N° d'ordre : 14/2010-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

« HOUARI BOUMEDIENE »

FACULTE DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE
Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : Probabilités-Statistiques

Par : Athmane Amel

Sujet

Classification des lois non paramétriques discrètes

Soutenu publiquement le 30/ 11/ 2010, devant le jury composé de :

Mme-DJABALLAH (Maître de conférence/A, à l'USTHB) Présidente
Mr- AISSANI. A (Professeur, à l'USTHB) Directeur de Thèse
Mme- SADKI. O (Maître de conférence/A, à l'USTHB) Examinatrice
Mr- TATACHAK.A (Maître de conférence/A, à l'USTHB) Examinateur

Résumé

La notion de vieillissement joue un rôle important dans la théorie de la fiabilité dont le concept précis de cette dernière se définit comme l'aptitude du dispositif étudié à accomplir la fonction requise dans des conditions données et de façon ininterrompue durant une période de temps donnée.

Afin d'estimer cette fiabilité, l'ingénieur est amené à réaliser des essais en s'appuyant sur les lois de probabilité, et lors des études de la fiabilité, de nombreuses difficultés sont rencontrées: données censurées, ou aberrantes et parfois des données manquantes, et donc pour pouvoir choisir la distribution adéquate, il est plus commode d'utiliser les lois non paramétriques dites de « ***vieillissement*** » ou de « ***survie*** ».
Elles sont largement utilisées dans divers domaines telles que, l'Actuariat, Ordonnancement, Files d'attente, Economie, …

Dans cette recherche, nous nous sommes fixés comme objectif de présenter une classification des lois non paramétriques dans leurs versions discrètes, de démontrer les relations d'inclusion possibles entre les classes, de plus, une comparaison entre les lois non paramétriques et la loi Géométrique composé.

Nous résumons aussi, les propriétés de conservation des classes par rapport aux principales opérations de la fiabilité : ***convolution*** et ***mélange***.

Table des matières

Introduction

La sûreté de fonctionnement des diverses réalisations industrielles constitue un enjeu majeur à la fois sur le plan économique, écologique et humain. La technologie avance trop rapidement, les systèmes ou matériels deviennent trop complexes pour qu'un simple bon sens puisse suffire à prévoir les risques. Ces risques croissent très vite et touche à la consommation courante.

La qualité de fiabilité du système est devenue un argument essentiel, et donc, les analyses économiques des risques, leurs conséquences financières sont maintenant prises en compte par les industriels.

De facon générale, la théorie de fiabilité étudie les défaillances (ou pannes) qui peuvent affecter un système (ou dispositif) destiné à fonctionner. Le mot défaillance (ou panne) ne signifie pas arrêt complet du fonctionnement mais cessation du ≪ *bon* ≫ fonctionnement.

Une partie de la théorie de fiabilité est consacrée à la modélisation probabiliste des défaillances, permettant notamment d'étudier les problèmes de sûreté (probabilités ponctuelles) et de qualité / rentabilité (espérance mathématique).

Le concept précis de fiabilité se définit comme l'aptitude du dispositif étudié à accomplir la fonction requise dans des conditions données et de facon ininterrompue durant une période de temps donnée (selon les spécifications du cahier des charges).
De facon ≪ *technique* ≫, la fiabilité désigne la probabilité qu'un système (considéré comme mis en service ou observé en bon fonctionnement au temps 0), ait fonctionné sans défaillance jusqu'au temps t.

Afin d'estimer cette fiabilité, et pour obtenir des résultats significatifs, l'ingénieur fiabiliste est amené à réaliser des essais en s'appuyant sur les lois de probabilité.
Les lois considérées jusqu'à présent peuvent être qualifiées de *paramétriques* au sens où l'allure de la distribution est connue, mais qu'elle dépend de certains paramètres.

De nombreuses difficultés rencontrées lors des études de la fiabilité ou de l'analyse de

survie : données censurées ou aberrantes et parfois des données manquantes, et donc pour pouvoir choisir la distribution adéquate sur la base des données statistiques, il est plus commode d'utiliser les lois non paramétriques dites de "*vieillissement*" ou de "survie", plutôt que les lois paramétriques usuelles telles que la loi Exponentielle, Normale, ...
Les lois non paramétriques de survie n'ont pas pas une distribution ayant une certaine allure, mais regroupent des familles de distributions ayant en commun une certaine propriété qualitative.

Le concept de vieillissement a une importance vitale dans la théorie de fiabilité, différentes notions de vieillissement telles que IFR, $IFRA$, NBU, $DMRL$,..., peuvent décrire la durée de vie d'un système ou composant.
Dans beaucoup de situations en théorie de fiabilité, le temps n'est pas le meilleur scalaire pour décrire la durée de vie ou plus précisément la fiabilité, mais comme dans le cas discret on est confronté à des situations où la durée de vie du produit peut être décrite par une variable aléatoire entière non négative.

