

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTE DE MATHEMATIQUES



# Mémoire

présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Spécialité : **Analyse**  
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par

**OUBAGHA Hamid**

**CONTROLABILITE ET STABILISATION DE L'EQUATION DES ONDES AVEC DES CONDITIONS AU BORD DE VENTCEL**

Soutenu publiquement le 20 / 01 / 2010 devant le jury composé de :

<b>M.</b>	<b>D.E TENIOU</b>	Professeur à l' USTHB	Président
<b>M.</b>	<b>A. HEMINNA</b>	Professeur à l'USTHB	Directeur de mémoire
<b>Melle</b>	<b>O. ZAIR</b>	Maître de Conférence à l'USTHB	Examineur
<b>M.</b>	<b>A. KHEMMOUDJ</b>	Maître de Conférence à l'USTHB	Examineur
<b>M.</b>	<b>M. MEDJDEN</b>	Maître de Conférence à l'USTHB	Examineur

CONTROLABILITE ET STABILISATION DE L'EQUATION DES  
ONDES AVEC DES CONDITIONS AU BORD DE VENTCEL

**Hamid OUBAGHA**

# TABLE DES MATIERES

Remerciements	2
Notations	3
<b>0. Introduction</b>	5
<b>0.1 Préambule</b>	5
<b>0.2 Notion de Stabilisation</b>	6
<b>0.3 Stabilisation de l'équation des ondes</b>	6
0.3.1 – Stabilisation interne	7
0.3.2 – Stabilisation frontière	7
0.3.3 – Stabilisation forte	8
0.3.4 – Stabilisation exponentielle	8
<b>0.4 Equation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel</b>	8
0.4.1 – Insuffisance du feedback naturel	9
0.4.2 – Problème de Ventcel avec contrôle interne	10
0.4.3 – Problème de Ventcel avec contrôle interne convectif	11
<b>I. Rappels</b>	13
<b>I.1 Quelques rappels d'Analyse Fonctionnelle</b>	14
I.1.1 – Espaces de Lebesgues	14
I.1.2 – Notions de base sur les distributions	15
I.1.3 – Opérateurs sur un espace de Hilbert	20
I.1.4 – Espaces de Hilbert intermédiaires	30
I.1.5 – Distributions à valeurs dans un espace de Hilbert	33
I.1.6 – Une introduction aux espaces de Sobolev	37
<b>I.2 Espaces de Sobolev</b>	39
I.2.1 – Espaces de Sobolev d'ordre entier	39
I.2.2 – Espaces de Sobolev d'ordre réel	41
I.2.3 – Espaces de Sobolev d'ordre réel sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$	45
I.2.4 – Espaces de Sobolev sur le bord d'un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$	46
<b>I.3 Principe d'Invariance de LaSalle</b>	56
I.3.1 – Introduction	56
I.3.2 - Principe d'invariance de LaSalle	58
<b>I.4 Eléments de géométrie différentielle</b>	63
<u>I.4.1 – Quelques généralités</u>	63
- Paramétrisation d'une hypersurface	65
- Espaces tangents et vecteurs tangents à une courbe	66
- Espaces tangents et vecteurs tangents à une surface	66
- Vecteurs unitaires tangents à une surface	67
- Normale unitaire extérieure à un ouvert en un point du bord	67
<u>I.4.2 – Calcul différentiel sur une hypersurface</u>	68
- Champ tangentiel de vecteurs sur les hypersurfaces	69
- Champ normal de vecteurs sur une hypersurface	70
- Composante tangentielle et composante normale d'un champ	71
- Composante tangentielle du champ gradient	73
- Dérivées tangentielles et dérivée normale	74
- Laplacien d'une fonction de classe $C^2$	78
<u>I.4.3 – Espaces fonctionnels et intégration sur une hypersurface</u>	79
- Espaces de Lebesgues sur une hypersurface	79
- Espaces de Sobolev sur une hypersurface	80

## TABLE DES MATIERES

<b>II. Insuffisance du feedback naturel</b>	<b>81</b>
<b>II.1 Introduction au Problème <math>P_0</math></b>	<b>81</b>
- L'opérateur $C_0$ et son domaine	88
<b>II.2 Existence, unicité et régularité des solutions du Problème <math>P_0</math></b>	<b>92</b>
- Théorème 2.1 : Existence, unicité et régularité des solutions.	93
<b>II.3 Stabilisation forte</b>	<b>97</b>
- Théorème 2.2 : de stabilité forte	99
<b>II.4 Stabilisation exponentielle</b>	<b>102</b>
- Etude spectrale de l'opérateur $C_0$	102
- Etude spectrale de l'opérateur $C$	107
- Equation aux valeurs propres de $C$	107
- Equation aux valeurs propres de $C_0$	117
- Théorème 2.3	119
<b>III. Problème de Ventcel avec contrôle interne</b>	<b>127</b>
<b>III.1 Introduction au Problème <math>P_1</math></b>	<b>127</b>
- L'opérateur $C_1$ et son domaine.	129
<b>III.2 Existence, unicité et régularité des solutions du Problème <math>P_1</math></b>	<b>140</b>
- Théorème 3.1 : Existence et unicité	140
- La solution forte du Problème $P_1$	141
- Régularité de la solution forte	142
- Continuité de la solution forte relativement à la norme de $H^2(\ )$	142
- Estimation de la norme de la solution forte	143
- La solution faible du Problème $P_1$	144
<b>III.3 Stabilisation forte</b>	<b>145</b>
- Théorème 3.2 : de la stabilité forte	147
<b>III.4 Stabilisation exponentielle</b>	<b>150</b>
- Théorème 3.3 : de stabilité exponentielle	155
<b>IV. Problème de Ventcel avec contrôle interne convectif</b>	<b>157</b>
<b>IV.1 Introduction</b>	<b>157</b>
- L'opérateur $C_2$ et son domaine.	159
<b>IV.2 Existence, unicité et régularité des solutions du Problème <math>P_2</math></b>	<b>168</b>
- Théorème 4.1 : Existence, unicité et régularité de la solution.	168
<b>IV.3 Stabilisation forte du Problème <math>P_2</math></b>	<b>172</b>
- Théorème 4.2 : Stabilité forte	174
<b>IV.4 Stabilisation exponentielle du Problème <math>P_2</math></b>	<b>176</b>
- Théorème 4.3 : Stabilité exponentielle.	180
<b>Conclusion</b>	<b>181</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>182</b>

*Je dédie ce travail :*

*à la mémoire de mon père,  
à la mémoire de ma belle-mère.*

*Je le dédie aussi :  
à ma mère et à ma femme  
à mes enfants*

Remerciements :

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur A. Heminna, sans qui je n'aurais pas pu accomplir ce travail, pour avoir été mon directeur de thèse ce qui m'a honoré. Je lui exprime ici toute ma gratitude pour sa constante et bienveillante disponibilité, pour m'avoir orienté, soutenu et beaucoup aidé dans ce travail. Je lui suis sincèrement reconnaissant.

Je remercie particulièrement Monsieur D.E Teniou pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie également Mademoiselle O. Zair pour avoir accepté d'examiner ce travail et pour m'avoir honoré par sa participation au jury.

Je tiens aussi à remercier Mr A. Khemmoudj qui a accepté d'examiner ce travail et qui a m'a fait l'honneur d'être membre du jury

Mes remerciements vont également à Monsieur M. Medjden pour m'avoir honoré en acceptant d'être membre du jury mais aussi pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Que tous ceux qui m'ont aidé et soutenu d'une façon ou d'une autre puissent trouver dans ces lignes, en dépit de l'anonymat, l'expression de ma sincère reconnaissance.

## Table des notations :

$x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  : point générique de  $\mathbb{R}^n$ .

$x_i$  :  $i$ -ème coordonnée cartésienne de  $x$  ou  $i$ -ème composante de la variable  $x$ .

$\Omega$  : désigne en général un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

$\partial\Omega$  : Bord de l'ouvert  $\Omega$ .

$dx$  : Mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

$d\Gamma$  : Mesure superficielle sur l'hypersurface  $\Gamma$ .

$$L^p(\Omega) = \left\{ \tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \tilde{f} \text{ mesurable et } \left[ \int_{\Omega} |\tilde{f}(x)|^p \cdot dx \right]^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

$\mathcal{D}(\Omega)$  : Ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  à support compact dans  $\Omega$ .

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{f|_{\Omega} \text{ avec } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$$

$\frac{\partial}{\partial x_i}$  : Dérivée partielle par rapport à la  $i$ -ème composante de la variable  $x$ .

$\frac{\partial}{\partial v}$  : Dérivée suivant la direction d'un vecteur  $v$ .

$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$  : Gradient.

$\Delta$  : Laplacien.

$\partial_\nu$  : Dérivée normale.

$\nabla_T$  : Gradient tangentiel.

$\Delta_T$  : Laplacien tangentiel.

$H^s(\Omega)$  : Espace de Sobolev d'ordre  $s \in \mathbb{R}$  sur  $L^2(\Omega)$ .

$H_0^s(\Omega)$  : Fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^s(\Omega)$ .

$H^{-s}(\Omega)$  : Espace dual de  $H_0^s(\Omega)$ .

$H^1(\Delta, \Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ telles que } \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ .





## Introduction

### 0.1 - Préambule

Dans cette thèse, on s'intéresse à la contrôlabilité et à la stabilisation de l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel. Les problèmes de Ventcel servent à modéliser bon nombre de phénomènes physiques comme les processus de diffusion et la propagation d'ondes mais aussi des problèmes de mécanique comme l'élasticité. Les conditions au bord de Ventcel se caractérisent par la présence d'opérateurs tangentiels de même ordre que l'opérateur principal et sont justifiées par des méthodes asymptotiques comme, par exemple, dans [13]. C'est Ventcel qui, pour modéliser les processus de diffusion, a introduit la condition au bord :

$$\partial_\nu u - \Delta_T u = g \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega$$

pour l'équation :

$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega$$

qui modélise l'échange thermique du corps avec le milieu ambiant en présence d'une pellicule très mince et de conductibilité thermique très grande sur la surface du corps. Dans l'étude de certains problèmes, qui modélisent des phénomènes physiques ou mécaniques, ces conditions au bord dites de Ventcel ont une grande importance. Ces problèmes sont alors appelés "Problèmes de Ventcel".

## 0.2 - La notion de stabilisation

De façon générale, lorsqu'une dynamique évoluant dans le temps est régie par une équation de la forme :

$$\frac{du}{dt} = Au$$

où  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow H$  est une fonction de la variable  $t$  (représentant le temps) à valeurs dans un espace de Hilbert  $H$  et  $A$  un opérateur de domaine  $D(A)$  dans  $H$  et quand on note  $E(u)(t)$  l'énergie associée, la problématique de la stabilisation consiste à trouver des fonctions  $F$  qui feront tendre l'énergie  $E(u, t)$  des solutions de l'équation :

$$\frac{du}{dt} = Au + F(u)$$

vers zéro quand le temps tend vers l'infini. On dira dans ce cas que la fonction  $F$  assure une stabilisation du système. En introduisant la fonction  $F$  on exerce un contrôle qui assure une décroissance vers zéro de l'énergie. La fonction  $F$  est alors appelé un **contrôle** puisqu'il permet de contrôler l'issue de l'énergie dans le temps. On distinguera différentes stabilisations : stabilisation interne ou frontière, stabilisation forte ou exponentielle, etc...

## 0.3 - Stabilisation de l'équation des ondes

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $\nu$  la normale unitaire à  $\Gamma$  extérieure à  $\Omega$  et  $\partial_\nu$  l'opérateur de dérivation dans la direction normale. On considère pour  $(u^0, u^1)$  appartenant à des espaces convenables, le problème de l'équation des ondes suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \left( \begin{array}{l} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} u^0 \\ u^1 \end{array} \right) & \text{dans } \Omega \end{array} \right\} \quad (0.3.1)$$

### 0.3.1 - Stabilisation interne

La stabilisation interne consiste à trouver un contrôle  $F : V \times W \longrightarrow K$  (où  $V, W$  et  $K$  sont des espaces fonctionnels) tel que l'énergie associée à la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(t) - \Delta u(t) + F(u, u')(t) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \left( \begin{array}{l} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} u^0 \\ u^1 \end{array} \right) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right\} \quad (0.3.2)$$

décroisse vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini. Le contrôle  $w = F(u, u')$  est alors dit **interne**.

### 0.3.2 - Stabilisation frontière

Soit  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  une partition de la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$ . On considère pour  $(u^0, u^1)$  appartenant à un espace fonctionnel convenable, le problème de l'équation des ondes suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \left( \begin{array}{l} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} u^0 \\ u^1 \end{array} \right) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right\} \quad (0.3.1)$$

La stabilisation frontière du problème (0.3.1) consiste à se donner un opérateur appelé **contrôle frontière**  $G : V_{\partial\Omega} \times W_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) (où  $V_{\partial\Omega}$  et  $W_{\partial\Omega}$  sont des espaces fonctionnels) tel que l'énergie associée à la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu u = G(u, u') \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1 \\ \left( \begin{array}{l} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} u^0 \\ u^1 \end{array} \right) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right\} \quad (0.3.3)$$

décroisse vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini.

**Remarque** : Le contrôle  $F(u, u')$  qui dépend de la fonction d'état s'appelle **feedback** ou encore **retroaction**.

### 0.3.3 - Stabilisation forte

On parle de stabilisation forte lorsque quelle que soit la condition initiale  $(u^0, u^1)$

on a :  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(u, t) = 0$ .

### 0.3.4 - Stabilisation exponentielle :

La stabilisation est dite exponentielle lorsqu'il existe deux constantes positives  $C$  et  $\omega$  telles que l'énergie  $E(u, t)$  du système (0.3.1) vérifie l'inégalité :

$$E(u, t) \leq C.e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0$$

## 0.4 - Equation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel

On se place dans les hypothèses suivantes :  $\Omega$  étant un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \{2, 3\}$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , ( $k \geq 2$ ) au moins par morceaux.

On note par  $\nu$  la normale unitaire à  $\Gamma$  extérieure à  $\Omega$  et  $\partial_\nu$  l'opérateur de dérivation dans la direction normale. On cherche à stabiliser, par un contrôle frontière noté  $G$  et / ou un contrôle interne  $F$ , l'énergie associée à la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + F(u, u') = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u = G(u, u') & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1 \\ \begin{pmatrix} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & \text{dans } \Omega \end{array} \right\} \quad (0.4.1)$$

où  $\Delta_\Gamma$  désigne le Laplacien tangentiel sur  $\Gamma$  et le couple  $(u^0, u^1)$  qui décrit les conditions initiales du problème appartient à un espace fonctionnel convenable  $H$ . Pour établir la stabilité forte, on cherchera à montrer que la solution  $u$  du problème (0.4.1) vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_H = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in H$$

Pour la stabilisation exponentielle, il s'agira de montrer qu'il existe deux constantes  $M > 0$  et  $\omega > 0$  telles que :

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_H \leq M \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_H e^{-\omega t} \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall (u^0, u^1) \in H$$

Dans le cadre de l'étude de la contrôlabilité et de la stabilisation de l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel, nous avons étudié les trois problèmes suivants

#### 0.4.1 - Insuffisance du feedback naturel

Dans le chapitre II de ce mémoire, nous avons repris un exemple étudié par A. HEMINNA dans [9] où l'on montre que dans un domaine polygonal plan  $\Omega$  on peut obtenir sans contrôle interne une stabilisation forte de l'équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \begin{pmatrix} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right\}$$

avec la condition au bord de Ventcel :  $\partial_\nu u - \Delta_{\Gamma} u + u' = 0$  dans  $\mathbb{R}_+ \times \Gamma_1$  mais qu'en revanche, le feedback naturel  $u'$  ne suffit pas pour obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie. Dans le chapitre II où  $\Omega = ]0, \pi[ \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  une partition de  $\partial\Omega$  avec  $mes(\Gamma_0) > 0$  et  $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}$ , on démontre que la solution  $u$  du problème

$$\mathcal{P}_0 : \left\{ \begin{array}{l} u'' - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma} u + u' = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right\}$$

vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$$

Pour la stabilisation exponentielle, on écrit  $\mathcal{P}_0$  sous forme de problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} (t) &= \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0 \\ \begin{pmatrix} v(0) \\ z(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}_0$  est l'opérateur m-disipatif sur  $V \times L^2(\Omega)$  défini sur le domaine :

$$\{D(\mathcal{C}_0) = (v, z) \in V \times V \text{ tels que : } \Delta v \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_\nu v - \Delta_\Gamma v + z = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Gamma_1)\}$$

par :

$$\mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_0)$$

et on démontre à l'issue d'une étude spectrale que le semi-groupe engendré par  $\mathcal{C}_0$  n'est pas exponentiellement stable.

## 2. Problème de Ventcel avec contrôle interne

Soient  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $V$  le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  des fonctions  $v \in H^1(\Omega)$  telles  $v|_\Gamma \in H^1(\Gamma)$ . Le problème de Ventcel étudié dans le chapitre III consiste à introduire le contrôle interne  $u' : [0, +\infty[ \rightarrow V$  dans l'étude de l'équation des ondes avec la condition au bord de ventcel :

$$\partial_\nu u - \Delta_\Gamma u + u + u' = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma$$

On munit l'espace  $V$  du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  qu'on définit par :

$$\langle u, v \rangle_V = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} (\nabla_\Gamma u \nabla_\Gamma v + uv) d\Gamma_1 \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

On montre, et c'est l'objet du chapitre III, que le contrôle interne introduit assure, non seulement une stabilisation forte mais aussi une stabilisation exponentielle du problème.

On prouvera à cet effet que la solution  $u$  du problème :

$$\mathcal{P}_1 : \left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + u' = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u + u + u' = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u^0 \text{ et } u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{array} \right\}$$

vérifie pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$$

et pour  $M_1 > 0$  et  $\omega_1 > 0$  convenablement choisis :

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq M_1 e^{-\omega_1 t} \quad \forall t \geq 0$$

### 3. Problème de Ventcel avec contrôle interne convectif

Soient  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  une partition de  $\Gamma$  telle que  $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$  et  $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$  et  $V$  le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  défini par :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}$$

Dans le chapitre IV, on étudie un problème de Ventcel avec contrôle interne convectif. On introduit le terme  $d \cdot \nabla u'$  qui désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$  d'une fonction  $d \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  et du champ gradient  $\nabla u'$ . En imposant à  $d$  les conditions :

$$\mathcal{H}_1 : -\text{div}(d) > C_0 > 0 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_2 : d \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

où  $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  en  $x \in \partial\Omega$ , on démontre qu'on obtient avec le contrôle interne  $d.\nabla u'$  une stabilisation forte et une décroissance exponentielle de l'énergie. On prouvera pour cela que la solution  $u$  du problème

$$\mathcal{P}_2 : \left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + d.\nabla u' = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma} u + u' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u^0 \text{ et } u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

vérifie pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{et} \quad \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq M_1 e^{-\omega_1 t} \quad \forall t \geq 0$$

où  $M_1 > 0$  et  $\omega_1 > 0$  sont des constantes indépendantes des conditions initiales.

---

Avant d'aborder ces problèmes, nous avons pris le soin de consacrer le premier chapitre de ce mémoire aux rappels des notions fondamentales d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle indispensables à la compréhension des énoncés et des démonstrations.



## Chapitre I : Rappels

Dans ce premier chapitre consacré aux rappels, nous avons regroupé et exposé les notions fondamentales d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle nécessaires à la compréhension des énoncés et des démonstrations des problèmes qui forment le thème de ce mémoire. Nous y avons inséré pour cela l'ensemble des outils mathématiques nécessaires. Sans reprendre généralement les démonstrations de ces résultats, nous nous sommes contentés de renvoyer le lecteur à des références bibliographiques qu'il pourra consulter pour plus d'explications et preuves détaillées. Le chapitre comporte quatre parties. La première est consacrée aux rappels d'analyse fonctionnelle. Dans la seconde, que nous avons consacré aux espaces de Sobolev, nous avons évoqué les espaces de Hilbert intermédiaires et la transformation de Fourier, pour montrer comment on peut donner un sens aux espaces de Sobolev d'ordre réel sur  $\mathbb{R}^n$ , sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et sur le bord d'un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Nous avons repris l'essentiel des résultats relatifs aux espaces de Sobolev importants pour l'étude des problèmes envisagés. Nous avons rappelé dans la troisième partie le principe d'invariance de LaSalle en exposant au préalable les notions nécessaires à son énoncé. Nous avons enfin consacré une dernière partie aux notions fondamentales de géométrie différentielle dont la connaissance est incontournable pour les problèmes que nous traiterons.

## I.1 - Quelques rappels d'Analyse fonctionnelle

### I.1.1 - Espaces de Lebesgue

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ . On désignera par  $L^1(\Omega)$  l'ensemble des (classes de) fonctions intégrables sur  $\Omega$ . A une fonction  $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$  s'identifient toutes les fonctions égales à  $\tilde{f}$  presque partout sur  $\Omega$ . On pose, pour tout  $p \in [1, +\infty[$  :

$$L^p(\Omega) = \left\{ \tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \tilde{f} \text{ mesurable et } \left[ \int_{\Omega} |\tilde{f}(x)|^p \cdot dx \right]^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

On notera par  $L^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur  $\Omega$  :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$$

#### **Proposition 1.1 :**

Pour tout entier  $p \geq 1$ , l'application de  $L^p(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par :

$$f \mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p \cdot dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur  $L^p(\Omega)$  et pour laquelle  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach. Et l'espace  $L^\infty(\Omega)$

est un espace de Banach pour la norme  $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$  définie de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f \mapsto \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{Inf } \{ C > 0, |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \} = \text{Supess } |f|_{\Omega}$$

**Preuve :** Voir la preuve dans [3] de H.BREZIS.

#### **Théorème 1.1 : ( Inégalité de Hölder ) :**

Si  $(p, q) \in [1, +\infty[ \times [1, +\infty[$  sont deux nombres tels que :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , Alors :

$$f \cdot g \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) \cdot dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall (f, g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$$

**Preuve :** Voir la preuve dans [3] de H.BREZIS.

**Théorème 1.2 : Représentation de l'espace  $(L^p(\Omega))'$  dual de  $L^p(\Omega)$  :**

Soient  $p$  et  $q$  deux réels supérieurs à 1 tels que :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $\varphi \in (L^p(\Omega))'$  où  $(L^p(\Omega))'$  désigne l'espace dual au sens topologique de l'espace de Banach  $(L^p(\Omega))$ . Alors il existe une seule classe  $\tilde{u} \in L^q(\Omega)$  telle que :

$$\varphi(f) = \int_{\Omega} \tilde{u}(x)f(x)dx \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

**Preuve :** Le théorème est prouvé dans [3] de H.BREZIS en page 61.

I.1.2 - Notions de base sur les distributions

On appelle support d'une fonction  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  le plus petit fermé  $K_{\varphi} \subset \Omega$  en dehors duquel la fonction  $\varphi$  est nulle presque partout. Une fonction  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite à support compact dans  $\Omega$  si son support est un compact contenu dans  $\Omega$ . On notera par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions  $\varphi$  définies et indéfiniment dérivables sur  $\Omega$  et à support compact contenu dans  $\Omega$ . On désigne par  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  l'espace des restrictions à  $\bar{\Omega}$  des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . La longueur d'un multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  est l'entier noté  $|\alpha|$  et défini par :  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_i + \dots + \alpha_n$ . Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on définit l'opérateur de dérivation  $\partial^{\alpha} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  par :

$$\varphi \rightarrow \partial^{\alpha}\varphi = \left( \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \right) \dots \left( \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right) \dots \left( \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) (\varphi) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_i^{\alpha_i} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (1.2.0)$$

**Proposition 1.2 :**

$\forall p \geq 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$ .

**Preuve :** Vo-KHAC KHOAN en donne une démonstration dans [11] en page 148.

**Définition 1.1 : Convergence dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  :**

On dit qu'une suite  $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  converge vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  s'il existe un compact  $K$  contenu dans  $\Omega$  tel que :

$$i) \quad \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$ii) \quad \partial^\alpha(\varphi_n) \text{ converge uniformément vers } \partial^\alpha\varphi, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

**Définition 1.2 : Espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$  :**

On appelle espace des distributions sur  $\Omega$ , l'ensemble  $\mathcal{D}'(\Omega)$  des applications linéaires  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour toute suite  $\{\varphi_j, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ , on a :

$$(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \longrightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \implies T(\varphi_j) \rightarrow T(\varphi) \text{ dans } \mathbb{R}$$

On notera  $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$  la dualité entre  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Et on dira, que deux distributions  $T_1$  et  $T_2$  sur  $\Omega$  sont égales si elles le sont en tant qu'applications de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Remarque 1.1 :** Les distributions généralisent la notion de fonction puisque à toute classe de fonctions  $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$  on peut associer de façon canonique et biunivoque une distribution notée  $T_{\tilde{f}}$  et définie par :

$$\langle T_{\tilde{f}}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle T_{\tilde{f}}, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \forall f = \tilde{f} \text{ p.p sur } \Omega$$

On dira qu'une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  appartient à  $L^2(\Omega)$  s'il existe une classe de fonctions  $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$  telle que :

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Définition 1.3 : Convergence dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  :**

On dit qu'une suite de distributions  $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  converge vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle T_n, \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = 0$$

**Remarque 1.2 :** D'après le théorème 1.2, on peut identifier  $L^2(\Omega)$  à son dual. Comme  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ , on obtient les inclusions :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

**Définition 1.4 : Dérivation dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  :**

Pour toute distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on définit pour tout indice  $i \in \{1, \dots, n\}$  l'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

Et en général, pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on définit l'opérateur de dérivation  $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  par :  $\varphi \mapsto \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  i.e :

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_i^{\alpha_i} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Définition 1.5 : Continuité dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  :**

On dit qu'une application linéaire  $\mathcal{A} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  est continue si pour toute suite de distributions  $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  l'implication suivante est vérifiée :

$$T_n \text{ converge dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ vers } T \implies \mathcal{A}(T_n) \text{ converge dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ vers } \mathcal{A}(T)$$

**Proposition 1.3 :**

Pour toute distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  l'opérateur de dérivation  $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  est continu au sens de la définition 1.5 et

$$\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

**Preuve :** Voir en page 183 dans [11] de Vo-Khac Khoan.

**Définition 1.6 :** (de l'Espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\mathbb{R}^n$  à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées) :

Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose :  $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_j^{\alpha_j}, \dots, x_n^{\alpha_n})$ . Et on définit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \text{ tel que : } x^\alpha \cdot D^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$$

On dira qu'une suite  $\{\varphi_m, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et si la suite  $\{x^\alpha D^\beta(\varphi_m), m \in \mathbb{N}\}$  converge uniformément dans  $\mathbb{R}^n$  vers  $x^\alpha D^\beta(\varphi)$  pour tout couple de multi-indice  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ . C'est à dire :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta(\varphi_m) - x^\alpha D^\beta(\varphi) \right| \right) = 0, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$$

**Proposition 1.4 : Densité de L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .**

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est un sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  partout dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . C'est à dire que pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toute fonction  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  il existe une suite  $\{\varphi_m, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta(\varphi_m) - x^\alpha D^\beta u \right| \right) = 0$$

**Preuve :** Voir en page 7 dans [12] de Vo-Khac Khoan.

**Définition 1.7 : L'espace  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^n$ .**

On appelle espace des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^n$  l'espace noté  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  des formes linéaires  $T$  continues sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  pour la topologie induite par celle de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Conséquence :** Si  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , est tempérée, la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  montre que  $T$  se prolonge de façon unique en un élément du dual  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Autrement dit,  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  si, et seulement si la suite  $\{T\varphi_m, m \in \mathbb{N}\}$  converge vers  $T(\varphi)$  pour toute suite  $\{\varphi_m, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  au sens de la définition 1.6 i.e :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(\varphi_m) - x^\alpha D^\beta(\varphi)| \right) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \implies \lim_{m \rightarrow \infty} |T(\varphi_m) - T(\varphi)| = 0$$

**Définition 1.8 : Transformée de Fourier d'une fonction.**

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . On notera, pour tout  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  par  $x.\xi$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$  défini par :  $x.\xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$  la fonction notée  $\mathcal{F}(f)$  (ou encore  $\widehat{f}$ ) :  $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\xi \longmapsto \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x).e^{-i\xi x}.dx$$

Et on appelle co-transformation de Fourier de  $f$  la fonction  $\overline{\mathcal{F}}(f) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\xi \longmapsto \overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x).e^{i\xi.x} dx$$

**Définition 1.9 : Transformée de Fourier d'une distribution tempérée.**

On remarquera d'abord que :  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  une distribution tempérée sur  $\mathbb{R}^n$ . On appelle transformation de Fourier de  $T$  la distribution notée  $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  définie par :

$$T \longrightarrow \widehat{T} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathbb{C} \\ \varphi \longmapsto \langle \widehat{T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} \end{array} \right\}$$

### I.1.3 - Opérateurs sur un espace de Hilbert

Dans ce paragraphe, on se contentera de rappeler quelques résultats importants concernant les opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert  $H$ . On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  le produit scalaire défini sur  $H$  et par  $\|\cdot\|_H$  la norme induite sur  $H$  par ce produit scalaire :

$$\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle_H} \quad \forall u \in H$$

Comme tout produit scalaire, elle vérifie l'**Inégalité de Cauchy-Schwarz**, c'est à dire :

$$|\langle u, v \rangle_H| \leq \|u\|_H \cdot \|v\|_H \quad \forall (u, v) \in H \times H$$

#### **Un exemple fondamental :**

L'espace  $L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire défini par  $\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \cdot \overline{g(x)} \cdot dx$  est un espace de Hilbert complexe dont la norme induite par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  est définie par

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2(\Omega)}} = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

#### **Définition 1.10 :**

Soit  $\mathcal{F} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert  $H$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est **continue** sur  $H$  s'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|\mathcal{F}(u, v)| \leq C \cdot \|u\|_H \cdot \|v\|_H \quad \forall (u, v) \in H \times H$$

Et on dira que  $\mathcal{F}$  est **coercive** s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :

$$|\mathcal{F}(v, v)| \geq \alpha \cdot \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H$$



**Théorème 1.3 : Théorème de représentation de Riesz-Fréchet.**

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $\varphi \in H'$  où  $H'$  désigne l'espace dual de  $H$ . Alors il existe  $f \in H$  unique tel que :

$$\langle \varphi, v \rangle_{H',H} = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H$$

**Preuve :** On trouvera une preuve dans [3] de H.BREZIS en page 81.

**Théorème 1.4 : Théorème de Lax-Milgram**

Soit  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors pour toute forme linéaire continue  $\varphi \in H'$  il existe un élément unique  $u \in H$  tel que :

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Et si, de plus, la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété :

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \text{Min}_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

**Preuve :** Le théorème de Lax Milgram est prouvé par H.BREZIS dans [3] en page 84.

**Définition 1.11 : Ensemble résolvant d'un opérateur linéaire non borné :**

Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe et  $A$  un opérateur linéaire non borné défini sur un domaine  $D(A) \subset H$ . Soient  $I$  l'identité dans  $H$  et  $R(A)$  l'ensemble des images  $\{Au, u \in D(A)\}$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , l'opérateur  $A - \lambda I$  est défini de  $D(A - \lambda I) = D(A)$  dans  $R(A - \lambda I) = \{Au - \lambda u, u \in D(A)\}$ . L'opérateur  $A - \lambda I : D(A) \longrightarrow R(A - \lambda I)$  est donc par construction surjectif. Lorsque  $A - \lambda I$  est de plus injective, son inverse  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe. On appelle ensemble résolvant de l'opérateur  $A$ , l'ensemble noté  $\rho(A)$  des nombres complexes  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe, est bornée et est à domaine dense dans  $H$ . Si

$\lambda \in \rho(A)$  l'opérateur  $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$  est appelé résolvante de l'opérateur  $A$ .

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que : } \begin{array}{l} i) \quad A - \lambda I : D(A) \longrightarrow R(A - \lambda I) \text{ est injective} \\ ii) \quad \exists C > 0 \text{ tel que : } \|v\|_H \leq c \|Av - \lambda v\|_H \quad \forall v \in D(A) \\ iii) \quad R(A - \lambda I) \text{ dense dans } H \end{array} \right\}$$

**Définition 1.12 : Spectre et valeurs propres d'un opérateur linéaire non borné.**

On appelle spectre de l'opérateur  $A$ , l'ensemble noté  $\sigma(A)$  et défini par :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$$

L'ensemble des valeurs  $\lambda \in \mathbb{C}$  vérifiant les condition i) et iii) de la définition 1.11 sans vérifier la condition ii) est appelé spectre continu de l'opérateur  $A$ . On le notera  $\sigma_c(A)$ .

L'ensemble des valeurs  $\lambda \in \mathbb{C}$  pour lesquelles  $R_\lambda(A)$  existe mais n'est pas à domaine dense est appelé spectre résiduel de l'opérateur  $A$  et on le notera :  $\sigma_r(A)$ . Lorsque l'opérateur  $A - \lambda I : D(A) \longrightarrow R(A - \lambda I)$  n'est pas injectif, on dira que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et on écrira  $\lambda \in \mathbf{VP}(A)$ . Il existe alors  $u \in D(A)$  tel que :  $u \neq 0$  et  $A(u) = \lambda u$ . Et on appellera espace propre associé à  $\lambda$ , l'espace défini par  $N(A - \lambda I) = \{u \in A \text{ tel que } Au - \lambda u = 0\}$ .

**Définition 1.13 : Opérateur compact :**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert. On dit qu'un opérateur linéaire borné  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est compact si l'image  $A(B_E)$  de la boule unité  $B_E = \{u \in E, \|u\|_E \leq 1\}$  est relativement compacte pour la topologie forte de l'espace  $F$ .

$$\overline{\{Au \in E, \|u\|_E \leq 1\}} \text{ compact dans } (F, \|\cdot\|_F)$$

**Proposition 1.5 : Critère de compacité des opérateurs bornés :**

Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est compact si, et seulement si, pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée dans  $E$ , la suite  $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite qui converge dans  $F$

**Preuve :** Voir [2] de N. BOCCARA en page 267.

**Proposition 1.6 : Une propriété spectrale des opérateur compacts :**

Soit  $A$  un opérateur compact sur un espace de Hilbert  $H$  de dimension infinie. Si le spectre  $\sigma(A)$  n'est pas un ensemble fini alors ses éléments non nuls forment une suite qui tend vers zéro. C'est à dire :

$$\text{Cardinal}(\sigma(A)) = \infty \implies \sigma(A) - \{0\} = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \lambda_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{C}$$

**Preuve :** Voir en page 95 la preuve de H. BREZIS dans [3].

**Définition 1.14 : Rayon spectral d'un opérateur borné :**

Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert  $H$ . On appelle rayon spectral de  $A$  le nombre fini noté  $r(A)$  et défini par :

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

**Définition 1.15 : Semi-groupes fortement continus sur un espace de Hilbert.**

On appelle semi-groupe fortement continu sur un espace de Hilbert  $H$ , toute famille à un paramètre positif,  $S(t)_{t \geq 0}$  d'opérateurs bornés sur  $H$  vérifiant :

$$1^\circ) \quad S(t) \in \mathcal{L}(H) \quad \forall t \geq 0$$

$$2^\circ) \quad S(t+s) = S(t) \circ S(s) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall s \geq 0$$

$$3^\circ) \quad S(0) = I_H$$

$$4^\circ) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)z - z\|_H = 0 \quad \forall z \in H$$

Et on appellera type du semi-groupe fortement continue  $S(t)_{t \geq 0}$ , le nombre fini :

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \text{Log} \|S(t)\|$$

**Définition 1.16 : Générateur infinitésimal d'un semi-groupe.**

Soit  $S(t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu sur un espace de Hilbert  $H$ . On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe  $S(t)_{t \geq 0}$  l'opérateur linéaire  $A$  défini par :

$$\begin{aligned} i) \quad D(A) &= \left\{ z \in H \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)z - z}{t} \text{ existe} \right\} \\ ii) \quad A(z) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)z - z}{t} \quad \forall z \in D(A) \end{aligned}$$

**Proposition 1.7 : Propriété d'un générateur infinitésimal.**

Le générateur infinitésimal  $A$  d'un semi-groupe fortement continu  $S(t)_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $H$  est un opérateur fermé à domaine dense dans  $H$  et qui vérifie pour tout  $z_0 \in D(A)$  :

$$S(t)z_0 \in D(A) \text{ et } \frac{d}{dt} S(t)(z_0) = AS(t)z_0 = S(t)Az_0 \quad \forall t \geq 0$$

**Preuve :** On se donne  $t \geq 0$  fixé. Pour tout  $s > 0$  on a :

$$\frac{S(s)S(t)z_0 - S(t)z_0}{t} = S(t) \frac{S(s)z_0 - z_0}{t}$$

Et par continuité on a :

$$S(t) \left( \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s)z_0 - z_0}{t} \right) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \left( S(t) \frac{S(s)z_0 - z_0}{t} \right)$$

Ce qui donne en vertu de la définition 1.16 :

$$S(t)z_0 \in D(A) \text{ et } AS(t)z_0 = S(t)Az_0 \quad \forall t \geq 0$$

Or par définition de semi-groupes on a aussi :

$$\frac{S(s)S(t)z_0 - S(t)z_0}{t} = \frac{S(t+s)z_0 - S(t)z_0}{t}$$

D'où :

$$\frac{d}{dt}S(t)(z_0) = AS(t)z_0 = S(t)Az_0 \quad \forall t \geq 0$$

**Proposition 1.8 :**

Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $S(t)_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $H$  et  $\omega_0$  le type du semi-groupe. Alors :

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0\} \subset \rho(A)$$

**Définition 1.17 : Semi-groupes de contractions.**

Un semi-groupe fortement continu  $S(t)_{t \geq 0}$  sur un espaces de Hilbert  $H$  est dit de contractions si :

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

**Définition 1.18 : Opérateur dissipatif.**

On dit qu'un opérateur non borné  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  sur un espace de Hilbert  $H$ , considéré comme espace de Banach, est dit dissipatif si :

$$\|u\|_H \leq \|(u - \lambda Au)\|_H \quad \forall u \in D(A) \quad \text{et} \quad \forall \lambda > 0$$

**Proposition 1.9 : Une caractérisation des opérateurs dissipatifs.**

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel et  $A : D(A) \rightarrow H$  un opérateur linéaire. Alors :

$$A \text{ est dissipatif} \iff \langle Au, u \rangle_H \leq 0, \quad \forall u \in D(A)$$

**Preuve :** Si  $A$  est dissipatif alors pour tout  $u \in D(A)$  et pour tout  $\lambda > 0$  on a :

$$\|u\|_H^2 \leq \|u\|_H^2 + \lambda^2 \|Au\|_H^2 - 2\lambda \langle u, Au \rangle_H$$

Donc :

$$\langle Au, u \rangle_H \leq \frac{\lambda}{2} \|Au\|_H^2 \quad \forall \lambda > 0$$

Et à la limite :  $\langle Au, u \rangle_H \leq 0$ . Réciproquement, la quantité  $\|(u - \lambda Au)\|_H^2$  vaut :

$$\|(u - \lambda Au)\|_H^2 = \|u\|_H^2 + \lambda^2 \|Au\|_H^2 - 2\lambda \langle u, Au \rangle_H$$

ce qui, compte tenu de l'hypothèse  $\langle Au, u \rangle_H \leq 0$ , donne :

$$\|(u - \lambda Au)\|_H^2 \geq \|u\|_H^2$$

**Définition 1.19 : Opérateur m-dissipatif.**

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $A : D(A) \rightarrow H$  un opérateur dissipatif sur  $H$ . On dit que  $A$  est **m-dissipatif** (respectivement que  $(-A)$  est maximal monotone) si pour tout  $\lambda > 0$  l'opérateur  $I - \lambda A : D(A) \rightarrow H$  est surjectif. Autrement dit :

$$\forall v \in H, \text{ il existe } u \in D(A) \text{ tel que : } (I - \lambda A)u = v$$

**Théorème 1.5 : Caractérisation des opérateurs m-dissipatifs.**

Soit  $A$  un opérateur dissipatif sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors l'opérateur  $A$  est  $m$ -dissipatif si, et seulement s'il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que l'opérateur  $I - \lambda_0 A : D(A) \rightarrow H$  est surjectif c'est à dire :  $\forall v \in H, \text{ il existe } u \in D(A) \text{ tel que : } (I - \lambda_0 A)u = v$ .

**Remarque 1.3 :** Si  $A$  est un opérateur  $m$ -dissipatif sur un espace de Hilbert  $H$ , alors son domaine  $D(A)$  est dense dans  $H$ .

**Théorème 1.6 :**

Un opérateur  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions  $S(t)_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $H$  si, et seulement s'il est **m-dissipatif**.

**Théorème 1.7 : ( de Hille-Yosida )**

Soit  $A$  un opérateur m-dissipatif sur un espace de Hilbert  $H$ . On définit sur  $D(A)$  la norme  $\|\cdot\|_{D(A)}$  dite du graphe par :  $u \mapsto \|u\|_{D(A)} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2}$ ,  $\forall u \in D(A)$ . Alors pour tout  $u_0 \in D(A)$  il existe une fonction unique  $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; D(A))$  solution du problème :

$$\mathcal{P} : \left\{ \frac{du}{dt} = Au \text{ et } u(0) = u_0 \right\} \quad \forall t \geq 0$$

qui, de plus, pour tout  $t \geq 0$  vérifie les inégalités :

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \quad \text{et} \quad \left\| \frac{du}{dt} \right\|_H = \|Au\|_H \leq \|Au_0\|_H$$

**Preuve :** On trouvera une démonstration détaillée en pages 105-110 dans [3] de H. Brezis.

**Théorème 1.8 :**

Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction  $S(t)_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors pour tout  $u_0 \in D(A)$  le problème

$$\mathcal{P} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{array} \right\} \quad \forall t \geq 0$$

admet une solution unique  $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; D(A))$  donnée par :

$$u(t) = S(t).u_0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{vérifiant} \quad \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, H)} \leq \|u_0\|_H$$

**Proposition 1.10 :**

Soient  $A$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $S(t)_{t \geq 0}$  fortement continu sur un espace de Hilbert  $H$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $u$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . Alors  $\lambda_t = e^{\lambda t}$  est une valeur propre de  $S(t)$  et  $u$  est un vecteur propre de  $S(t)$  associé à  $\lambda_t$ . En d'autres termes on a l'implication :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbf{VP}(A) \\ Au = \lambda u \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda t} \in \mathbf{VP}(S(t)) \\ S(t)u = e^{\lambda t}.u \end{array} \right\}$$

**Preuve :** Soit  $u$  un vecteur propre de  $A$  associé à la la valeur propre  $\lambda$ . Pour tout  $z \in D(A)$  on a :  $\frac{d}{dt}(S(t)z) = A.S(t)z = S(t).Az$ . Donc :  $\frac{d}{dt}(S(t)u) = A.S(t)u = S(t).Au = \lambda.S(t)u$ . Et par définition des semi-groupes, on a :  $S(0)u = u$ . En posant  $v(t) = S(t)u$  pour tout  $t \geq 0$ , on sait que  $v$  est la solution unique dans  $H$  du problème de Cauchy  $\mathcal{P}_\lambda$  :

$$\mathcal{P}_\lambda : \left\{ \frac{dv}{dt} = \lambda.v \text{ et } v(0) = u \right\}$$

L'opérateur linéaire  $\Lambda = \lambda I \in \mathcal{L}(H)$  étant borné sur  $H$ , le semi-groupe fortement continu  $\Psi(s)_{s \geq 0}$  qu'il engendre est défini par :

$$\Psi(s)v = e^{s\Lambda}.v = \sum_{n \geq 0} \frac{s^n \Lambda^n(v)}{n!}$$

c'est à dire :

$$\Psi(s).v = \sum_{n \geq 0} \frac{s^n \cdot \lambda^n}{n!} v = e^{\lambda s}.v$$

La solution  $v$  s'écrit, d'après le théorème 1.8 :  $v(t) = \Psi(t)u = e^{\lambda.t}.u \quad \forall t \geq 0$ . Mais  $v$  est d'autre part définie par :  $v(t) = S(t)u \quad \forall t \geq 0$ . D'où :

$$S(t)u = e^{\lambda.t}.u \quad \forall t \geq 0$$



**Proposition 1.11 :**

Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions  $S(t)_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $H$ . Si  $\langle Au, u \rangle_Z = 0 \quad \forall u \in D(A)$  alors

$$\| S(t) \|_H = 1 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et les valeurs propres de } A \text{ sont imaginaires pures}$$

**Preuve :** Pour tout  $u \in D(A)$  et pour tout  $t \geq 0$  on a :  $S(t)u \in D(A)$ . Soit  $s > 0$ . A l'aide du produit scalaire sur  $H$ , l'écart  $\delta(s) = \| S(t+s)u \|_H^2 - \| S(t)u \|_H^2$  s'écrit :

$$\| S(t+s)u \|_H^2 - \| S(t)u \|_H^2 = \langle S(t+s)u, S(t+s)u \rangle_H - \langle S(t)u, S(t)u \rangle_H$$

D'après les propriétés du produit scalaire, on a alors :

$$\delta(s) = \langle S(t+s)u - S(t)u, S(t+s)u \rangle_H + \langle S(t)u, S(t+s)u \rangle_H - \langle S(t)u, S(t)u \rangle_H$$

Et donc :

$$\| S(t+s)u \|_H^2 - \| S(t)u \|_H^2 = \langle S(t+s)u - S(t)u, S(t+s)u \rangle_H + \langle S(t)u, S(t+s)u - S(t)u \rangle_H$$

En passant à la limite quand  $s \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \delta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \langle S(t+s)u - S(t)u, S(t+s)u \rangle_H + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \langle S(t)u, S(t+s)u - S(t)u \rangle_H$$

Par continuité du produit scalaire et par définition de la dérivée, on obtient alors :

$$\frac{d}{dt} ( \| S(t)u \|_H^2 )_{t=t_0} = \left\langle \frac{d}{dt} (S(t)u)_{t=t_0}, S(t_0)u \right\rangle_H + \left\langle S(t_0)u, \frac{d}{dt} (S(t)u)_{t=t_0} \right\rangle_H \quad (1.11.1)$$

mais comme :

$$\frac{d}{dt} (S(t)u)_{t=t_0} = AS(t_0)u$$

et par hypothèse :  $\langle Au, u \rangle_Z = \langle u, Au \rangle_Z = 0$  pour tout  $u \in D(A)$ , l'égalité (1.11.1) implique

$$\frac{d}{dt} ( \| S(t)u \|_H^2 ) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

La quantité  $\|S(t)u\|_H^2$  est donc une constante par rapport à la variable  $t$ . Ce qui signifie pour tout  $t \geq 0$  que  $\|S(t)u\|_H = \|S(0)u\|_H = \|u\|_H$ . D'où :  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$  pour tout  $t \geq 0$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A$ . D'après la proposition 1.10 établie en page 28, le nombre  $\lambda_t = e^{\lambda t}$  est, pour tout  $t > 0$ , une valeur propre de  $S(t)$  et tout vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$  reste un vecteur propre de  $S(t)$  associé à  $\lambda_t$ . Tout vecteur propre  $u$  de  $A$  associé à  $\lambda$  vérifie donc :  $S(t)u = e^{\lambda t}u \quad \forall t \geq 0$ . Or, on sait que  $\|S(t)u\|_H = \|u\|_H \quad \forall t \geq 0$ . Donc  $\|e^{\lambda t}u\|_H = \|u\|_H \quad \forall t \geq 0$ . On en déduit l'égalité  $|e^{\lambda t}| = 1 \quad \forall t \geq 0$ . Et en posant  $\lambda = \alpha + i\beta$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$  on obtient :  $e^{\alpha t} = 1 \quad \forall t \geq 0$ . C'est à dire  $\alpha = 0$  et  $\lambda = i\beta$ . Et cela prouve que les valeurs propres de  $A$  sont imaginaires pures.

