

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université des Sciences et de Technologies Houari Boumédiène
Faculté des Sciences Mathématiques
Département de Recherche Opérationnelle

Thèse de Magister en Recherche Opérationnelle
Option : Mathématiques de Gestion

Présentée par :
YALAOUI Bilal

Thème

Etude Structurelle des Graphes Quasi-localement Sans P_4

Soutenu le : 12 Septembre 2001

Devant le Jury :

Président	Mr. KHELLADI ABDELKADER	Professeur (USTHB)
Directeur de thèse	Mr. AIT HADDADENE HACENE	Docteur d'état (USTHB)
Examineurs	Mr. ABBAS MONCEF	Maître de conférences (USTHB)
	Mr. AIDER MEZIANE	(USTHB)
	Mr. BERRACHEDI ABDELHAFID	Maître de conférences (USTHB)
	Mme. BOUCHEMAKH ISMA	Maître de conférences (USTHB)
		Chargée de recherche (USTHB)

- *Septembre 2001* -

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier M. H.AIT HADDADENE d'avoir encadré ma thèse pendant deux années, de façon si présente pour surmonter les difficultés rencontrées le long de ce travail et de m'avoir permis, à travers des pistes de recherche judicieusement proposées, un travail enrichissant.

Aussi je remercie les membres de jury qui m'ont honorés en acceptant d'évaluer mon travail, et qui m'ont permis de l'enrichir grâce à leurs précieuses remarques.

Je tiens aussi à remercier tous mes amis et proches, mes parents, mes frères et sœurs en particulier RAZIKA, qui par leur sympathie, leur aide et leur bienveillance à mon égard ont su tant m'apporter. Je remercie particulièrement M. MATI MOHAMED pour son soutien moral aux moments difficiles, et avec beaucoup d'estimations Mlle K. RATIBA pour son aide et ses encouragements inestimables.

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre 1 – Présentation générale	
1.1. Définitions et notations	5
1.2. Coloration des sommets d'un graphe	9
1.3. Graphes parfaits et la conjecture forte des graphes parfaits	11
1.3.1. Motivations et historique	11
1.3.2. Principaux axes de recherche	13
1.3.3. Aspect algorithmique des graphes parfaits	14
1.3.4. Quelques classes de graphes parfaits	14
1.4. Graphes minimaux imparfaits	16
1.4.1. Approche algébrique	17
1.4.2. Etude des propriétés des graphes	18
1.4.3. Ensemble d'articulation	18
1.4.4. Etoile d'articulation	18
1.4.5. Paires de sommets particulières	19
1.5. Graphes quasi-localement sans P_4 (QLSP ₄)	20
	21
Chapitre 2 – Graphes QLSP ₃	
2.1. Définitions	
2.2. Reconnaissance des graphes QLSP ₃	22
2.3. Graphes QLSP ₃ et la conjecture forte des graphes parfaits	24
2.4. Conséquences	26
2.5. Coloration des graphes de Berge QLSP ₃	29
2.6. Conclusion	29
	30

Chapitre 3 – Sommets mal-connectés et graphes
minimaux imparfaits

3.1.	Sommets mal-attachés et graphes minimaux imparfaits	32
3.2.	Conséquences	34
3.2.1.	Graphes $(C_{4,2}K_2)$ -libre	34
3.2.2.	Lien entre la conjecture de Lubiw et la conjecture de Chvátal	35
3.3.	Graphes sans colliers pairs	35

Chapitre 4 – Les RB-graphes

4.1.	Définitions et notations	38
4.2.	Les RB-graphes et la conjecture forte des graphes parfaits	39
4.3.	Conséquences	42
4.3.1.	Graphes de Berge sans perle	42
4.3.2.	Graphes de Berge QLSP ₄ .	43
4.4.	Validité de la conjecture de Chvátal	44
4.4.1.	Graphes de Berge C_4 -libre	47
4.5.	Note	48
4.6.	Conclusion	49

Conclusion générale	50
---------------------	----

Bibliographie	51
---------------	----

Annexes

Annexe 1 – Quasi-locally P_3 -free Berge graphs are perfect	53
---	----

Annexe 2 – Vertices with disconnected neighbourhood and Minimal imperfect graphs	56
---	----

Annexe 3 – Sur une nouvelle classe de graphes parfaits	61
--	----

L'histoire des graphes parfaits commença en 1960 lorsque Claude Berge[6] a introduit la notion de graphe parfait. Un graphe G est dit parfait si pour tout sous graphe induit H le nombre chromatique est égal à la cardinalité de sa clique maximum. Claude Berge donna alors deux conjectures une dite faible et l'autre forte. La conjecture faible des graphes parfaits a été montrée par L. Lovász [9] en 1971. Elle est devenue connue sous le nom du théorème des graphes parfaits : « un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait ». La conjecture forte des graphes parfaits (CFGP) reste ouverte : « Un graphe est parfait si et seulement s'il ne contient ni trou ni antitrou impair » ; un trou étant un cycle sans corde et un antitrou son graphe complémentaire.

Pour approcher la conjecture CFGP, deux méthodes sont souvent utilisées :

- La première est de montrer que certaines classes, implicitement ou explicitement, ne contenant pas de trous et antitrous impairs sont des classes de graphes parfaits.
- La deuxième méthode est de s'intéresser aux graphes minimaux imparfait, en montrant qu'il ne peut pas exister d'imparfait minimal appartenant à une certaine classe ou vérifiant certaines propriétés.

Un imparfait minimal est un graphe qui n'est pas parfait et pour lequel tout sous graphe induit propre est parfait. La conjecture CFGP confirme que les seuls graphes imparfaits minimaux sont les trous et antitrous impairs, si toute fois quelqu'un arrive à trouver un autre graphe différent qui soit minimal imparfait cela montrera que la conjecture CFGP est fausse, pour cette raison on n'a nommé un graphe minimal imparfait

qui n'est pas un trou ni antitrou impair « un monstre ». On appellera « un graphe de Berge » tout graphe qui est sans trous et antitrous impairs.

Un autre aspect d'étude de graphes parfaits est le problème de reconnaissance. Pour certaines classes dont la perfection a été montrée, des algorithmes polynomiaux ont été développés. Cependant le problème de reconnaissance de graphe de Berge reste ouvert.

M.Grötschel, L. Lovász et A.Shrijver[8] ont montré qu'il existe des algorithmes polynomiaux pour la résolution des quatre problèmes d'optimisation associés aux graphes parfaits : le problème de la coloration optimale, le problème de la clique maximum, le problème du stable maximum et le problème de la partition en un nombre minimum de cliques.

Bien que les algorithmes proposés soient polynomiaux, ils sont de complexité élevée et ne sont pas faciles à mettre en œuvre, ce qui a incité à faire des recherches d'algorithmes plus efficaces de point de vue pratique.

Dans cette thèse on s'intéresse à une nouvelle classe de graphes, c'est la classe des graphes quasi-localement sans P_4 (QLSP $_4$), afin de montrer la perfection pour les graphes de Berge de cette classe. Un P_4 est une chaîne élémentaire sans corde de longueur 3, un graphe G est dit quasi-localement sans P_4 , si et seulement si, tout sous graphe induit contient au moins un sommet dont le voisinage induit un sous graphe sans P_4 .

L'étude de la structure des graphes de cette classe nous a permis de la généraliser en une classe que l'on a appelé classe des RB-graphes. Pour aboutir à ce résultat, on a en premier lieu étudié une sous classe celle des graphes de Berge quasi-localement sans P_3 , on a montré la validité de la conjecture CFGP, et on a abordé le problème de reconnaissance. Puis, nous nous sommes intéressés à l'étude des sommets dont le voisinage induit un sous graphe non connexe et son rapport avec la distribution des P_4 dans le graphe, et terminons par donner un résultat sur les graphes sans colliers pairs.

L'examen des propriétés de voisinage d'un sommet dont le voisinage est sans P_4 , nous a donné l'idée d'introduire une classe de graphe plus générale, celle des RB-graphes. On appelle un RB-graphe tout graphe G pour lequel il existe une forme donnée de graphe F telle que :

- G est quasi-localement sans F .
- Et si de plus G est minimal imparfait de Berge, alors tout sommet dont le voisinage est F -libre à un voisinage non connexe.

On dira alors que G est un RB-graphe en F .

La perfection des RB-graphes de Berge nous a permis de déduire celle de graphe de Berge $QLSP_4$, qui a son tour nous a permis de déduire celle de graphe de Berge sans perle et à montrer une propriété importante des graphes minimaux imparfaits qui n'est autre que la validité de la conjecture posée par Chvátal[6] : «Si un graphe est minimal imparfait qui n'est pas un trou impair, alors le voisinage de chaque sommet contient un P_4 comme sous graphe induit ». En combinant ce dernier résultat avec celui de I.Parfenoff, F.Roussel et

I.Rusu [12], on a pu montrer la validité de la CFGP pour les graphes de Berge C_4 -libre.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous commençons par donner les définitions et notations de base. Ensuite, nous donnons un aperçu sur les graphes parfaits et la conjecture qui lui est associée, tout en citant les principaux résultats connus. Puis, nous présenterons quelques résultats sur les imparfaits minimaux et nous terminons par introduire les graphes quasi-localement sans P_4 .

Dans les chapitres deux, trois et quatre nous présentons les principaux résultats de notre travail. Le chapitre deux est consacré aux graphes quasi-localement sans P_3 . Dans le troisième chapitre nous introduisant la notion de sommet mal-connecté (i.e. sommet dont le voisinage induit un sous graphe non connexe) et étudiant les conséquences d'existence de tels sommets dans un graphe minimal imparfait et son rapport avec la distribution des P_4 . Et enfin le quatrième chapitre est sur les RB-graphes.

Les résultats utilisés et obtenus sont notés par chapitre et par leur ordre d'apparition dans le chapitre en question comme suit : Resultat.x.y, x désignera le numéro de chapitre et y le numéro attribué au résultat dans le chapitre x.

Dans ce premier chapitre nous allons donner les notions et définitions nécessaires pour aborder le thème de la présente thèse. Après avoir donné les définitions de base, nous expliquerons la notion de graphe parfait et la conjecture qui lui est associée, nous terminerons par un bref historique et citons les principaux grands axes de recherche dans ce domaine. Puis nous présenterons quelques résultats sur les imparfaits minimaux. Nous terminerons ce chapitre par l'introduction des graphes quasi-localement sans P_4 .

1.1. Définitions et notations

Un **graphe** est la donnée d'un couple (V,E) , où V est un ensemble fini d'éléments distincts appelés **sommets** et E un ensemble de paires d'éléments de V dit ensemble d'arêtes, on le notera $G=(V,E)$. L'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets, on notera $n(G)$ l'ordre du graphe G et $m(G)$ le nombre de ses arêtes.

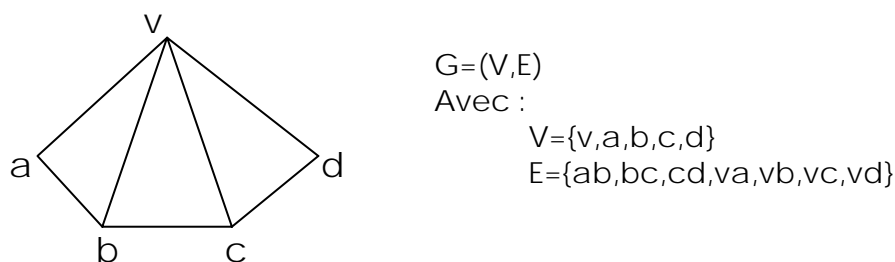


Figure 1.1 - « Exemple de graphe »

Une **arête** représente une liaison entre deux éléments de V . Si $a,b \in V$ deux sommets liés par une arête $e \in E$ on note $e=\{a,b\}$ ou simplement $e=ab$ quand il n'y a pas risque de confusion, et on dira que :

- a et b sont **adjacents**.
- a et b sont les deux **extrémités** de e .

- a et e (de même b et e) sont **incidents**.

On dit aussi que b est un **voisin** de a et vice versa.

L'ensemble de sommets qui sont voisins à un sommet a est appelé son **voisinage** on le notera $N(a)$, i.e. $N(a) = \{b \in V / ab \in E\}$, $N'(a)$ désignera l'ensemble des sommets restants autres que a, i.e. $N'(a) = V - (\{a\} \cup N(a))$. Le **degré** d'un sommet est le nombre de sommets qui lui sont voisins.

Si les deux extrémités d'une arête sont confondues, on appellera cette arête une **boucle**. Entre deux sommets quelconques on peut construire plusieurs arêtes, on dira dans ce cas qu'il y a des **arêtes multiples** entre ces deux sommets.

Un graphe sera dit **graphe simple**, s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Dans cette thèse nous considérons des graphes simples.

Graphe complémentaire

Le graphe **complémentaire d'un graphe** $G = (V, E)$ est le graphe $\bar{G} = (V, \bar{E})$ tel que : $\forall a, b \in V : (\{a, b\} \in \bar{E} \Leftrightarrow \{a, b\} \notin E)$. Remarquons que le graphe complémentaire de complémentaire d'un graphe donné est le graphe lui-même, i.e. $\bar{\bar{G}} = G$.

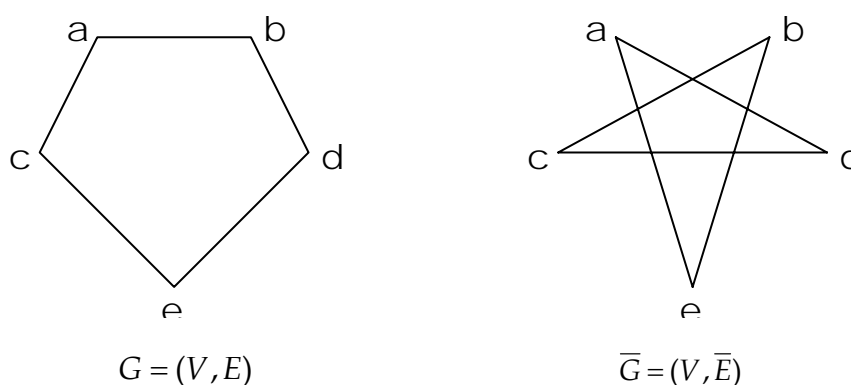


Figure 1.2- « Exemple de graphe complémentaire »

Graphe et sous graphes

Notons par $E(A)$ l'ensemble de toutes les paires distinctes d'éléments de $A \subseteq V$. On appelle **sous graphe** de $G=(V,E)$ tout graphe de type $H=(A,F)$ où $A \subseteq V$ et $F \subseteq E(A)$.

Nous dirons que H est un sous **graphe partiel** de G , si $A=V$, i.e. $H=(V,F)$ et $F \subseteq E$.

Il sera dit sous **graphe induit** si $F=E(A)$, i.e. $H=(A,E(A))$, dans ce cas on le notera $G(A)$ et on l'appellera le sous graphe induit par le sous-ensemble de sommets $A \subseteq E$.

Clique

Une **clique** d'ordre n , est un graphe noté K_n avec n sommets dont chaque sommet est adjacent à tous les autres. Une clique de n sommets possède $n(n-1)/2$ arêtes.

Stable

Un **stable** de cardinalité n , est un graphe avec n sommets ne contenant aucune arête, i.e. ces sommets sont deux à deux non adjacents.