Autant d'exemples de la vie quotidienne qui montre l'application des distributions non paramétriques de la théorie de fiabilité dans leurs versions discrètes, comme par exemple :

• La durée de vie d'un briquet à gaz est mesurée par le nombre de flammes produites,

• La durée de vie d'un commutateur (switch) est mesurée par le nombre de fois où l'on a mis en oeuvre,

• La durée de vie d'un moteur est mesurée par le nombre de rotations complètes,

• Une pièce d'un équipement fonctionne dans des cycles et les observations sont le nombre de cycles achevés avec succès avant la défaillance,

• Un dispositif est contrôlé une seule fois par période et l'observation est donc le nombre de périodes parachevé avant la défaillance du dispositif.

Dans ce mémoire, nous nous sommes fixés comme objectif de présenter une classification des lois non paramétriques dans leurs versions discrètes, de démontrer les relations d'inclusion possibles entre les classes et leurs conservation par les opérations de fiabilité.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre contient un rappel des notions fondamentales de la théorie de probabilités et une présentation des modèles de distributions discrètes utilisés en fiabilité.

Le deuxième chapitre est entièrement consacré à la description des classes de distributions non paramétriques discrètes en termes du taux de défaillance, de la distribution d'équilibre. Une grande partie de ce chapitre est réservée à la comparaison des lois non paramétriques avec la loi Géométrique composée.
On introduisons ainsi, les relations d'inclusions existant entre ces classes, et enfin nous proposons une classification de ces lois non paramétriques.

Dans le troisième et dernier chapitre, nous discuterons la conservation des classes de distributions non paramétriques, nous donnerons les principaux théorèmes de conservation connus de ces lois par rapport aux principales opérations de fiabilité : *convolution* et *mélange*.

Chapitre I

Outils probabiliste et concepts de fiabilité

Chapitre 1

Outils probabiliste et concepts de fiabilité

1.1 Introduction :

La notion de vieillissement joue un rôle important dans la théorie de la fiabilité, ainsi que la classification des distributions de survie pour objectif d'une modélisation stochastique, une analyse de fiabilité des composantes et systèmes, et d'autres domaines liés.

La fiabilité d'un système est la probabilité qu'il fonctionne sans défaillance pendant une durée donnée et dans un environnement spécifié, donc, un système est fiable lorsque la probabilité de remplir sa mission sur une durée donnée correspond à celle spécifiée au cahier des charges.

Ce chapitre introductif contient un rappel de quelques notions fondamentales en probabilités, afin de pouvoir traité mathématiquement le concept de la fiabilité, nous présentons les principales lois de probabilités les plus usuelles, nous définissons le processus stochastique et nous décrivons ainsi, les opérations de la fiabilité.

1.2 Lois classiques :

1.2.1 La loi Binomiale négative :

C'est la loi d'une variable aléatoire discrète représentant le nombre d'échecs avant l'obtention du nombre donnée n de succès dans des épreuves répétées ou dans des tirages avec remise (dite aussi loi de Pòlya).

Deux paramètres réels $n \in \mathbb{N}^*$ et p $(0 \leq p \leq 1)$, dont n représente le nombre de succès attendus et la probabilité d'avoir un succès est p et un échec $q = 1 - p$.

Soit N la variable aléatoire de loi binomiale négative de paramètres n et p, à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa loi de probabilité est donnée par :

$$P(N = k) = C_{n-1}^{n+k-1} p^n q^k$$

ses caractéristiques sont :

- $E(N) = nq/p$;
- $Var(N) = nq/p^2$.

1.2.2 La loi Géométrique :

La loi géométrique est la loi du nombre d'essais nécessaires pour faire apparaitre un événement de probabilité p, autrement dit, c'est la loi d'une variable aléatoire discrète représentant le temps d'attente du premier succès dans des épreuves répétées, ou dans des tirages avec remise.

Soit T la variable géométrique de paramètre p ; à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, sa loi de probabilité est donnée par :

$$P(T = k) = pq^{k-1}$$

ses valeurs caractéristiques sont :

- $E(T) = 1/p$;
- $Var(T) = q/p^2$.

1.2.3 La loi de Poisson :

Une variable aléatoire N est de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $P(\lambda)$, si et seulement si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sa densité de probabilité est donnée par ;

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N = n) = exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}$$

Par convention, une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 0 est nulle avec probabilité 1.

L'espérance et la variance de la loi $P(\lambda)$ sont respectivement :

- $E(N) = \lambda$;

• $Var(N) = \lambda$.

On dit que la loi de Poisson est la loi des événements rares : loi du nombre de fois où un événement de probabilité très faible se produit au cours d'un très grand nombre d'expériences identiques et indépendantes. Une défaillance étant en général un événement rare, la loi de poisson joue un rôle important en fiabilité.

Si $N_1, ..., N_n$ sont n variables aléatoires indépendantes et de même loi $P(\lambda)$, alors $\sum_{i=1}^{n} N_i$ est de loi $P(n\lambda)$.

1.3 Notions générales :

1.3.1 Fonction totalement monotone :

Soit f une fonction n fois dérivable.

La monotonie totale (on dit aussi complètement monotone) d'une fonction f signifie que la relation :

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \geq 0$$

est vérifiée pour tout $n \geq 0$, $t \geq 0$.