#### I.1.4 - Espaces de Hilbert intermédiaires

Soient  $H$  et  $K$  deux espaces de Hilbert, tels que  $K \subset H$ . Notons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$  les produits scalaires respectivement définis sur  $H$  et  $K$ . On suppose que le sous-espace  $K$  est dense dans  $H$  et que l'injection  $K \hookrightarrow H$  est continue. C'est à dire qu'il existe une constante positive  $c_K > 0$  telle que l'inégalité :  $\|u\|_H \leq c_K \|u\|_K$  soit vérifiée pour tout  $u \in K$ . Selon un résultat classique (voir [19] de Riesz-Nagy), l'espace  $K$  peut être défini comme le domaine d'un opérateur linéaire  $\Lambda$  non borné, positif et auto-adjoint défini sur  $H$ . L'opérateur  $\Lambda$  n'est pas nécessairement unique mais la norme  $\|\cdot\|_K$  induite sur  $K$  par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$  est équivalente à la norme du graphe de  $\Lambda$  définie par :

$$\|u\|_\Lambda = \left( \|u\|_H^2 + \|\Lambda u\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in D(\Lambda) = K$$

Notons par  $L$  l'ensemble des éléments de  $u \in D(\Lambda) = K$  tels que la forme anti-linéaire :

$$\mathcal{F}_u : K \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad v \longmapsto \mathcal{F}_u(v) = \langle u, v \rangle_K$$

soit continue pour la topologie de  $H$ . On montre que  $L$  est un sous-espace dense dans  $H$ , et est le domaine d'un opérateur linéaire  $S$  non borné, auto-adjoint, strictement positif et qui vérifie :

$$\langle Su, u \rangle_H = \|u\|_K^2, \quad \forall u \in D(\Lambda) = K$$

En utilisant la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoint, on pourra donner un sens aux puissances  $S^\theta$ , pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et définir le domaine de ces opérateurs. On pourra consulter entre autres Riesz-Nagy [19] pour les principales notions relatives à la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints et la procédure de définition de ces puissances d'opérateurs. Dans cet exemple introductif, en prenant  $\theta = \frac{1}{2}$  on a  $\Lambda = S^{\frac{1}{2}}$ . Il est auto-adjoint, positif et son domaine  $D(\Lambda) = K$  est dense dans  $H$ . Il s'injecte continument dans  $H$  et vérifie :

$$\langle u, v \rangle_K = \langle \Lambda u, \Lambda v \rangle_H, \quad \forall u \in D(\Lambda) = K$$

On a les inclusions :  $L = D(S) \subset D(S^{\frac{1}{2}}) = K \subset H$ . L'espace de Hilbert  $K$  intermédiaire entre  $L$  et  $H$  est le domaine de l'opérateur  $S^{\frac{1}{2}}$  et est noté  $[L, H]_{\frac{1}{2}} = D(S^{\frac{1}{2}})$ . C'est à partir des notions décrites dans cette introduction qu'on peut définir pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  les espaces de Hilbert intermédiaires comme domaine de puissances d'opérateurs et on écrira :

$$[H, K]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta}) \quad 0 < \theta < 1$$

On trouvera les démonstrations des résultats exposés dans ce paragraphe consacré aux espaces de Hilbert intermédiaires dans [14] de J.L.Lions et E.Magenes.

**Définition 1.20 :**

Soient  $H$  et  $K$  deux espaces de Hilbert, tels que  $K \subset H$ . Notons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$  les produits scalaires respectivement définis sur  $H$  et  $K$ . On suppose que le sous-espace  $K$  est dense dans  $H$  et que l'injection  $K \subset H \hookrightarrow K$  est continue i.e :

$$\exists c_K > 0 : \|u\|_K \leq c_K \|u\|_H \quad \forall u \in K$$

On appelle espace intermédiaire entre d'ordre  $0 \leq \theta \leq 1$  entre  $H$  et  $K$ , l'espace de Hilbert noté  $[H, K]_\theta$  et défini par :

$$[H, K]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta}) \quad \text{et} \quad \langle u, v \rangle_{[H, K]_\theta} = \left\langle \Lambda^{1-\theta} u, \Lambda^{1-\theta} v \right\rangle_H \quad \forall (u, v) \in D(\Lambda^{1-\theta})$$

et dont la norme  $\|\cdot\|_{[H, K]_\theta}$  induite est équivalente à la norme du graphe de  $\Lambda^{1-\theta}$  définie par

$$\|u\|_{\Lambda^{1-\theta}} = \left( \|u\|_H^2 + \left\| \Lambda^{1-\theta} . u \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in D(\Lambda^{1-\theta}) = [H, K]_\theta$$

**Remarque 1.4 :** L'espace  $[H, K]_\theta$  n'est pas intrinséquement lié aux espaces  $H$  et  $K$ , il dépend des topologies respectives induites par les produits scalaires respectifs. Mais si  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont deux opérateurs auto-adjoints sur  $H$  définis sur un domaine commun  $D(\Lambda_1) = D(\Lambda_2)$  alors pour tout  $0 \leq \theta \leq 1$  les domaines  $D(\Lambda_1^{1-\theta}) = D(\Lambda_2^{1-\theta})$  sont munis de normes équivalentes. Et en particulier on a :

$$[H, K]_0 = K \quad \text{et} \quad [H, K]_1 = H$$

**Théorème 1.9 : Dual d'un espace intermédiaire.**

Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $K \subset H$  un sous-espace dense dans  $H$  tel que l'injection  $K \hookrightarrow H$  soit continue et  $\theta \in ]0, 1[$ . Notons par  $H'$ ,  $K'$ ,  $[H, K]'_\theta$  les espaces duals respectivement de  $H$ ,  $K$ ,  $[H, K]_\theta$ . Alors on a :

$$[H, K]'_\theta = [K', H']_{1-\theta}$$

**Théorème 1.10 : Densité entre espaces intermédiaires.**

Soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux nombres réels tels que  $0 \leq \theta_1 < \theta_2$  et  $H$  un espace de Hilbert.

Soit  $K \subset H$  un sous-espace dense dans  $H$  tel que l'injection  $K \hookrightarrow H$  soit continue. Alors

les normes  $\|\cdot\|_{[[H,K]_{\theta_1}, [H,K]_{\theta_2}]_{\theta}}$  et  $\|\cdot\|_{[H,K]_{(1-\theta)\theta_2+\theta\theta_1}}$  sont équivalentes et :

- i)  $[H, K]_{\theta_1} \subset [H, K]_{\theta_2}$
- ii)  $[H, K]_{\theta_1}$  est dense dans  $[H, K]_{\theta_2}$
- iii)  $[[H, K]_{\theta_1}, [H, K]_{\theta_2}]_{\theta} = [H, K]_{(1-\theta)\theta_2+\theta\theta_1} \quad \forall \theta \in ]0, 1[$

**Théorème 1.11 : Inégalité d'interpolation.**

Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $K \subset H$  un sous-espace dense dans  $H$  tel que l'injection  $K \hookrightarrow H$  soit continue et  $\theta \in ]0, 1[$ . Alors il existe une constante  $\mathbf{C} > 0$  telle que :

$$\|u\|_{[K,H]_{\theta}} \leq \mathbf{C} \|u\|_K^{1-\theta} \cdot \|u\|_H^{\theta} \quad \forall u \in K$$

I.1.5 - Distributions à valeurs dans un espace de Hilbert

Ce paragraphe traite la notion de distribution à valeurs dans un espace de Hilbert en s'intéressant à des espaces fonctionnels de la variable réelle à valeurs dans un espace de Hilbert. L'étude de ces espaces est essentielle pour une connaissance suffisante des espaces de Sobolev, de leurs propriétés et de leur importance dans les équations aux dérivées partielles. On commencera par donner un sens à l'espace de "Lebesgues" des fonctions de la variable réelle à valeurs dans un espace de Hilbert  $H$  de carré intégrable qu'on notera  $L^2(a, b; H)$ .

**Définition 1.21 : L'espace  $L^2(a, b; H)$  :**

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $a, b$  deux nombres réels distincts tels que :  $a < b$ .

On désigne par  $L^2(a, b; H)$  l'ensemble des (classes de ) fonctions définie par :

$$L^2(a, b; H) = \left\{ f : [a, b] \longrightarrow H \text{ tq : } t \longmapsto \|f(t)\|_H^2 \text{ est mesurable et } \int_a^b \|f(t)\|_H^2 dt < +\infty \right\}$$

**Proposition 1.12 : Structure Hilbertienne de l'espace  $L^2(a, b, H)$  :**

Muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(a, b, H)} = \int_a^b \langle f(t), g(t) \rangle_H dt$$

l'espace  $L^2(a, b, H)$  est un espace de Hilbert dont la norme induite par ce produit scalaire est définie par :

$$\|f\|_{L^2(a, b, H)} = \left( \int_a^b \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Preuve :** On en trouvera une dans [14] de J.L.Lions et E.Magenes.

**Définition 1.22 : Définition et convergence dans l'espace  $\mathcal{D}(]a, b[; H)$** 

Soient  $]a, b[$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $H$  un espace de Hilbert. On notera par  $\mathcal{D}(]a, b[; H)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]a, b[$  à valeurs dans  $H$  et à support compact contenu dans  $]a, b[$ . Et on dira qu'une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(]a, b[; H)$  converge vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[; H)$  s'il existe un compact  $K \subset ]a, b[$  tel que :

$$\text{supp}(\varphi_n) \subset K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \text{Sup}_{t \in K} \left( \left\| \frac{d^m(\varphi_n - \varphi)}{dt^m}(t) \right\|_H \right) \right] = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

**Définition 1.23 : Définition et convergence dans l'espace  $\mathcal{D}'(]a, b[; H)$  :**

On appelle espace des distributions sur l'intervalle  $]a, b[$  à valeurs dans l'espace de Hilbert  $H$  l'ensemble noté  $\mathcal{D}'(]a, b[; H)$  des applications linéaires  $T : \mathcal{D}(]a, b[; H) \rightarrow \mathbb{R}$  qui pour toute suite  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(]a, b[; H)$  vérifie l'implication :

$$(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \longrightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(]a, b[; H) \implies T(\varphi_j) \rightarrow T(\varphi) \text{ dans } \mathbb{R}$$

La valeur  $T(\varphi) \in \mathbb{R}$  sera notée  $\langle T, \varphi \rangle$ . Par le crochet  $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(]a, b[; H), \mathcal{D}(]a, b[; H)}$  on notera la dualité entre  $\mathcal{D}'(]a, b[; H)$  et  $\mathcal{D}(]a, b[; H)$ . Il est clair que deux distributions  $T_1$  et  $T_2$  sur  $]a, b[$  à valeurs dans  $H$  sont égales si elles le sont en tant qu'applications de  $\mathcal{D}(]a, b[; H)$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[; \Omega)$$

**Convergence dans l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(]a, b[; H)$  :**

On dira qu'une suite  $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}'(]a, b[; H)$  de distributions sur l'intervalle  $]a, b[$  à valeurs dans  $H$  converge dans  $\mathcal{D}'(]a, b[; H)$  vers une distribution  $T$  si on a :

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{dans } \mathbb{R} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[; H)$$

**Remarque 1.5 :** Notons que toute classe de fonctions  $\tilde{f} \in L^2(a, b, H)$  définit canoniquement une distribution sur l'intervalle  $]a, b[$  à valeurs dans  $H$ . En effet, pour tout  $\tilde{f} \in L^2(a, b, H)$ , l'application linéaire :

$$\begin{aligned} T_{\tilde{f}} & : \quad \mathcal{D}(]a, b[; H) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi & \longrightarrow T_{\tilde{f}}(\varphi) = \int_a^b \left\langle \tilde{f}(t), \varphi(t) \right\rangle_H dt \end{aligned}$$

satisfait la définition 1.23 des distributions sur l'intervalle  $]a, b[$  à valeurs dans l'espace de Hilbert  $H$  c'est à dire  $T_{\tilde{f}} \in \mathcal{D}'(]a, b[; H)$ . D'où l'inclusion  $L^2(a, b, H) \subset \mathcal{D}'(]a, b[; H)$ . Mais l'inclusion est stricte  $L^2(a, b, H) \subsetneq \mathcal{D}'(]a, b[; H)$  car pour qu'une distribution  $T \in \mathcal{D}'(]a, b[; H)$  soit élément de  $L^2(]a, b[; H)$  il est nécessaire et suffisant qu'il existe une fonction  $f \in L^2(]a, b[; H)$  telle que :

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(]a, b[; H), \mathcal{D}(]a, b[; H)} = \int_a^b \langle f(t) \cdot \varphi(t) \rangle_H dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[; H)$$

Les notions de distributions à valeurs dans un espace vectoriel sont amplement détaillées par **Laurent Schwartz** dans [18].

**Définition 1.24 : Dérivation dans  $\mathcal{D}'(]a, b[; H)$  :**

On définit pour toute distribution  $T \in \mathcal{D}'(]a, b[; H)$ , la dérivée  $\frac{dT}{dt}$  par :

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(]a, b[; H), \mathcal{D}(]a, b[; H)} = -1 \left\langle T, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle_{\mathcal{D}'(]a, b[; H), \mathcal{D}(]a, b[; H)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[; H)$$

Plus généralement, pour tout ordre entier  $m \in \mathbb{N}$  la dérivée d'ordre  $m$  est définie par :

$$\left\langle \frac{d^m T}{dt^m}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(]a, b[; H), \mathcal{D}(]a, b[; H)} = (-1)^m \left\langle T, \frac{d^m \varphi}{dt^m} \right\rangle_{\mathcal{D}'(]a, b[; H), \mathcal{D}(]a, b[; H)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[; H)$$

Et l'application :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} & : \mathcal{D}'(]a, b[; H) \longrightarrow \mathcal{D}'(]a, b[; H) \\ T & \longmapsto \frac{d^m T}{dt^m} \quad \text{est continue.} \end{aligned}$$



### I.1.6 - Une introduction aux espaces de Sobolev

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $K \subset H$  un sous-espace dense dans  $H$ . Chacun étant muni d'un produit scalaire, on suppose que l'injection  $K \hookrightarrow H$  est continue c'est à dire qu'il existe  $c_K > 0$  telle que :  $\|u\|_H \leq c_K \|u\|_K \quad \forall u \in K$ . Soient  $m \geq 1$  un entier naturel et  $a < b$  deux nombres réels finis. On pose alors :

$$W_m(a, b) = \left\{ u \in L^2(a, b; K) \text{ tels que } : \frac{d^m u}{dt^m} \in L^2(a, b; H) \right\}$$

où les dérivations  $\frac{d^m u}{dt^m}$  sont prises au sens des distributions dans  $\mathcal{D}'(]a, b[; H)$ . On définit ensuite sur l'espace  $W_m(a, b)$  le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{W_m(a, b; H)} = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle_K dt + \int_a^b \left\langle \frac{d^m u}{dt^m}(t), \frac{d^m v}{dt^m}(t) \right\rangle_H dt$$

Muni de ce produit scalaire,  $W_m(a, b)$  est un espace de Hilbert dont la norme induite par le produit scalaire est définie par :

$$\|u\|_{W_m(a, b)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(a, b; K)}^2 + \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_{L^2(a, b; H)}^2}$$

Les propriétés de ces espaces permettent de déduire l'essentiel des résultats concernant les espaces de Sobolev. L'espace  $\mathcal{D}([a, b]; K)$  étant celui des fonctions indéfiniment différentiables sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $K$  et à support compact contenu dans  $[a, b]$ , on définit de même les espaces  $\mathcal{D}'(]-\infty, a]; H)$ ,  $\mathcal{D}'([a, +\infty[; H)$  et  $\mathcal{D}'(]-\infty, +\infty[; H)$ .

**Théorème 1.12 :** Pour tout  $m \geq 1$  on a :

$$\mathcal{D}([a, b]; K) \text{ est dense dans } W_m(a, b), \quad \mathcal{D}(]-\infty, a]; K) \text{ est dense dans } W_m(-\infty, a)$$

$$\mathcal{D}([a, +\infty[; K) \text{ est dense dans } W_m(a, +\infty) \text{ et } \mathcal{D}(\mathbb{R}; K) \text{ est dense dans } W_m(-\infty, +\infty)$$

**Preuve :** Une démonstration détaillée est exposée dans [14] de J.L.Lions et E.Magenes.

**Théorème 1.13 : Opérateur de prolongement.**

On suppose qu'au moins l'un des nombres  $a < b$  est fini. Alors il existe un opérateur linéaire continu :

$$\mathbf{P} : u \longmapsto \mathbf{P}u \text{ de } W_m(a, b) \text{ dans } W_m(-\infty, +\infty)$$

tel que :

$$\mathbf{P}u = u \text{ presque partout sur } ]a, b[$$

**Preuve :** Le théorème est démontré dans [14] de J.L.LIONS - E.MAGENES.

**Théorème 1.14 : Un théorème des traces.**

$\forall u \in W_m(0, +\infty)$  et  $\forall j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  on a :

$$\frac{d^j u}{dt^j}(0) \in [H, K]_{\frac{1}{m}(j+\frac{1}{2})}$$

Et l'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_m(0, +\infty) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} [H, K]_{\frac{1}{m}(j+\frac{1}{2})} \\ u \longmapsto \left( u(0), \dots, \frac{d^j u}{dt^j}(0), \dots, \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}}(0) \right) \end{array} \right\} \text{ est surjective}$$

**Preuve :** Le théorème est démontré dans [14] de de J.L.LIONS - E.MAGENES.

## I.2 - Espaces de Sobolev

### I.2.1 - Espaces de Sobolev d'ordre entier

**Définition 1.25 : Espaces de Sobolev d'ordre entier sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $m \in \mathbb{N}$ . On appelle espace de Sobolev d'ordre  $m$  sur  $\Omega$ , l'ensemble noté  $H^m(\Omega)$ , et défini par :

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \text{ telle que : } D^\alpha f \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^m, \text{ et } |\alpha| \leq m\}$$

et muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m(\Omega)} : f \mapsto \langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} fg \cdot dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f \cdot D^\alpha g \cdot dx$

et dont la norme induite est définie par :  $\|f\|_{H^m(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx$  (1.25.1)

Et on conviendra de noter :  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  (1.25.2)

**Théorème 1.15 :**

Soient  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$  et  $m$  un entier naturel. L'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  d'ordre  $m$  sur  $\Omega$  muni de la norme définie dans (1.25.1), est un espace de Hilbert dont la norme induite est définie par :  $f \mapsto \|f\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

**Preuve :** Consulter par exemple [14] de J.L. LIONS et E.MAGENES.

**Théorème 1.16 : Densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^m(\mathbb{R}^n)$ .**

L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , considéré comme un sous-espace de  $H^m(\mathbb{R}^n)$  est partout dense dans  $H^m(\mathbb{R}^n)$ . Plus précisément,  $\forall u \in H^m(\mathbb{R}^n)$  et  $\forall \varepsilon > 0$  il existe  $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset (\text{supp}(u))_\varepsilon$  et  $\|\varphi_\varepsilon - u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$  où  $(\text{supp}(u))_\varepsilon$  désigne le voisinage fermé d'ordre  $\varepsilon$  de  $\text{supp}(u)$ , défini par :  $(\text{supp}(u))_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que : } d(x, \text{supp}(u)) \leq \varepsilon\}$

**Preuve :** Voir [11] de Vo-Khac Khoan en page 170.

**Définition 1.26 :**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On désigne par  $H_0^m(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$  et on notera  $H^{-m}(\Omega)$  le dual topologique de  $H_0^m(\Omega)$ .

**Théorème 1.17 : Densité de  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  dans  $H^m(\Omega)$ .**

Si  $\Omega$  est ouvert borné dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^k$ , telle que  $\Omega$  soit localement d'un seul coté de  $\Gamma$ . Alors pour tout entier  $0 \leq m \leq k$  :

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^m(\Omega)$$

**Preuve :** Voir en page 32 dans [15] de P.A. RAVIART et de J.M.THOMAS.

**Théorème 1.18 : Inégalité de Poincaré :**

Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  borné dans une direction alors il existe une constante  $c_\Omega > 0$  telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

**Preuve :** P.A. RAVIART et de J.M.THOMAS en donnent une démonstration dans [15] en pages 18-19. On précise cependant que ce que signifie "*borné dans une direction*". En notant  $x = (\dots, x_i, \dots)$ ,  $y = (\dots, y_i, \dots)$  les coordonnées cartésiennes du point  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  on dira que  $\Omega$  est borné dans une direction si :

$$\text{Min}_{1 \leq i \leq n} \left( \text{Sup}_{(x,y) \in \Omega \times \Omega} |x_i - y_i| \right) < \infty$$

**Remarque 1.6 :** On en déduit que si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné dans une direction alors l'application  $v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$  est une norme équivalente sur  $H_0^1(\Omega)$  à la norme de  $H^1(\Omega)$ .

## I.2.2 - Espaces de Sobolev d'ordre réel

### Définition 1.27 : Espaces de Sobolev d'ordre réel sur $\mathbb{R}^n$

Soit  $s \in \mathbb{R}$ . On appelle espace de Sobolev d'ordre  $s$  sur  $\mathbb{R}^n$  l'ensemble  $H^s(\mathbb{R}^n)$  défini par

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ telles que } : \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty \right\}$$

et muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)} \cdot (1 + |\xi|^2)^s d\xi$$

dont la norme induite est définie par :

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

### Théorème 1.19 :

Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$  les définitions suivantes sont équivalentes :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^2(\Omega), \text{ telle que } : D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^m, \text{ et } |\alpha| \leq m \} \quad (1.19.1)$$

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ tels que } : \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} \quad (1.19.2)$$

$$H^m(\mathbb{R}^n) = [H^0(\mathbb{R}^n), H^k(\mathbb{R}^n)]_{1-\frac{m}{k}} \quad \forall k \geq m, k \in \mathbb{N}^* \quad (1.19.3)$$

et les normes suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 & : u \mapsto \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \mathcal{N}_2 & : u \mapsto \|u\|_{[H^k(\mathbb{R}^n), H^0(\mathbb{R}^n)]_{1-\frac{m}{k}}} \\ \mathcal{N}_3 & : u \mapsto \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

**Preuve :** Les équivalences entre les définitions (1.19.1) et (1.19.2) et entre les normes  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  sont établies dans [14] de J.L. Lions et E.Magenes (Theorem 1.2) p5. Et les équivalences

entre les définitions (1.19.2) et (1.19.3) sont établies dans le même ouvrage en page 30-31.

En fait un résultat plus général est établi en page 30 dans [14]. C'est le "Theorem 7.1"

selon lequel pour tout  $0 < \theta < 1$  et pour tout entier  $m \geq 1$  on a :

$$[H^0(\mathbb{R}^n), H^m(\mathbb{R}^n)]_\theta = H^{(1-\theta)m}(\mathbb{R}^n) \quad (1.19.4)$$

**Théorème 1.20 :**

Soit  $H^s(\mathbb{R}^n)'$  l'espace dual de  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . En identifiant l'espace  $L^2(\mathbb{R}^n)$  avec son dual et sachant que  $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ , on a :

$$(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n) \quad \forall s > 0$$

**Preuve :** Consulter la preuve de J.L. Lions et E.Magenes dans [14] en page 31.

**Proposition 1.13 : Densité.**

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ est dense dans } H^s(\mathbb{R}^n) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

**Preuve :** Soit  $m \geq s > 0$  deux nombres réels positifs tel que  $m \in \mathbb{N}$ . Posons :

$$K_0 = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad K = H^m(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad H = L^2(\mathbb{R}^n) \quad (1.13.1)$$

D'après le théorème 1.17,  $K_0 = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $K = H^m(\mathbb{R}^n)$ .  $K$  est dense dans

$H = L^2(\mathbb{R}^n)$ . Or, d'après le résultat *ii*) du théorème 1.10, pour tout  $0 \leq \theta < 1$  l'espace

$K$  est dense dans  $[H, K]_\theta$  et de l'inclusion  $K_0 \subset K$  on déduit que l'espace  $K_0$  est dense

dans  $[L^2(\mathbb{R}^n), H^m(\mathbb{R}^n)]_\theta$ . En appliquant le résultat (1.19.4) :

$$[H^0(\mathbb{R}^n), H^m(\mathbb{R}^n)]_\theta = H^{(1-\theta)m}(\mathbb{R}^n) \quad \forall \theta, 0 \leq \theta \leq 1$$

cité en marge du théorème 1.19 pour  $\theta = (1 - \frac{s}{m})$  on obtient la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $s > 0$ . Pour le cas négatif on raisonnera par dualité en prenant comme espaces :

$$H = H^{-m}(\mathbb{R}^n) \text{ et } K = L^2(\mathbb{R}^n)$$

**Notations :** On note par  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$  nulles à l'infini

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) / \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n \text{ compact tel que : } |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - K_\varepsilon\}.$$

Muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ , l'espace  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach et la

topologie induite par cette norme est appelée topologie de la convergence uniforme. On

rappelle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  l'espace noté  $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions définies et

continues sur  $\mathbb{R}^n$  et telles que pour tout multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| \leq k$ , la dérivée  $D^\alpha f$  est

définie et continue. On désigne par  $\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}^n$  dont

les dérivées de tout ordre inférieur ou égal à  $k$  sont continues et nulles à l'infini sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \text{ telles que : } D^\alpha f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\alpha| \leq k \right\}$$

On munit  $\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$  de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)} = \sup_{|\alpha| \leq k} \left( \sup_{x \in (\mathbb{R}^n)} |D^\alpha f(x)| \right)$$

**Théorème 1.21 : Théorème d'injection de Sobolev sur  $\mathbb{R}^n$**

Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $s \in \mathbb{R}$  avec  $s > \frac{n}{2} + k$  alors  $H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$  et l'injection

$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$  est continue, c'est à dire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\sup_{|\alpha| \leq k} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)| \right) \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

**Preuve :** Voir la preuve dans [12] de VO-KHAC KHOAN en page 180.

**Théorème 1.22 : Théorème d'injection de Sobolev pour un ouvert quelconque**

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tels que :  $m > \frac{n}{2} + k$ . Alors :

$$H^m(\Omega) \subset C^k(\Omega)$$

**Preuve :** Voir la preuve dans [12] de VO-KHAC KHOAN en page 181.

**Théorème 1.23 : Théorème de Rellich-Kondrashov.**

Soient  $\Omega$  un ouvert relativement compact de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, pour tout entier  $m \geq 1$  l'injection :  $H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H_0^{m-1}(\Omega)$  est compacte. Et si de plus la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une variété différentiable de classe  $C^k$  et que  $\Omega$  est localement d'un seul coté de  $\Gamma$  alors l'injection :  $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega)$  est compacte.

: Consulter la page 184 de [12] de Vo-Khac Khoan.

**Théorème 1.24 : Opérateur de prolongement.**

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une variété différentiable de classe  $C^k$  telle que  $\Omega$  est localement d'un seul coté de  $\Gamma$ . Alors pour tout entier  $m \leq k$ , il existe un opérateur linéaire continue  $\mathbf{P}_m : H^m(\Omega) \longrightarrow H^m(\mathbb{R}^n)$  tel que :

$$\mathbf{P}_m(u) = u \text{ presque partout dans } \Omega \quad \forall u \in L^2(\Omega) \quad (1.24.1)$$

**Preuve :** Avec des hypothèses beaucoup plus fortes ( $\partial\Omega = \Gamma$  de classe  $C^\infty$ ) le résultat est prouvé dans [14] (Theorem 8.1 - page 38). Lorsque la régularité du bord de l'ouvert permet l'existence de l'opérateur on dira que l'ouvert possède la propriété de  $m$ -prolongement.



### I.2.3 - Espaces de Sobolev d'ordre réel sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Sans conditions de régularité sur la frontière  $\partial\Omega$ , on peut définir des espaces de Sobolev d'ordre non entier en utilisant la notion d'espaces intermédiaires. Soient  $s > 0$  un nombre non entier et  $m > s$  un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre  $s > 0$  sur  $\Omega$ , l'espace noté  $H^s(\Omega)$  et défini par :

$$H^s(\Omega) = [H^0(\Omega), H^m(\Omega)]_{(1-\frac{s}{m})} \quad (1.25.0)$$

#### **Théorème 1.25 :**

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une variété  $\mathcal{C}^k$  telle que  $\Omega$  est localement d'un seul côté de  $\Gamma$ . Alors pour tout  $s \leq k$  on a :

$$H^s(\Omega) = \{u|_{\Omega}, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n)\} \quad (1.25.1)$$

et l'équivalence entre les normes :

$$\|\cdot\|_{[H^m(\mathbb{R}^n), H^0(\mathbb{R}^n)]_{1-\frac{s}{m}}} \text{ et } \mathcal{N}_2 : u \longmapsto \text{Inf} \left\{ \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} : U = u \text{ p.partout sur } \Omega \right\} \quad (1.25.2)$$

**Preuve :** Consulter [14] de J.L. Lions et E.Magenes.

#### **Théorème 1.26 : Densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $H^s(\Omega)$ :**

Si  $\Omega$  est ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^k$ , telle que  $\Omega$  est localement d'un seul côté de  $\Gamma$  alors pour tout réel positif  $0 < s \leq k$  on a :

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \text{ dense dans } H^s(\Omega)$$

**Preuve :** Résultat montré dans [14] de J.L. Lions et E.Magenes (Theorem 9.3 - page 41) avec des hypothèses de régularité plus fortes sur la frontière.

**Théorème 1.27 : Prolongement par 0 en dehors de l'ouvert.**

Si  $\Omega$  est un ouvert borné dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $s > 0$  un nombre réel strictement positif. Alors, l'opérateur linéaire  $\mathbf{P}_s : H^s(\Omega) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$  de prolongement par 0 défini par :

$$\mathbf{P}_s(u) = \left\{ \begin{array}{ll} u & \text{presque partout dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n - \Omega \end{array} \right\} \quad \forall u \in H^s(\Omega)$$

**Preuve :** La démonstration est établie dans [14] de J.L. Lions et E.Magenes en page 60.

**Théorème 1.28 : Propriétés de régularité des éléments de  $H^s(\Omega)$  :**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^k$ , telle que  $\Omega$  est localement d'un seul coté de  $\Gamma$ . On note par  $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$  l'espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\overline{\Omega}$  muni à la norme  $\|v\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha v(x)|$ . Si  $s > \frac{n}{2} + k$  alors  $H^s(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$  où et l'injection  $H^s(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$  est continue.

**Preuve :** Elle est établie par J.L. Lions et E.Magenes en page 46 dans [14].

I.2.4 - Espaces de Sobolev sur le bord d'un ouvert  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^n$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^k$  de dimension  $n - 1$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $\Omega$ . On appelle partition de l'unité de classe  $\mathcal{C}^\infty$  subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ , une famille de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  à valeurs positives ou nulles  $(\alpha_i)_{i \in I}$  indexée par le même ensemble d'indices

$I$ , et vérifiant les conditions suivantes :

$$\text{Supp}(\alpha_i) \subset U_i, \forall i \in I \quad (I.2.4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall K \text{ compact, } K \subset \Omega, \text{ il existe } J_K = \{i_{K,1}, \dots, i_{K,m}\} \subset I \text{ fini tel que :} \\ (\alpha_i)|_K \equiv 0, \forall i \in I - J_K \end{array} \right\} \quad (I.2.4.2)$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i(x) = 1, \forall x \in \Omega \quad (I.2.4.3)$$

On montre que pour tout ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  il existe pour chaque recouvrement ouvert  $(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une partition de l'unité  $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  subordonnée à ce recouvrement. Vo-Khac Khoan en donne une preuve dans [11] en page 155. L'ouvert  $\Omega$  étant borné, l'ensemble  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^n$ . De tout recouvrement ouvert  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ , on peut alors en extraire un sous-recouvrement fini  $(\mathcal{U}_{i_k})_{k \in \{1, \dots, m\}}$ . Soit  $(\mathcal{O}_j)_{j \in \{1, \dots, p\}}$  une famille finie d'ouverts de  $\mathbb{R}^n$  recouvrant en particulier la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  et telle que pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$  il existe une application  $\varphi_j$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  :

$$\varphi_j : \mathcal{O}_j \longrightarrow U = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \left( \sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1 \text{ et } -1 < y_n < 1 \right\} \quad (I.2.4.4)$$

$$x \longmapsto \varphi_j(x) = y$$

dont l'application réciproque :

$$\varphi_j^{-1} : \quad U \longrightarrow \mathcal{O}_j \quad (I.2.4.5)$$

$$y \longmapsto \varphi_j^{-1}(y) = x$$

est aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et vérifie :

$$\varphi_j(\mathcal{O}_j \cap \Omega) = \{y \in U : \text{tel que } : y_n > 0\} = U_+ \quad (I.2.4.6)$$

$$\varphi_j(\mathcal{O}_j \cap \Gamma) = \{y \in \mathbb{R}^n : y \in U : \text{tel que } : y_n = 0\} = U_0 \quad (I.2.4.7)$$

$$\varphi_j(\mathcal{O}_j \cap (\mathbb{R}^n - \bar{\Omega})) = \{y \in U : \text{tel que } : y_n < 0\} = U_- \quad (I.2.4.8)$$

De plus, si  $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset$  il existe un homéomorphisme  $J_{i,j}$  indéfiniment différentiable à jacobien positif tel que :

$$\begin{aligned} J_{i,j} : \quad \varphi_i(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j) &\longrightarrow \varphi_j(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j) \\ J_{i,j}(\varphi_i(x)) &= \varphi_j(x) \quad \forall x \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \end{aligned} \quad (I.2.4.9)$$

En associant au recouvrement fini de  $\Gamma$  par les ouverts  $(\mathcal{O}_j)_{j \in \{1, \dots, p\}}$  de  $\mathbb{R}^n$ , la famille finie des traces  $(\mathcal{O}_j \cap \Gamma)_{j \in \{1, \dots, p\}}$  sur  $\Gamma$  on obtient un recouvrement de  $\Gamma$  par des ouverts de  $\Gamma$  auquel on peut subordonner une partition de l'unité  $(\alpha_j)_{j \in \{1, \dots, p\}}$  sur  $\Gamma$  vérifiant :

$$\text{Supp}(\alpha_j) \subset \mathcal{O}_j \cap \Gamma \quad \text{et} \quad \alpha_j \in \mathcal{D}(\Gamma) \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \quad ((I.2.4.10))$$

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j(x) = 1 \quad \forall x \in \Gamma \quad ((I.2.4.11))$$

où  $\mathcal{D}(\Gamma)$  désigne l'espace des fonctions de  $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  indéfiniment différentiables à support compact contenu dans  $\Gamma$ . (Voir les rappels de la géométrie différentielle). Ainsi, toute fonction  $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  définie (p.p) sur  $\Gamma$  se décompose d'après (I.2.4.11) comme suit :

$$u(x) = \sum_{j=1}^p \alpha_j(x) \cdot u(x) \quad \text{presque partout sur } \Gamma \quad ((I.2.4.12))$$

La fonction  $(\alpha_j \cdot u) \circ \varphi_j^{-1}$  est à support compact contenu dans  $\varphi_j(\mathcal{O}_j \cap \Gamma) = \{y \in U : \text{tel que } : y_n = 0\}$ .

Elle se prolonge par 0 en une fonction définie sur  $\mathbb{R}_y^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . On défini alors l'application continue notée  $\Phi_j^* : L^1(\Gamma) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^{n-1})$  qui à tout élément  $u \in L^1(\Gamma)$  associe l'élément de  $\Phi_j^*(u) \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$  défini de  $\mathbb{R}^{n-1}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$(y_1, \dots, y_{n-1}) \longmapsto \Phi_j^*(u)(y_1, \dots, y_{n-1}) = \begin{cases} (\alpha_j \cdot u) \circ \varphi_j^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) & \text{si } \left( \sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2 \right) < 1 \\ 0 & \text{si } \left( \sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2 \right) \geq 1 \end{cases} \quad (I.2.4.13)$$

L'application :  $\Phi_j^* : \mathcal{D}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$  est linéaire continue et de plus :

$$v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ et } \text{Supp}(v) \subset \left\{ y \in \mathbb{R}^{n-1} : \left( \sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2 \right) < 1 \right\} \implies \exists u \in \mathcal{D}(\Gamma) \text{ tq : } \Phi_j^*(u) = v \quad (I.2.4.14)$$

Ou encore :

$$(\Phi_j^*)^{-1}(v) = u \quad (I.2.4.15)$$

Signalons enfin la continuité de l'application :

$$\Phi_j^* : \mathcal{D}'(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$$

**Définition 1.28 : L'espace  $H^s(\Gamma)$  :**

Soit  $s \in \mathbb{R}$ . On appellera espace de Sobolev d'ordre  $s$  sur  $\Gamma$  l'espace noté  $H^s(\Gamma)$  et défini par  $H^s(\Gamma) = \left\{ u \in L^2(\Gamma) \text{ tel que : } \Phi_j^*(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \right\}$  (1.28.1)

muni de la norme :

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left( \sum_{j=1}^p \|\Phi_j^*(u)\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^s(\Gamma) \quad (1.28.2)$$

**Remarque 1.7 :** La définition (1.28.1) ne dépend pas, d'un point de vue algébrique, du choix des cartes locales  $(\mathcal{O}_j, \varphi_j)_{j \in \{1, \dots, p\}}$  et de la partition de l'unité  $(\alpha_j)_{j \in \{1, \dots, p\}}$ . La norme  $\|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}$ , par contre dépend du choix du système  $(\mathcal{O}_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j \in \{1, \dots, p\}}$  mais les différentes normes sont équivalentes. On vérifie que muni de chacune des normes définie par un système  $(\mathcal{O}_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j \in \{1, \dots, p\}}$ , l'espace  $H^s(\Gamma)$  est un espace de Hilbert. En identifiant  $H^0(\Gamma)$  avec son dual, on montre (Voir [14] de J.L. LIONS et E.MAGENES (Theorem 7.6 - page 36) que l'espace dual  $(H^s(\Gamma))'$  n'est autre que l'espace de Sobolev d'ordre  $-s$  sur  $\Gamma$  :

$$(H^s(\Gamma))' = H^{-s}(\Gamma) \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (1.28.3)$$

**Théorème 1.29 : Densité de  $\mathcal{D}(\Gamma)$  dans  $H^s(\Gamma)$  :**

$\mathcal{D}(\Gamma)$  est partout dense dans  $H^s(\Gamma) \quad \forall s \geq 0$ .

**Preuve :** Selon la proposition 1.13 de la page 42, l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$  est dense dans  $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ .

Il existe donc pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$  une suite  $\{\Psi_{j,k}, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$  à support compact contenu dans la boule ouverte  $\left\{ y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \left( \sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2 \right) < 1 \right\}$  qui converge vers  $\Phi_j^*(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ . Il existe donc une suite  $\{v_{j,k}, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\Gamma)$  définie par :

$$v_{j,k} = (\Phi_j^*)^{-1}(\Psi_{j,k}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

qui vérifie  $\Phi_j^*(v_{j,k}) = \Psi_{j,k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Et donc :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \Phi_j^*(v_{j,k}) - \Phi_j^*(u) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2 = 0$ .

L'égalité étant valable pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ , on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^p \left\| \Phi_j^*(v_{j,k}) - \Phi_j^*(u) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Donc la suite  $\left\{ u_k = \sum_{j=1}^p v_{j,k} \text{ avec } k \in \mathbb{N} \right\}$  converge vers  $u$  dans  $H^s(\Gamma)$ . D'où la densité.

**Théorème 1.30 : Théorème des traces pour espaces de Sobolev d'ordre entier.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $m \leq k$  un entier naturel. On désignera pour tout  $j \in \{0, \dots, m-1\}$  par  $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$  la dérivée normale d'ordre  $j$  sur  $\Gamma$  orientée vers l'intérieur de  $\Omega$ . Alors l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow \mathcal{D}((\Gamma))^m \\ u &\longmapsto \left( u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \right) \end{aligned}$$

se prolonge en une application linéaire continue et surjective :

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) &\longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\longmapsto \left( u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \right) \end{aligned}$$

qui admet une application linéaire inverse à droite continue, notée  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{R} : \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^m(\Omega)$$

$$g = (g_1, \dots, g_j, \dots, g_{m-1}) \longmapsto \mathcal{R}(g)$$

telle que :

$$\frac{\partial^j \mathcal{R}(g)}{\partial \nu^j} = g_j \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\}$$

**Preuve :** Si la frontière est une variété indéfiniment différentiable et si l'ouvert  $\Omega$  est localement d'un seul côté de sa frontière, la preuve est établie dans [14] en page 39.

### **Théorème 1.31 : Généralisation aux espaces de Sobolev d'ordres réels**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\Omega$  est localement d'un seul côté de  $\Gamma$ . Soient  $s$  un nombre réel positif ou nul et  $m$  le plus grand entier naturel strictement plus petit que  $s - \frac{1}{2}$ . Alors l'application  $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{D}((\Gamma))^m$  :

$$u \longmapsto \left( u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m} \right)$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue et surjective :

$$H^s(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^m H^{s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

$$u \longmapsto \left( u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m} \right)$$

qui admet une application inverse à droite linéaire et continue, notée  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{R} : \prod_{j=0}^m H^{s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^s(\Omega)$$

**Preuve :** Voir la démonstration de J.L. LIONS et E.MAGENES dans [14] en page 41.

**Théorème 1.32 : Caractérisation des espaces  $H_0^s(\Omega)$** 

Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Alors pour tout  $\frac{1}{2} < s \leq k$

$$H_0^s(\Omega) = \left\{ u \in H^s(\Omega) \text{ tel que : } \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \quad \forall j, 0 \leq j < s - \frac{1}{2} \right\}$$

**Preuve :** Pour  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  Voir [14] de J.L. Lions et E.Magenes (Theorem 11.5 - p 62).