Il est clair que si un ensemble de sommets induit une clique dans un graphe G , alors il induit un stable dans son graphe complémentaire et vice versa.

La taille maximum d'une clique dans un graphe G sera notée $\omega(G)$, et la taille maximum d'un stable par $\alpha(G)$. Pour un graphe G on a :

$$\alpha(G) = \omega(\bar{G}) \quad \text{et} \quad \omega(G) = \alpha(\bar{G})$$

Chaîne et cycle

Une **chaîne** $C=[v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k]$ est une séquence alternée de sommets et d'arêtes distincts, tels que $\forall i=0, \dots, k-1 : v_i$ est adjacent à v_{i+1} par l'arête e_i . La longueur de cette chaîne est k , c'est le nombre d'arêtes qui

la constitue; v_0 et v_k sont appelés les extrémités de cette chaîne. S'il n'y a pas risque de confusion on notera $C=[v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$. Si de plus les sommets utilisés sont tous distincts elle sera dite **élémentaire**. Un **cycle** est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.

Corde et raccourci

Une **corde** est une arête qui relie deux sommets non consécutifs d'une chaîne donnée. Un **raccourci** est une corde qui relie deux sommets séparés par deux arêtes dans une chaîne.

Un P_k

Un P_k est une chaîne élémentaire sans corde de longueur k .

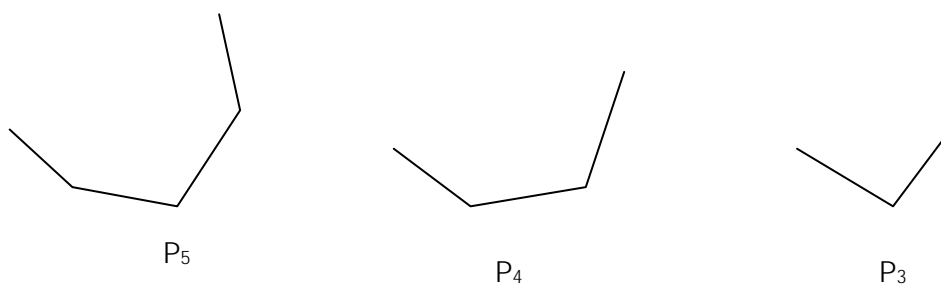


Figure 1.3

Trou et antitrou

Un **trou** de longueur k est un cycle élémentaire sans corde de longueur k , on le notera C_k . Son graphe complémentaire est appelé **antitrou** noté $\overline{C_k}$.

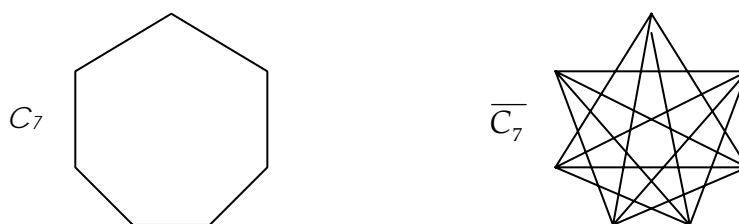


Figure 1.4

Graphes isomorphes

Deux graphes G et F sont dits **isomorphes**, si et seulement si, il existe une bijection f de $V(G)$ vers $V(F)$ telle que $\forall x,y \in V(G) : \{x,y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(x),f(y)\} \in E(F)$.



Figure 1.5 - « Exemple de deux graphes isomorphes »

Graphe F-libre

Un graphe sera dit **F-libre** ou F est une forme donnée de graphe, s'il ne contient aucun sous graphe induit isomorphe à F.

Connexité et composantes connexes

Un graphe $G=(V,E)$ est dit **connexe** si pour toute paire de sommets distincts $x,y \in V$, il existe une chaîne les reliant. L'ensemble des sommets V muni de la relation binaire R définie par :

$$\forall x,y \in V, x R y \Leftrightarrow \text{il existe dans } G \text{ une chaîne reliant } x \text{ et } y$$

est une relation d'équivalence sur V et induit une partition des sommets de V en classes d'équivalences appelées **composantes connexes** de graphe G .

Un graphe est donc connexe s'il admet une seule composante connexe par la relation R .

1.2. Coloration des sommets d'un graphe

Une coloration des sommets d'un graphe $G=(V,E)$, consiste en une attribution de « couleurs » (formellement, ce seront des entiers positifs) aux sommets du graphe, de telle sorte que deux sommets adjacents quelconques reçoivent des couleurs différentes.

Par la suite « une coloration d'un graphe » désignera une coloration des sommets de ce graphe.

Une k -coloration d'un graphe, k entier positif, est une coloration utilisant k couleurs. Si les couleurs sont représentées par les entiers $\{1,2,\dots,k\}$, cette coloration peut être définie comme étant une application C de l'ensemble de sommets V vers l'ensemble $\{1,2,\dots,k\}$ telle que :

$$C : V \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$$

$$x \rightarrow C(x), \text{ telle que : } \forall x,y \in E, [\{x,y\} \in E \Rightarrow C(x) \neq C(y)]$$

Notons que pour toute coloration d'un graphe, l'ensemble des sommets correspondant à une couleur donnée est un stable donc une coloration peut être vue comme une partition de l'ensemble des

sommets du graphe en stables. Une partition de graphe en cliques est donc équivalente à une coloration dans \overline{G} .

Nombre chromatique d'un graphe

Un des problèmes les plus importants en théorie des graphes est de trouver une coloration d'un graphe G avec un nombre minimum de couleurs, c'est-à-dire une partition du graphe G en un nombre minimum de stables. Ce nombre est appelé « nombre chromatique » et sera noté $\chi(G)$.

Remarques

- (1) $\omega(G) \leq \chi(G)$. En effet, la coloration de G doit réserver au moins $\omega(G)$ couleurs différentes pour la clique maximum du graphe.
- (2) Il est donc intéressant de savoir s'il est possible pour un graphe donné d'effectuer une $\omega(G)$ -coloration
- (3) L'inégalité est stricte pour certains graphes, par exemple pour C_5

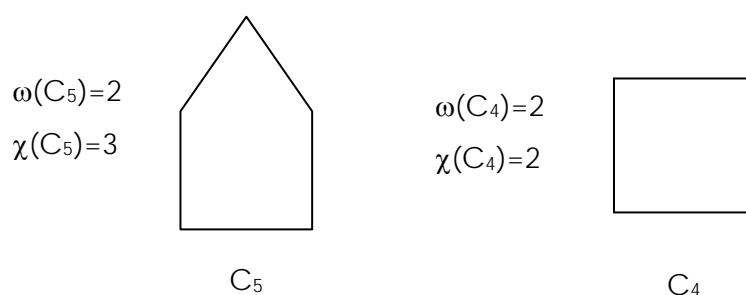


Figure 1.6

Plus généralement on a pour $k \geq 2$:

$$\omega(\overline{C_{2k+1}}) = k \quad \text{et} \quad \chi(\overline{C_{2k+1}}) = k+1$$

$$\omega(C_{2k+1})=2 \quad \text{et} \quad \chi(C_{2k+1})=3$$

1.3. Graphes parfaits et la conjecture CFGP

Définition.1

Un graphe G est dit χ - parfait s'il vérifie l'inégalité : $\omega(G)=\chi(G)$

Définition.2

Un graphe G est dit θ - parfait s'il vérifie l'inégalité : $\alpha(G)=\theta(G)$.

Où $\theta(G)$ est la taille d'un recouvrement minimum de V par des cliques de $G=(V,E)$. i.e. un ensemble de cliques qui touchent tous les sommets du graphe G .

1.3.1. Motivations et historique

On a vu que pour tout graphe G on a $\omega(G) \leq \chi(G)$. Cela mène à la question suivante : Quels sont les graphes pour les quels on a l'égalité (i.e. $\omega(G) = \chi(G)$).

Pour certains graphes cette inégalité est stricte par exemple C_5 (voir figure 1.6).

En 1960, C. Berge[6] a introduit la notion de graphe parfait en donnant la définition suivante :

Définition (Graphe Parfait - C. Berge)

Un graphe est dit 'Parfait' si pour tout sous graphe induit H de G ; $\omega(H)=\chi(H)$.

L'intérêt de C. Berge pour ce concept est issue de travaux de Claude Shannon sur la capacité d'un canal de communication. C. Shannon s'était intéressé à une notion complémentaire de celle des graphes parfaits, il a remarqué que le nombre de stabilité d'un C_5 est 2, et que la taille minimale d'une partition en cliques de ce même graphe est 3, et que C_5 est le plus petit graphe ayant cette propriété.

En effet, si K est une clique de G alors K est un stable dans \bar{G} . On a ainsi ; $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$ de même $\theta(G) = \chi(\bar{G})$ et donc on a aussi $\alpha(G) \leq \theta(G)$, d'où l'intérêt de définir les graphes α - Parfait et χ - Parfait.
(Par la suite, on verra que ces deux notions sont équivalentes).

C. Berge a voulu trouver une caractérisation structurelle des graphes parfaits. En particulier, chercher quels sont les graphes imparfaits minimaux. Ayant constaté que les trous impairs et leurs complémentaires sont imparfaits minimaux, C. Berge avec son étudiant Alain Ghouila Hourri se demanda s'il existe des graphes imparfaits minimaux autres que les trous et antitrous impairs, mais il n'a pu obtenir de réponse. Par conséquent, il formula en 1960 [6] les deux conjectures suivantes :

Conjecture Forte des graphes parfaits (CFGP)

Un graphe est parfait si et seulement si ni G ni \bar{G} ne contiennent de trou ni antitrou impair.

Conjecture Faible des graphes parfaits

Le graphe complémentaire d'un graphe parfait est parfait.

Remarque

La validité de la conjecture forte implique celle de la conjecture faible, d'où les noms de ces deux conjectures.

Validité de la conjecture faible

La conjecture faible a été démontrée par Lovász[17] (1972), en donnant le théorème suivant connu sous le nom de théorème des graphes parfaits.

Théorème des graphes parfaits

Pour un graphe $G=(V,E)$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout sous graphe induit H de G : $\omega(H)=\chi(H)$.*
- (ii) Pour tout sous graphe induit H de G : $\alpha(H)=\theta(H)$.*
- (iii) Pour tout sous graphe induit H de G : $|V(H)| \leq \alpha(G) \times \omega(G)$.*

Conséquences

(1) Les notions de graphe χ - parfait et α - parfait sont équivalentes et sont remplacées par la notion de « χ -Graphe Parfait ».

Ainsi, le théorème des graphes parfaits s'écrit :

$$G \text{ Parfait} \Leftrightarrow \forall H, s/\text{graphe induit de } G : |V(H)| \leq \alpha(G) \times \omega(G)$$

(2) Le théorème de graphes parfaits implique la conjecture faible de graphes parfaits.

Définition (Graphe de Berge)

Un graphe est dit de Berge s'il ne contient ni trou impair ni son complémentaire.

1.3.2. Principaux axes de Recherche

La conjecture forte des graphes parfaits qui est plus puissante que le théorème des graphes parfaits n'a toujours pas été démontrée, malgré

de nombreuses recherches qui lui ont été consacrées. Deux méthodes sont utilisées pour aborder la conjecture :

- (1) Le premier moyen est de vérifier que pour certaines classes, implicitement ou explicitement, ne contenant pas de trous et d'antitrous impairs, sont des classes de graphes parfaits.
- (2) Une autre méthode est de s'intéresser aux graphes minimaux imparfaits.

Notons à la fin que la conjecture de Berge est équivalente à la conjecture suivante :

Autre Formulation de la CFGP

Un graphe G est imparfait critique si et seulement si, il est un trou impair ou son complémentaire.

Remarque

Découvrir une propriété des graphes imparfaits critiques permet souvent de définir une nouvelle classe de graphes parfaits en excluant tout sous graphe ayant cette propriété.

1.3.3. Aspect algorithmique des graphes parfaits

L'une des propriétés intéressantes des graphes parfaits est leur aspect algorithmique. Le problème de détermination de la clique maximum et du nombre chromatique sont NP-complet, ces problèmes restent NP-complet même si on se restreint à des instances spéciales. L'intérêt des graphes parfaits est que pour eux ces problèmes peuvent être résolus polynomialement. Ce résultat est dû à M. Grötschel, L. Lovász et A. Schrijver[15], l'algorithme proposé est basé sur la méthode des ellipsoïdes et est d'intérêt théorique, ce qui a incité à faire des recherches d'algorithmes efficaces de point de vue pratique.

Un autre aspect des graphes parfaits est le problème de reconnaissance, le problème de reconnaissance des graphes de Berge est NP-complet. Bien que la perfection de certaines classes a été montrée le problème de reconnaissance associé n'a pas été résolu.

1.3.4. Quelques classes de graphes parfaits

La notion de graphe parfait et la conjecture forte des graphes parfaits font l'objet de plusieurs recherches en théorie des graphes. Aujourd'hui un nombre important de classes vérifiant la CFGP ont été introduit.

Nous allons essayer à travers ce paragraphe d'énumérer quelques-unes des classes de graphes parfaits. Elles ont été sélectionnées en terme représentatif ou à cause de leur lien avec la présente thèse.

D'une façon générale les classes étudiées peuvent être classées en deux catégories :

- La première catégorie excluant implicitement les trous et les antitrous impairs.
- La deuxième catégorie excluant explicitement les trous et les antitrous impairs.

a. Quelques classes de graphes parfaits excluant implicitement les trous et les antitrous impairs

Graphes bipartis

Un graphe $G=(V,E)$ est biparti si l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux stables. Un graphe biparti est 2-coloriable.

Graphes triangulés[6]

Un graphe triangulé est un graphe qui ne contient aucun cycle sans corde (i.e. sans trou) de longueur >3 .

Graphes faiblement triangulés

Un graphe est dit faiblement triangulé, s'il ne contient aucun cycle sans corde de longueur >5 ou son complémentaire (i.e. sans trou et antitrou de longueur >5). La perfection de cette classe a été montrée par R.Hayward[16].

Graphes i-triangulé

Un graphe est i-triangulé si tout cycle impair de longueur >4 possède deux cordes qui ne se croisent pas. Gallai[13] a montré la perfection de cette classe.

Graphes de Meyniel

Un graphe est de Meyniel si tout cycle impair de longueur >4 , a au moins deux cordes. Cette classe a été introduit par H. Meyniel[20].

b. Quelques classes de graphes parfaits excluant explicitement les trous et les antitrous impairs

Graphes de Berge planaires

Un graphe est planaire s'il est possible de le représenter sur un plan de sorte que; Deux arêtes quelconques ne se croisent pas. La perfection de cette classe a été montrée par A.Tucker[27].

Graphes de Berge sans K_4

Un K_4 est un graphe complet d'ordre 4. A.Tucker[28] a montré que les graphes de Berge K_4 -libre sont parfaits.

Graphes de Berge sans K_4-e

Un K_4-e est un graphe issu d'un graphe complet d'ordre 4 en supprimant une arête quelconque. Les graphes de Berge (K_4-e) -libre sont parfaits[30].

Graphes de Berge sans P_4

Un P_4 est une chaîne élémentaire minimale de longueur 3. La perfection de cette classe a été montrée par Sceinsche[26].

Graphes de Berge sans Patte

Un graphe est dit sans patte s'il ne contient aucun sous graphe induit isomorphe au graphe de la figure 1.7.

