REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTE DE MATHEMATIQUES

Résumé du Mémoire de Magister en Mathématiques

Spécialité : Analyse - Option : E.D.P

Présenté par [1] :

Mr. Hamid OUBAGHA

Thème :

Contrôlabilité et Stabilisation de l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel

Résumé :

Dans le cadre de cette thèse de Magister, nous nous sommes intéressé à la Contrôlabilité et à la Stabilisation de l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel. Après avoir consacré un premier chapitre aux rappels de l'essentiel des outils mathématiques nécessaires, nous avons commencé par montrer que le feedback naturel ne suffit pas pour assurer une décroissance exponentielle de l'énergie. Nous avons repris pour cela un exemple étudié par A. HEMINNA dans [7]. Nous avons ensuite étudié deux problèmes de Ventcel avec des contrôles internes. Chacun d'eux faisant l'objet d'un chapitre, nous avons montré dans chaque chapitre que les contrôles internes introduits assuraient une décroissance exponentielle de l'énergie.

---

[1] : **Directeur de mémoire : M. Amar HEMINNA, Professeur à l' USTHB.**

Contrôlabilité et Stabilisation de l'Equation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel

I. Introduction :

Dans cette thèse, on s'intéresse à la contrôlabilité et à la stabilisation de l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel. Les problèmes de Ventcel qui servent à modéliser des phénomènes physiques comme les processus de diffusion et la propagation d'ondes mais aussi des problèmes de mécanique comme l'élasticité imposent des conditions au bord qui se caractérisent par la présence d'opérateurs tangentiels de même ordre que l'opérateur principal et qu'on justifie par des méthodes asymptotiques. C'est Ventcel qui, pour modéliser les processus de diffusion, a introduit la condition au bord :

$$\partial_\nu u - \Delta_{\mathrm{T}} u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega \quad \text{pour l'équation des ondes} \quad -\Delta u + u = f \quad \text{dans} \quad \Omega$$

qui modélise l'échange thermique du corps avec le milieu ambiant en présence d'une couche trés mince mais de très grande conductibilité thermique sur la surface du corps. Dans l'étude de certains problèmes modélisant des phénomènes physiques ou mécaniques, ces conditions au bord dites de Ventcel ont une grande importance. Quand une dynamique évoluant dans le temps est régie par une équation de la forme $\begin{pmatrix} du \\ dt \end{pmatrix} = Au$ où $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow H$ est une fonction de la variable t (représentant le temps) à valeurs dans un espace de Hilbert H et A un opérateur de domaine $D(A)$ dans H et quand on note $E(u,t)$ l'énergie associée, la problématique de la stabilisation consiste à trouver des fonctions F appelées **<u>Contrôles</u>**, qui assurent une décroissance vers zéro de l'énergie $E(u,t)$ de la solutions de l'équation :

$$\frac{du}{dt} = Au + F(u)$$

Stabilisation de l'équation des ondes :

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et ν la normale unitaire à Γ extérieure à Ω et ∂_ν l'opérateur de dérivation dans la direction normale. Soit $(u^0, u^1) \in V \times W$ où V et W sont deux espaces fonctionnels de Hilbert et $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow V$ la solution du problème de l'équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & dans\ \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \begin{pmatrix} u(0,x) \\ u'(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & dans\ \Omega \end{array} \right\}$$

La stabilisation interne consiste à trouver un contrôle $F : V \times W \longrightarrow K$ où $K = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tel que l'énergie $E(u,t)$ associée à la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + F(u,u') = 0 & dans\ \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \begin{pmatrix} u(0,x) \\ u'(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & dans\ \Omega \end{array} \right\}$$

définie par :

$$E(u,t) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|^2_{V \times W} \qquad \forall t \geq 0$$