**Théorème 1.33 : Un résultat de compacité.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\Omega$  soit localement d'un seul coté de  $\Gamma$ . Soit  $s$  un nombre réel quelconque. Alors :

$$l'injection H^s(\Omega) \longrightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega) \text{ est compacte } \forall \varepsilon > 0$$

**Preuve :** Etablie dans [14] de J.L. Lions et E.Magenes (Theorem 16.1 - page 99).

**Proposition 1.14 : Formule de green.**

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_n)$  la normale extérieure à  $\Omega$  en  $x \in \Gamma$ . On notera par  $\partial_\nu$  l'opérateur de dérivation suivant  $\nu$ . Alors :

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) v \cdot dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx - \int_{\Gamma} (\partial_\nu u|_{\Gamma}) \cdot v|_{\Gamma} d\Gamma \quad \forall u \in H^2(\Omega) \text{ et } \forall v \in H^1(\Omega)$$

**Preuve :** Voir [15] de P.A. RAVIART et de J.M.THOMAS.

**Proposition 1.15 : Une variante de l'inégalité de Poincaré.**

Soient  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $\Gamma_1$  une partie de la frontière non négligeable pour la mesure superficielle. Alors la semi-norme  $v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right) \right]^{\frac{1}{2}}$  définie sur le sous-espace  $W = \{v \in H^1(\Omega) \text{ telle que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$  est une norme équivalente à la norme induite



sur  $W$  par  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . Et il existe une constante  $c_1(\Omega) > 0$  telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1(\Omega) \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in W$$

**Preuve :** Vérifions d'abord que la semi-norme  $v \mapsto |v|_{1,\Omega} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right) \right]^{\frac{1}{2}}$  est une norme sur  $W$ . Si, pour un élément  $v \in W$  on avait  $|v|_{1,\Omega} = 0$ , cela donnerait :

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

L'ouvert  $\Omega$  étant connexe,  $v$  serait nécessairement constante sur  $\Omega$ . Or,  $v|_{\Gamma_0} = 0$  par définition de  $W$ . D'où  $v = 0$  sur  $\Omega$ . Ce qui vérifie l'axiome qui fait d'une semi-norme une norme. Il s'agit maintenant de montrer l'équivalence sur  $W$  entre les normes  $|v|_{1,\Omega}$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . Ce qui revient à prouver l'existence de deux constantes positives  $a_1(\Omega) < a_2(\Omega)$  vérifiant  $a_1(\Omega) \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq |v|_{1,\Omega} \leq a_2(\Omega) \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in W$ . Par définition de la norme de l'espace  $H^1(\Omega)$ , on a :  $\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{1,\Omega}^2$ . Donc pour  $a_2(\Omega) = 1$ , on a bien :  $|v|_{1,\Omega} \leq a_2(\Omega) \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in W$ . Il s'agit donc de montrer l'autre inégalité. On raisonnera par l'absurde en supposant que :

$$\forall \alpha > 0, \text{ il existe une fonction } v_\alpha \in W \text{ telle que } \alpha \|v_\alpha\|_{H^1(\Omega)} > |v_\alpha|_{1,\Omega} \quad (1.15.1)$$

Il existerait alors une suite  $\{v_m, m \in \mathbb{N}^*\} \subset W$  telle que :  $\frac{1}{m} \|v_m\|_{H^1(\Omega)} > |v_m|_{1,\Omega}$ . Soit  $\{w_m, m \in \mathbb{N}^*\}$  la suite définie par  $w_m = \frac{v_m}{\|v_m\|_{H^1(\Omega)}}$ . Elle vérifie :

$$\|w_m\|_{H^1(\Omega)} = 1 \text{ et } |w_m|_{1,\Omega} < \frac{1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

L'hypothèse  $\|w_m\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$  fait de  $\{w_m, m \in \mathbb{N}^*\}$  une suite bornée dans  $W$  pour la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . L'inclusion  $W \subset H^1(\Omega)$  et la compacité de l'injection  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  montrent que la suite  $\{w_m, m \in \mathbb{N}^*\}$  admet une sous-suite  $\{w_{\mu(m)}, m \in \mathbb{N}\}$  qui converge

dans  $L^2(\Omega)$  vers une fonction qu'on notera  $w$ . La suite  $\{w_{\mu(m)}, m \in \mathbb{N}^*\}$  est donc de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Et l'hypothèse :  $|w_m|_{1,\Omega} < \frac{1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$  entraîne la convergence :

$\lim_{m \rightarrow \infty} |w_m|_{1,\Omega} = 0$ . Il s'en suit que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_m}{\partial x_i} \right|^2 = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

c'est à dire que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la suite  $\left\{ \left( \frac{\partial w_m}{\partial x_i} \right), m \in \mathbb{N}^* \right\}$  converge vers zéro dans  $L^2(\Omega)$ . Donc  $\left\{ \left( \frac{\partial v_{\mu(m)}}{\partial x_i} \right), m \in \mathbb{N}^* \right\}$  est, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Ce qui implique que  $\{w_{\mu(m)}, m \in \mathbb{N}^*\}$  est une suite de Cauchy dans  $W$  pour la norme de  $H^1(\Omega)$ . Elle converge donc vers  $w \in H^1(\Omega)$ . Et par continuité de la norme on obtient :  $\|w\|_{H^1(\Omega)}^2 = 1$ . On a d'autre part,

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{dans } \Omega$$

La fonction  $w$  est donc nécessairement constante par connexité de l'ouvert  $\Omega$ . Elle est, d'après la première partie de la preuve une fonction identiquement nulle. Ce qui est incompatible avec le fait que  $\|w\|_{H^1(\Omega)}^2 = 1$ . Finalement, l'assertion (1.15.1) est nécessairement fausse. Ce qui prouve qu'il existe une constante  $a_1(\Omega) > 0$  telle que :

$$a_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq |v|_{1,\Omega} \quad \forall v \in W$$

**Proposition 1.16 :**

*Soient  $\Omega$  un ouvert borné de frontière  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et*

$$H^1(\Delta, \Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \text{ tel que : } \Delta v \in L^2(\Omega)\}$$

muni de la norme  $\|v\|_{H^1(\Delta, \Omega)}^2 = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2$ . L'application  $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)$ , qui à tout  $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$  associe  $\partial_{\nu} v|_{\Gamma}$  se prolonge en une application continue de  $H^1(\Delta, \Omega)$

dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et qui, à tout  $v \in H^1(\Delta, \Omega)$  associe la forme  $\partial_\nu v|_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  définie pour  $v \in H^1(\Delta, \Omega)$  par :

$$\langle \partial_\nu v|_\Gamma, w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_{\Omega} (w \Delta v + \nabla w \nabla v) dx \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

**Preuve :** Voir la remarque 2.1 faite par A. HEMINNA dans [9] en page 8.

**Proposition 1.17 :**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné de frontière  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Il existe alors une constante  $\eta_\Omega > 0$  telle que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v \in L^2(\Omega) \\ v|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \end{array} \right\} \implies v \in H^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \eta_\Omega \cdot [\|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|v|_\Gamma\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}]$$

**Proposition 1.18 :**

Soit  $\Gamma$  une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$  et de dimension  $n - 1$  avec  $n \in \{2, 3\}$ . L'opérateur  $I - \Delta_\Gamma : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  défini par :

$$(I - \Delta_\Gamma)(w) = w - \Delta_\Gamma w$$

est un isomorphisme.

## I.3 - Principe d'invariance de LaSalle et Stabilisation

### I.3.1 - Introduction

On appelle système dynamique sur un espace métrique  $Z$  toute famille  $(S(t))_{t \geq 0}$  d'applications continues de  $Z$  dans  $Z$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1)  $S(0) = \mathbf{Id}_Z$
- 2)  $S(t+s) = S(t) \circ S(s) \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall s \geq 0$
- 3) l'application  $\left\{ \begin{array}{l} u_Z : [0, +\infty[ \rightarrow Z \\ t \mapsto S(t)z \end{array} \right\}$  est continue  $\forall z \in Z$

Tout semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  fortement continu sur un espace de Hilbert  $H$  est un système dynamique sur  $H$ , considéré comme espace métrique complet muni de la distance induite par sa norme hilbertienne. Par définition, la trajectoire issue d'un élément  $z \in H$  pour un semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$ , considéré comme système dynamique est l'ensemble  $\{S(t)z, t \geq 0\}$ .

On appellera ensemble  $\omega$ -limite de  $z$  pour  $(S(t))_{t \geq 0}$ , l'ensemble noté  $\omega(z)$  et défini par

$$\omega(z) = \{ y \in Z, \exists t_n \mapsto +\infty \text{ tel que } S(t_n)z \mapsto y \text{ quand } n \mapsto +\infty \}$$

**Théorème 1.34 :** On a :

- i)  $\omega(S(t)z) = \omega(z) \quad \forall z \in H \text{ et } \forall t \geq 0$
- ii)  $S(t)(\omega(z)) \subset \omega(z) \quad \forall z \in H \text{ et } \forall t \geq 0$
- iii)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si, de plus, la trajectoire } \{S(t)z, t \geq 0\} \text{ est relativement compacte dans } H \text{ alors :} \\ \omega(z) \neq \emptyset \text{ et } S(t)(\omega(z)) = \omega(z) \quad \forall z \in H \text{ et } \forall t \geq 0 \end{array} \right\}$

**Preuve :** Voir Alain HARAUX dans [6].

**Définition 1.29 : Fonction de Liapounov**

Soient  $(Z, d)$  un espace métrique complet et  $(S(t), t \geq 0)$  un système dynamique sur  $Z$ . On dit qu'une fonction continue  $\Phi$  de  $Z$  dans  $\mathbb{R}$  est une fonction de Liapounov pour le système dynamique  $(S(t), t \geq 0)$  si :

$$\Phi(S(t)z) \leq \Phi(z), \quad \forall z \in Z \text{ et } \forall t \geq 0$$

**Proposition 1.19 :**

Soit  $(S(t), t \geq 0)$  un système dynamique sur un espace métrique  $Z$  et  $\Phi$  une fonction de Liapounov pour  $(S(t), t \geq 0)$ . Pour tout  $z \in Z$  :

$$t \mapsto \Phi(S(t)z) \text{ est continue et décroissante}$$

**Preuve :** Par définition d'un système dynamique, la fonction de  $[0, +\infty[$  dans  $Z$  définie par  $t \mapsto S(t)z$  est continue. La fonction de Liapounov  $\Phi$  est, par définition, continue. Donc la fonction  $[0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $t$  associe  $\Phi(S(t)z)$  est continue. Montrons qu'elle est décroissante. Soient  $t_1 > t_2 \geq 0$  et  $z \in Z$ . En posant  $\theta = t_1 - t_2$ , on a :

$$\Phi(S(t_1)z) = \Phi(S(t_2 + \theta)z) = \Phi(S(\theta)(S(t_2)z))$$

On obtient alors, par définition d'une fonction de Liapounov, l'inégalité :

$$\Phi(S(\theta)(S(t_2)z)) \leq \Phi(S(t_2)z)$$

C'est à dire :  $\Phi(S(t_1)z) \leq \Phi(S(t_2)z)$ . D'où l'implication :

$$t_1 > t_2 \geq 0 \implies \Phi(S(t_1)z) \leq \Phi(S(t_2)z)$$

**Proposition 1.20 :**

Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un semi-groupe de contractions sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors :

$$\begin{aligned} \Phi : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \Phi(v) = \|v\|_H^2 \end{aligned} \quad \text{est une fonction de Liapounov pour } (S(t))_{t \geq 0}$$

**Preuve :** La continuité de la norme  $\| \cdot \|_H : H \rightarrow \mathbb{R}_+ : v \mapsto \|v\|_H$  entraîne la continuité de  $\Phi : v \mapsto \|v\|_H^2$ . La famille  $(S(t))_{t \geq 0}$  étant un semi-groupe de contractions, on a :

$$\|S(t)v\|_H \leq \|v\|_H \quad \forall v \in H$$

Ce qui entraîne :  $\|S(t)v\|_H^2 \leq \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H$  c'est à dire :  $\Phi(S(t)v) \leq \Phi(v) \quad \forall v \in H$ . D'où  $v \mapsto \Phi(v) = \|v\|_H^2$  est une fonction de Liapounov pour  $(S(t))_{t \geq 0}$ .

I.3.2 - Principe d'invariance de LaSalle et Stabilité**Théorème 1.35 : Principe d'invariance de LaSalle**

Soient  $\Phi$  une fonction de Liapounov pour un système dynamique  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur un espace métrique complet  $Z$  et  $z \in Z$ . Si la trajectoire issue de  $z$  est relativement compacte dans  $Z$  alors :

- i) Il existe une constante finie  $c \in \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(S(t)z) = c$
- ii)  $\Phi(y) = c \quad \forall y \in \omega(z)$
- iii) En particulier on a :  $\Phi(S(t)y) = \Phi(y) = c \quad \forall y \in \omega(z) \text{ et } \forall t \geq 0$

**Preuve :** Se reporter à [6] de A. HARAUX. Masson (Paris, Bonn, Milan 1991) en page 18

**Définition 1.30 : Stabilité forte d'un semi-groupe :**

On dit qu'il y a stabilité forte d'un semi-groupe fortement continu  $T(t)_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $H$  si :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|T(t)z\|_H = 0 \quad \forall z \in H$$

**Commentaire :** Dans l'énoncé du Principe d'invariance de LaSalle, la constante  $c$  dépend de l'élément  $z \in Z$ . On se place dans le cas où  $A$  est un opérateur  $m$ -dissipatif sur un espace de Hilbert  $H$  et  $(S(t))_{t \geq 0}$  est le semi-groupe qu'il engendre sur  $H$ . L'intérêt du Principe d'Invariance de LaSalle réside dans le fait que si pour tout  $u \in D(A)$  la trajectoire  $\{S(t)u, t \geq 0\}$  est relativement compacte dans  $H$ , alors il suffira de prendre pour fonction de Liapounov le carré de la norme et de montrer que  $c(u)$  est nulle pour conclure la stabilité forte du semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$ .

**Proposition 1.21 : Condition nécessaire et suffisante de stabilité forte.**

Soient  $A$  un opérateur  $m$ -dissipatif sur un espace de Hilbert  $H$  et  $(S(t))_{t \geq 0}$  le semi-groupe de contractions engendré par  $A$  sur  $H$ . Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)u\|_H = 0$  pour tout  $u \in D(A)$  alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)u\|_H = 0 \quad \forall u \in H$$

**Preuve :** Soit  $u \in H$  et  $\varepsilon > 0$ . D'après la remarque 1.3 de la page 26,  $D(A)$  est dense dans  $H$ . Il existe donc une suite  $\{u_m, m \in \mathbb{N}\} \subset D(A)$  qui converge dans  $H$  vers  $u$ . Il existe donc un entier  $m_0$  tel que :

$$m \geq m_0 \implies \|u - u_m\|_H < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.21.1)$$

$S(t)$  étant pour tout  $t \geq 0$ , une contraction, l'inégalité triangulaire :

$$\|S(t)u\|_H \leq \|S(t)u - S(t)u_{m_0}\|_H + \|S(t)u_{m_0}\|_H$$

implique alors pour tout  $t \geq 0$ , l'inégalité  $\|S(t)u\|_H \leq \|u - u_{m_0}\|_H + \|S(t)u_{m_0}\|_H$  qui entraîne d'après (1.29.1) :

$$\|S(t)u\|_H \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|S(t)u_{m_0}\|_H \quad \forall t \geq 0 \quad (1.21.2)$$

Or, par hypothèse, on a :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)u_{m_0}\|_H = 0$  c'est à dire qu'il existe  $t_0 > 0$  tel que :  $t \geq t_0 \implies \|S(t)u_{m_0}\|_H < \frac{\varepsilon}{2}$ . On en déduit d'après (1.21.2) :  $t \geq t_0 \implies \|S(t)u\|_H < \varepsilon$ . D'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)u\|_H = 0 \quad \forall u \in H$$

**Proposition 1.22 : Critère de stabilité forte d'un semi-groupe.**

Soient  $A$  un opérateur  $m$ -dissipatif sur un espace de Hilbert  $H$  et  $(S(t))_{t \geq 0}$  le semi-groupe de contractions engendré par  $A$  sur  $H$ . Si pour tout  $u \in D(A)$ , la trajectoire  $\{S(t)u, t \geq 0\}$  est relativement compacte dans  $H$ . Alors :

$$0 \in \left( \bigcap_{u \in D(A)} \omega(u) \right) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)z\|_H = 0, \quad \forall z \in H$$

**Preuve :** D'après la proposition précédente, il suffit de montrer pour tout  $u \in D(A)$  l'implication :

$$0 \in \omega(u) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)u\|_H = 0$$

Soit  $u \in D(A)$ . La trajectoire  $\{S(t)u, t \geq 0\}$  étant, par hypothèse, relativement compacte dans  $H$ , il existe par application du Principe d'invariance de LaSalle, une constante réelle  $c(u)$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)u\|_H = c(u) = \|v\|_H \quad \forall v \in \omega(u)$$



où  $\omega(u)$  désigne l'ensemble  $\omega$ -limite de  $u$  qui est défini par :

$$\omega(u) = \{ v \in H, \exists t_n \mapsto +\infty \text{ tel que } S(t_n)u \mapsto v \text{ dans } H \text{ quand } n \mapsto +\infty \}$$

Or, par hypothèse, on a  $0 \in \omega(z)$ . Donc  $c(u) = 0$ . D'où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)u\|_H = 0, \quad \forall u \in D(A)$$

**Définition 1.31 : Stabilité exponentielle d'un semi-groupe :**

On dit qu'un semi-groupe fortement continu de contractions  $T(t)_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $H$  est exponentiellement stable sur  $H$  s'il existe deux constantes positives :  $M > 0$  et  $\omega > 0$  telles que :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M.e^{-\omega t} \quad \forall t \geq 0$$

**Proposition 1.23 : Critère de stabilité exponentielle d'un semi-groupe.**

Un semi-groupe de contractions  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $H$  est exponentiellement stable si, et seulement si son type est strictement négatif. C'est à dire :

$$\inf_{t > 0} \frac{1}{t} \text{Log} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} < 0$$

**Preuve :** Si  $S(t)_{t \geq 0}$  est exponentiellement stable, il existe deux constantes strictement positives  $M$  et  $\omega$  vérifiant pour tout  $t \geq 0$  l'inégalité :  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M.e^{-\omega t}$ . Ce qui est équivalent à :  $\text{Log} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq -\omega t + \text{Log}(M) \quad \forall t \geq 0$ . On en déduit alors :

$$\frac{1}{t} \text{Log} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq -\omega + \frac{\text{Log}(M)}{t} \quad \forall t > 0$$

D'où :

$$\inf_{t > 0} \frac{1}{t} \text{Log} \|S(t)\|_H < 0$$

Réciproquement, on raisonne par l'absurde en supposant que pour tout  $\omega > 0$  il existe  $t(\omega) > 0$  tel que :  $e^{-\omega t_\omega} < \|S(t_\omega)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ . Alors pour tout  $\omega > 0$  il existe  $t(\omega) > 0$  tel que :

$$-\omega t_\omega < \text{Log} \|S(t_\omega)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 0$$

Or  $t \mapsto \|S(t)u\|_H$  est pour tout  $u \in H$  une fonction de Liapounov donc décroissante.

Donc :

$$\forall \omega > 0, \exists t(\omega) > 0 \text{ tel que } \frac{1}{t} \text{Log} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} > -\omega \quad \forall t \geq t(\omega)$$

Comme :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)}}{t} = \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \text{Log} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)}$$

On en déduit alors l'équivalence :

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M.e^{-\omega t} \quad \forall t \geq 0 \iff \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \text{Log} \|S(t)\|_H \geq 0$$

## I.4 - Éléments de géométrie différentielle

### I.4.1 - Quelques généralités

Soit  $X$  un espace topologique et  $m$  un entier naturel non nul. On dit que  $X$  est une variété topologique de dimension  $m$  si pour tout  $x \in X$  il existe un voisinage ouvert de  $x$  homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . On dit qu'un sous-ensemble  $A \subset X$  partage la variété  $X$  en  $k$  régions ( $k$  étant un entier éventuellement infini) si son complémentaire  $X - A$  possède  $k$  composantes connexes. Une carte de  $X$  est un triplet  $(U, \varphi, V)$  où  $U$  et  $V$  sont des ouverts respectivement de  $X$  et  $\mathbb{R}^m$  et  $\varphi : U \rightarrow V$  un homéomorphisme de  $U$  dans  $V$ . Un atlas d'une variété topologique  $X$  de dimension  $m$  est une famille  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda, V_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$  de cartes de  $X$  telle que  $\{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  forme un recouvrement ouvert de  $X$ . Deux cartes  $(U_1, \varphi_1, V_1)$  et  $(U_2, \varphi_2, V_2)$  seront dites compatibles si  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  ou si les deux homéomorphismes (réciproques l'un de l'autre) :

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x) \end{aligned}$$

sont indéfiniment différentiables. On notera  $[\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}]_i$  la  $i$ -ème composante de  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  qui est une fonction à variable dans  $\mathbb{R}^m$  et à valeurs réelles. On dira que deux cartes  $(U_1, \varphi_1, V_1)$  et  $(U_2, \varphi_2, V_2)$  sont co-orientables ou bien si  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  ou bien si le déterminant de la matrice jacobienne  $\left[ \left( \frac{\partial [\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}]_i}{\partial x_j} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, m\}^2} \right]$  est strictement positif en tout point de  $U_1 \cap U_2$ . On dit qu'une variété  $X$  de dimension  $m$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , où  $k$  est un entier naturel, s'il existe un atlas  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda, V_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$  de  $X$  tel que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , l'homéomorphisme

$\varphi_\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et le déterminant de la matrice jacobienne  $\left[ \left( \frac{\partial[\varphi_\lambda]_i}{\partial x_j} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, m\}^2} \right]$  ne s'annule en aucun point de  $U_\lambda$ . Une variété de classe  $\mathcal{C}^1$  est dite orientable si elle possède un atlas formé de cartes deux à deux co-orientables.

On appelle sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m \in \{1, \dots, n\}$  toute partie de  $\mathbb{R}^n$  munie d'une structure de variété topologique de dimension  $m$ . On appelle hypersurface de  $\mathbb{R}^n$  toute sous-variété  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $n - 1$ . On ne s'intéressera dans cette partie qu'aux sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - 1$  avec  $n = 2$  ou  $n = 3$ . On pourra consulter [5] pour plus de détails.

**Théorème 1.36 : Caractérisation des hypersurfaces de classe  $\mathcal{C}^k$  :**

Une hypersurface  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si, et seulement si, pour tout  $x_0 \in \Sigma$ , il existe un voisinage ouvert  $U_{x_0}$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et une fonction  $\varphi_{x_0} : U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  telle que :

$$\frac{\partial \varphi_{x_0}}{\partial x_j}(x_0) \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \Sigma \cap U_{x_0} = \{x \in U_{x_0} \text{ tel que } : \varphi_{x_0}(x) = 0\}$$

**Preuve :** Voir [11] de VO-KHAC KHOAN en page 108.

**Définition 1.32 : Ouvert à bord de classe  $\mathcal{C}^k$  :**

Un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit à bord de classe  $\mathcal{C}^k$  si, et seulement si, il est égal à l'intérieur de son adhérence ( $\Omega = \overset{\circ}{\overline{\Omega}}$ ) et sa frontière  $\Sigma$  est une hypersurface de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^k$ . On dira alors que  $\Sigma$  est le bord de l'ouvert  $\Omega$  et on écrira :  $\partial\Omega = \Sigma$ .

## Paramétrisation d'une hypersurface

### Définition 1.33 : Paramétrage d'une courbe plane

On appelle paramétrage d'une courbe plane  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^k$  la donnée d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et d'une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\varphi|_I : \overset{\circ}{I} \rightarrow \varphi(\overset{\circ}{I})$  soit un homéomorphisme de classe  $\mathcal{C}^k$  vérifiant :

$$\varphi(I) = \Gamma \text{ et } \varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

Lorsque  $\Gamma$  est une courbe de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux, il existe un recouvrement fini  $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$  de  $\Gamma$  par des arcs de courbe de classe  $\mathcal{C}^k$  dont les intérieurs sont deux à deux disjoints. Dans ce cas un paramétrage de la courbe  $\Gamma$  est la donnée de  $m$  intervalles  $I_1, \dots, I_m$  d'intérieurs deux à deux disjoints dont la réunion est un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et de  $m$  applications  $\varphi_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  telles que  $\varphi(I_j) = \Gamma_j$  et  $(\varphi_j)|_{I_j} : \overset{\circ}{I}_j \rightarrow \overset{\circ}{\Gamma}_j$  soit un homéomorphisme de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $\varphi'_j(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I_j$  et :

$$\varphi_i|_{I_i \cap I_j} = \varphi_j|_{I_i \cap I_j} \text{ lorsque } I_i \cap I_j \neq \emptyset$$

### Définition 1.34 : Paramétrage d'une surface de $\mathbb{R}^3$ .

On appelle paramétrage d'une surface  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^k$  la donnée de deux intervalles  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{R}$  et d'une application  $\varphi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que :

$$(\varphi)|_{I \times J} : \overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{J} \rightarrow \varphi\left(\overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{J}\right)$$

soit un homéomorphisme de classe  $\mathcal{C}^k$  vérifiant :

$$\varphi(I \times J) = \Sigma \text{ et } \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right) (\alpha, \beta) \neq 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in I \times J$$

Espace tangent et vecteurs tangents à une courbe en un de ses points :

Soient  $\Gamma$  une courbe de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $(\varphi, I)$  un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Gamma$ . En chaque point  $M_0 = \varphi(t_0) \in \Gamma$  on définit le vecteur  $T(M_0)$  par :

$$T(M_0) = \varphi'(t_0)$$

On appelle vecteur tangent à  $\Gamma$  au point  $M_0$  tout vecteur colinéaire à  $T(M_0)$ . Et on appelle espace tangent à  $\Gamma$  au point  $M_0$ , l'ensemble noté  $T_{M_0}(\Gamma)$ , des vecteurs tangents à  $\Gamma$  au point  $M_0$ . En notant par  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$ , le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$  au point  $M_0$  est défini par :

$$\tau_{M_0} = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|_{\mathbb{R}^2}} \quad (I.4.1.1)$$

**Remarque 1.8 :** Le vecteur unitaire tangent en un point d'une courbe  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  ne dépend pas, au signe près, du paramétrage choisi. En effet, si on désigne par  $(J, \Psi)$  un autre paramétrage de  $\Gamma$ , l'application  $\alpha = \Psi^{-1} \circ \varphi$  définie de  $I$  dans  $J$  est bijective et de classe  $\mathcal{C}^1$ . Elle est donc strictement monotone. Il s'en suit que  $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$ . On obtient par composition :  $\varphi'(0) = \Psi'(t_0) \cdot \alpha'(0)$  avec  $t_0 = \alpha(0)$  et  $\varphi(0) = \Psi(t_0) = x$ . Donc :

$$T_x = \frac{\Psi'(t_0)}{\|\Psi'(t_0)\|_{\mathbb{R}^2}} = \left( \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} \right) \frac{\varphi'(0)}{\|\varphi'(0)\|_{\mathbb{R}^2}} = \pm \frac{\varphi'(0)}{\|\varphi'(0)\|_{\mathbb{R}^2}}$$

Espace tangent et vecteurs tangents à une surface en un de ses points :

Soient  $\Sigma$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $(I \times J, \varphi)$  un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Sigma$ . En tout point  $M_0 = \varphi(\alpha_0, \beta_0) \in \Sigma$  on définit les vecteurs  $T_1(M_0)$  et  $T_2(M_0)$  par :

$$T_j(M_0) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_j}(\alpha_0, \beta_0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_j}(\alpha_0, \beta_0), \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_j}(\alpha_0, \beta_0) \right) \quad j \in \{1, 2\} \quad (I.4.1.2)$$

Les vecteurs  $T_1(M_0)$  et  $T_2(M_0)$  sont linéairement indépendants en tout point  $M_0$  de  $\Sigma$ . On appellera vecteur tangent à  $\Sigma$  au point  $M_0$  toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs

et on appelle plan tangent à  $\Sigma$  au point  $M_0$ , l'espace qu'ils engendrent et qu'on notera

$T_{M_0}(\Sigma)$ , c'est à dire pour tout  $M_0 = \varphi(\alpha_0, \beta_0) \in \Sigma$  on a :

$$T_{M_0}(\Sigma) = \left\{ \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right) (\alpha_0, \beta_0), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

### Vecteurs unitaires tangents en un point d'une surface :

En désignant par  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$  on définit à partir des vecteurs tangents  $T_1(M_0)$  et  $T_2(M_0)$  les vecteurs unitaires  $\{\tau_1(M_0), \tau_2(M_0)\}$  tangents suivants :

$$\tau_j(M_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(\alpha_0, \beta_0) \left( \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(\alpha_0, \beta_0) \right\|_{\mathbb{R}^3} \right)^{-1} \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad (I.4.1.3)$$

### La normale unitaire extérieure à un ouvert :

On définira dans ce paragraphe les notions de vecteur normal, de normale unitaire en un point d'une hypersurface de  $\mathbb{R}^n$  et enfin la normale unitaire extérieure à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  en un point de son bord. Soient  $\Gamma$  une courbe plane de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $(I, \varphi)$  un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Gamma$ ,  $M_0 = \varphi(t_0)$  un point de  $\Gamma$  et  $\tau(M_0)$  le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$  au point  $M_0$  défini par :

$$\tau(M_0) = \frac{(\varphi'_1(t_0), \varphi'_2(t_0))}{\sqrt{[\varphi'_1(t_0)]^2 + [\varphi'_2(t_0)]^2}}$$

### **Définition 1.35 : La normale unitaire en un point d'une courbe plane :**

On appelle la normale unitaire au point  $M_0$  le vecteur unitaire orthogonal à  $\tau(M_0)$  et défini par :

$$n(M_0) = \frac{(-\varphi'_2(t_0), \varphi'_1(t_0))}{\sqrt{[\varphi'_1(t_0)]^2 + [\varphi'_2(t_0)]^2}} \quad (1.35.0)$$

**Définition 1.36 : La normale unitaire en un point d'une surface de  $\mathbb{R}^3$ .**

Soient  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  une surface de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $M_0 \in \Sigma$ . Soient  $T_1(M_0)$  et  $T_2(M_0)$  les vecteurs tangents à  $\Sigma$  au point  $M_0$  tels que définis par (1.4.1.2). On désigne  $T_1(M_0) \wedge T_2(M_0)$  le produit vectoriel des deux vecteurs  $T_1(M_0)$  et  $T_2(M_0)$  et par  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$ . On définit alors en tout point  $M_0 \in \Sigma$  la normale unitaire par :

$$n(M_0) = \frac{T_1(M_0) \wedge T_2(M_0)}{\|T_1(M_0) \wedge T_2(M_0)\|_{\mathbb{R}^3}} \quad (1.36.0)$$

**Définition 1.37 : La normale unitaire extérieure à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .**

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \{2, 3\}$ ) dont la frontière  $\partial\Omega$  est une hypersurface de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $M_0 \in \partial\Omega$  et  $n(M_0)$  la normale unitaire au point  $M_0$ . On appelle normale unitaire extérieure à  $\Omega$  au point  $M_0$ , le vecteur  $(-1)^i \cdot n(M_0)$  avec  $i \in \{1, 2\}$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, on ait :

$$M_0 - \varepsilon(-1)^i \cdot n(M_0) \in \Omega$$

Et on appellera normale unitaire intérieure à  $\Omega$  au point  $M_0$  le vecteur unitaire  $(-1)^i \cdot n(M_0)$  avec  $i \in \{1, 2\}$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, on ait :

$$M_0 + \varepsilon(-1)^i \cdot n(M_0) \in \Omega$$

#### I.4.2 - Calcul différentiel sur les hypersurfaces

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  de la topologie induite par sa norme euclidienne usuelle. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle champ de vecteurs sur  $\Omega$ , toute application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Le champ de vecteurs  $f$  est alors dit de classe  $\mathcal{C}^k$  si  $f$  l'est en tant qu'application. On appelle champ de vecteurs sur une variété  $M$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$  toute application  $\xi$  qui à tout point  $x \in M$  associe un vecteur tangent  $\xi(x) \in T_x M$ . Le champ  $\xi$



est dit de classe  $\mathcal{C}^k$  si l'application :

$$\begin{aligned} \xi : M &\longrightarrow TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \\ x &\longrightarrow \xi(x) \end{aligned}$$

est de classe  $\mathcal{C}^k$ . De même si  $V$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^k$  et de dimension  $d \leq n$ , un champ de vecteur sur  $V$  ( considérée comme variété de dimension  $d$ ) n'est qu'une application  $\xi : V \longrightarrow TV = \bigcup_{x \in V} T_x V$  qui à tout  $x \in V$  associe un vecteur tangent  $\xi(x) \in T_x V$ . Pour tout  $x \in V$ , on peut alors se donner un ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ , voisinage d'un point  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$  et un homéomorphisme  $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow V \cap U$  définie par :

$$(u_1, \dots, u_i, \dots, u_d) \longrightarrow \varphi(u_1, \dots, u_i, \dots, u_d)$$

de classe  $\mathcal{C}^k$  où  $U \subset \mathbb{R}^n$ , tel que  $\varphi(t_1, \dots, t_d) = x$  et tel que l'application linéaire  $\varphi'(t) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$  soit de rang  $d$ . La famille  $\left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right) (t), 1 \leq i \leq d \right\}$  est une base de l'espace tangent  $T_x V$ . Et alors, tout champ de vecteurs sur  $V$  s'écrit alors sous la forme :

$$\xi(x) = \xi(\varphi(t_1, \dots, t_d)) = \sum_{i=1}^d a_i(t) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(t) \quad \text{avec } a_i \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathcal{O}) \quad \forall i, 1 \leq i \leq d$$

### Champs tangentiels sur une hypersurface

Soient  $\Gamma$  une courbe de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$  et  $(I, \varphi)$  un paramétrage de  $\Gamma$ . On appelle champ tangentiel sur  $\Gamma$  toute application

$$\begin{aligned} f : \quad \Gamma &\longrightarrow T\Gamma = \bigcup_{x \in \Gamma} T_x \Gamma & \forall t \in I \\ x = \varphi(t) &\longrightarrow f(x) = h(t) \cdot \varphi'(t) \end{aligned}$$

où :  $h \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$  qui à tout point  $x = \varphi(t) \in \Gamma$  associe le vecteur tangent

$$f(x) = h(t) \cdot \varphi'(t) \in T_x \Gamma$$

Soient maintenant  $\Sigma$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^k, k \geq 1$  et  $(\varphi, I \times J)$  un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Sigma$ . On appelle champ tangentiel sur  $\Sigma$  toute application

$$f : \Gamma \rightarrow T\Sigma = \bigcup_{x \in \Sigma} T_x \Sigma \quad \forall (u_1, u_2) \in I \times J$$

$$x \longrightarrow f(x) = h_1(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u_1, u_2) + h_2(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u_1, u_2)$$

où  $(h_1, h_2) \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^{k-1}(J, \mathbb{R})$  qui à tout point  $x = \varphi(u_1, u_2) \in \Sigma$  associe le vecteur tangent à  $\Sigma$  au point  $x = \varphi(u_1, u_2)$ .

$$f(x) = h_1(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u_1, u_2) + h_2(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u_1, u_2)$$

Champ normal de vecteurs sur une hypersurface :

Si  $\Gamma$  est une courbe de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^k, k \geq 1$  et  $(I, \varphi)$  un paramétrage de  $\Gamma$ . On rappelle qu'en tout point  $x = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi(t) \in \Gamma$  on définit la normale unitaire par :

$$n(x) = \frac{(-\varphi_2'(t), \varphi_1'(t))}{\sqrt{[\varphi_1'(t)]^2 + [\varphi_2'(t)]^2}}$$

Si  $\Sigma$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^k, k \geq 1$  et  $(\varphi, I \times J)$  un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Sigma$ , on rappelle qu'en tout point  $x = \varphi(t) \in \Sigma$  la normale unitaire est définie par :

$$n(M_0) = \frac{T_1(M_0) \wedge T_2(M_0)}{\|T_1(M_0) \wedge T_2(M_0)\|_{\mathbb{R}^3}} \text{ où } T_j(M_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(M_0) \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

On appelle champ normal de vecteurs sur la courbe  $\Gamma$  toute application

$$g : \Gamma \longrightarrow \bigcup_{t \in I} \{\lambda(-\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)), \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \forall t \in I$$

$$x = \varphi(t) \longrightarrow g(x) = h(t) \cdot n(x) = h(t) \cdot \frac{(-\varphi_2'(t), \varphi_1'(t))}{\sqrt{[\varphi_1'(t)]^2 + [\varphi_2'(t)]^2}}$$

où  $h \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$  qui à tout point  $x = \varphi(t) \in \Gamma$  associe le vecteur normal

$$g(x) = h(t) \cdot \frac{(-\varphi_2'(t), \varphi_1'(t))}{\sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}}$$

On appelle champ normal de vecteurs sur  $\Sigma$  toute application

$$g : \Sigma \longrightarrow \bigcup_{(u_1, u_2) \in I \times J} \{\lambda n(\varphi(u_1, u_2)), \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \forall (u_1, u_2) \in I \times J$$

$$x \longrightarrow g(x) = \phi(u_1, u_2) \cdot n(\varphi(u_1, u_2))$$

où  $\phi \in \mathcal{C}^{k-1}(I \times J, \mathbb{R})$  qui à tout point  $x = \varphi(u_1, u_2) \in \Sigma$  associe le vecteur normal  $g(x) = \phi(u_1, u_2) \cdot n(\varphi(u_1, u_2))$ .

### Composante tangentielle et composante normale d'un champ de vecteurs sur $\Omega$ :

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une courbe de classe  $\mathcal{C}^k, k \geq 1$ , paramétrée par  $(\varphi, I)$ . L'espace  $T_x\Gamma$  tangent à  $\Gamma$  en un point  $x = \varphi(t) \in \Gamma$  étant de dimension 1, est engendré par le vecteur unitaire tangent :  $\tau(x) = \varphi'(t) \cdot \|\varphi'(t)\|^{-1}$ . La normale unitaire au point  $x$  est défini par :

$$n(x) = (-\varphi'_2(t), \varphi'_1(t)) \left( \sqrt{[\varphi'_1(t)]^2 + [\varphi'_2(t)]^2} \right)^{-1}$$

Les deux vecteurs  $\{\tau(x), n(x)\}$  forment une base orthonormée du plan. Tout champ de vecteurs  $w$  sur  $\Omega$  s'écrit alors de façon unique sous la forme :  $w(x) = a_1(x)\tau(x) + a_2(x)n(x)$  où  $(a_1, a_2)$  sont deux fonctions scalaires de classe  $\mathcal{C}^k, k \geq 1$  définies grâce aux propriétés d'orthogonalité par :

$$a_1(x) = \langle w(x), \tau(x) \rangle \quad \text{et} \quad a_2(x) = \langle w(x), n(x) \rangle$$

### **Définition 1.38 :**

On appelle composante tangentielle (en un point  $x_0 = \varphi(t_0)$  du bord d'un ouvert  $\Omega$  du plan) d'un champ de vecteur  $w$  sur  $\Omega$ , le champ tangentiel noté  $w_T$  défini sur  $\Omega$  qui à

tout  $x \in \Omega$  associe le vecteur tangent  $\langle w(x), \tau(x_0) \rangle \cdot \tau(x_0)$ . Si  $\Gamma$  est paramétrée par  $(\varphi, I)$ , la composante tangentielle est définie par :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow T\Gamma = \bigcup_{x \in \partial\Omega} T_x(\partial\Omega) \\ w_T : \\ \varphi(t) = x &\longmapsto w_T(x) = \frac{w_1(x) \cdot \varphi'_1(t_0) + w_2(x) \cdot \varphi'_2(t_0)}{\sqrt{[\varphi'_1(t_0)]^2 + [\varphi'_2(t_0)]^2}} \cdot (\varphi'_1(t_0), \varphi'_2(t_0)) \end{aligned}$$

Et on appelle composante normale du champ  $w$  le champ normal  $w_N$  défini sur  $\Omega$  et qui à tout  $x \in \Omega$  associe le vecteur normal  $\langle w(x), n(x_0) \rangle \cdot n(x_0)$ . Et on a :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow n(x) \cdot \mathbb{R} \\ w_N : \\ \varphi(t) = x &\longmapsto w_N(x) = \frac{w_2(x) \cdot \varphi'_1(t_0) - w_1(x) \cdot \varphi'_2(t_0)}{\sqrt{[\varphi'_1(t_0)]^2 + [\varphi'_2(t_0)]^2}} \cdot (-\varphi'_2(t_0), \varphi'_1(t_0)) \end{aligned}$$

**Définition 1.39 :**

Soit  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  dont le bord  $\Sigma$  est une surface de classe  $\mathcal{C}^k$ , l'espace  $T_x\Sigma$  tangent à  $\Sigma$  en  $x \in \Sigma$ , de dimension 2, est engendré par deux vecteurs tangents :

$$\tau_j(M_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}(\alpha_0, \beta_0) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}(\alpha_0, \beta_0) \right\|_{\mathbb{R}^3}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec } j \in \{1, 2\}$$

On appelle composante tangentielle en un point  $M_0$  de la frontière  $\Sigma = \partial\Omega$  d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  d'un champ de vecteurs  $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , le champ tangentiel noté  $w_T$  et définie par :

$$w_T(x) = P_{T_x\Sigma}(w(x)) = \langle w(x), \tau_1(M_0) \rangle \cdot \tau_1(M_0) + \langle w(x), \tau_2(M_0) \rangle \cdot \tau_2(M_0)$$

où  $P_{T_x\Sigma}(w(x))$  désigne la projection orthogonale de  $w(x)$  sur l'espace tangent  $T_{M_0}\Sigma$ . Donc

$$w_T(x) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{w_i(x) \left( \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(M_0) \right)}{\sqrt{\left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_j} \right)^2(M_0) + \left( \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_j} \right)^2(M_0) + \left( \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_j} \right)^2(M_0)}} \right) \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_j}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_j}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_j} \right) (M_0)$$

La composante normale est définie par :

$$w_N(x) = \langle w(x), n(x) \rangle \cdot n(x)$$

**Définition 1.40 : Gradient d'une fonction scalaire.**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  où  $\Omega$  est ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle gradient de la fonction  $f$  le champ de vecteurs noté  $\nabla f$  (ou encore  $grad(f)$ ) et défini par :

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

**Application : composante tangentielle du champ gradient :**

Soient  $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$  où  $\Omega$  est ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est une hypersurface de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$  paramétrée par  $(I_1 \times \dots \times I_{n-1})$  et une fonction  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$  et  $M_0 = (t_1, \dots, t_{n-1})$  un point de  $\Gamma$ . Les vecteurs unitaires  $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$  tangents au point  $M_0$  forment une base de l'espace  $T_{M_0}\Gamma$  tangent à  $\Gamma$  au point  $M_0$  et sont définis par :

$$\tau_j(M_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(t_1, \dots, t_{n-1}) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(t_1, \dots, t_{n-1}) \right\|_{\mathbb{R}^3}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec } j \in \{1, \dots, n-1\}$$

**Définition 1.41 : Gradient tangentiel d'une fonction.**

On appelle gradient tangentiel de la fonction  $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$  au point  $M_0 \in \Gamma$  le champ de vecteur tangentiel noté  $\nabla_{\text{T}} f$  défini sur la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  par :

$$(\nabla_{\text{T}} f) : \Gamma \longrightarrow T\Gamma = \bigcup_{M \in \Gamma} T_M \Gamma$$

$$M = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) \longmapsto (\nabla_{\text{T}} f)(M) = \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (M), \tau_j(M) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \tau_j(M)$$

ou plus explicitement pour  $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$  et  $M = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1})$  :

$$(\nabla_{\text{T}} f)(M) = \sum_{j=1}^{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}(t) \right) \right] \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} \right)^2(t) \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_j} \right)(t)$$

Dérivées tangentielles et dérivée normale :

Soit  $(0, e_1, \dots, e_n)$  le repère orthonormé usuel de  $\mathbb{R}^n$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  représente sa base canonique. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . On rappelle que la dérivée d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$  en un point  $x \in \Omega$ , notée  $f'(x)$  est la forme linéaire  $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  définie par :

$$f'(x)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot h_i$$

$$\text{où : } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \eta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\eta}$$

est appelée dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la variable  $x_i$ . Formellement, on peut écrire :

$$f' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

où  $dx_i$  désigne la forme différentielle  $dx_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  définie par :  $dx_i(h_1, \dots, h_n) = h_i$ . La dérivée  $f'$  est donc l'application  $f' : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  définie par :

$$f' : x_0 \mapsto f'(x_0) : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, \dots, h_n) \mapsto f'(x_0)((h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i \end{array} \right\}$$

Cette écriture liée au repère orthonormé,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  en dépend et on remarquera que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

**Définition 1.42 : Dérivée suivant un vecteur.**

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une application dérivable sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle, lorsqu'elle existe, dérivée de  $f$  au point  $x \in \Omega$  suivant le vecteur  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  la quantité réelle notée  $\partial_v f(x)$  ou encore  $\frac{\partial f}{\partial v}$  et définie par :

$$\partial_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

**Proposition 1.24 : Dérivée suivant un vecteur et dérivées partielles.**

Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  et  $v \in \mathbb{R}^n$  un vecteur dont les composantes dans la base canonique  $\{e_1, \dots, e_n\}$  sont  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i$$

**Preuve :** On pose  $\varphi(t) = x + tv$  et  $U = \varphi^{-1}(\Omega)$ . L'application composée  $g = f \circ \varphi$  est dérivable en 0 et on a :

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \partial_v f(x)$$

Mais on a aussi :  $g'(0) = f'(x) (\varphi'(0))$  et comme :  $\varphi'(0) = v$  et  $f' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  avec :

$$f'(x)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$$

donc :

$$f'(x) (\varphi'(0)) = f'(x)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i$$

d'où :

$$\partial_v f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i = \langle \nabla f, v \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

**Définition 1.43 : La dérivée normale.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ . On suppose que la frontière  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soient  $x \in \partial\Omega$  et  $n(x) = (n_1(x), \dots, n_n(x))$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  en  $x$ . On appelle dérivée normale de la fonction  $f$  au point  $x$ , la dérivée de  $f$  suivant le vecteur normal  $n(x)$ . On la note  $\partial_\nu f$  (ou encore  $\frac{\partial f}{\partial n}$ ) et on a alors :

$$\partial_{v(x)} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} n_i(x) = \langle \nabla f, n \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

**Définition 1.44 : Dérivées tangentielles sur une hypersurface :**

Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  où  $\Omega$  est un ouvert borné dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $\Gamma$  une partie connexe de sa frontière  $\partial\Omega$ . Soit  $(I_1 \times \dots \times I_{n-1}, \varphi)$  un paramétrage de  $\Gamma$  et  $x = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) \in \Gamma$ . On rappelle que l'espace tangent est engendré par les vecteurs unitaires tangents définis par :

$$\tau_j(x) = \frac{\left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_j} \right) (t_1, \dots, t_{n-1})}{\left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (t_1, \dots, t_{n-1})} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

La dérivée tangentielle de  $f$  en  $x$  suivant le vecteur unitaire tangent  $\tau_j(x)$  est alors définie par :

$$\frac{\partial f}{\tau_j(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} (\varphi^{-1}(x)) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} \right)^2 (\varphi^{-1}(x)) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \quad (1.44.1)$$

**Remarque 1.8 :** Si  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $x \in \partial\Omega = \Gamma$  d'après 1.44.1 et la définition 1.41 du gradient tangentiel on a :

$$(\nabla_{\mathbb{T}} f)(x) = \left( \frac{\partial f}{\tau_1(x)}, \dots, \frac{\partial f}{\tau_{n-1}(x)} \right)$$

Et la dérivée  $\partial_\nu f$  normale n'est autre que la composante normale du champ de vecteurs  $\nabla f$ . L'ensemble  $\{\tau_1(x), \dots, \tau_{n-1}(x)\} \cup \{\nu\}$  est donc une base de  $\mathbb{R}^n$ . D'où :

$$\nabla u(x) = \nabla_{\mathbb{T}} u(x) + \partial_\nu u(x) \nu$$

**Définition 1.45 : Dérivabilité et différentiabilité sur une hypersurface.**

Soit  $\Gamma$  une courbe plane (de  $\mathbb{R}^2$ ) de classe  $\mathcal{C}^1$ , paramétrée par  $(I, \varphi)$  où  $I$  est un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $\varphi$  une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On dit qu'une fonction  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en un point  $m = \varphi(t_0) \in \Gamma$  si l'application  $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable au point  $t_0$ . Sa dérivée  $\frac{df}{dt}$  est un champ tangentiel de  $\Gamma$  dans  $T\Gamma$  défini par

$$(x_0, y_0) = \varphi(t_0) \mapsto \frac{\partial f}{\partial \Gamma}(x_0, y_0) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t_0) \frac{(\varphi'_1(t_0), \varphi'_2(t_0))}{\sqrt{[\varphi'_1(t_0)]^2 + [\varphi'_2(t_0)]^2}}$$



Soit  $\Sigma$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , paramétrée par la donnée de deux intervalles  $(I, J)$  de  $\mathbb{R}$  et d'une application.  $\varphi : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On dit qu'une fonction  $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en un point  $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(\alpha_0, \beta_0) \in \Sigma$  si l'application l'application  $f \circ \varphi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable au point  $(\alpha_0, \beta_0)$ . Et sa dérivée notée  $\frac{df}{d\Sigma} : \Gamma \longrightarrow T\Sigma$  est un champ tangentiel sur  $\Sigma$  défini par :

$$\frac{\partial f}{\partial \Sigma}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\tau_1(x)} \tau_1(x) + \frac{\partial f}{\tau_2(x)} \tau_2(x)$$

où  $\frac{\partial f}{\tau_1(x)} \tau_1(x)$  représentent les dérivées tangentielles telles que définies dans (1.44.1) :

$$\frac{\partial f}{\tau_j(x)} = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} \right)^2 (\varphi^{-1}(x)) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} (\varphi^{-1}(x)) \quad j \in \{1, \dots, n-1\} \quad (1.45.1)$$

**Remarque 1.9 :** Cette définition a un sens et ne dépend pas du paramétrage. Et on vérifie aisément que :

$$\text{sur } \Gamma \text{ on a : } \nabla_{\Gamma} f = \frac{df}{d\Gamma} \quad \text{et sur } \Sigma \text{ on a : } \nabla_{\Gamma} f = \frac{df}{d\Sigma}$$

**Définition 1.46 :** Matrice jacobienne et divergence d'un champ de vecteurs.

Soit sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  une application  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  :

$$f \longmapsto x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = [f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_n(x)]$$

On appelle matrice jacobienne de  $f$  la matrice définie par :

$$M(f) = (a_{i,j}) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$$

Et on appelle divergence de  $f$  sa trace. Notée par  $div(f)$  la divergence de  $f$  est définie par :

$$div(f)(x) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \right)$$

Application : Définition du Laplacien d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  :

Soit sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  une application  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Selon la définition 1.40, le gradient de  $f$  est le champ de vecteurs  $\nabla f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  défini par

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Ses composantes sont pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  définies par  $[\nabla f(x_1, \dots, x_n)]_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  ce qui donne par définition de la divergence :  $div(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x)$ . Le Laplacien défini comme divergence du champ gradient est donné par la formule :

$$div(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

**Définition 1.47 : Laplacien d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ .**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle Laplacien l'opérateur noté  $\Delta$  qui à toute fonction  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$  associe la fonction scalaire notée  $\Delta f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$  et définie par :

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

**Définition 1.48 : Laplacien tangential d'un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^2$ .**

On appelle Laplacien tangential sur une hypersurface  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^n$  l'opérateur noté  $\Delta_{\mathbb{T}}$  qui à toute fonction  $u : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  associe la divergence du champ tangential  $\nabla_{\mathbb{T}} u$  défini par le gradient tangential de la fonction  $u$ . C'est à dire :

$$(\Delta_{\mathbb{T}} u)(x) = div(\nabla_{\mathbb{T}} u)(x)$$

**Remarque 1.10 :** En utilisant la définition des dérivées tangentielles, la définition 1.48 équivaut aussi à :

$$(\Delta_{\mathbb{T}} u)(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_i^2}(x) \quad (1.48.1)$$

### I.4.3 Espaces fonctionnels et intégration sur une hypersurface

Soit  $\Gamma$  une courbe plane, paramétrée par la donnée d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et d'une application continue  $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ . On appelle espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur  $\Gamma$  l'espace noté  $\mathbf{L}^2(\Gamma)$  et défini par :  $\mathbf{L}^2(\Gamma) = \{ f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, f \circ \varphi \in \mathbf{L}^2(I) \}$ .