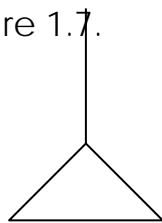


Figure 1.4 : « Patte »

Olariu[23] a montré la validité de La CFGP pour cette classe.

1.4. Graphes minimaux imparfaits

Définition

Un graphe est dit minimal imparfait, s'il est imparfait et tous ses sous graphes induits propres sont parfaits.

Evidemment, les trous et les antitrous impairs sont des graphes minimaux imparfaits. Une autre façon de formuler la conjecture forte des graphes parfaits à l'aide des graphes minimaux imparfaits est : Un graphe est minimal imparfait, si et seulement si, il est un trou ou un antitrou impair. En autres termes les trous et antitrous impairs sont-ils les seuls graphes minimaux imparfaits.

L'existence d'au moins un graphe différent d'eux constituera un contre exemple pour la CFGP et la détruira, ce qui à conduit a appelé tout autre

graphe minimal imparfait qui n'est pas un trou ou antitrou impair « un monstre ».

A cause de cette dernière formulation de la conjecture forte, l'intérêt de nombreux chercheurs a été dirigé vers les propriétés particulières des graphes minimaux imparfaits.

1.4.1. L'approche algébrique

Tout graphe $G=(V,E)$ avec les sommets numérotés de 1 à n peut être représenté à l'aide d'une $(0,1)$ -matrice carrée de dimension n , appelée matrice d'adjacence de graphe G , ayant 1 sur la position (i,j) si et seulement si $\{i,j\}\in E$. cette représentation permet d'envisager une approche à l'aide de l'algèbre linéaire des graphes en général. En particulier pour l'étude des graphes parfaits, on peut construire la $(0,1)$ -matrice $c\times n$ des cliques maximales de G , où c est le nombre de telles cliques de G . Dans ce cas-là, il existe un 1 sur la position (i,j) si et seulement si le sommet j appartient à la clique identifiée par le numéro i . De la même façon, une matrice des stables maximaux peut être construite.

En utilisant la théorie polyédrale introduite par Fulkerson[12] des représentations décrites auparavant, Padberg[24] a déduit les résultats suivants (ou $\alpha=\alpha(G)$ et $\omega=\omega(G)$) :

Théorème.1.1[24]

Si G est un graphe minimal imparfait, alors :

- 1. Tout sommet de G est dans exactement ω ω -clique et α α -stables.*
- 2. G a exactement n ω -cliques et n α -stables*
- 3. Pour toute ω -clique Q_i ($i=1,\dots,n$) il existe un unique α -stable S_i tel que $Q_i\cap S_i\neq\emptyset$ (et inversement)*

Les résultats de Padberg, ajouté au théorème de Lovász[17], donnent une très bonne image des graphes minimaux imparfaits, cependant la preuve

de théorème.1.1 ne permet pas de se faire une idée correcte des graphes utilisés à chaque pas du raisonnement, car on n'a pas encore une interprétation fidèle en terme de graphes des opérations effectuées sur les matrices définies ci-dessus.

1.4.2. Etude des propriétés des graphes

Les essais tentés pour retrouver le théorème de Padberg à l'aide de la théorie des graphes n'ont donnés que des résultats pas très satisfaisants, mais cette façon de traiter les problèmes a permis d'obtenir d'autres propriétés des minimaux imparfaits qui, d'une part, complètent les résultats de Padberg et, d'autre part, découvrent de nouveaux aspects des minimaux imparfaits.

1.4.3 Ensemble d'articulation

Dans un graphe $G=(V,E)$ un ensemble $C \subseteq V$ est dit un ensemble d'articulation, si le graphe $G(V-C)$ est non connexe (noté aussi $G-C$). Il est minimal si aucun sous-ensemble de C n'est un ensemble d'articulation.

L'étude des ensembles déconnectants dans les minimaux imparfaits commence avec un article de A.Tucker[29], qui est passé un peu inaperçu à l'époque :

Lemme.1.1[29]

Un minimal imparfait qui n'est pas un trou n'admet pas d'ensemble d'articulation stable.

Sans application immédiate et même sans utilisation concrète, ce résultat resta isolé, jusqu'à ce que Chvátal[8] n'introduise les étoiles d'articulation.

1.4.4. Etoile d'articulation

Une étoile d'articulation, dans $G=(V,E)$ est un ensemble $C \subseteq V$, tel que $G-C$ est non connexe et il existe un sommet $x \in C$ adjacent à tous les autres sommets de C .

Chvátal donna le résultat suivant sur les minimaux imparfaits :

Lemme.1.2[8]

Un minimal imparfait n'admet pas d'étoile d'articulation.

Une autre caractérisation des graphes admettant un tel ensemble déconnectant est :

Lemme.1.3[8]

Un graphe $G=(V,E)$ contient une étoile d'articulation, si et seulement si :

- i) Soit il existe $v \in V$ tel que $\{v\} \cup N(v)$ est un ensemble d'articulation.*
- ii) Soit G n'est pas une clique et il existe $v, w \in V$ adjacents tels que $N(v) \subseteq N(w)$*

1.4.5. Paires de sommets particulières

On va ajouter deux résultats aux précédents, concernant cette fois des paires de sommets particulières.

Il s'agit d'abord des paires d'amis, dont l'importance a été signalée par Fonlupt & Uhry[11] et Meyniel[20]. Dans G , les sommets x, y forment une paire d'amis si toute chaîne sans corde reliant x et y a un nombre pair d'arêtes. L'observation qui a conduit à cette définition est que ni les trous ni les antitrous impairs n'admettent de paire d'amis. Meyniel a donné la preuve du résultat suivant :

Lemme.1.4[20]

Un minimal imparfait ne contient pas de paire d'amis.

Notons qu'une grande partie des graphes parfaits connus possèdent une paire d'amis.

Olariu[22] introduit les anti-jumeaux. Les sommets x et y sont dit anti-jumeaux si tout sommet $z \in V \setminus \{x, y\}$ est adjacent soit à x soit à y , mais pas les deux. Olariu prouva que :

Lemme.1.5[22]

Un minimal imparfait n'admet pas d'anti-jumeaux.

1.6. Graphes quasi-localement sans P_4



Figure 1.5 – « P_4 est auto-complémentaire »

Plusieurs résultats sur les graphes parfaits montrent l'importance des P_4 dans l'étude de la perfection des graphes.

Le premier pas à été fait par Sceinsche[26] qui a prouvé que les graphes P_4 -libre sont parfaits l'idée la plus naturelle pour généraliser ce résultat est de ne pas interdire tous les P_4 mais seulement une partie d'entre eux.

Dans la présente thèse nous proposons une généralisation de ce résultat en introduisant les graphes quasi-localement sans P_4

Définition

Un graphe $G=(V,E)$ est dit quasi-localement sans P_4 (noté $QLSP_4$), si et seulement si, tout sous graphe induit H de G contient au moins un sommet $v \in V(H)$ dont le voisinage induit un sous graphe P_4 -libre. Le sommet v est alors appelé sommet P_4 -libre ou sommet mal-attaché.

On peut aussi définir la notion suivante :

Définition

Un graphe $G=(V,E)$ est dit localement sans P_4 , si et seulement si, tout sommet $v \in V$ est un sommet mal-attaché (i.e. un sommet P_4 -libre).

Remarques

- 1) Si pour un sommet $v \in V$, $G(N(v))$ contient un P_4 induit alors $\{v\} \cup N(v)$ contient une perle. La classe des graphes sans perle est donc strictement incluse dans celle des graphes $QLSP_4$. La perfection des graphes de Berge sans perle n'a pas été montrée au paravent.

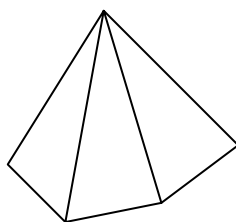


Figure 1.6 – « Perle »

- 2) Une perle contient un sous graphe isomorphe a un P_4 . La classe des graphes sans P_4 est donc strictement incluse dans celle des graphes $QLSP_4$.
- 3) Une perle contient deux sous graphes isomorphes a un (K_4-e) . La classe des graphes sans (K_4-e) est donc strictement inclus dans celle des graphes $QLSP_4$. La perfection des graphes de Berge de cette classe a été montrée par A.Tucker[30]

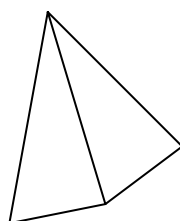


Figure 1.7 – « K_4-e »

- 4) Une perle contient deux sous graphes isomorphes à une patte. La classe des graphes sans patte est donc strictement incluse dans celle des graphes $QLSP_4$. La perfection des graphes de Berge de cette classe a été montrée par Olariu[23]

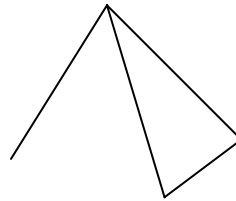


Figure 1.8 – « Patte »

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une sous classe de graphes quasi-localement sans P_4 , c'est la classe de graphes quasi-localement sans P_3 (notée $QLSP_3$). Cette classe est une généralisation de celle des graphes de Berge (K_4-e) -libre introduite par A.Tucker[30] et contient les graphes triangulés, et elle nous permet de donner une nouvelle caractérisation des graphes de Berge minimaux imparfaits.

Après la définition de cette classe nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour la reconnaissance de graphes $QLSP_3$. Ensuite, nous montrerons la validité de la conjecture CFGP pour cette classe de graphes. Enfin, nous présenterons un algorithme polynomial de coloration et nous retrouvons par une démarche algorithmique la validité de la CFGP pour les graphes de Berge $QLSP_3$.

2.1. Définitions

Un P_3 est une chaîne élémentaire de longueur 2 (voir figure 2.1). On appellera graphe quasi-localement sans P_3 ($QLSP_3$) tout graphe $G=(V,E)$ vérifiant la propriété suivante :

« Tout sous graphe induit H de G contient un sommet v dont le voisinage induit un sous graphe P_3 -libre »

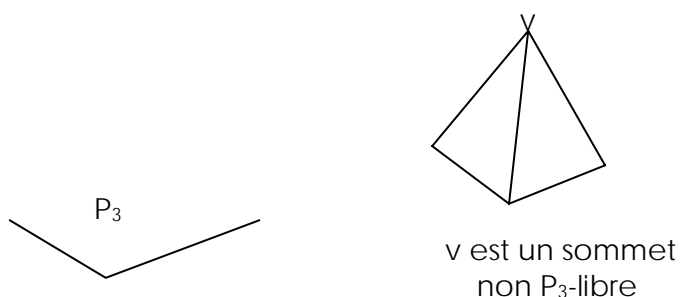


Figure 2.1

Notons que tout graphe $QLSP_3$ est $QLSP_4$. En effet, si un sommet contient un P_4 dans son voisinage alors il contient un P_3 , puisque chaque P_4 contient deux sous graphes isomorphes à P_3 .

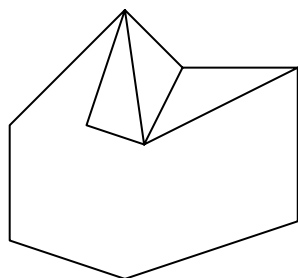


Figure 2.2

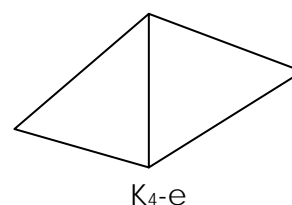


Figure 2.3

Le graphe de la figure 2.2 donne un exemple de graphe $QLSP_3$ qui n'est pas de Berge. Remarquant aussi que tout graphe (K_4-e) -libre est $QLSP_3$, l'inverse n'est pas toujours vraie il suffit de considérer un K_4-e (figure 2.3).

Conséquence.2.1

La classe de graphes (K_4-e) -libre est strictement contenue dans la classe de graphe $QLSP_3$.

De même, un résultat classique de Dirac[10] affirme que tout graphe triangulé a un sommet dont le voisinage induit une clique, et puisque tout sous graphe d'un graphe triangulé est aussi triangulé on a alors la conséquence qui suit :

Conséquence.2.2

La classe des graphes triangulés est incluse dans la classe des graphes $QLSP_3$.

Par la suite un sommet P_3 -libre désignera un sommet dont le voisinage induit un sous graphe P_3 -libre.

Remarques

- (1) Si dans un graphe $G=(V,E)$ un sommet v est P_3 -libre, alors toute composante connexe de $G(N(v))$ induit une clique d'au plus $(\omega-1)$ sommets.
- (2) Tout antitrou impair, $\bar{C}_{2k+1}, k \geq 2$, n'est pas $QLSP_3$. En effet, chaque sommet contient un P_4 induit dans son voisinage.

2.2. Reconnaissance des graphes $QLSP_3$

Dans cette partie nous donnerons à l'aide de la notion d'ordre d'élimination une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit $QLSP_3$.

Définition

Un ordre d'élimination $QLSP_3$, d'un graphe $G=(V,E)$, est la détermination d'un ordre de sommets de graphe $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ où $n=n(G)$, tel que $\forall i = \overline{1, n} : v_i$ est un sommet P_3 -libre du sous graphe induit par les sommets $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$.

Proposition.2.1

Un graphe est quasi-localement sans P_3 , si et seulement si, il admet un ordre d'élimination quasi-localement sans P_3 .

Preuve de Proposition.2.1 ▶ Il est clair que si G est $QLSP_3$, il admet un ordre d'élimination $QLSP_3$, il suffit de prendre tous les sommets et d'éliminer le sommet P_3 -libre, puis continuer avec les sommets restants jusqu'à éliminer tous les sommets. Il suffit donc de montrer l'implication inverse.

Soit $G=(V,E)$ et $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un ordre d'élimination $QLSP_3$. Pour tout sous graphe induit $H \subseteq G$, notons par $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq V$, les sommets de graphe H ($k \leq n$) avec δ est une bijection définit par :

$$\delta : \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

$$a_k \rightarrow j / a_i = v_j$$

Dans $G[\{v_{\delta(a_1)}, v_2, \dots, v_k\}]$ a_1 est un sommet P_3 -libre et on a :

- Soit $N_G(a_1) \subset V(H)$, et a_1 restera P_3 -libre dans H .
- Soit $N_G(a_1) \not\subset V(H)$, et dans H on aura supprimer quelques sommets de $N_G(a_1)$ qui induisait une clique ou un ensemble de cliques disjointes dans G , et par élimination de ces sommets le voisinage de a_1 préservera cette propriété et donc a_1 restera un sommet P_3 -libre dans H .

Donc $\forall H \subseteq G, \exists v = a_1 \in V(H)$ tel que : v est P_3 -libre ce qui est par définition un graphe $QLSP_3$ ■

Dans ce qui suit nous allons donner deux algorithmes, le premier est pour tester si un sommet est P_3 -libre et le deuxième pour trouver l'ordre d'élimination $QLSP_3$ d'un graphe donné.

L'algorithme suivant permet de tester si un sommet est P_3 -libre

Algorithme.1 : « tester_ P_3 -libre »

Entrée : un sommet v et la matrice d'adjacence A du graphe considéré

Sortie : réponse 'Oui' si v est P_3 -libre, 'Non' sinon.

