac{d}{dt} m dx = \int_\Omega \alpha n dx + \int_\Omega \varepsilon \triangle m dx - \int_\Omega \nu m dx,$$

comme $m \geq 0$,d'après (3.1.1) **:**

$$\frac{d}{dt}\|m\|_{L^1(\Omega)} = \alpha \|n_0\|_{L^1(\Omega)} - \varepsilon \int_{\partial\Omega} \nabla m.\vec{\nu} d\sigma - \nu \|m\|_{L^1(\Omega)}.$$

Puisque $\nabla m.\vec{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ , l'équation devient

$$\frac{d}{dt}\|m\|_{L^1(\Omega)} = \alpha \|n_0\|_{L^1(\Omega)} - \nu \|m\|_{L^1(\Omega)},$$

après résolution de l'équation différentielle, on obtient

$$\|m\|_{L^1(\Omega)} = \exp\left(-\nu t\right) \|m_0\|_{L^1(\Omega)} \ + \ \frac{\alpha}{\nu}\|n_0\|_{L^1(\Omega)} - \frac{\alpha}{\nu}\exp\left(-\nu t\right) \|n_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

**Lemme 3.1.2** *Supposons* $n_0 \in L^2(\Omega)$, *alors pour* $0 \leq t \leq T$ , *on a*

$$\|n\| \leq p(\|n_0\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{6}}) \ \|\nabla\sqrt{n+1}\| + (\|n_0\|_{L^1(\Omega)} + 1)^{\frac{1}{2}} \ p(\|n_0\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{6}}). \tag{3.1.3}$$

*où* $p(.)$ *est un polynôme de la forme* $p(x) = cx^2(x+1)$ *et* $c > 0$.*est une constante positive dépendant uniquement de la mesure de* $\Omega$.

**Preuve :** En utilisant l'inégalité d'interpolation (1.4.8) appliquée pour : $s = 1$, $t = 4$, $r = 2$, $\theta = \frac{1}{3}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|n\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{3}} \|n\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{2}{3}} \\ &\leq \|n\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{3}} \|n+1\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{2}{3}} \\ &\leq \|n\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{3}} \|\sqrt{n+1}\|_{L^8(\Omega)}^{\frac{4}{3}}, \end{aligned}$$

or $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, il ressort de l'inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.2.7) appliquée pour $p = 2$, $q = 2$, $r = 8$, $a = \frac{3}{4}$ que

$$\|\sqrt{n+1}\,\|_{L^8(\Omega)} \leq c\|\sqrt{n+1}\|^{\frac{1}{4}} \|\sqrt{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{4}},$$

alors, en remplaçant dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\|n\| &\leq c\|n\|^{\frac{1}{3}}_{L^1(\Omega)}\|\sqrt{n+1}\|^{\frac{1}{3}}\|\sqrt{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq c\|n\|^{\frac{1}{3}}_{L^1(\Omega)}\|\sqrt{n+1}\|^{\frac{1}{3}}(\|\sqrt{n+1}\| + \|\nabla\sqrt{n+1}\|),
\end{aligned}$$

Il découle de (3.1.1) que

$$\|n\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|n_0\|^{\frac{1}{3}}_{L^1(\Omega)}\left(1+\|n_0\|_{L^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(1+\|n_0\|_{L^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla\sqrt{n+1}\|\right),$$

où $c$ est une constante qui dépend de la mesure de $\Omega$.

$$\begin{aligned}
\|n\| &\leq c\|n_0\|^{\frac{1}{3}}_{L^1(\Omega)}\left(1+\|n_0\|_{L^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{6}}\|\nabla\sqrt{n+1}\| + c(\|n_0\|_{L^1(\Omega)}+1)^{\frac{1}{2}}\|n_0\|^{\frac{1}{3}}_{L^1(\Omega)}\left(1+\|n_0\|_{L^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{6}} \\
&\leq p(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})\|\nabla\sqrt{n+1}\| + (\|n_0\|_{L^1(\Omega)}+1)^{\frac{1}{2}}p(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)}),
\end{aligned}$$

où

$$p(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)}) = c\|n_0\|^{\frac{2}{6}}_{L^1(\Omega)}\left(1+\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)}\right).$$

**Remarque 3.1.1** *On peut montrer facilement à partir de* (3.1.3) *que*

$$\|n\|^2_{L^2(Q_T)} \leq p^2(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})\|\nabla\sqrt{n+1}\|^2_{L^2(Q_T)} + T(\|n_0\|_{L^1(\Omega)}+1)p^2(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)}). \quad (3.1.4)$$

## 3.2 Existence globale en temps

Dans toute la suite on supposera que $\Omega$ est un ouvert régulier et borné de $\mathbb{R}^2$.

Et on supposera que les données initiales vérifient la condition suivante

$$4D - \frac{1}{2}(1 + \frac{C_{f_0}}{(\gamma\gamma_2)^2})p^2(\|n_0\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{6}}) > 0. \tag{3.2.1}$$

$C_{f_0}$ la constante qui dépend de la norme de $f_0$ dans $H^3(\Omega)$ apparaissant dans (2.2.18).

**Proposition 3.2.1** *Supposons que* $(n_0, m_0, f_0) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$*. Alors si* $n_0$ *et* $f_0$ *satisfont la condition* (3.2.1), *on a*

$$n \in L^2_{loc}(0, +\infty\ ;\ L^2(\Omega)).$$

**Preuve :** L'idée est due à [12] et nous permet de montrer que $\|n\|_{L^2_{loc}(0,+\infty\ ;\ L^2(\Omega))} < \infty$.

En multipliant la première équation de $(\wp_1)$ par le terme d'entropie $\ln(n+1)$ et en intégrant sur $\Omega$,on aura

$$\int_\Omega \ln(n+1)\frac{dn}{dt}\,dx = D\int_\Omega \triangle n\ \ln(n+1)\,dx - \rho\int_\Omega \ln(n+1)\,\nabla.(n\nabla f)\,dx,$$

or

$$\begin{aligned}\int_\Omega \ln(n+1)\frac{dn}{dt}\,dx &= \frac{d}{dt}\int_\Omega (n+1)\ln(n+1)\,dx - \int_\Omega (n+1)\frac{d\ln(n+1)}{dt}dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_\Omega [(n+1)\ln(n+1) - n]\,dx.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_\Omega \ln(n+1)\triangle n dx = -\int_\Omega \frac{1}{n+1}|\nabla(n+1)|^2\,dx = -4\int_\Omega \left|\nabla\sqrt{n+1}\right|^2 dx.$$

De plus

$$\begin{aligned}\int_\Omega \ln(n+1)\nabla.(n\nabla f)\,dx &= \int_\Omega \ln(n+1)\ \nabla n.\nabla f dx + \int_\Omega n\ln(n+1)\triangle f dx\\ &= \int_\Omega \nabla((n+1)\ln(n+1)-n).\nabla f dx + \int_\Omega n\ln(n+1)\triangle f dx\\ &= -\int_\Omega ((n+1)\ln(n+1)-n)\triangle f dx + \int_\Omega n\ln(n+1)\triangle f dx\\ &= \int_\Omega [n-\ln(n+1)]\triangle f dx,\end{aligned}$$

alors

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega [(n+1)\ln(n+1)-n]\,dx + 4D\int_\Omega \left|\nabla\sqrt{n+1}\right|^2 dx = -\rho\int_\Omega [n-\ln(n+1)]\triangle f dx.$$

En posant

$$\varphi(t) = \int_\Omega [(n+1)\ln(n+1)-n]\,dx,$$

et en ajoutant aux deux membres le terme positif $+\rho\int_\Omega [n-\ln(n+1)]\,f\left|\gamma\int_0^t \nabla m d\tau\right|^2)dx$ l'équation devient

$$\varphi'(t) + 4D\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2 + \rho\int_\Omega [n-\ln(n+1)]\,f\left|\gamma\int_0^t \nabla m d\tau\right|^2 dx$$

$$= -\rho\int_\Omega [n-\ln(n+1)]\,(\triangle f - f\left|\gamma\int_0^t \nabla m d\tau\right|^2)dx,$$

on remarque que $\varphi(t)\geq 0$, $n-\ln(n+1)\geq 0$ et que $\|n-\ln(n+1)\|\leq\|n\|$, alors d'après l'inégalité de Young, on a pour $0\leq t\leq T$

$$\varphi'(t) + 4D\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\triangle f - f\left|\gamma\int_0^t \nabla m d\tau\right|\,\|^2 + \frac{1}{2}\|n\|^2.$$

Alors, d'après (2.2.18) et (2.2.4)

$$\varphi'(t) + 4D\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2$$

$$\leq \frac{1}{2}C_{f_0}\ e^{-2\gamma\gamma_* t}\left(1 + t\|n\|^2_{L^2(Q_T)}\right) + \frac{1}{2}\|n\|^2$$

où $C_{f_0}$ est une constante positive qui dépend uniquement de la norme de $f_0$ dans $H^3(\Omega)$. En vertu de (3.1.3) et (3.1.4)

$$\varphi'(t) + 4D\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2$$

$$\leq \frac{t}{2}C_{f_0}e^{-\gamma\gamma_* t}p^2(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2_{L^2(Q_T)}+$$

$$\frac{1}{2}p^2(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2 + \frac{1}{2}p^2(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})(1 + \|n_0\|_{L^1(\Omega)})$$

$$+C_{f_0}p^2(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})\frac{t^2}{2}(1 + \|n_0\|_{L^1(\Omega)})e^{-2\gamma\gamma_* t} + \frac{C_{f_0}}{2}e^{-2\gamma\gamma_* t}\ ,$$

puis en intégrant par rapport au temps et en utilisant $\int_0^T t^2 e^{-\gamma\gamma_*.t}dt \leq \frac{2}{(\gamma\gamma_*)^3}$, on obtient

$$\varphi(t) + (4D - \frac{1}{2}p^2(\|n_0\,\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)}))\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq \frac{C_{f_0}}{2}\ p^2(\|n_0\,\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})(\int_0^T te^{-2\gamma\gamma_2.t}dt)\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2_{L^2(Q_T)} + c(\|n_0\,\|_{L^1(\Omega)}, \|f_0\,\|_{H^3(\Omega)}, \gamma, \gamma_2) + \varphi(0)\,,$$

et comme

$$\int_0^T te^{-\gamma\gamma_*.t}dt \leq \frac{1}{(\gamma\gamma_*)^2}$$

donc

$$\varphi(t) + (4D - \frac{1}{2}p(\|n_0\,\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)}))\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq \frac{C_{f_0}}{2(\gamma\gamma_*)^2}p^2(\|n_0\,\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})\|\nabla\sqrt{n+1}\,\|^2_{L^2(Q_T)} + c(\|n_0\,\|_{L^1(\Omega)}, \|f_0\,\|_{H^2(\Omega)}, \gamma, \gamma_*) + \varphi(0)\,,$$

alors

$$\varphi(t)+(4D-\frac{1}{2}(1+\frac{C_{f_0}}{(\gamma\gamma_2)^2})p^2(\|n_0\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{6}}))\|\nabla\sqrt{n+1}\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq c(\|n_0\|_{L^1(\Omega)},\|f_0\|_{H^2(\Omega)},\gamma,\gamma_*)+\varphi(0),$$

et comme (3.2.1) a lieu, on aura l'estimation uniforme par rapport au temps

$$\|\nabla\sqrt{n+1}\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)},\|f_0\|_{H^2(\Omega)},\|m_0\|_{L^2(\Omega)}),\ \forall T>0,$$

par suite, compte tenu de (3.1.3)

$$\|n\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq (T+1)^2 c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)},\|f_0\|_{H^2(\Omega)},\|m_0\|_{L^2(\Omega)}) \tag{3.2.2}$$

Ce qui nous permettra de conclure que la solution locale précédemment construite est en fait globale.

**Proposition 3.2.2** *Supposons* $(n_0,m_0,f_0)\in L^2(\Omega)\times H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)$ *;*

*si* $n_0$ *et* $f_0$ *satisfont* (3.2.1) *, alors il existe une constante* $c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)},\|f_0\|_{H^2(\Omega)},\|m_0\|_{H^2(\Omega)})>0$ *dépendant uniquement des données initiales et des différentes constantes intervenant dans le système telle que*

$$\|(n,m,f)\|_{L^2_{loc}(0,\infty;H^1(\Omega))\times(L^\infty(0,\infty;H^2(\Omega)))^2} \leq c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)},\|f_0\|_{H^2(\Omega)},\|m_0\|_{H^2(\Omega)}).$$

**Preuve :** On montre la proposition dans trois étapes :

**1ère étape :** On montre que $f\in L^\infty(0,+\infty;H^2(\Omega))$.

D'après (2.2.15) , (3.2.2) et (2.2.4) , pour $0\leq t\leq T$

$$\|\triangle f\|_{L^2(\Omega)}^2(t) \leq c\left(\|f_0\|_{H^2(\Omega)}\right)e^{-2\gamma\gamma_* t}\left(1+t(\|n\|_{L^2(0,t;\Omega)}^2+1)\right)^2,$$

d'après (3.2.2) , il existe $c>0$ tel que

$$\|n\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq (t+1)^2 c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)},\|f_0\|_{H^2(\Omega)},\|m_0\|_{L^2(\Omega)}),$$

ce qui donne

$$\|\triangle f\|_{L^2(\Omega)}^2(t) \leq (t+1)^2 e^{-2\gamma\gamma_* t} c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)},\|f_0\|_{H^2(\Omega)},\|m_0\|_{H^1(\Omega)}), \tag{3.2.3}$$

et comme

$$(t+1)^2 e^{-2\gamma\gamma_* t} \leq (\frac{1}{\gamma\gamma_*}+1)^2\,;\ \forall t\geq 0,$$

alors il existe $c>0$ indépendante du temps telle que

$$\underset{0\leq t\leq T}{\text{supess}}\|\triangle f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)}, \|f_0\|_{H^2(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}),$$

donc

$$\underset{t\geq 0}{\text{supess}}\|\triangle f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)}, \|f_0\|_{H^2(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}).$$

**2**$^{\text{ème}}$**étape :**On montre que $n \in L^2_{loc}(0,\infty; H^1(\Omega))$.

D'après $(3.2.3)$, pour $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
\|\triangle f\|^2_{L^2(\Omega)}(t) &\leq (t+1)^2 e^{-2\gamma\gamma_* t} c(\|n_0\|_{L^2(\Omega)}, \|f_0\|_{H^2(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}) \\
&= (t+1)^2 e^{-2\gamma\gamma_* t} c_{**}.
\end{aligned}$$