On définira alors sur cet espace fonctionnel le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$  par :

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} fg \cdot d\Gamma = \int_I (f \circ \varphi)(g \circ \varphi) \sqrt{\sum_{i=1}^n |\varphi'_i(t)|^2} dt$$

On montre que  $\mathbf{L}^2(\Gamma)$  est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire qui y induit une normé définie par :

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 = \int_I |(f \circ \varphi)(t)|^2 \left( \sum_{i=1}^n |\varphi'_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

#### Définition 1.49 : Espace de Lebesgue sur hypersurface

Soit  $\Sigma$  une hypersurface de  $\mathbb{R}^n$  et  $\varphi : (I_1 \times \dots \times I_{n-1}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un paramétrage de  $\Sigma$ .

On appelle espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur  $\Sigma$  l'espace noté  $\mathbf{L}^2(\Sigma)$  et défini par :

$$\mathbf{L}^2(\Sigma) = \{ f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ \varphi) \in \mathbf{L}^2(I_1 \times \dots \times I_{n-1}) \}$$

On définira alors sur cet espace fonctionnel le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(\Sigma)}$  par :

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Sigma)} = \int_{\Sigma} fg \cdot d\Sigma = \int_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}} (f \circ \varphi)(g \circ \varphi) \left( \prod_{j=1}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \right|^2} \right) dt_1 \dots dt_{n-1}$$

On montre que  $\mathbf{L}^2(\Sigma)$  est un espace de Hilbert pour la norme induite définie par :

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Sigma)}^2 = \int_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}} |f \circ \varphi|^2 \left( \prod_{j=1}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \right|^2} \right) dt_1 \dots dt_{n-1}$$

**Définition 1.50 : L'espace  $\mathbf{L}^2(\Sigma, T(\Sigma))$**

Soient  $\Sigma$  une hypersurface de  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $x \in \Sigma$  une base  $\{T_1(x), \dots, T_{n-1}(x)\}$  de l'espace tangent à  $\Sigma$  en  $x$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , on associe à tout champ tangentiel  $w_\Sigma : \Sigma \rightarrow T(\Sigma)$  l'application  $f_j : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  définie par :

$$f_j(x) = (\langle w_\Sigma, T_j(x) \rangle_{\mathbb{R}^{n-1}}, \dots, \langle w_\Sigma, T_j(x) \rangle_{\mathbb{R}^{n-1}}) \quad \forall x \in \Sigma$$

**Définition 1.51 : Espace de Sobolev d'ordre un sur une hypersurface**

Soit  $\Sigma$  une hypersurface de  $\mathbb{R}^n$ . On définit l'espace  $\mathbf{L}^2(\Sigma, T(\Sigma))$  par :

$$\mathbf{L}^2(\Sigma, T(\Sigma)) = \{f : \Sigma \rightarrow T\Sigma \text{ tels que } f_j \in \mathbf{L}^2(\Sigma) \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\}\}$$

On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur  $\Sigma$  l'espace noté  $H^1(\Sigma)$  et défini par :

$$H^1(\Sigma) = \left\{ f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tel que : } \frac{\partial f}{\partial T_j(x)} \in \mathbf{L}^2(\Sigma, T(\Sigma)) \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \right\}$$

On munit l'espace  $H^1(\Sigma)$  de la norme :

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)} = \left( \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Sigma)}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left\| \frac{\partial f}{\partial T_j(x)} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Sigma, T(\Sigma))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

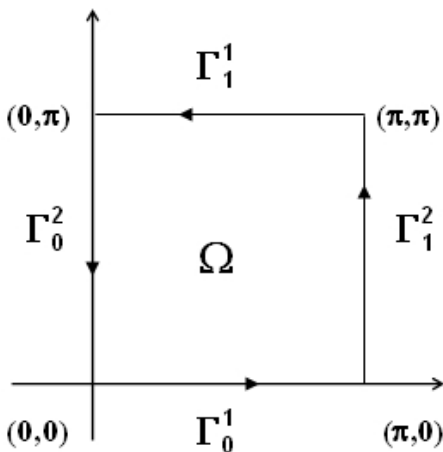
**Note :** Les rappels insérés dans le paragraphe I.4.3 sont inspirés du chapitre intitulé "Éléments de géométrie différentielle intrinsèque pour les surfaces" dans [13] de K. LEMRABET.

## CHAPITRE II : Insuffisance du feedback naturel

### II.1- Introduction au problème :

Soit dans  $\mathbb{R}^2$  l'ouvert  $\Omega = ]0, \pi[$  dont la frontière  $\Gamma = \bigcup_{i=0, j=1}^{i=1, j=2} \Gamma_i^j$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux. Les segments ouverts  $\Gamma_i^j$  étant, comme l'illustre la figure II.1, définis par :

$$\Gamma_0^1 = ]0, \pi[ \times \{0\} \quad , \quad \Gamma_0^2 = \{0\} \times ]0, \pi[ \quad , \quad \Gamma_1^1 = ]0, \pi[ \times \{\pi\} \quad , \quad \Gamma_1^2 = \{\pi\} \times ]0, \pi[$$



**FIGURE II.1**

La frontière  $\Gamma$  est orientée suivant le paramétrage défini par l'intervalle  $I = ]0, 2\pi[$  et la fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux définie par :

$$\varphi(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (2t, 0) & \text{pour } t \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \\ (\pi, 2t - \pi) & \text{pour } t \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \\ (3\pi - 2t, \pi) & \text{pour } t \in ]\pi, \frac{3\pi}{2}[ \\ 2(0, 2\pi - t) & \text{pour } t \in ]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[ \end{array} \right\} \quad (2.0.0)$$

et qui se prolonge par continuité aux valeurs  $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$  dont les images  $\{\varphi(0), \varphi(\frac{\pi}{2}), \varphi(\pi), \varphi(\frac{3\pi}{2})\}$  forment les quatres sommets de l'ouvert  $\Omega$ . On pose :

$$\Gamma_0^1 = \varphi\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \quad , \quad \Gamma_1^2 = \varphi\left(\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right) \quad , \quad \Gamma_1^1 = \varphi\left(\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\right) \quad \text{et} \quad \Gamma_0^2 = \varphi\left(\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\right)$$

et :

$$\Gamma_0 = \overline{\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2} \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \overline{\Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2}$$

Soit  $V$  le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  des fonctions  $v \in H^1(\Omega)$  vérifiant les conditions suivantes :

$$v|_{\Gamma_0^j} = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad (2.0.1)$$

$$v|_{\Gamma_1^j} \in H^1(\Gamma_1^j) \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad (2.0.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} v(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} v(\pi, y) = 0 \quad (2.0.3)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pi} v(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} v(x, \pi) = 0 \quad (2.0.4)$$

On définit alors sur  $V$  le produit scalaire :

$$\langle v_1, v_2 \rangle_V = \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla v_2 dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} \nabla_{\text{T}} v_1 \nabla_{\text{T}} v_2 d\Gamma_1^j \quad (2.0.5)$$

qui induit sur  $V$  la norme  $\|v\|_V$  définie par :

$$\|v\|_V = \left[ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{j=1}^{j=2} \|\nabla_{\text{T}} v\|_{L^2(\Gamma_1^j)^2}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.0.6)$$

$V$  est un espace de Hilbert pour la norme (2.0.6). Dans le chapitre II on s'intéresse au problème  $\mathcal{P}_0$  qui consiste à trouver, pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$ , une fonction  $u :$

$\mathbb{R}^+ \longrightarrow V$  vérifiant :

$$\mathcal{P}_0 : \left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.i) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.ii) \\ \partial_{\nu} u - \Delta_{\text{T}} u + u' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.iii) \\ u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \quad (2.0.iv) \end{array} \right\}$$

Le but du chapitre consiste à montrer que pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$ , le problème  $\mathcal{P}_0$  admet une solution unique qui converge fortement vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$  mais qui n'assure pas une décroissance exponentielle de l'énergie. En écrivant  $\mathcal{P}_0$  sous forme de problème de Cauchy :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}_0} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} (t) = \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} (t) \quad \forall t \geq 0 \\ v(0) = u^0 \text{ et } z(0) = u^1 \quad \text{avec } (u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_0) \end{array} \right\}$$

où  $\mathcal{C}_0$  est un opérateur m-dissipatif sur  $V \times L^2(\Omega)$ , il s'agira de montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0$$

mais que le semi-groupe engendré par  $\mathcal{C}_0$  n'est pas exponentiellement stable sur  $V \times L^2(\Omega)$ .

Dans le théorème 2.1 on établira l'existence et l'unicité de la solution. Le théorème 2.2 établira la stabilité forte du problème et dans le théorème 2.3, on montrera grâce à l'étude spectrale de l'opérateur  $\mathcal{C}_0$  qu'il n'y a pas de stabilité exponentielle.

**Proposition 2.1 : Inégalité de Poincaré sur le bord de  $\Omega$ .**

On a :

$$\left( \int_{\Gamma_1^j} |v|^2 d\Gamma_1^j \right) \leq \pi^2 \left( \int_{\Gamma_1^j} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma_1^j \right) \quad \forall v \in V \text{ et } \forall j \in \{1, 2\}$$

**Preuve :** Soit  $T_{(x_0, y_0)}\Gamma$  l'espace tangent à la courbe  $\Gamma$  au point  $(x_0, y_0) \in \Gamma_1^j \subset \Gamma$ . Le paramétrage (2.0.0) permet de déduire immédiatement l'expression du vecteur unitaire  $T_{(x_0, y_0)}$  tangent à  $\Gamma_1^j$  au point  $(x_0, y_0) \in \Gamma_1^j$  et on a :

$$T_{(x_0, y_0)} = \left\{ \begin{array}{ll} (-1, 0) & \text{pour } (x_0, y_0) \in \Gamma_1^1 \\ (0, 1) & \text{pour } (x_0, y_0) \in \Gamma_1^2 \end{array} \right\} \quad (2.1.1)$$

Ce qui implique pour tout  $v \in V$  que :

$$\int_0^\pi |v(x, \pi)|^2 dx = \left( \int_{\Gamma_1^1} |v|^2 d\Gamma_1^1 \right) \quad \text{et} \quad \int_0^\pi |v(\pi, y)|^2 dy = \left( \int_{\Gamma_1^2} |v|^2 d\Gamma_1^2 \right) \quad (2.1.2)$$

Le gradient tangential  $\nabla_{\Gamma} v$  s'exprime alors d'après (2.1.1) par :

$$\nabla_{\Gamma} v = -\frac{\partial v}{\partial x} \cdot (1, 0) \quad \text{sur } \Gamma_1^1 \quad (2.1.3)$$

$$\nabla_{\Gamma} v = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot (0, 1) \quad \text{sur } \Gamma_1^2 \quad (2.1.4)$$

Les inclusions  $H^1(\Gamma_1^j) \subset C^0(\Gamma_1^j) \quad \forall j \in \{1, 2\}$  et les conditions (2.0.1) , (2.0.3) et (2.0.4) de la page 82 impliquent :

$$v(0, 0) = v(\pi, 0) = v(0, \pi) = 0 \quad \forall v \in V \quad (2.1.5)$$

Ce qui donne pour tout  $x_0 \in ]0, \pi[$  :

$$v(x_0, \pi) = v(x_0, \pi) - v(0, \pi) = \int_0^{x_0} \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pi) dx$$

Donc :

$$|v(x, \pi)| \leq \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pi) \right| dx \quad \forall x \in ]0, \pi[$$

En prenant le Sup sur  $]0, \pi[$  on obtient l'inégalité :

$$\|v\|_{L^\infty(\Gamma_1^1)} \leq \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pi) \right| dx$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à la majoration  $|v(x, \pi)| \leq \text{Sup}_{x \in ]0, \pi[} |v(x, \pi)|$  on a

aussi :

$$\int_0^\pi |v(x, \pi)|^2 dx \leq \pi \|v\|_{L^\infty(\Gamma_1^1)}^2 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pi) \right| dx \leq \sqrt{\pi} \left( \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pi) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit la triple inégalité :

$$\int_0^\pi |v(x, \pi)|^2 dx \leq \pi \|v\|_{L^\infty(\Gamma_1^1)}^2 \leq \pi \left( \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pi) \right| dx \right)^2 \leq \pi^2 \left( \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pi) \right|^2 dx \right)$$



Donc :

$$\int_0^\pi |v(x, \pi)|^2 dx \leq \pi^2 \left( \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pi) \right|^2 dx \right)$$

Ce qui d'après (2.1.2) et (2.1.3) s'écrit :

$$\left( \int_{\Gamma_1^1} |v|^2 d\Gamma_1^1 \right) \leq \pi^2 \left( \int_{\Gamma_1^1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma_1^1 \right) \quad \forall v \in V \quad (2.1.6)$$

On fait un raisonnement analogue sur le segment  $\Gamma_1^2$ . D'après (2.4.5) on a :

$$v(\pi, y_0) - v(\pi, 0) = v(\pi, y) = \int_0^{y_0} \frac{\partial v}{\partial y}(\pi, y) dy \quad \forall y_0 \in ]0, \pi[$$

car  $v(\pi, 0) = 0$ . Ce qui donne  $|v(\pi, y)| \leq \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial y}(\pi, y) \right| dy \quad \forall y \in ]0, \pi[$ . On en déduit en prenant le *Sup* sur  $]0, \pi[$  : l'inégalité  $\|v\|_{L^\infty(\Gamma_1^2)} \leq \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial y}(\pi, y) \right| dy$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration  $|v(\pi, y)| \leq \underset{y \in ]0, \pi[}{Supess} |v(\pi, y)|$  on a :

$$\int_0^\pi |v(\pi, y)|^2 dy \leq \pi \|v\|_{L^\infty(\Gamma_1^2)}^2 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial y}(\pi, y) \right| dy \leq \sqrt{\pi} \left( \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial y}(\pi, y) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui implique la triple inégalité :

$$\int_0^\pi |v(\pi, y)|^2 dy \leq \pi \|v\|_{L^\infty(\Gamma_1^2)}^2 \leq \pi \left( \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| dy \right)^2 \leq \pi^2 \left( \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 dx \right)$$

dont on déduit l'inégalité :

$$\int_0^\pi |v(\pi, y)|^2 dy \leq \pi^2 \left( \int_0^\pi \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 dx \right)$$

qui s'écrit d'après (2.1.2) et (2.1.4) :

$$\left( \int_{\Gamma_1^2} |v|^2 d\Gamma_1^2 \right) \leq \pi^2 \left( \int_{\Gamma_1^2} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma_1^2 \right) \quad \forall v \in V \quad (2.1.7)$$

Finalement, les inégalités (2.1.6) et (2.1.7) prouvent que :

$$\left( \int_{\Gamma_1^j} |v|^2 d\Gamma_1^j \right) \leq \pi^2 \left( \int_{\Gamma_1^j} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma_1^j \right) \quad \forall v \in V \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

**Remarque 2.1 : Une équivalence de normes sur  $V$  :**

La norme induite par le produit scalaire (2.0.5) sur  $V$  est définie par :

$$\|v\|_V = \left[ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{j=1}^{j=2} \|\nabla_{\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma_1^j)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme  $\mathcal{N} : V \rightarrow [0, +\infty[$  définie par :

$$v \mapsto \mathcal{N}(v) = \left( \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{j=2} \|v\|_{H^1(\Gamma_1^j)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Proposition 2.2 : Laplacien tangentiel des éléments de  $V$  :**

Pour tout  $v \in V$  on a, au sens des distributions,

$$\Delta_{\Gamma} v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{sur } \Gamma_1^1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{sur } \Gamma_1^2$$

Et  $(\Delta_{\Gamma} v) \in H^{-1}(\Gamma_1^j) \quad \forall v \in V, \quad \forall j \in \{1, 2\}$  avec :

$$\langle \Delta_{\Gamma} v, w \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1^j), H_0^1(\Gamma_1^j)} = - \int_{\Gamma_1^j} \nabla_{\Gamma} v \cdot \nabla_{\Gamma} w \cdot d\Gamma_1^j \quad \forall w \in H_0^1(\Gamma_1^j) \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

**Preuve :** Par définition et en utilisant l'expression du vecteur unitaire tangent à  $\Gamma_1^j$  en un point  $(x_0, y_0) \in \Gamma_1^j$  on a :

$$\Delta_{\Gamma} v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{sur } \Gamma_1^1 \quad (2.2.1)$$

$$\Delta_{\Gamma} v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{sur } \Gamma_1^2 \quad (2.2.2)$$

Ce qui donne au sens des distributions pour tout  $v \in V$  :

$$\langle \Delta_{\Gamma} v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma_1^j), \mathcal{D}(\Gamma_1^j)} = \begin{cases} \left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma_1^j), \mathcal{D}(\Gamma_1^j)} = - \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma_1^j), \mathcal{D}(\Gamma_1^j)} & \text{dans } \Gamma_1^1 \\ \left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma_1^j), \mathcal{D}(\Gamma_1^j)} = - \left\langle \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma_1^j), \mathcal{D}(\Gamma_1^j)} & \text{dans } \Gamma_1^2 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

D'après les formules (2.1.3) et (2.1.4) qui expriment le gradient tangentiel  $\nabla_{\Gamma} v$ , on peut

alors écrire :

$$\langle \Delta_{\Gamma} v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma_1^j), \mathcal{D}(\Gamma_1^j)} = - \int_{\Gamma_1^j} \nabla_{\Gamma} v \cdot \nabla_{\Gamma} \varphi \cdot d\Gamma_1^j \quad \forall v \in V \quad (2.2.4)$$

Soient  $v \in V$  et  $\mathcal{D}_v : H_0^1(\Gamma_1^j) \longrightarrow \mathbb{R}$  la forme linéaire définie par :

$$\mathcal{D}_v(w) = - \int_{\Gamma_1^i} \nabla_{\mathbb{T}} v \cdot \nabla_{\mathbb{T}} w \cdot d\Gamma_1^j \quad \forall w \in H_0^1(\Gamma_1^j) \text{ et } \forall j \in \{1, 2\}$$

On a par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathcal{D}_v(w)| = \left| \int_{\Gamma_1^i} \nabla_{\mathbb{T}} v \cdot \nabla_{\mathbb{T}} w \cdot d\Gamma_1^j \right| \leq \|\nabla_{\mathbb{T}} v\|_{L^2(\Gamma_1^j)} \|\nabla_{\mathbb{T}} w\|_{L^2(\Gamma_1^j)} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

Cela implique que :

$$|\mathcal{D}_v(w)| \leq \|\nabla_{\mathbb{T}} v\|_{L^2(\Gamma_1^j)} \|\nabla_{\mathbb{T}} w\|_{L^2(\Gamma_1^j)} \leq \|\nabla_{\mathbb{T}} v\|_{L^2(\Gamma_1^j)} \|w\|_{H_0^1(\Gamma_1^j)} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

La forme linéaire  $\mathcal{D}_v$  est donc continue sur  $H_0^1(\Gamma_1^j)$ . C'est à dire :  $\mathcal{D}_v \in H^{-1}(\Gamma_1^j)$ .

L'espace  $\mathcal{D}(\Gamma_1^j)$  étant dense dans  $H_0^1(\Gamma_1^j)$ , il existe pour tout  $w \in H_0^1(\Gamma_1^j)$  une suite  $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\Gamma_1^j)$  qui converge dans  $H_0^1(\Gamma_1^j)$  vers  $w$ . La continuité de  $\mathcal{D}_v$  implique que la suite  $\{\mathcal{D}_v(\varphi_n), n \in \mathbb{N}\}$  converge par continuité dans  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{D}_v(w)$ . Autrement dit, la suite  $\{\Delta_{\mathbb{T}} \varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$  converge dans  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{D}_v(w)$ . On définit ainsi par prolongement la forme  $\Delta_{\mathbb{T}} v \in H^{-1}(\Gamma_1^j)$  par

$$\langle \Delta_{\mathbb{T}} v, w \rangle_{H_0^1(\Gamma_1^j), H^{-1}(\Gamma_1^j)} = - \int_{\Gamma_1^i} \nabla_{\mathbb{T}} v \cdot \nabla_{\mathbb{T}} w \cdot d\Gamma_1^j \quad \forall w \in H_0^1(\Gamma_1^j)$$

**Proposition 2.3 :**

Soit  $H^1(\Delta, \Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ telles que } : \Delta v \in L^2(\Omega)\}$  muni de la norme :

$$\|v\|_{H^1(\Delta, \Omega)} = \left( \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H^1(\Delta, \Omega)$$

L'espace  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Delta, \Omega)$  et l'application  $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{D}(\overline{\Gamma_1^j})$  définie par :

$v \longmapsto (\partial_{\nu} v)|_{\Gamma_1^j}$  avec  $j \in \{1, 2\}$  se prolonge par continuité en une application  $(\partial_{\nu} v)|_{\Gamma_1^j} :$

$H^1(\Delta, \Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i^j)$  qui à tout  $v \in H^1(\Delta, \Omega)$  associe la forme  $(\partial_\nu v)|_{\Gamma_1^j}$  définie pour tout  $w \in V$  par :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j}, w \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = \int_{\Omega} (\nabla w \nabla v + w \Delta v) dx dy$$

**Preuve :**  $\Omega$  étant un carré donc un polygone, en prenant  $p = 2$  la proposition devient une application d'un résultat cité en pages 30 et 31 par K. LEMRABET dans [13] et qui renvoie vers le théorème 1.5.3.4 dans "*Elliptics problems in non smooth domains. Monographs and Studies in Mathematics*", 24, Pitman 1985.

**Remarque 2.2 :** Les inclusions  $H_0^1(\Gamma_1^j) \subset H^1(\Gamma_1^j) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$  et l'égalité  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j) = H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$  entraînent l'inclusion :  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j) \subset H^{-1}(\Gamma_1^j)$ . Ce qui implique d'après la proposition 2.3

$$(\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j} \in H^{-1}(\Gamma_1^j) \quad \forall v \in H^1(\Delta, \Omega) \quad (2.2.i)$$

### L'opérateur $\mathcal{C}_0$ et son domaine :

Soit  $D(\mathcal{C}_0)$  le sous-ensemble de  $V \times V$  des éléments  $(v, z) \in V \times V$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v \in L^2(\Omega) \quad (2.0.7) \\ \partial_\nu v - \Delta_T v + z = 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Gamma_1^j) \quad (2.0.8) \end{array} \right\} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

La condition (2.0.7) entraîne l'inclusion  $D(\mathcal{C}_0) \subset H^1(\Delta, \Omega)$  et selon la proposition 2.3 et la remarque 2.2 la condition de Ventcel (2.0.8) reste valable dans  $H^{-1}(\Gamma_1^j)$  et équivaut à :

$$\langle \partial_\nu v - \Delta_T v + z, w \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1^j), H_0^1(\Gamma_1^j)} = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Gamma_i^j) \quad \text{et } \forall j \{1, 2\}$$

Soit  $\mathcal{C}_0$  l'opérateur linéaire défini sur  $H = V \times L^2(\Omega)$ , de domaine  $D(\mathcal{C}_0)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 : D(\mathcal{C}_0) \subset V \times V &\longrightarrow V \times L^2(\Omega) \\ \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.0.9)$$

**Proposition 2.4 :**

*L'opérateur  $\mathcal{C}_0$  est  $m$ -dissipatif*

**Preuve :** On comencera par montrer que l'opérateur  $I - \mathcal{C}_0 : D(\mathcal{C}_0) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est surjectif. Ce qui équivaut à résoudre pour tout  $(u, w) \in V \times L^2(\Omega)$  le problème  $\pi_{(u,w)}$  qui consiste à trouver  $v \in V$  vérifiant :

$$\pi_{(u,w)} : \left\{ \begin{array}{ll} v - \Delta v = u + w & \text{dans } \Omega \quad (2.4.i) \\ \partial_\nu v - \Delta_T v + v = u & \text{dans } H^{-1}(\Gamma_1^j) \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad (2.4.ii) \end{array} \right\}$$

On multiplie la première équation (2.4.i) par  $\Psi \in V$  puis on intègre dans  $\Omega$  et on obtient :

$$\int_{\Omega} v \Psi dx dy + \int_{\Omega} \nabla v \nabla \Psi dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} \nabla_T \Psi \nabla_T v d\Gamma_1^j dx dy = \int_{\Omega} \Psi (u + w) dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} \Psi (u - v) d\Gamma_1^j$$

On vérifie facilement que la forme bilinéaire  $\mathcal{F}_0$  définie sur  $V$  par :

$$\mathcal{F}_0(v_1, v_2) = \int_{\Omega} (v_1 v_2 + \nabla v_1 \nabla v_2) dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} (v_1 v_2 + \nabla_T v_1 \nabla_T v_2) d\Gamma_1^j$$

est continue et coercive sur  $V$  et que la forme linéaire  $\mathcal{L}_0$  définie sur  $V$  par :

$$\mathcal{L}_0(v_1) = \int_{\Omega} (u + w) v_1 dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} u v_1 d\Gamma_1^j \quad \forall v_1 \in V$$

est continue. On applique ensuite Théorème de Lax-Milgram dont on déduit qu'il existe un seul élément  $v \in V$  vérifiant pour tout  $v_1 \in V$  l'égalité :  $\mathcal{L}_0(v_1) = \mathcal{F}_0(v, v_1)$ . Donc :

$$\int_{\Omega} (u + w) v_1 dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} u v_1 d\Gamma_1^j = \int_{\Omega} (v_1 v + \nabla v_1 \nabla v) dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} (v_1 v + \nabla_T v_1 \nabla_T v) d\Gamma_1^j \quad \forall v_1 \in V$$

Et en particulier :

$$\int_{\Omega} (\varphi v + \nabla \varphi \nabla v) dx = \int_{\Omega} (u + w) \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$$

L'égalité  $v - \Delta v = u + w$  est donc vérifiée dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . L'équation (2.4.i) du problème  $\pi_{(u,w)}$  est vérifiée. Il reste à prouver que  $(v, v - u) \in D(\mathcal{C}_0)$ . On a :  $\Delta v \in L^2(\Omega)$  puisque  $v - \Delta v = u + w$  et  $(v - u - w) \in L^2(\Omega)$ . On sait alors d'après la proposition 2.3 ( page 87) que :  $(\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j) \subset H^{-1}(\Gamma_1^j)$  où  $j \in \{1, 2\}$  avec :

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla v . dx dy = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j}, v_1 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} - \int_{\Omega} \Delta v . v_1 . dx dy \quad \forall v_1 \in V$$

car  $(v_1)|_{\Gamma_1^j} \in H^1(\Gamma_1^j) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j) = H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$ . Et selon l'équation (2.4.i) :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} u v_1 d\Gamma_1^j = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j}, v_1 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} (v_1 v + \nabla_{\mathbb{T}} v_1 \nabla_{\mathbb{T}} v) d\Gamma_1^j$$

Et d'après la proposition 2.2 (page 86), on a  $\nabla_{\mathbb{T}} v \in H^{-1}(\Gamma_1^j)$  avec :

$$\int_{\Gamma_1^j} \nabla_{\mathbb{T}} v . \nabla_{\mathbb{T}} v_1 . d\Gamma_1^j = \langle -\Delta_{\mathbb{T}} v, v_1 \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1^j), H_0^1(\Gamma_1^j)} \quad \forall v_1 \in V$$

Et d'après la remarque 2.2 (page 88) cela implique :

$$\begin{aligned} \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j}, v_1 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} &= \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j}, v_1 \right\rangle_{H^{-1}(\Gamma_1^j), H_0^1(\Gamma_1^j)} \\ \text{et} \quad \int_{\Gamma_i^j} (v_1)|_{\Gamma_1^j} . v|_{\Gamma_1^j} . d\Gamma_i^j &= \left\langle v|_{\Gamma_i^j}, (v_1)|_{\Gamma_i^j} \right\rangle_{H^{-1}(\Gamma_i^j), H_0^1(\Gamma_i^j)} \end{aligned} \quad \forall v_1 \in V$$

On en déduit pour tout  $v_1 \in V$  que :

$$\int_{\Gamma_1^1} u v_1 d\Gamma_1^1 + \int_{\Gamma_1^2} u v_1 d\Gamma_1^2 = \sum_{k=1}^{k=2} \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^k} - \Delta_{\mathbb{T}} v + v, v_1 \right\rangle_{H^{-1}(\Gamma_1^k), H_0^1(\Gamma_1^k)}$$

En particulier si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma_1^1)$  il existe alors une fonction  $v_1(\varphi) \in V$  qui vérifie les conditions

$v_1(\varphi)|_{\Gamma_1^2} = 0$  et  $v_1(\varphi)|_{\Gamma_1^1} = \varphi$ . On résoud ensuite le problème qui consiste à trouver  $v_1 \in V$

telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad v_1 - \Delta v_1 = 0 \\ 2) \quad v_1(\varphi)|_{(\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2 \cup \Gamma_1^2)} = 0 \\ 3) \quad v_1(\varphi)|_{\Gamma_1^1} = \varphi \end{array} \right.$$

On obtient :  $\int_{\Gamma_1^1} u\varphi d\Gamma_1^1 = \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^1} - \Delta_T v + v, \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Gamma_1^1), H_0^1(\Gamma_1^1)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma_1^1)$ . D'où, dans  $\mathcal{D}'(\Gamma_1^1)$ , l'égalité :  $\partial_\nu(v) - \Delta_T v + v = u$  dans  $H^{-1}(\Gamma_1^1)$ . On établit de façon analogue la même égalité dans  $H^{-1}(\Gamma_1^2)$ . L'équation (2.4.ii) est alors satisfaite et le problème  $\pi_{(u,w)}$  résolu c'est à dire que l'opérateur  $I - \mathcal{C}_0 : D(\mathcal{C}_0) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est surjectif.

Montrons à présent que  $\mathcal{C}_0$  est dissipatif en évaluant pour tout  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_0)$  la quantité  $\left\langle \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)}$ . Par définition de  $\mathcal{C}_0$  et du produit scalaire dans  $V \times L^2(\Omega)$  on a :  $\left\langle \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla z \, dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} \nabla_T v \cdot \nabla_T z \, d\Gamma_1^j + \int_{\Omega} z \Delta v \, dx dy$ . Ce qui, d'après les proposition 2.2 (page 86) et 2.3, et la remarque 2.2 (page 88) implique :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j}, z|_{\Gamma_1^j} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} \nabla_T v \cdot \nabla_T z \, d\Gamma_1^j = \left\langle \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)}$$

Sachant que  $(\frac{\partial v}{\partial \nu})|_{\Gamma_1^j} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$  et  $z|_{\Gamma_1^j} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$ , la condition de Ventcel (équation 2.4.ii) reste valable dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$  et implique que :  $(-\Delta_T v)|_{\Gamma_1^j} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$ . Donc :

$$\left\langle \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j} - (\Delta_T v)|_{\Gamma_1^j}, z|_{\Gamma_1^j} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)}$$

La condition de Ventcel (2.4.ii) implique aussi que  $\partial_\nu v - \Delta_T v = -z$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$ .

L'égalité  $\left\langle \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\partial_\nu(v))|_{\Gamma_1^j} - (\Delta_T v)|_{\Gamma_1^j}, z|_{\Gamma_1^j} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)}$  est équivalente à :

$$\left\langle \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle -z|_{\Gamma_1^j}, z|_{\Gamma_1^j} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = - \sum_{j=1}^{j=2} \|z|_{\Gamma_1^j}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)}^2 \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_0)$$

La quantité  $\left\langle \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)}$  est donc pour tout  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_0)$  négative ou nulle.

D'où  $\mathcal{C}_0$  est dissipatif. Or,  $I - \mathcal{C}_0 : D(\mathcal{C}_0) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est surjectif, donc  $\mathcal{C}_0$  est m-dissipatif.

## II.2 - Existence, unicité et régularité de la solution

Etant donné  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$ , le problème  $\mathcal{P}_0$  consiste à trouver une fonction  $(u, u') \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V \times L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{C}_0))$  qui vérifie les équations suivantes :

$$\mathcal{P}_0 : \left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.i) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.ii) \\ \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u + u' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.iii) \\ u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \quad (2.0.iv) \end{array} \right.$$

**Commentaire :** Par définition de  $D(\mathcal{C}_0)$  et pour tout  $t \geq 0$ , une telle fonction vérifie donc  $(u(t), u'(t)) \in D(\mathcal{C}_0)$ . Et en particulier  $(u(0), u'(0)) \in D(\mathcal{C}_0)$ . La formulation forte du problème impose donc l'hypothèse  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_0)$ . Quant à la première équation, elle équivaut, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour tout  $(x, y) \in \Omega$ , à :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} (t) = \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} (t)$$

Pour  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_0)$ , la formulation forte du problème est donc équivalente au problème de Cauchy  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_0}$  qui consiste à trouver une fonction  $(v, z) \in C^1(\mathbb{R}^+, V \times L^2(\Omega))$  vérifiant :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} (t) = \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} (t) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}$$

dont la solution est la fonction :  $t \mapsto \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} (t) = S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}$  où  $(S_0(t))_{t \geq 0}$  désigne le semi-groupe de contractions engendré par l'opérateur  $\mathcal{C}_0$ . En effet, d'après les propriétés des semi-groupes fortement continus, pour tout  $t \geq 0$  on a :  $S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{C}_0)$ . Ce qui, par définition de  $D(\mathcal{C}_0)$ , réalise les équations (2.0.ii) et (2.0.iii) et en prenant  $t = 0$  on vérifie l'équation (2.0.iv). Et on a l'inégalité  $\left\| S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0$ .



**Théorème 2.1** : ( Théorème d'existence de la solution )

Pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  il existe une fonction unique  $u \in C^0(\mathbb{R}_+, V)$ ,

solution faible du problème :

$$\mathcal{P}_0 : \left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.i) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.ii) \\ \partial_\nu u - \Delta_T u + u' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.iii) \\ u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \quad (2.0.iv) \end{array} \right.$$

telle que  $u' \in C^0(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$  et vérifie l'inégalité :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} \left( \|u^0\|_V + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (2.0.v)$$

Et si de plus  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_0)$ , alors la solution vérifie :

$$(u, u', u'') \in C^0(\mathbb{R}_+, (V \cap H^1(\Delta, \Omega)) \times V \times L^2(\Omega)) \quad (2.0.vi)$$

et pour  $K > 0$  assez grand la solution vérifie la propriété de continuité :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} + \|\Delta u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} \leq K \left( \|u^0\|_V + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|u^1\|_V \right) \quad (2.0.vii)$$

**Démonstration** :

On commence par supposer que  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_0)$  et on montre l'existence d'une solution forte. L'opérateur  $\mathcal{C}_0$  est m-dissipatif sur l'espace de Hilbert  $V \times L^2(\Omega)$ . Il existe par application du théorème de Hille Yosida une fonction unique :

$$(v, z) \in \mathcal{C}^1[\mathbb{R}_+, V \times L^2(\Omega)] \cap \mathcal{C}[\mathbb{R}_+, D(\mathcal{C}_0)] \quad (2.1.a)$$

solution du problème de Cauchy :

$$P_{\mathcal{C}_0} : \left\{ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} (t) = \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0 \right\}$$

qui vérifie de plus, pour tout  $t \geq 0$  les inégalités :

$$\left\| \begin{pmatrix} v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1.b)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ \Delta v(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^1 \\ \Delta u^0 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1.c)$$

La fonction  $(u, u') = (v, v') = (v, z)$  est, d'après le commentaire de la page 92, la solution forte unique du problème  $\mathcal{P}_0$  et vérifie :

$$(u, u') \in \mathcal{C}^1 [\mathbb{R}_+, V \times L^2(\Omega)] \cap \mathcal{C} [\mathbb{R}_+, D(\mathcal{C}_0)] \quad (2.1.d)$$

et les équations (2.0.i), (2.0.ii), (2.0.iii) et (2.0.iv). Les inégalités (2.1.b) et (2.1.c) s'écrivent

$$\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u^0\|_V^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1.b')$$

$$\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u^1\|_V^2 + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1.c')$$

La première inégalité entraîne l'inégalité :

$$\|u(t)\|_V + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \left( \|u^0\|_V + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad \forall t \geq 0$$

Donc (2.0.v) est vérifiée. La fonction :

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow D(\mathcal{C}_0)$$

$$t \longmapsto (u, u')(t) \quad \forall t \geq 0$$

étant continue pour la norme du graphe définie sur  $D(\mathcal{C}_0)$  par :

$$\|(v, z)\|_{D(\mathcal{C}_0)}^2 = \left\| \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 + \left\| \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2$$

Il s'en suit que la fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $L^2(\Omega)$  et qui à tout  $t \geq 0$  associe  $\Delta u(t)$  est continue.