1.3.2 Fonction génératrice :

Soit N une variable aléatoire à valeurs entières non négatives. La fonction génératrice de N est alors définie par :

$$P(z) = E(z^N) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad |z| < z_0$$

où

$$p_k = P(N = k) \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

et z_0 est le rayon de convergence de $P(z)$.

Les fonctions génératrices constitueront un outil efficace pour l'étude des processus stochastiques à valeurs discrètes. En effet, il sera souvent plus facile de déterminer la fonction génératrice d'une distribution de probabilité inconnue que de calculer la distribution elle-même.

Nous décrivons les fonctions génératrices de quelques distributions les plus utilisées :

• Distribution Binomiale :

$f(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n p^k (1-p)^{n-k} z^k = (zp + 1 - p)^n$

d'après la formule du binôme.

• Distribution Géométrique :

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p z^k = p/[1-(1-p)z]$

• Distribution Poisson :

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$

1.3.3 Fonction Convexe (concave) :

Définition :

Un sous ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si $x, y \in \mathcal{A}$ implique $\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathcal{A}$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.

Définition :

Une fonction ϕ à valeurs réelles définie sur un sous ensemble *convexe* $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite *convexe* si,

$$\phi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\phi(x) + (1-\alpha)\phi(y)$$

pour tout $x, y \in \mathcal{A}$ et tout $\alpha \in [0,1]$.

Si l'inégalité est inversée, alors, ϕ est dite *concave*.

En d'autres termes, une fonction ϕ est *concave* si et seulement si $-\phi$ est *convexe*.

1.3.4 Distribution de mélange :

On appelle mélange de distributions une loi de probabilité d'une variable aléatoire X, de densité,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i f_i(x)$$

où $f_i(x)$ est la densité d'une loi discrète (Géométrique, Poisson, ...) et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p_i \geq 0$.

X a pour densité $f_i(x)$ avec une probabilité p_i.

1.3.5 Produit de convolution :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes non négatives de fonction de répartition F_X et F_Y respectivement.

Alors, la fonction de répartition de la somme $S = X + Y$ est donnée par le produit de convolution de leurs fonctions de répartitions individuelles F_X et F_Y défini par :

$$F_X * F_Y(y) = \sum_{x} F_Y(y - x) f_X(x)$$

et

$$f_X * f_Y(y) = \sum_{x} f_Y(y - x) f_X(x)$$

avec $f_X(x) > 0$.

1.4 Processus stochastique :

1.4.1 Définition :

On dit qu'on a affaire à un problème stochastique, lorsque le hasard entre en jeu.

Un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre dans $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{N}$ est définies sur un même espace de probabilité (Ω, Q, P).

Le paramètre t est généralement interprété comme le temps et appartient à un ensemble ordonné T. Si T est à valeurs discrètes on parle de processus à temps discret ; si l'ensemble des valeurs de T est continu, on parle de processus à temps continu.

La variable X_t représente l'état du processus au temps t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelé l'espace des états du processus.

Tout événement élémentaire $\omega \in \Omega$ définit une affectation de valeurs à la variable d'état $X_t = X_t(\omega)$pour tout $t \in T$. Ces valeurs représentent une évolution particulière du système appelée trajectoire ou réalisation.

Voici quelques exemples de phénomènes physiques susceptibles d'être modélisés par des processus stochastiques :

- Le nombre de défaillances se produisant par jour dans un système technique ;
- Le nombre d'appels arrivant dans un central téléphonique ;
- Le nombre de clients dans une file d'attente à un instant donné t.

1.4.2 Propriété Absence de mémoire :

Lorsque l'on considère un phénomène (ou un processus) dont l'échéance est aléatoire dans le temps, on représente alors cette échéance par une variable aléatoire T positive, qui peut aussi être vue comme la durée de vie du phénomène en question. Aussi, T peut être la durée de fonctionnement d'un appareil, le délai entre deux arrivées à un guichet par exemple.

Le phénomène est dit *sans mémoire* (ou *sans vieillissement*) si :

$$\forall x \geq 0, \quad P(X > x + t / X > t) = P(X > x)$$

ce qui signifie en termes de survie que la probabilité conditionnelle que l'on a d'observer un composant ou un système qui meurt dans l'intervalle de temps $[t, t + x]$ ne dépend pas de la valeur t.En d'autres termes, savoir que le composant / système est en vie à l'instant t n'apporte aucune information additionnelle sur la date de son échéance future.

Les deux seules lois de probabilité jouissant de cette propriété importante sont les lois Géométrique (cas discret) et l'Exponentielle (cas continu).