En multipliant la première équation de $(\wp_1)$ par $n$ et on intégrant sur $\Omega$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{2dt}\|n\|^2 + D\|\nabla n\|^2 &= -\frac{\rho}{2}\int_\Omega n^2 \triangle f dx \\
&\leq \frac{\rho}{2}\|n\|^2_{L^4(\Omega)}\|\triangle f\| \\
&\leq c_{**}(t+1)^2 e^{-2\gamma\gamma_* t}\|n\|_{H^1(\Omega)}\|n\| \\
&\leq c_{**}(t+1)^2 e^{-2\gamma\gamma_* t}\left(\|n\|\|\nabla n\| + \|n\|^2\right)
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young il existe $c>0$ dépendant de $\|n_0\|_{L^2(\Omega)}, \|f_0\|_{H^2(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)})$ tel que

$$\frac{d}{2dt}\|n\|^2 + \frac{D}{2}\|\nabla n\|^2 \leq (c_{**}+c)(t+1)^4 e^{-2\gamma\gamma_* t}\|n\|^2,$$

d'après $(3.2.3)$, on a

$$\frac{d}{2dt}\|n\|^2 + \frac{D}{2}\|\nabla n\|^2 \leq (t+1)^5 e^{-2\gamma\gamma_* t} c(\|n_0\|, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}, \|f_0\|_{H^2(\Omega)}),$$

en intégrant par rapport au temps, on a :

$$\|n\|^2 + \frac{D}{2}\|\nabla n\|^2_{L^2(Q_T)} \leq c(\|n_0\|, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}, \|f_0\|_{H^2(\Omega)}), \tag{3.2.4}$$

alors il existe $c > 0$ indépendant du temps tel que

$$\|n\| + \frac{D}{2}\|\nabla n\|^2_{L^2(Q_T)} \leq c(\|n_0\|, \|f_0\|_{H^2(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}). \tag{3.2.5}$$

d'après (3.2.2) , (3.2.5) , donc

$$\|n\| + \frac{D}{2}\|n\|^2_{L^2_{loc}(0,\infty;H^1(\Omega))} \leq c(\|n_0\|, \|f_0\|_{H^2(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}).$$

**3$^{\text{ème}}$étape :**On montre que $m \in L^\infty_{loc}(0, \infty; H^2(\Omega))$.

On note $P_2(m) = \partial_t m - \alpha n - \varepsilon\triangle m + \nu m$ ,

en multipliant $\nabla P_2(m)$ par $\nabla\triangle m$ et $P_2(m)$ par $m$ et en intégrant sur $\Omega$

$$\frac{d}{2dt}\|\triangle m\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\triangle m\|^2 + \nu\|\triangle m\|^2 \leq c\|\nabla n\|^2, \tag{3.2.6}$$

et

$$\frac{d}{2dt}\|m\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla m\|^2 + \nu\|m\|^2 \leq c\|n\|^2, \tag{3.2.7}$$

alors d'après (3.2.6) , (3.2.7) , on a

$$\|m\|^2 + \|\triangle m\|^2 \leq c\|n\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + c\|m_0\|^2_{H^2(\Omega)}$$

de (1.1.6) , (3.2.3) , (3.2.4), on a :

$$\|m\|_{H^2(\Omega)} \leq (t+1)c(\|n_0\|, \|f_0\|_{H^2(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}). \tag{3.2.8}$$

on a que $m$ est uniformement borné en $t$ sur chaque intervale borné $[0, t]$ , donc $m \in L^\infty_{loc}([0, \infty[\,; H^2(\Omega))$.

**Théorème 3.2.1** *Supposons que* $(n_0, m_0, f_0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$,

*si* $n_0$ *et* $f_0$ *satisfont* (3.2.1) , *on a*

$$(n, m, f) \in \left(L^2_{loc}(0, +\infty; H^3(\Omega))\right)^3$$

**Preuve :** D'après la proposition précédente $(n, m, f) \in L^2_{loc}(0, \infty; H^1(\Omega)) \times (L^2(0, \infty; H^3(\Omega)))^2$, donc il reste à montrer que $n \in L^2_{loc}(0, \infty; H^3(\Omega))$.

Comme $n \in L^2_{loc}(0, \infty; H^1(\Omega))$, $\nabla f \in L^2_{loc}(0, \infty; H^2(\Omega))$ et puisque $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ en dimensions 2 et 3, on en déduit que $n\nabla f \in L^2_{loc}(0, \infty; H^1(\Omega))$ et par suite

$\nabla.(n\nabla f) \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)$. En utilisant les résultats de régularité de la solution d'une équation parabolique on conclut que $n \in (L^2_{loc}(0,\infty; H^2(\Omega))$.

Par conséquent $n \in L^2_{loc}(0,\infty; H^2(\Omega))$ et $\nabla f \in L^2_{loc}(0,\infty; H^2(\Omega))$ avec $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ en dimensions 2 et 3 donc $n\nabla f \in L^2_{loc}(0,\infty; H^2(\Omega))$ et par suite $\nabla.(n\nabla f) \in L^2_{loc}(0,\infty; H^1(\Omega))$ .

Comme $n$ vérifie une équation parabolique avec second membre $\nabla.(n\nabla f) \in L^2_{loc}(0,\infty; H^1(\Omega))$ alors $n \in L^2_{loc}(0,\infty; H^3(\Omega))$.

On note $P_2(n) = \partial_t n - D\triangle n + \rho\nabla.(n\nabla f)$. En multipliant $\nabla P_2(n)$ par $\nabla\triangle n$ et en intégrant sur $\Omega$ on obtient en utilisant l'inégalité de Young

$$\frac{d}{2dt}\|\triangle n\|^2 + D\|\nabla\triangle n\|^2 \leq c\|\triangle(n\nabla f)\|^2 + \frac{D}{2}\|\nabla\triangle n\|^2,$$

et comme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,d'après l'inégalité (1.2.4) , il existe une constante $c$ (dépendant de $\Omega$) telle que

$$\begin{aligned}\frac{d}{2dt}\|\triangle n\|^2 + \frac{D}{2}\|\nabla\triangle n\|^2 &\leq c\|n\nabla f\|^2_{H^2(\Omega)} \\ &\leq c\|n\|^2_{H^2(\Omega)}\|\nabla f\|^2_{H^2(\Omega)},\end{aligned}$$

d'après l'inégalité (1.1.5) , on a $\forall\varepsilon_1 > 0; \exists c_{\varepsilon_1} > 0$ tel que

$$\|\nabla n\|^2 + \|\triangle n\|^2 \leq \varepsilon_1\|\nabla\triangle n\|^2 + c_{\varepsilon_1}\|n\|^2,$$

donc

$$\frac{d}{dt}\|\triangle n\|^2 + D\|\nabla\triangle n\|^2 \leq c(\|n\|^2 + \varepsilon_1\|\nabla\triangle n\|^2)(\|f\|^2 + \|\nabla\triangle f\|^2),$$

d'après (3.2.4) ,

$$\|n\|^2_{L^2(0,t;H^1(\Omega))} \leq t\ c(\|n_0\|, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|),$$

et d'après (2.2.17), (1.1.4) et (2.2.19)

$$\begin{aligned}
\|\nabla f\|^2_{H^2(\Omega)}(t) &\leq c\|\nabla\triangle f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq e^{-2\gamma\gamma_*.t}C_{f_0}\left(1+t\|n\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right)^3 \\
&\leq e^{-2\gamma\gamma_*.t}C\left(\|n_0\|^2_{H^1(\Omega)}, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}\right)(1+t)^3,
\end{aligned}$$

on a

$$\frac{d}{dt}\ \|\triangle n\|^2 + D\|\nabla\triangle n\|^2 \leq C_t.(1+\varepsilon_1\|\nabla\triangle n\|^2)e^{-2\gamma\gamma_*t},$$

où

$$C_t = C\left(\|n_0\|_{H^1(\Omega)}, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}\right)(1+t\ )^3,$$

donc

$$\frac{d}{dt}\|\triangle n\|^2 + D\|\nabla\triangle n\|^2 \ \leq \varepsilon_1 e^{-2\gamma\gamma_*t}C_t\|\nabla\triangle n\|^2 + C_t e^{-2\gamma\gamma_*t},$$

D'après (2.2.19)

$$C_t e^{-2\gamma\gamma_2 t} \leq C\left(\|n_0\|_{H^1(\Omega)}, \gamma, \gamma_2\right),$$

alors

$$\frac{d}{dt}\|\triangle n\|^2 + D\|\nabla\triangle n\|^2 \ \leq \varepsilon_1 C\left(\|n_0\|_{H^1(\Omega)}, \gamma, \gamma_*\right)\|\nabla\triangle n\|^2 + C_t e^{-2\gamma\gamma_*t},$$

Il suffit choisir $\varepsilon_1 \ = \dfrac{D}{2C(\|n_0\|^2_{H^1(\Omega)}, \gamma, \gamma_*)}$, donc

$$\frac{d}{dt}\|\triangle n\|^2 + \frac{D}{2}\|\nabla\triangle n\|^2 \ \leq C_t e^{-2\gamma\gamma_*t}, \tag{3.2.9}$$

puis en intégrant (**??**) par rapport au temps on a :

$$\|\triangle n\|^2 + \frac{D}{2}\|\nabla\triangle n\|^2_{L^2(0,T;:\Omega)} \ \leq C\left(\|n_0\|_{H^2(\Omega)}, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^2(\Omega)}\right), \tag{3.2.10}$$

de(**??**) , (3.2.10), et d'après (1.1.6) ,

$$\|n\|^2_{L^2_{loc}(0,\infty;H^3(\Omega))} \ \leq C\left(\|n_0\|_{H^2(\Omega)}, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^2(\Omega)}\right),$$

d'où le résultat.

**Remarque 3.2.1** *A l'aide de la même procédure on peut montrer que*

$$\frac{d}{dt}\|\nabla n\|^2 + D\|\triangle n\|^2 \ \leq C_t e^{-2\gamma\gamma_* t}. \tag{3.2.11}$$

*En effet, en multipliant* $P_2(n) = \partial_t n - D\triangle n + \rho\nabla.(n\nabla f)$ *par* $\triangle n$ *et en intégrant sur* $\Omega$

$$\frac{d}{2dt}\|\nabla n\|^2 + D\|\triangle n\|^2 \leq c\|\nabla.(n\nabla f)\|^2 + \frac{D}{2}\|\triangle n\|^2,$$

*et comme* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *d'après l'inégalité* $(1.2.4)$, *il existe une constante* $c$ (*dépendant de* $\Omega$) *tel que*

$$\begin{aligned}
\|\nabla.(n\nabla f)\|^2 &\leq \|n\nabla f\|^2_{H^2(\Omega)} \\
&\leq c\|n\|^2_{H^2(\Omega)}\|\nabla f\|^2_{H^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

*d'après* $(1.1.5)$, $\exists c > 0$ *tel que*

$$\|n\|^2_{H^2(\Omega)} \leq \ c\|n\|^2 + c\|\triangle n\|^2,$$

*d'après* $(3.2.10), (3.2.3)$

$$\|n\|^2_{L^2(0,\infty;H^2(\Omega))} \leq c(\|n_0\|_{H^1(\Omega)}, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|),$$

*et d'après* (2.2.16), (1.1.4) *et* (2.2.19)

$$\begin{aligned}
\|\nabla f\|^2_{H^2(\Omega)} &\leq c\|\nabla\triangle f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq e^{-2\gamma\gamma_*.t} C\left(\|n\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}, t\right) \\
&\leq e^{-2\gamma\gamma_*.t} C\left(\|n_0\|^2_{H^1(\Omega)}, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}, t\right),
\end{aligned}$$

*on a*

$$\frac{d}{dt}\|\nabla n\ \|^2 + D\|\triangle n\ \|^2 \ \leq C_t e^{-2\gamma\gamma_* t},$$

*où*

$$C_t = C\left(\|n_0\|_{H^1(\Omega)}, \|f_0\|_{H^3(\Omega)}, \|m_0\|_{H^1(\Omega)}\right)(1+t)^3.$$

## 3.3 Comportement asymptotique de la solution

**Théorème 3.3.1** *Supposons* $(n_0, m_0, f_0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$*. Si* $n_0$ *et* $f_0$ *satisfont* (3.2.1) *alors pour* $0 < \kappa < \frac{D}{2}$, $0 < \beta < \gamma\gamma_*$, $0 < \delta < \nu$, $\delta < \kappa$ *tels que*

$$\lim_{t\to\infty} \exp(\kappa t)\|n(t,.)-\overline{n}_0\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{t\to\infty} \exp(\delta t)\|m(t,.)-\tfrac{\alpha}{\nu}\overline{n}_0\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{t\to\infty} \exp(\beta t)\|f(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

**Preuve :** D'après (3.2.9), (3.2.11), pour $(n_0, m_0, f_0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$, on a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\|\nabla n\|^2_{L^2(\Omega)} + D\|\triangle n\|^2 \leq c(1+t)^3 e^{-2\gamma\gamma_*.t}, \\ \\ \frac{d}{dt}\|\triangle n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{D}{2}\|\nabla\triangle n\,\|^2 \leq c(1+t)^3 e^{-2\gamma\gamma_*.t}, \end{cases}$$

alors d'après (1.1.4), pour tout $0 < \kappa < \frac{D}{2}$ tel que

$$\kappa\|\nabla n\|^2 \leq \frac{D}{2}\|\triangle n\|^2,$$

donc

$$\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla n\|^2 + \|\triangle n\|^2\right\} + \kappa\left\{\|\nabla n\|^2 + \|\triangle n\|^2\right\} \leq c(1+t)^3 e^{-2\gamma\gamma_* t}$$

Comme

$$\left((1+t)e^{-\frac{\gamma\gamma_*}{3}t}\right)^3 \leq \left(1 + \frac{3}{e\gamma\gamma_*}\right)^3,$$

alors

$$\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla n\|^2 + \|\triangle n\|^2\right\} + \kappa\left\{\|\nabla n\|^2 + \|\triangle n\|^2\right\} \leq ce^{-\gamma\gamma_* t},$$

comme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,d'après (1.1.3), on a

$$\|n - \overline{n}_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\triangle n\|^2$$

donc d'après (1.4.1), on a

$$\|n - \overline{n}_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leq \exp(-\kappa t)\left[c\left(\|n_0\|^2_{H^2(\Omega)}\right) + \int_0^t \exp\left((\kappa - \gamma\gamma_*)\, s\right) ds\right],$$

on peut choisir $\kappa - \gamma\gamma_* < 0$, donc

$$\int_0^t \exp\left((\kappa - \gamma\gamma_*)\, s\right) ds \leq t,$$

donc

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\|n-\overline{n}_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} &\leq \lim_{t\to\infty}\exp\left(-\kappa t\right)c\left(\|n_0\|_{H^2(\Omega)}\right)(1+t)\\
&= \lim_{t\to\infty}G(t)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty}\|n(.,t)-\overline{n}_0\|_{L^\infty(\Omega)}=0.$$

D'autre part d'après (3.2.6)

$$\frac{d}{dt}\|\triangle m\|^2+v\|\triangle m\|^2\leq c\|\nabla n\|^2,$$

donc $\forall\delta$, où $0<\delta<\nu$ tel que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\|m(t,.)-\overline{m}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \lim_{t\to\infty}C\|\triangle m\|\\
&\leq \lim_{t\to\infty}e^{-vt}c\left(\|m_0\|_{H^2(\Omega)},\|n_0\|_{H^2(\Omega)}\right)\left\{1+\int_0^t e^{vs}\|\nabla n\|^2ds\right\}\\
&\leq \lim_{t\to\infty}e^{-\delta t}c\left(\|m_0\|_{H^2(\Omega)},\|n_0\|_{H^2(\Omega)}\right)\left\{1+\int_0^t(1+s)e^{(\delta-\kappa)s}ds\right\}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

en utilisant (3.1.2)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\|m-\frac{\alpha}{\nu}\overline{n}_0\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \lim_{t\to\infty}\|m-\overline{m}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\overline{m}-\frac{\alpha}{\nu}\overline{n}_0\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\|\overline{m}-\frac{\alpha}{\nu}\overline{n}_0\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \lim_{t\to\infty}e^{-vt}\left(\overline{m}_0-\frac{\alpha}{\nu}\overline{n}_0\right)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty} \exp(\delta t) \left\| m(t,.) - \frac{\alpha}{\nu}\overline{n}_0 \right\| = 0.$$

Et finalement

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \|f(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \lim_{t\to\infty} \|f_0\|_{L^\infty(\Omega)} e^{-\gamma\gamma_* t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

si on prend $0 < \beta < \gamma\gamma_*$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \exp(\beta t)\|f(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \lim_{t\to\infty} \|f_0\|_{L^\infty(\Omega)} e^{(\beta-\gamma\gamma_*)t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

# Troisième partie

# .2$^{\text{ème}}$.modèle.

# Chapitre 4

# Existence globale en temps et unicité

## Sommaire



Nous étudions dans ce chapitre l'**existence globale** d'une solution pour $(\wp_{\mathbf{2}})$.