décroisse vers zéro quand le temps tend vers l'infini. F est alors dit **contrôle interne**. On parlera de **Stabilisation forte** lorsque $\lim_{t\to\infty} E(u,t) = 0$ pour tout $(u^0,u^1) \in V \times W$. La stabilisation est dite **exponentielle** s'il existe deux constantes $C > 0$ et $\omega > 0$ telles que l'énergie $E(t)$ du système vérifie, indépendamment des condition initiales, l'inégalité : $E(u,t) \leq C.\exp(-\omega t)$ pour tout $t \geq 0$. Si $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ est une partition de la frontière $\partial\Omega = \Gamma$, une stabilisation frontière du problème de l'équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \begin{pmatrix} u(0,x) \\ u'(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & \textit{dans } \Omega \end{array} \right\}$$

consiste à se donner un opérateur appelé **<u>contrôle frontière</u>** $G : V_{\partial\Omega} \times W_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ où $V_{\partial\Omega}$ *et* $W_{\partial\Omega}$ sont des espaces de Hilbert tel que l'énergie de la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \\ u = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0 \\ \\ \partial_\nu u = G(u, u') & \textit{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1 \\ \begin{pmatrix} u(0,x) \\ u'(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & \textit{dans } \Omega \end{array} \right\}$$

décroisse vers zéro quand le temps tend vers l'infini. On remarquera que la stabilité exponentielle entraîne nécessairement la stabilité forte mais que la réciproque est fausse.

<u>Equation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel</u>

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^k, (k \geq 2)$ au moins par morceaux, ν la normale unitaire à Γ extérieure à Ω et ∂_ν l'opérateur de dérivation dans la direction normale. Stabiliser l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel revient à chercher un contrôle frontière noté G et/ou un contrôle interne F, qui assure une stabilisation de l'énergie associée à la solution du problème qui consiste à trouver une fonction $(u, u') : \mathbb{R}_+ \longrightarrow V \times W$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + F(u, u') = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \\ u = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0 \\ \\ \partial_\nu u - \Delta_{\mathrm{T}} u = G(u, u') & \textit{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1 \\ \begin{pmatrix} u(0,x) \\ u'(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & \textit{dans } \Omega \end{array} \right\}$$

où Δ_{T} désigne le Laplacien tangentiel sur Γ et $(u^0, u^1) \in V \times W$ est la conditions initiale du problème. Pour établir la stabilité forte, on cherchera à montrer que la solution u du problème (0.4.1) vérifie : $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \left\| \binom{u(t)}{u'(t)} \right\|_{V \times W} = 0$ indépendamment de la condition initiale (u^0, u^1). Quant à la stabilisation exponentielle, il s'agira de trouver deux constantes $M > 0$ et $\omega > 0$ telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times W} \leq M \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times W} .e^{-\omega t} \qquad \forall t \geq 0 \quad et \quad \forall (u^0, u^1) \in V \times W$$

Dans ce travail, nons étudié la stabilisation de l'équation des ondes dans trois problèmes de Ventcel. Dans le premier problème on montre que le feedback naturel u' ne suffit pas pour obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie mais qu'il peut assurer une stabilisation forte de l'équation des ondes. Le second montre qu'avec un contrôle interne on peut obtenir une stabilisation forte et une stabilisation exponentielle. Dans le troisième problème, on aboutit aux mêmes résultats avec un contrôle interne convectif. Le premier chapitre a été consacré aux rappels de l'essentiel des outils mathémayiques indispensables pour l'étude des problèmes envisagés.