1.4.3 Temps d'arrêt :

Une variable aléatoire $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n \geq 0}$ si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{T = n\} \in \mathfrak{F}_n,$$

ou bien, si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{T \leq n\} \in \mathfrak{F}_n,$$

• Une filtration est une suite croissante de tribus $(\mathfrak{F}_n)_{n\geq 0}$, c'est-à-dire $\mathfrak{F}_n \subset \mathfrak{F}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Interprétation :

Supposons que T représente le numéro de la partie après laquelle un joueur décide d'arrêter de jouer : T est donc un temps d'arrêt si et seulement si la décision d'arrêter est prise en fonction des résultats des parties déjà jouées au moment de l'arrêt, autrement dit, si la décision d'arrêt ne tient pas compte des résultats des parties futures.

Nous introduisons maintenant les mesures essentielles de fiabilité comme la fonction de survie (fiabilité) et la fonction de taux de défaillance pour les principales lois de probabilité usuelles, notamment la loi Géométrique et la loi de Weibull.

1.5 Autres Lois classiques de fiabilité :

1.5.1 Distribution Géométrique :

• $p_n = p(1-p)^n$, $n \geq 0$, $0 < p < 1$ est une constante.

• $a_n = (1-p)^n$.

• $h_n = p$.

1.5.2 Distribution Binomial négative :

• $p_n = \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^n$, $k \geq 0$, $n > 0$, $0 < p < 1$.

• $\frac{1}{h_n} = 1 + \frac{1}{\binom{n+k-1}{n} p^\alpha q^k} \left[1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i-1}{i} p^\alpha q^i\right]$, $q = 1-p$.

1.5.3 Distribution Weibull discrète de type I :

• $p_n = q^{(n-1)^\alpha} - q^{n^\alpha}$, $n \geq 1$, $0 < q < 1$.

• $a_n = q^{n^\alpha}$.

- $h_n = 1 - q^{n^\alpha - (n-1)^\alpha}$.

1.5.4 Distribution Weibull discrète de type II :

- $p_n = (\frac{n}{m})^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left[1 - (\frac{j}{m})^{\alpha-1}\right]$, $1 \leq n \leq m$.

- $a_n = \prod_{j=1}^{min(n,m)} \left[1 - (\frac{j}{m})^{\alpha-1}\right]$.

- $h_n = (\frac{i}{m})^{\alpha-1}$, $1 \leq n \leq m$.

1.5.5 Distribution Weibull discrète de type III :

- $p_n = \left(1 - e^{-c(k+1)^\alpha}\right) e^{-c\sum_{j=0}^{n} j^\alpha}$, $k = 0, 1, 2, ...$, $c > 0$, $-\infty < \alpha < \infty$.

- $a_n = e^{-c\sum_{j=0}^{n+1} j^\alpha}$.

- $h_n = 1 - e^{-c(n+1)^\alpha}$.

1.5.6 Distribution S :

Cette distribution est utile dans la modélisation de la durée de vie d'un système tel que pour chaque demande, un choc peut s'introduire avec une probabilité p. Soit π la probabilité que le système fonctionne pendant les premières demandes sachant qu'un choc s'est introduit.

- $p_n = p(1 - \pi^n) \prod_{j=0}^{n-1} (1 - p + \pi^j)$, $n \geq 1$, $0 < p \leq 1$, $0 \leq \pi < 1$.

- $a_n = \prod_{j=1}^{n} (1 - p + p\pi^j)$.

- $h_n = p(1 - \pi^n)$.

1.5.7 Distribution Exponentielle-géométrique :

- $p_n = \alpha^{n-1} \exp\left\{\frac{-\beta(n-1)(n-2)}{2}\right\} - \alpha^n \exp\left\{\frac{-\beta n(n-1)}{2}\right\}$, $n = 1, 2, ...$

où $0 < \alpha \leq 1$, $\beta \geq 0$, $(1-\alpha) + \beta > 0$.

- $a_n = \alpha^n \exp\left\{\frac{-\beta n(n-1)}{2}\right\}$.

- $h_n = 1 - \alpha \exp\{-\beta(n-1)\}$.

<u>Notations</u> :

$*D - IFR$ (DFR) : Discrete Increasing (Decreasing) Failure Rate ;

$*D - IFRA$ $(DFRA)$: Discrete Increasing (Decreasing) Failure Rate in Average ;

$*D - NBU$ (NWU) : Discrete New Better (worse) than Used ;

$*D - NBUE$ $(NWUE)$: Discrete New Better (worse) than Used in Expectation ;

$*D - HNBUE$ $(HNWUE)$: Discrete Harmonic New Better (worse) than Used in Expectation ;

$*D - IMRL$ $(DMRL)$: Discrete Increasing (Decreasing) Mean residual lifetime ;

$*D - CM$: Discrete Complètement Monotone ;

$*D - CG$: Discrete Géométrique Composée ;

$*D - LCVX$ $(LCAV)$: Discrete Log-Convexe (Log-Concave) ;

$*DS - IFR$ (DFR) : Discrete Strongly Increasing (Decreasing) Failure Rate ;

$*DW - NBU$ $(DS - NWU)$: Discrete Weakly (Strongly) New Better (worse) than Used ;

Chapitre II

Classification des distributions non paramétriques

Chapitre 2

Classification des distributions non paramétriques

Les Distributions de probabilités dites non paramétriques (IFR, $IFRA$, NBU, $IMRL$, ...) ainsi que leurs duales (DFR, $DFRA$, NWU, $DMRL$, ...) sont intéressantes au sens où elles permettent de fournir des évaluations, des performances,... pour une large classe de lois difficilement ‹‹identifiables››, ou lorsqu'une certaine incertitude subsiste de la part du décideur.