On transforme le problème parabolique $(\wp_{\mathbf{2}})$ en un problème hyperbolique qu'on traitera par la méthode de Galerkin adaptée au problème non linéaire

L'idée est d'introduire un schéma itératif de telle sorte qu'à chaque étape nous ayons affaire à un problème linéaire.

Nous achevons la preuve en montrant que la suite ainsi contruite est une suite de Cauchy et converge vers une solution classique de notre problème.

## 4.1 Position du problème

On se propose d'étudier le problème suivant :

$$
\begin{cases}
\dfrac{dn}{dt} = D\triangle n - \nabla.\left(\chi(c)n\nabla c\right) - \rho\nabla.\left(n\nabla f\right) \\[2ex]
\dfrac{df}{dt} = kn - \xi nf \qquad\qquad\qquad \text{dans} \quad [0,+\infty[\times\Omega \\[2ex]
\dfrac{dc}{dt} = -\eta nc \\[2ex]
\begin{cases}
\partial_\nu n = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \\[2ex]
n\left(0,x\right) = n_0, \ f\left(0,x\right) = f_0, \ c\left(0,x\right) = c_0 \quad \text{dans} \ \ \Omega
\end{cases}
\end{cases}
\tag{4.1.1}
$$

$n = n(t,x)$ : densité de la cellule tumorale.

$c = c(t,x)$ : concentration de facteur angiogénèse tumorale(TAF)

$f = f(t,x)$ : concentration dela fibronectine

$\partial_\nu u = \nabla u.\nu, \nu$ : la normale extérieure à $\partial\Omega$.

$\Omega$ : domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$ ; de frontière $\partial\Omega$ régulière.

$D; \rho; \xi; k; \eta$ : constantes positives.

$\chi(c) = \dfrac{\chi_0}{1+\lambda c}$, sensitivité où $\chi_0; \alpha$ : constantes positives.

## 4.2 Modification du problème

En résolvant les équations différentielles satisfaites par $f$ et $n$ et remplaçant dans l'équation satisfaite par la densité cellulaire, on montre que notre système se remène au problème hyperbolique à une inconnue suivant

**Proposition 4.2.1** *Résoudre le système* $(\mathbf{4.1.1})$ *revient à trouver* $u$ *tel que :*

$$\begin{cases} P_u(u) = u_{tt} - D\triangle u_t - \nabla.(\ (u_t+\gamma)A\,(u)\,e^{-\gamma t-u}\nabla u) = 0 \quad dans \quad [0,+\infty[\times\Omega \\ \\ \partial_\nu u = 0 \quad sur \quad [0,+\infty[\times\partial\Omega \\ \\ u\,(0,x) = h_0\,(x)\,,\ u_t\,(0,x) = h_1\,(x) \quad sur \quad \Omega, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

*où* $P_v(u) = u_{tt} - D\triangle u_t - \nabla.(\ (u_t+\gamma)A\,(v)\,e^{-\gamma t-v}\nabla u)$

$$A(u) = \frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}} + \rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)(\gamma t+u)}. \tag{4.2.2}$$

***Preuve :*** *D'après la deuxième équation de* $(\mathbf{4.1.1})$, *on a*

$$\partial_t f = kn - \xi nf \ = -\xi n\left(f - k\xi^{-1}\right),$$

*donc*

$$\begin{aligned} \frac{f_t}{\left(f-k\xi^{-1}\right)} &= \frac{\left(f-k\xi^{-1}\right)_t}{\left(f-k\xi^{-1}\right)} \\ &= \partial_t \ln\left(f-k\xi^{-1}\right) = -\xi n, \end{aligned}$$

*et d'après la troisième équation de* $(\mathbf{4.1.1})$, *on a*

$$\begin{aligned} \frac{c_t}{c} &= \partial_t \ln c \\ &= -\eta n, \end{aligned}$$

*on note*

$$\ln c = \psi (t, x) \quad donc \quad n (t, x) = -\eta^{-1} \psi_t (t, x) \quad et \quad c = e^{\psi} \tag{4.2.3}$$

*donc on peut écrire*

$$\ln \left( f (t, x) - k\xi^{-1} \right) = \eta^{-1} \xi \left( \psi (t, x) - \psi (0, x) \right) + \ln \left( f (0, x) - k\xi^{-1} \right),$$

*ce qui est équivalent à*

$$f (t, x) - k\xi^{-1} = e^{\eta^{-1}\xi\psi(t,x)} \; \Psi (x) \tag{4.2.4}$$

*où*

$$\Psi (x) = c_0 (x)^{-\eta^{-1}\xi} \left( f (0, x) - k\xi^{-1} \right),$$

*en remplaçant* $n$ *par* $-\eta^{-1}\psi_t (t, x)$ *et* $f$ *par* $k\xi^{-1} + \; e^{\eta^{-1}\xi\psi(t,x)} \; \Psi (x)$ *,l'équation parabolique satisfaite par* $n$ *s'écrit*

$$\begin{aligned} \psi_{tt} &= D\triangle\psi_t - \nabla.(\frac{\chi_0 e^{\psi}}{1 + \lambda e^{\psi}} \psi_t \nabla\psi) \\ &\quad -\nabla.(\rho\eta^{-1}\xi\psi_t e^{\eta^{-1}\xi\psi(x,t)} \Psi (x) \nabla\psi) - \nabla.(\rho\psi_t e^{\eta^{-1}\xi\psi(x,t)} \nabla\Psi (x)). \end{aligned}$$

*Or, d'après les hypothèses du théorème, on a* $\Psi (x) \equiv 1$*, donc l'équation devient*

$$\psi_{tt} = D\triangle\psi_t - \nabla.(\frac{\chi_0 e^{\psi}}{1 + \lambda e^{\psi}} \psi_t \nabla\psi) - \nabla.(\rho\eta^{-1}\xi\psi_t e^{\eta^{-1}\xi\psi(x,t)} \nabla\psi).$$

*En remplacant* $\psi$ *par* $-\psi$ *on obtient*

$$\begin{aligned} \psi_{tt} &= D\triangle\psi_t \\ &\quad -\nabla.(\left( \frac{\chi_0 e^{(\mu-1)\psi}}{1 + \lambda e^{-\psi}} + \rho\eta^{-1}\xi e^{\left(\mu - \eta^{-1}\gamma\right)\psi(x,t)} \right) e^{-\mu \; \psi(x,t)} \psi_t \nabla\psi), \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

*où*

$$0 < \mu = \min \left\{ \eta^{-1}\xi, 1 \right\}.$$

*on note ensuite*

$$\theta(\psi) = \left(\frac{\chi_0 e^{(\mu-1)\psi}}{1+\lambda e^{-\psi}} + \rho\eta^{-1}\xi e^{\left(\mu-\eta^{-1}\xi\right)\psi(x,t)}\right).$$

*Pour simplifier les calculs, on suppose* $\mu = 1$, *donc* $\theta(\psi)$ *devient*

$$\theta(\psi) = \left(\frac{\chi_0}{1+\lambda e^{-\psi}} + \rho\eta^{-1}\xi e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)\psi(x,t)}\right),$$

*avec*

$$\eta^{-1}\xi - 1 \geq 0.$$

*En injectant ces notations dans* (4.2.5) *et en introduisant la nouvelle inconnue* $u$ *par*

$$\psi = \gamma\phi(t) + u, \ \textit{avec}\ \phi(t) = t+1 \tag{4.2.6}$$

*et* $\gamma > 0$ *un paramètre qui sera choisi ultérieurement, l'équation* (4.2.5) *devient*

$$u_{tt} = D\triangle u_t - \nabla.((u_t+\gamma)A\left(u\right)e^{-\gamma t-u}\nabla u),$$

*où*

$$A(u) = \frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}} + \rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)(\gamma t+u)},$$

*qui est exactement la formulation du problème* (**4.2.1**)*. (On remarquera que dans la nouvelle formulation, l'inconnue devient* $u = \ln(c) - \gamma(t+1)$*).*

*En intégrant la première équation de* (**4.1.1**)*. On vérifie comme dans le chapitre précédent que la masse totale est conservée c'est à dire* $\int_\Omega n dx = \|n_0\|_{L^1(\Omega)}$ *On va choisir* $\gamma$ *de telle sorte que* $\dfrac{d}{dt}\int_\Omega u_t dx = 0$.

*On a*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t dx &= \int_\Omega D\triangle u_t + \nabla.((u_t+\gamma)A\left(u\right)e^{-\gamma t-u}\nabla u)dx \\ &= \int_{\partial\Omega} D\nabla u_t.\nu + (u_t+\gamma)A\left(u\right)e^{-\gamma t-u}\nabla u.\nu d\sigma \\ &= 0,\end{aligned}$$

*donc, d'après* (4.2.3) *et la conservation de la masse*

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t dx &= \int_\Omega h_1(x)\, dx \\ &= \eta \int_\Omega n dx - \int_\Omega \gamma dx \\ &= \eta \|n_0\|_{L^1(\Omega)} - \gamma\, |\Omega|\end{aligned}$$

*donc il suffit de choisir*

$$\gamma = \frac{\eta}{|\Omega|} \|n_0\|_{L^1(\Omega)}, \tag{4.2.7}$$

**Remarque 4.2.1** *Récapitulons maintenant le changement de variable qui transforme* (**4.1.1**) *à* (**4.2.1**) :

*Grâce à* (4.2.3) *et* (4.2.6)

$$n(t,x) = -\eta^{-1}\psi_t(t,x) = \eta^{-1}\gamma + \eta^{-1}u_t, \tag{4.2.8}$$

$$c(t,x) = e^{\psi(t,x)} = e^{-\gamma(t+1)-u}, \tag{4.2.9}$$

*de* (4.2.4) *et* (4.2.6)

$$f(t,x) = k\xi^{-1} + e^{-\eta^{-1}\xi(\gamma(t+1)+u)} c_0(x)^{-\eta^{-1}\xi} \left(f(x,0) - k\xi^{-1}\right). \tag{4.2.10}$$

*Si on ajoute la condition sur les données initiales* $c_0(x)^{-\eta^{-1}\xi}\left(f(x,0) - k\xi^{-1}\right) = 1$, (4.2.10) *devient*

$$f(t,x) = k\xi^{-1} + e^{-\eta^{-1}\xi(\gamma(t+1)+u)}. \tag{4.2.11}$$

*De même que* (3.1.1), *on a conservation de la masse pour* $n$, *compte tenu de* (4.2.8), *il est légitime d'imposer des conditions pour que la masse soit conservée pour* $u_t$.

**Définition 4.2.1** *Soient* $\{\lambda_i\}_{i\geq 0}$ ; *la suite dénombrable des valeurs propres de* $-\triangle$ *avec condition de Neumann homogène , et* $\varphi_j = \varphi_j(x)$ *les fonctions propres associées, :* $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \to +\infty$. *telles que* $\left(\varphi_j\right)_{j\geq 0}$ *soit une base hilbertiene dans* $L^2(\Omega)$, *et* $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j\geq 0}$ *orthogonale dans* $H^1(\Omega)$.

*On note*

$$V^s\left(\Omega\right) = \left\{\sum_{j=1}^{+\infty} f_j\varphi_j : f_j \in \mathbb{R}, \|u\|^2_{V^s(\Omega)} = \sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j^{2s} f_j^2 < +\infty\right\}.$$

**Lemme 4.2.1** *Pour* $\phi \in V^s\left(\Omega\right)$, *on a* $\forall s \geq 0 : V^s\left(\Omega\right) \subset H^{2s}\left(\Omega\right).$

*De plus, dans l'ensemble* $\left\{\phi \in V^s\left(\Omega\right), \int\limits_{\Omega}\phi dx = 0\right\}$, *les nomes* $\|.\|_{V^s(\Omega)}$ *et* $\|.\|_{H^{2s}(\Omega)}$ *son équivalentes.*

**Preuve :** Soit $\phi \in V^s\left(\Omega\right)$, alors il existe $\{f_j\}_{j\geq 1}$ tel que $\phi = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} f_j\varphi_j$.

Il existe $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\|\phi\|^2_{H^{2s}(\Omega)} &= \|\sum_{j=1}^{+\infty} f_j\varphi_j\|^2_{H^{2s}(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{+\infty}(c\|f_j\triangle^s\varphi_j\|^2 + \|f_j\varphi_j\|^2) \\
&\leq \sum_{j=1}^{+\infty}(cf_j^2\|\triangle^s\varphi_j\|^2 + f_j^2\|\varphi_j\|^2),
\end{aligned}$$

comme $\triangle^s\varphi_j = \lambda_j^s\varphi_j$, on a

$$\begin{aligned}
\|\phi\|^2_{H^{2s}(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{+\infty}(c\lambda_j^{2s}.f_j^2 + f_j^2\ ) \\
&\leq \sum_{j=1}^{+\infty}(c\lambda_j^{2s}.f_j^2 + \frac{\lambda_j^{2s}}{\lambda_1^{2s}}f_j^2\ ) \\
&\leq \sum_{j=1}^{+\infty}\left(c + \frac{1}{\lambda_1^{2s}}\right)\lambda_j^{2s}.f_j^2. \\
&\leq \left(c + \frac{1}{\lambda_1^{2s}}\right)\|\phi\|^2_{V^s(\Omega)},
\end{aligned}$$

si $\int\limits_{\Omega} \phi dx = 0$, on a l'équivalence de $\|\phi\|_{H^{2s}(\Omega)}$et $\|\triangle^s \phi\|$.

Or $\|\triangle^s \phi\| = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^{2s} f_j^2 = \|\phi\|_{V^s(\Omega)}$, donc on peut conclure directement l'équivalence de $\|.\|_{H^{2s}(\Omega)}$et $\|.\|_{V^s(\Omega)}$ dans ce cas.