Chapitre II. Insuffisance du feedback naturel

Dans le chapitre II de ce mémoire, nous avons repris un exemple étudié par A. HEMINNA dans [7] où l'on montre que dans un domaine polygonal Ω plan on peut obtenir sans contrôle interne une stabilisation forte de l'équation de ondes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & dans\ \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \begin{pmatrix} u(0,x) \\ u'(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & dans\ \Omega \end{array} \right\}$$

avec la condition au bord de Ventcel : $\partial_\nu u - \Delta_{\mathrm{T}} u + u' = 0$ $dans$ $\mathbb{R}_+ \times \Gamma_1$. Le feedback naturel assure la stabilisation forte mais en revanche il ne suffit pas pour obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie. Dans ce chapitre où $\Omega =]0,\pi[^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de $\partial\Omega$ avec $mes(\Gamma_0) > 0$ et $V = \left\{v \in H^1(\Omega) : v_{|\Gamma_0} = 0 \;\; et \;\; v_{|\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\right\}$, on démontre que la solution u du problème :

$$\mathcal{P}_0 : \left\{\begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & dans \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 & sur \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu u - \Delta_{\mathrm{T}} u + u' = 0 & sur \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u^0 \quad et \quad u'(0) = u^1 & dans \quad \Omega \end{array}\right\}$$

vérifie :

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$$

On écrit $\mathcal{P}_0$ sous forme de problème de Cauchy en considérant l'opérateur $\mathcal{C}_0$ sur le domaine $D(\mathcal{C}_0) = \left\{(v,z) \in V \times V : \Delta v \in L^2(\Omega) \;\; et \;\; \partial_\nu v - \Delta_{\mathrm{T}} v + z = 0 \;\; dans \; H^{-1}(\Gamma_1)\right\}$ par :

$$\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

On montre que $\mathcal{C}_0$ est m-dissipatif en prouvant que la quantité $\left\langle \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)}$ est négative ou nulle pour tout $(v,z) \in D(\mathcal{C}_0)$ et que l'opérateur $I - \mathcal{C}_0 : D(\mathcal{C}_0) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$ est surjectif. Ce qui revient à résoudre pour tout $(u,w) \in V \times L^2(\Omega)$ le problème $\pi_{(u,w)}$ qui consiste à trouver $v \in V$ telle que

$$\pi_{(u,w)} : \left\{\begin{array}{ll} -\Delta v = u + w & dans \quad \Omega \\ \partial_\nu v - \Delta_{\mathrm{T}} v + v = u & dans \; H^{-1}(\Gamma_1) \end{array}\right\}$$

On donne une formulation variationelle du problème et on applique le Théorème de Lax-Milgram. Et on montre pour conclure que $(v, v-u) \in D(\mathcal{C}_0)$. On applique ensuite le Théorème de Hille Yosida selon lequel le problème $\mathcal{P}_0$ admet une solution unique. On démontre que l'injection $D(\mathcal{C}_0) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$ est compacte et on applique le Principe d'invariance de LaSalle au semi-groupe $(S_0(t)_{t\geq 0})$ engendré par $\mathcal{C}_0$ pour en déduire la stabilité forte. Quant à la stabilisation exponentielle, on utilise le fait qu'un semi-groupe est exponentiellement stable si, et seulement si, son type est strictement négatif. On montrera que les valeurs propres de $\mathcal{C}_0$ sont aussi proches que l'on veut de l'axe imaginaire. On considère l'opérateur $\mathcal{C}_0$ comme une perturbation de l'opérateur $\mathcal{C}$ défini sur le domaine $\left\{D(\mathcal{C}) = (v,z) \in V \times V : \ \Delta v \in L^2(\Omega) \ et \ \partial_v v - \Delta_{\mathrm{T}} v = 0 \ dans \ H^{-1}(\Gamma_1)\right\}$ par : $\mathcal{C}(v,z) = (z, \Delta v)$. On montre ensuite que $\mathcal{C}$ possède une famille de valeurs propres, imaginaires pures et solutions de l'équation : $e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = \left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\left(\lambda - \sqrt{2}\right)^{-1}\right.$ et que $\mathcal{C}_0$ possède une famille de valeurs propres, solutions de l'équation : $e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = \left(\lambda + \sqrt{2} - 2\right)\left(\lambda - \sqrt{2} - 2\right)^{-1}$. A l'aide du Théorème de Rouché, on montre que les valeurs propres de $\mathcal{C}_0$ sont aussi proches que l'on veut des valeurs propres de $\mathcal{C}$. Ce qui montre que les valeurs propres de $\mathcal{C}_0$ (à parties réelles négatives) sont aussi proches que l'on veut de l'axe imaginaire pur et par conséquant le semi-groupe engendré par $\mathcal{C}_0$ sur $V \times L^2(\Omega)$ n'est pas exponentiellement stable.