Autrement dit les fonctions :  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow L^2(\Omega) \\ t \longmapsto u''(t) \end{array} \right\}$  et  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow V \cap H^1(\Delta, \Omega) \\ t \longmapsto u(t) \end{array} \right\}$  sont

continues. D'où :  $(u, u', u'') \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, V \cap H^1(\Delta, \Omega) \times V \times L^2(\Omega))$ . C'est à dire que (2.0.vi)

est prouvée. Quant à l'estimation (2.0.vii), on additionne membre à membre (2.1.b') et

(2.1.c') et par inégalité de Poincaré on obtient :

$$\left( \|u(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|u'(t)\|_V^2 \leq \left( \|u^0\|_V^2 + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + (c_1(\Omega)^2 + 1) \|u^1\|_V^2 \quad \forall t \geq 0$$

Donc :

$$\left( \|u(t)\|_V^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|u'(t)\|_V^2 \leq \left( \|u^0\|_V^2 + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + (c_1(\Omega)^2 + 1) \|u^1\|_V^2 \quad \forall t \geq 0$$

D'où pour  $\mathbf{K} > \frac{3}{2}\sqrt{(c_1(\Omega)^2 + 1)}$  :

$$\left( \|u(t)\|_V + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u'(t)\|_V \right) \leq \mathbf{K} \left( \|u^0\|_V + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|u^1\|_V \right) \quad \forall t \geq 0$$

En conclusion, si  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_0)$  il existe une fonction unique

$$(u, u', u'') \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, V \cap H^1(\Delta, \Omega) \times V \times L^2(\Omega))$$

solution forte du problème :

$$\mathcal{P}_0 : \left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.i) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.ii) \\ \partial_\nu u - \Delta_T u + u' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.iii) \\ u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \quad (2.0.iv) \end{array} \right\}$$

et vérifiant l'estimation :

$$\sup_{t \geq 0} \left( \|u(t)\|_V + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u'(t)\|_V \right) \leq K \left( \|u^0\|_V + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|u^1\|_V \right)$$

La solution faible : Soit  $(u^0, u^1)$  dans  $V \times L^2(\Omega)$ . La solution faible du problème  $\mathcal{P}_0$  pour la donnée initiale Soit  $(u^0, u^1)$  est définie par :

$$u : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow V \times L^2(\Omega) \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Ce qui donne :

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0$$

c'est à dire :  $\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u^0\|_V^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \geq 0$ . Donc :

$$\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u^0\|_V^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$et \quad 2 \|u(t)\|_V \cdot \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^0\|_V^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2$$

D'où

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} + \|u'(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} \left( \|u^0\|_V + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \right)$$


---

### II.3 - Stabilisation forte du problème $P_0$

**Proposition 2.5 : Compacité de la trajectoire de la solution.**

L'ensemble  $\left\{ S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0 \right\}$  est pour tout  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_0)$ , relativement compact dans  $V \times L^2(\Omega)$

**Preuve :**  $D(\mathcal{C}_0)$  est muni de la norme du graphe, définie grâce à l'expression de  $\mathcal{C}_0$  par :

$$\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\|_{D(\mathcal{C}_0)}^2 = \left\| \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 + \left\| \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_0)$$

Montrons d'abord que l'injection  $D(\mathcal{C}_0) \hookrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est compacte c'est à dire que toute suite bornée dans  $D(\mathcal{C}_0)$  admet une sous-suite qui converge dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Soit

$$\{(v_n, z_n) \in D(\mathcal{C}_0), n \in \mathbb{N}\} \subset V \times L^2(\Omega)$$

une suite bornée dans  $D(\mathcal{C}_0)$ . C'est à dire  $\Delta v_n \in L^2(\Omega)$  et  $\partial_\nu v_n - \Delta_{\Gamma} v_n + z_n = 0$  dans  $H^{-1}(\Gamma_1^j)$  et ce qui signifie que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la quantité :

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{j=2} \left\| (\nabla_{\Gamma} v_n)_{|\Gamma_1^j} \right\|_{L^2(\Gamma_1^j)}^2 d\Gamma_1^j + \|z_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{j=2} \left\| (\nabla_{\Gamma} z_n)_{|\Gamma_1^j} \right\|_{L^2(\Gamma_1^j)}^2 d\Gamma_1^j + \|\Delta v_n\|_{L^2(\Omega)}^2$$

est bornée. D'après le résultat qu'est la proposition 2.1, établie en page 83, on sait que :

$$\left( \frac{1}{\pi^2} \right) \sum_{j=1}^{j=2} \left\| (v_n)_{|\Gamma_1^j} \right\|_{L^2(\Gamma_1^j)}^2 \leq \left( \sum_{j=1}^{j=2} \left\| (\nabla_{\Gamma} v_n)_{|\Gamma_1^j} \right\|_{L^2(\Gamma_1^j)}^2 d\Gamma_1^j \right)$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré (proposition 1.15 de la page 52), on obtient pour  $c > 0$  convenablement choisi, et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  la majoration :

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|z_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{j=2} \left( \left\| (v_n)_{|\Gamma_1^j} \right\|_{H^1(\Gamma_1^j)}^2 + \left\| (z_n)_{|\Gamma_1^j} \right\|_{H^1(\Gamma_1^j)}^2 \right) \leq c$$

L'injection  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est compacte, la suite  $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$  bornée dans  $H^1(\Omega)$ , admet une sous-suite, encore notée  $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ , qui converge dans  $L^2(\Omega)$  vers un élément  $z$ .

Evaluons pour tout couple d'entiers  $p > q \geq 0$  la quantité

$$\|\nabla v_p - \nabla v_q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{j=2} \|\nabla_{\Gamma} v_p - \nabla_{\Gamma} v_q\|_{L^2(\Gamma_1^j)}^2$$

On a :  $v_n \in H^1(\Delta, \Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$  puisque  $v_n \in H^1(\Omega)$  et  $\|\Delta v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c$  pour tout

$n \in \mathbb{N}$ . On peut donc définir pour tout  $j \in \{1, 2\}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application

$\left(\frac{\partial v_n}{\partial \nu}\right)_{|\Gamma_1^j} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$  définie pour tout  $w \in V$  par :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \left(\frac{\partial v_n}{\partial \nu}\right)_{|\Gamma_1^j}, w \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = \int_{\Omega} (\nabla w \nabla v_n + w \Delta v_n) dx dy$$

Et on a :

$$\|\nabla v_p - \nabla v_q\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \left(\frac{\partial(v_p - v_q)}{\partial \nu}\right)_{|\Gamma_1^j}, (v_p - v_q) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} - \int_{\Omega} (v_p - v_q) \cdot \Delta(v_p - v_q) dx dy$$

D'autre part, d'après la définition de  $D(\mathcal{C}_0)$ , on obtient :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \|\nabla_{\Gamma} v_p - \nabla_{\Gamma} v_q\|_{L^2(\Gamma_1^j)}^2 = - \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \left(\frac{\partial(v_p - v_q)}{\partial \nu} + (z_p - z_q)\right)_{|\Gamma_1^j}, (v_p - v_q) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)}$$

Les quantités  $\|z_p - z_q\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)}$  et  $\|\Delta v_p - \Delta v_q\|_{L^2(\Omega)}$  étant bornées, il en résulte par addition

membre à membre pour  $k > 0$  convenable que :

$$\|\nabla v_p - \nabla v_q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{j=2} \|\nabla_{\Gamma} v_p - \nabla_{\Gamma} v_q\|_{L^2(\Gamma_1^j)}^2 \leq k \left( \|v_p - v_q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} + \|v_p - v_q\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

Les injections  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  et  $H^1(\Gamma_1^j) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$  sont compactes. Les suites

$\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{(v_n)_{|\Gamma_1^j}, n \in \mathbb{N}\}$  sont respectivement bornées dans  $H^1(\Omega)$  et  $H^1(\Gamma_1^j)$ . On

peut de  $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$  extraire une sous-suite qu'on notera encore  $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$  qui converge

dans  $L^2(\Omega)$  et dont la suite des traces  $\{(v_n)_{|\Gamma_1^j}, n \in \mathbb{N}\}$  converge dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$ . La sous-

suite  $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$  est, selon l'inégalité :

$$\|\nabla v_p - \nabla v_q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{j=2} \|\nabla_{\Gamma} v_p - \nabla_{\Gamma} v_q\|_{L^2(\Gamma_1^j)}^2 \leq k \left( \|v_p - v_q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} + \|v_p - v_q\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

une suite de Cauchy dans  $V$ . Elle y converge. Donc :  $(v_n)_{|\Gamma_1^j} \longrightarrow v_{|\Gamma_1^j}$  dans  $H^1(\Gamma_1^j)$ .  
 Finalement, dès que la suite  $\{(v_n, z_n), n \in \mathbb{N}\}$  est bornée dans  $D(\mathcal{C}_0)$  elle admet une sous-suite qui converge dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Ce qui prouve que l'injection  $D(\mathcal{C}_0) \hookrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est compacte.

Soit maintenant  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_0)$ . L'ensemble  $\left\{S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0\right\} \subset D(\mathcal{C}_0)$  désigne la trajectoire de la solution  $(u, u') \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, V \times L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[, D(\mathcal{C}_0))$  du problème  $\mathcal{P}_0$ . On a :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0$$

La solution vérifie, par ailleurs, les inégalités :

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \left\| \begin{pmatrix} u'(t) \\ \Delta u(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^1 \\ \Delta u^0 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0$$

On en déduit que :

$$\left\| S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{D(\mathcal{C}_0)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{D(\mathcal{C}_0)} \quad \forall t \geq 0$$

L'ensemble  $\left\{S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0\right\} \subset D(\mathcal{C}_0)$  est donc borné dans  $D(\mathcal{C}_0)$  pour la norme  $\|\cdot\|_{D(\mathcal{C}_0)}$ .

Or, l'injection  $D(\mathcal{C}_0) \hookrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est compacte, donc la trajectoire  $\left\{S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0\right\}$  est relativement compacte dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Ce qui achève la preuve.

## Théorème 2.2 : (Stabilité forte)

Le semi-groupe de contractions  $S_0(t)_{t \geq 0}$  engendré par l'opérateur  $\mathcal{C}_0$  sur  $V \times L^2(\Omega)$ , est fortement stable. C'est à dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_0(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall (v, z) \in V \times L^2(\Omega)$$

**Preuve :** La fonction  $V \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$  définie par :

$$(v, z) \mapsto \Phi\left(\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2$$

est une fonction de Liapounov pour le semi-groupe de contractions  $S_0(t)_{t \geq 0}$  engendré par l'opérateur  $\mathcal{C}_0$ . Soit  $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}$  un élément de  $D(\mathcal{C}_0)$ . La trajectoire  $\left\{ S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0 \right\}$  est, d'après la proposition précédente relativement compacte dans  $V \times L^2(\Omega)$ . A toute suite croissante de nombre positifs qui tend vers  $+\infty$ , on peut donc associer une suite croissante de nombre positifs  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $+\infty$  telle que la suite  $\left\{ S_0(t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N} \right\}$  converge dans  $V \times L^2(\Omega)$  vers un élément  $\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix}$ . Par application du principe d'invariance de LaSalle, il existe une constante  $C \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \geq 0$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \left\| \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = C \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad (2.2.a)$$

L'application  $t \longmapsto S_0(t) \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix}$  étant la solution faible du problème :

$$(\mathcal{P}_0)_{(v^0, v^1)} : \left\{ \begin{array}{ll} w''(t) - \Delta w(t) = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ w(t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu w(t) - \Delta_\Gamma w(t) + w'(t) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ w(0) = v^0 \text{ et } w'(0) = v^1 & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

il existe une fonction  $(w, w') \in C^0(\mathbb{R}_+, V \times L^2(\Omega))$  telle que :

$$\begin{pmatrix} w(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = S_0(t) \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0$$

Soit  $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite positive qui tend vers l'infini  $+\infty$ . L'égalité :

$$\begin{pmatrix} u(t+t_n) \\ u'(t+t_n) \end{pmatrix} = S_0(t+t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} = S_0(t) \left[ S_0(t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right] \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall t \geq 0$$



implique par continuité du semi-groupe  $S_0(t)_{t \geq 0}$  la convergence dans  $V \times L^2(\Omega)$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u(t + t_n) \\ u'(t + t_n) \end{pmatrix} = \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = S_0(t) \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0$$

On en déduit alors que la fonction  $\begin{pmatrix} w(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$  est constante par rapport à  $t$  et par conséquent

$$\begin{pmatrix} w(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0$$

Donc :  $w''(t) = w'(t) = v^1 = 0 \quad \forall t \geq 0$ . Et pour  $t = 0$  le problème  $(\mathcal{P}_0)_{(v^0, v^1)}$  s'écrit :

$$(\mathcal{P}_0)_{(v^0, v^1)} : \left\{ \begin{array}{ll} \Delta v^0 = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ v^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu v^0 - \Delta_T v^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}$$

En multipliant la première équation par  $v^0$  et en intégrant sur  $\Omega$  on obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla v^0|^2 dx dy = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\partial_\nu(v))_{|\Gamma_1^j}, v^0_{|\Gamma_1^j} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)}$$

Avec la condition de Ventcel, l'égalité précédente donne :

$$\int_{\Omega} |\nabla v^0|^2 dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} |\nabla_T v^0|^2 d\Gamma_1^j = 0$$

c'est à dire :  $\|v^0\|_V = 0$ . Donc  $v^0 = v^1 = 0$ . D'où l'égalité :  $\left\| \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0$ . Or

d'après (2.2.a), cela signifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{C}_0)$$

Comme  $D(\mathcal{C}_0)$  est dense dans  $V \times L^2(\Omega)$  on a d'après la proposition 1.21 (voir la page 59) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_0(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in V \times L^2(\Omega)$$

## II.4 - Stabilisation exponentielle :

On montrera dans ce paragraphe que le semi-groupe fortement continu de contractions  $S_0(t)_{t \geq 0}$  engendré par  $\mathcal{C}_0$  n'est pas exponentiellement stable sur  $V \times L^2(\Omega)$ . La démonstration consiste à montrer que les valeurs propres de  $\mathcal{C}_0$  sont à parties réelles négatives et aussi proches que l'on veut de l'axe imaginaire. Ce dont on déduira que le rayon spectral de  $\mathcal{C}_0$  est positif ou nul. Mais on montrera, entre temps, qu'il est inférieure au type du semi-groupe engendré par  $\mathcal{C}_0$ . Or, un semi-groupe est exponentiellement stable si, et seulement si, son type est strictement négatif. Et ceci permettra de conclure. Une étude spectrale de l'opérateur  $\mathcal{C}_0$  est donc nécessaire pour établir ces résultats intermédiaires.

### Etude spectrale de l'opérateur $\mathcal{C}_0$

#### Proposition 2.6 :

*$\mathcal{C}_0$  est un opérateur à résolvante compacte*

**Preuve :** On rappelle que selon la définition 1.11, l'ensemble résolvant de l'opérateur  $\mathcal{C}_0$  est l'ensemble noté  $\rho(\mathcal{C}_0)$  des nombres complexes  $\lambda$  tels que l'application :

$$(\lambda I - \mathcal{C}_0)^{-1} : V \times L^2(\Omega) \longrightarrow D(\mathcal{C}_0) \subset V \times L^2(\Omega)$$

existe, est bornée et est à domaine dense dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Notée  $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{C}_0)$ , elle est appelée résolvante de l'opérateur  $\mathcal{C}_0$ . Soit  $\lambda \in \rho(\mathcal{C}_0)$ . On cherche à montrer que la résolvante  $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{C}_0)$  est compacte c'est à dire que pour toute suite  $\{(u_n, w_n), n \in \mathbb{N}\}$  bornée dans  $V \times L^2(\Omega)$ , la suite des images  $\{\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{C}_0)(u_n, w_n), n \in \mathbb{N}\} \subset D(\mathcal{C}_0)$  notée  $\{(v_n, z_n), n \in \mathbb{N}\}$  admet une sous-suite qui converge dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Et il suffira pour cela de montrer que la suite

$\{(v_n, z_n), n \in \mathbb{N}\}$  est bornée dans  $D(\mathcal{C}_0)$  puisque l'injection  $D(\mathcal{C}_0) \hookrightarrow V \times L^2(\Omega)$  compacte.

On a :

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{C}_0)(u_n, w_n) = (v_n, z_n) \iff \begin{cases} u_n = \lambda v_n - z_n \\ w_n = \lambda z_n - \Delta v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La résolvante  $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{C}_0) : V \times L^2(\Omega) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est un opérateur linéaire borné et la suite  $\{(u_n, w_n), n \in \mathbb{N}\}$  est bornée dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Il s'en suit que la suite  $\{(v_n, z_n), n \in \mathbb{N}\}$  est bornée dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Ce qui implique que la suite  $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$  est bornée dans  $V$  et que la suite  $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ . Mais pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $z_n = \lambda v_n - u_n$ . La suite  $\{z_n = \lambda v_n - u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est donc bornée dans  $V$  et la suite  $\{\Delta v_n = \lambda z_n - w_n, n \in \mathbb{N}\}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ . D'où  $\{(v_n, z_n), n \in \mathbb{N}\}$  est bornée dans  $D(\mathcal{C}_0)$ . Ce qui achève la preuve.

**Proposition 2.7 :**

Les valeurs propres de  $\mathcal{C}_0$  sont à partie réelle négative et forment un ensemble noté  $\mathbf{VP}(\mathcal{C}_0)$  discret sans autre point d'accumulation que  $\infty$ . C'est à dire  $\mathbf{VP}(\mathcal{C}_0)$  est fini ou :

$$\forall m > 0, \text{ il existe } \lambda \in \mathbf{VP}(\mathcal{C}_0) \text{ telle que : } |\lambda| > m$$

**Preuve :** Remarquons d'abord que zéro et un ne sont pas des valeurs propres de  $\mathcal{C}_0$ . En effet, si  $0 \in \mathbf{VP}(\mathcal{C}_0)$  il existerait un vecteur non nul  $(v_0, z_0) \in D(\mathcal{C}_0)$  tel que  $\mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0$  c'est à dire :  $z_0 = 0$  et  $\Delta v_0 = 0$ . La condition de Ventcel 2.0.8 de la page 88 donne alors :

$$z_0 = 0 \implies \partial_\nu(v_0)|_{\Gamma_1^j} - \Delta_T(v_0)|_{\Gamma_1^j} = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

Cela implique :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \partial_\nu(v_0)|_{\Gamma_1^j} - \Delta_T(v_0)|_{\Gamma_1^j}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = 0$$

Et en appliquant les propositions 2.2 et 2.3 établies en pages 86 et 87, on obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx dy + \int_{\Omega} v_0 \Delta(v_0) dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} |\nabla_{\mathbb{T}} v_0|^2 d\Gamma_1^j = 0$$

Comme  $\Delta(v_0) = 0$  on en déduit que  $\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\mathbb{T}} v_0\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 = 0$  donc  $v_0 = 0$  car  $v_0$  ne peut pas être une constante non nulle. D'où  $(v_0, z_0) = 0$ . Ce qui contredit l'hypothèse  $(v_0, z_0) \neq 0$ . Quant à 1, s'il était une valeur propre de  $\mathcal{C}_0$ , il existerait un vecteur non nul  $(v_1, z_1) \in D(\mathcal{C}_0)$  tel que  $\mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} v_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ . Ce qui donnerait  $z_1 = v_1 = \Delta v_1$ . Le couple  $(v_1, z_1) \in D(\mathcal{C}_0)$  vérifie par définition de  $D(\mathcal{C}_0)$  la condition de Ventcel (2.0.8). Donc :

$$\partial_{\nu}(v_1)_{|\Gamma_1^j} - \Delta_{\mathbb{T}}(v_1)_{|\Gamma_1^j} + (v_1)_{|\Gamma_1^j} = 0 \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

Comme  $v_1 = \Delta v_1$ , en appliquant les propositions 2.2 et 2.3 (pages 86-87) à l'égalité :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \partial_{\nu}(v_1)_{|\Gamma_1^j} - \Delta_{\mathbb{T}}(v_1)_{|\Gamma_1^j} + (v_1)_{|\Gamma_1^j}, (v_1)_{|\Gamma_1^j} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = 0$$

on obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 dx dy + \int_{\Omega} |v_1|^2 dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} |\nabla_{\mathbb{T}} v_1|^2 d\Gamma_1^j + \sum_{j=1}^{j=2} \|v_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)}^2 = 0$$

Et en particulier  $\|\nabla v_1\|_V^2 + \|v_1\|_V^2 = 0$  donc  $v_1 = 0$  car  $v_1$  ne peut pas être une constante non nulle. D'où  $(z_1, v_1) = 0$ . Ce qui est contraire à l'hypothèse  $(z_1, v_1) \neq (0, 0)$ . Finalement  $0 \notin \mathbf{VP}(\mathcal{C}_0)$  et  $1 \notin \mathbf{VP}(\mathcal{C}_0)$ .

Soit  $\mathcal{R}_1(\mathcal{C}_0) : V \times L^2(\Omega) \longrightarrow D(\mathcal{C}_0)$  définie par  $\mathcal{R}_1(\mathcal{C}_0) = (I - \mathcal{C}_0)^{-1}$  la résolvante de  $\mathcal{C}_0$  et  $\lambda \in \mathbf{VP}(\mathcal{C}_0)$ . Alors  $\lambda \neq 1$  et pour tout vecteur propre  $u$  associé à  $\lambda$  on a :  $\mathcal{C}_0 u = \lambda u$ .

Donc :

$$(I - \mathcal{C}_0)u = (1 - \lambda)u$$

On applique  $(I - \mathcal{C}_0)^{-1}$  aux deux membres de cette égalité et on obtient :

$$u = (I - \mathcal{C}_0)^{-1}(1 - \lambda)u$$

Donc :

$$\mathcal{R}_1(\mathcal{C}_0)u = \frac{u}{(1 - \lambda)}$$

D'où l'équivalence :

$$\forall \lambda \in \mathbf{VP}(\mathcal{C}_0) \iff \frac{1}{(1 - \lambda)} \in \mathbf{VP}(\mathcal{R}_1(\mathcal{C}_0)) \quad (2.7.1)$$

avec  $(1 - \lambda)^{-1} \neq 1$  puisque zéro n'est pas valeur propre de  $\mathcal{C}_0$ . La résolvante  $\mathcal{R}_1(\mathcal{C}_0)$  est compacte d'après la proposition 2.6 de la page 102. Et par conséquent, d'après une propriété spectrale des opérateurs compacts (voir proposition 1.6 en page 23), il ne reste pour tout  $\varepsilon > 0$  dans le plan complexe qu'un nombre fini de valeurs propres de  $\mathcal{R}_1(\mathcal{C}_0)$  en dehors du disque ouvert  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < \varepsilon\}$ . Les valeurs propres de  $\mathcal{R}_1(\mathcal{C}_0)$  forment donc un ensemble discret au plus dénombrable. S'il n'est pas fini, son seul point d'accumulation est zéro. Il en résulte d'après l'équivalence (2.7.1) que les valeurs propres de  $\mathcal{C}_0$  forment un ensemble discret dont le seul point d'accumulation éventuel est l'infini.

Montrons à présent que la partie réelle de toute valeur propre  $\lambda \in \mathbf{VP}(\mathcal{C}_0)$  est négative. Soit  $u$  un vecteur propre de  $\mathcal{C}_0$  associé à  $\lambda$ . Selon la proposition 1.10 établie en page 28, le nombre complexe  $\lambda_t = e^{\lambda t}$  est une valeur propre de  $S_0(t)$  et  $u$  est un vecteur propre de  $S_0(t)$  associé à  $\lambda_t$  c'est à dire  $S_0(t)u = e^{\lambda t}u$  pour tout  $t \geq 0$ . Il en résulte que :

$$\|S_0(t)u\|_{V \times L^2(\Omega)} = \left| e^{\lambda t} \right| \|u\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0$$

Comme  $S_0(t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe de contractions, on en déduit que :

$$|e^{\lambda t}| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

En posant  $\lambda = \alpha + i\beta$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  on écrit :  $|e^{\lambda t}| = |e^{i \cdot \text{Im}(\lambda t)}| e^{\text{Re}(\lambda t)}$  et on a alors :

$$e^{\text{Re}(\lambda t)} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

Le logarithme étant une fonction croissante, on obtient :

$$\text{Re}(\lambda t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$$

Ce qui, en particulier pour  $t = 1$ , entraîne que  $\text{Re}(\lambda) \leq 0$  et prouve bien que :

$$\text{Re}(\lambda) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{VP}(\mathcal{C}_0)$$

**Remarque 2.3 :** On rappelle que le type du semi-groupe  $(S_0(t))_{t \geq 0}$  est défini par :

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \| S_0(t) \|_{\mathcal{L}(V \times L^2(\Omega))}$$

et que son rayon spectral est défini par :  $\omega = \text{Sup}\{\text{Re}(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{C}_0)\}$  où  $\sigma(\mathcal{C}_0)$  désigne le spectre de l'opérateur  $\mathcal{C}_0$ . On remarquera que le type du semi-groupe  $S_0(t)_{t \geq 0}$  est supérieur ou égal à son rayon spectral :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \| S_0(t) \|_{\mathcal{L}(V \times L^2(\Omega))} \geq \text{Sup}\{\text{Re}(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{C}_0)\}$$

Afin de prouver cette assertion, on raisonne par l'absurde en supposant que  $\omega_0 < \omega$  c'est à dire qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\omega_0 < \omega - \varepsilon < \omega$ . Par définition du *Sup*, il existe alors  $\lambda \in \sigma(\mathcal{C}_0)$  vérifiant :  $\omega - \varepsilon < \text{Re}(\lambda) \leq \omega$ . Et dans ce cas  $\omega_0 < \omega - \varepsilon$  et  $\omega - \varepsilon < \text{Re}(\lambda)$ . Or, on sait que pour tout  $\alpha > \omega_0$  on a l'inclusion  $\{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Re}(\lambda) > \alpha\} \subset \rho(\mathcal{C}_0)$  qui implique l'inclusion  $\{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Re}(\lambda) > \omega - \varepsilon\} \subset \rho(\mathcal{C}_0)$  et donc  $\lambda \in \rho(\mathcal{C}_0)$ . D'où la contradiction puisque  $\sigma(\mathcal{C}_0) = \mathbb{C} - \rho(\mathcal{C}_0)$ .

### Etude spectrale de l'opérateur $\mathcal{C}$ :

$\mathcal{C}_0$  est une perturbation d'un opérateur linéaire  $\mathcal{C}$  défini sur le domaine  $D(\mathcal{C})$  :

$$D(\mathcal{C}) = \left\{ (v, z) \in V \times V : \Delta v \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_\nu v - \Delta_\Gamma v = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Gamma_1^j) \right\} \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad (2.8.0.0)$$

et par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : D(\mathcal{C}) \subset V \times V &\longrightarrow V \times L^2(\Omega) \\ \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \mathcal{C} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.8.0.1)$$

On se propose d'étudier les propriétés des valeurs propres de  $\mathcal{C}$  car elles permettront d'en déduire les propriétés des valeurs propres de  $\mathcal{C}_0$ . Ce qui est important pour la suite. La condition  $\Delta v \in L^2(\Omega)$  entraîne l'inclusion  $D(\mathcal{C}) \subset H^1(\Delta, \Omega) \times V$  qui donne, selon la proposition 2.2 et la remarque 2.2 (pages 86-88), un sens à la condition  $\partial_\nu v - \Delta_\Gamma v = 0$  qui devient équivalente à :  $\langle \partial_\nu v - \Delta_\Gamma v, w \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1^j), H_0^1(\Gamma_1^j)} = 0$  pour tout  $w \in H_0^1(\Gamma_1^j)$  et  $j \in \{1, 2\}$ .

### Proposition 2.8 : Equation aux valeurs propres de $\mathcal{C}$

L'opérateur  $\mathcal{C}$  possède une famille de valeurs propres vérifiant dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = \frac{\lambda + \sqrt{2}}{\lambda - \sqrt{2}} \quad (2.8.0)$$

**Preuve :** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathcal{C}$  et  $(v, z) \in D(\mathcal{C})$  une fonction propre associée à  $\lambda$ .

Par définition de  $\mathcal{C}$  on a alors  $z = \lambda v$  et  $\Delta v = \lambda z$ . La fonction  $v$  donc les équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v = \lambda^2 v & \text{dans } \Omega \quad (2.8.i) \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0^j \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad (2.8.ii) \\ \partial_\nu v - \Delta_\Gamma v = 0 & \text{sur } \Gamma_1^j \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad (2.8.iii) \end{array} \right.$$

Par définition du Laplacien on a :

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.8.1)$$

A l'aide du paramétrage (2.0.0) défini en page 81, de l'expression 2.1.1 de la page 83 et de la définition du Laplacien tangentiel explicitée par la formule (1.48.1) de la page 78 on obtient :

$$\Delta_{\Gamma} v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{sur } \Gamma_1^1 \quad \text{et} \quad \Delta_{\Gamma} v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{sur } \Gamma_1^2 \quad (2.8.2)$$

L'expression de la dérivée normale est donnée par les formules :

$$\partial_{\nu} v = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{sur } \Gamma_1^1 \quad \text{et} \quad \partial_{\nu} v = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma_1^2 \quad (2.8.3)$$

puisque vecteur  $n(x, y)$  normal unitaire extérieure à  $\Omega$  s'exprime par :

$$n(x, y) = (0, 1) \quad \text{sur } \Gamma_1^1 \quad \text{et} \quad n(x, y) = (1, 0) \quad \text{sur } \Gamma_1^2$$

Quant au gradient tangentiel  $\nabla_{\Gamma}$  il est donné par les formules :

$$\nabla_{\Gamma} v = -\frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) \quad \text{sur } \Gamma_1^1 \quad \text{et} \quad \nabla_{\Gamma} v = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 1) \quad \text{sur } \Gamma_1^2 \quad (2.8.4)$$

On réécrit les équations (2.8.i),(2.8.ii) et (2.8.iii) à l'aide des formules (2.8.1), (2.8.2) et (2.8.3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \lambda^2 v \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (2.8.i) \\ v = 0 \quad \text{sur } \overline{\Gamma_0^1} \cup \overline{\Gamma_0^2} \quad (2.8.ii) \\ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^2 \quad (2.8.iii) \end{array} \right.$$

On cherchera ensuite des fonctions propres de la forme  $v(x, y) = f(x)f(y)$ . Et dans ce cas, un simple calcul donne :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f'(x)f(y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = f(x)f'(y), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f''(x)f(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x)f''(y)$$



Et les équations précédentes s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x)f(y) + f''(y)f(x) = \lambda^2 f(x)f(y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (2.8.i) \\ f(0)f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \pi] \quad (2.8.ii) \\ f(x)f'(\pi) - f''(x)f(\pi) = 0 \quad \forall x \in ]0, \pi[ \quad (2.8.iii) \end{array} \right\}$$

L'équation (2.8.ii) donne  $f(0) = 0$ . Et lorsque  $f(\pi) \neq 0$ , l'équation (2.8.iii) équivaut à :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} \quad \forall x \in ]0, \pi[$$

et par conséquent :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Et l'équation (2.8.i) devient donc :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{f''(y)}{f(y)} = \lambda^2 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

D'où les conditions :

$$2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} = \lambda^2 \quad \forall x \in ]0, \pi[ \quad (2.8.a)$$

$$f(0) = 0 \quad (2.8.b)$$

En posant  $\alpha^2 = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$  il s'agira de trouver une fonction vérifiant :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} = \alpha^2 \quad \forall x \in ]0, \pi[ \text{ et } f(0) = 0$$

en notant que  $\alpha^2 = \frac{1}{2}\lambda^2$ . Autrement dit, la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad f'' - \alpha^2 f = 0 \quad (2.8.a) \\ 2) \quad f(0) = 0 \quad (2.8.b) \end{array} \right\}$$

On fait un changement de variable en posant  $u = f' - \alpha f$  et on obtient en  $u$  l'équation  $u' + \alpha u = 0$  dont la solution s'écrit sous la forme  $u(x) = C_0 \cdot e^{-\alpha x}$  où  $C_0$  est une constante.

Il s'agira alors de résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad f' - \alpha f = u \\ 2) \quad u' + \alpha u = 0 \end{array} \right.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $f' - \alpha f = u$  sous la forme  $f_0(x) = \beta e^{-\alpha x}$ .

On trouve  $f_0(x) = \frac{-C_0}{2\alpha} \cdot e^{-\alpha x}$ . Si  $f$  est solution de l'équation  $f' - \alpha f = u$ , alors  $f - f_0$  est solution de l'équation homogène  $f' - \alpha f = 0$  qui d'autre part s'écrit sous la forme  $C_1 e^{\alpha x}$ .

Donc :  $f - f_0 = C_1 e^{\alpha x}$ . D'où  $f(x) = C_1 \cdot e^{\alpha x} - \frac{-C_0}{2\alpha} \cdot e^{-\alpha x}$ . En posant  $C_2 = -\frac{-C_0}{2\alpha}$ , on

trouve deux constantes  $C_1, C_2$  telles que :  $f(x) = C_1 \cdot e^{\alpha x} + C_2 \cdot e^{-\alpha x}$ . La condition initiale

$f(0) = 0$  implique  $C_1 - \frac{-C_0}{2\alpha} = 0$  et la condition  $\alpha^2 = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$  entraîne :

$$\frac{\alpha C_1 \cdot e^{\alpha\pi} - \alpha C_2 \cdot e^{-\alpha\pi}}{C_1 \cdot e^{\alpha\pi} + C_2 \cdot e^{-\alpha\pi}} = \alpha^2$$

c'est à dire :

$$(\alpha - 1)C_1 \cdot e^{\alpha\pi} + (\alpha + 1)C_2 \cdot e^{-\alpha\pi} = 0$$

Pour  $C_1 \neq 0$  on a alors  $e^{\alpha\pi}(\alpha - 1) - e^{-\alpha\pi}(\alpha + 1) = 0$  et en remplaçant  $\alpha$  par  $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ , on obtient

une équation en  $\lambda$  :

$$e^{\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - 1 \right) - e^{-\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + 1 \right) = 0$$

c'est à dire :

$$e^{-\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} \left[ e^{\lambda\pi\sqrt{2}} \left( \frac{\lambda - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) - \left( \frac{\lambda + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right] = 0$$

Donc l'opérateur  $\mathcal{C}$  possède une famille de valeurs propres vérifiant dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = \frac{\lambda + \sqrt{2}}{\lambda - \sqrt{2}}$$

**Proposition 2.9 :**

L'opérateur  $\mathcal{C}$  a toutes ses valeurs propres imaginaires pures et il engendre sur l'espace  $V \times L^2(\Omega)$  un semi-groupe  $S_{\mathcal{C}}(t)_{t \geq 0}$  de contractions tel que :

$$\|S_{\mathcal{C}}(t)\|_{L(V \times L^2(\Omega))} = 1 \quad \forall t \geq 0$$

**Preuve :** Pour tout  $(v, z) \in D(\mathcal{C})$ , la quantité  $\langle \mathcal{C}(v, z), (v, z) \rangle_{V \times L^2(\Omega)}$  définie par :

$$\left\langle \mathcal{C} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \langle z, v \rangle_V + \langle \Delta v, z \rangle_{L^2(\Omega)}$$

vaut par définition des produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  :

$$\left\langle \mathcal{C} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla v \nabla z \cdot dx dy + \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} z \, d\Gamma_1 + \int_{\Omega} z \Delta v \cdot dx dy$$

En appliquant la proposition 2.3 citée en page 87 on a :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \partial_{\nu} (v)|_{\Gamma_1^j}, z \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = \int_{\Omega} (\nabla z \nabla v + z \Delta v) dx dy \quad (2.9.1)$$

L'égalité  $\partial_{\nu} v - \Delta_{\Gamma} v = 0$  dans  $H^{-1}(\Gamma_1^j)$  entraîne donc  $\Delta_{\Gamma} v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j) \quad \forall j \in \{1, 2\}$  avec :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} \nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} z \, d\Gamma_1 = - \sum_{j=1}^{j=2} \langle \Delta_{\Gamma} v, z \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

Donc :

$$\left\langle \mathcal{C} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \partial_{\nu} (v)|_{\Gamma_1^j}, z \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} - \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\Delta_{\Gamma} v)|_{\Gamma_1^j}, z \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)}$$

D'où, pour tout  $(v, z) \in D(\mathcal{C})$ , l'égalité :

$$\left\langle \mathcal{C} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\partial_{\nu} v - \Delta_{\Gamma} v)|_{\Gamma_1^j}, z \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = 0 \quad (2.9.2)$$

Et par conséquent  $\mathcal{C}$  est dissipatif. Pour montrer qu'il est m-dissipatif, il suffira de prouver que l'opérateur  $I - \mathcal{C}$  est surjectif. C'est à dire :

$$\forall (u, w) \in V \times L^2(\Omega), \exists (v, z) \in D(\mathcal{C}) \text{ tel que } : \left\{ \begin{array}{l} v - z = u \\ z - \Delta v = w \end{array} \right\}$$

Ce qui revient à résoudre le problème suivant :

$$\pi_{\mathcal{C}}(u, w) : \left\{ \begin{array}{l} v - \Delta v = u + w \quad \text{dans } \Omega \quad (2.9.i) \\ \partial_{\nu} v - \Delta_{\Gamma} v = 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Gamma_1^j) \quad \forall j \in \{0, 1\} \times \{1, 2\} \quad (2.9.ii) \end{array} \right\}$$

On multiplie l'équation (2.9.i) membre à membre par une fonction arbitraire  $f \in V$  et on intègre sur  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} f(v - \Delta v) dx dy = \int_{\Omega} f(u + w) dx dy \quad \forall f \in V$$

ce qui donne pour  $f \in V$  quelconque :

$$\int_{\Omega} f(v - \Delta v) dx dy = \int_{\Omega} (vf + \nabla v \nabla f) dx dy - \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \partial_{\nu}(v)|_{\Gamma_1^j}, f \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = \int_{\Omega} f(u+w) dx dy$$

Mais d'après l'équation (2.9.ii) on a :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \partial_{\nu}(v)|_{\Gamma_1^j}, f \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\Delta_{\Gamma})|_{\Gamma_1^j}, f \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = - \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} (\nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} f) d\Gamma_1^j$$

Et donc :

$$\int_{\Omega} (vf + \nabla v \nabla f) dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} \nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} f d\Gamma_1^j = \int_{\Omega} f(u + w) dx dy \quad \forall f \in V$$

On donne alors une formulation variationnelle du problème en considérant la forme bilinéaire

$\mathcal{F}_0 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\mathcal{F}_0(v_1, v_2) = \int_{\Omega} (v_1 v_2 + \nabla v_1 \nabla v_2) dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} \nabla_{\Gamma} v_1 \nabla_{\Gamma} v_2 d\Gamma_1^j$$

et la forme linéaire  $\mathcal{L}_0 : V \longrightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\mathcal{L}_0(v_1) = \int_{\Omega} (u + w)v_1 dx dy \quad \forall v_1 \in V$$

On vérifie aisément que la forme bilinéaire  $\mathcal{F}_0$  est continue et coercive et que la forme linéaire  $\mathcal{L}_0$  l'est aussi puisque :

$$|\mathcal{L}_0(v_1)| \leq \|u + w\|_{L^2(\Omega)} \|v_1\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v_1 \in V$$

Il existe alors par application du Théorème de Lax-Milgram un seul élément  $v \in V$  tel que :

$$\mathcal{L}_0(v_1) = \mathcal{F}_0(v, v_1) \quad \forall v_1 \in V$$

C'est à dire :

$$\int_{\Omega} (u + w)v_1 dx dy = \int_{\Omega} (v_1 v + \nabla v_1 \nabla v) dx dy + \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} \nabla_{\mathbf{T}} v_1 \nabla_{\mathbf{T}} v d\Gamma_1^j \quad \forall v_1 \in V \quad (2.9.3)$$

Cette égalité équivaut, en particulier pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$  à :

$$\int_{\Omega} (\varphi v + \nabla \varphi \nabla v) dx = \int_{\Omega} (u + w)\varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

D'où, dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , l'égalité :  $v - \Delta v = u + w$ . L'équation (2.9.i) du problème  $\pi_{\mathcal{C}}(u, w)$  est donc satisfaite et entraîne que  $\Delta v \in L^2(\Omega)$  puisque  $(v - u - w) \in L^2(\Omega)$ . On sait alors d'après la proposition 2.3 (page 87) que :

$$(\partial_{\nu} v)|_{\Gamma_1^j} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j) \subset H^{-1}(\Gamma_1^j) \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

Comme l'égalité (2.9.3) implique :

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla v dx dy = \int_{\Omega} (u + w)v_1 dx dy - \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} (\nabla_{\mathbf{T}} v_1 \nabla_{\mathbf{T}} v) d\Gamma_1^j - \int_{\Omega} v_1 v dx dy \quad \forall v_1 \in V$$

et puisque  $-\Delta v = u + w - v$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla v . dx dy = - \int_{\Omega} v_1 \Delta v . dx dy - \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Gamma_1^j} (\nabla_{\mathbf{T}} v_1 \nabla_{\mathbf{T}} v) . d\Gamma_1^j \quad \forall v_1 \in V$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \partial_{\nu} (v) |_{\Gamma_1^j}, v_1 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = \sum_{j=1}^{j=2} \left\langle (\Delta_{\mathbf{T}} v) |_{\Gamma_1^j}, v_1 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} \quad \forall v_1 \in V$$

car  $(v_1) |_{\Gamma_1^j} \in H^1(\Gamma_1^j) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j) = H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$ . D'où :

$$\sum_{j=1}^{j=2} \left\langle \partial_{\nu} (v) |_{\Gamma_1^j} - (\Delta_{\mathbf{T}} v) |_{\Gamma_1^j}, v_1 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)} = 0 \quad \forall v_1 \in V$$

Ce qui satisfait l'équation (2.9.ii) et montre que l'opérateur  $I - \mathcal{C} : D(\mathcal{C}_0) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est surjectif. D'où  $\mathcal{C}$  est m-dissipatif. Et d'après le Théorème 1.6 cité en page 27, l'opérateur  $\mathcal{C}$  engendre un semi-groupe de contractions  $S_{\mathcal{C}}(t)_{t \geq 0}$ . Or d'après le résultat (2.9.3) établi en page 113, on sait que :

$$\left\langle \mathcal{C} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C})$$

On peut donc appliquer la proposition 1.11 de la page 29 et en déduire que les valeurs propres de  $\mathcal{C}$  sont imaginaires pures et que :

$$\|S_{\mathcal{C}}(t)\|_{L(V \times L^2(\Omega))} = 1 \quad \forall t \geq 0$$

**Proposition 2.10** : Il existe une suite infinie  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels vérifiant :

$$\lambda_n = i\mu_n \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbf{VP}(\mathcal{C}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.10.i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n| = +\infty \quad (2.10.ii)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n - 2n| = 0 \quad (2.10.iii)$$

**Preuve :** Les valeurs propres de  $\mathcal{C}$  sont imaginaires pures et forment une suite infinie avec comme seul point d'accumulation  $+\infty$ . Pour établir (2.10.i) il suffira de considérer la suite réelle  $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$\mu_n = -i\sqrt{2}\lambda_n \text{ où } \lambda_n \in VP(\mathcal{C}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Preuve de (2.10.ii) :* Les valeurs propres de  $\mathcal{C}$  vérifient l'équation :

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = \frac{\lambda + \sqrt{2}}{\lambda - \sqrt{2}}$$

Soit  $\lambda$  une valeurs propre de  $\mathcal{C}$  et  $\mu = -i\lambda\sqrt{2}$ . L'équation en  $\lambda$  devient :

$$e^{i\mu\pi} = \frac{\mu^2 - 4 - 4i\mu}{4 + \mu^2} = \cos(\mu\pi) + i \sin(\mu\pi)$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire dans l'égalité on a :

$$\cos(\mu\pi) = \frac{\mu^2 - 4}{4 + \mu^2} \quad \text{et} \quad \sin(\mu\pi) = -\frac{4\mu}{4 + \mu^2}$$

Donc :

$$tg(\mu\pi) = \frac{4\mu}{\mu^2 - 4} \quad (2.10.1)$$

Soit maintenant, pour tout entier  $m \in \mathbb{Z}$ , l'intervalle  $I_m = ]2m - \frac{1}{2}, 2m + \frac{1}{2}[$ . On considère alors la fonction de la variable réelle :

$$h : x \mapsto h(x) = tg(\pi x) + \frac{4x}{4 - x^2}$$

Elle est définie, continue et strictement croissante sur tout  $I_m$  pour tout  $m \geq 2$ . Le calcul des limites donne :

$$\lim_{x \rightarrow 2m - \frac{1}{2}} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2m + \frac{1}{2}} h(x) = +\infty \quad \forall m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

Il existe selon le théorème des valeurs intermédiaires un seul nombre réel  $x_m > 0$  tel que

$$x_m \in ]2m - \frac{1}{2}, 2m + \frac{1}{2}[ \quad \text{et} \quad h(x_m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} - \{1\}$$

Autrement dit, il existe une suite de nombres positifs  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}, m \geq 2}$  telle que :

$$x_m \in ]2m - \frac{1}{2}, 2m + \frac{1}{2}[ \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2 \quad \text{et} \quad tg(\pi x_m) = \frac{4x_m}{x_m^2 - 4} \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2$$

Les nombres  $x_m$  forment une suite positive de solutions de l'équation (2.10.1). On montre de façon analogue qu'il existe suite de nombres négatifs  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}, k \geq 2}$  tels que :

$$x_k \in ]-2k - \frac{1}{2}, -2k + \frac{1}{2}[ \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \quad \text{et} \quad tg(\pi x_k) = \frac{4x_k}{x_k^2 - 4} \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

qui forment une suite négative de solutions de l'équation (2.10.1). Or, les nombres  $\mu_n$  définis dans (2.10.i) sont, par définition, solutions de cette équation. Et comme chaque intervalle  $I_m = ]2m - \frac{1}{2}, 2m + \frac{1}{2}[$  (resp  $I_k = ]-2k - \frac{1}{2}, -2k + \frac{1}{2}[$ ) ne contient qu'une seule solution de cette équation et que les nombres  $\mu_n$  forment une suite infinie, on en déduit que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  il existe un entier unique  $n$  tel que  $\mu_n \in I_m$ . D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n| = +\infty$$

*Preuve de (2.10.iii) :* Il reste à prouver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n - 2n| = 0$ . L'équation (2.10.1) n'admet pas de solution dans  $\mathbb{N}^*$  car  $tg(n\pi) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc  $\mu_n \notin \mathbb{N}$ . On sait par ailleurs que  $\mu_n > 2n$  puisque  $h(2n) < 0$ . On applique alors le théorème des accroissements finis à la fonction  $x \mapsto tg(x)$  sur l'intervalle  $]2n\pi, \pi\mu_n[$  et on a :  $tg(\mu_n \cdot \pi) = \pi(\mu_n - 2n) \cos^2(\theta_n)^{-1}$  avec  $\theta_n \in ]2n\pi, \mu_n\pi[$  car  $tg(2n\pi) = 0$ . Comme  $tg(\mu_n \pi) = 4\mu_n(4 - \mu_n^2)^{-1}$  et  $|\cos^2(\theta_n)| \leq 1$ , on en déduit l'inégalité  $\pi |\mu_n - 2n| \leq |4\mu_n(4 - \mu_n^2)^{-1}|$ . Comme  $|\mu_n| \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n - 2n| = 0$ .