**Notation 4.2.1** *On note :*

$$E[u] \;=\; \|u_t\|^2 + \gamma \| \sqrt{A(u)\, e^{-\gamma t - u}} \bigtriangledown u\|^2,$$

*et*

$$E_2[u] = \| \triangle u_t\|^2 + \gamma \| \sqrt{A(u)\, e^{-\gamma t - u}} \bigtriangledown \triangle u\|^2.$$

## 4.3 Estimations d'énergie.

On suppose que

$$\|u_t\|_{L^2(0,+\infty;H^2(\Omega))} \leq N, \text{ et } \underset{0\leq t\leq T}{\text{supess}}\|u_t\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq L, \tag{4.3.1}$$

soit

$$k = \max\{C_\Omega \ ; \ 1\},$$

où $C_\Omega$ la constante (depend de $\Omega$) définie dans $(1.2.3)$, et

$$c_1 = \max\left\{\|e^{-\eta^{-1}\xi u}\|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \|e^{\eta^{-1}\xi u}\|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \ \|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \|e^{u}\|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \ 1\right\},$$

$$c_2 = \max\left\{k\eta^{-1}\xi N \ ; \ 1\right\},$$

on note $(4.3.2)$ la condition suivante

$$\gamma \geq \gamma^*, \tag{4.3.2}$$

où $\gamma^*$ une constante depend de $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$, $N$ et $L$,

$\gamma^*$ donnée comme suivant :

$$\gamma^* = \max\left\{\begin{array}{l} 20c_2^2 \ ; \ \frac{4c_1^2}{\eta^{-1}\xi-1} \ ; \ \ln(\frac{5ek^{10}c_1'^2c_1^{18}(\chi_0+\rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2)^2(1+\lambda)^2}{D\chi_0}) \ ; \\ \\ \frac{1}{\eta^{-1}\xi-1}\ln(\frac{54ek^{10}c_1'^2c_1^{18}(\chi_0+\rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2)^2(1+\lambda)^2}{D\chi_0}) \ ; \ 2kL+1 \end{array}\right\}.$$

On verra plus tard que si $u_t$ satisfait $(4.3.1)$, et $\gamma$ satisfait $(\mathbf{4.3.2})$, alors

$$N^2 + DL^2 \leq \| \triangle u_t\|^2(0) + 2.$$

**Lemme 4.3.1** *Si $u_t$ satisfait $(4.3.1)$, alors*

$$\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)} \leq c_1 e^{c_2\sqrt{t}}. \tag{4.3.3}$$

**Preuve :** On a

$$\frac{d}{dt}\|e^{-u}\|^2_{H^2(\Omega)}(t) \leq 2k\|u_t\|_{H^2(\Omega)}\|e^{-u}\|^2_{H^2(\Omega)}(t),$$

donc d'après l'inégalité de Gronwall

$$\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq \|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(0)\exp(k\int_0^t \|u_t\|_{H^2(\Omega)}(t')\,dt'),$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq \|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(0)\exp(k\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|u_t\|^2_{H^2(\Omega)}(t')\,dt'}),$$

cela implique

$$\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq c_1 e^{c_2\sqrt{t}}.$$

**Lemme 4.3.2** *Si $\|u_t\|_{L^2(0,+\infty;H^3(\Omega))} \leq N$, alors il éxiste $c_1' > 0$ dépendant de $\|u_0\|_{H^3(\Omega)}$ tel que*

$$\|e^{-u}\|_{H^3(\Omega)} \leq c_1' e^{c_2\sqrt{t}}. \tag{4.3.4}$$

**Preuve :** On a

$$\frac{d}{dt}\|e^{-u}\|^2_{H^3(\Omega)}(t) \leq 2k\|u_t\|_{H^3(\Omega)}\|e^{-u}\|^2_{H^3(\Omega)}(t)\,,$$

d'après l'inégalité de Gronwall

$$\|e^{-u}\|_{H^3(\Omega)}(t) \leq \|e^{-u}\|_{H^3(\Omega)}(0)\exp(k\int_0^t \|u_t\|_{H^3(\Omega)}(t')\,dt'), \tag{4.3.5}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\|e^{-u}\|_{H^3(\Omega)}(t) \leq \|e^{-u}\|_{H^3(\Omega)}(0)\exp(k\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|u_t\|^2_{H^3(\Omega)}(t')\,dt'}),$$

si on pose

$$c_1^{'} = \max\left\{\|e^{-\eta^{-1}\xi u}\|_{H^3(\Omega)}(0)\ ;\|e^{\eta^{-1}\xi u}\|_{H^3(\Omega)}(0)\ ;\ \|e^{-u}\|_{H^3(\Omega)}(0)\ ;\ \|e^{u}\|_{H^3(\Omega)}(0)\ ;\ 1\right\},$$

cela implique

$$\|e^{-u}\|_{H^3(\Omega)}(t) \leq c_1' e^{c_2\sqrt{t}}.$$

**Remarque 4.3.1** *D'après* (1.1.7) , *la constante* $c_1'$ *dépend de* $\|u_0\|_{H^3(\Omega)}$ .

**Lemme 4.3.3** *Si* $u_t \in L^2(0, +\infty; H^2(\Omega))$, *alors*

$$\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)} \geq \frac{e^{c_2\sqrt{t}}}{c_1}. \tag{4.3.6}$$

**Preuve :** On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|e^{-u}\|^2_{H^2(\Omega)}(t) &= 2(-u_t e^{-u}, e^{-u})_{H^2(\Omega)} \\ &\geq -2k\|u_t\|_{H^2(\Omega)}\|e^{-u}\|^2_{H^2(\Omega)}(t), \end{aligned}$$

alors

$$\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(t) \geq \|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(0)\exp(-k\int_0^t \|u_t\|_{H^2(\Omega)}(t')\,dt'),$$

en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(t) \geq \|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)}(0)\exp(-k\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|u_t\|^2_{H^2(\Omega)}(t')\,dt'}),$$

cela implique

$$\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)} \geq \frac{e^{c_2\sqrt{t}}}{c_1}.$$

**Lemme 4.3.4** *Si* $u_t$ *satisfait* (4.3.1) , *pour p.p* $x \in \Omega$, *on a*

$$A(u)e^{-\gamma t-u} \geq \frac{\chi_0}{c_1 k(1+\lambda)^2}e^{-\gamma}e^{-\gamma t-c_2\sqrt{t}}. \tag{4.3.7}$$

**Preuve :** D'après (4.2.2)

$$e^{-\gamma t-u}A(u) = \frac{\chi_0 e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}} + \rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}e^{-\eta^{-1}\xi(\gamma t+u)},$$

on a

$$\rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}e^{-\eta^{-1}\xi(\gamma t+u)} > 0,$$

donc

$$e^{-\gamma t-u}A(u) > \frac{\chi_0 e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}},$$

mais

$$e^u \leq \|e^u\|_{L^\infty(\Omega)}, \forall t \geq 0,\ x \in \Omega\ p.p,$$

d'après (4.3.3) , on a

$$\begin{aligned} 1 + \lambda e^{\gamma}\|e^{-\gamma t - u}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq 1 + \lambda k e^{\gamma}\|e^{-\gamma t - u}\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq c_1 k(1+\lambda)^2 e^{c_2\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

donc d'après (4.3.6) , on a

$$\frac{\chi_0 e^{-\gamma}e^{-\gamma t - u}}{1 + \lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t - u}} \geq \frac{\chi_0}{c_1 k(1+\lambda)^2} e^{-\gamma}e^{-\gamma t - 2c_2\sqrt{t}}.$$

**Lemme 4.3.5** *Si $u_t$ satisfait* (4.3.1) , *on a*

$$\|1 + Du + D^2u\|(t) \leq kc_1^2 e^{2c_2\sqrt{t}},\ \ et\ \|D^3u\|(t) \leq kc_1' c_1 e^{2c_2\sqrt{t}}\ . \tag{4.3.8}$$

**Preuve :** On a d'après (1.2.3) , (1.2.4)

$$\begin{aligned} \|D^2u + Du + 1\|(t) &\leq \|e^u e^{-u}(D^2u + Du + 1)\| \\ &\leq \|e^u\|_{L^\infty(\Omega)}\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq k\|e^u\|_{H^2(\Omega)}\|e^{-u}\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

d'après (4.3.3)

$$\|D^2u + Du + 1\|(t) \leq kc_1^2 e^{2c_2\sqrt{t}},$$

de même que précident,

$$\begin{aligned} \|D^3u\|(t) &\leq \|e^u e^{-u}D^3u\| \\ &\leq \|e^u\|_{L^\infty(\Omega)}\|e^{-u}\|_{H^3(\Omega)} \\ &\leq k\|e^u\|_{H^2(\Omega)}\|e^{-u}\|_{H^3(\Omega)} \end{aligned}$$

d'après (4.3.4), (**??**)

$$\|D^3 u\|\,(t) \leq k c_1' c_1 e^{2c_2\sqrt{t}},$$

**Lemme 4.3.6** *Si* $u_t$ *satisfait* (4.3.1) *,on a*

$$\|e^{-\gamma t-u}A(u)\|_{H^2(\Omega)} \leq (\chi_0 e^{-\gamma} + \rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})k^2 c_1^3 e^{-\gamma t+3c_2\sqrt{t}}\ . \tag{4.3.9}$$

**Preuve :** D'aprés (4.2.2)

$$\begin{aligned}\|A(u)\|_{H^2(\Omega)} &= \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}} + \rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}e^{-(\eta^{-1}\xi-1)(\gamma t+u)}\|_{H^2(\Omega)}\\ &\leq \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{\lambda+e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}\|_{H^2(\Omega)} + \rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}\|e^{-(\eta^{-1}\xi-1)(\gamma t+u)}\|_{H^2(\Omega)},\end{aligned}$$

d'aprés (4.3.3) , on a

$$\begin{aligned}\|e^{-(\eta^{-1}\xi-1)u}\|_{H^2(\Omega)} &\leq k\|e^{-\eta^{-1}\xi u}\|_{H^2(\Omega)}\|e^{u}\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq k c_1^2 e^{2c_2\sqrt{t}}\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

d'autre part

$$\|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}\|_{H^2(\Omega)}$$

$$\leq \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}\| + \|D(\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}})\| + \|D^2(\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}})\|$$

$$\leq \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}\| + \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}(D^2u+2Du)}{(1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u})^2}\| + \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}(\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}Du)^2}{(1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u})^3})\|$$

$$\leq \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}\| + \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}(D^2u+2Du)}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}\| + \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}(Du)^2}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}\|$$

en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}}\|_{L^\infty(\Omega)} 2\|1+Du+D^2u\|,$$

et d'aprés (4.3.8) , (**??**), on a

$$\|A(u)\|_{H^2(\Omega)} \leq \chi_0 e^{-\gamma} c_1^2 e^{2c_2\sqrt{t}} + \rho\eta^{-1}\xi k c_1^2 e^{-\eta^{-1}\xi\gamma} e^{-(\eta^{-1}\xi-1)\gamma t+2c_2\sqrt{t}},$$

donc d'aprés (4.3.3), on a

$$\begin{aligned}\|e^{-\gamma t-u}A(u)\|_{H^2(\Omega)} &\leq k\|e^{-\gamma t-u}\|_{H^2(\Omega)}\|A(u)\|_{H^2(\Omega)}\\ &\leq (\chi_0 e^{-\gamma} + \rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})k^2 c_1^3 e^{-\gamma t+3c_2\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

**Lemme 4.3.7** *Si $u_t$ satisfait* (4.3.1) *et $\gamma$ satisfait* (4.3.2), *on a*

$$\|\partial_t A(u)A^{-1}(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{8}\|u_t\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{8}. \tag{4.3.11}$$

**Preuve :** D'après (4.2.2)

$$A(u) = \frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}} + \rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma} e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)(\gamma t+u)}$$

donc

$$\partial_t A(u) = (\gamma+u_t)\left[\frac{\chi_0\lambda e^{-2\gamma}e^{-\gamma t-u}}{\left(1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}\right)^2} - \rho\eta^{-1}\xi\gamma\left(\eta^{-1}\xi-1\right)e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)(\gamma t+u)}\right]$$

alors

$$\|\partial_t A(u)\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\left(\gamma+u_t\right)\left[\frac{\chi_0\lambda e^{-2\gamma}e^{-\gamma t-u}}{\left(1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u}\right)^2} - \rho\eta^{-1}\xi\gamma\left(\eta^{-1}\xi-1\right)e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)(\gamma t+u)}\right]\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$\leq \|\gamma+u_t\|_{L^\infty(\Omega)}(\chi_0\lambda e^{-2\gamma}\|e^{-\gamma t-u}\|_{L^\infty(\Omega)} + \rho\eta^{-1}\xi\left(\eta^{-1}\xi-1\right)\gamma e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}\|e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)(\gamma t+u)}\|_{L^\infty(\Omega)}),$$

mais $\eta^{-1}\xi - 1 > 0$, donc pour $\gamma \geq 0$ on a

$$\gamma e^{-\frac{1}{2}(\eta^{-1}\xi-1)\gamma} \leq \frac{4}{e\left(\eta^{-1}\xi-1\right)},$$

et comme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, d'aprés l'injection de sobolev (1.2.3) , on a $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

donc

$$\|\partial_t A(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2k(\|u_t\|_{L^\infty(\Omega)}+\gamma)(\chi_0 e^{-2\gamma}\|e^{-\gamma t-u}\|_{H^2(\Omega)}+\rho\eta^{-1}\xi e^{-\frac{1}{2}(\eta^{-1}\xi+1)\gamma}\|e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)(\gamma t-u)}\|_{H^2(\Omega)}), \tag{4.3.12}$$

et d'après (4.3.8) pour $p.p\ x \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} A(u) &\geq \frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t}\|e^{-u}\|_{L^\infty(\Omega)}} \\ &\geq \frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda c_1 k e^{-\gamma} e^{-\gamma t + c_2\sqrt{t}}} \\ &\geq \frac{\chi_0 e^{-\gamma}}{1+\lambda c_1 k e^{-\gamma}}, \end{aligned}$$

donc

$$A^{-1}(u) \leq \frac{1+\lambda c_1 k}{\chi_0} e^{\gamma}, \tag{4.3.13}$$

d'après $(4.3.10)\,, (4.3.12)$ et $(4.3.13)$ on peut concleure que

$$\begin{aligned} \|A^{-1}(u)\partial_t A(u)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|A^{-1}(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_t A(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \frac{1+\lambda c_1}{\chi_0}(\|u_t\|_{L^\infty(\Omega)}+1) \\ &\quad .2k^2(\lambda\chi_0 e^{-\gamma}\|e^{-\gamma t-u}\|_{H^2(\Omega)}+\rho\eta^{-1}\xi e^{-\frac{1}{2}(\eta^{-1}\xi-1)\gamma}\|e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)(\gamma t+u)}\|_{H^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

donc d'après $(4.3.3)\,, (4.3.11)$ $\forall t > 0$, on a

$$\|\partial_t A(u)A^{-1}(u)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$\leq \frac{(1+\lambda)^2}{\chi_0}(\|u_t\|_{L^\infty(\Omega)}+1)k^2c_1^2(\chi_0 e^{-\gamma}e^{-\gamma t+2c_2\sqrt{t}}+\rho\eta^{-1}\xi e^{-\frac{1}{2}(\eta^{-1}\xi-1)\gamma}e^{-\left(\eta^{-1}\xi-1\right)\gamma t+2c_2\sqrt{t}}),$$

si $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\|\partial_t A(u)A^{-1}(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{8}\|u_t\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{1}{8}.$$

**Proposition 4.3.1** *Si $u_t$ satisfait* (4.3.1), *et $\gamma$ satisfait* (4.3.2), *alors*

$$\underset{t\geq 0}{\text{supess}} E\left[u\right](t) + \int_0^t D\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2 ds \leq E\left[u\right](0). \tag{4.3.14}$$