Elles sont actuellement largement utilisées dans divers domaines des probabilités et statistiques (assurances, finances, fiabilité, statistique médicale, informatique,...).

Le but de ce chapitre est de fournir une classification systématique des lois non paramétriques mais dans leurs version discrète.

Une grande partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des relations pouvant existées entre les différentes classes de la fiabilité discrète et leurs applications à la distribution discrète géométrique composée ($D-CG$).

Avant d'entamer le cas discret, nous considérons d'abord le cas des distributions continues.

2.1 Distributions non paramétriques continues :

Nous introduisons les concepts de base de vieillissement dans le temps continu.

Dans ce cas, on s'intéresse à étudier la durée de bon fonctionnement (ou durée de vie) de l'élément ou du système.

Soit T une variable aléatoire représentant la durée de vie avec une distribution continue sur $\mathbb{R}^+$.

La fiabilité (ou fonction de survie), le taux de défaillance, la fiabilité résiduelle et la fonction de taux de défaillance cumulée sont définies respectivement comme suit :

- $\forall t \geq 0,$ $\qquad R(t) = P[T > t]$
- $\forall t \geq 0,$ $\qquad \lambda(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} P[t < T \leq t + dt/T > t] = -\frac{\overline{R}(t)}{R(t)}$
- $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0,$ $\qquad R(s/t) = P[T > t + s/T > t] = \frac{R(s+t)}{R(t)}$
- $\forall t \geq 0,$ $\qquad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du = -lnR(t)$

Nous présentons dans le paragraphe suivant les définitions des classes de fiabilité dans le cas continu :

2.1.1 Increasing Failure Rate (IFR) :

Une durée de vie T de fiabilité R est dite IFR (ou à taux de défaillance croissant) si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes où R est strictement positive :

- $\lambda(t)$ est une fonction croissante ;
- $log(R(t))$ est une fonction concave de t ;
- $\forall s \geq 0,$ $R(s/t)$ est une fonction décroissante en t ;
- Pour tous réels positifs $s_1, s_2, t_1, t_2 (\in \mathbb{R}^+)$, tels que $s_1 < s_2$ et $t_1 < t_2$; le déterminant $detR(s_i - t_j) \geq 0$ pour i,j=1,2.

2.1.2 Increasing Failure Rate in Average ($IFRA$) :

Une durée de vie T est dite $IFRA$ (ou Taux de défaillance croissant en moyenne), si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- $[R(t)]^{1/t}$ est une fonction décroissante ;
- $\frac{\Lambda(t)}{t}$ est une fonction croissante ;

L'équivalence entre ces deux propriétés est évidente puisque $\Lambda(t) = -log[R(t)]$.

2.1.3 New Better than Used (NBU) :

Une durée de vie T est dite NBU (ou Nouveau meilleur que l'usagé),si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- $R(s/t) \leq R(s), \forall s \geq 0, \forall t \geq 0;$

- $\Lambda(t+s) \geq \Lambda(t) + \Lambda(s), \forall t \geq 0, \forall s \geq 0\,;$

L'équivalence entre ces deux propriétés est évidente le fait que $\Lambda(t) = -log[R(t)]$.

Les définitions des classes de distributions duales sont obtenues à partir de celles données précédemment en inversant les inégalités.

La relation d'inclusion suivante montre le lien entre ces différentes classes de distributions non paramétriques continues :

$$IFR \Rightarrow IFRA \Rightarrow NBU$$

Mêmes résultats sont valides pour décrire le dual des notions de vieillissements négatives DFR, $DFRA$, NWU.

$$DFR \Rightarrow DFRA \Rightarrow NWU$$

2.2 Distributions non paramétriques discrètes :

2.2.1 Idée générale :

Différentes classes de distributions de vie discrètes sont définies en parallèle aux classes de distributions continues.

Similaire au cas des distributions continues, les distributions discrètes peuvent aussi être classifiées selon leurs propriétés des taux de défaillance, la durée de vie moyenne résiduelle et les fonctions de survie. Cependant, certains concepts de classification utilisés dans le cas continu, ne peuvent pas être utilisés directement dans l'analyse de fiabilité discrète, pour cela, ces concepts ont été modifiés convenablement pour pouvoir définir les classes discrètes .

Les distributions discrètes sont utilisées en fiabilité où les mesures des durées de vie sont obtenues dans le temps discret, le cas par exemple, où un équipement fonctionne à la demande et l'événement observé consiste à donner le nombre de demandes satisfaites avant la défaillance.

Le but est donc d'évaluer la probabilité de bon fonctionnement d'un élément ou d'un système.

Par conséquent, étudier la fiabilité revient à étudier une variable aléatoire positive représentant la durée de bon fonctionnement.