III. Problème de Ventcel avec contrôle interne

Ω désigne un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et V est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions $v \in H^1(\Omega)$ telles que $v_{|\Gamma} \in H^1(\Gamma)$. On munit l'espace V du produit scalaire $(u,v) \longrightarrow \langle u,v\rangle_V = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int\limits_{\Gamma_1} (\nabla_{\mathrm{T}} u \nabla_{\mathrm{T}} v + uv)\, d\Gamma$.

Dans le chapitre III, on introduit le contrôle interne u' et on étudie le problème

$$\mathcal{P}_1 : \left\{\begin{array}{cc} u'' - \Delta u + u' = 0 & dans \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu u - \Delta_{\mathrm{T}} u + u + u' = 0 & sur \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u^0 \quad et \quad u'(0) = u^1 & dans \quad \Omega \end{array}\right\}$$

On le formule sous forme de problème de Cauchy en considérant l'opérateur linéaire $\mathcal{C}_1$ défini sur le domaine $D(\mathcal{C}_1) = \left\{(v,z) \in V \times V : \Delta v \in L^2(\Omega) \ et \ \partial_v v - \Delta_{\mathrm{T}} v + u + z = 0 \ dans \ L^2(\Gamma)\right\}$

par : $(v,z) \longmapsto \mathcal{C}_1(v,z) = (z, \Delta v - z)$ et on montre qu'il est m-dissipatif. On sait alors d'après le Théorème de Hille-Yosida que $\mathcal{P}_1$ admet une solution unique $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)$ qui dépend continûment de la condition initiale. Ces propriétés suffiront en appliquant le Principe d'invariance de LaSalle pour montrer la stabilité forte c'est à dire :

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$$

Pour la Stabilisation exponentielle, on prend la fonction $\Phi : (\mathbb{R}_+ \times D(\mathcal{C}_1))^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\Phi(u(t), u'(t)) = \int_\Omega u(t)u'(t)dx + \frac{1}{2} \int_\Gamma |u(t)|^2 \, d\Gamma$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ on posera $E_\varepsilon(u,t) = E(u,t) + \varepsilon\Phi(u(t), u'(t))$. Puis on montre qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour un certain $\varepsilon > 0$ on ait : $|E_\varepsilon(u,t) - E(u,t)| \leq \varepsilon\alpha_1 E(u,t)$ *pour tout* $t \geq 0$. On montre ensuite que :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u,t) + \frac{dE_\varepsilon(u,t)}{dt} \leq 0 \qquad \forall t \geq 0$$

Et ceci permettra d'établir la stabilité exponentielle.

IV. Problème de Ventcel avec contrôle interne convectif

Dans le chapitre IV, Ω est un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière est $\mathcal{C}^2$ et $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ est une partition de la frontière Γ telle que $mes(\Gamma_0) > 0$ et $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing$. On désigne par V le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions $v \in H^1(\Omega)$ telles que $v_{|\Gamma_0} = 0$ et $v_{|\Gamma_1} \in H^1(\Gamma)$ qu'on munit du produit scalaire $\langle u, v \rangle_V = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} (\nabla_{\mathrm{T}} u \nabla_{\mathrm{T}} v) \, d\Gamma_1$. On s'intéresse à un problème de Ventcel avec contrôle interne dit convectif. On introduit le terme $d.\nabla u'$ qui désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ d'une fonction $d \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et du champ gradient $\nabla u'$. On suppose que d vérifie les conditions :