**Preuve :** En multipliant $P_u(u)$ par $u_t$ et en integrant sur $\Omega$

$$\partial_t\|u_t\|^2 = 2\left(u_{tt}, u_t\right) = -2D\|\nabla u_t \ \|^2 - 2\int_\Omega (u_t+\gamma)A\left(u\right)e^{-\gamma t-u}\nabla u \nabla u_t dx \tag{4.3.15}$$

et comme

$$\partial_t\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2 \quad = \quad -\gamma(A\left(u\right)e^{-\gamma t-u}\nabla u, \nabla u) + ((A\left(u\right)_t - u_t A\left(u\right))e^{-\gamma t-u}\nabla u, \nabla u)$$

$$+2(A\left(u\right)e^{-\gamma t-u}\nabla u, \nabla u_t),$$

donc (4.3.15) devient

$$\partial_t\left(\|u_t\|^2 + \|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2\right) + 2D\|\nabla u_t\|^2 + \gamma^2\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2 \tag{4.3.16}$$

$$= \quad -2(u_t A\left(u\right)e^{-\gamma t-u}\nabla u, \nabla u_t) + \gamma((A\left(u\right)_t - u_t A\left(u\right))e^{-\gamma t-u}\nabla u, \nabla u)$$

en utilisant l'inégalité de Young et celle de Hölder, et d'aprés (4.3.4) , (4.3.9) et (4.3.11), on a

$$2 \mid (u_t A\left(u\right)e^{-\gamma t-u}\nabla u, \nabla u_t) \mid$$

$$\leq \quad 2\ \|u_t\|_{L^\infty(\Omega)}\|A(u)e^{-\gamma t-u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u_t\|\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|$$

$$\leq \quad \frac{D}{2}\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\|u_t\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|A(u)e^{-\gamma t-u}\|_{L^\infty(\Omega)}}{D}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2$$

$$\leq \quad \frac{D}{2}\|\nabla u_t\|^2 + \tfrac{L(\chi_0+\rho\eta^{-1}\xi)k^2c_1e^{-\gamma}}{D}e^{-\gamma t+c_2\sqrt{t}}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2,$$

si $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$2 \mid (u_t A\left(u\right)e^{-\gamma t-u}\nabla u, \nabla u_t) \mid \leq \frac{D}{2}\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, d'aprés (**??**) , et pour $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\gamma \mid ((A(u)_t - u_t A(u))e^{-\gamma t-u}\nabla u, \nabla u) \mid$$

$$\leq \gamma(\|A(u)_t A(u)^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_t\|_{L^\infty(\Omega)})\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2$$

$$\leq \gamma \left(2\|u_t\|_{L^\infty(\Omega)} + 1\right) \|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2$$

$$\leq \frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\nabla u\|^2,$$

alors (4.3.16) devient

$$\partial_t E[u](t) + 2D\| \bigtriangledown u_t^2\| + \gamma^2\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2$$

$$\leq D\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2 + \frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2.$$

donc

$$\partial_t E[u](t) + D\| \bigtriangledown u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2 \leq 0. \tag{4.3.17}$$

puis en intégrant (4.3.17) par rapport a $t$, on trouve

$$E[u](t) + \int_0^t (D\| \bigtriangledown u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2)ds \leq E[u](0).$$

**Proposition 4.3.2** *Si $u_t$ satisfait* (4.3.1)*, et $\gamma$ satisfait* (4.3.2)*, alors $\exists c_3 > 0$ tel que*

$$\underset{t\geq 0}{\mathrm{supess}} E_2[u](t) + \int_0^t D\| \bigtriangledown \triangle u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown \triangle u\|^2 ds \leq E_2[u](0) + c_3. \tag{4.3.18}$$

**Preuve :** On va calculer $\triangle P_u(u)$, on a

$$0 = \triangle P_u(u) \quad = \triangle u_{tt} - \nabla.((u_t + \gamma)A(u)e^{-\gamma t-u}\nabla \triangle u) - \triangle \triangle u_t + R(u),$$

où

$$R(u) = \nabla\left[\triangle((u_t + \gamma)A(u)e^{-\gamma t-u})\nabla u + \bigtriangledown.((u_t + \gamma)A(u)e^{-\gamma t-u}) \triangle u\right],$$

on note $v = \triangle u$, alors par multiplication de $\triangle P_u(u)$ par $v_t$, et integration sur $\Omega$

$$\partial_t E\left[v\right](t) + D\| \bigtriangledown v_t\|^2 + \gamma^2 \|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\|^2 \tag{4.3.19}$$

$$= \quad -2(u_t A\left(u\right) e^{-\gamma t-u} \nabla v, \bigtriangledown v_t) + \gamma((A\left(u\right)_t - u_t A\left(u\right)) e^{-\gamma t-u} \nabla v, \nabla v) + 2\left(R\left(u\right), v_t\right),$$

d'aprés $(4.3.4)$, $(4.3.9)$ et $(4.3.11)$ ,avec $\left(R\left(u\right), v_t\right)$ est borné si $\gamma$ satisfait (4.3.2), car $\left(R\left(u\right), v_t\right)$

soit de la forme

$$(\partial^{\beta_1} u_t \partial^{\beta_2} A\left(u\right) \partial^{\beta_3} e^{-\gamma t-u} \partial^{\beta_4} \nabla u, \bigtriangledown v_t),$$

tel que

$$\sum_{i=1}^{4} \mid \beta_i \mid = 2, \text{ et } \mid \beta_4 \mid \leq 1,$$

si non

$$(\partial^{\beta_5} A\left(u\right) \partial^{\beta_6} e^{-\gamma t-u} \partial^{\beta_7} \nabla u, \bigtriangledown v_t),$$

tel que

$$\sum_{i=5}^{7} \mid \beta_i \mid = 2, \text{ et } \mid \beta_7 \mid \leq 1,$$

On montre que

$$(\partial^{\beta_1} u_t \partial^{\beta_2} A\left(u\right) \partial^{\beta_3} e^{-\gamma t-u} \partial^{\beta_4} \nabla u, \bigtriangledown v_t) \leq e^{-2\gamma t+2c_2\sqrt{t}} + \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|, \tag{4.3.20}$$

d'aprés $(1.2.5)$, $(4.3.1)$, $(4.3.3)$, $(4.3.4)$, $(4.3.9)$, et pour $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\begin{aligned}
&\mid \quad (\partial^{\beta_1} u_t \partial^{\beta_2} A\left(u\right) \partial^{\beta_3} e^{-\gamma t-u} \partial^{\beta_4} \nabla u, \bigtriangledown v_t) \mid \\
&\leq \quad k\|u_t\|_{H^2(\Omega)} \|A(u)\|_{H^2(\Omega)} \|e^{-\gamma t-u}\|_{H^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{H^2(\Omega)} \|\nabla v_t\|. \\
&\leq \quad (\chi_0 + \rho\eta^{-1}\xi) k^2 c_1'^4 c_1^6 e^{-\gamma} e^{-\gamma t+3c_2\sqrt{t}} \|\nabla v_t\|^2 \\
&\leq \quad \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|^2
\end{aligned}$$

maintenant on montre que

$$\left( \partial^{\beta_5} A\left(u\right) \partial^{\beta_6} e^{-\gamma t-u} \partial^{\beta_7} \nabla u, \bigtriangledown v_t\right) \leq e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}} + \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|^2, \tag{4.3.21}$$

d'aprés $(1.2.5)$ , $(4.3.1)$ , $(4.3.3)$ , $(4.3.4)$ , $(4.3.9)$ , et pour $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\begin{aligned}
& \left| \quad \left( \partial^{\beta_5} A\left(u\right) \partial^{\beta_6} e^{-\gamma t-u} \partial^{\beta_7} \nabla u, \bigtriangledown v_t\right) \right| \\
\leq \quad & k\|A(u)\|_{H^2(\Omega)}\|e^{-\gamma t-u}\|_{H^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{H^2(\Omega)}\|\nabla v_t\| \\
\leq \quad & \tfrac{(\chi_0+\rho\eta^{-1}\xi)^2 k^2 c_1'^4 c_1^6 e^{-2\gamma}}{2D} e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}} + \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|^2 \\
\leq \quad & e^{-2\gamma t+6c\sqrt{t}} + \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|^2,
\end{aligned}$$

on va montrer maintenant que

$$2 \mid \left(u_t A\left(u\right) e^{-\gamma t-u} \nabla v, \nabla v_t\right) \mid \leq \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\|^2, \tag{4.3.22}$$

en utilisant l'inégalité de Young et celle de Hölder, et d'aprés $(43)$ , $(45)$ et $(48)$ , et pour $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\begin{aligned}
& 2\left|\left(u_t A\left(u\right) e^{-\gamma t-u} \nabla v, \nabla v_t\right)\right| \\
\leq \quad & 2 \ \|u_t\|_{L^\infty(\Omega)}\|A(u)e^{-\gamma t-u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla v_t\|\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\| \\
\leq \quad & \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|^2 + \frac{\|u_t\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|A(u)e^{-\gamma t-u}\|_{L^\infty(\Omega)}}{D}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\|^2 \\
\leq \quad & \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\|^2,
\end{aligned}$$

il reste à montrer que

$$\gamma \left|\left(\left(A\left(u\right)_t - u_t A\left(u\right)\right)e^{-\gamma t-u} \nabla v, \nabla v\right)\right| \leq \frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\|^2, \tag{4.3.23}$$

d'aprés l'inégalité de Hölder, et d'aprés (**??**) , (4.3.1), pour $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\gamma\left|((A\left(u\right)_t - u_t A\left(u\right))e^{-\gamma t-u}\nabla v, \nabla v)\right|$$

$$\leq \ \gamma(\|A\left(u\right)^{-1}A\left(u\right)_t\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_t\|_{L^\infty(\Omega)})\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown v\|^2$$

$$\leq \ \frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown v\|^2,$$

on remplace les inégalités (4.3.20) , (4.3.21) , (4.3.22) , (4.3.23) dans (4.3.19) , qui devient :

$$\partial_t E\left[v\right](t) + 2D\|\bigtriangledown v_t^2\| + \gamma^2\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown v\|^2$$

$$\leq \ \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown v\|^2$$

$$+\frac{\gamma^2}{4}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown v\|^2 + e^{-2\gamma t+2c_2\sqrt{t}} + \frac{D}{2}\|\nabla v_t\|^2_{L^2(\Omega)},$$

donc on a

$$\partial_t E\left[v\right](t) + D\|\bigtriangledown v_t^2\| + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown v\|^2 \leq e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}},$$

si $\gamma$ satisfait (4.3.2), $\exists c_3 > 0$ tel que

$$\int_0^t e^{-2\gamma s+6c\sqrt{s}}ds \ \leq \ c_3, \text{ pour } t \geq 0. \tag{4.3.24}$$

En effet

**Premièr cas :** si $t \geq 1$

$$\int_0^t e^{-2\gamma s+6c_2\sqrt{s}}ds \ = \ \int_0^1 e^{-2\gamma s+6c_2\sqrt{s}}ds \ + \ \int_1^t e^{-2\gamma s+6c_2\sqrt{s}}ds \ ,$$

$$\int_1^t e^{-2\gamma s+6c_2\sqrt{s}}ds \ \leq \ \int_1^t e^{-2\gamma s+6c_2 s}ds \ = \frac{-1}{2\gamma-6c_2}\ e^{-2\gamma t+6c_2 t} + \ \frac{1}{2\gamma-6c_2}\ e^{-2\gamma+6c_2}\ ,$$

et comme $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\int_0^1 e^{-2\gamma s+6c_2\sqrt{s}}ds \ + \ \frac{1}{2\gamma-6c_2}\ e^{-2\gamma+6c_2} \ = c_3 \leq 1.$$

**Deuxième cas :** si $0 < t \leq 1$

$$\begin{aligned}\int_0^t ce^{-2\gamma s+6c_2\sqrt{s}}ds &\leq \int_0^1 ce^{-2\gamma s+6c_2\sqrt{s}}ds \\ &\leq c_3,\end{aligned}$$

puis en intégrant par rapport a $t$, on trouve

$$E[v](t) - E[v](0) + \int_0^t D\| \bigtriangledown v_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\|^2 ds \leq \quad c_3,$$

d'où

$$\underset{t\geq 0}{\text{supess}} E_2[u](t) + \int_0^t D\| \bigtriangledown \triangle u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown \triangle u\|^2 ds \leq E_2[u](0) + c_3.$$

**Remarque importante :** d'aprés ces deux lemmes, on a

$$\| \triangle u_t\|^2 + D\int_0^t \| \bigtriangledown \triangle u_t\|^2 \leq E_2[u](0) + c_3,$$

si $\gamma$ satisfait (4.3.2), on peut prendre

$$\begin{aligned}N^2 + DL^2 &\leq \| \triangle u_t\|^2(0) + \gamma\|\sqrt{A(u)e^{-u}} \bigtriangledown \triangle u\|^2(0) + c_3 \\ &\leq \| \triangle u_t\|^2(0) + \gamma\|A(u)e^{-u}\|_{L^\infty(\Omega)}(0) \| \bigtriangledown \triangle u\|^2(0) + c_3 \\ &\leq \| \triangle u_t\|^2(0) + \gamma e^{-\gamma}(\chi_0 + \rho\eta^{-1}\xi)kc_1^4c_1^{'2} + c_3\end{aligned}$$

donc si $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$N^2 + DL^2 \leq \| \triangle u_t\|^2(0) + 2. \tag{4.3.25}$$

## 4.4 Existence globale pour le problème hyperbolique

**Théorème 4.4.1** *$(h_0(x), h_1(x)) \in V^{\frac{3}{2}}(\Omega) \times V^1(\Omega)$, si $\gamma$ satisfait* (4.3.2), *alors le systéme* (**4.2.1**) *admet une seule solution*

$$u(t,x) \in \bigcap_{k=0}^{1} C^k(0,+\infty; H^{3-k}(\Omega)).$$

**Preuve : Le probléme approché :**

Pour preuver ce théorème on utilise l'approximation de Galerkin avec résultat d'estima -tion d'energie.