Complexité : $o(n^3)$

- (1) Soit A_v la matrice d'adjacence du sous graphe induit par $N(v)$, $\{A$ et A_v sont symétriques}
- (2) Calculer $B_v = A_v \times A_v$ $\{ B_v$, aussi symétrique}
- (3) Réponse = 'Oui'
- (4) Pour $i = 1$ à $|N(v)|$ faire
 - Pour $j = 1$ à $i-1$ faire
 - Si $B_v[i,j]=1$ et $A_v[i,j]=0$, Alors Réponse = ' Non ' et arrêter.
 - Fin-boucle(j)
- Fin-boucle(i)
- (5) Fin

La procédure ci-dessus va être utilisée dans l'algorithme.2 pour déterminer un ordre d'élimination $QLSP_3$.

Algorithme.2 : « OE_QLSP₃ »

Entrée : un graphe $G=(V,E)$ $QLSP_3$

Sortie : vecteur δ à n composantes ($n=n(G)$) donnant l'ordre d'élimination

Complexité : $O(n^5)$

(1) $X = V, K = n$

(2) Pour $i = 1$ à k faire

Tester_ P_3 -libre(v_i, A_{v_i})

Si 'Oui', Alors mettre $\delta(v_i)=k$ et quitter la boucle(i)

Fin-boucle(i)

(3) $k = k - 1, X = X - \{v_i\}$

(4) Si $k > 1$, Alors aller à (2), Sinon $X=\{v\}$ mettre $\delta(v)=1$

(5) Fin

Dans le paragraphe suivant nous montrerons à l'aide d'une technique de coloration que les graphes de Berge $QLSP_3$ sont parfaits.

2.3. Graphe $QLSP_3$ et la CFGP

Il est facile de voir qu'un graphe minimal imparfait avec un sommet P_3 -libre et dont le voisinage est connexe n'existe pas, ainsi on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme.2.1

Si $G=(V,E)$ est un graphe minimal imparfait et $v \in V$ un sommet P_3 -libre alors $N(v)$ induit un sous graphe non connexe.

Rappelons qu'un antitrou $C_k, k \geq 7$ ne peut pas être $QLSP_3$. Ainsi un graphe $QLSP_3$ est forcément différent d'un antitrou impair.

Théorème.2.1

Si $G=(V,E)$ est un graphe de Berge $QLSP_3$, alors il est parfait

Preuve du théorème.2.1 ▶ Supposons qu'il existe un graphe $G=(V,E)$ de Berge $QLSP_3$ qui est minimal imparfait. G étant $QLSP_3 \exists v \in V$ tel que $G[N(v)]$ est P_3 -libre. G a les propriétés suivantes :

- 1) $G(N(v))$ est connexe d'après lemme.2.1.
- 2) $G(N'(v))$ est connexe, sinon $\{v\} \cup N(v)$ seraient une étoile d'articulation dans G ce qui n'est pas permis[8].
- 3) Si $x,y \in N(v)$ n'appartiennent pas à la même composante connexe dans $G(N(v))$, alors toute $\{x,y\}$ -chaîne minimale dans $\{v\} \cup N(v)$ est de longueur 2, et il existe une $\{x,y\}$ -chaîne ayant tous ses sommets internes dans $N'(v)$, et puisque G est sans trou impair alors de telle chaîne minimale est forcément de longueur paire.
- 4) $G(V-\{v\})$ est parfait.

Soit C une coloration de $G(V-\{v\})$, i.e. C est une application de $V-\{v\}$ vers $\{c_1, c_2, \dots, c_\omega\}$ tel que toute paire de sommets x et y , adjacents dans $V-\{v\}$ ont des couleurs différentes, i.e. $\{x,y\} \in E \Rightarrow C(x) \neq C(y)$.

Puisque chaque composante connexe de $G(N(v))$ est une clique avec au plus $\omega-1$ sommets, alors dans chaque composante connexe de $G(N(v))$ il existe au moins une couleur non utilisée. L'algorithme suivant modifie la coloration de $V-\{v\}$ de telle sorte que $N(v)$ ne contient pas la couleur c_ω .

Soit $G_{i,j}$ le sous graphe induit par les sommets de G colorier par les couleurs c_i et c_j , et N_1, N_2, \dots, N_p les p composantes connexes de $G(N(v))$.

Algorithme

Pour $i = 1$ à p faire

Si $G(N_i)$ contient la couleur c_ω , alors

- Soit c_k une couleur non utilisée dans N_i

- Et $x_\omega \in N_i$ tel que $C(x_\omega) = c_\omega$
- Dans $G_{\omega,k}$ inter changer les couleurs c_ω et c_k dans la composante connexe contenant x_ω

Fin-si

Fin

Cet algorithme est fini, la seule chose à vérifier c'est si l'interchange de couleurs ne fait pas apparaître c_ω dans une autre composante qui ne la contient pas.

A la $i^{\text{ème}}$ itération de cet algorithme, et si $N_i \neq N_j$ quatre cas sont possibles :

1^{er} cas : $c_\omega, c_k \notin C(N_j)$

Ici aucune influence sur les couleurs de sommets de N_j .

2^{ème} cas : $c_\omega \in C(N_j)$ et $c_k \notin C(N_j)$

Dans ce cas c_ω peut être enlevé de N_j ou elle reste, selon que le sommet correspondant est ou non dans la même composante connexe avec x_ω dans $G_{\omega,k}$. Si elle reste elle va être enlevé à la $j^{\text{ème}}$ itération de N_j .

3^{ème} cas : $c_\omega \notin C(N_j)$ et $c_k \in C(N_j)$

Soit $y_k \in N_j$ tel que $C(y_k) = c_k$. Dans ce cas x_ω et y_k ne peuvent pas être dans la même composante connexe dans $G_{\omega,k}$ sinon G contiendrait un trou impair.

3^{ème} cas : $c_\omega \in C(N_j)$ et $c_k \in C(N_j)$

Ici, une simple permutation de couleur peut avoir lieu dans N_j sans changer les couleurs existantes dans N_j , ceci dans le cas où les sommets correspondants dans N_j sont dans la même composante connexe avec x_ω dans $G_{\omega,k}$.

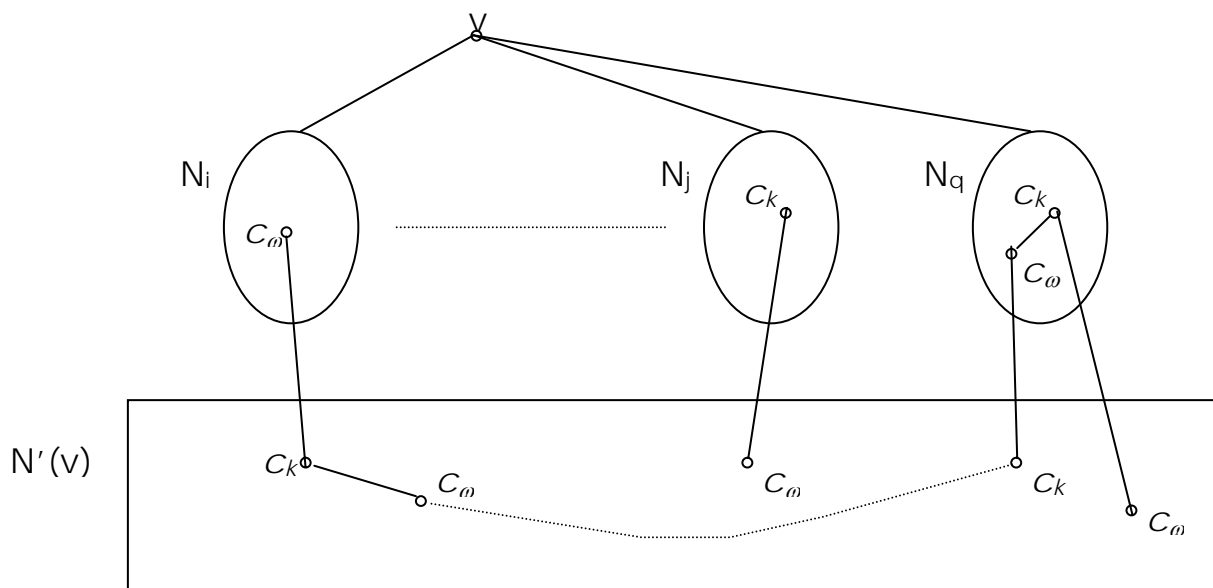


Figure 2.4

Conclusion :

Dans chaque itération i de l'algorithme, la couleur c_ω va être enlevée de N_i , $i=1, \dots, p$, si elle est dans cette composante connexe, et ne réapparaît plus. Donc, avec la nouvelle coloration obtenue de $G(V-\{v\})$ la couleur c_ω est non utilisée dans $N(v)$ et donc v peut être colorié avec la couleur c_ω . Par ce procédé on obtient une ω -coloration de G à partir d'une ω -coloration de $G(V-\{v\})$, ce qui est impossible car G minimal imparfait. Cette contradiction termine la preuve. ■

2.4. Conséquences

La preuve de théorème 2.1 contient un algorithme permettant d'étendre la coloration vers un sommet P_3 -libre, par conséquent on obtient ainsi une nouvelle propriété des imparfaits critiques :

Lemme.2.1

Si $G=(V,E)$ un graphe minimal imparfait qui n'est pas un trou impair, alors tout sommet v de G possède un P_3 induit dans son voisinage.

Et de fait que les graphes sans (K_4-e) et les graphes triangulés sont $QLSP_3$, on retrouve ainsi les deux corollaires suivants.

Corollaire.2.1[30]

Si G est de Berge sans K_4-e , alors il est parfait.

Corollaire.2.2[6]

Si G est un graphe triangulé, alors il est parfait.

2.5. Coloration des graphes de Berge $QLSP_3$

L'algorithme ci-dessous permet de colorier un graphe de Berge $QLSP_3$.

Entrée : un graphe $G=(V,E)$ de Berge $QLSP_3$

Sortie : coloration des sommets de G

Complexité : $o(n^5)$

- (1) Déterminer un ordre d'élimination $QLSP_3$: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- (2) $\omega(G_n)=1, \omega=1, i =n-1$
- (3) Déterminer $\omega(G_i)$ à partir de la formule : $\omega(G_i)=\max\{\omega(G_{i-1}), \omega(G_i(N(v_i)))\}$, avec $\omega(G_i(N(v_i)))=\max\{\text{card}(N_{i,k})+1\}$, ou $N_{i,k}$ est une composante connexe de $N(v_i)$ dans G_i . $\omega=\omega(G_i)$.
- (4) Si $\omega(G_i)>\omega(G_{i+1})$, alors colorier v_i avec une nouvelle couleur. $\omega=\omega+1$
- (5) Sinon, pour chaque sommet y de $N(v_i)$ de couleur ω trouver une couleur manquante k dans la même composante connexe dans $N(v_i)$ contenant ce sommet y . Dans $G_{k,\omega}$ inter changer les couleurs à partir du sommet y .
- (6) $i=i-1$
- (7) Si $i>0$, alors aller à (3)
- (8) Fin

Remarques

- 1) Le calcul de $\omega(G_i(N(v_i)))$ se fait en temps polynomial, il suffit de visiter le voisinage de v_i qui est un ensemble de cliques, et de prendre la cardinalité de la plus grande clique et l'augmenter de 1.
- 2) L'interchange des couleurs à l'étape 5, se fait aussi en temps polynomial, il suffit de démarrer de y et visiter à chaque fois les successeurs de couleur alternées k et ω .

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié les graphes de Berge $QLSP_3$, on a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit $QLSP_3$ et qu'il admet un ordre d'élimination $QLSP_3$. Puis, on a montré la validité de la conjecture forte des graphes parfaits pour cette classe à l'aide de deux méthodes ; la première en montrant qu'il n'existe aucun graphe minimal imparfait qui est de Berge contenant un sommet P_3 -libre, et la deuxième en proposant un algorithme polynomial de coloration pour les graphes de Berge de cette classe.

Un sommet mal-connecté est un sommet dont le voisinage induit un sous graphe non connexe. Dans ce chapitre nous examinerons les conséquences d'existence d'un sommet mal-connecté dans un graphe minimal imparfait et son rapport avec la distribution des P_4 dans le graphe. Enfin, nous terminerons par donner un résultat sur la classe des graphes sans colliers pair et montrons la perfection d'une sous classe d'elle.

3.1. Sommets mal-connectés et graphes minimaux imparfaits

Définition.1[26.1]

Un sommet sera dit mal-attaché si son voisinage induit un sous graphe P_4 -libre.

Définition.2

Un sommet sera dit mal-connecté si son voisinage induit un sous graphe non connexe.

L'étude de voisinage d'un sommet dans graphe minimal imparfait à une importance particulière. En effet, une des techniques utiliser pour montrer la CFGP pour une classe donnée de graphes est de prendre un minimal imparfait dans cette classe et d'essayer de montrer qu'il est possible d'étendre une ω -coloration de $G(V-\{v\})$ pour un sommet v de ce graphe à une ω -coloration de G , en utilisant d'éventuelles propriétés de voisinage de sommet v . D'où l'intérêt d'étudier les propriétés structurelles de voisinage d'un sommet dans un graphe minimal imparfait.

En 1991, Lubiw[18] énonça la conjecture suivante :

Conjecture.1

Si G est un graphe de Berge minimal imparfait, alors pour tout sommet v de G $N(v)$ est connexe.

Cette conjecture demeure ouverte, on ne sait pas encore s'il existe un graphe minimal imparfait possédant des sommets mal-connectés outre que les trous impairs.

Une autre conjecture a été donnée par Chvátal en relation avec la distribution des P_4 dans un graphe.

Conjecture.2[9]

Si G est un graphe de Berge minimal imparfait, alors tout sommet v possède un P_4 induit dans son voisinage.

Dans ce qui suit nous donnerons certaines propriétés et un résultat sur les sommets mal-connectés, dans le but d'essayer d'approcher la conjecture.1 de Lubiw.

Par la suite, une $\{x,y\}$ -chaîne désignera une chaîne minimale entre les sommets x et y .

Proposition.3.1

Soit $G=(V,E)$ un graphe minimal imparfait qui n'est pas un Trou impair. Si $v \in V$ est un sommet mal connecté alors :

(C1) $G(N'(v))$ est connexe.

(C2) $N(v)$ est un ensemble d'articulation minimal.

(C3) $\forall x,y \in N(v)$, n'appartenant pas à la même composante connexe dans $G(N(v))$;

- Toute $\{x,y\}$ -chaîne dans $G(\{v\} \cup N(v))$ est de longueur 2.
- De plus, il existe une $\{x,y\}$ -chaîne ayant tous ses sommets internes dans $N'(v)$, de telles chaînes sont forcément de longueur paire.

Preuve de proposition.3.1 ▶ Soit $G=(V,E)$ un graphe minimal imparfait, et soit $v \in V$ un sommet mal connecté. Par définition $G(N(v))$ est non

connexe. Soient x et y deux sommets de $N(v)$ n'appartenant pas à la même composante connexe dans $G(N(v))$.

- $G(V-N(v))$ a deux composantes connexes $\{v\}$ et $N'(v)$. En effet, car sinon $\{v\} \cup N(v)$ serait une étoile d'articulation dans G , ce qui est impossible car un minimal imparfait ne contient pas d'étoile d'articulation (Lemme de Chvátal[11]), d'où la propriété (C1).
- De même, $N(v)$ est un ensemble d'articulation minimal (au sens d'inclusion), car sinon $\exists S \subset N(v)$ tel que $G-S$ est non connexe et $\{v\} \cup S$ serait une étoile d'articulation dans G .