Soit N une variable aléatoire de comptage non négative à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec une fonction de probabilité :

$$p_n = P[N = n], \qquad n \geq 0$$

Et la fonction de répartition correspondante de N est donnée par :

$$F(n) = P(N \leq n) = \sum_{i=0}^{n} p_i$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

♦ Avec une fonction génératrice définie dans le chapitre I.

♦ Notons la fonction de survie de N par :

$$a_n = \overline{F}(n) = P(N > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k$$

La fonction génératrice correspond à la fonction de survie est donnée par :

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1 - P(z)}{1 - z}, \quad |z| < z_0$$

En outre, pour tout $n = -1, -2, ...$, nous avons : $P(n) = 0$, $F(n) = 0$ et $a_n = 1$.

La distribution d'une variable aléatoire de comptage est appelée ***une distribution discrète***.

En particulier, si $P(0) = P(N = 0) = 0$, où la variable aléatoire de comptage N à valeurs dans $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, ...\}$, on dit que la distribution discrète est ***zéro-tronquée***.

2.3 Caractérisation des distributions non paramétriques en terme de leurs fonctions du taux de défaillance :

Nous introduisons une première classification des lois non paramétriques discrètes de survie examinée par Dilip Roy et R.P.Gupta (1992) basée sur la fonction du taux de défaillance.

2.3.1 La classe $D - IFR$ $(D - DFR)$:

Soit N une variable aléatoire discrète non négative à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec une fonction de probabilité p_n, $n = 0, 1, ..., k$ où

$$k = Max\{n/p_n > 0\}, K = \{0, 1, ..., k\}$$

La fonction de survie, a_n, et la fonction du taux de défaillance, h_n, sont définies respectivement par :

$$a_n = P(N \geq n), \quad n \in K. \tag{1.1}$$

$$h_n = p_n/a_n, \quad n \in K. \tag{1.2}$$

Nous avons :

$$a_{n+1} = P[N \geq n+1]$$

$$= P[N \geq n] - P[N = n]$$

$$= a_n - p_n = a_n - a_n h_n$$

D'où la relation :

$$a_{n+1} = a_n(1 - h_n)$$

Utilisant cette relation, nous avons la fonction de survie suivante déterminée en terme de h_n :

$a_0 = P[N \geq 0] = 1,$

$a_1 = a_0(1 - h_0) = 1 - h_0,$

$a_2 = a_1(1 - h_1) = (1 - h_0)(1 - h_1),$

.

.

.

$a_n = (1 - h_0)...(1 - h_{n-1}), \quad n \geq 1.$

D'où,

$$a_0 = 1$$

$$a_n = (1 - h_0)...(1 - h_{n-1}), \quad n \geq 1. \tag{1.3}$$

De plus, $0 \leq h_n \leq 1$ et dans le cas où k et fini la limite supérieure est toujours atteint au point $n = k$.

C'est un point important à entretenir en définissant les classes de distribution de survie discrète où la notion de vieillissement est basée sur la propriété de la fonction de taux de défaillance. En effet, on ne peut pas observé la monotonie dans h_n en entier sauf si h_n est croissant en n ou si k est infini. Donc, on doit exclure le cas où k est fini pour définir les classes de distribution discrète $D - IFR$ et $D - DFR$.

Définition 2.1 :

La fonction de probabilité p_n appartient à la classe de distribution de survie $D-IFR$ $(D-DFR)$ si la fonction de taux de défaillance h_n est croissante (décroissante) en n pour tout $n \in K-\{k\}$.

Le résultat suivant fournit une définition équivalente pour la classe $D-IFR$ $(D-DFR)$.

Proposition 1 : [17]

Une distribution discrète avec une fonction de survie a_n appartient à la classe $D-IFR$ $(D-DFR)$ si et seulement si :

$$\frac{a_{n+s}}{a_n} \downarrow en\ n\ (\uparrow en\ n) \tag{1.4}$$

Pour tout $s \geq 0$ fixé tel que $n \in K-\{k\}$ et $n+s \in K$.

Preuve :

Utilisant (1.3), on peut écrire :

$$a_{n+s}/a_n = \{1-h_{n+s-1}\}\{1-h_{n+s-2}\}...\{1-h_n\} \tag{1.5}$$

Selon la définition de $D-IFR$ fondée, chaque terme à droite de l'équation (1.5) est décroissant en n, donc, $\{a_{n+s}/a_n\}$ $\downarrow$en n, pour tout $s \geq 0$ fixé tel que $n \in K-\{k\}$, $n+s \in K$.

Si on prend $s=1$ dans (1.4), on aura :

$$\{1-h_n\} \downarrow en\ n,\ pour\ n \in K-\{k\}$$

La preuve est similaire pour le cas de la classe $D-DFR$.

Définition 2.2 :

Soit $\mathbb{Z}=\{...,-1,0,1,...\}$, et une fonction non négative $f(x,y)$ définie sur $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ appelée TP_2 en x et y, si :

$$f(x_1,y_1)f(x_2,y_2) \geq f(x_1,y_2)f(x_2,y_1)$$

pour tout $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$.