On va construire une solution de certain approximation de demention finie et aprés on passe à la limite, il s'appelle méthode de Galerkin.

on pricise la fonction $\varphi_k$ donné dans la définition 7.3.1

$$\varphi_k = \varphi_k(x)(k = 1, 2, ...),$$

on va definir $Q_i$ pour teut $j \in \mathbb{N}$, la projection sur $X_i = \langle \varphi_j \ ; j = 1, 2, ..., i \rangle$, définie par :

$$Q_i u(t) = \sum_{k=1}^{j} d_0^k(t)\, \varphi_k; \ Q_i u_t(t) = \sum_{k=1}^{j} d_1^k(t)\, \varphi_k \ ,$$

et les coefficients $d_0^k(t)$, definie par : $d_0^k(t) = (u(t), \varphi_k)$ et $d_1^k(t) = (u_t(t), \varphi_k)$ ; $(0 \leq t \leq T, k = 1, ..., j)$.

on construit le probléme approché suivant :

$$\begin{cases} Q_i P_{u^{i-1}}[u^i] = u^i_{tt} - D\triangle u^i_t - \nabla.((u^i_t + \gamma) A(u^{i-1})\, e^{-\gamma t - u^{i-1}} \nabla u^i) = 0 \ \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[ \\ \\ \text{tq } \ \partial_\nu u^i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, +\infty[ \\ \\ u^i(x,0) = Q_i h_0(x), \ u^i_t(x,0) = Q_i h_1(x) \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{$\wp^i$}$$

On prend $u^0 = 0$

Avec

$$E_2^i\ [u] = \| \triangle u_t \|^2 + \gamma \| \sqrt{A(u^{i-1})\, e^{-\gamma t - u^{i-1}}} \triangledown \triangle u \|^2$$

$$\| \triangledown \triangle Q_i h_0(x) \|^2 + \| \triangle Q_i h_1(x) \|^2 \leq \delta$$

où

$$\delta = \| h_0(x) \|^2_{V^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \| h_1(x) \|^2_{V^1(\Omega)}.$$

En effet

$$\begin{aligned}\| \bigtriangledown \triangle Q_i h_0(x) \|^2 + \| \triangle Q_i h_1(x) \|^2 &\leq \|Q_i h_0(x)\|^2_{H^3(\Omega)} + \|Q_i h_1(x)\|^2_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \|h_0(x)\|^2_{V^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \|h_1(x)\|^2_{V^1(\Omega)} = \delta.\end{aligned}$$

**passage à la limite :**

On établit la convergence de $\{u^i\}_i$, pour cela on pose $w^i = u^i - u^{i-1} \in X_i$,

on remarque que $\forall i \geq 0$, on a

$$\bigtriangledown w^i = \bigtriangledown \triangle w^i = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et

$$\int_\Omega w_t^i dx = d_j'^k(t) \int_\Omega \varphi_i(x) dx = 0,$$

donc

$$\|w^i\| \leq k\|\nabla w^i\| \leq k^2 \|\triangle w^i\|. \tag{4.4.1}$$

On a

$$\triangle Q_i P_{u^{i-1}}\left[u^i\right] = \triangle u_{tt}^i - D\triangle \triangle u_t^i - \nabla.((u_t^i+\gamma)A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t - u^{i-1}} \nabla \triangle u^i) + R\left(u^i\right) = 0,$$

où

$$R\left(u^i\right) = \triangle\left[\nabla((u_t^i+\gamma)A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t - u^{i-1}})\nabla u^i\right],$$

on multiplie $Q_i P_{u^{i-1}}[u^i] - Q_i P_{u^{i-2}}[u^{i-1}]$ par $\triangle w_t^i$ et on intégre sur $\Omega$, on a

$$\begin{aligned}\left(\triangle w_{tt}^i, \triangle w_t^i\right) &= -((u_t^i+\gamma)A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t - u^{i-1}}\nabla\triangle u^i, \nabla\triangle w_t^i) \\ &\quad +((u_t^{i-1}+\gamma)A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t - u^{i-2}}\nabla\triangle u^{i-1}, \nabla\triangle w_t^i) \\ &\quad -D\|\nabla w_t^i\|^2 + 2\left(R\left(u^i\right) - R\left(u^{i-1}\right), \triangle w_t^i\right),\end{aligned}$$

où

$$\left(R\left(u^i\right) - R\left(u^{i-1}\right), \triangle w_t^i\right) = (\bigtriangledown.((u_t^i+\gamma)A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t - u^{i-1}}\nabla u^i - (u_t^{i-1}+\gamma)A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t - u^{i-2}}\nabla u^{i-1}), \nabla\triangle w_t^i)$$

alors on deduit

$$\partial_t E^i \left[\triangle w^i\right](t) + 2D\|\nabla\triangle w_t^i\|^2 + \gamma^2 (A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} \nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i) \tag{4.4.2}$$

$$\begin{aligned}
= \;& -\gamma(\left[A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t - u^{i-2}}\right] \nabla\triangle u^i, \nabla\triangle w_t^i) \\
& -(A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} u_t^i \nabla\triangle u^{i-1} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t - u^{i-2}} u_t^{i-1} \nabla\triangle u^{i-2}, \nabla\triangle w_t^i) \\
& +\gamma(e^{-\gamma t}\left[A\left(u^{i-1}\right) e^{-u^{i-1}}\right]_t \nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i) + 2\left(R\left(u^i\right) - R\left(u^{i-1}\right), \triangle w_t^i\right),
\end{aligned}$$

où

$$E^i \;\left[\triangle w^i\right] = \|\triangle w_t^i\|^2 + \gamma^2 (A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} \nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i),$$

on va montrer que

$$\gamma(e^{-\gamma t}\left[A\left(u^{i-1}\right) e^{-u^{i-1}}\right]_t \nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i) \leq \frac{\gamma^2}{2} (A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} \nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i) \tag{4.4.3}$$

d'après (**??**) , (4.3.1) , et pour $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\begin{aligned}
& \gamma(e^{-\gamma t}\left[A\left(u^{i-1}\right) e^{-u^{i-1}}\right]_t \nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i) \\
\leq \;& \gamma(\|A_t\left(u^{i-1}\right) A^{-1}\left(u^{i-1}\right)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_t^{i-1}\|_{L^\infty(\Omega)})(A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} \nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i) \\
\leq \;& \gamma(\|u_t^{i-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + 1)(A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} \nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i) \\
\leq \;& \frac{\gamma^2}{2} (A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} \nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i)
\end{aligned}$$

on remplace (4.4.3) dans (4.4.2) , qui devient

$$\partial_t E^i \left[\triangle w^i\right](t) + 2D\|\nabla\triangle w_t^i\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}(A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t - u^{i-1}}\nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i) \tag{4.4.4}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & -\gamma(\left[A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}} - A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\right]\nabla\triangle u^{i-1}, \nabla\triangle w_t^i) \\
& -(A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}u_t^i\nabla\triangle u^{i-1} - A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}u_t^{i-1}\nabla\triangle u^{i-2}, \nabla\triangle w_t^i) \\
& +2\left(R\left(u^i\right) - R\left(u^{i-1}\right), \triangle w_t^i\right),
\end{aligned}$$

d'après (4.3.8) on a la minoration suivante

$$\gamma^2\frac{\chi_0}{c_1k(1+\lambda)^2}e^{-\gamma}e^{-\gamma t-2c_2\sqrt{t}}\|\nabla\triangle w^i\|^2 \leq \frac{\gamma^2}{2}(A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\nabla\triangle w^i, \nabla\triangle w^i), \tag{4.4.5}$$

pour la deuxiéme mémbre on a la majoration suivante

$$\begin{aligned}
& -\gamma(\left[A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}} - A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\right]\nabla\triangle u^{i-1}, \nabla\triangle w_t^i) \qquad (4.4.6) \\
& -(A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}u_t^i\nabla\triangle u^{i-1} - A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}u_t^{i-1}\nabla\triangle u^{i-2}, \nabla\triangle w_t^i) \\
& +2\left(R\left(u^i\right) - R\left(u^{i-1}\right), \triangle w_t^i\right) \\
\leq\ & 3k^9c_1'c_1^8e^{-\gamma t+8c_1\sqrt{t}}e^{c_1'\sqrt{t}}(\chi_0e^{-\gamma} + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}) \\
& .\left[\ \gamma\left\{\|\nabla\triangle w^{i-1}\| + \|\nabla\triangle w^i\|\right\} + \|\triangle w_t^i\|\right]\|\nabla\triangle w_t^i\|,
\end{aligned}$$

en effet, on montre que

$$-\gamma(\left[A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\right]\nabla\triangle u^{i},\nabla\triangle w_{t}^{i}) \tag{4.4.7}$$

$$\leq \; 3k^{4}c_{1}'c_{1}^{6}e^{-\gamma t+6c_{1}\sqrt{t}}e^{c_{1}'\sqrt{t}}(\chi_{0}e^{-\gamma}+\rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^{2}e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})\;\gamma\left\{\|\nabla\triangle w^{i-1}\|\right\}\|\nabla\triangle w_{t}^{i}\|,$$

on a

$$\begin{aligned}\|A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\|_{L^{\infty}(\Omega)} &\leq (\chi_{0}e^{-\gamma}\|\frac{e^{-\gamma t-u^{i-1}}-e^{-\gamma t-u^{i-2}}}{(1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u^{i-1}})(1+\lambda e^{-\gamma}e^{-\gamma t-u^{i-2}})}\|_{L^{\infty}(\Omega)}\\ &\quad+\rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}\|e^{-\eta^{-1}\xi\left(\gamma t+u^{i-1}\right)}-e^{-\eta^{-1}\xi\left(\gamma t+u^{i-2}\right)}\|_{L^{\infty}(\Omega)})\end{aligned}$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$, $n\leq 3$, d'aprés l'injection de sobolev $(1.2.3)$, on a $H^{2}(\Omega)\subset L^{\infty}(\Omega)$, donc

$$\begin{aligned}&\|A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\|_{L^{\infty}(\Omega)}\\ \leq\;&(k\chi_{0}e^{-\gamma}e^{-\gamma t}\|e^{-u^{i-1}}-e^{-u^{i-2}}\|_{H^{2}(\Omega)}\\ &+\rho k\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}e^{-\eta^{-1}\xi\gamma t}\|e^{-\eta^{-1}\xi u^{i-1}}-e^{-\eta^{-1}\xi u^{i-2}}\|_{H^{2}(\Omega)}),\end{aligned}$$

d'après $(4.4.1)$, $(1.1.1)$

$$\begin{aligned}\|e^{-u^{i-1}}-e^{-u^{i-2}}\|_{H^{2}(\Omega)}^{2} &= \|\textstyle\int_{0}^{1}e^{-\theta u^{i-2}-(1-\theta)u^{i-1}}d\theta\|_{H^{3}(\Omega)}\|u^{i-2}-u^{i-1}\|_{H^{3}(\Omega)}\\ &\leq \textstyle\int_{0}^{1}\|e^{-\theta u^{i-2}-(1-\theta)u^{i-1}}\|_{H^{3}(\Omega)}d\theta\|u^{i-2}-u^{i-1}\|_{H^{3}(\Omega)}\\ &\leq k^{3}\|\nabla\triangle(u^{i-2}-u^{i-1})\|(1+\|\triangle u^{i-2}\|+\|\triangle u^{i-1}\|)\|e^{u^{i-2}-u^{i-1}}\|_{L^{\infty}(\Omega)},\end{aligned}$$

d'aprés $(4.3.4)$

$$\begin{aligned}\|e^{u^{i-2}-u^{i-1}}\|_{L^{\infty}(\Omega)} &\leq k\|e^{-u^{i-1}}\|_{H^{2}(\Omega)}\|e^{u^{i-2}}\|_{H^{2}(\Omega)}\\ &\leq kc_{1}^{2}e^{2c_{2}\sqrt{t}},\end{aligned}$$

donc

$$\|e^{u^{i-2}-u^{i-1}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq kc_1^2 e^{2c_2\sqrt{t}},$$

d'après $(4.4.1), (1.1.1)$

$$\|e^{-u^{i-1}} - e^{-u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)} \leq 3k^4 c_1^4 e^{4c_2\sqrt{t}} \|\nabla\triangle(u^{i-2} - u^{i-1})\|,$$

de même

$$\|e^{-\eta^{-1}\xi\left(\gamma t+u^{i-1}\right)} - e^{-\eta^{-1}\xi\left(\gamma t+u^{i-2}\right)}\|_{H^2(\Omega)} \leq 3k^4 c_1^4 (\eta^{-1}\xi)^2 e^{4c_2\sqrt{t}} \|\nabla\triangle(u^{i-2} - u^{i-1})\|,$$

donc

$$\begin{aligned} & \|A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t-u^{i-1}} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t-u^{i-2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \leq \; & 3k^4 c_1^5 e^{-\gamma t+5c_2\sqrt{t}} (\chi_0 e^{-\gamma} + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2 e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}) \|\nabla\triangle(u^{i-2} - u^{i-1})\|, \end{aligned}$$

alors, on a

$$\begin{aligned} & -\gamma(\left[A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t-u^{i-1}} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t-u^{i-2}}\right] \nabla\triangle u^i, \nabla\triangle w_t^i) \\ \leq \; & \gamma\, \|A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t-u^{i-1}} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t-u^{i-2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\triangle u^i\| \|\nabla\triangle w_t^i\| \\ \leq \; & 3k^4 c_1' c_1^6 e^{-\gamma t+6c_2\sqrt{t}} e^{c_2'\sqrt{t}} (\chi_0 e^{-\gamma} + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2 e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})\; \gamma \left\{\|\nabla\triangle w^{i-1}\|\right\} \|\nabla\triangle w_t^i\|, \end{aligned}$$

et maintenant on va monterer que

$$\begin{aligned} & (A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t-u^{i-1}} u_t^i \nabla\triangle u^{i-1} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t-u^{i-2}} u_t^{i-1} \nabla\triangle u^{i-2}, \nabla\triangle w_t^i) \\ \leq \; & 4k^5 c_1' c_1^6 e^{-\gamma t+5c_2\sqrt{t}} e^{c_2'\sqrt{t}} (\chi_0 e^{-\gamma} + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2 e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}) (\|\triangle w_t^i\| + L\|\nabla\triangle w^{i-1}\|) \|\nabla\triangle w_t^i\|, \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

on a

$$\begin{aligned} & (A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t-u^{i-1}} u_t^i \nabla\triangle u^{i-1} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t-u^{i-2}} u_t^{i-1} \nabla\triangle u^{i-2}, \nabla\triangle w_t^i) \\ = \; & (A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t-u^{i-1}} \nabla\triangle u^{i-1} \left[u_t^i - u_t^{i-1}\right], \nabla\triangle w_t^i) \\ & +(\left[A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t-u^{i-1}} \nabla\triangle u^{i-1} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t-u^{i-2}} \nabla\triangle u^{i-2}\right] u_t^{i-1}, \nabla\triangle w_t^i) \end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Hölder et comme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n < 4$, avec l'injection de sobolev $(1.2.3)$, on a $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

et d'aprés $(4.3.9)$ et $(4.3.11)$, $\forall i \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
&(A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\nabla\triangle u^{i-1}\left[u_t^i-u_t^{i-1}\right],\nabla\triangle w_t^i)\\
\leq\ & \|A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\triangle u^{i-1}\|\|w_t^i\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\triangle w_t^i\|\\
\leq\ & k^4c_1'c_1^4e^{-\gamma t+5c_2\sqrt{t}}(\chi_0e^{-\gamma}+\rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})\|\triangle w_t^i\|\|\nabla\triangle w_t^i\|
\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&(\left[A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\nabla\triangle u^{i-1}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\nabla\triangle u^{i-2}\right]u_t^{i-1},\nabla\triangle w_t^i)\\
\leq\ & \|A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\nabla\triangle u^{i-1}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\nabla\triangle u^{i-2}\|\|u_t^{i-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\triangle w_t^i\|
\end{aligned}$$

de même d'aprés l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\|A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\nabla\triangle u^{i-1}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\nabla\triangle u^{i-2}\|\\
\leq\ & \|A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\triangle u^{i-1}-\nabla\triangle u^{i-2}\|\\
&+\|A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\triangle u^{i-2}\|
\end{aligned}$$

d'aprés $(4.3.4)$, **(??)**

$$\begin{aligned}
&\|A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\nabla\triangle u^{i-1}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\nabla\triangle u^{i-2}\|\\
\leq\ & 4k^4c_1'c_1^6e^{-\gamma t+6c_2\sqrt{t}}(\chi_0e^{-\gamma}+\rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})\|\nabla\triangle w^{i-1}\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&(\left[A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\nabla\triangle u^{i-1}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\nabla\triangle u^{i-2}\right]u_t^{i-1},\nabla\triangle w_t^i)\\
\leq\ & 4k^5c_1'c_1^6e^{-\gamma t+6c_2\sqrt{t}}L(\chi_0e^{-\gamma}+\rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})\|\nabla\triangle w^{i-1}\|\|\nabla\triangle w_t^i\|,
\end{aligned}$$