Il est clair que $\forall x, y \in N(v)$ deux sommets appartenant à deux composantes connexes différentes de $G(N(v))$: Toute $\{x, y\}$ -chaîne dans $G(\{v\} \cup N(v))$ est de longueur 2, la deuxième partie de la propriété (C3) est due à la connexité de $G(N'(v))$ et du fait que G est supposé être sans trous impairs ■.

Conséquence.1

Si G est un imparfait critique et v un sommet mal connecté de G , alors $\forall x \in N(v) : N'(v) \cap N(x) \neq \emptyset$.

I.e. chaque sommet de $N(v)$ a au moins un voisin dans $N'(v)$.

Notre premier résultat est le suivant :

Théorème.3.1

Dans un graphe minimal imparfait si un sommet est mal attaché, alors il est mal connecté.

Pour la preuve du théorème.3.1, on a besoin de résultat de D. Seince[17] et T. Gallai[9] ci-dessous.

Théorème.3.2. (D. Seince[26])

Un graphe G est P_4 -libre, si et seulement si, pour tout sous graphe induit H ayant plus qu'un sommet, H ou \overline{H} est non connexe.

Théorème.3.3 (T. Gallai[14])

Soit G un graphe imparfait critique, alors pour tout sommet v de G , $N(v)$ est connexe dans \overline{G}

Preuve de Théorème.3.1 ▶ Soit G un graphe imparfait critique et v un sommet mal attaché de G (supposons qu'un tel graphe existe).

- Par hypothèse $G(N(v))$ est P_4 -libre.
- Et donc d'après le théorème.3.2 de Seince, $H = G(N(v))$ ou $\overline{H} = \overline{G(N(v))}$ est non connexe.
- Or selon le théorème.3.3 de Gallai, $N(v)$ est connexe dans \overline{G} i.e. $\overline{H} = \overline{G(N(v))}$ est connexe.
- Donc forcément $G(N(v))$ est non connexe. ■

Une autre propriété conséquence directe du résultat de Maffray, Porto et Preissmann[19], (théorème.3.4), s'énonce comme suit :

Corollaire.3.1

Si G est un imparfait critique qui n'est pas un trou impair et v un sommet mal attaché, alors $N(v)$ contient $2K_2$ comme sous graphe induit.

Théorème.3.4(Maffray, Porto et Preissmann[19])

Un graphe imparfait critique qui n'est pas un trou impair ne contient pas de sommet v tel que le voisinage de v est $(2K_2, P_4)$ -libre

3.2. Conséquences

3.2.1. Graphes $(C_4, 2K_2)$ -libre

A partir du corollaire.3.1, on retrouve la perfection des graphes $(C_4, 2K_2)$ -libre.

Corollaire.3.2 [18]

Si G est un graphe $(2K_2, C_4)$ -libre alors G est parfait.

La preuve du corollaire.3.2, s'obtient en se basant sur le Théorème.3.4 sur les graphes C_4 -libre.

Théorème.3.5 (I.parfenoff, F.roussl and M.preissmann[25])

Un graphe de Berge C_4 -libre est soit cassable (i.e. G ou son complémentaire à une étoile d'articulation), soit possède au moins deux sommets non adjacents mal attachés.

Preuve de Corollaire.3.2 ▶ Sinon supposons qu'il existe un graphe G , $(2K_2, C_4)$ -libre qui n'est pas parfait, en particulier un minimal imparfait.

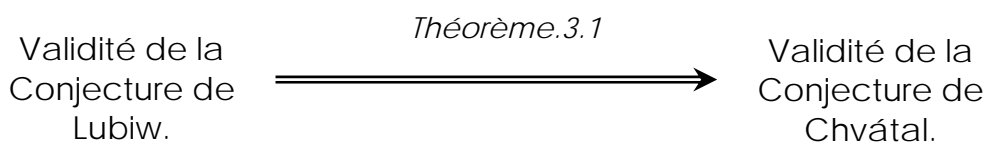
Donc G n'est pas cassable[11]. Le théorème.3.5, nous permet alors de dire que G contient un sommet mal-attaché, soit v ce sommet.

Et puisque G est $2K_2$ -libre alors il est différent de trou impair.

Donc v est un sommet qui vérifie les conditions de corollaire.3.2, par conséquent $N(v)$ contiendrait $2K_2$ comme sous graphe induit, ce qui est absurde. D'où la preuve ■

3.2.2. Lien entre la conjecture de Lubiw et la conjecture Chvátal

A partir de théorème.3.1, on remarque que la conjecture de Lubiw (conjectur.1) et celle de Chvátal sont liées. En effet, si la conjecture.1 est vraie, le théorème.3.1 servira d'argument pour la validité de la conjecture.2.



3.3. Graphes sans colliers pairs

Dans cette partie, nous donnons un résultat sur les graphes de Berge sans colliers pairs en vue de contribuer à la démonstration de la perfection de cette classe de graphe. On donne ici la validité de la CFGP pour une sous classe.

Définition.3

Un collier pair est un graphe constitué d'un cycle élémentaire pair sans corde auquel on ajoute un sommet adjacent aux deux extrémités d'une seule arête de ce cycle.

Le résultat obtenu est le suivant :

Lemme.3.1

Si G est un graphe imparfait critique sans colliers pairs qui n'est pas un trou impair, alors le voisinage de chaque sommet est connexe.

Preuve de lemme.3.1 ▶ Soit G un imparfait critique sans colliers pairs qui n'est pas un trou impair, et supposons que pour un sommet v de G , $G(N(v))$ est non connexe (on a alors les trois propriétés du Lemme 1).

Soient x et y deux sommets dans $N(v)$ n'appartenant pas à la même composante connexe dans $G(N(v))$, puisqu'un imparfait critique ne contient pas de paire d'amis[21] et d'après la proposition.3.1, il existe une

$\{x,y\}$ -chaîne impaire passant forcément par $N'(v)$. Soit $C_{x,y} = [x, z_1, \dots, z_{2k}, y]$ cette chaîne, la plus petit possible.

G est différent de trou impair donc forcément $z_1 \in N(v)$ ou $z_{2k} \in N(v)$. De la minimalité de $C_{x,y}$ sous les hypothèses ci-dessus, il existe une succession d'un nombre impair de sommets dans $C_{x,y}$, $S = [z_{t+1}, \dots, z_{t+2s+1}]$ inclus dans $N'(v)$, qui sont non adjacents à v , et $\{v\} \cup S \cup \{z_t\}$ ou $\{v\} \cup S \cup \{z_{t+2s+2}\}$ serait un collier pair dans G ce qui est absurde. ■

A partir des résultats donnés dans la première partie de ce chapitre, on peut énoncer la validité de la GFGP pour une sous classe des graphes de Berge sans colliers pairs.

Rappelons qu'un graphe G est dit quasi-localement sans P_4 ($QLSP_4$), si tout sous graphe induit H de G contient au moins un sommet mal-attaché.

Corollaire.3.3.

Si G est un graphe de Berge $QLSP_4$ sans colliers pairs, alors G est parfait.

Preuve de Corollaire.3.3 ▶ Ce résultat est une conséquence directe de théorème 3.1 et de lemme.3.1 ■

Une perle est constituée d'un P_4 et d'un sommet adjacent à tous les sommets de ce P_4 . Un graphe sans perle est un graphe $QLSP_4$, d'où le corollaire qui suit :

Corollaire.3.3 [2].

Si G est un graphe de Berge sans perle ni colliers pairs, alors G est parfait.

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre, on a introduit la notion de sommet mal connecté. En premier lieu, on a examiné les conséquences d'existence de tel sommet dans un minimal imparfait de Berge. Puis, on a pu montrer un résultat clé pour notre thèse (voir chapitre 4), il s'agit d'une relation entre l'existence d'un P_4 dans le voisinage d'un sommet dans un minimal imparfait et la connectivité de ce voisinage. L'importance de ce résultat est qu'il permet de faire un lien entre la conjecture donnée par Lubiw[18] et celle donnée par Chvátal[9]. Le résultat trouvé nous a permis aussi de retrouver une démonstration plus simple pour la perfection des graphes $(C_4, 2K_2)$ -libre, et d'obtenir d'autres résultats partiels.

ce chapitre est composé de deux parties, Dans la première partie nous allons introduire une nouvelle classe de graphes que nous avons nommé les RB-graphes. On montrera la validité de la CFGP pour les RB-graphes, cette classe de graphes contient d'importantes classes voir celle des graphes sans perle, mieux elle contient la classe objet de la présente thèse celle des graphes quasi-localement sans P_4 . Cette classe permet d'obtenir des résultats importants sur les graphes parfaits. La deuxième partie portera sur la distribution des P_4 dans un graphe minimal imparfait, le résultat obtenu permet de montrer la validité de la CFGP pour une importante classe de graphes, c'est la classe des graphes C_4 -libre.

4.1. Définitions et notations

Définition.1

Un graphe $G=(V,E)$ est dit quasi-localement F -libre (noté QLF-libre), si et seulement si, tout sous graphe induit H de G contient au moins un sommet v dont le voisinage induit un sous graphe F -libre, et on dira que v est un sommet F -libre.

Définition.2

Un graphe $G=(V,E)$ est dit localement F -libre (noté LF-libre), si et seulement si, pour tout sous graphe induit H de G chaque sommet a un voisinage qui induit un sous graphe F -libre.

Définition.3

On appelle un RB-graphe, tout graphe $G=(V,E)$ pour lequel il existe un graphe F vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (i) G est QLF-libre.
- (ii) Si G est minimal imparfait de Berge, alors tout sommet F -libre est mal-connecté (i.e. son voisinage induit un sous graphe non connexe).

Et on dira que G est un RB-graphe en F .

Cette classe de graphes n'est pas vide elle contient les graphes quasi-localement sans P_4 (voir théorème.4.1), qui sont des RB-graphes en P_4 .

4.2. Les RB-graphes et la CFGP

Dans ce paragraphe on va montrer la validité de la conjecture forte des graphes parfait (CFGP) pour les RB-graphes. Pour cela on va utiliser le lemme ci-dessous donné par H. Meyniel, J. Fonlupt et J.P. Uhry.

Lemme.4.1[21,11]

Si G est un graphe avec deux sommets u et v non reliés par aucune chaîne minimale impaire, et G' est le graphe obtenu à partir de G en contractant les sommets u et v , alors $\omega(G)=\omega(G')$ et $\chi(G)=\chi(G')$.

La figure 5.1 donne un exemple de contraction selon les conditions de lemme.4.1.

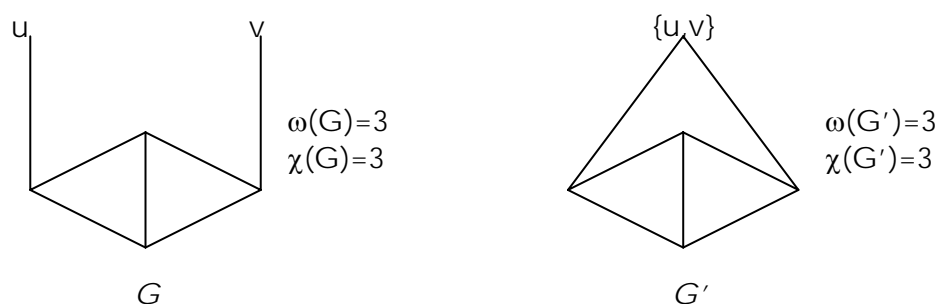


Figure 4.1 - « Exemple de contraction de deux sommets »

La contraction des sommets u et v consiste en leurs remplacement par un seul sommet qui sera voisin à tous les sommets qui étaient voisins à u ou à v dans G .

Nous présenterons par ce qui suit le résultat principal de ce chapitre, il consiste en la validité de la CFGP pour les RB-graphes.

Théorème.4.1

Tout RB-graphe de Berge est parfait

Preuve de théorème.4.1 ▶ Si non, supposons qu'il existe un RB-graphe $G=(V,E)$ en F de Berge, où F est une forme donnée de graphe, minimal imparfait. Supposons de plus, et sans perte de généralité, que G a le plus petit nombre d'arêtes.

Etape 1:

G étant un RB-graphe en F par définition on a :

- G est QLF-libre.
- $\exists v \in V$ tel que $G(N(v))$ non connexe.

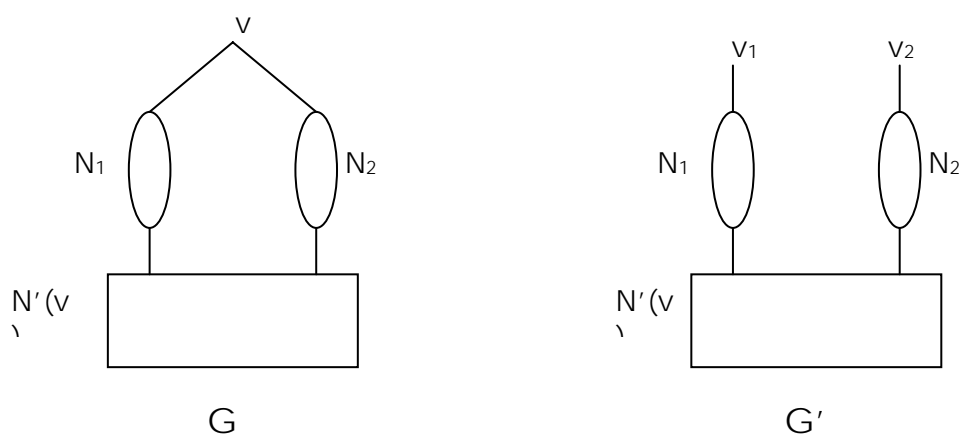


Figure 4.2 - « Remplacement de sommet v par deux sommets v_1 et v_2 »

Soit N_1 une composante connexe de $G(N(v))$, et notons N_2 l'ensemble des sommets $N(v)/N_1$ et donc $N(v)=N_1 \cup N_2$. Et puisque G est minimal

imparfait, alors tout sous graphe propre $H \subset G$ est parfait, de plus il est QLF-libre

Etape 2:

Soit G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant le sommet v par v_1 , avec N_1 comme voisinage et v_2 avec N_2 comme voisinage.

Remarquons que :

- Le graphe G peut être obtenu à partir de G' en contractant les sommets v_1 et v_2 .
- G et G' ont le même nombre d'arêtes et $n(G') = n(G) + 1$.
- v_1 et v_2 ne peuvent pas être reliés par une chaîne impaire minimale.

En effet, toute chaîne impaire minimale de longueur 3 impliquerait l'existence d'une arête entre N_1 et N_2 , ayant une longueur impaire supérieure cela impliquerait l'existence d'un trou impair dans G , ce qui n'est pas permis par hypothèse. Notons que toute chaîne minimale entre v_1 et v_2 utilise exactement un sommet de N_1 et un sommet de N_2 .

On est donc dans les hypothèses du lemme.4.1. Ainsi : $\omega(G) = \omega(G')$ et $\chi(G) = \chi(G')$, et puisque G est minimal imparfait : $\omega(G) \neq \chi(G)$ et $\omega(G') \neq \chi(G')$. Ce qui veut dire que G' est imparfait, l'étape suivante montre qu'il est minimal imparfait.