Equation aux valeurs propres de  $\mathcal{C}_0$

**Proposition 2.11 :**

L'opérateur  $\mathcal{C}_0$  possède une famille  $\Lambda_0$  de valeurs propres qui vérifient l'équation :

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = \frac{\lambda + \sqrt{2} - 2}{\lambda - \sqrt{2} - 2} \quad (2.11.0)$$

**Preuve :** Soit  $\lambda \in \mathbf{VP}(\mathcal{C}_0)$  et  $(v, z) \in V \times L^2(\Omega)$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Il doit répondre aux deux conditions :

$$(v, z) \in D(\mathcal{C}_0) \text{ et } \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}$$

C'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v = \lambda^2 v & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_\nu v - \Delta_{\Gamma} v + \lambda v = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right\} \quad (2.11.1)$$

D'après les formules (2.8.1), (2.8.2) et (2.8.3) établies en page 108, le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \lambda^2 v \quad \text{dans } \Omega \\ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2 \\ \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \lambda v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \lambda v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^2 \end{array} \right\} \quad (2.11.2)$$

On cherchera des fonctions propres de la forme  $v(x, y) = f(x)f(y)$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(y)f''(x) + f(x)f''(y) = \lambda^2 f(x)f(y) & \text{dans } \Omega \quad 2.11.2.1 \\ f(0)f(x) = 0 & \forall x \in ]0, \pi[ \quad 2.11.2.2 \\ f(x)f'(\pi) - f(\pi)f''(x) + \lambda f(x)f(\pi) = 0 & \forall x \in ]0, \pi[ \quad 2.11.2.3 \end{array} \right\}$$

Ce qui implique d'après (2.11.2.1) que si  $f(x)f(y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega - \sum_{j=0}^{j=1} \Gamma_0^j$  alors :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{f''(y)}{f(y)} = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} + \lambda = \frac{1}{2}\lambda^2 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (2.11.3)$$

Et en divisant (2.11.2.1) par  $f(x)f(y)$ , on obtient l'équation différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x) - \left( \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} + \lambda \right) f(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad 2.11.i \\ f(0) = 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2.11.ii \end{array} \right\} \quad (2.11.4)$$

On pose ensuite :  $\alpha^2 = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} + \lambda$  et on notera que d'après (2.11.3) on a :

$$\alpha^2 = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} + \lambda = \frac{1}{2}\lambda^2 \quad (2.11.5)$$

et donc :  $\lambda = \alpha\sqrt{2}$  ou  $\lambda = -\alpha\sqrt{2}$ . Les solutions de l'équation  $f''(x) - \alpha^2 f(x) = 0$  sont de la forme :  $f(x) = a(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})$  avec  $a \in \mathbb{C} - \{0\}$  car  $f(0) = 0$ . L'expression de la dérivée  $f'$  est donné par :  $f'(x) = a\alpha(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$  avec  $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Il s'en suit que le quotient  $\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$  vaut d'après (2.11.3) et (2.11.5) :

$$\frac{f'(\pi)}{f(\pi)} = \alpha^2 - \alpha\sqrt{2} = \alpha(\alpha - \sqrt{2}) = \frac{\alpha(e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi})}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}$$

c'est à dire :

$$(\alpha - \sqrt{2}) = \frac{(e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi})}{\alpha e^{\alpha\pi} - \alpha e^{-\alpha\pi} - \sqrt{2}e^{\alpha\pi} + \sqrt{2}e^{-\alpha\pi}}$$

ou encore :  $\alpha e^{\alpha\pi} - \sqrt{2}e^{\alpha\pi} - e^{\alpha\pi} = -\sqrt{2}e^{-\alpha\pi} + \alpha e^{-\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}$ . On divise ensuite par  $e^{-\alpha\pi}$

$$e^{2\alpha\pi} = \frac{(1 + \alpha - \sqrt{2})}{(\alpha - 1 - \sqrt{2})}$$

On remplace  $\alpha$  par sa valeur en fonction de  $\lambda$  et on obtient :

$$e^{2\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\pi} = \frac{(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \sqrt{2})}{(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} - 1 - \sqrt{2})}$$

D'où l'équation aux valeurs propres de  $\mathcal{C}_0$  :

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = \frac{(\lambda + \sqrt{2} - 2)}{(\lambda - \sqrt{2} - 2)}$$

### Théorème de Rouché :

Soit  $r > 0$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et  $a \in U$  tel que :

$$\overline{D(a, r)} = \{ z \in \mathbb{C}, \quad |z - a| \leq r \} \subset U$$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes sur  $U$  vérifiant la condition :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad |z - a| = r \quad \Rightarrow \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

Alors  $f$  et  $g$  ont le même nombre de zéros dans  $D(a, r)$  chaque zéro compté autant de fois que son ordre de multiplicité.

**Preuve :** Voir dans [16] de W. RUDIN

### Théorème 2.3 : (Stabilisation exponentielle)

Le semi-groupe fortement continu de contractions  $S_0(t)_{t \geq 0}$  engendré par  $\mathcal{C}_0$  n'est pas exponentiellement stable sur  $V \times L^2(\Omega)$ .

**Démonstration :** On sait d'après la proposition 2.9 prouvée en page 111 qu'il existe une suite  $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$  de valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{C}$ , imaginaires pures, et qui, selon la proposition 2.10 établie en page 114, vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n - in\sqrt{2}| = 0$ . D'après la proposition 2.8 de la page 107, les termes de la suite  $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$  vérifient dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$e^{x\pi\sqrt{2}} = \frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$$

On pose :

$$g_1(\lambda) = e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - \frac{\lambda + \sqrt{2}}{\lambda - \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad g_2(\lambda) = e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - \frac{(\lambda + \sqrt{2} - 2)}{(\lambda - \sqrt{2} - 2)}$$

On se propose de montrer que les valeurs propres de  $\mathcal{C}_0$  sont aussi proches que l'on veut de l'axe imaginaire en montrant que les zéros de  $g_2$  sont aussi proches que l'on veut des zéros de  $g_1$ . Un calcul algébrique simple donne :

$$g_1(\lambda) - g_2(\lambda) = \frac{4\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2} - 2)(\lambda - \sqrt{2})}$$

On définit pour tout  $\rho > 0$  assez petit et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le contour  $\gamma_n(\rho)$  par :

$$\gamma_n(\rho) = \{ z \in \mathbb{C}, \quad |z - in\sqrt{2}| = \rho \}$$

Et on définit son intérieur par :  $\mathcal{D}_n(\rho) = \{ z \in \mathbb{C}, \quad |z - in\sqrt{2}| < \rho \}$ . Il est clair alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $in\sqrt{2} \in \mathcal{D}_n(\rho)$  et pour tout  $\rho < \frac{\sqrt{2}}{2}$  on a :  $\mathcal{D}_n(\rho) \cap \mathcal{D}_m(\rho) = \emptyset$  quels que soient le couple  $(n, m)$  d'entiers distincts. En effet, si pour  $(m, n) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{n\})$  on avait  $\mathcal{D}_n(\rho) \cap \mathcal{D}_m(\rho) \neq \emptyset$ , il existerait un nombre complexe  $z \in \mathcal{D}_n(\rho) \cap \mathcal{D}_m(\rho)$  tel que :

$$|z - in\sqrt{2}| < \rho \quad \text{et} \quad |z - im\sqrt{2}| < \rho$$

ce qui impliquerait :

$$\sqrt{2} \leq |m - n| \sqrt{2} \leq |z - in\sqrt{2}| + |z - im\sqrt{2}| < 2\rho < \sqrt{2}$$

D'où l'absurde conclusion :  $\sqrt{2} < \sqrt{2}$  puisque  $\rho < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Les disques distincts  $\mathcal{D}_k(\rho)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  sont donc deux à deux disjoints. La convergence  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n - in\sqrt{2}| = 0$ , s'interprète par :

$$\forall \rho < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \exists N_0(\rho) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} : n \geq N_0(\rho) \implies |\lambda_n - in\sqrt{2}| < \rho$$

Donc  $\lambda_n \in \mathcal{D}_n(\rho)$ , pour tout  $n > N_0(\rho)$ . Or, les disques  $\mathcal{D}_k(\rho)_{k \in \mathbb{N}}$  sont deux à deux disjoints, on en déduit alors que  $\mathcal{D}_n(\rho)$  contient un seul zéro de  $g_1$  et c'est  $\lambda_n$  et contient un seul nombre de la forme  $ik\sqrt{2}$  et c'est  $in\sqrt{2}$ . On peut donc choisir  $\rho$  assez petit pour que :

$$\left[ ik\sqrt{2} \in \mathcal{D}_n(\rho) \right] \Leftrightarrow k = n \quad \text{et} \quad \left[ g_1(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathcal{D}_n(\rho) \right] \Leftrightarrow \lambda = \lambda_n$$

Et d'après le Théorème de Rouché, il suffira de montrer, pour  $n$  assez grand, l'inégalité :

$$|g_1(\lambda) - g_2(\lambda)| < |g_1(\lambda)| \quad \forall \lambda \in \gamma_n(\rho)$$

pour conclure que la fonction  $g_2$  possède exactement une seule racine dans le disque ouvert  $\mathcal{D}_n(\rho)$ . En effet, les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  sont holomorphes sur un ouvert  $\mathcal{U}_n(\rho)$  contenant  $\overline{\mathcal{D}_n(\rho)}$ . Montrer que :

$$|g_1(\lambda) - g_2(\lambda)| < |g_1(\lambda)| \quad \forall \lambda \in \gamma_n(\rho) \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

équivalent à montrer que les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  ont le même nombre de zéros dans  $\mathcal{D}_n(\rho)$ . Or, on a déjà montré que pour  $\rho$  assez petit,  $\mathcal{D}_n(\rho)$  contient un seul zéro de  $g_1$  et c'est  $\lambda_n$  et contient un seul nombre de la forme  $ik\sqrt{2}$  et c'est  $in\sqrt{2}$ . Il en résulte que  $g_2$  admet un zéro et un seul dans  $\mathcal{D}_n(\rho)$ . Et ce zéro est une valeur propre de  $\mathcal{C}_0$ . On aura ainsi prouvé que :

$$\forall \rho > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ et } \exists \lambda \in VP(\mathcal{C}_0) \text{ tels que : } |\lambda - in\sqrt{2}| \leq \rho \quad \forall n > n_0 \quad (2.12.1)$$

Montrons donc que :

$$|g_1(\lambda) - g_2(\lambda)| < |g_1(\lambda)| \quad \forall \lambda \in \gamma_n(\rho) \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

Soit  $\lambda \in \gamma_n(\rho)$  alors  $|\lambda - in\sqrt{2}| = \rho$ . On a par inégalité triangulaire :

$$|\lambda_n - \lambda| \leq |\lambda_n - in\sqrt{2}| + |\lambda - in\sqrt{2}| \implies |\lambda_n - \lambda| - |\lambda - in\sqrt{2}| \leq |\lambda_n - in\sqrt{2}|$$

Donc  $|\lambda_n - \lambda| - \rho \leq |\lambda_n - in\sqrt{2}|$ . Et l'implication :

$$|\lambda - in\sqrt{2}| \leq |\lambda - \lambda_n| + |\lambda_n - in\sqrt{2}| \implies |\lambda - in\sqrt{2}| - |\lambda - \lambda_n| \leq |\lambda_n - in\sqrt{2}|$$

donne :

$$\rho - |\lambda - \lambda_n| \leq |\lambda_n - in\sqrt{2}| \quad \forall \lambda \in \gamma_n(\rho)$$

On a donc :

$$|\lambda - \lambda_n| - \rho \leq \left| \lambda_n - in\sqrt{2} \right| \quad \text{et} \quad \rho - |\lambda - \lambda_n| \leq \left| \lambda_n - in\sqrt{2} \right| \quad \forall \lambda \in \gamma_n(\rho)$$

D'où l'inégalité :

$$| |\lambda - \lambda_n| - \rho | \leq \left| \lambda_n - in\sqrt{2} \right| \quad \forall \lambda \in \gamma_n(\rho)$$

qui, avec la convergence  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n - in\sqrt{2}| = 0$  implique  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n - \lambda| = \rho$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe un nombre complexe  $\theta_n \in \mathcal{D}_n(\rho)$  tel que :

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - e^{\lambda_n\pi\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}e^{\theta_n\pi\sqrt{2}}(\lambda - \lambda_n) \quad (2.12.2)$$

En appliquant l'équation aux valeurs propres à la suite  $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$  on obtient :

$$e^{\lambda_n\pi\sqrt{2}} = \frac{\lambda_n + \sqrt{2}}{\lambda_n - \sqrt{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

l'égalité (2.12.2) équivaut alors à :

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = \frac{\lambda_n + \sqrt{2}}{\lambda_n - \sqrt{2}} + (\lambda - \lambda_n)\pi\sqrt{2}e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et l'expression de  $g_1$  devient :

$$g_1(\lambda) = \frac{\lambda_n + \sqrt{2}}{\lambda_n - \sqrt{2}} - \frac{\lambda + \sqrt{2}}{\lambda - \sqrt{2}} + (\lambda - \lambda_n)\pi\sqrt{2}e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Un simple calcul donne :

$$\frac{\lambda_n + \sqrt{2}}{\lambda_n - \sqrt{2}} - \frac{\lambda + \sqrt{2}}{\lambda - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}(\lambda - \lambda_n)}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et entraîne :

$$g_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_n)\sqrt{2} \left[ \frac{2}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} + \pi e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou encore :

$$g_1(\lambda) - \frac{2(\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} = (\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}\pi e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui entraîne par inégalité triangulaire :

$$\left| (\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}\pi e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \right| \leq |g_1(\lambda)| + \left| \frac{2(\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} \right| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'où l'inégalité :

$$\left| (\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}\pi e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \right| - \left| \frac{2(\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} \right| \leq |g_1(\lambda)| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.12.3)$$

Or, pour tout  $\lambda \in \gamma_n(\rho)$  on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n - \lambda| = \rho$ . Et on sait d'après la proposition 2.10 de

la page 114 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = +\infty$ . Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\lambda - \lambda_n)}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} \right| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Et selon l'égalité (2.12.2) on a :

$$e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - e^{\lambda_n\pi\sqrt{2}}}{\lambda - \lambda_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La quantité  $\left| e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \right|$  est minorée car  $\theta_n \in \mathcal{D}_n(\rho)$  pour  $n$  assez grand. Il existe donc une constante  $\beta > 0$  telle que  $\left| e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \right| > \beta$  pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand et l'inégalité (2.12.3) implique par conséquent :

$$\beta\pi\sqrt{2}|\lambda - \lambda_n| - \left| \frac{2(\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} \right| \leq |g_1(\lambda)| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.12.4)$$

La convergence :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2(\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} \right| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

équivalent à :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad - \left| \frac{2(\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} \right| > -\eta \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geq N_1$$

Et la convergence  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n - \lambda| = \rho$  équivaut à :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \rho - \eta < |\lambda_n - \lambda| < \rho + \eta \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geq N_2$$

et donne, en multipliant par  $\beta\sqrt{2}\pi$ , l'inégalité :  $\beta\sqrt{2}\pi(\rho - \eta) < \beta\sqrt{2}\pi |\lambda_n - \lambda|$ . Par addition membre à membre des inégalités (2.12.4) et  $\beta\pi\sqrt{2}(\rho - \eta) < \beta\pi\sqrt{2} \cdot |\lambda_n - \lambda|$  on montre que pour tout  $\eta > 0$  il existe un entier  $N()$  tel que :

$$\beta\pi\sqrt{2}\rho - \eta(\beta\pi\sqrt{2} + 1) \leq \beta\pi\sqrt{2} \cdot |(\lambda - \lambda_n)| - \left| \frac{2(\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} \right| \leq |g_1(\lambda)| \quad \forall n > N$$

On applique ensuite ce résultat en particulier pour  $\eta_0 = \frac{\beta\pi\sqrt{2}\rho}{2(\beta\sqrt{2}\pi+1)}$  et on en déduit que pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, on a :

$$\frac{\beta\pi\sqrt{2}\rho}{2} \leq \beta\pi\sqrt{2} |(\lambda - \lambda_n)| - \left| \frac{2(\lambda - \lambda_n)\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})} \right| \leq |g_1(\lambda)| \quad \forall n > N(\eta_0)$$

D'où pour  $n$  assez grand :

$$0 < \frac{\beta\sqrt{2}\pi\rho}{2} < |g_1(\lambda)| \quad \forall \lambda \in \gamma_n(\rho) \quad (2.12.5)$$

La quantité  $|g_1(\lambda)|$  est donc minorée par un nombre strictement positif. Par contre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g_1(\lambda) - g_2(\lambda)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4\sqrt{2}}{(\lambda - \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2} - 2)} \right| = 0 \quad \lambda \in \gamma_n(\rho) \quad (2.12.6)$$

car la définition :  $\lambda \in \gamma_n(\rho) \Leftrightarrow |\lambda - in\sqrt{2}| = \rho$  implique que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda| = +\infty$ . Donc

$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda| = +\infty$ . Finalement, de (2.12.6) et de (2.12.5) on déduit que pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, on a :

$$|g_1(\lambda) - g_2(\lambda)| < |g_1(\lambda)| \quad \forall \lambda \in \gamma_n(\rho)$$



Ce qui signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une valeur propre  $\lambda(\varepsilon)$  de l'opérateur  $\mathcal{C}_0$  et un entier  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tels que  $|\lambda(\varepsilon) - in(\varepsilon)\sqrt{2}| \leq \varepsilon$ . Donc  $|\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) + i(\operatorname{Im} \lambda(\varepsilon) - n(\varepsilon)\sqrt{2})| \leq \varepsilon$  ou encore  $[\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon)]^2 + (\operatorname{Im} \lambda(\varepsilon) - n(\varepsilon)\sqrt{2})^2 \leq \varepsilon^2$ . En particulier  $|\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon)| \leq \varepsilon$ . Mais d'après la proposition 2.7 de la page 103, les valeurs propres de  $\mathcal{C}_0$  sont à parties réelles négatives et donc  $\operatorname{Sup}\{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in VP(\mathcal{C}_0)\} = 0$ . Et par conséquent  $\operatorname{Sup}\{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \sigma(\mathcal{C}_0)\} \geq 0$ . Le rayon spectral de l'opérateur  $\mathcal{C}_0$  est donc positif ou nul alors que selon la remarque 2.3 faite en page 106, il est inférieur au type  $\omega_0$  du semi-groupe  $S_0(t)_{t \geq 0}$  engendré par  $\mathcal{C}_0$ . D'où :

$$\operatorname{Inf}_{t > 0} \frac{1}{t} \operatorname{Log} \| S_0(t) \|_{\mathcal{L}(V \times L^2(\Omega))} \geq 0$$

Or, d'après la proposition 1.23 (voir page 61), un semi-groupe est exponentiellement stable si, et seulement si, son type est strictement négatif. D'où la conclusion : le semi-groupe engendré par  $\mathcal{C}_0$  sur  $V \times L^2(\Omega)$  n'est pas exponentiellement stable.



## Chapitre III : Problème de Ventcel avec contrôle interne

### III.1 - Introduction au problème :

On se propose d'étudier la stabilisation forte et la stabilisation exponentielle d'un problème de Ventcel avec contrôle interne. Dans le théorème 3.1 on établira l'existence et l'unicité de la solution et on étudiera ses propriétés de régularité. Le théorème 3.2 établira la stabilité forte du problème et dans le théorème 3.3, on montrera la stabilité exponentielle.

On se donne un ouvert  $\Omega$  borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . L'application  $\| \cdot \|_1 : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$  définie par :

$$v \longrightarrow \| v \|_1 = \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.0.0)$$

est une norme sur  $H^1(\Omega)$  équivalente à la norme  $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$ . Soit  $V$  l'espace défini par :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tels que } : v|_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)\} \quad (3.0.1)$$

Il est muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  défini par :

$$\langle u, v \rangle_V = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} v + uv) d\Gamma \quad \forall (u, v) \in V \times V \quad (3.0.2)$$

qui en fait un espace de Hilbert dont la norme induite notée  $\| \cdot \|_V$  est définie par :

$$\| v \|_V = \left[ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma} (|\nabla_{\Gamma} v|^2 + |v|^2) d\Gamma \right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in V \quad (3.0.3)$$

On considère le problème  $\mathcal{P}_1$  suivant :

$$\mathcal{P}_1 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in V \times L^2(\Omega), \text{ Trouver une fonction } v : \mathbb{R}_+ \longrightarrow V \text{ vérifiant :} \\ u'' - \Delta u + u' = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (3.0.i) \\ \partial_\nu v - \Delta_\Gamma u + u + u' = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \quad (3.0.ii) \\ u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.0.iii) \end{array} \right.$$

Notons pour tout  $u \in V$  par  $A_1 u$  la forme linéaire continue qui à tout  $v \in V$  associe  $\langle u, v \rangle_V$  et par  $A_1 : V \longrightarrow V'$  l'application qui à tout  $u \in V$  associe  $A_1 u$ . On vérifie aisément que l'opérateur linéaire  $A_1$  est borné. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$|\langle u, v \rangle_V| \leq \|u\|_V \cdot \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Donc :  $\sup_{v \in V \text{ et } \|v\|_V \leq 1} |\langle u, v \rangle_V| \leq \|u\|_V$  pour tout  $u \in V$ . Ce qui signifie pour tout  $u \in V$  et par définition de la norme duale dans  $V'$  que :  $\|A_1 u\|_{V'} \leq \|u\|_V$  et confirme que l'opérateur linéaire :

$$A_1 : V \rightarrow V'$$

$$u \mapsto A_1 u : \left\{ \begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \langle A_1 u, v \rangle_{V', V} = \langle u, v \rangle_V \end{array} \right.$$

est borné. On définit ensuite l'opérateur linéaire  $B_1 : V \rightarrow V'$  qui à tout  $u \in V$  associe la forme linéaire notée  $B_1 u$  et définie par :

$$B_1 u : \left\{ \begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto B_1 u(v) = \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Gamma} u v d\Gamma \end{array} \right.$$

**Proposition 3.1 :**

$B_1$  est un opérateur linéaire borné de  $V$  dans  $V'$

**Preuve :**  $B_1$  est linéaire. Vérifions d'abord que l'image  $B_1u$  de tout élément  $u \in V$  appartient à l'espace dual  $V'$ . Soit  $u_0 \in V$ . La forme  $B_1u_0$  est évidemment linéaire. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient par définition de  $B_1$  :

$$|B_1u_0(v)| \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)}$$

Par définition de la norme  $\|\cdot\|_1$  on a :

$$|B_1u_0(v)| \leq (c_1 \|u_0\|_1) \|v\|_1 \quad \forall v \in V$$

Par définition de la norme  $\|\cdot\|_V$  on a :

$$|B_1u_0(v)| \leq c. \|u_0\|_V \cdot \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

où  $c$  est une constante positive. D'où :  $B_1u_0 \in V'$ . Donc  $\sup_{\|v\|_V \leq 1} |B_1u_0(v)| \leq c. \|u_0\|_V$ . Et cela montre que l'opérateur  $B_1 : V \rightarrow V'$  est continu puisque qu'il existe  $c > 0$  tel que :

$$\|B_1u\|_{V'} \leq c \|u\|_V \quad \forall u \in V$$

### L'opérateur $\mathcal{C}_1$ et son domaine :

On considère maintenant l'espace  $V \times L^2(\Omega)$ . En identifiant  $L^2(\Omega)$  à son dual, on a l'inclusion  $V \subset L^2(\Omega) \subset V'$ . Soit  $\mathcal{C}_1$  l'opérateur linéaire, non borné, défini sur le domaine

$$D(\mathcal{C}_1) = \{(v, z) \in V \times V \text{ tel que } : A_1v + B_1z \in L^2(\Omega)\} \quad (3.0.4)$$

par :

$$\mathcal{C}_1: \quad D(\mathcal{C}_1) \subset V \times L^2(\Omega) \rightarrow V \times L^2(\Omega)$$

$$\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -A_1v - B_1z \end{pmatrix}$$

**Proposition 3.2 : Caractérisation et régularité des éléments de  $D(\mathcal{C}_1)$ .**

Le domaine  $D(\mathcal{C}_1)$  est l'ensemble des couples  $(v, z) \in V \times V$  vérifiant :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad v \in H^2(\Omega) \\ 2) \quad \partial_\nu(v)|_\Gamma - (\Delta_T v)|_\Gamma + (v)|_\Gamma + (z)|_\Gamma = 0 \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ 3) \quad (v)|_\Gamma \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma) \end{array} \right\} \quad (3.2.a)$$

Et l'opérateur  $\mathcal{C}_1$  est explicitement défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1: \quad D(\mathcal{C}_1) \subset V \times L^2(\Omega) &\longrightarrow V \times L^2(\Omega) \\ \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \Delta v - z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.b)$$

**Preuve :** Il va de soi que tout élément  $(v, z) \in V \times V$  vérifiant les conditions (3.2.a) est élément de  $D(\mathcal{C}_1)$ . Il suffira pour le voir de revenir à la définition des opérateurs  $A_1$  et  $B_1$ .

Soit  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$ . On montre d'abord que  $\Delta v \in L^2(\Omega)$  pour tout  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$ . La définition (3.0.4) exposée en page 128 signifie que pour tout  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$ , il existe une fonction  $f \in L^2(\Omega)$  telle que :

$$\langle A_1 v + B_1 z, \varphi \rangle_{V', V} = \int_\Omega f \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$$

Autrement dit  $f = A_1 v + B_1 z$  dans  $V'$ . Ce qui donne par définition de  $A_1$  et de  $B_1$  :

$$\int_\Omega \nabla \varphi \nabla v \cdot dx + \int_\Gamma \nabla_T \varphi \nabla_T v + a v \varphi d\Gamma + \int_\Omega z \varphi \cdot dx + \int_\Gamma b z \varphi \cdot d\Gamma = \int_\Omega f \varphi \cdot dx \quad (3.2.1)$$

pour tout  $\varphi \in V$  et pour tout  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$ . Et en particulier :

$$\int_\Omega \nabla \varphi \nabla v \cdot dx + \int_\Omega z \varphi \cdot dx = \int_\Omega f \varphi \cdot dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$$

c'est à dire :  $\langle -\Delta v + z - f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$ . D'où dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'égalité  $\Delta v = z - f$  avec  $f \in L^2(\Omega)$  et  $z \in V \subset L^2(\Omega)$ . Ce qui prouve :

$$\Delta v \in L^2(\Omega) \text{ et } A_1 v + B_1 z = z - \Delta v \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_1) \quad (3.2.2)$$

Ce qui montre (3.2.b). Montrons maintenant que tout  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$  vérifie dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  l'égalité :

$$\partial_\nu v - \Delta_T v + v + z = 0$$

Soit  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$ . On sait alors d'après (3.2.1) et (3.2.2) que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} \nabla_T u \nabla_T v + uv d\Gamma + \int_{\Omega} z u dx + \int_{\Gamma} z u d\Gamma = \int_{\Omega} z u dx - \int_{\Omega} u \Delta v dx \quad \forall u \in V$$

Donc :

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u \Delta v) dx + \int_{\Gamma} \nabla_T u \nabla_T v + uv d\Gamma + \int_{\Gamma} z u d\Gamma = 0 \quad (3.2.3)$$

Comme  $v \in H^1(\Omega)$  et  $\Delta v \in L^2(\Omega)$ , on définit  $\partial_\nu(v)|_{\Gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  par :

$$\langle \partial_\nu v|_{\Gamma}, w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_{\Omega} (w \Delta v + \nabla w \nabla v) dx \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

Les inclusions  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) = L^2(\Gamma)' \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  permettent alors d'écrire l'égalité (3.2.3) sous la forme :

$$\langle \partial_\nu(v)|_{\Gamma} + (v)|_{\Gamma} + (z)|_{\Gamma}, u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \int_{\Gamma} (\nabla_T v \nabla_T u) d\Gamma = 0 \quad (3.2.4)$$

Comme  $v \in H^1(\Gamma)$ , l'opérateur  $(\Delta_T v)|_{\Gamma}$  est un élément de  $H^{-1}(\Gamma)$  défini par :

$$\langle (\Delta_T v)|_{\Gamma}, w \rangle_{H^{-1}(\Gamma), H_0^1(\Gamma)} = - \int_{\Gamma} \nabla_T v \nabla_T w d\Gamma \quad \forall w \in H_0^1(\Gamma)$$

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma) \subset H_0^1(\Gamma)$  il existe  $u \in V$  qui vérifie :  $(u)|_{\Gamma} = \varphi$ ,  $(u)|_{\Gamma_0} = 0$  et

$$\langle (\partial_\nu v + v + z)|_{\Gamma}, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Gamma), H_0^1(\Gamma)} - \langle (\Delta_T v)|_{\Gamma}, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Gamma), H_0^1(\Gamma)} = 0 \quad \forall u \in V$$

D'où l'égalité :

$$\partial_\nu v - \Delta_T v + v + z = 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Gamma) \quad (3.2.5)$$

On montre que  $v \in H^2(\Omega)$ . L'élément  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$  vérifie les conditions :

$$(v, z) \in V \times V, \quad \Delta v \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \partial_\nu v - \Delta_T v + v + z = 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Gamma)$$

Donc  $\partial_\nu(v)|_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et par conséquent l'égalité (3.2.5) qui reste valable dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

implique que  $(\Delta_T v)|_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Et comme l'opérateur :

$$I - \Delta_T : \begin{array}{l} H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ w \longrightarrow w - \Delta_T w \end{array}$$

est un isomorphisme, on en déduit que  $(v)|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Mais  $v|_{\Gamma_0} = 0$  puisque  $v \in V$ . Donc

$(v)|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Or, selon la proposition 1.17 de la page 55 on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v \in L^2(\Omega) \\ v|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \end{array} \right\} \implies v \in H^2(\Omega)$$

Et la fonction  $v$  vérifie les conditions  $\Delta v \in L^2(\Omega)$  et  $(v)|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Donc  $v \in H^2(\Omega)$ .

Ce qui satisfait la condition 1) de (2.3.a). Mais  $v \in H^2(\Omega)$  implique selon le Théorème

des traces que  $\partial_\nu(v)|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Comme  $(v)|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $(z)|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , l'égalité (3.2.5)

reste encore valable dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  ce qui réalise la condition 2) de (3.2.a) et entraîne que

$(\Delta_T v)|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . D'où la propriété de régularité au bord  $(v)|_\Gamma \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)$ .

### Proposition 3.3 :

L'opérateur  $\mathcal{C}_1$  est *m-dissipatif*

**Preuve :** Evaluons pour tout  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$  la quantité  $\left\langle \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)}$ . Par

définition de  $D(\mathcal{C}_1)$  et pour tout élément  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$  on a :

$$\left\langle \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ \Delta v - z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \langle z, v \rangle_V + \langle \Delta v - z, z \rangle_{L^2(\Omega)}$$



Ce qui donne par définition des produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  c'est à dire :

$$\left\langle \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla v \nabla z + z \Delta v) dx + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} z + zv) d\Gamma - \int_{\Omega} |z|^2 dx$$

En tenant compte de la condition de Ventcel

$$\partial_{\nu} v - \Delta_{\Gamma} v + v + z = 0 \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$$

on obtient :

$$\left\langle \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = -\|z\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \int_{\Omega} |z|^2 dx \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$$

D'où :

$$\left\langle \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} \leq 0 \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$$

Donc  $\mathcal{C}_1$  est dissipatif.

Pour montrer que  $\mathcal{C}_1$  est m-dissipatif, on prouvera que  $I - \mathcal{C}_1 : D(\mathcal{C}_1) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est surjectif. Ce qui revient à prouver que pour tout  $(w, f) \in V \times L^2(\Omega)$ , il existe  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$  tel que :  $(I - \mathcal{C}_1)(v, z) = (w, f)$ . C'est à dire :  $v - z = w$  et  $2z - \Delta v = f$ . En remplaçant  $v - z = w$  par  $z = v - w$ , cela revient à résoudre le problème  $\pi_1$  suivant :

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } (w, f) \in V \times L^2(\Omega), \text{ trouver } v \in V \text{ vérifiant :} \\ \quad 2v - \Delta v = f + 2w \quad \text{dans } \Omega \quad (3.3.i) \\ \quad \Delta v \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.3.ii) \\ \quad \partial_{\nu} v - \Delta_{\Gamma} v + 2v = fw \quad \text{sur } L^2(\Gamma) \quad (3.3.iii) \end{array} \right.$$

La condition (3.3.ii) est automatiquement vérifiée pour toute solution de l'équation (3.3.i) puisque les fonctions  $v$ ,  $f$  et  $w$  appartiennent toutes à l'espace  $L^2(\Omega)$ . Et on définit, d'après la proposition 1.16 de la page 54, l'application  $\partial_{\nu}(v)|_{\Gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  par :

$$\left\langle (\partial_{\nu} v)|_{\Gamma}, (u)|_{\Gamma} \right\rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u \Delta v dx \quad \forall u \in V$$

Donc :

$$\left\langle (\partial_\nu v)|_\Gamma, (u)|_\Gamma \right\rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \int_\Omega u \Delta v . dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v . dx \quad \forall u \in V$$

L'équation (3.3.i) donne alors pour tout  $u \in V$  par intégration sur  $\Omega$  :

$$2 \int_\Omega uv dx - \left\langle (\partial_\nu v)|_\Gamma, (u)|_\Gamma \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega u(f + 2w) dx \quad (3.3.1)$$

D'après la condition de Ventcel (3.3.iii) on a pour tout  $u \in V$  :

$$\left\langle (-\partial_\nu v)|_\Gamma, u \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \left\langle (-\Delta_T v + 2v - w)|_\Gamma, u \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

c'est à dire :

$$\left\langle (-\partial_\nu v)|_\Gamma, u \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Gamma (\nabla_T v \nabla_T u + 2uv) d\Gamma - \int_\Gamma wu . d\Gamma \quad \forall u \in V$$

L'égalité (3.3.1) s'écrit alors pour tout  $u \in V$  sous la forme :

$$2 \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma (\nabla_T v \nabla_T u + 2uv) d\Gamma = \int_\Omega u(f + 2w) dx + \int_\Gamma wu d\Gamma$$

C'est à partir de cette relation qu'on peut donner une formulation variationnelle du problème

$\pi_1$  en considérant la forme bilinéaire :

$$\mathcal{F}_1 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longrightarrow \mathcal{F}_1(u, v) = 2 \int_\Omega uv . dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v . dx + \int_\Gamma \nabla_T u \nabla_T v . d\Gamma + 2 \int_\Gamma uv . d\Gamma$$

On montre qu'elle est continue. Par définition de la forme on a :

$$(u, v) \longrightarrow \mathcal{F}_1(u, v) = 2 \int_\Omega uv dx + \langle u, v \rangle_V + \int_\Gamma uv d\Gamma \quad \forall (u, v) \in V \times V \quad (3.3.2)$$

Ce qui s'écrit d'après la définition des normes  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ ,  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_1$  (voir page 126) :

$$|\mathcal{F}_1(u, v)| \leq 2 \left( \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_V \|v\|_V \right) \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

Les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  étant équivalentes, il existe alors  $c_1 > 0$  tel que :

$$|\mathcal{F}_1(u, v)| \leq c_1 \|u\|_1 \|v\|_1 + 2 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

Et par définition de la norme de  $V$  cela donne :

$$|\mathcal{F}_1(u, v)| \leq (c_1 + 2) \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

D'où la continuité de  $\mathcal{F}_1$ . Pour la coercivité, l'expression (3.3.2) de  $\mathcal{F}_1$  donne :

$$\mathcal{F}_1(u, u) = 2 \int_{\Omega} |u|^2 dx + \|u\|_V^2 + \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \quad \forall u \in V$$

D'où :

$$\mathcal{F}_1(u, u) \geq \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$$

On rappelle que d'après l'égalité (3.3.1) on a pour tout  $(u, v) \in V \times V$  :

$$2 \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} u + 2wv) d\Gamma = \int_{\Omega} u(f + 2w) dx + \int_{\Gamma} wud\Gamma$$

On considère alors la forme linéaire :  $\mathcal{L}_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\mathcal{L}_1(u) = \int_{\Omega} (2w + f)u dx + \int_{\Gamma} wud\Gamma \quad \forall u \in V$$

L'équivalence des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  donne pour  $c_2 > 0$  convenable :

$$|\mathcal{L}_1(u)| \leq (c_2 \|2w + f\|_1 \|u\|_1 + \|w\|_1) \|u\|_1 \quad \forall u \in V$$

Et par définition des normes  $\|u\|_1$  et  $\|u\|_V$  on obtient pour  $K > (c_1 \|2w + f\|_1 + \|w\|_1)$  :

$$|\mathcal{L}_1(u)| \leq K \cdot \|u\|_V \quad \forall u \in V$$

La forme linéaire  $\mathcal{L}_1$  est donc continue. On applique le théorème de Lax-Milgram et on en déduit qu'il existe un seul élément  $v \in V$  tel que :

$$\mathcal{F}_1(u, v) = \mathcal{L}_1(u) \quad \forall u \in V \quad (3.3.3)$$

Ce qui est équivalent par définition de  $\mathcal{F}_1$  et par définition de  $\mathcal{L}_1$  à :

$$\int_{\Omega} (2uv + \nabla u \nabla v) dx + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} v + 2uv) d\Gamma = \int_{\Omega} (2w + f) u dx + \int_{\Gamma} w u d\Gamma \quad \forall u \in V$$

En particulier dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  on a :

$$2 \int_{\Omega} v \varphi dx + \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx = \int_{\Omega} (2w + f) \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ce qui signifie, en termes de distributions sur  $\Omega$  :

$$\langle 2v - \Delta v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle 2w + f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

D'où l'égalité dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  :  $2v - \Delta v = 2w + f$ . Ce qui prouve que l'équation (3.3.i) admet une solution  $v \in V$  et par conséquent la condition (3.3.ii) est vérifiée pour la solution  $v \in V$  puisque :  $v \in V \subset L^2(\Omega)$ ,  $w \in V \subset L^2(\Omega)$  et  $f \in L^2(\Omega)$ . D'où :  $\Delta v \in L^2(\Omega)$ . Il reste à montrer que  $v$  vérifie la condition de Ventcel (3.3.iii). L'égalité (3.3.3) équivaut à :

$$2 \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} u + 2uv) d\Gamma = \int_{\Omega} u (f + 2w) dx + \int_{\Gamma} w u d\Gamma \quad \forall u \in V$$

On ajoute et on retranche à gauche de l'égalité la quantité  $\int_{\Omega} u \Delta v dx$  et on obtient :

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u \Delta v) dx + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} u + 2uv) d\Gamma + \int_{\Omega} (2v - \nabla v) u dx = \int_{\Omega} u (f + 2w) dx + \int_{\Gamma} w u d\Gamma$$

Puisque l'équation (3.3.i) est vérifiée, on a  $\int_{\Omega} (2v - \nabla v) u dx = \int_{\Omega} u (f + 2w) dx$ . Donc

$$\left( \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u \Delta v) dx \right) + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} u + 2uv) d\Gamma = \int_{\Gamma} w u d\Gamma \quad \forall u \in V \quad (3.3.4)$$

D'autre part  $\partial_{\nu} v|_{\Gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  car  $\Delta v \in L^2(\Omega)$  et  $v \in V \subset H^1(\Omega)$ . Et les inclusions  $H^1(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$  entraînent l'inclusion duale  $L^2(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . L'égalité (3.3.4) s'écrit alors :

$$\langle (\partial_{\nu}(v)|_{\Gamma} + 2v), u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} u) d\Gamma = \langle (w)|_{\Gamma}, u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \forall u \in V$$

et montre que  $(\Delta_T v)|_\Gamma \in H^{-1}(\Gamma)$  avec :

$$\langle (\partial_\nu(v)|_\Gamma - \Delta_T v + 2v), u \rangle_{H^{-1}(\Gamma), H_0^1(\Gamma)} = \langle (w)|_\Gamma, u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \forall u \in V$$

D'où l'égalité dans  $H^{-1}(\Gamma)$  :  $\partial_\nu v - \Delta_T v + 2v = w$ . Ce qui entraîne  $\Delta_T v = \partial_\nu v + 2v - w$  avec  $\partial_\nu v|_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,  $(2v)|_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , et  $(w)|_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Donc :  $(\Delta_T v)|_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

Comme l'opérateur :  $I - \Delta_T : \left\{ \begin{array}{l} H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ w \longrightarrow w - \Delta_T w \end{array} \right\}$  est, d'après la proposition 1.18

citée en page 55, un isomorphisme, donc  $(v)|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Or d'après la proposition 1.17,

citée en page 55, on sait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v \in L^2(\Omega) \\ v|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \end{array} \right\} \implies v \in H^2(\Omega)$$

Et selon le Théorème des traces on a :

$$\partial_\nu v|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \text{ et } (2v - w)|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$$

Donc la condition de Ventcel :

$$\partial_\nu(v) - \Delta_T v + 2v = w \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est encore vérifiée dans  $L^2(\Gamma)$  c'est à dire que  $v$  vérifie l'équation (3.3.iii). Et l'égalité :

$$(\partial_\nu(v))|_\Gamma - (\Delta_T v)|_\Gamma + 2(v)|_\Gamma = (w)|_\Gamma \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$$

montre aussi que :  $(\Delta_T v)|_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$  dont on déduit que  $(v)|_\Gamma \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)$ . Il suffira

ensuite de prendre  $z = v - w$  pour constater que d'après la proposition 3.2 (page 130) qui

caractérise le domaine  $D(\mathcal{C}_1)$  on a bien  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_1)$  et  $(I - \mathcal{C}_1) \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ f \end{pmatrix}$ . L'opérateur

linéaire  $I - \mathcal{C}_1 : D(\mathcal{C}_1) \rightarrow V \times L^2(\Omega)$  est donc surjectif et par conséquent  $\mathcal{C}_1$  est m-dissipatif.

**Proposition 3.4 :**

Il existe une constante  $\mathbf{c}_\Omega > 0$  telle que :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \mathbf{c}_\Omega \left( \|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|v + z\|_{L^2(\Gamma)} \right) \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_1) \quad (3.4.0)$$

**Preuve :** On raisonne par l'absurde en supposant que :

$$\forall \lambda > 0, \exists (v_\lambda, z_\lambda) \in D(\mathcal{C}_1) \text{ tel que : } \|v_\lambda\|_{H^2(\Omega)} > \lambda \left( \|v_\lambda - \Delta v_\lambda\|_{L^2(\Omega)} + \|v_\lambda + z_\lambda\|_{L^2(\Gamma)} \right)$$

Il existe en particulier une suite  $\{(v_k, z_k), k \in \mathbb{N}\} \subset D(\mathcal{C}_1)$  vérifiant l'inégalité :

$$\|v_k\|_{H^2(\Omega)} > k \left( \|v_k - \Delta v_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_\nu(v) - \Delta_{\mathbb{T}} v_k\|_{L^2(\Gamma)} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.4.1)$$

On pose ensuite :

$$w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|_{H^2(\Omega)}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

la suite  $\{w_k, k \in \mathbb{N}\}$  vérifie alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \|w_k\|_{H^2(\Omega)} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ 2) \quad \|w_k - \Delta w_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ 3) \quad \|\partial_\nu w_k - \Delta_{\mathbb{T}} w_k\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \quad (3.4.2)$$

On en déduit les convergences :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_k - \Delta w_k \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (3.4.3) \\ \partial_\nu w_k - \Delta_{\mathbb{T}} w_k \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Gamma) \quad (3.4.4) \end{array} \right\}$$

Donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (w_k - \Delta w_k) u \, dx + \int_{\Gamma} (\partial_\nu w_k - \Delta_{\mathbb{T}} w_k) u \, d\Gamma = 0 \quad \forall u \in V \quad (3.4.5)$$

On peut appliquer ici la formule de Green car  $\{w_k, k \in \mathbb{N}\} \subset H^2(\Omega)$  et on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|w_k|^2 + |\nabla w_k|^2) dx + \int_{\Gamma} |\nabla_{\mathbb{T}} w_k|^2 d\Gamma = 0$$

On en déduit les convergences suivantes :

$$w_k \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H^1(\Omega) \quad (3.4.6)$$

$$\Delta w_k \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (3.4.7)$$

$$(w_k)|_{\Gamma} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H^1(\Gamma) \quad (3.4.8)$$

D'après le Théorème 1.33 cité en page 52, l'injection  $H^2(\Omega) \longrightarrow H^{2-s}(\Omega)$  est compacte pour tout  $0 < s < \frac{1}{2}$ . La suite  $\{w_k, k \in \mathbb{N}\}$  qui est, par hypothèse, bornée dans  $H^2(\Omega)$  admet donc une sous-suite, encore notée  $\{w_k, k \in \mathbb{N}\}$ , qui converge fortement dans  $H^{2-s}(\Omega)$  vers zéro par unicité de la limite. Donc :  $(w_k) \longrightarrow 0$  dans  $H^{2-s}(\Omega)$ . Pour tout  $s \in ]0, \frac{1}{2}[$  on a d'après le théorème des traces :

$$\partial_{\nu}(w_k) \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}-s}(\Gamma)$$

Ce qui implique d'après (3.4.4) et (3.4.8) et l'inclusion  $H^{\frac{1}{2}-s}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$  que :

$$(w_k - \Delta_{\Gamma} w_k) \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Gamma)$$

Mais comme :

$$I - \Delta_{\Gamma} : \left\{ \begin{array}{l} H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ w \longrightarrow w - \Delta_{\Gamma} w \end{array} \right\}$$

est un isomorphisme (d'après la proposition 1.18 citée en page 55) on en déduit que dans  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$  la suite  $\{(w_k)|_{\Gamma}, k \in \mathbb{N}\}$  converge vers zéro. Et d'après la proposition 1.17 citée dans la page 55 on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad (w_k - \Delta w_k)_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ 2) \quad \{(w_k)|_{\Gamma}, k \in \mathbb{N}\} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \end{array} \right\} \implies (w_k)_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H^2(\Omega)$$

Ce qui contredit la condition 1) de (3.4.2) et montre que l'assertion (3.4.1) est erronée.