alors, si $\gamma$ satisfait (4.3.2)

$$(A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}u_t^i\nabla\triangle u^{i-1}-A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}u_t^{i-1}\nabla\triangle u^{i-2},\nabla\triangle w_t^i)$$

$$\leq\ 4k^5c_1'c_1^6e^{-\gamma t+6c_2\sqrt{t}}(\chi_0e^{-\gamma}+\rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})(\|\triangle w_t^i\|+L\|\nabla\triangle w^{i-1}\|)\|\nabla\triangle w_t^i\|,$$

et maintenant on va montrer que

$$\left(R\left(u^i\right)-R\left(u^{i-1}\right),\triangle w_t^i\right) \tag{4.4.9}$$

$$\leq\ 3k^9c_1^8e^{-\gamma t+8c_2\sqrt{t}}(\chi_0e^{-\gamma}+\rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})\left[(2L+\gamma)(\|\nabla\triangle w^{i-1}\|+\|\nabla\triangle w^i\|)+\|\triangle w_t^i\|\right]\|\nabla\triangle w_t^i\|$$

de même que précédent, on a

$$\nabla.((u_t^i+\gamma)A\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}\nabla u^i-(u_t^{i-1}+\gamma)A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\nabla u^{i-1})$$

$$=\ \nabla(\nabla[u_t^iA\left(u^{i-1}\right)e^{-\gamma t-u^{i-1}}-u_t^{i-1}A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}].\nabla u^i)$$

$$+\nabla\left(\nabla\left[(u_t^{i-1}+\gamma)A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\right].[\nabla u^i-\nabla u^{i-1}]\right)$$

d'aprés l'inégalité de Hölder et comme $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\leq 3$, avec l'injection de sobolev $(1.2.3)$, on a $H^2(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$, et d'aprés $(4.3.9)$ et $(4.3.11)$, $\forall i\geq 0$ on a

$$\|\nabla\left(\nabla\left[(u_t^{i-1}+\gamma)A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\right].[\nabla u^i-\nabla u^{i-1}]\right)\|$$

$$\leq\ k^3\|(u_t^{i-1}+\gamma)A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)}\|\nabla\triangle w^i\|$$

$$\leq\ k^4(k\|u_t^{i-1}\|_{H^2(\Omega)}+\gamma)\|A\left(u^{i-2}\right)e^{-\gamma t-u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)}\|\nabla\triangle w^i\|$$

$$\leq\ c_1^3k^5e^{-\gamma t+3c_2\sqrt{t}}(L+\gamma)\left(\chi_0e^{-\gamma}+\rho\eta^{-1}\xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}\right)\|\nabla\triangle w^i\|,$$

d'aprés (1.2.5) , (1.1.1) on a

$$\begin{aligned}
&\| \bigtriangledown (\bigtriangledown [u_t^i A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} - u_t^{i-1} A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t - u^{i-2}}].\nabla u^i)\| \\
= \ & \| \bigtriangledown (\bigtriangledown [u_t^i A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} - u_t^{i-1} A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t - u^{i-2}}].\nabla \left[u^i - u^i\big|_{\partial\Omega}\right])\| \\
\leq \ & k^2 \|A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t - u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)} \|u_t^i\|_{H^2(\Omega)} \|\triangle u^i\| \\
& + k^2 \|u_t^i - u_t^{i-1}\|_{H^2(\Omega)} \|A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t - u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)} \|\triangle u^i\|,
\end{aligned}$$

d'après (4.4.1) , (1.1.1) , $\forall i \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
& \|A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} - A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t - u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)} \\
\leq \ & \chi_0 e^{-\gamma} e^{-\gamma t} \| \frac{e^{-u^{i-1}} - e^{-u^{i-2}}}{(1+\lambda e^{-\gamma t - u^{i-1}})(1+\lambda e^{-\gamma t - u^{i-2}})} \|_{H^2(\Omega)} + \rho \eta^{-1} \xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma} e^{-\gamma t} \|e^{-\eta^{-1}\xi u^{i-1}} - e^{-\eta^{-1}\xi u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)} \\
\leq \ & k^2 \chi_0 e^{-\gamma} e^{-\gamma t} \|e^{-u^{i-1}} - e^{-u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)} \| \frac{1}{(1+\lambda e^{-\gamma t - u^{i-2})(1+\lambda e^{-\gamma t - u^{i-1}})}} \|_{H^2(\Omega)} \\
& + \rho \eta^{-1} \xi e^{-\eta^{-1}\xi\gamma} e^{-\gamma t} \|e^{-\eta^{-1}\xi u^{i-1}} - e^{-\eta^{-1}\xi u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)} \\
\leq \ & 3k^6 c_1^6 e^{-\gamma t + 6c_2\sqrt{t}} (\chi_0 e^{-\gamma} + \rho \left(\eta^{-1}\xi\right)^2 e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}) \|\nabla \triangle (u^{i-2} - u^{i-1})\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\| \bigtriangledown (\bigtriangledown [u_t^i A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t - u^{i-1}} - u_t^{i-1} A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t - u^{i-2}}].\nabla u^i)\| \\
\leq \ & 3k^9 c_1^8 e^{-\gamma t + 8c_2\sqrt{t}} L (\chi_0 e^{-\gamma} + \rho \left(\eta^{-1}\xi\right)^2 e^{-\eta^{-1}\xi\gamma}) \|\nabla \triangle (u^{i-2} - u^{i-1})\| \\
& + k^2 \|\triangle (u_t^i - u_t^{i-1})\| \|A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t - u^{i-2}}\|_{H^2(\Omega)} \|\triangle u^i\|
\end{aligned}$$

d'après $(4.3.9)$ et $(4.3.11)$, on a

$$\| \bigtriangledown (\bigtriangledown[u_t^i A\left(u^{i-1}\right) e^{-\gamma t-u^{i-1}} - u_t^{i-1} A\left(u^{i-2}\right) e^{-\gamma t-u^{i-2}}].\nabla u^i)\|$$

$$\leq \quad 3k^9 c_1^8 e^{-\gamma t+8c_2\sqrt{t}}(\chi_0 e^{-\gamma} + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2 e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})(\|\triangle w_t^i\| + L\|\nabla\triangle w^{i-1}\|),$$

donc

$$2\left(R\left(u^i\right) - R\left(u^{i-1}\right), \triangle w_t^i\right)$$

$$\leq \quad 6k^9 c_1^8 e^{-\gamma t+8c_2\sqrt{t}}(\chi_0 e^{-\gamma} + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2 e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})\left[(2L+\gamma)(\|\nabla\triangle w^{i-1}\| + \|\nabla\triangle w^i\|) + \|\triangle w_t^i\|\right]\|\nabla\triangle w_t^i\|.$$

Donc d'aprés $(4.4.7)$, $(4.4.8)$, $(4.4.9)$, on obtient $(4.4.6)$,

On remplace les inégalités $(4.4.5)$, $(4.4.6)$ dans $(4.4.4)$, on a

$$\partial_t E^i\left[\triangle w^i\right](t) + 2D\|\nabla\triangle w_t^i\|^2 + \gamma^2\frac{\chi_0}{c_1 k(1+\lambda)^2} e^{-\gamma} e^{-\gamma t-2c_2\sqrt{t}}\|\nabla\triangle w^i\|^2$$

$$\leq \quad 6k^9 c_1' c_1^8 e^{-\gamma t+9c_2\sqrt{t}}(\chi_0 e^{-\gamma} + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2 e^{-\eta^{-1}\xi\gamma})\left[\ \gamma\left\{\|\nabla\triangle w^{i-1}\| + \|\nabla\triangle w^i\|\right\} + \|\triangle w_t^i\|\right]\|\nabla\triangle w_t^i\|$$

$$\leq \quad D\|\nabla\triangle w_t^i\|^2 + \frac{27k^9 c_1'^2 c_1^{16}(\chi_0 + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2)^2 e^{-2\gamma} e^{-2\gamma t+18c_2\sqrt{t}}}{D}\left\{\gamma^2\|\nabla\triangle w^{i-1}\|^2 + \gamma^2\|\nabla\triangle w^i\|^2 + \|\triangle w_t^i\|^2\right\},$$

si $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\begin{aligned}
\frac{27k^9 c_1' c_1^8(\chi_0 + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2)^2 e^{-2\gamma} e^{-2\gamma t+18c_2\sqrt{t}}}{D} &\leq \frac{27k^9 c_1' c_1^8(\chi_0 + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2)^2 e^{-2\gamma}}{D} e^{-2\gamma t+18c_2\sqrt{t}} \\
&\leq \frac{27k^9 c_1' c_1^8(\chi_0 + \rho\left(\eta^{-1}\xi\right)^2)^2 e^{-\gamma}}{D} e^{-\gamma} e^{-\gamma t+16c_2\sqrt{t}} e^{-\gamma t-2c_2\sqrt{t}} \\
&\leq \frac{\chi_0}{2c_1 k(1+\lambda)^2} e^{-\gamma} e^{-\gamma t-2c_2\sqrt{t}},
\end{aligned}$$

si $\gamma$ satisfait (4.3.2), $\exists c_4 > 0$ tel que

$$\partial_t E^i\left[\triangle w^i\right](t) + D\|\nabla\triangle w_t^i\|^2 + \gamma^2 c_4 e^{-\gamma} e^{-\gamma t-c_2\sqrt{t}}\left\{\|\nabla\triangle w^i\|^2 - \|\nabla\triangle w^{i-1}\|^2\right\}$$

$$\leq c_4 e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}} E^i\left[\triangle w^i\right](t),$$

d'après (1.4.5) , on résoudre l'inégation différentielle par rapport à $t$

$$E^i\left[\triangle w^i\right](t)+D\int_0^t e^{\int_s^t c_4 e^{-2\gamma\tau+6c\sqrt{\tau}}d\tau}\|\nabla\triangle w_t^i\|^2$$

$$+\gamma^2 c_4 e^{-\gamma}e^{-\gamma t-c_2\sqrt{t}}e^{\int_s^t c_4 e^{-2\gamma\tau+6c\sqrt{\tau}}d\tau}\left\{\|\nabla\triangle w^i\|^2-\|\nabla\triangle w^{i-1}\|^2\right\}ds$$

$$\leq\ E^i\left[\triangle w^i\right](0),$$

et pour $\gamma$ satisfait (4.3.2), alors d'après (4.3.24) $\exists D'>0$ tel que

$$\begin{aligned} e^{-\int_s^t c_4 e^{-2\gamma\tau+6c\sqrt{\tau}}d\tau} &\geq e^{-\int_0^t c_4 e^{-2\gamma\tau+6c\sqrt{\tau}}d\tau}\\ &\geq e^{-c_4c_3}\\ &= D', \end{aligned}$$

donc

$$E^i\left[\triangle w^i\right](t)+D'\int_0^t\|\nabla\triangle w_t^i\|^2+\gamma^2 c_4 e^{-\gamma}e^{-\gamma t-c_2\sqrt{t}}e^{\int_s^t c_4 e^{-2\gamma\tau+6c\sqrt{\tau}}d\tau}\left\{\|\nabla\triangle w^i\|^2-\|\nabla\triangle w^{i-1}\|^2\right\}ds$$

$$\leq E^i\left[\triangle w^i\right](0),$$

pour $t\in[0,T]$ , et $i=1,2,....$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\|\triangle w_t^i\|^2(t)\ +\ \int_0^T\|\nabla\triangle w_t^i\|^2 ds\right\} \\ \leq\ & k'\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\|\triangle w_t^i(.,0)\|^2\ \ +\ \|\nabla\triangle w^i(.,0)\|^2\right\}<\infty, \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

on va montrer que la suite $\{u_t^i\}_i$ est de cauchy

$\forall p_j$ tq $p_{j+1}\geq p_j\geq...\geq p_0=0.$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^T\|\nabla\triangle u_t^{p_{j+1}}-\nabla\triangle u_t^{p_j}\|^2 ds\ \leq\ \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^T\|\nabla\triangle w_t^i\|^2 ds \tag{4.4.11}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sup_{0\leq t\leq T} \|\triangle w_t^i\|^2 \ (t) \ + \ \int_0^T \|\nabla\triangle w_t^i\|^2 ds \right\}$$

$$\leq k' \ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \|\triangle w_t^i\,(0,.)\,\|^2 \ \ + \ \|\nabla\triangle w^i\,(0,.)\,\|^2 \right\},$$

de même que (4.4.11)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \ \|\triangle u_t^{p_{j+1}} - \triangle u_t^{p_j}\|^2 \leq \ \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \ \|\triangle w_t^i\|^2 \tag{4.4.12}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sup_{0\leq t\leq T} \|\triangle w_t^i\|^2 \ (t) \ + \ \int_0^T \|\nabla\triangle w_t^i\|^2 ds \right\}$$

$$\leq k' \ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \|\triangle w_t^i\,(0,.)\,\|^2 \ \ + \ \|\nabla\triangle w^i\,(0,.)\,\|^2 \right\},$$

pour preuver que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \|\triangle w_t^i\,(.,0)\,\|^2 \ \ + \ \|\nabla\triangle w^i\,(.,0)\,\|^2 \right\} < +\infty, \tag{4.4.13}$$

on a

$$\begin{aligned} \|\triangle w_t^i\,(.,0)\,\|^2 \ &= \ \|\triangle u_t^i\,(.,0) - \triangle u_t^{i-1}\,(.,0)\,\|^2 \\ &= \ \|\,(h_1,\varphi_i)\,\triangle\varphi_i\|^2 \\ &= \ (h_1,\varphi_i)^2\,\lambda_i^2, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|\triangle w_t^j\,(.,0)\,\|^2 \quad &= \ \sum_{i=1}^{\infty} \ (h_1,\varphi_i)^2\,\lambda_i^2 \\ &= \ \|h_1\|_{V^1(\Omega)}^2 < +\infty, \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\triangle w^{i}\left(.,0\right)\right\|^{2} &= \left\|\nabla\triangle u^{i}\left(.,0\right)-\nabla\triangle u^{i-1}\left(.,0\right)\right\|^{2}\\ &= \left\|\left(h_{0},\varphi_{i}\right)\nabla\triangle\varphi_{i}\right\|^{2}\\ &= \lambda_{i}^{3}\left(h_{0},\varphi_{i}\right)^{2},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\nabla\triangle w^{i}\left(.,0\right)\right\|^{2} &= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{j}^{3}\left(h_{0},\varphi_{j}\right)^{2}\\ &= \|h_{0}\|_{V^{\frac{3}{2}}(\Omega)}^{2}<+\infty,\end{aligned}$$

d'aprés la condition nécissaire de convrgence des séries, on a
$\forall\varepsilon>0;\exists N_{0}\geq 0,\forall p,q$ tq $p\geq q\geq N_{0}$, on a :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\triangle u_{t}^{p}-\triangle u_{t}^{q}\|^{2}+\int_{0}^{T}\|\nabla\triangle u_{t}^{p}-\nabla\triangle u_{t}^{q}\|^{2}ds\leq\varepsilon,$$

on a finalement que la suite $u_{t}^{i}$ soit de cauchy, alors $u_{t}^{i}$ converge dans $L^{2}(0,T;H^{3}\left(\Omega\right))\cap C(0,T;H^{2}\left(\Omega\right))$, et comme $T$ arbitraire,
on conclut que

$$u_{t}\in L^{2}(0,+\infty;H^{3}\left(\Omega\right))\cap C(0,+\infty;H^{2}\left(\Omega\right)).$$

## 4.5 Existence globale et unicité de solution pour le problème parabolique

Pour l'existence globale et unicité de la solution de (**4.1.1**) on a le théorème suivant.