Etape 3:

G' est un graphe de Berge QLF-libre. En effet, le remplacement du sommet v par v_1 et v_2 ne peut que détruire des cycles, donc G' est aussi de Berge, et puisque $N_1 \cup N_2 = N(v)$, $G(N(v_1))$ et $G(N(v_2))$ sont F -libre et donc G' a deux sommets F -libre. De plus tout sous graphe $H \subseteq G'$ soit-il contient v_1 ou v_2 , soit ne contient ni v_1 ni v_2 et sera donc un sous graphe induit de G et contiendra par conséquent au moins un sommet F -libre.

De plus tout sous graphe propre $H \subset G'$ est parfait, sinon H serait un graphe imparfait de Berge QLF-libre avec $m(H) < m(G)$ ce qui contredit notre hypothèse.

Il s'ensuit que G' est un graphe minimal imparfait.

Etape 4:

D'après le théorème de L. Lovász [17] :

$$n(G) = \omega(G) \cdot \alpha(G) + 1$$

$$n(G') = \omega(G') \cdot \alpha(G') + 1$$

avec :

$$n(G') = n(G) + 1$$

ce qui implique que :

$$n(G) = \omega(G) \cdot \alpha(G) + 1$$

$$n(G) = \omega(G) \cdot \alpha(G')$$

D'où

$$\omega(G) \cdot [\alpha(G') - \alpha(G)] = 1$$

Les entités $\omega(G)$, $\alpha(G)$ et $\alpha(G')$ étant entières positives on a forcément $\omega(G) = 1$. Ce qui contredit le fait que G soit minimal imparfait. Ainsi s'achève la preuve ■

Ce théorème, i.e. la perfection des RB-graphes de Berge, permet de déduire la perfection des graphes de Berge sans perle et des graphes de Berge quasi-localement sans P_4 , qui sont inclus dans cette classe et dont la validité de la conjecture forte de graphes parfaits n'a pas été démontrée auparavant.

4.3. Conséquences

4.3.1. Graphes de Berge sans perle

Un graphe est sans perle s'il ne contient aucun sous graphe induit isomorphe à une perle (voir figure 4.4).

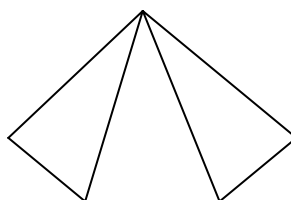


Figure 4.4 - « Perle »

Remarque

Un graphe sans perle est localement sans P_4 , i.e. chaque sommet est mal-attaché, et donc quasi-localement sans P_4 .

A partir de théorème.3.1 on en déduit :

Corollaire.4.1

Tout sommet d'un graphe de Berge minimal imparfait, s'il existe, sans perle est un sommet mal-connecté.

Ainsi les graphes sans perle sont des RB-graphes en P_4 , par conséquent on a le résultat suivant :

Corollaire.4.2

Si G est un graphe de Berge sans perle, alors G est parfait.

Notons qu'une perle (figure 4.4) contient deux sous graphes induits isomorphes à K_4-e , et par conséquent tout graphe (K_4-e) -libre est sans perle. Ainsi on retrouve le résultat ci-dessus de A.Tucker :

Conséquence.1[8]

Si G est un graphe de Berge (K_4-e) -libre, alors G est parfait

De même, toute perle contient deux sous graphes induits isomorphes à une patte, et donc tout graphe sans patte est sans perle. Ainsi on retrouve le résultat donné par S.Olariu :

Conséquence.2[15]

Si G est un graphe de Berge sans patte, alors G est parfait

4.3.2. Graphes de Berge $QLSP_4$

D'après le théorème.4.1, les graphes $QLSP_4$ sont des RB-graphes en P_4 et sont donc parfaits d'après théorème.4.1.

Corollaire.4.3

Si G est un graphe de Berge $QLSP_4$, alors G est parfait.

Ainsi, nous avons obtenu la perfection de la classe objet de la présente thèse.

Remarque

La reconnaissance de graphes $QLSP_4$, ce fait d'une façon similaire à celle des graphes $QLSP_3$.

Définition

Un ordre d'élimination $QLSP_4$, d'un graphe $G=(V,E)$, est la détermination d'un ordre des sommets de graphe $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ou $n=n(G)$, tel que $\forall i = \overline{1, n} : v_i$ est un sommet P_4 -libre du sous graphe induit par les sommets $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$.

Proposition.4.1

Un graphe est quasi-localement sans P_4 , si et seulement si, il admet un ordre d'élimination quasi-localement sans P_4 .

4.4. Validité de la conjecture de Chvátal

En utilisant le même raisonnement dans le théorème.4.1 on peut montrer une propriété intéressante des graphes minimaux imparfait, c'est la validité de la conjecture posée par V. Chvátal [9].

Théorème.4.2

Si G est un graphe minimal imparfait qui n'est pas un trou impair, alors le voisinage de chaque sommet v de G contient un P_4 comme

sous graphe induit, (i.e. chaque sommet n'est pas un sommet mal-attaché).

Preuve de théorème.4.2 ▶ Si non, supposons qu'il existe un graphe $G=(V,E)$ minimal imparfait qui n'est pas un trou impair, tel que : $\exists v \in V$ et v un sommet mal-attaché (i.e. un sommet dont le voisinage induit un sous graphe P_4 -libre). Supposons de plus, et sans perte de généralité, que G a le plus petit nombre d'arêtes.

Etape 1:

D'après théorème.3.1, v est un sommet mal-connecté (i.e. un sommet dont le voisinage induit un sous graphe non connexe) donc :

$\exists v \in V$ tel que $G(N(v))$ P_4 -libre et non connexe.

Soit N_1 une composante connexe de $G(N(v))$, et notons N_2 l'ensemble des sommets $N(v)/N_1$ et donc $N(v)=N_1 \cup N_2$. Et puisque G est minimal imparfait, alors tout sous graphe propre $H \subset G$ est parfait.

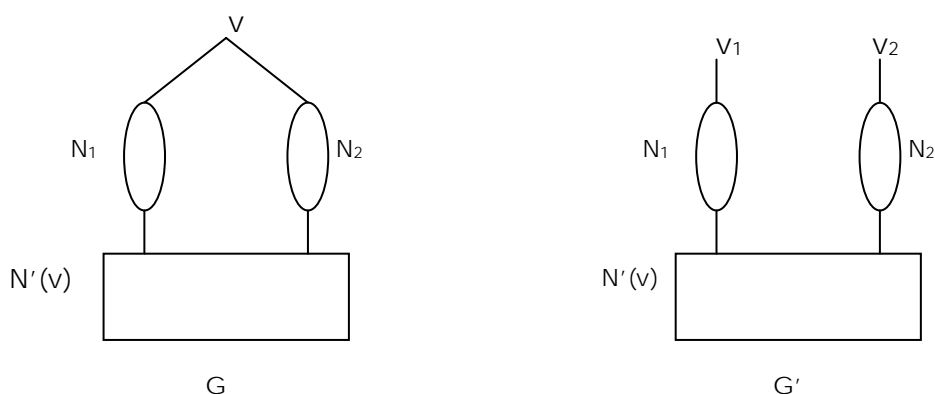


Figure 5.2 - « Remplacement de sommet v par deux sommets v_1 et v_2 »

Etape 2:

Soit G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant le sommet v par v_1 , avec N_1 comme voisinage et v_2 avec N_2 comme voisinage.

Remarquons que :

- Le graphe G peut être obtenu à partir de G' en contractant les sommets v_1 et v_2 .
- G et G' ont le même nombre d'arêtes et $n(G')=n(G)+1$.
- v_1 et v_2 ne peuvent pas être reliés par une chaîne impaire minimale.

En effet, toute chaîne impaire minimale de longueur 3 impliquerait l'existence d'une arête entre N_1 et N_2 , ayant une longueur impaire supérieure cela impliquerait l'existence d'un trou impair dans G , ce qui n'est pas permis par hypothèse. Notons que toute chaîne minimale entre v_1 et v_2 utilise exactement un sommet de N_1 et un sommet de N_2 .

On est donc dans les hypothèses du lemme.4.1. Ainsi : $\omega(G)=\omega(G')$ et $\chi(G)=\chi(G')$, et puisque G est minimal imparfait : $\omega(G)\neq\chi(G)$ et $\omega(G')\neq\chi(G')$. Ce qui veut dire que G' est imparfait, l'étape suivante montre qu'il est minimal imparfait.

Etape 3:

Tout sous graphe propre $H \subset G'$ est parfait. En effet, car si $H \subset G'$ un sous graphe propre de G' alors :

- Soit H ne contient ni v_1 ni v_2 , et sera donc un sous graphe propre de G , il est donc parfait.
- Soit H contient v_1 ou v_2 (ou inclusif), et contiendra par conséquent au moins un sommet dont le voisinage induit un sous graphe P_4 -libre et tel que $m(H) < m(G)$, ainsi il ne peut pas être minimal imparfait car cela contredira notre hypothèse.

Il s'ensuit que G' est un graphe minimal imparfait.

Etape 4:

D'après le théorème de L. Lovász [17] :

$$n(G) = \omega(G) \cdot \alpha(G) + 1$$

$$n(G') = \omega(G') \cdot \alpha(G') + 1 \quad \text{avec :} \quad n(G') = n(G) + 1$$

ce qui implique donne :

$$n(G) = \omega(G) \cdot \alpha(G) + 1$$

$$n(G) = \omega(G) \cdot \alpha(G')$$

D'où

$$\omega(G) \cdot [\alpha(G') - \alpha(G)] = 1$$

Les entités $\omega(G)$, $\alpha(G)$ et $\alpha(G')$ étant entières positives on a forcément $\omega(G) = 1$. Ce qui contredit le fait que G soit minimal imparfait. Ainsi s'achève la preuve ■

Comme conséquence à ce théorème on a pu montrer la validité de la Conjecture forte des graphes parfaits pour les graphes C_4 -libre.

4.4.1. Graphes de Berge C_4 -libre

Un graphe est C_4 -libre s'il ne contient aucun sous graphe induit isomorphe à un cycle élémentaire de longueur 4.

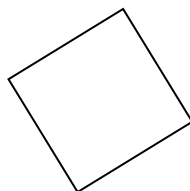


Figure 5.3 - « C_4 »

En utilisant le théorème.4.2 et le lemme.4.2 ci-dessous on peut déduire qu'un graphe de Berge minimal imparfait C_4 -libre ne peut pas exister.

Lemme.4.2 (I.Parfenof & al[25])

Tout graphe de Berge minimal imparfait C_4 -libre contient au moins deux sommets mal-attachés non adjacents.

Corollaire.4.4

Si G est un graphe de Berge C_4 -libre, alors G est parfait.

Preuve de Corollaire.4.4 ▶ Sinon, supposant qu'il existe un graphe de Berge $G=(V,E)$ C_4 -libre minimal imparfait. D'après lemme.4.2, G contient au moins un sommet mal-attaché (i.e. dont le voisinage est P_4 -libre), or dans un graphe de Berge minimal imparfait tout sommet contient un P_4 induit dans son voisinage (voir théorème.4.2), cette contradiction termine la preuve ■

4.5. Note

On a appris à la phase de dépôt de la présente thèse par l'intermédiaire de Mr. MAFFRAY que la perfection des graphes de Berge C_4 -libre vient d'être montrée par un travail récent de M. CONFORTI, G. CONRNUEJOLS, et K. VUSKOVIC. Leur preuve est basée sur une démarche différente de la notre, leur principal résultat est le suivant :

« Si G est un graphe de Berge C_4 -libre, alors soit G est biparti, soit G est un line-graphe de biparti, soit G a une étoile d'articulation, soit G a un 2-joint »

Un 2-joint est une partition en ensembles $V_1, A_1, B_1, V_2, A_2, B_2$ telle que : tous les sommets de A_1 sont adjacents a tous les sommets de B_1 , de même pour A_2 et B_2 , et entre $V_1 \cup A_1 \cup B_1$ et $V_2 \cup A_2 \cup B_2$ il n'y a pas d'autres arêtes que celles entre A_1 et B_1 et celles entre A_2 et B_2 .

Il est connu qu'un graphe minimal imparfait n'a pas d'étoile d'articulation et pas de 2-joint. Et les graphes bipartis et les lines-graphes étant parfaits, leur résultat implique la perfection des graphes de Berge C_4 -libre.

Commentaire

Le résultat de M. CONFORTI, G. CONRNUEJOLS, et K. VUSKOVIC, est important car non seulement il implique la perfection des graphes de Berge C_4 -libre, mais aussi donne une énumération des graphes de Berge qui sont C_4 -libre.

Pour notre part, nous avons suivi une démarche différente, elle est basée sur une nouvelle propriété des graphes minimaux imparfaits (théorème 4.2), et en utilisant le résultat de I. PARFENOFF, F. ROUSSL

and M. PREISSMANN[25], on a pu montré la perfection des graphes de Berge C_4 -libre.

4.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit une nouvelle classe de graphes parfaits, les RB-graphes de Berge. Cette classe permet de généraliser la classe des graphes $QLSP_4$. Puis, on a montré la validité de la conjecture de Chvátal[4], le résultat obtenu et celui de I.Parfenoff, F.Roussi et I.Russu[25], nous ont permis de montrer la validité de la CFGP pour les graphes C_4 -libre. Cependant les problèmes de coloration associés restent ouverts, i.e. on ne connaît pas un algorithme polynomial pour la coloration des graphes de Berge $QLSP_4$ et graphes de Berge C_4 -libre.

Dans cette thèse nous avons présenté une nouvelle classe de graphes, les RB-graphes. Nous avons montré la perfection pour les graphes de Berge de cette classe. Ce résultat a été obtenu en passant par l'étude des graphes quasi-localement sans P_3 , et par l'introduction de la notion de sommet mal-connecté et sa relation avec la distribution des P_4 dans le graphe. Par ce passage un certain nombre de résultats ont été obtenus, certains d'importance particulière et d'autres existant en littérature et qui sont ici des conséquences des résultats obtenus. Cette classe de graphes permet de déduire la perfection de graphes de Berge $QLSP_4$ et les graphes de Berge sans perle.

La même technique utilisée pour les RB-graphes permet de trouver un résultat important sur la relation existante entre un graphe minimal imparfait et la distribution des P_4 dans ce graphe, ce résultat n'est autre que la validité de la conjecture posée par Chvátal[9] en 1993. L'importance de ce résultat est qu'il nous a permis de montrer la validité de la conjecture forte des graphes parfait pour les graphes C_4 -libre.