$$\mathcal{H}_1 : \ -div(d) > C_0 > 0 \; dans \;\; \Omega \quad et \quad \mathcal{H}_2 : \ d.\nu \geq -2 \;\; sur \quad \Gamma_1$$

où $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ est la normale unitaire extérieure à Ω en $x \in \partial\Omega$ et on se propose d'étudier le problème $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{P}_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} u'' - \Delta u = -d.\nabla u' & dans \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ & (4.0.1) \\ u = 0 & sur \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ & (4.0.2) \\ \partial_\nu u - \Delta_{\mathrm{T}} u + u' = 0 & sur \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ & (4.0.3) \\ u(0) = u^0 \quad et \quad u'(0) = u^1 & dans \quad \Omega & (4.0.4) \end{array} \right\}$$

On démontre qu'on obtient avec le feedback interne $d.\nabla u'$ une stabilisation forte et qu'en introduisant la fonction : $\Phi(u(t), u'(t)) = \int\limits_{\Omega} [u(t)(d.\nabla u(t)) + u(t)u'(t)] \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma_1} |u|^2 \, d\Gamma_1$ on obtient une décroisance exponentielle de l'énérgie en utilisant une démarche analogue à celle adoptée dans le chapitre III.

Conclusion :

Finalement, le feedback naturel est insuffisant pour assurer une décroissance exponentielle de l'énergie même s'il permet, au moins dans l'exemple étudié, une stabilisation forte de l'équation des ondes. L'étude d'un premier problème de Ventcel montre qu'on peut obtenir une stabilisation exponentielle par un contrôle interne. Et l'étude d'un second problème montre qu'on peut aussi obtenir une stabilisation exponentielle avec un contrôle interne convectif.

Bibliography

[1] **M. Berger B.Gostiaux.** Géométrie différentielle. Variétés, courbes et surfaces**.** PUF

[2] **N. Boccara,** Analyse fonctionnelle (une introduction pour physiciens). Ellipses. 1984.

[3] **H. Brezis,** Analyse fonctionnelle. (Théorie et applications). Masson, Paris New, York, Barcelone, Milan, Sao Paulo, 1983.

[4] **H. Cartan,** Cours de calcul différentiel. Hermann. Paris.

[5] **J. Dieudonné,** Eléments d'analyse. Tome III. Cahiers scientifiques - Fascicule XXXIII. Publiés sous la direction de Gaston Julia. Gauthiers-Villars. Paris 1978.

[6] **A. Haraux,** Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Masson. Paris, Milan, Barcelone, Bonn. 1991

[7] **A. Heminna,** Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel, C.R.Acad. Sci. Paris, 328, série I (1999). 1171-1174

[8] **A. Heminna**, Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de divers problèmes aux limites modélisant des jonctions de multi structures, thèse, U.S.T.H.B, Alger .2000

[9] **A. Heminna,** Stabilisation frontière de l'équation des ondes avec conditions de Ventcel. Revue Maghrébine de Mathématiques. Rev, Vol 11, No2, (2002) pp 165-196.

[10] **A. Khemmoudj,** Stabilisation de quelques Problèmes aux limites non linéaires. Thèse, USTHB, Alger 2007

[11] **Vo-Khac Khoan,** Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles. Tome I. Vuibert. Paris 1972

[12] **Vo-Khac Khoan,** Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles. Tome II. Vuibert. Paris 1972.

[13] **K. Lembrabet**, Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers. Thèse, USTHB, Alger. 1987.

[14] **J.L. Lions - E. Magenes**, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. volume I. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1972.

[15] **P.A. RAVIART - J.M. THOMAS,** Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivée Partielles. Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo, 1983.

[16] **W. Rudin,** Analyese réelle et complexe. Masson. 1978

[17] **S. Saks - A. Zygmund,** Fonctions analytiques. Masson. Paris. 1970.

[18] **L. Schwartz,** Théorie des distributions. Hermann. 1966

[19] **Riesz-Nagy,** Leçons d'Analyse fonctionnelle. Budapest.Akad. Kiado. 1952