**Théorème 4.5.1** $n_{0}\in H^{2}\left(\Omega\right),\ \gamma=\dfrac{\eta}{|\Omega|}\|n_{0}\|_{L^{1}(\Omega)}$ *satisfait* $(4.3.2)$, *où* $c_{0},f_{0}\in H^{3}\left(\Omega\right)$, $c_{0}\left(x\right)>0$ *et* $c_{0}\left(x\right)^{-\eta^{-1}\xi}\left(f_{0}\left(x\right)-k\xi^{-1}\right)=1,$

*et*

$$c_1 = \max \left\{ \begin{array}{c} e^{\eta^{-1}\xi\gamma} \| f_0(x) - k\xi^{-1} \|_{H^3(\Omega)} ; e^{-\eta^{-1}\xi\gamma} \| \dfrac{1}{f_0(x) - k\xi^{-1}} \|_{H^3(\Omega)} ; \\ \\ e^{\gamma} \| c_0(x) \|_{H^3(\Omega)} ; \ e^{-\gamma} \| c_0(x)^{-1} \|_{H^3(\Omega)} ; \ 1 \end{array} \right\},$$

$$c_2 = \max \left\{ k\eta^{-1}\xi N \ ; \ 1 \right\},$$

*où*

$$N^2 + DL^2 \leq \| \triangle n_0 \|^2 + 2,$$

*alors*

$$(n, c, f) \in C(0, \infty; H^2(\Omega)) \times (C(0, \infty; H^3(\Omega)))^2.$$

**Preuve :** D'après (4.2.8) , (4.2.9) , (4.2.11)

$$n(t, x) = \eta^{-1}\gamma + \eta^{-1} u_t,$$

$$c(t, x) = e^{-\gamma(t+1) - u},$$

$$f(t, x) = k\xi^{-1} + e^{-\eta^{-1}\xi(\gamma(t+1)+u)},$$

si $\gamma$ satisfait (4.3.2), et comme

$$c_1 = \max \left\{ \| e^{-\eta^{-1}\xi u} \|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \ \| e^{\eta^{-1}\xi u} \|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \ \| e^{-u} \|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \| e^{u} \|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \ 1 \right\},$$

donc

$$\begin{aligned} c_1 &= \max \left\{ \| e^{-\eta^{-1}\xi u} \|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \ \| e^{\eta^{-1}\xi u} \|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \ \| e^{-u} \|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \| e^{u} \|_{H^2(\Omega)}(0) \ ; \ 1 \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{c} e^{\eta^{-1}\xi\gamma} \| e^{-\eta^{-1}\xi u - \eta^{-1}\xi\gamma} \|_{H^3(\Omega)} ; e^{-\eta^{-1}\xi\gamma} \| e^{\eta^{-1}\xi u + \eta^{-1}\xi\gamma} \|_{H^3(\Omega)} ; \\ \\ e^{\gamma} \| e^{-\gamma - u} \|_{H^3(\Omega)} ; \ e^{-\gamma} \| e^{\gamma + u} \|_{H^3(\Omega)} ; \ 1 \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{c} e^{\eta^{-1}\xi\gamma} \| f_0(x) - k\xi^{-1} \|_{H^3(\Omega)} ; e^{-\eta^{-1}\xi\gamma} \| \dfrac{1}{f_0(x) - k\xi^{-1}} \|_{H^3(\Omega)} ; \\ \\ e^{\gamma} \| c_0(x) \|_{H^3(\Omega)} ; \ e^{-\gamma} \| c_0(x)^{-1} \|_{H^3(\Omega)} ; \ 1 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

d'après (4.3.25)

$$\begin{aligned} N^2 + DL^2 &\leq \| \triangle u_t \|^2 (0) + 2 \\ &= \| \triangle n_0 \|^2 (0) + 2, \end{aligned}$$

donc si $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$n = \eta^{-1}\gamma + \eta^{-1}u_t \in C(0, +\infty; H^2(\Omega)),$$

en effet : on a $n_0 \in H^2(\Omega)$ donc $n_0 - \eta^{-1}\gamma \in H^2(\Omega)$,

d'après (**??**) et le lemme (**??**) on a , $n_0 - \eta^{-1}\gamma = \eta^{-1}u_t(0) = \eta^{-1}h_1 \in V^1(\Omega)$ .

Ce qui preuve si $n_0 \in H^2(\Omega)$ alors

$$n \in C(0, +\infty; H^2(\Omega)).$$

D'après (4.3.4) et comme $u_t \in L^2(0, +\infty; H^3(\Omega))$, on a : $\forall t \geq 0$

$$\| e^{\eta^{-1}\xi(-\gamma(t+1)-u)} \|_{H^3(\Omega)} \leq c_1' e^{-\gamma\eta^{-1}\xi t + c_2\sqrt{t}}$$

et

$$\| e^{-\gamma(t+1)-u} \|_{H^3(\Omega)} \leq c_1' e^{-\gamma t + c_2\sqrt{t}},$$

d'aprés (4.2.9) , et (4.2.11) on a

$$\| f(t,.) \|_{H^3(\Omega)} = \| \frac{k}{\xi} + e^{\eta^{-1}\xi(-\gamma(t+1)-u)} \|_{H^3(\Omega)}, \text{ et } \| c(t,.) \|_{H^3(\Omega)} = \| e^{-\gamma(t+1)-u} \|_{H^3(\Omega)}$$

alors $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} \| f(t,.) \|_{H^3(\Omega)} &= \| \frac{k}{\xi} + e^{\eta^{-1}\xi(-\gamma(t+1)-u)} \|_{H^3(\Omega)} \\ &\leq \frac{k}{\xi} |\Omega| + c_1' e^{-\eta^{-1}\xi\gamma t + c_2\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

et $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} \| c(t,.) \|_{H^3(\Omega)} &= \| e^{-\gamma(t+1)-u} \|_{H^3(\Omega)} \\ &\leq c_1' e^{-\gamma t + c_2\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

et comme $\gamma$ satisfait (4.3.2), donc

$$(f, c) \in \left(C(0, +\infty; H^3(\Omega))\right)^2 .$$

**Remarque 4.5.1** $\|c_0(x)^{-1}\|_{H^3(\Omega)}$ *depend de* $\|c_0(x)\|_{H^3(\Omega)}$.

*on peut appliquer* (1.1.7) *pour la fonction* $\dfrac{1}{\chi_\varepsilon(\xi)}$, *où* $\chi_\varepsilon(\xi)$ *est la fonction de cutoff dèfinit par* $\begin{cases} \chi_\varepsilon(\xi) = \xi, & \varepsilon \le \xi \\ \chi_\varepsilon(\xi) = \varepsilon, & \varepsilon \ge \xi \end{cases}$,

*où* $\varepsilon = \min\limits_{x\in\Omega} c_0(x)$, *donc* $\|\dfrac{1}{\chi_\varepsilon(c_0(x))}\|_{H^3(\Omega)} \le p\left(\|c_0(x)\|_{H^3(\Omega)}\right)$.

## 4.6 Comportement asymptotique de solution

**Théorème 4.6.1** $n_0 \in H^2(\Omega)$, $\gamma = \dfrac{\eta}{|\Omega|}\|n_0\|_{L^1(\Omega)}$ *satisfait* (**4.3.2**), *où* $c_0, f_0 \in H^3(\Omega)$, $c_0(x) > 0$ *et* $c_0(x)^{-\eta^{-1}\xi}\left(f_0(x) - k\xi^{-1}\right) = 1$,

*et*

$$c_1 = \max\left\{e^{\eta^{-1}\xi\gamma}\|f_0(x) - k\xi^{-1}\|_{H^3(\Omega)} \ ; \ e^{\gamma}\|c_0(x)\|_{H^3(\Omega)} \ ; \ 1\right\}, \ c_2 = \max\left\{k\eta^{-1}\xi N \ \ ; \ 1\right\},$$

*où*

$$N^2 + DL^2 \le \|\triangle n_0\|^2(0) + 2,$$

*alors*

$$\lim_{t\to\infty}\|n(t,x) - \overline{n}_0\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{t\to\infty}\|f(t,x) - \frac{k}{\xi}\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{t\to\infty}\|c(t,x)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

**Preuve :** D'après (4.2.8), (4.2.9), (4.2.11), on a

$$n(t,x) = \eta^{-1}\gamma + \eta^{-1}u_t$$

$$c(t,x) = e^{-\gamma(t+1)-u}$$

$$f(t,x) = k\xi^{-1} + e^{-\eta^{-1}\xi(\gamma(t+1)+u)},$$

si $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\lim_{t\to\infty} \|u_t(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0,$$

en effet : si $\gamma$ satisfait (4.3.2), on a

$$\partial_t E[u](t) + D\| \bigtriangledown u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2 \leq 0,$$

et

$$\partial_t E[v](t) + D\| \bigtriangledown v_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\|^2 \leq e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}},$$

où $v = \triangle u$,

$u_t \in H^2(\Omega)$, d'aprés l'inégélité Poicaré-Wirtinger

$$\|u_t - \overline{u}_t\| \leq \| \bigtriangledown u_t\|,$$

d'après (4.2.7) on a

$$\|u_t\| \leq \| \bigtriangledown u_t\|,$$

on remplace dans (4.3.14)

$$\partial_t E[u](t) + D\|u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2 \leq 0,$$

donc

$$\begin{cases} \partial_t E[u](t) + D\|u_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2 & \leq 0 \\ \\ \partial_t E[v](t) + D\| \bigtriangledown v_t\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\|^2 & \leq e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}}, \end{cases} \tag{4.6.1}$$

on fait la somme pour les deux mémbre de (4.6.1), alors

$$\partial_t (E[v](t) + E[u](t)) + \frac{D}{2}\left(\| \bigtriangledown v_t\|^2 + \|u_t\|^2\right) + \frac{D}{2}\|u_t\|^2$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2}\left(\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown v\|^2 + \|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}} \bigtriangledown u\|^2\right) \leq e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}},$$

de meme que l'inégélité (1.1.5), on a $\exists c_{\frac{D}{2}} > 0$

$$c_D\|\triangle u_t\| \leq \frac{D}{2}\| \bigtriangledown \triangle u_t\| + \|u_t\|,$$

donc

$$\partial_t \left(E\left[\triangle u\right](t) + E\left[u\right](t)\right) + c_D \|\triangle u_t\| + \frac{D}{2}\|u_t\|^2$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2}\left(\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown \triangle u_t\|^2 + \|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown u\|^2\right) \le e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}},$$

on peut prender $\varrho \le \min\left\{c_D; \frac{D}{2}\right\}$, et satisfait la condition $\varrho < \gamma$, alors

$$\partial_t \left(E\left[\triangle u\right](t) + E\left[u\right](t)\right) + \varrho\|\triangle u_t\|_{l^2(\Omega)} + \varrho\|u_t\|^2$$

$$+ \varrho\left(\|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown \triangle u_t\|^2 + \|\sqrt{A(u)e^{-\gamma t-u}}\bigtriangledown u\|^2\right) \le e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}},$$

donc on peut écrire

$$\partial_t \left(E\left[\triangle u\right](t) + E\left[u\right](t)\right) + \varrho\left(E\left[\triangle u\right](t) + E\left[u\right](t)\right) \le e^{-2\gamma t+6c_2\sqrt{t}},$$

d'après (**??**)

$$E\left[\triangle u\right](t) + E\left[u\right](t) \le \left(E\left[\triangle u\right](0) + E\left[u\right](0)\right)e^{-\varrho t} + ce^{-\varrho t}\int_0^t e^{-2\gamma s+\varrho s+6c_2\sqrt{s}}ds,$$

mais $\gamma$ satisfait (4.3.2), d'après (4.3.24) on a

$$E\left[\triangle u_t\right](t) + E\left[u\right](t) \le \left(E\left[\triangle u_t\right](0) + E\left[u\right](0)\right)e^{-\varrho t} + ce^{-\varrho t}, \tag{4.6.2}$$

et comme

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\|n(t,x) - \eta^{-1}\gamma\|_{L^\infty(\Omega)} &= \lim_{t\to\infty}\|\eta^{-1}u_t\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\le \lim_{t\to\infty} E\left[\triangle u_t\right](t) + E\left[u\right](t) = 0,\end{aligned}$$

alors

$$\lim_{t\to\infty}\|n(t,x) - \overline{n}_0\|_{L^\infty(\Omega)} = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\|f(t,x) - \frac{k}{\xi}\|_{L^\infty(\Omega)} &= \lim_{t\to\infty}\|e^{-\eta^{-1}\xi\gamma t-\eta^{-1}\xi u}\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\le \lim_{t\to\infty} c_1 e^{-\gamma t+c_2\sqrt{t}} = 0,\end{aligned}$$

de même, on a

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\|c(t,x)\|_{L^\infty(\Omega)} &= \lim_{t\to\infty}\|e^{-\gamma t-u}\|_{L^\infty(\Omega)}\\ &\leq \lim_{t\to\infty} c_1 e^{-\gamma t+c_2\sqrt{t}} = 0.\end{aligned}$$

# Bibliographie


[1] M. Chaplin & al, Mathematical modeling of dynamic adaptive of tumour angiogenesis, Journal of Theoretical Biology 241 (2006) 564–589.

[2] A. Kubo, Mathematical analysis of a model of tumour invasion and simulations,international journal of mathematical model and methods in applide science,volume 4 (2010).

[3] A. Kubo, T. Suzuki, A mathematical models of tumour angiogenesis, Biol. Biomed. 204 (2007) 48–55.

[4] A. Kubo, T. Suzuki, Asymptotic behavior of the solution to a parabolic ODE system modeling tumour growth, Differential Integral Equations,17 (2004) 721–736.

[5] A. Kubo, Mathematical analysis of some models of tumour growth, advances in biomedical research, (2004) 446–451.

[6] Atsushi Yagi, Abstract Parabolic Evolution equations,Springer Monographs in Mathematics,2000.

[7] H . BREZIS, Analyse fonctionelle . Theorie et applications. (1983) Paris.

[8] J. IGNACIO TELLO AND MICHAEL WINKLER, A Chemotaxis System with Logistic Source, Communications in Partial Differential Equations, 32, 849-877, (2007).

[9] J .L . LIONS, E . MAGENES, Problémes aux limites non homogénes etapplication, (1968), Paris.

[10] L.C Evans, Partial Differential Equations,Graduate studies in mathematics, American Mathematcal Society,Volume 19, (1998).

[11] Marine AUBERT,Modélisation de la migration de cellules tumorales, 2008.

[12] Manuel Delgado.Cristian Morales-Rodrigo,On a parabolic elliptic chemotactic model with coupled boundary condition, 2010.

[13] R. A . ADAMS, Sobolev spaces, Academic Press (1975) .