Bibliographie

- [1] H. AÏT HADDADENE, Sur quelques structures de graphes parfaits, Doctorat Es-Sciences, USTHB 2000
- [2] H. AIT HADADENE, On the collar-free graphs, 14th British Combinatorial Theory, Keele 1993
- [3] H. AÏT HADDADENE and YALAOUI BILAL, Quasi-locally P_3 -free Berge graphs are perfect, 1er congrés national de mathématiques appliquées et industrielles SMAI2001, France, 28 Mai - 1 Juin 2001.
- [4] H. AÏT HADDADENE and YALAOUI BILAL, vertices with disconnected neighbourhood and minimal imperfect graphs, 18th British combinatorial conference, United Kingdom, 1st to 6th July 2001.
- [5] H. AÏT HADDADENE and YALAOUI BILAL, On a new class of perfect graphs, papier à soumettre
- [6] C. BERGE, Les problèmes de coloration en théorie de graphes, Publication. Institut. Math, Univ-Paris 9, 123-160, 1960
- [6.1] C. BERGE, Graphes et Hypergraphes
- [8] Z Blazsik, M Hujter, A. Pluhàr and Z.Tuza, graphs with no induced C_4 and $2K_2$, Discret Math, 115, 51-55, 1993.
- [9] V. CHVATAL, Star-cutsets and perfect graphs, J. Combi. Theory. Ser, B39, 83-92, 1985
- [10] V. CHVATAL, Which claw-free graphs are perfectly orderable, Discrete Applied Mathematics, 44, 39-63, 1993
- [11] G. A. DIRAC, On rigid circuit graphs, Abh. Math. Sem Univ. Hamburg 25, 71-76, 1961
- [12] J. FONLUPT AND J. P. UHRY, Transformation wich preserve perfectness ans H-perfectness of graphs, in Annals of Discrete Math, Vol 16, 83-95, North-Holland, Amsterdam, 1982
- [13] D. R. FULKERSON and O. A. GROSS. Incidence matrices and interval graphs. Pacific Journal o f Mathematics 15, 133-138,1965
- [14] T. GALLAI, Graphen mit tringulierbaren ungeraden veilecken. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int Közl. 7, A 3-36, 1962
- [15] T. GALLAI, Maximale mysteme unabbängiger kanten. Magyar Tud. Akad,

Mat Kutató Int, Közl 9, 401-413, 1964

- [16] M. GROTSCHEL, L. LOVÁSZ and A. SCHRIJVER, Polynomial algorithms for perfect graphs, in topic on perfect graphs, 325-356, 1984
- [16.1 M. GONDRAN et M. MINOUX, Graphes et Algorithmes, Editions Eyrolles – paris]
– France, 1979.
- [17] R.B. HAYWARD, Weakly triangulated graphs, J. of Combinatorial Theory Series B 39
200-209, 1985
- [18] L. LOVASZ, A characterization of perfect graphs, J. Combi. Theory Ser. B 13,
95-98, 1972
- [19] A. LUBIW, Short-corded and perfect graphs, J. of Combi Theory, series B 51,
24-33,1991
- [20] F. MAFFRAY, O. PORTO and M. PREISSMANN, a generalization of simplicial
elimination ordring, J. of Graph Theory, 1996
- [21] H. MEYNIEL, On the perfect graph conjecture, Discrete Math 16, 339-342,
1976
- [22] H. MEYNIEL, A new property of critical imperfect graphs and some
consequences, European J. Combi. 8, 313-316,1987
- [23] S. OLARIU. No antiwins in minimal imperfect graphs, J. of Combinatorial
Theory
Series B 45, 255-257, 1988
- [24] S. OLARIU, Paw-free graphs, Information processing letters 28, 53-54, 1988
- [25] M. W. PADBERG. Perfect zero-one matrices. Mathematical Programming 6,
180-196, 1974
- [26] I. PARFENOFF, F. ROUSSL and M. PREISSMANN, Louse vertices in C_4 -free Berge
graphs, Rapport de recherche L.I.F.O, 1999, soumis à Discrete Math
- [26.1 I. PARFENOFF, Couplage maximum et decomposition dans les graphes,
] Thèse de doctorat en sciences spécialité informatique, Université de Paris-
Sud, France, 2 dec 1994.
- [26.2 I. RUSU, graphes parfaits : étude structurelle et algorithmes de coloration,
] Thèse de doctorat, Université de d'Orléans, France, 19 nov 1999.
- [27] D. SCHEINSCHE, On a property of the class of n-colorable graphs, J. Combi
Theory, B16, 191-193, 1974
- [28] A. TUCKER, The strong perfect graph conjecture for planar graphs, Canad. J.
Math. 25
103-114, 1973
- [29] A. TUCKER, The validity of the the strong perfect conjecture are K_4 -free

graph conjecture, in Berge and Chvátal ,1984

- [30] A. TUCKER, Coloring graphs with stable subsets, J. Combinatorial B 34, 258-267, 1987
- [31] A. TUCKER, Coloring perfect (K_4-e) -free graphs, J. Combi. Theory Ser. B 42, 13-318, 1987

Quasi-Locally P_3 -free Berge Graphs Are perfect

Hacène Aït Haddadene & Bilal Yalaoui

Laboratory LAID3, Department of Operational Researchs,
Faculty of Mathematics Sciences, USTHB, BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,

Abstract

A graph is quasi-locally P_3 -free graph, if every induced sub-graph have a vertex with P_3 -free neighborhood. In this paper we prove that the quasi-locally P_3 -free Berge graphs are perfect, this new class of perfect graphs generalized the Berge (K_4 -e)-free class and contains chordal graphs.

1. Introduction

All graphs considered here are simple, non-oriented and connected. An elementary cycle having at least four vertices is called a Hole and its complementary graph an Anti-Hole. A Berge graph is a graph that contains neither odd Holes nor odd Anti-Hole. The strong perfect graph conjecture (SPGC) due to C. Berge [3], says: «a graph is perfect, if and only if, it is a Berge graph». This conjecture remains open.

Having a graph $G=(V,E)$, $N(v)$ will denote a neighborhood vertices of $v \in V$, and $N'(v)=V-\{v\}-N(v)$ and lets ω denote $\omega(G)$.

Definition 1

A graph is called perfect if for each induced sub-graph H , the chromatic number of H is equal to the maximum clique size $\omega(H)$ of H .

Definition 2

A P_3 is a 2-length chordless path graph. We call P_3 -free vertex, a vertex for which $G(N(v))$ induces a P_3 -free sub-graph.

Definition 3

A graph G is quasi-locally P_3 -free, if and only if, for every induced sub-graph H of G contains at least one P_3 -free vertex.

2. Main Result

It is easy to see that a minimal imperfect graph with a connected neighborhood of a P_3 -free vertex does not exist, so we have the next lemma.

Lemma 1. *If $G=(V,E)$ is a minimal imperfect graph and $v \in V$ a P_3 -free vertex then $N(v)$ induce a disconnected sub-graph.*

By this lemma, we can prove that a quasi-locally P_3 -free Berge graphs are perfect.

Theorem 2.

If G is quasi-locally P_3 -free Berge graph then, G is perfect.

Proof of Theorem 2. Suppose that there exist a Berge graph $G=(V,E)$ quasi-locally P_3 -free which is not perfect, in particularly minimal imperfect.

- (1) G quasi-locally P_3 -free graph, so: $\exists v \in V$ such that $G(N(v))$ is P_3 -free.
- (2) $G(N'(v))$ is connected otherwise $\{v\}+N(v)$ will be a star-cutset in G which is not permit[3], and by Lemma 1, $G(N(v))$ is disconnected.
- (3) if $x,y \in N(v)$ are two vertices not belonging to the same connected component in $G(N(v))$ then every $\{x,y\}$ -chordless path in $\{v\}+N(v)$ are of length 2, and there exist a $\{x,y\}$ -chordless path with all its internal vertices in $N'(v)$, since G does not contains an odd hole they have necessary an even length.
- (4) $G-\{v\}$ is perfect. Let $C(\cdot)$ one coloration of $G-\{v\}$ vertices, and $\{c_1, c_2, \dots, c_\omega\}$ the used colors.
- (5) Since each connected component of $G(N(v))$ is a clique with at most $\omega-1$ vertices, then in each connected component there exist at least one color not used and each color is used only one time in that component.
- (6) The next algorithm modify the coloration of $G-\{v\}$ such that each connected component of $G(N(v))$ does not contain the color c_ω :

Let $G_{i,j}$ denote the sub-graph of G induced by vertices colored with colors c_i and c_j .

And N_1, N_2, \dots, N_p . the p connected component of $G(N(v))$

Algorithm

For $i=1$ to p do

If $G(N_i)$ contains the color c_ω then :

- *Let c_k be the not used color in N_i .*
- *And $x_\omega \in N_i$ such as $C(x_\omega)=c_\omega$.*
- *In $G_{\omega,k}$ interchange c_k and c_ω in the connected component containing x_ω .*

End-if

End.

This algorithm is finite, the only thing to verify is that when interchanging color we have made not appear c_ω in the other components.

For the iteration 'i' of the algorithm and $N_j \neq N_i$, and by (5) four cases are possible:

1st case: $c_\omega, c_k \notin C(N_j)$.

Here no influence on N_j colors.

2nd case: $c_\omega \in C(N_j), c_k \notin C(N_j)$.

In this case c_ω can be removed from N_j or stay unchanged, depending on whether it is in the same component with x_ω in $G_{\omega,k}$ or not. If it stay, in the j^{th} iteration c_ω will be removed from N_j .

3rd case: $c_\omega \notin C(N_j)$, $c_k \in C(N_j)$.

Let $y_k \in N_j$ such as $C(y_k) = c_k$. In this case x_ω and y_k can't be at the same component in $G_{\omega,k}$ otherwise, G will contains an odd Hole.

4th case: $c_\omega \in C(N_j)$, $c_k \in C(N_j)$.

Here, a simple permutation of colors can be made in N_j without changing the existing colors in N_j , this in the case that the corresponding vertices in N_j are in the same component with x_ω in $G_{\omega,k}$

Conclusion :

In each iteration 'i' of the listed algorithm, the color c_ω will be removed from N_i , $i=1,2,\dots,p$, if it exists, and it not reappears again. So, with the modified coloration of $G-\{v\}$ the color c_ω is not used in $N(v)$ thus v can be colored with c_ω . By this procedure he obtain a ω -coloration of G from a ω -coloration of $G-\{v\}$, which is impossible because G is minimal imperfect. This contradiction completes the proof. \square

As consequence of this result, we have the next corollary, which generalize the Berge (K_4-e) -free perfect graphs.

Corollary 1.[5]

If G is (K_4-e) -free Berge graph then G is perfect.

Definition 4

A graph G is chordal if it contains no hole.

A classical result of Dirac[4] states that every chordal graph possesses a vertex whose neighborhood induced a clique. It flows that every chordal graph is quasi-locally P_3 -free Berge graph, thus we have the next corollary.

Corollary 2.[2]

If G is chordal graph then G is perfect.

References

- [1] H. Aït Haddadene, Sur quelques structures de graphes parfaits, Doct ES-Science, USTHB 2000.
- [2] C. Berge, Les problèmes de coloration en théorie de graphes, Publication. Institut. Math. Univ-Paris 9, 123-160, 1960.
- [3] V. Chvátal, Star-cutsets and perfect graphd, J.Combi, theory Ser, B39,83-92, 1985.
- [4] G. A. Dirac, On rigid circuit graphs, Abh. Math .Sem Univ..Hamburg 25 (1961), 71-76.
- [5] A. Tucker, Coloring perfect (K_4-e) -free graphs, J. Combin. Theory Ser. B 42:313-318, 1987.

Vertices with disconnected neighborhood And minimal imperfect graphs

Hacène Aït Haddadene & Bilal Yalaoui

*Department of Operational Research, Faculty of Mathematics Sciences, USTHB,
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,*

Abstract

In this paper we examine consequences of existence of a vertex with disconnected neighborhood in a minimal imperfect graph and its report with the distribution of the P_4 's in a graph. The obtained result permits to show the relation the Lubiw conjecture and Chvátal conjecture, and permits to get a simpler demonstration for the perfection of $(2K_2, C_4)$ -free graphs. We finish by giving a result on even collar free graphs and illustrate its consequences and we proof the validity of SPGC for one sub-class.

1. Introduction

All graphs considered here are simple, non-oriented and connected. An elementary cycle having at least four vertices is called a Hole and its complementary-graph an Anti-Hole. A Berge graph is a graph that contains neither odd Holes nor odd Anti-Hole. A graph is perfect if for all induced sub-graphs, the chromatic number is equal to the cardinality of a maximum clique. In the beginning of sixties C. Berge conjectured that a graph is perfect, if and only if, it is a Berge graph [2], called strong perfect graph conjecture (SPGC), this conjecture remains open.

Having a graph $G=(V,E)$, $N(v)$ will denote a neighborhood vertices of $v \in V$, and $N'(v)=V-\{v\}-N(v)$.

Definition 1

A P_4 is a 3-length cordless-path sub-graph. A loose-vertex in a graph, is a vertex with P_4 -free neighborhood.

2. Main results

(A)

Lemma 1 . *Let $G=(V,E)$ be a minimal imperfect graph that is not a odd Hole. If a neighborhood of the vertex $v \in V$ induce a disconnected sub graph then :*

(C1) *$G(N'(v))$ is a connected sub-graph.*

(C2) *$N(v)$ is a minimal cut set.*

(C3) *$\forall x,y \in N(v)$ not belonging to the same component in $G(N(v))$ we have :*

- *Every $\{x,y\}$ -cordless path in $G(\{v\}+N(v))$ is of length 2.*
- *There exist a $\{x,y\}$ -cordless path with all its internal vertices in $N'(v)$, such paths have necessary an even length.*

Proof of Lemma 1. Let $G=(V,E)$ be a minimal imperfect graph, and $v \in V$ a vertex with a disconnected neighborhood. So $G(N(v))$ is disconnected. Let x and y be two vertices in $N(v)$ not belonging to the same connected component in $G(N(v))$.

- $G(V-N(v))$ has two connected components $\{v\}$ and $N'(v)$. Indeed, because otherwise $\{v\}+N(v)$ is a star-cutset which is not permitted, a minimal imperfect graph doesn't contain a star-cutset (Chvátal lemma [4]). From this we have (C1).
- In the same way, $N(v)$ is a minimal cutset, otherwise there exist a set $S \subset N(v)$ such as $G-S$ is disconnected and $\{v\}+S$ will be star-cutset.
- It's easy to see that if x and y are two vertices not belonging to the same connected component in $G(N(v))$ then : every $\{x,y\}$ -cordless-path in $G(\{v\} \cup N(v))$ are of length 2, the second part of property (C3) is shown from (C1) and the fact that G does not contain an odd hole. \square

Consequence 1. *If G is minimal imperfect and v is a loose-vertex in G , then $\forall x \in N(v) : N'(v) \cap N(v) \neq \emptyset$.*

(it mean that each vertex in $N(v)$ has at least one neighbor in $N'(v)$).

Our first result is the next one:

Theorem 1. *In a minimal imperfect graph if a vertex is a loose vertex, then the neighborhood of that vertex induce a disconnected sub-graph.*

For the proof of Theorem 1, we need the above results of Seinsche [11], and Gallai [6].

Theorem 2 (Seinsche [11]). *A graph G is P_4 -free, if and only if, for all induced sub-graph H with more than one vertex, H or \overline{H} is disconnected.*

Theorem 3 (Gallai [6]). *If G is a minimal imperfect graph, then for every vertex v in G , $N(v)$ is connected in \overline{G} .*

Proof of Theorem 1. Let $G=(V,E)$ be a minimal imperfect graph, and $v \in V$ a loose-vertex (supposing that such graph exist). $G(N(v))$ is P_4 -free, so by Theorem 2, $H = G(N(v))$ or $\overline{H} = \overline{G(N(v))}$ is disconnected. But, according to Theorem 3, $N(v)$ is connected in \overline{G} i.e. $\overline{H} = \overline{G(N(v))}$ is connected, thus necessary $G(N(v))$ is not connected. \square

Corollary 1. *If G is a minimal imperfect graph which is not an odd hole, then $N(v)$ have $2K_2$ as an induced sub-graph.*

This corollary is a direct consequence of Theorem 1 and the above Theorem:

Theorem 4 (Maffray, Porto and Preissmann [8]). *A minimal imperfect graph which is not an odd hole doesn't contain a vertex v such as the neighborhood of v is $(2K_2, P_4)$ -free.*

Using the above result of I. Parfenoff & al [10] on C_4 -free graphs we get a simpler demonstration for the perfection of $(2K_2, C_4)$ -free graphs.