Une fonction non négative $g(x)$ définie sur $\mathbb{Z}$ est dite PF_2 en x si $g(x-y)$ est TP_2 en x et y.

Une conséquence du résultat précédent est la caractérisation de la classe $D-IFR$ par la condition :

$$\frac{a_{n+s}}{a_n} \geq \frac{a_{m+s}}{a_m} \tag{1.6}$$

$m \geq n \geq 0$, $s \geq 0$, tel que $m \in K - \{k\}$, $m+s \in K$. (Voir [17])

On peut écrire l'inégalité (1.6) comme :

$$a_{n+s}a_m \geq a_n a_{m+s} \tag{1.7}$$

car les fonctions a_n et a_m sont positives dans $K-\{k\}$. De plus l'inégalité (1.7) peut être exprimée comme :

$$\begin{vmatrix} a_{n+s} & a_n \\ a_{m+s} & a_m \end{vmatrix} \geq 0$$

Ce qui implique que la classe $D-IFR$ peut être caractérisée par la propriété de la fonction de survie PF_2 (Polya Frequency Function d'ordre 2)sur l'ensemble K.

Une condition suffisante pour que la fonction de survie soit du type PF_2 est la propriété de la fonction de probabilité PF_2, car,

$$p_n est\ PF_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} p_{n+s} & p_n \\ p_{m+s} & p_m \end{vmatrix} \geq 0 \qquad pour \quad m \geq n \geq 0, s \geq 1, m \in K-\{k\}, m+s \in K$$

$$\Rightarrow \textstyle\sum_{m \geq n} \{p_{n+s}p_m - p_{m+s}p_n\} \geq 0$$

$$\Rightarrow p_{n+s}a_n - a_{n+s}p_n \geq 0 \quad car \quad a_n \geq a_{n+s} > 0 \;\; et \;\; n+s \leq k$$

$$\Rightarrow h_{n+s} - h_n \geq 0 \quad avec \quad h_n = \tfrac{p_n}{a_n}$$

$\Leftrightarrow p_n$ appartient à la classe $D-IFR$

$\Leftrightarrow a_n$ est une PF_2. $\square$

D'où, une fonction PF_2 proprement normalisée sur l'ensemble K, peut être considérée comme un modèle de probabilité pour la classe $D-IFR$.

Une autre condition suffisante pour qu'une fonction de probabilité soit $D-IFR$ est le comportement de la monotonie croissante avec l'âge. D'autre part, une fonction de probabilité appartenant à la classe $D-DFR$ est nécessairement décroissante avec l'âge.

Dans le cas continu, la loi exponentielle est unique pour les deux classes IFR et DFR en vue de la constance de la fonction de taux de défaillance.

Dans le cas discret, nous obtenons de cette caractérisation une distribution géométrique. Cependant, la constance de la fonction de taux de défaillance assure la loi géométrique pour la variable sous-jacente. (Voir référence [17])

Proposition 2 : [17]

Une fonction de probabilité p_n appartient aux classes $D-IFR$ et $D-DFR$ si et seulement si :

$$p_n = \begin{cases} (1-c)^n c & \text{n} = 0,1,...,k-1 \\ (1-c)^k & \text{n} = k \end{cases} \tag{1.8}$$

où c un paramètre arbitraire à valeurs entre 0 et 1.

Preuve :

Selon (1.8),

$$a_n = (1-c)^n c + (1-c)^{n+1} c + ... + (1-c)^{k-1} c + (1-c)^k$$

qui se simplifie à $a_n = (1-c)^n$ pour $n \in K$.Donc $h_n = c$ pour $n \in K - \{k\}$

D'où p_n est $D-IFR$ et $D-DFR$.

Pour démontrer l'inverse, soit p_n appartient à la classe $D-IFR$ et $D-DFR$. Alors h_n doit être croissante et décroissante en n, pour $n \in K - \{k\}$. Ceci implique que h_n est une constante, c, pour tout $n \in K - \{k\}$.

Donc,

$$p_0 = h_0, \;\; p_1 = h_1 a_1 = c(1-c),$$

$$p_2 = h_2 a_2 = c[1-c-c(1-c)] = c(1-c)^2,$$

$$p_{k-1} = c(1-c)^k$$

et

$$p_k = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} p_n = 1 - c\left\{\frac{1-(1-c)^k}{1-(1-c)}\right\} = (1-c)^k.$$

Notons que (1.8) décrive une distribution Géométrique où k est infini. $\square$

Dans beaucoup de situations pratique, il y a un effet significatif de l'âge du composant sur sa capacité fonctionnelle à cause d'un cumul de choc de nature environmental.
Un modèle stochastique approprié pour la classe $D-IFR$ ne peut pas décrire mathématiquement la fiabilité pour un temps de mission donné.

D'autres part, la loi Géométrique ou une distribution de type (1.8) admet la forme analytique pour la valeur de fiabilité et de là nous devrons essayer de fournir des limites de fiabilité pour la classe de distribution de survie $D-IFR$ basée sur la fonction (1.8) ou une loi géométrique. Le résultat suivant aura tant d'utilisation à cet effet.