### III.2 - Existence, unicité et régularité des solutions

On suppose que  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$ . Une solution forte du problème  $\mathcal{P}_1$  est une fonction qui vérifie les équations du problème et les propriétés de régularité :

$$u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega) \cap V)$$

#### Théorème 3.1 : ( Existence et unicité de la solution )

$\forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  il existe une fonction unique  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times L^2(\Omega))$ ,

solution faible du problème :

$$\mathcal{P}_1 : \left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + u' = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (3.0.i) \\ \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u + u + u' = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \quad (3.0.ii) \\ u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 & \text{sur } \Omega \quad (3.0.iii) \end{array} \right.$$

qui vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} \left( \|u^0\|_V + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (3.0.iv)$$

Et si de plus  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$ , alors le problème admet une solution forte qui vérifie les propriétés de régularité :

$$u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)). \quad (3.0.v)$$

et, pour  $K_\Omega > 0$  assez grand, l'inégalité :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))} + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} \leq K_\Omega \left( \|u^0\|_{H^2(\Omega)} + \|u^1\|_V \right) \quad (3.0.vi)$$

#### Démonstration :

Soit  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$ . L'opérateur  $\mathcal{C}_1$  est m-dissipatif sur  $V \times L^2(\Omega)$  et  $V \times L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert. On applique le théorème de Hille Yosida, selon lequel il existe une



fonction unique  $(u, v) : \mathbb{R}_+ \rightarrow V \times L^2(\Omega)$  telle que :

$$(u, v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V \times L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{C}_1)) \quad (3.1.a)$$

solution du problème  $P_{\mathcal{C}_1}$  :

$$P_{\mathcal{C}_1} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(u,v)}{dt}(t) = \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \Delta u(t) - v(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.1.b) \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad (3.1.c) \end{array} \right.$$

Et vérifiant de plus les inégalités :

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.1.d)$$

$$\left\| \frac{d(u,v)}{dt}(t) \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = \left\| \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.1.e)$$

La fonction  $u$  est la solution forte du problème  $\mathcal{P}_1$  :

(3.1.b) implique que :  $v(t) = u'(t) \quad \forall t \geq 0$ . Il en résulte que (3.1.a) implique que :

$$u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V), \quad u' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad u'' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \quad (3.1.f)$$

Donc :

$$v(t) = u'(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = u''(t) = \Delta u(t) - v(t) \quad \forall t \geq 0$$

c'est à dire :

$$u''(t, x) - \Delta u(t, x) + u'(t, x) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \Omega$$

Ce qui satisfait l'équation (3.0.i). Soit  $S_1(t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe engendré sur  $V \times L^2(\Omega)$  par

l'opérateur  $\mathcal{C}_1$ . On sait, d'après la Théorie des semi-groupes que :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{C}_1) \quad \forall t \geq 0$$

ce qui implique d'après la proposition 3.2 qui caractérise le domaine  $D(\mathcal{C}_1)$  (page 130) :

$$(\partial_\nu v)|_\Gamma - (\Delta_T u(t))|_\Gamma + u(t)|_\Gamma + u'(t)|_\Gamma = 0 \quad \forall t \geq 0 \text{ dans } L^2(\Gamma)$$

L'équation (3.0.ii) est donc vérifiée et on vérifie (3.0.iii) en prenant  $t = 0$  dans

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0$$

Régularité de la solution forte  $u$  du problème  $\mathcal{P}_1$  :

L'inclusion  $\left\{ \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, t \geq 0 \right\} \subset D(\mathcal{C}_1)$  montre, grâce aux propriétés de régularité

du domaine  $D(\mathcal{C}_1)$ , que la solution  $u$  vérifie les propriétés suivantes de régularité :

$$u(t) \in H^2(\Omega) \quad , \quad u(t)|_\Gamma \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma) \quad , \quad u'(t) \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad u'(t)|_\Gamma \in H^1(\Gamma) \quad \forall t \geq 0$$

Et d'après (3.1.a) du problème de Cauchy  $P_{\mathcal{C}_1}$  on a :

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V \times L^2(\Omega)) \implies \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \\ 2) \quad u' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \\ 3) \quad u'' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \end{array} \right\}$$

Continuité de la solution  $u$  relativement à la norme de  $H^2(\Omega)$  :

Pour tout  $t \geq 0$  on a  $\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \in D(\mathcal{C}_1)$ . La fonction  $t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$  est continue

pour la norme du graphe de  $D(\mathcal{C}_1)$  ce qui implique :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\Delta u(t + \eta) - u'(t + \eta) + u'(t) - \Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Comme  $u$  et  $u'$  sont continues pour la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  on en déduit que :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\Delta u(t + \eta) - u(t + \eta) + u(t) - \Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

La continuité de la fonction  $u$  pour la norme de  $V$  équivaut à :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\nabla u(t + \eta) - \nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\Gamma} u(t + \eta) - \nabla_{\Gamma} u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u(t + \eta) - u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 = 0$$

Et  $(u')|_{\Gamma}$  est continue pour la norme de  $L^2(\Gamma)$ . Ce qui donne :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|u(t + \eta) - u(t) + u'(t + \eta) - u'(t)\|_{L^2(\Gamma)} = 0$$

Comme l'ensemble  $D(\mathcal{C}_1)$  est muni d'une structure d'espace vectoriel, on remarquera que :

$$\left[ \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \in D(\mathcal{C}_1) \text{ et } \begin{pmatrix} u(t + \eta) \\ u'(t + \eta) \end{pmatrix} \in D(\mathcal{C}_1) \right] \implies \begin{pmatrix} u(t + \eta) - u(t) \\ u'(t + \eta) - u'(t) \end{pmatrix} \in D(\mathcal{C}_1) \quad \forall t \geq 0, \forall \eta > 0$$

On peut alors appliquer l'estimation (3.4.0) de la proposition 3.4 (page 138) à  $\begin{pmatrix} u(t + \eta) - u(t) \\ u'(t + \eta) - u'(t) \end{pmatrix}$

et en déduire que la quantité  $\|u(t + \eta) - u(t)\|_{H^2(\Omega)}$  est pour tout  $\eta > 0$  et pour tout  $t \geq 0$

majorée par la quantité :

$$\mathbf{c}_{\Omega} \left( \|u(t + \eta) - u(t) - \Delta u(t + \eta) + \Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t + \eta) - u(t) + u'(t + \eta) - u'(t)\|_{L^2(\Gamma)} \right)$$

qui tend vers zéro quand  $\eta$  tend vers zéro. D'où :

$$u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))$$

Estimation de la norme de la solution forte du problème  $\mathcal{P}_1$  :

On se propose de montrer que tout  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$  la solution vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))} + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} \leq \mathbf{C} \left( \|u^0\|_{H^2(\Omega)} + \|u^1\|_V \right)$$

D'après (3.1.e) on a  $\|u'(t)\|_V^2 + \|\Delta u(t) - u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u^1\|_V^2 + \|\Delta u^0 - u^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \geq 0$ .

On utilise l'inégalité triangulaire :

$$\|u(t) - \Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u(t) - u'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(t) - u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } t \geq 0$$

dans la majoration (3.4.0) de la proposition 3.4 (page 138) et on obtient :

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \mathbf{c}_\Omega \left( \|u(t) - u'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(t) - u'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t) + u'(t)\|_{L^2(\Gamma)} \right)$$

On en déduit par continuité des traces et des injections  $V \subset H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma)$

et par équivalence de normes que pour une constante positive  $k_\Omega > 0$  convenable, on aura

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq k_\Omega \left( \|u(t)\|_V + \|u'(t)\|_V + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(t) - u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad \forall t \geq 0$$

En appliquant les inégalités (3.1.d) et (3.1.e) de la page 141 à l'inégalité précédente on obtient :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq k_\Omega \left( \|u^1\|_V^2 + \|\Delta u^0 - u^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sqrt{2} \left( \|u^0\|_V + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \right) \right) \quad \forall t \geq 0$$

D'où pour  $\mathbf{C} > 0$  assez grand :

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \mathbf{C} \left( \|u^0\|_{H^2(\Omega)} + \|u^1\|_V \right) \quad \forall t \geq 0$$

La solution faible : Pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  la solution faible du problème est définie par :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0$$

La fonction  $(u, u') \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, V \times L^2(\Omega))$  vérifie l'inégalité :

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0$$

Ce qui, pour tout  $t \geq 0$  équivaut à  $\sqrt{\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \sqrt{\|u^0\|_V^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2}$ . D'où :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, V)} + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} \left( \|u^0\|_V + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

### III.3 - Stabilisation forte du problème $P_1$

Soit  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  et  $(u, u')$  la solution faible du problème  $P_1$ . Alors :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0$$

On définit l'énergie de la solution par :

$$\begin{aligned} E(u, t) &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \left\| S_1(t) \cdot \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u(t)|^2 + |u'(t)|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (|\nabla_{\Gamma} u(t)|^2 + |u(t)|^2) d\Gamma \end{aligned}$$

**Remarque 3.1 :** Lorsque  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$ , la fonction :

$$\begin{aligned} E(u, \cdot) : [0, +\infty[ &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ t &\longmapsto E(u, t) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

est partout dérivable sur  $[0, +\infty[$  et on a :

$$\frac{dE(u, t)}{dt} = - \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx - \int_{\Gamma} |u'(t)|^2 d\Gamma$$

En effet, on a :

$$\frac{dE(u, t)}{dt} = \int_{\Omega} [\nabla u(t) \cdot \nabla u'(t) + u'(t)u''(t)] dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} u(t) \cdot \nabla_{\Gamma} u'(t) + u(t)u'(t)) d\Gamma$$

car  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega) \cap V)$ . Donc :

$$\frac{dE(u, t)}{dt} = \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla u'(t) dx + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} u(t) \nabla_{\Gamma} u'(t) + u(t)u'(t)) d\Gamma + \int_{\Omega} u''(t)u'(t) dx$$

Ce qui, d'après le Théorème 3.1 donne :

$$\frac{dE(u, t)}{dt} = - \int_{\Gamma} |u'(t)|^2 d\Gamma - \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx$$

**Proposition 3.5 :**

Pour tout  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$ , la trajectoire  $\left\{ S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0 \right\}$  issue de  $(u^0, u^1)$  est relativement compacte dans  $V \times L^2(\Omega)$ .

**Preuve :** On commence par montrer que l'injection  $H^2(\Omega) \times V \hookrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est compacte.

Soit  $\{(v_k, z_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$  une suite bornée dans  $H^2(\Omega) \times V$ . L'injection  $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$  étant compacte, la suite  $\{v_k, \mid k \in \mathbb{N}\}$  admet une sous-suite  $\{v_{\Phi(k)}, \mid k \in \mathbb{N}\}$  qui converge dans  $H^1(\Omega)$ . La suite des traces  $\{(v_{\Phi(k)})|_{\Gamma}, \mid k \in \mathbb{N}\}$  est bornée dans  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$  car l'application trace  $\gamma_0 : H^2(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$  est continue. L'injection  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow H^1(\Gamma)$  étant compacte, la sous-suite  $\{(v_{\Phi(k)})|_{\Gamma}, \mid k \in \mathbb{N}\} \subset H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$  admet donc sous-suite encore notée  $\{(v_{\Phi(k)})|_{\Gamma}, \mid k \in \mathbb{N}\}$  qui converge dans  $H^1(\Gamma)$ . Notons par  $v$  la limite dans  $H^1(\Omega)$  de la sous-suite  $\{(v_{\Phi(k)}) \mid k \in \mathbb{N}\}$  à traces bornée dans  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Par continuité de l'application trace, on a alors  $v_{\Phi(k)} \longrightarrow v$  dans  $H^1(\Omega)$  et  $(v_{\Phi(k)})|_{\Gamma} \longrightarrow (v)|_{\Gamma}$  dans  $H^1(\Gamma)$ . Ce qui prouve que la suite  $\{v_k, \mid k \in \mathbb{N}\} \subset H^2(\Omega)$  admet une sous suite qui converge dans  $V$ . Quant à la suite  $\{(z_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ , bornée dans  $V$ , elle est, d'après l'équivalence des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  évoquée dans la page 126, bornée dans  $H^1(\Omega)$ . Comme l'injection  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est compacte, elle admet une sous-suite qui converge dans  $L^2(\Omega)$ . En conclusion : toute suite  $\{(v_k, z_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ , bornée dans  $H^2(\Omega) \times V$  admet une sous-suite qui converge dans  $V \times L^2(\Omega)$  c'est à dire que l'injection  $H^2(\Omega) \times V \hookrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est compacte.

La trajectoire  $\left\{ S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0 \right\}$  est, pour tout  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$ , relativement compacte dans  $V \times L^2(\Omega)$  car l'ensemble  $\left\{ S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0 \right\} \subset D(\mathcal{C}_1) \subset H^2(\Omega) \times V$  est d'après (3.0.vi) borné dans  $H^2(\Omega) \times V$  et l'injection  $H^2(\Omega) \times V \hookrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est compacte.

### Théorème 3.2 : (Stabilité forte)

Le semi-groupe de contractions  $S_1(t)_{t \geq 0}$  engendré par  $\mathcal{C}_1$  est fortement stable.

C'est à dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$$

### Démonstration :

D'après la proposition 1.21 de la page 59, il suffira de prouver que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$$

puisque  $D(\mathcal{C}_1)$  est dense dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Les hypothèses du Principe d'invariance de LaSalle sont réunies puisque la trajectoire issue de tout élément  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$  est relativement compacte selon la proposition 3.5 (voir page 145) et l'application  $\Phi : V \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , qui à tout élément de  $V \times L^2(\Omega)$  associe le carré de sa norme dans  $V \times L^2(\Omega)$ , est une fonction de Liapounov pour le semi-groupe  $S_1(t)_{t \geq 0}$ . Il existe par conséquent une constante  $l \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = l \quad (3.2.a)$$

$$et : \left\| S_1(t) \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \left\| \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = l \quad \forall \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} \in \omega \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \quad (3.2.b)$$

où  $\omega \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}$  désigne l'ensemble  $\omega$ -limite de  $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}$  qui, rapellons-le, est défini par :

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \in \omega \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow +\infty \text{ tel que } \left\| S_1(t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \right\}$$

De toute suite  $\{t_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$  infinie, on peut extraire une sous suite encore notée

$(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante vers  $+\infty$  telle que la suite  $\left\{ S_1(t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N} \right\} \subset D(\mathcal{C}_1)$

converge dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Sa limite  $\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix}$  appartient par définition à l'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega\left(\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}\right)$ . Ce qui implique d'après (3.2.b) que :

$$\left\| S_1(t) \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \left\| \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = l \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2.c)$$

Par continuité du semi-groupe  $S_1(t)_{t \geq 0}$ , la convergence

$$\left\| S_1(t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

entraîne la convergence :

$$\left\| S_1(t + t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} - S_1(t) \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty \quad \text{et } \forall t \geq 0$$

Et la suite  $\left\{ S_1(t + t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} u(t + t_n) \\ u'(t + t_n) \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N} \right\}$  n'est autre que la suite des solutions fortes du problème  $\mathcal{P}_1$  lorsque la donnée initiale parcourt la suite

$$\left\{ \begin{pmatrix} v(0) = u(t_n) \\ v'(0) = u'(t_n) \end{pmatrix}_n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Elle converge nécessairement, par unicité de la limite, vers la solution faible du problème  $\mathcal{P}_1$  avec la condition initiale  $\begin{pmatrix} v(0) = v^0 \\ v'(0) = v^1 \end{pmatrix}$ , définie par :

$$t \longmapsto \mathcal{Z}(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} u(t + t_n) \longrightarrow z(t) \quad \text{dans } V \\ u'(t + t_n) \longrightarrow z'(t) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \end{array} \right\}$$

et vérifiant  $\mathcal{Z} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$ . Et pour tout  $t \geq 0$  on a :  $\mathcal{Z}(t) = S_1(t) \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix}$ .

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_1(t + t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = l$$

C'est à dire :  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(u, t + t_n) = \lim_{s \rightarrow \infty} E(u, s) = l$ . Et on a :



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u(t + t_n) \\ u'(t + t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} \text{ dans } V \times L^2(\Omega) \quad \forall t \geq 0$$

Ce qui montre que la fonction  $t \mapsto \mathcal{Z}(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$  est constante par rapport à  $t$ . Donc :

$$z(t) = z(0) = v^0 \quad \text{et} \quad z'(t) = z'(0) = 0 = v^1 \quad \forall t \geq 0$$

ou encore :

$$z(t) = z(0) = v^0 \quad \text{et} \quad z''(t) = z'(t) = v^1 = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v^0 = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu v^0 - \Delta_\Gamma v^0 + a v^0 = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}$$

On multiplie la première équation par  $v^0$ , on intègre et on obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla v^0|^2 dx - \langle \partial_\nu v^0, v^0 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$$

et en tenant compte de la deuxième équation :

$$\int_{\Omega} |\nabla v^0|^2 dx + \int_{\Gamma} (|\nabla_\Gamma v^0|^2 + a |v^0|^2) d\Gamma = 0$$

C'est à dire :  $\|v^0\|_V = 0$ . Donc :  $(v^0, v^1) = 0$ . Et finalement :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \left\| \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = 0$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$$

On généralise le résultat par densité en appliquant proposition 1.21 de la page 59. D'où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$$

### III.4 - Stabilisation exponentielle du problème $P_1$

On se propose dans ce paragraphe de montrer que le semi-groupe  $S_1(t)_{t \geq 0}$  engendré par l'opérateur  $C_1$  sur  $V \times L^2(\Omega)$  est exponentiellement stable. C'est à dire qu'il existe deux constantes  $M_1 \geq 1$  et  $\omega_1 > 0$  telles que :

$$\|S_1(t)\|_{\mathcal{L}(V \times L^2(\Omega))} \leq M_1 \cdot e^{-\omega_1 t} \quad \forall t \geq 0$$

L'énergie  $E(u, t)$  de la solution étant définie par :

$$E(u, t) = \frac{1}{2} \left\| S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{(V \times L^2(\Omega))}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u'|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (|\nabla_{\Gamma} u|^2 + |u|^2) d\Gamma$$

On posera, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$E_{\varepsilon}(u, t) = E(u, t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu' dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma$$

c'est à dire :

$$E_{\varepsilon}(u, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla |u|^2 + |u'|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (|\nabla_{\Gamma} |u|^2 + |u|^2) d\Gamma + \varepsilon \int_{\Omega} uu' dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma$$

**Remarque 3.2 :** Pour tout  $\nu > 0$  et pour tout  $t \geq 0$  on a d'après l'inégalité de Young :

$$\left| \int_{\Omega} u(t) \cdot u'(t) dx \right| \leq \nu^2 \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \frac{1}{4\nu^2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx$$

**Proposition 3.6 :**

Il existe  $\alpha_1 > 0$  tel que pour tout  $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$  on ait :

$$(1 - \varepsilon\alpha_1)E(u, t) \leq E_{\varepsilon}(u, t) \leq (1 + \varepsilon\alpha_1)E(u, t) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0$$

**Preuve :** Pour tout  $\nu > 0$ , on a d'après la remarque précédente :

$$-\nu^2 \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx - \frac{1}{4\nu^2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \leq \int_{\Omega} u(t)u'(t) dx \leq \nu^2 \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \frac{1}{4\nu^2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx$$

Cela entraîne par définition de  $E(u, t)$  et de  $E_\varepsilon(u, t)$  et pour tout  $\nu > 0$  les deux inégalités :

$$E(u, t) - \varepsilon \nu^2 \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx - \frac{\varepsilon}{4\nu^2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \leq E_\varepsilon(u, t) \quad (3.6.1)$$

et :

$$E_\varepsilon(u, t) \leq E(u, t) + \varepsilon \nu^2 \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{4\nu^2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \quad (3.6.2)$$

Il existe d'après l'équivalence des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  une constante  $c(\Omega) > 0$  telle que

$$-c(\Omega) \left( \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \right) \leq - \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx \leq c(\Omega) \left( \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \right)$$

On en déduit que les inégalités (3.6.1) et (3.6.2) impliquent pour tout  $\nu > 0$  les inégalités :

$$E(u, t) - \varepsilon \left[ \nu^2 c(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \left( \nu^2 c(\Omega) + \frac{1}{2} \right) \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma + \frac{1}{4\nu^2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \right] \leq E_\varepsilon(u, t) \quad (3.6.3)$$

Et :

$$E_\varepsilon(u, t) \leq E(u, t) + \varepsilon \left[ \nu^2 c(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \left( \nu^2 c(\Omega) + \frac{1}{2} \right) \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma + \frac{1}{4\nu^2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \right] \quad (3.6.4)$$

Mais selon la définition de  $E(u, t)$ , exposée en page, on a pour tout  $\nu > 0$  :

$$\nu^2 c(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \left( \nu^2 c(\Omega) + \frac{1}{2} \right) \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma + \frac{1}{4\nu^2} \int_{\Omega} |u'|^2 dx \leq \text{Max} \left\{ (2\nu^2 c(\Omega) + 1), \frac{1}{2\nu^2} \right\} E(u, t)$$

ce qui, en prenant  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , implique en particulier l'inégalité :

$$0 \leq \frac{1}{2} \left( c(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + (c(\Omega) + 1) \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma + \int_{\Omega} |u'|^2 dx \right) \leq (c(\Omega) + 1) \cdot E(u, t) \quad (3.6.5)$$

Les inégalités (3.6.3) et (3.6.4) deviennent alors respectivement :

$$E(u, t) - \varepsilon \frac{1}{2} (c(\Omega) + 1) \left( \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma + \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \right) \leq E_\varepsilon(u, t)$$

Et :

$$E_\varepsilon(u, t) \leq E(u, t) + \frac{1}{2}\varepsilon(c(\Omega) + 1) \left( \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma + \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \right)$$

Ce qui signifie d'après (3.6.5) :

$$(1 - \varepsilon(c(\Omega) + 1))E(u, t) \leq E_\varepsilon(u, t) \leq (1 + \varepsilon(c(\Omega) + 1))E(u, t) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall t \geq 0$$

Il suffira alors de poser  $\alpha_1 = c(\Omega) + 1$  pour avoir :

$$(1 - \alpha_1\varepsilon) \cdot E(u, t) \leq E_\varepsilon(u, t) \leq (1 + \alpha_1\varepsilon) \cdot E(u, t) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall t \geq 0$$

**Proposition 3.7 :**

Si  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$  alors la fonction :  $t \longmapsto E_\varepsilon(u, t)$  est dérivable et vérifie pour un certain  $\delta_0 > 0$  indépendant de  $(u_0, u_1)$ , l'inégalité :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} \leq - \int_{\Gamma} |u'(t)|^2 d\Gamma \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon \in ]0, \delta_0]$$

**Preuve :** Par définition de  $E(u, t)$ , on a :

$$E(u, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u'|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (|\nabla_{\Gamma} u|^2 + |u|^2) d\Gamma \quad \forall t \geq 0$$

D'après la remarque 3.1, faite en page 145, la fonction  $t \longmapsto E(u, t)$  est dérivable et :

$$\frac{dE(u, t)}{dt} = - \int_{\Gamma} |u'|^2 d\Gamma - \int_{\Omega} |u'|^2 dx \quad \forall t \geq 0$$

On rappelle que  $E_\varepsilon(u, t) = E(u, t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu' dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0$ . Et on sait que la solution  $u$  vérifie :  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V)$ ,  $u' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$  et  $u'' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$ . La

fonction  $t \longmapsto \int_{\Omega} uu' dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma$  est donc dérivable et après calcul on trouve :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} uu' dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \right) = \int_{\Omega} |u'|^2 dx + \int_{\Omega} uu'' dx + \int_{\Gamma} uu' d\Gamma \quad \forall t \geq 0$$

On en déduit alors que :

$$\frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} = - \int_{\Gamma} |u'|^2 d\Gamma - \int_{\Omega} |u'|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} |u'|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} uu'' dx + \varepsilon \int_{\Gamma} uu' d\Gamma \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0$$

Le calcul de la somme  $\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{d}{dt} (E_\varepsilon(u, t))$  donne :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} |u'|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} u|^2 d\Gamma + \varepsilon^2 \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \right) \\ + \varepsilon^3 \int_{\Omega} uu' dx + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \\ + \varepsilon \int_{\Omega} |u'|^2 dx - \int_{\Gamma} |u'|^2 d\Gamma - \int_{\Omega} |u'|^2 dx \\ + \varepsilon \int_{\Omega} uu'' dx + \varepsilon \int_{\Gamma} uu' d\Gamma \end{array} \right\}$$

C'est à dire :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \left( \frac{1}{2} \varepsilon^2 - 1 + \varepsilon \right) \int_{\Omega} |u'|^2 dx \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \\ + \varepsilon^3 \int_{\Omega} uu' dx + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \\ + \varepsilon \int_{\Omega} uu'' dx + \varepsilon \int_{\Gamma} uu' d\Gamma - \int_{\Gamma} |u'|^2 d\Gamma \end{array} \right\} \quad (3.7.1)$$

Or, pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $u$  vérifie l'équation (3.0.i). Donc  $u''(t) = \Delta u(t) - u'(t)$ . On multiplie par  $u(t)$  puis on intègre sur  $\Omega$ . On applique la formule de Green ( proposition 1.14 de la page 52) puisque, pour tout  $t \geq 0$ , on a  $u(t) \in H^2(\Omega)$  et  $u'(t) \in H^1(\Omega)$  et on obtient :

$$\varepsilon \int_{\Omega} uu'' dx = \varepsilon \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\Gamma - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} uu' dx$$

Mais d'après la condition de Ventcel  $\partial_{\nu} u - \Delta_{\Gamma} u + u + u' = 0$  sur  $\Gamma$ , on a aussi :

$$\varepsilon \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\Gamma = -\varepsilon \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} u|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma} uu' d\Gamma$$

Donc :

$$\varepsilon \int_{\Omega} uu'' dx = -\varepsilon \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} u|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma} uu' d\Gamma - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} uu' dx \quad (3.7.2)$$

En utilisant le résultat (3.7.2) dans (3.7.1), on obtient :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \left( \frac{1}{2}\varepsilon^2 - 1 + \varepsilon \right) \int_{\Omega} |u'|^2 dx \\ + \left( \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon \right) \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} u|^2 d\Gamma + \left( \frac{1}{2}\varepsilon^3 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon \right) \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \\ + \left( \varepsilon^3 - \varepsilon \right) \int_{\Omega} uu' dx - \int_{\Gamma} |u'|^2 d\Gamma \end{array} \right\} \quad (3.7.3)$$

En prenant  $\frac{\nu}{\sqrt{2}}$  au lieu  $\nu$  dans la remarque 3.2, la quantité  $(\varepsilon^3 - \varepsilon) \int_{\Omega} uu' dx$  vérifie :

$$-\frac{1}{2}\nu^2 \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx - \frac{1}{2\nu^2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \leq - \left| \int_{\Omega} u(t)u'(t) dx \right| \leq \int_{\Omega} u(t)u'(t) dx \quad \forall \nu > 0$$

et on multiplie, pour  $0 < \varepsilon < 1$ , les deux membres de l'inégalité par le réel négatif  $\varepsilon^3 - \varepsilon$

$$(\varepsilon^3 - \varepsilon) \int_{\Omega} u(t)u'(t) dx \leq \frac{1}{2}\nu^2 \varepsilon (1 - \varepsilon^2) \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \frac{\varepsilon (1 - \varepsilon^2)}{2\nu^2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \quad \forall t \geq 0 \quad (3.7.4)$$

Par équivalence des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  il existe une constante  $c(\Omega) > 0$  telle que :

$$\frac{1}{2}\nu^2 \varepsilon (1 - \varepsilon^2) \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx \leq \frac{\nu^2 c(\Omega)}{2} \varepsilon (1 - \varepsilon^2) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{\nu^2 c(\Omega)}{2} \varepsilon (1 - \varepsilon^2) \int_{\Gamma} |u(t)|^2 d\Gamma \quad (3.7.5)$$

On applique ensuite les résultats (3.7.4) et (3.7.5) à l'égalité (3.7.3) et on obtient :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} \leq \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\varepsilon}{2} (\varepsilon + \nu^2 (1 - \varepsilon^2) c(\Omega) - 2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right. \\ + \frac{1}{2} \left( \varepsilon^2 + 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\nu^2} - \frac{\varepsilon^3}{\nu^2} - 2 \right) \int_{\Omega} |u'|^2 dx \\ + \frac{1}{2} \varepsilon (\nu^2 c(\Omega) (1 - \varepsilon^2) + \varepsilon - 2 + \varepsilon^2) \int_{\Gamma} |u(t)|^2 d\Gamma \\ \left. + \frac{\varepsilon}{2} (\varepsilon - 2) \int_{\Gamma} (|\nabla_{\Gamma} u|^2) d\Gamma - \int_{\Gamma} |u'|^2 d\Gamma \right\} \quad (3.7.6)$$

Comme  $0 < \varepsilon < 1$ , on remarquera que pour tout  $\nu \in \left] 0, \frac{1}{\sqrt{c(\Omega)}} \right[$  on a les inégalités :

$$\frac{1}{2} \varepsilon (\varepsilon + \nu^2 (1 - \varepsilon^2) c(\Omega) - 2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2} (\varepsilon - \varepsilon^2 - 1) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq 0 \quad (3.7.7)$$

Et :

$$\frac{\varepsilon}{2} (\nu^2 c(\Omega) (1 - \varepsilon^2) + \varepsilon - 2 + \varepsilon^2) \int_{\Gamma} |u(t)|^2 d\Gamma \leq \frac{\varepsilon}{2} (\varepsilon - 1) \int_{\Gamma} |u(t)|^2 d\Gamma \leq 0 \quad (3.7.8)$$

En tenant compte des résultats (3.7.7) et (3.7.8), l'inégalité (3.7.6) entraîne pour tout

$$\nu \in \left] 0, \frac{1}{\sqrt{c(\Omega)}} \right[ :$$

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} \leq \frac{1}{2} \left( \varepsilon^2 + 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\nu^2} (1 - \varepsilon^2) - 2 \right) \int_\Omega |u'|^2 dx - \int_\Gamma |u'|^2 d\Gamma \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1[ \quad (3.7.9)$$

Pour tout  $\nu \in \left] \frac{1}{\sqrt{2c(\Omega)}}, \frac{1}{\sqrt{c(\Omega)}} \right[$  et pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  on a :  $\frac{1}{\nu^2} \varepsilon (1 - \varepsilon^2) \leq 2c(\Omega)\varepsilon$ . Donc :

$$\frac{1}{2} \left( \varepsilon^2 + 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\nu^2} (1 - \varepsilon^2) - 2 \right) \int_\Omega |u'|^2 dx \leq \frac{1}{2} (\varepsilon^2 + 2\varepsilon(1 + c(\Omega)) - 2) \int_\Omega |u'|^2 dx$$

Il est clair alors que :

$$\frac{1}{2} \left( \varepsilon^2 + 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\nu^2} (1 - \varepsilon^2) - 2 \right) \int_\Omega |u'|^2 dx \leq 0 \quad \forall \varepsilon \in \left] 0, \sqrt{(1 + c(\Omega))^2 + 2} - (1 + c(\Omega)) \right[ \quad (3.7.10)$$

Pour terminer, on se donne une constante  $\delta_0$  strictement positive telle que  $\delta_0 < 1$  et  $\delta_0 <$

$\sqrt{(1 + c(\Omega))^2 + 2} - (1 + c(\Omega))$  et on applique le résultat (3.7.10) à l'inégalité (3.7.9). D'où

la conclusion :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} \leq - \int_\Gamma |u'(t)|^2 d\Gamma < 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon \in ]0, \delta_0[$$

### Théorème 3.3 : ( Stabilité exponentielle )

Le semi-groupe de contractions  $S_1(t)_{t \geq 0}$  engendré par l'opérateur  $\mathcal{C}_1$  est exponen-

tiellement stable. C'est à dire qu'il existe deux constantes positives  $\mathbf{M}_1 \geq 1$  et  $\omega_1 > 0$

telles que :

$$\|S_1(t)\|_{\mathcal{L}(V \times L^2(\Omega))} \leq \mathbf{M}_1 \cdot e^{-\omega_1 t} \quad \forall t \geq 0$$

Démonstration : Soit  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$  et  $u$  la solution forte du problème  $\mathcal{P}_1$  pour la

donnée initiale  $u(0) = u^0$  et  $(u'(0) = u^1$ . Il existe d'après la proposition 3.7 de la page 152

une constante  $\delta_0 > 0$  telle que

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} \leq - \int_\Gamma |u'(t)|^2 d\Gamma \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon \in ]0, \delta_0[$$

Donc :

$$\frac{1}{E_\varepsilon(u, t)} \left( \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} \right) \leq -\varepsilon^2 \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon \in ]0, \delta_0]$$

En intégrant entre 0 et  $t > 0$  on a :  $\text{Log}(E_\varepsilon(u, t)) - \text{Log}(E_\varepsilon(u, 0)) < -\varepsilon^2 t \quad \forall t \geq 0$ . Ce

qui implique que :

$$E_\varepsilon(u, t) < E_\varepsilon(u, 0).e^{-\varepsilon^2 t} \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon \in ]0, \delta_0] \quad (3.3.a)$$

On a montré dans la proposition 3.6 de la page 150 qu'il existe  $\alpha_1 > 0$  tel que :

$$(1 - \varepsilon\alpha_1)E(u, t) \leq E_\varepsilon(u, t) \leq (1 + \varepsilon\alpha_1)E(u, t) \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0$$

En prenant  $\varepsilon < \text{Min} \left\{ \delta_0, \frac{1}{\alpha_1} \right\}$ , et en utilisant (3.3.a) on obtient :

$$(1 - \varepsilon\alpha_1)E(u, t) \leq E_\varepsilon(u, t) < E_\varepsilon(u, 0).e^{-\varepsilon^2 t} \leq (1 + \varepsilon\alpha_1)E(u, 0)e^{-\varepsilon^2 t} \quad \forall t \geq 0$$

Ce qui, en particulier, donne :  $(1 - \varepsilon\alpha_1)E(u, t) \leq (1 + \varepsilon\alpha_1)E(u, 0)e^{-\varepsilon^2 t}$  pour tout  $t \geq 0$  et

pour tout  $\varepsilon \in ]0, \text{Min} \left\{ \delta_0, \frac{1}{\alpha_1} \right\} [$ . D'où :

$$E(u, t) \leq \frac{1 + \varepsilon\alpha_1}{1 - \varepsilon\alpha_1} E(u, 0).e^{-\varepsilon^2 t} \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon \in ]0, \text{Min} \left\{ \delta_0, \frac{1}{\alpha_1} \right\} [$$

Finalement, quel que soit  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_1)$ , le semi-groupe  $S_1(t)_{t \geq 0}$  vérifie :

$$\left\| S_1(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon\alpha_1}{1 - \varepsilon\alpha_1}} \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} e^{-\frac{\varepsilon^2 t}{2}} \quad \forall t \geq 0$$

et le résultat reste valable pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  car  $D(\mathcal{C}_1)$  est dense dans  $V \times L^2(\Omega)$ .

D'où pour  $M_1 \geq \sqrt{(1 + \varepsilon\alpha_1)(1 - \varepsilon\alpha_1)^{-1}}$  et  $0 < \omega_1 \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2$  :

$$\|S_1(t)\|_{\mathcal{L}(V \times L^2(\Omega))} \leq M_1.e^{-\omega_1 t} \quad \forall t \geq 0$$

Ce qui démontre le Théorème 3.3 et établit la stabilité exponentielle du problème  $\mathcal{P}_1$ .



## Chapitre IV

### Problème de Ventcel avec feedback interne convectif

#### IV.1 - Introduction :

Soient  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  une partition de  $\Gamma$  telle que  $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \emptyset$  et  $mes(\Gamma_1) > 0$  et  $\nu(x) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  en  $x \in \Gamma$  et  $d \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  une fonction telle que :

$$\mathcal{H}_1 : \exists C_0 > 0 \text{ tel que } -div(d) > C_0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$$\mathcal{H}_2 : d \cdot \nu \geq -2 \quad \forall x \in \Gamma_1$$

C'est à dire :

$$\mathcal{H}_1 : \exists C_0 > 0 \text{ tel que } C_0 + \left( \frac{\partial d_1}{\partial x_1} + \frac{\partial d_2}{\partial x_2} + \frac{\partial d_3}{\partial x_3} \right) (x) < 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$$\mathcal{H}_2 : d_1(x)\nu_1(x) + d_2(x)\nu_2(x) + d_3(x)\nu_3(x) \geq -2 \quad \forall x \in \Gamma_1$$

**Notations :** On note par  $|\cdot|_{\mathbb{R}^3}$  la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$  induite par le produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Il existe une constante  $\delta(d, \Omega) > 0$  telle que  $|d(x)|_{\mathbb{R}^3} \leq \delta(d, \Omega)$ ,  $\forall x \in \overline{\Omega}$ .

On posera  $\forall v \in H^1(\Omega)$  :

$$(d \cdot \nabla v)(x) = \sum_{i=1}^{i=3} d_i(x) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$$

**Remarque 4.1 :** On remarquera que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  on a  $(d \cdot \nabla v) \in L^2(\Omega)$  et :

$$\|d \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta(d, \Omega) \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :  $|(d \cdot \nabla v)(x)|_{\mathbb{R}^3} \leq |d(x)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\nabla v|_{\mathbb{R}^3}$ . Et

en intégrant sur  $\Omega$ , le produit  $|d(x)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\nabla v|_{\mathbb{R}^3}$  on obtient :  $\int_{\Omega} |d \cdot \nabla v|_{\mathbb{R}^3}^2 dx \leq \int_{\Omega} |d(x)|_{\mathbb{R}^3}^2 |\nabla v|_{\mathbb{R}^3}^2 dx$

ce qui, par définition de  $\delta(d, \Omega)$  implique :

$$(d \cdot \nabla v) \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \|d \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta(d, \Omega) \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

On se propose dans ce chapitre d'étudier le problème suivant :

$$\mathcal{P}_2 : \left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = -d \cdot \nabla u' & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (4.0.1) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \quad (4.0.2) \\ \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u + u' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \quad (4.0.3) \\ u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \quad (4.0.4) \end{array} \right.$$

Dans le théorème 4.1, on étudiera l'existence, l'unicité et la régularité des solutions. On montrera ensuite dans le théorème 4.2 la stabilité forte du problème. Et le théorème 4.3 établira la stabilité exponentielle.

On se place dans l'espace défini par :  $V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}$

muni du produit scalaire :  $(u, v) \longrightarrow \langle u, v \rangle_V = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} (\nabla_\Gamma u \nabla_\Gamma v) d\Gamma_1$  qui en fait un espace de Hilbert dont la norme induite  $\| \cdot \|_V$  est définie par

$$\|v\|_V = \left[ \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_\Gamma v|^2 d\Gamma_1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in V$$

Pour écrire le problème  $\mathcal{P}_2$  sous forme de problème de Cauchy, on va définir deux opérateurs linéaires. On définit l'opérateur  $A_2 : V \longrightarrow V'$  par :

$$u \longmapsto A_2 u : \left\{ \begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longrightarrow (A_2 u)(v) = \langle u, v \rangle_V \end{array} \right.$$

Il est clair que  $A_2$  est un opérateur borné. Soit  $B_2$  l'application linéaire qui à tout  $u \in V$  associe la forme linéaire notée  $B_2 u$  et définie par :

$$B_2 u : \quad V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto B_2 u(v) = \int_\Omega (d \cdot \nabla u) v dx + \int_{\Gamma_1} u v d\Gamma_1$$

**Proposition 4.1 :**

*$B_2$  est un opérateur linéaire borné de  $V$  dans  $V'$*

**Preuve :** On a selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la remarque 4.1 faite en page 157 :

$$\int_{\Omega} (d \cdot \nabla u) v \, dx \leq \delta(d, \Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

On sait grâce à l'inégalité de Poincaré de la proposition 1.15 (voir la page 52) et à la continuité de l'application trace  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma_1)$  qu'il existe deux constantes  $\mathbf{C}_{\Gamma} > 0$  et  $c_1(\Omega) > 0$  telles que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \mathbf{C}_{\Gamma} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{c_1(\Omega)^2 + 1} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

Il en résulte que pour  $\mathbf{C} > \mathbf{C}_{\Gamma}^2 (c_1(\Omega)^2 + 1) + c_1(\Omega)\delta(d, \Omega)$  on a :

$$\left| \int_{\Omega} (d \cdot \nabla u) v \, dx \right| + \left| \int_{\Gamma_1} u v \, d\Gamma_1 \right| \leq \mathbf{C} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

Et par définition de l'opérateur  $B_2$  et du produit scalaire dans  $V$  cela implique :

$$B_2 u(v) \leq \mathbf{C} \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

Ce qui prouve pour tout  $v \in V$  que  $B_2 u \in V'$ . Or, la norme duale  $\|\cdot\|_{V'}$  est définie par :  $\|B_2 u\|_{V'} = \sup_{v \in V, \|v\|_V \leq 1} |B_2 u(v)|$ . D'où :  $\|B_2 u\|_{V'} \leq \mathbf{C} \|u\|_V$ ,  $\forall u \in V$ . D'où  $B_2$  est continue.