Corollary 2 [3]. *If G is a $(2K_2, C_4)$ -free graph, then G is perfect.*

Theorem 5 (I. Parfenoff & al [3]). *A connected C_4 -free Berge graph, which is not a clique, is either breakable (i.e. G or its complementary has a star-cutset) or contains at least two non-adjacent loose-vertices.*

As consequence of Theorem 5, every minimal imperfect C_4 -free Berge graph has loose-vertices.

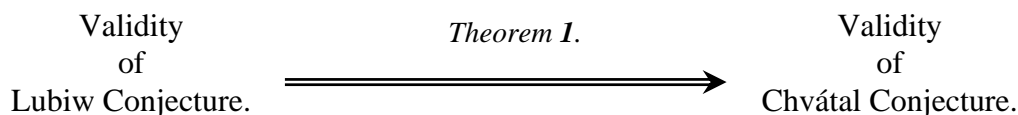
Proof of Corollary 2. Otherwise, suppose that there exists Berge graph G , C_4 -free that is not perfect let it be a minimal imperfect one. So G can't be breakable [4]. Thus, Theorem 5 let say that G contains a loose-vertex v . Since G is $2K_2$ -free, then it doesn't contain an odd hole. But the vertex v verify the Corollary 1 conditions, it follows that $N(v)$ contain $2K_2$ as an induced sub-graph which is absurd. \square

As another consequence of Theorem 1, we can show the relation between the Lubiw conjecture and Chvátal conjecture.

Conjecture 1 (Lubiw [7]). *Let G be a Berge minimal imperfect graph, then for every vertex v of G , $G(N(v))$ is a connected sub-graph.*

Conjecture 2 (Chvátal [5]). *Let G be a Berge minimal imperfect graph, then for every vertex v of G have a P_4 as an induced sub-graph in its neighborhood.*

Consequence 2.



(B)

In this part we give a result on Berge graphs even-collars-free in then view to contribute to the demonstration of the perfection of this graph class, we proof the validity of SPGC for one sub-class.

Definition 2.

An even-collar is composed of an even elementary cycle and a vertex adjacent only to the two extremities of one edge from this cycle.

Theorem 7. *If G is a minimal imperfect graph and even-collars-free which is not an odd hole, then the neighborhood of every vertex of G induce a connected sub-graph.*

Proof of Theorem 7. Let G be a minimal imperfect graph even-collar-free and different of odd hole. Suppose that for a vertex $v \in G$, $G(N(v))$ is disconnected (here we have the tree properties of Lemma 1). Let x and y be two vertices in $N(v)$ not belonging to the same connected component in $G(N(v))$. A minimal imperfect graph does not contain a even pair [9], so by Lemma 1 there exist $\{x,y\}$ -odd-cordless-path in G necessary it use some $N'(v)$ vertices, Let $C_{x,y}=[x,z_1,\dots,z_{2k},y]$ this path, the smallest one. G is different of odd hole these imply that $z_1 \in N(v)$ or $z_{2k} \in N(v)$. From the minimality of $C_{x,y}$, under our hypotheses, there exists a sub-sequence of odd number of vertices in $C_{x,y}$, $S=[z_{t+1},\dots,z_{t+2s+1}]$ included in $N'(v)$ which are non adjacent to v . By this, $\{v\} \cup S \cup \{z_{t+1}\}$ or $\{v\} \cup S \cup \{z_{t+2s+1}\}$ will be an even-collar in G , which is absurd. \square

From the sitting result in part (A), we can show the validity of SPGC conjecture for an subclass of Berge even-collars-free graphs:

Definition 3.

A graph G is quasi-locally P_4 -free, if and only if, for every induced sub-graph H of G contains at least one P_4 -free vertex (i.e. a loose vertex).

Corollary 3. *If G is Berge graph quasi-locally P_4 -free and even-collars-free, then G is perfect.*

Proof of Corollary 3. This corollary is a direct consequence of Theorem 1 and 7. \square

Definition 4.

A Gem is composed of one P_4 and a vertex adjacent to all the vertices of this P_4 .

Corollary 4 [1]. *If G is Berge graph Gem-free and even-collars-free, then G is perfect.*

References

- [1] H.Aït Haddadene, on the collar-free graphs, 14th British Combinatorial Theory, Keele 1993.
- [2] C. Berge, les problèmes de coloration en théorie des graphes, Publ.Inst.Univ, Paris 9, 123-160, 1960.
- [3] Z. Blazsik, M Hujter, A. Pluhàr and Z.Tuza, graphs with no induced C_4 and $2K_2$, Discret Math, 115, 51-55, 1993.
- [4] V. Chvátal, Star-cutsets and perfect graphs, J. Combi, theory Ser, B39, 83-92, 1985.
- [5] V. Chvátal, which claw-free graphs are perfectly orderable, Discrete Applied Mathematics, 44 :39-63, 1993.
- [6] T. Gallai, Maximale Systeme unabhängiger Kanten. Magyar Tud. Akad. Mat Kutató Int, közl, 9:401-413, 1964.
- [7] A. Lubiw, short-chorded and perfect graphs, J of Combi Theory, series B, 51:24-33, 1991.
- [8] F. Maffray, O. Porto et M. Preissmann, a generalization of simplicial elimination ordering, J of graph theory, 1996.
- [9] H. Meyniel and S. Olariu, A new property of critical imperfect graphs and some consequences, European J. Combi. 8, 313-316, 1987.
- [10] I. Parfenoff, F. Roussel and I. Rusu, loose vertices in C_4 -free Berge graphs, Rapport de recherche L.I.F.O, RR 99-12 soumis à Discret Mathematics.
- [11] D. Seince, on a property of the class of n -colorable graphs, J. Combi theory, B16, 191-193,1974.

Sur une nouvelle classe de graphes parfaits

Hacène Ait Haddadene & Bilal Yalaoui

*Département de Recherches Opérationnelle, Faculté des Sciences Mathématiques, USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Alger, Algérie*

Résumé

On appelle un RB-graphe tout graphe G pour lequel il existe une forme donnée de graphe F telle que : G est quasi-localement sans F , et si de plus G est minimal imparfait de Berge, alors tout sommet dont le voisinage est F -libre, est un voisinage non connexe. Dans ce papier nous montrerons la validité de la CFGP pour cette classe de graphes. La perfection des RB-graphes de Berge nous a permis de déduire celle des graphes de Berge $QLSP_4$, qui a son tour nous a permis de déduire celle des graphes de Berge sans perle.

1. Introduction

Tous les graphes considérés ici sont simples, non orientés et connexes. Un cycle élémentaire ayant au moins quatre sommets est appelé Trou et son graphe complémentaire un Anti-trou. Un graphe de Berge est un graphe qui ne contient ni Trou ni Anti-trou impairs. Un graphe est parfait si pour tous sous graphe induit le nombre chromatique est égal à la cardinalité d'une clique maximum, un imparfait critique est un graphe imparfait minimal. Au début des années soixante C. Berge conjecturait qu'un graphe est parfait, si et seulement si, il est de Berge [3], appelée conjecture forte des graphes parfaits (CFPG), cette conjecture reste ouverte.

Définition.1

Un graphe $G=(V,E)$ est dit quasi-localement F -libre (noté QLF -libre), si et seulement si, tout sous graphe induit H de G contient au moins un sommet v dont le voisinage induit un sous graphe F -libre, et on dira que v est un sommet F -libre.

Définition.2

Un graphe $G=(V,E)$ est dit localement F -libre (noté LF -libre), si et seulement si, pour tout sous graphe induit H de G chaque sommet a un voisinage qui induit un sous graphe F -libre.

Définition.3

On appelle un RB-graphe en F , tout graphe $G=(V,E)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (i) G est QLF -libre.
- (ii) Si G est minimal imparfait de Berge, alors tout sommet F -libre est mal-connecté (i.e. son voisinage induit un sous graphe non connexe).

Où F est une forme donnée de graphe. Et on dira que G est un RB-graphe en F .

Définition.4

On appelle un RB-graphe tout graphe $G=(V,E)$ pour lequel il existe une forme de graphe F telle que G soit un RB-graphe en F .

2. Principaux résultats

On va montrer la validité de la conjecture forte de graphes parfait (CFGP) pour les RB-graphes. Pour cela on va utiliser le lemme ci-dessous donné par H. Meyniel, J. Fonlupt et J.P. Uhry.

Lemme.1[21,11]

Si G est un graphe avec deux sommets u et v non reliés par aucune chaîne minimale impaire, et G' est le graphe obtenu à partir de G en contractant les sommets u et v , alors $\omega(G)=\omega(G')$ et $\chi(G)=\chi(G')$.

Nous présenterons par ce qui suit le résultat principal de ce papier.

Théorème.1

Tout RB-graphe de Berge est parfait

Preuve de théorème.4.1 ▶ Si non, supposons qu'il existe un RB-graphe $G=(V,E)$ en F de Berge, où F est une forme donnée de graphe, minimal imparfait. Supposons de plus, et sans perte de généralité, que G a le plus petit nombre d'arêtes.

Etape 1:

G étant un RB-graphe en F par définition on a :

- G est QLF-libre.
- $\exists v \in V$ tel que $G(N(v))$ non connexe.

Soit N_1 une composante connexe de $G(N(v))$, et notons N_2 l'ensemble des sommets $N(v)/N_1$ et donc $N(v)=N_1 \cup N_2$. Et puisque G est minimal imparfait, alors tout sous graphe propre $H \subset G$ est parfait, de plus il est QLF-libre

Etape 2:

Soit G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant le sommet v par v_1 , avec N_1 comme voisinage et v_2 avec N_2 comme voisinage.

Remarquons que :

- Le graphe G peut être obtenu à partir de G' en contractant les sommets v_1 et v_2 .
- G et G' ont le même nombre d'arêtes et $n(G')=n(G)+1$.
- v_1 et v_2 ne peuvent pas être reliés par une chaîne impaire minimale.

En effet, toute chaîne impaire minimale de longueur 3 impliquerait l'existence d'une arête entre N_1 et N_2 , ayant une longueur impaire supérieure cela impliquerait l'existence d'un trou impair dans G , ce qui n'est pas permis par hypothèse. Notons que toute chaîne minimale entre v_1 et v_2 utilise exactement un sommet de N_1 et un sommet de N_2 .

On est donc dans les hypothèses du lemme.4.1. Ainsi : $\omega(G)=\omega(G')$ et $\chi(G)=\chi(G')$, et puisque G est minimal imparfait : $\omega(G) \neq \chi(G)$ et $\omega(G') \neq \chi(G')$. Ce qui veut dire que G' est imparfait, l'étape suivante montre qu'il est minimal imparfait.

Etape 3:

G' est un graphe de Berge QLF-libre. En effet, le remplacement du sommet v par v_1 et v_2 ne peut que détruire des cycles, donc G' est aussi de Berge, et puisque $N_1 \cup N_2 = N(v)$, $G(N(v_1))$ et $G(N(v_2))$ sont F -libre et donc G' a deux sommets F -libre. De plus tout sous graphe $H \subseteq G'$ soit-il contient v_1 ou v_2 , soit ne contient ni v_1 ni v_2 et sera donc un sous graphe induit de G et contiendra par conséquent au moins un sommet F -libre.

De plus tout sous graphe propre $H \subset G'$ est parfait, sinon H serait un graphe imparfait de Berge QLF-libre avec $m(H) < m(G)$ ce qui contredit notre hypothèse.

Il s'ensuit que G' est un graphe minimal imparfait.

Etape 4 :

D'après le théorème de L. Lovász [7] :

$$n(G) = \omega(G) \cdot \alpha(G) + 1$$

$$n(G') = \omega(G') \cdot \alpha(G') + 1$$

avec :

$$n(G') = n(G) + 1$$

ce qui implique que :

$$n(G) = \omega(G) \cdot \alpha(G) + 1$$

$$n(G) = \omega(G) \cdot \alpha(G')$$

D'où

$$\omega(G) \cdot [\alpha(G') - \alpha(G)] = 1$$

Les entités $\omega(G)$, $\alpha(G)$ et $\alpha(G')$ étant entières positives on a forcément $\omega(G) = 1$. Ce qui contredit le fait que G soit minimal imparfait. Ainsi s'achève la preuve ■

Conséquences

Un graphe est sans perle s'il ne contient aucun sous graphe induit isomorphe à une perle. Un graphe sans perle est localement sans P_4 , i.e. chaque sommet est mal-attaché, et donc quasi-localement sans P_4 . On en déduit :

Corollaire.4.1

Tout sommet d'un graphe de Berge minimal imparfait, s'il existe, sans perle est un sommet mal-connecté.

Ainsi les graphes sans perle sont des RB-graphes en P_4 , par conséquent on a le résultat suivant :

Corollaire.2

Si G est un graphe de Berge sans perle, alors G est parfait.

Notons qu'une perle (figure 5.4) contient deux sous graphes induit isomorphe à K_4-e , et par conséquent tout graphe (K_4-e) -libre est sans perle. Ainsi on retrouve le résultat ci-dessus de A.Tucker :

Conséquence.1[4]

Si G est un graphe de Berge (K_4-e) -libre est parfait

De même, toute perle contient deux sous graphes induit isomorphe à une patte, et donc tout graphe sans patte est sans perle. Ainsi on retrouve le résultat donné par S.Olariu :

Conséquence.2[6]

Si G est un graphe de Berge (K_4-e) -libre est parfait

D'après le théorème.1, les graphes $QLSP_4$ sont des RB-graphes en P_4 et sont donc parfaits d'après théorème5.1.

Corollaire.3

Si G est un graphe de Berge $QLSP_4$, alors G est parfait.

Références

- [1] H. AÏT HADDADENE, Sur quelques structures de graphes parfaits, Doctorat Es-Science, USTHB 2000
- [2] H. AIT HADADENE, On the collar-free graphs, 14th British Combinatorial Theory, Keele 1993
- [3] C. BERGE, Les problèmes de coloration en théorie de graphes, Publication. Institut. Math, Univ-Paris 9, 123-160, 1960
- [4] V. CHVATAL, Star-cutsets and perfect graphs, J. Combi. Theory. Ser, B39, 83-92, 1985
- [5] J. FONLUPT AND J. P. UHRY, Transformation wich preserve perfectness ans H-perfectness of graphs, in Annals of Discrete Math, Vol 16, 83-95, North-Holland, Amsterdam, 1982
- [6] M. GROTSCHHEL, L. LOVÁSZ and A. SCHRIJVER, Polynomial algorithms for perfect graphs, in topic on perfect graphs, 325-356, 1984
- [7] L. LOVASZ, A characterization of perfect graphs, J. Combi. Theory Ser. B 13, 95-98, 1972
- [8] A. LUBIW, Short-corded and perfect graphs, J. of Combi Theory, series B 51, 24-33,1991
- [24] M. W. PADBERG. Perfect zero-one matrices. Mathematical Programming 6, 180-196, 1974
- [10] I. PARFENOFF, F. ROUSSL and M. PREISSMANN, Louse vertices in C_4 -free Berge graphs, Rapport de recherche L.I.F.O, 1999, soumis à Discrete Math