L'opérateur  $\mathcal{C}_2$  et son domaine :

En identifiant  $L^2(\Omega)$  à son dual, on a l'inclusion :  $V \subset L^2(\Omega) \subset V'$ . Soit :

$$D(\mathcal{C}_2) = \{ (v, z) \in V \times V \quad / \quad A_2 v + B_2 z \in L^2(\Omega) \}$$

On définit l'opérateur  $\mathcal{C}_2 : D(\mathcal{C}_2) \subset V \times L^2(\Omega) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$  par :

$$\mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -A_2v - B_2z \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.2 : Caractérisation et propriétés de régularité des éléments  $D(\mathcal{C}_2)$**

Les éléments de  $D(\mathcal{C}_2)$  sont caractérisés par l'équivalence :

$$(v, z) \in D(\mathcal{C}_2) \iff \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad (v, z) \in V \times V \text{ et } v \in H^2(\Omega) \\ 2) \quad (v)|_{\Gamma} \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma) \\ 3) \quad (\partial_\nu v)|_{\Gamma_1} - (\Delta_T v)|_{\Gamma_1} + z|_{\Gamma_1} = 0 \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \end{array} \right\} \quad (4.2.a)$$

Et l'opérateur  $\mathcal{C}_2$  est explicitement défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 : \quad D(\mathcal{C}_2) \subset V \times L^2(\Omega) &\longrightarrow V \times L^2(\Omega) \\ \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \Delta v - (d \cdot \nabla z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.b)$$

**Preuve :** Soit  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_2)$ . Il existe par définition de  $D(\mathcal{C}_2)$ , une fonction  $f \in L^2(\Omega)$  telle que  $A_2v + B_2z = f$ . C'est à dire :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma_1 + \int_{\Omega} (d \cdot \nabla z) u dx + \int_{\Gamma_1} z u d\Gamma_1 = \int_{\Omega} f u dx \quad \forall u \in V \quad (4.2.1)$$

En particulier :

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx + \int_{\Omega} (d \cdot \nabla z) \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On en déduit dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'égalité dans  $-\Delta v + (d \cdot \nabla z) = f$ . Donc :

$$\Delta v \in L^2(\Omega) \text{ et } \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \Delta v - (d \cdot \nabla z) \end{pmatrix} \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_2) \quad (4.2.2)$$

car  $f \in L^2(\Omega)$  et  $(d \cdot \nabla z) \in L^2(\Omega)$ . De (4.2.2) on a  $A_2v + B_2z = -\Delta v + (d \cdot \nabla z)$  et ceci prouve (4.2.b). On peut, ensuite, d'après la proposition 1.16 citée dans la page 54, définir

l'application  $\partial_\nu v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset H^{-1}(\Gamma_1)$  par :

$$\langle \partial_\nu v, w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} w \cdot \Delta v \, dx \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

Sachant que  $f = (d \cdot \nabla z) - \Delta v$ , on réécrit l'égalité (4.2.1) et on obtient :

$$\langle \partial_\nu v - \Delta_{\Gamma} v + z, u \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H_0^1(\Gamma_1)} = 0 \quad \forall u \in D(\Gamma_1)$$

D'où l'inclusion :

$$D(\mathcal{C}_2) \subset \{(v, z) \in V \times V : \Delta v \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_\nu v - \Delta_{\Gamma} v + z = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Gamma_1)\}$$

L'égalité  $\partial_\nu v - \Delta_{\Gamma} v + z = 0$  reste, en fait, encore valable dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  puisque

$$\partial_\nu v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \quad z \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \text{ et } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset H^{-1}(\Gamma_1)$$

Il s'en suit que :  $-\Delta_{\Gamma} v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . Cela implique que  $v|_{\Gamma_1} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$  car l'opérateur

$$\begin{aligned} I - \Delta_{\Gamma} : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ w &\longmapsto w - \Delta_{\Gamma} w \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Les hypothèses  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $\Delta v \in L^2(\Omega)$  et  $v|_{\Gamma_1} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$  de la proposition 1.17, évoquée en page 55, sont donc satisfaites. On en déduit que  $v \in H^2(\Omega)$ , ce qui implique d'après le Théorème des traces que  $\partial_\nu v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . La condition de Ventcel reste par conséquent encore valable dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  puisque  $z|_{\Gamma_1} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . D'où l'inclusion :

$$D(\mathcal{C}_2) \subset \left\{ (v, z) \in [V \cap H^2(\Omega)] \times V \text{ tel que : } \partial_\nu v - \Delta_{\Gamma} v + z = 0 \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \right\}$$

L'inclusion inverse étant évidente, on a l'égalité :

$$D(\mathcal{C}_2) = \left\{ (v, z) \in V \times V \text{ tel que : } \left\{ \begin{array}{l} \partial_\nu (v)|_{\Gamma_1} - (\Delta_{\Gamma} v)|_{\Gamma_1} + z|_{\Gamma_1} = 0 \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ v \in V \cap H^2(\Omega) \end{array} \right. \right\}$$

L'égalité  $\partial_\nu v - \Delta_{\Gamma} v + z = 0$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  montre aussi que  $\Delta_{\Gamma} v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . On en déduit, et cela achève la preuve de (4.2.a), la propriété de régularité au bord :

$$(v)|_{\Gamma_1} \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_1)$$

**Proposition 4.3 :**

Il existe une constante positive  $\mathbf{C} > 0$  telle que :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \mathbf{C} \left[ \|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Gamma_1)} \right] \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_2)$$

**Preuve :** D'après les propriétés de régularité établies dans la proposition précédente, tout élément  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_2)$  répond aux hypothèses de la proposition 1.17 (page 55) selon laquelle il existe une constante  $\eta_\Omega > 0$  telle que :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \eta_\Omega \left[ \|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|v|_{\Gamma_1}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} \right]$$

On raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe une suite  $\{(v_n, z_n), n \in \mathbb{N}\} \subset D(\mathcal{C}_2)$  qui vérifie :

$$\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n \left[ \|v_n - \Delta v_n\|_{L^2(\Omega)} + \|z_n\|_{L^2(\Gamma_1)} \right] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.3.1)$$

La suite  $\{\tilde{v}_n, n \in \mathbb{N}\}$  définie par :

$$\tilde{v}_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est bornée dans  $H^2(\Omega)$  car elle vérifie par définition :

$$\|\tilde{v}_n\|_{H^2(\Omega)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Elle admet donc une sous-suite encore notée  $\{\tilde{v}_n, n \in \mathbb{N}\}$  qui converge pour tout  $0 < s < \frac{1}{2}$  dans  $H^{2-s}(\Omega)$  vers un élément  $\tilde{v} \in V$  car la suite des traces  $\{(\tilde{v}_n)|_{\Gamma_1}, n \in \mathbb{N}\}$  converge

dans  $H^{2-s-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  par continuité vers  $\tilde{v}|_{\Gamma_1}$  et  $\left\{(\tilde{v}_n)|_{\Gamma_0}, n \in \mathbb{N}\right\}$  converge dans  $H^1(\Gamma_1)$  vers 0. La sous-suite  $\{\tilde{v}_n - \Delta\tilde{v}_n, n \in \mathbb{N}\}$  converge, d'après l'hypothèse (4.3.1), vers zéro dans  $L^2(\Omega)$ . Et la suite  $\{\tilde{z}_n, n \in \mathbb{N}\}$  définie par :

$$\tilde{z}_n = \frac{z_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge d'après l'hypothèse (4.3.1) vers zéro dans  $L^2(\Gamma_1)$ . Or  $(v_n, z_n) \in D(\mathcal{C}_2)$  donc :

$$\partial_\nu \tilde{v}_n - \Delta_T \tilde{v}_n + \tilde{z}_n = 0 \quad \text{dans } L^2(\Gamma_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On a donc les convergences :  $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_n - \Delta\tilde{v}_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \partial_\nu \tilde{v}_n - \Delta_T \tilde{v}_n = 0 \quad \text{dans } L^2(\Gamma_1) \end{array} \right\}$  et en multipliant par  $u \in V$  quelconque on obtient :

$$\int_{\Omega} u (\tilde{v}_n - \Delta\tilde{v}_n) dx + \int_{\Gamma_1} u (\partial_\nu \tilde{v}_n - \Delta_T \tilde{v}_n) d\Gamma_1 = 0 \quad \forall u \in V$$

ce qui donne en particulier pour  $u = \tilde{v}_n$  :

$$\int_{\Omega} \tilde{v}_n (\tilde{v}_n - \Delta\tilde{v}_n) dx + \int_{\Gamma_1} \tilde{v}_n (\partial_\nu \tilde{v}_n - \Delta_T \tilde{v}_n) d\Gamma_1 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme  $\{\tilde{v}_n, n \in \mathbb{N}\} \subset H^2(\Omega)$ , on obtient en appliquant la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \left( |\tilde{v}_n|^2 + |\nabla \tilde{v}_n|^2 \right) dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T \tilde{v}_n|^2 d\Gamma_1 = 0 \quad \forall u \in V$$

et on en déduit que  $\tilde{v}_n \longrightarrow 0$  dans  $H^1(\Omega)$  et donc  $\Delta\tilde{v}_n \longrightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$ . Ce qui entraîne

la convergence  $\partial_\nu \tilde{v}_n \longrightarrow 0$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  et par conséquent  $\Delta_T \tilde{v}_n \longrightarrow 0$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .

De l'isomorphisme  $I - \Delta_T : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , vient la convergence  $(\tilde{v}_n)|_{\Gamma_1} \longrightarrow 0$  dans

$H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$ . Or, les deux convergences :  $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_n - \Delta\tilde{v}_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ (\tilde{v}_n)|_{\Gamma_1} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Gamma_1) \end{array} \right\}$  impliquent selon

la proposition 1.17 de la page 55 que la suite  $\{\tilde{v}_n, n \in \mathbb{N}\}$  converge vers 0 dans  $H^2(\Omega)$ . Ce qui

est incompatible avec le fait qu'elle vérifie pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  l'égalité  $\|\tilde{v}_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$ . L'hypothèse (4.3.1) émise au début de la preuve est donc nécessairement éronnée. D'où l'existence d'une constante  $\mathbf{C} > 0$  telle que :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \mathbf{C} \left[ \|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Gamma_1)} \right] \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_2)$$

**Proposition 4.4 :**

$\mathcal{C}_2$  est un opérateur  $m$ -dissipatif sur  $V \times L^2(\Omega)$

**Preuve :** D'après la définition de  $\mathcal{C}_2$ , on a :

$$\left\langle \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \left\langle \begin{pmatrix} \Delta v - (d \cdot \nabla z) \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_2)$$

Selon le produit scalaire de  $V$  et la condition de Ventcel le calcul donne :

$$\left\langle \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} (d \cdot \nabla z) z \cdot dx - \int_{\Gamma_1} |z|^2 d\Gamma_1 \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_2)$$

Or d'après une formule de Green, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\Gamma_1} u v \nu_i d\Gamma_1 \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega) \quad (4.4.1)$$

où  $\nu_i$  représente la  $i$ -ème composante du vecteur normale unitaire  $\nu$  extérieur à  $\Omega$ . La formule de dérivation du produit donne :

$$d_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + z \frac{\partial d_i}{\partial x_i} = \frac{\partial (z d_i)}{\partial x_i} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

En appliquant la formule (4.4.1) à  $(v d_i)$  et à  $u$  on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (v d_i)}{\partial x_i} u \cdot dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} (v d_i) \cdot dx + \int_{\Gamma_1} u (v d_i) \nu_i \cdot d\Gamma_1 \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega)$$



c'est à dire :

$$\int_{\Omega} \left[ d_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \right] u \cdot dx = - \int_{\Omega} d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \cdot dx + \int_{\Gamma_1} uv \cdot d_i \nu_i \cdot d\Gamma_1 \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega)$$

Et par définition de  $\operatorname{div}(d)$  et en sommant sur  $i \in \{1, 2, 3\}$  on a :

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} d_i \frac{\partial v}{\partial x_i} u \cdot dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(d) uv \cdot dx - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \cdot dx + \int_{\Gamma_1} uv \cdot (d \cdot \nu) \cdot d\Gamma_1 \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega)$$

d'où en général :

$$\int_{\Omega} u (d \cdot \nabla v) \cdot dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(d) uv \cdot dx - \int_{\Omega} v (d \cdot \nabla u) \cdot dx + \int_{\Gamma_1} (d \cdot \nu) uv \cdot d\Gamma_1 \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega) \quad (4.4.2)$$

et en particulier :

$$\int_{\Omega} z (d \cdot \nabla z) \cdot dx = \frac{-1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(d) |z|^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} d \cdot \nu \cdot |z|^2 \cdot d\Gamma_1 \quad \forall z \in H^1(\Omega) \quad (4.4.3)$$

Donc :

$$\left\langle \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(d) \cdot |z|^2 \cdot dx - \int_{\Gamma_1} |z|^2 \left[ \frac{1}{2} d \cdot \nu + 1 \right] \cdot d\Gamma_1 \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_2)$$

Comme  $d \cdot \nu \geq -2$  et  $\operatorname{div}(d) \leq 0$ , on obtient :

$$\left\langle \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)} \leq 0 \quad \forall (v, z) \in D(\mathcal{C}_2)$$

L'opérateur  $\mathcal{C}_2$  est donc dissipatif. Il reste à montrer qu'il est m-dissipatif en montrant que

l'opérateur  $I - \mathcal{C}_2 : D(\mathcal{C}_2) \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$  est surjectif. Ce qui revient à montrer que pour

tout  $(w, f) \in V \times L^2(\Omega)$  il existe  $(v, z) \in D(\mathcal{C}_2)$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v - z = w \\ z + A_2 v + B_2 z = f \end{array} \right\}$$

Soit  $(w, f) \in V \times L^2(\Omega)$ . Il s'agira de résoudre le problème  $\pi_2$  qui consiste à trouver  $v \in V \cap H^2(\Omega)$  vérifiant :

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{ll} \Delta v \in L^2(\Omega) & \text{dans } \Omega \quad (4.4.i) \\ v - \Delta v + d.\nabla v = f + w + d.\nabla w & \text{dans } \Omega \quad (4.4.ii) \\ \partial_\nu v - \nabla_{\Gamma} v + v = w & \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \quad (4.4.iii) \end{array} \right\}$$

On donne une formulation variationnelle du problème  $\pi_2$ . On écrit d'abord :

$$\int_{\Omega} u(d.\nabla v)dx = \int_{\Omega} [u(d.\nabla v) - v(d.\nabla u)] dx + \int_{\Omega} v(d.\nabla u)dx$$

on obtient, pour tout  $(u, v) \in V \times V$ , d'après la formule (4.4.2) :

$$\int_{\Omega} u(d.\nabla v)dx = \int_{\Omega} [u(d.\nabla v) - v(d.\nabla u)] dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(d)uv dx - \int_{\Omega} u(d.\nabla v)dx + \int_{\Gamma_1} (d.\nu).uv d\Gamma_1 \quad (4.4.4)$$

Donc pour tout  $(u, v) \in V \times V$ , on a d'après (4.4.4) :

$$\int_{\Omega} u(d.\nabla v)dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u(d.\nabla v) - v(d.\nabla u)] dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(d)uv dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (d.\nu).uv d\Gamma_1$$

L'équation (4.4.ii) dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  équivaut à :

$$\int_{\Omega} (v - \Delta v + d.\nabla v) \varphi dx = \int_{\Omega} (w + f + d.\nabla w)u dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Et l'équation (4.4.iii) équivaut dans  $L^2(\Gamma_1)$  à :

$$\langle \partial_\nu v - \Delta_{\Gamma} v + v, u \rangle_{L^2(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} wud\Gamma_1 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Gamma_1)$$

On considère, à partir de là, la forme bilinéaire continue  $\mathcal{F}_2 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\mathcal{F}_2(v, u) = \int_{\Omega} \left( \frac{2 - \operatorname{div}(d)}{2} uv + \nabla v \nabla u + \frac{u(d.\nabla v) - v(d.\nabla u)}{2} \right) dx + \int_{\Gamma_1} \left( \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} v + \frac{2 + (d.\nu)}{2} uv \right) d\Gamma_1$$

Elle est continue car l'application trace  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma_1)$  est continue et d'après l'inégalité de Poincaré telle que formulée dans la proposition 1.15 en page 52 et la remarque 4.1 faite en page 157 il existe une constante positive  $c > 0$  telle que :

$$|\mathcal{F}_2(v, u)| \leq c^2 \left( \int_{\Omega} \nabla u \nabla v . dx + \int_{\Omega} \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} v . d\Gamma_1 \right) \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

Ce qui implique par définition de la norme  $\|\cdot\|_V$  que :  $|\mathcal{F}_2(v, u)| \leq c^2 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V$ . C'est à dire que  $\mathcal{F}_2$  est continue. Elle est coercivité car pour tout  $u \in V$  on a :

$$\mathcal{F}_2(u, u) = \left[ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right] + \frac{2 - \text{div}(d)}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} [2 + d.v] \|u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \geq \|u\|_V^2$$

On considère ensuite la forme linéaire continue :  $\mathcal{L}_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\mathcal{L}_2(u) = \int_{\Omega} (w + f + (d.\nabla w)) u dx + \int_{\Gamma_1} w u d\Gamma_1$$

Et on applique le théorème de Lax-Milgram. Il existe alors un seul élément  $v \in V$  vérifiant

$$\mathcal{F}_2(u, v) = \mathcal{L}_2(u) \quad \forall u \in V \quad (4.4.5)$$

Avec l'égalité (4.4.4), et par définition de  $\mathcal{F}_2$  et de  $\mathcal{L}_2$ , la conclusion (4.4.5) équivaut à :

$$\int_{\Omega} (v - \Delta v + d.\nabla v) u . dx + \langle \partial_{\nu} v - \Delta_{\Gamma} v + v, u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Omega} (w + f + (d.\nabla w)) u dx + \int_{\Gamma_1} w u d\Gamma_1$$

Et en particulier :

$$\int_{\Omega} (v - \Delta v + d.\nabla v) \varphi . dx = \int_{\Omega} (w + f + d.\nabla w) u . dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$$

On en déduit dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'égalité :  $v - \Delta v + (d.\nabla v) = w + f + (d.\nabla w)$ . Autrement dit l'équation (4.4.ii) est satisfaite. Et comme  $(d.\nabla v) \in L^2(\Omega)$  et  $(d.\nabla w) \in L^2(\Omega)$  d'après la remarque 4.1 de la page 157, on en déduit donc que  $\Delta v \in L^2(\Omega)$ . C'est à dire que l'équation

(4.3.i) est vérifiée. Et en en tenant compte, l'égalité :

$$\int_{\Omega} (v - \Delta v + d \cdot \nabla v) u \, dx + \langle \partial_{\nu} v - \Delta_{\Gamma} v + v, u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Omega} (w + f + d \cdot \nabla w) u \, dx + \int_{\Gamma_1} w u \, d\Gamma_1$$

implique pour tout  $v \in V$  immédiatement que  $\partial_{\nu} v - \Delta_{\Gamma} v + v = w$  dans  $L^2(\Gamma_1)$ . Pour terminer, notons que la condition de Ventcel donne  $\Delta_{\Gamma} v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  ce qui entraîne que  $v \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$  et comme  $\Delta v \in L^2(\Omega)$  et  $v \in V \subset H^1(\Omega)$  on en déduit que  $v \in H^2(\Omega)$ . Par conséquent,  $\partial_{\nu} v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  ce qui signifie que l'égalité  $\partial_{\nu} v - \Delta_{\Gamma} v + z = 0$  reste valable dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  donc  $\Delta_{\Gamma} v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . D'où  $(v)_{|\Gamma_1} \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_1)$  c'est à dire que  $(v, v - w) \in D(\mathcal{C}_2)$ . En conclusion : le problème  $\pi_2$  est résolu et ceci prouve que l'opérateur  $\mathcal{C}_2$  est m-dissipatif.

## IV.2 - Existence, unicité et régularité des solutions du Problème $\mathcal{P}_2$ :

### Théorème 4.1 : Existence, unicité et régularité de la solution

$\forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  il existe une fonction  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$  solution

faible unique du problème  $\mathcal{P}_2$  qui vérifie les équations :

$$\mathcal{P}_2 : \left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = -(d \cdot \nabla u') & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (4.0.1) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \quad (4.0.2) \\ \partial_{\nu} u - \Delta_{\Gamma} u + u' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \quad (4.0.3) \\ u(0) = u^0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \quad (4.0.4) \end{array} \right.$$

et l'inégalité :

$$\|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+, V)} + \|u'\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} \left( \|u^0\|_V + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (4.0.i)$$

Si, de plus,  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_2)$ , le problème  $\mathcal{P}_2$  admet une solution forte unique telle que

$$(u, u', u'') \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \quad (4.0.ii)$$

qui vérifie pour  $\mathcal{K} > 0$  assez grand :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))} + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} \leq \mathcal{K} \left( \|u^0\|_{H^2(\Omega)} + \|u^1\|_V \right) \quad (4.0.iii)$$

**Démonstration** : Soit  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_2)$ . La norme  $\|\cdot\|_{D(\mathcal{C}_2)}$  étant d'après (4.2.b) explicitement définie par :

$$\|(v, z)\|_{D(\mathcal{C}_2)} = \left( \|v\|_V^2 + \|z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z\|_V^2 + \|\Delta v - (d.\nabla z)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'opérateur  $\mathcal{C}_2$  est m-dissipatif sur l'espace de Hilbert  $V \times L^2(\Omega)$ . Il existe selon le théorème de Hille Yosida une fonction  $(v, z) \in \mathcal{C}^1[\mathbb{R}_+, V \times L^2(\Omega)] \cap \mathcal{C}^0[\mathbb{R}_+, D(\mathcal{C}_2)]$  solution unique du problème de Cauchy  $P_{\mathcal{C}_2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} (t) &= \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0 \\ \begin{pmatrix} v(0) \\ z(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui vérifie de plus, pour tout  $t \geq 0$  les inégalités :

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} &\leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \\ \left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ \Delta v(t) - (d.\nabla z)(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} &\leq \left\| \begin{pmatrix} u^1 \\ \Delta u^0 - (d.\nabla u^1) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

En posant  $u = v$  on a  $z = u'$  et donc  $z' = u''$ . La fonction  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{C}_2))$  est alors la solution forte unique du problème  $\mathcal{P}_2$ . Elle vérifie donc les équations (4.0.2), (4.0.3) et (4.0.4) et d'après (4.2.b) elle vérifie l'équation (4.0.1). La solution vérifie d'autre part les inégalités :

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u^0\|_V^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \geq 0 \\ \|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u^1\|_V^2 + \|\Delta u^0 - d.\nabla u^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\|u(t)\|_V + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \left( \|u^0\|_V + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad \forall t \geq 0$$

L'inégalité (4.0.i) est donc vérifiée. Montrons les propriétés (4.0.ii) de continuité. On a :

$$(u, u') \in \mathcal{C}^1 [\mathbb{R}_+, V \times L^2(\Omega)] \implies (u, u', u'') \in \mathcal{C}^0 [\mathbb{R}_+, V \times V \times L^2(\Omega)]$$

Il reste à montrer que la solution est continue pour la norme  $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ . Il suffira pour cela de montrer que dans  $D(\mathcal{C}_2)$  les normes :  $(v, z) \mapsto \left( \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|z\|_V^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  et  $\|(v, z)\|_{D(\mathcal{C}_2)}$  sont équivalentes puisque  $(u, u') \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{C}_2))$ . On a par inégalité triangulaire :

$$\|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} \leq \left( \|\Delta v - (d \cdot \nabla z)\|_{L^2(\Omega)} + \|(d \cdot \nabla z)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

Ce qui implique, d'après la remarque 4.1 faite en page 157, et l'inégalité de Poincaré de la proposition 1.15 de la page 52 qu'il existe deux constantes positives  $c_1(\Omega) > 0$  et  $\delta(d, \Omega) > 0$  telles qu'en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left( \|\Delta v - (d \cdot \nabla z)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\delta(d, \Omega)^2 \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_1(\Omega)^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (4.1.a)$$

On montre, d'autre part, grâce à la continuité de l'application trace, à l'inégalité de Poincaré de la proposition 1.15 et à la remarque 4.1, qu'il existe deux constantes  $c_1(\Omega) > 0$  et  $\gamma_\Omega > 0$  telles que :

$$\|z\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq \gamma_\Omega^2 (c_1(\Omega)^2 + 1) \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.1.b)$$

On additionne membre à membre (4.1.a) et (4.1.b) et on obtient pour  $\mathbf{K}_1 > 0$  assez grand :

$$\frac{1}{2} \left( \|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Gamma_1)} \right)^2 \leq \mathbf{K}_1 \left( \|\Delta v - (d \cdot \nabla z)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

ce qui signifie, d'après la proposition 4.3 établie en page 162 et par définition de la norme de  $D(\mathcal{C}_2)$  qu'il existe une constante positive  $\beta > 0$  telle :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|z\|_V^2 \leq \beta \|(v, z)\|_{D(\mathcal{C}_2)}$$

Réciproquement, par définition de la norme de  $D(\mathcal{C}_2)$  on a :

$$\|(v, z)\|_{D(\mathcal{C}_2)}^2 = \left( \|v\|_V^2 + \|z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z\|_V^2 + \|\Delta v - d\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

Donc (selon l'inégalité de cauchy-Schwarz) on obtient par définition de la norme de  $V$  :

$$\|(v, z)\|_{D(\mathcal{C}_2)}^2 \leq \left( \|\nabla_{\text{T}} v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + (c_1(\Omega)^2 + 2\delta(d, \Omega)^2 + 1) \|z\|_V^2$$

L'application trace  $H^2(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$  et l'injection  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \longrightarrow H^1(\Gamma_1)$  étant continues,

il existe nécessairement une constante positive assez grande  $\alpha > 0$  telle que :

$$\|(v, z)\|_{D(\mathcal{C}_2)}^2 \leq \alpha \left( \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|z\|_V^2 \right)$$

D'où l'équivalence des normes :

$$\frac{1}{\alpha} \|(v, z)\|_{D(\mathcal{C}_2)}^2 \leq \left( \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|z\|_V^2 \right) \leq \beta \|(v, z)\|_{D(\mathcal{C}_2)}$$

dont découle la continuité :

$$u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))$$

On montre pour terminer l'inégalité :

$$\left( \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))} + \|u'(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} \right) \leq \mathcal{K} \left( \|u^0\|_{H^2(\Omega)} + \|u^1\|_V \right)$$

Pour tout  $t \geq 0$ , on a :  $\|u(t), u'(t)\|_{D(\mathcal{C}_2)}^2 \leq \|(u^0, u^1)\|_{D(\mathcal{C}_2)}^2 \quad \forall t \geq 0$ . Ce qui implique d'après

l'équivalence des normes établie plus haut que :

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u'(t)\|_V^2 \leq \alpha \|u(t), u'(t)\|_{D(\mathcal{C}_2)}^2 \leq \alpha \|(u^0, u^1)\|_{D(\mathcal{C}_2)}^2 \leq \alpha \beta \left( \|u^0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u^1\|_V^2 \right) \quad \forall t \geq 0$$

D'où pour  $\mathcal{K} \geq \sqrt{2\alpha\beta}$  l'inégalité :

$$\left( \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))} + \|u'(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} \right) \leq \mathcal{K} \left( \|u^0\|_{H^2(\Omega)} + \|u^1\|_V \right)$$

La solution faible du problème

Elle est définie par  $\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = S_2(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}$  où  $(S_2(t))_{t \geq 0}$  est le semi-groupe de contractions engendré par  $\mathcal{C}_2$  sur  $V \times L^2(\Omega)$ . Elle vérifie :

$$u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$$

et :

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0$$

C'est à dire :

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V)} + \|u'(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} \left( \|u^0\|_V + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

### IV.3 - Stabilisation forte du problème $\mathcal{P}_2$

Soit  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_2)$  et  $u$  la solution forte du problème  $\mathcal{P}_2$ . On définit l'énergie de la solution par :

$$E(u, t) = \frac{1}{2} \left\| S_2(t) \cdot \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2$$

C'est à dire :

$$E(u, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u'|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\text{T}} u|^2 . d\Gamma_1 \quad (4.5.0)$$



**Proposition 4.5 :**

Si  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_2)$ , alors la fonction  $E(u, \cdot)$  est partout dérivable sur  $[0, +\infty[$  et

$$\frac{dE(u, t)}{dt}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(d) |u'(t)|^2 dx - \int_{\Gamma_1} \left[ 1 + \frac{1}{2} \langle d, \nu \rangle \right] |u'(t)|^2 d\Gamma_1$$

**Preuve :** On sait d'après le Théorème 4.1 que la fonction  $(u, u') : \mathbb{R}_+ \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$ , solution du problème  $\mathcal{P}_2$ , est continûment dérivable sur  $[0, +\infty[$  et que sa dérivée est définie par :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$$

Par définition de  $E(u, t)$  on a :

$$\frac{dE(u, t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \left\langle \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)}$$

Donc :

$$\frac{dE(u, t)}{dt} = \left\langle \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u'(t) \\ \Delta u(t) - (d \cdot \nabla u'(t)) \end{pmatrix} \right\rangle_{V \times L^2(\Omega)}$$

On développe selon la définition du produit scalaire de  $V \times L^2(\Omega)$  et on obtient :

$$\frac{dE(u, t)}{dt} = \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla u'(t) dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} u(t) \nabla_{\Gamma} u'(t) d\Gamma_1 + \int_{\Omega} u'(t) (\Delta u(t) - (d \cdot \nabla u'(t))) dx \quad \forall t \geq 0$$

On utilise la formule de Green et la condition de Ventcel  $\partial_{\nu} u - \Delta_{\Gamma} u + u' = 0$  et on obtient

$$\frac{dE(u, t)}{dt} = - \int_{\Gamma_1} |u'(t)|^2 d\Gamma_1 - \int_{\Omega} u'(t) (d \cdot \nabla u'(t)) dx \quad \forall t \geq 0$$

Or, en appliquant à  $u'(t)$  la formule (4.4.3) établie en page 166 on obtient :

$$\int_{\Omega} \langle d \cdot \nabla u'(t), u'(t) \rangle_{\mathbb{R}^2} \cdot dx = \frac{-1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(d) |u'(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \langle d, n \rangle_{\mathbb{R}^2} |u'(t)|^2 d\Gamma_1$$

D'où :

$$\frac{dE(u, t)}{dt}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(d) |u'(t)|^2 dx - \int_{\Gamma_1} \left[ 1 + \frac{1}{2} \langle d, n \rangle_{\mathbb{R}^2} \right] |u'(t)|^2 d\Gamma_1$$

### Théorème 4.2 : (Stabilité forte)

Le semi-groupe  $S_2(t)_{t \geq 0}$  engendré par  $\mathcal{C}_2$  est fortement stable :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| (S_2(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}) \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$$

**Démonstration** : Soit  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_2)$ . La trajectoire  $\left\{ S_2(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0 \right\}$  est, d'après le théorème 4.1, bornée dans  $H^2(\Omega) \times V$ . L'injection :  $H^2(\Omega) \hookrightarrow V$  est compacte car les injections  $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$  et  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow H^1(\Gamma_1)$  sont compactes et l'application trace  $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$  est continue. L'injection  $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est compacte, car  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  l'est. L'ensemble  $\left\{ S_2(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0 \right\}$  est donc relativement compact dans  $V \times L^2(\Omega)$ . On applique le Principe d'invariance de LaSalle à la fonction de Liapounov  $\Phi : V \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui à tout  $(v, z)$  associe  $\Phi(v, z) = \|(v, z)\|_{V \times L^2(\Omega)}^2$  et on en déduit qu'il existe une constante réelle  $l \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| S_2(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = l \quad (4.2.a)$$

$$\left\| S_2(t) \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \left\| \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = l \quad \forall \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \omega \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall t \geq 0 \quad (4.2.a)$$

La trajectoire  $\left\{ S_2(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, t \geq 0 \right\}$  étant relativement compacte dans  $V \times L^2(\Omega)$ , il existe une suite  $\{t_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$  strictement croissante qui tend vers  $+\infty$  et telle que la suite  $\left\{ S_2(t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N} \right\}$  converge dans  $V \times L^2(\Omega)$ . Soit  $(v^0, v^1)$  sa limite. Elle appartient par définition à l'ensemble  $\omega$ -limite de  $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}$ . Et d'après (4.2.a) on a alors :

$$\left\| S_2(t) \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = \left\| \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 = l \quad \forall t \geq 0 \quad (4.2.c)$$

Or, par continuité de  $S_2(t)_{t \geq 0}$  la convergence  $S_2(t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix}$  dans  $V \times L^2(\Omega)$  entraîne pour tout  $t \geq 0$  la convergence :  $S_2(t + t_n) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \rightarrow S_2(t) \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix}$ . La suite

$\{t \mapsto u(t + t_n), n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, V)$  converge dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, V)$  vers une fonction  $v_0$  telle que :  $v_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, V) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$  et la suite  $\{t \mapsto u'(t + t_n), n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$  converge dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$  vers  $v'_0$ . Donc  $\begin{pmatrix} v_0(t) \\ v'_0(t) \end{pmatrix} = S_2(t) \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix}, \forall t \geq 0$ . La fonction  $t \mapsto v_0(t)$  est la solution faible du problème pour les conditions initiales  $v_0(0) = v^0$  et  $v'_0(0) = v^1$  et vérifie donc les équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v''_0(t) - \Delta v_0 = -d \cdot \nabla v'_0(t) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ v_0(t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu v_0(t) - \Delta_\Gamma v_0(t) + v'_0(t) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ v_0(0) = v^0 \quad \text{et} \quad v'_0(0) = v^1 \end{array} \right.$$

Et par ailleurs  $v_0(t)$  est une constante par rapport à  $t$  puisque :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u(t + t_n) \\ u'(t + t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix}$$

Donc  $v_0(t) = v_0(0) = v^0$  et  $v'_0(t) = v'_0(0) = v^1 = 0 \quad \forall t \geq 0$ . Et cela implique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_\nu v_0 - \Delta_\Gamma v_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ v_0(0) = v^0 \quad \text{et} \quad v'_0(0) = v^1 \end{array} \right.$$

On en déduit que  $v^1 = v^0 = 0$ . Et d'après (4.2.a) et (4.2.c) cela montre que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| (S_2(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}) \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_2)$$

Le résultat se généralise par densité à tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  grâce à la proposition 1.21

démontrée en page 59. D'où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| (S_2(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}) \right\|_{V \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall (u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$$

## IV.4 - Stabilisation exponentielle du Problème $P_2$

Soit  $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_2)$  et  $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow H^2(\Omega) \cap V$  la solution forte du problème  $\mathcal{P}_2$ .

La quantité  $E(u, t)$  exprime l'énergie de la solution telle que définie en page 173 dans la proposition 4.5. On pose pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$E_\varepsilon(u, t) = E(u, t) + \varepsilon \int_{\Omega} [u(d \cdot \nabla u) + uu'] dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \quad (4.6.0)$$

**Proposition 4.6 :** On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} &= -\varepsilon \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} u|^2 d\Gamma_1 \right) + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \operatorname{div}(d) + \varepsilon \right) |u'|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (2 + d \cdot \nu) \cdot |u'|^2 d\Gamma_1 + \varepsilon \int_{\Omega} [u'(d \cdot \nabla u)] dx \end{aligned}$$

**Preuve :** On obtient à partir de la proposition 4.5 de la page 173 :

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} \operatorname{div}(d) |u'|^2 dx - \int_{\Gamma_1} (2 + d \cdot \nu) \cdot |u'|^2 d\Gamma_1 \right) \quad (4.6.1)$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} [u(d \cdot \nabla u) + uu'] dx \right) = \int_{\Omega} [u(d' \cdot \nabla u) + u'(d \cdot \nabla u) + u(d \cdot \nabla u') + uu'' + |u'|^2] dx$$

Mais  $\frac{d}{dt}(d) = 0$  car la fonction  $d$  ne dépend pas de la variable  $t$ . Donc :

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} [u(d \cdot \nabla u) + uu'] dx \right] = \int_{\Omega} (u'(d \cdot \nabla u) + u(d \cdot \nabla u') + uu'' + |u'|^2) dx$$

La solution  $u$  vérifie l'équation (4.01) c'est à dire :  $u'' - \Delta u = -d \cdot \nabla u'$  et donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} (u(d \cdot \nabla u) + uu') dx \right) = \int_{\Omega} (u'(d \cdot \nabla u) + u \Delta u + |u'|^2) dx$$

On applique ensuite à ce résultat la formule de Green en tenant compte de la condition de

Ventcel :  $\partial_\nu u - \Delta_{\Gamma} u + u' = 0$  dans  $L^2(\Gamma_1) \times \mathbb{R}_+$  et on obtient l'égalité :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u(d \cdot \nabla u) + uu') dx = - \int_{\Gamma_1} (|\nabla_{\Gamma} u|^2 + uu') d\Gamma_1 + \int_{\Omega} (-|\nabla u|^2 + u'(d \cdot \nabla u) + |u'|^2) dx \quad (4.6.2)$$

On a d'autre part :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \right] = \int_{\Gamma_1} uu' d\Gamma_1 \quad (4.6.3)$$

On additionne membre à membre l'égalité (4.6.1) et les égalités (4.6.2) et (4.6.3) multipliées par  $\varepsilon$  et on établit le résultat.

**Proposition 4.7 :**

Il existe une constante positive  $\alpha_2 > 0$  indépendante de  $(u^0, u^1)$  telle que :

$$(1 - \varepsilon\alpha_2)E(u, t) \leq E_\varepsilon(u, t) \leq (1 + \varepsilon\alpha_2)E(u, t) \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \quad (4.7.0)$$

**Preuve :** On rappelle la définition de  $E_\varepsilon(u, t)$  :

$$E_\varepsilon(u, t) = E(u, t) + \varepsilon \int_{\Omega} [u(d \cdot \nabla u) + uu'] dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0$$

D'après la remarque 4.1 faite en page 157 et la proposition 1.15 de la page 52 en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\varepsilon \left| \int_{\Omega} u(t)(d \cdot \nabla u(t)) dx \right| \leq \varepsilon c_1(\Omega) \delta(d, \Omega) \cdot \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \quad (4.7.1)$$

où  $\delta(d, \Omega)$  et  $c_1(\Omega)$  sont de constante positives déjà citées. Et d'autre part, on a aussi :

$$\left| \varepsilon \int_{\Omega} u(t)u'(t) dx \right| \leq \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left[ \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \right] \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0$$

car le produit de deux réels positifs est inférieur à demi-somme de carrés. Donc :

$$\left| \varepsilon \int_{\Omega} u(t)u'(t) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left[ c_1(\Omega)^2 \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \right] \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \quad (4.7.2)$$

L'application trace  $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$  étant continue, il existe  $\beta_{\Gamma_1} > 0$  tel que :

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \leq \frac{\varepsilon \beta_{\Gamma_1} (1 + c_1(\Omega)^2)}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \quad (4.7.3)$$

On additionne membre à membre les inégalités (4.7.1), (4.7.2) et (4.7.3) et on obtient, pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon \int_{\Omega} [u(d.\nabla u) + uu'] dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \left( c_1(\Omega) [c_1(\Omega) + 2\delta(d, \Omega)] + \beta_{\Gamma_1} (1 + c_1(\Omega)^2) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx \right) \end{aligned}$$

Il suffira ensuite de prendre :

$$\alpha_2 > \frac{1}{2} \text{Max} \{ c_1(\Omega) [c_1(\Omega) + 2\delta(d, \Omega)] + \beta_{\Gamma_1} (1 + c_1(\Omega)^2), 1 \}$$

pour en déduire alors d'après la définition formulée en page 173 de  $E(u, t)$  que :

$$-\varepsilon \alpha_2 E(u, t) \leq \varepsilon \int_{\Omega} [u(d.\nabla u) + uu'] dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \leq \varepsilon \alpha_2 E(u, t) \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0$$

Il en résulte pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  que :

$$(1 - \varepsilon \alpha_2) E(u, t) \leq E(u, t) + \varepsilon \int_{\Omega} [u(d.\nabla u) + uu'] dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \leq (1 + \varepsilon \alpha_2) E(u, t)$$

D'où, par définition de  $E_\varepsilon(u, t)$  :

$$(1 - \varepsilon \alpha_2) E(u, t) \leq E_\varepsilon(u, t) \leq (1 + \varepsilon \alpha_2) E(u, t) \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0$$

**Proposition 4.8 :**

Il existe une constante  $\delta_1 > 0$  telle que pour tout  $0 < \varepsilon < \delta_1$  on a :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{d}{dt} E_\varepsilon(u, t) \leq -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (2 + d.\nu) \cdot |u'|^2 d\Gamma_1 < 0 \quad \forall t \geq 0$$

**Preuve :** Par définition de  $E_\varepsilon(u, t)$ , on a :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) = \varepsilon^2 E(u, t) + \varepsilon^3 \int_{\Omega} [u(d.\nabla u) + uu'] dx + \frac{\varepsilon^3}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1$$

Et d'après le calcul de la dérivée établi dans la proposition 4.6 (page 176) on a pour tout

$\varepsilon > 0$  et pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} &= -\varepsilon \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \cdot dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\mathbb{T}} u|^2 d\Gamma_1 \right] + \int_{\Omega} \left( \frac{\operatorname{div}(d)}{2} + \varepsilon \right) |u'|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (2 + d \cdot \nu) |u'|^2 d\Gamma_1 + \varepsilon \int_{\Omega} [u'(d \cdot \nabla u)] dx \end{aligned}$$

La somme  $\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt}$  vaut donc, en fonction de  $\varepsilon$  et de  $u(t)$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} &= \left( \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon^2 + \operatorname{div}(d) + 2\varepsilon}{2} \right) |u'|^2 dx + \\ &\quad + \left( \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\mathbb{T}} u|^2 d\Gamma_1 + \varepsilon^3 \int_{\Omega} [u(d \cdot \nabla u) + uu'] dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon^3}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} \left[ 1 + \frac{1}{2} \langle d, \nu \rangle_{\mathbb{R}^2} \right] |u'|^2 d\Gamma_1 + \varepsilon \int_{\Omega} [u'(d \cdot \nabla u)] dx \end{aligned} \tag{4.8.1}$$

Or, d'après un résultat prouvé en page 178 il existe une constante  $\alpha_2 > 0$  telle que :

$$\left| \varepsilon^3 \int_{\Omega} [u(d \cdot \nabla u) + uu'] dx + \frac{\varepsilon^3}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \right| \leq \alpha_2 \varepsilon^3 \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u'|^2 dx \right)$$

D'autre part les hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  émises en page 157 et en remarquant que :

$$\varepsilon \int_{\Omega} [u'(d \cdot \nabla u)] dx \leq \varepsilon \delta(d, \Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u'\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \delta(d, \Omega)^2 \cdot |u'|^2 dx \right]$$

l'égalité (4.8.1) entraîne alors pour tout  $t \geq 0$  pour tout  $\varepsilon > 0$  l'inégalité :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} &\leq \int_{\Omega} \left( \frac{2\alpha_2 \varepsilon^3 + \varepsilon^2 - \varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{2\alpha_2 \varepsilon^3 + \varepsilon^2 - C_0 + \varepsilon[\delta(d, \Omega)^2 + 2]}{2} |u'|^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon(\varepsilon - 2)}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\mathbb{T}} u|^2 d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} \left( \frac{2 + d \cdot \nu}{2} \right) |u'|^2 d\Gamma_1 \end{aligned}$$

Comme  $d \cdot \nu \geq -2$  on obtient finalement pour  $\delta_1 > 0$  assez petit :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{d}{dt} E_\varepsilon(u, t) \leq -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (2 + d \cdot \nu) \cdot |u'|^2 d\Gamma_1 \leq 0 \quad \forall \varepsilon \in ]0, \delta_1]$$

**Théorème 4.3 :** ( Stabilité exponentielle )

Il existe deux constantes positives  $M_2 > 0$  et  $\omega_2 > 0$  telles que :

$$\|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(V \times L^2(\Omega))} \leq M_2 \cdot e^{-\omega_2 t} \quad \forall t \geq 0$$

**Démonstration :** D'après la proposition 4.8 de la page 178, on a :

$$\varepsilon^2 E_\varepsilon(u, t) + \frac{d}{dt} E_\varepsilon(u, t) < - \int_{\Gamma_1} \left[ 1 + \frac{1}{2} \langle d, n \rangle_{\mathbb{R}^2} \right] |u'|^2 d\Gamma_1 < 0 \quad \forall \varepsilon \in ]0, \delta_1]$$

Donc :

$$\frac{dE_\varepsilon(u, t)}{dt} E_\varepsilon(u, t)^{-1} < -\varepsilon^2 \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon \in ]0, \delta_1]$$

En intégrant entre 0 et  $t$  on obtient :  $E_\varepsilon(u, t) < E_\varepsilon(u, 0) \cdot e^{-\varepsilon^2 t}$  pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $\varepsilon \in ]0, \delta_1]$ . Ce qui implique d'après la proposition 4.7 de la page 177 que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \delta_1]$

on a :

$$(1 - \varepsilon\alpha_2)E(u, t) \leq E_\varepsilon(u, t) < E_\varepsilon(u, 0)e^{-\varepsilon^2 t} \leq (1 + \varepsilon\alpha_2)E(u, 0)e^{-\varepsilon^2 t} \quad \forall t \geq 0$$

Donc :

$$E(u, t) \leq \left( \frac{1 + \varepsilon\alpha_2}{1 - \varepsilon\alpha_2} E(u, 0) \right) e^{-\varepsilon^2 t} \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon \in ]0, \delta_1]$$

D'où pour  $\varepsilon \in ]0, \delta_1]$  :

$$\left\| S_2(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \leq \left( \frac{1 + \varepsilon\alpha_2}{1 - \varepsilon\alpha_2} \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \right) e^{-\varepsilon^2 t} \quad \forall (u^0, u^1) \in D(\mathcal{C}_2) \text{ et } \forall t \geq 0$$

Ce résultat reste valable dans  $V \times L^2(\Omega)$  car  $D(\mathcal{C}_2)$  est dense dans  $V \times L^2(\Omega)$ . D'où :

$$\|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(V \times L^2(\Omega))} \leq M_2 \cdot e^{-\omega_2 t} \quad \forall t \geq 0$$

pour  $M_2 \geq \sqrt{(1 + \varepsilon\alpha_2)(1 - \varepsilon\alpha_2)^{-1}}$  et  $\omega_2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2$ . Ce qui achève la preuve du théorème 4.3.



## Conclusion :

En conclusion, on peut affirmer que le feedback naturel est insuffisant pour assurer une décroissance exponentielle de l'énergie mais qu'il permet, au moins dans l'exemple étudié, une stabilisation forte de l'équation des ondes. On peut cependant obtenir une stabilisation exponentielle de l'équation par un contrôle interne. On a vu qu'on peut également stabiliser l'équation des ondes avec un contrôle interne convectif. Nous n'avons pas étudié la possibilité d'obtenir une stabilisation exponentielle avec un contrôle frontière et nous n'avons pas abordé le problème de l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel de type évolutif.

# Bibliography

- [1] **M. Berger B.Gostiaux.** Géométrie différentielle. Variétés, courbes et surfaces. PUF
- [2] **N. Boccara,** Analyse fonctionnelle (une introduction pour physiciens). Ellipses. 1984.
- [3] **H. Brezis,** Analyse fonctionnelle. (Théorie et applications). Masson, Paris New, York  
Barcelone, Milan Sao, Paulo, 1983.
- [4] **H. Cartan,** Cours de calcul différentiel. Hermann. Paris.
- [5] **J. Dieudonné,** Eléments d'analyse. Tome III. Cahiers scientifiques - Fascicule XXXIII.  
Publiés sous la direction de Gaston Julia. Gauthiers-Villars. Paris 1978.
- [6] **A. Haraux,** Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Masson. Paris Milan  
Barcelone Bonn. 1991
- [7] **A. Heminna,** Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel, C.R.Acad. Sci. Paris,  
328, série I (1999). 1171-1174
- [8] **A. Heminna,** Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de divers problèmes aux  
limites modélisant des jonctions de multi structures, thèse, U.S.T.H.B, Alger .2000

- [9] **A. Heminna**, Stabilisation frontière de l'équation des ondes avec conditions de Ventcel. Revue Maghrébine de Mathématiques. Rev, Vol 11, No2, (2002) pp 165-196.
- [10] **A. Khemmoudj**, Stabilisation de quelques Problèmes aux limites non linéaires. Thèse, USTHB, Alger 2007
- [11] **Vo-Khac Khoan**, Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles. Tome I. Vuibert. Paris 1972
- [12] **Vo-Khac Khoan**, Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles. Tome II. Vuibert. Paris 1972.
- [13] **K. Lemrabet**, Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers. Thèse, USTHB, Alger. 1987.
- [14] **J.L. Lions - E. Magenes**, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. volume I. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1972.
- [15] **P.A. RAVIART - J.M. THOMAS**, Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivée Partielles. Masson. Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo, 1983.
- [16] **W. Rudin**, Analyese réelle et complexe. Masson. 1978
- [17] **S. Saks - A. Zygmund**, Fonctions analytiques. Masson. Paris. 1970.
- [18] **L. Schwartz**, Théorie des distributions. Hermann. 1966
- [19] **Riesz-Nagy**, Leçons d'Analyse fonctionnelle. Budapest. Akad. Kiado. 1952