Proposition 3 : [17]

Si a_n est la fonction de survie d'une distribution de vie appartenant à la classe $D-IFR$, alors pour $0 < q < 1$,

$$D(n) = a_n - q^n, \;\; n = 1, 2, ... \tag{1.9}$$

change de signe au plus une fois.

Preuve :

Nous écrivons $p = 1-q$, nous avons trois possibilités :

$h_0 < p$, $h_0 = p$ et $h_0 > p$.

Si $h_0 < p$, alors $a_1 = 1 - h_0 > q$. D'où $D(1) > 0$.

De plus, a_n étant $D-IFR$, $h_k \geq h_{k-1} \geq ... \geq h_0 < p$

Par conséquent, $1 - h_k \leq 1 - h_{k-1} \leq ... \leq 1 - h_0 > q$.

Nous écrivons $a_n = \{1-h_0\}...\{1-h_{n-1}\}$

Notons qu'il existe un entier n_0 tel que,

$$D(n) \geq 0 \text{ pour } n = 1, ..., n_0$$

$$D(n) < 0 \text{ pour } n = n_0 + 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} a_{n_0+2} &= a_{n_0+1}(1 - h_{n_0+1}) \\ &< q^{n_0+1}q \\ &= q^{n_0+2} \end{aligned}$$

ou, $\quad D(n) < 0$ pour $n = n_0 + 2$

Répétant le même argument, nous avons $D(n) < 0$ pour tout $n = n_0 + 1, n_0 + 2$.

Alors, s'il y a un changement de signe il est du positif au négatif et il ne peut plus y avoir de changement.S'il n'existe pas un $n_0 \in K$, l'égalité (1.9) est négative pour $n = k + 1, ...$

Si $h_0 \geq p$, $1 - h_n \leq q$ pour tout $n \in K$ .Donc, $a_n \leq q^n$ ou $D(n) \leq 0$ pour tout $n = 0, 1, ...$ par conséquent, il n'existe aucun changement de signe. $\square$

Il est intéressant de noter que dans le temps discret, le taux de défaillance est inférieur ou égal à 1, tandis que dans le temps continu, il n'est pas borné.

2.3.2 La classe $D - IFRA$ ($D - DFRA$) :

Dans le cas continu, afin d'introduire la notion de vieillissement basée sur le taux de défaillance en moyenne (Failure Rate Average), une classe de distribution de survie devrait avoir une propriété de conservation (closure property) par un système cohérent.

Pour un système de deux composants en parallèle indépendants de loi exponentielle mais qu'ils ne sont pas nécessairement identiques, il est connu que la propriété de conservation de la classe IFR ne se tient pas pour un système cohérent.

Une formulation analogue peut être faite dans le cas discret, en disposant d'un système de deux composants en parallèle indépendants de loi géométrique. Le taux de défaillance du système peut être exprimé comme :

$$h_t = \frac{q_1^t(1-q_1) + q_2^t(1-q_2) - (q_1q_2)^t(1-q_1q_2)}{q_1^t + q_2^t - (q_1q_2)^t}$$

où $0 < q_i < 1$, $i = 1, 2$; $t = 0, 1, \ldots$.
Une détermination de la fonction h_t pour différents choix des paramètres q_1 et q_2 montre la non monotonie de taux de défaillance h_t.

Donc dans le cas discret, nous avons la même motivation pour présenter la notion de vieillissement basée sur le taux de défaillance des mesures cumulées. Dans le cas continu, lorsque la fonction de taux de défaillance h_n existe, le taux de défaillance en moyenne $A(n)$ est défini par :

$$A(n) = \tfrac{1}{n}\int_0^n h_n dt \tag{2.1}$$

équivalent à,

$$A(n) = \tfrac{1}{n}\log\left\{\tfrac{1}{a_n}\right\} \tag{2.2}$$

Ainsi, sous l'existence de h_n nous avons l'identité des formules (2.1) et (2.2) et par conséquent, dans le cas où h_n n'est pas défini, l'équation (2.2) peut être utilisée pour définir la classe de distribution de survie basée sur FRA.

Dans le cas discret, ces deux équations ne sont pas identiques. (Voir référence [17])

Nous avons :

$$A(n) = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} h_i \;\; , n \geq 1 \tag{2.3}$$

et

$$M(n) = \tfrac{1}{n}\log\left\{\tfrac{1}{a_n}\right\} = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}\log\tfrac{1}{1-h_i}, \;\; n \geq 1 \tag{2.4}$$

car, nous avons : $a_n = \prod_{i=0}^{n-1}(1-h_i)$

Nous observons que :

$$M(n) = -\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}\log\{1-h_i\} \geq -\tfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\{-h_i\} = A(n).$$

Donc, pour définir les classes de distribution discrète $D-IFRA$ et $D-DFRA$, nous avons deux grandeurs alternative pour le taux de défaillance cumulé. .

La première grandeur est comme donnée par l'équation (2.3). Cependant, la seconde est la plus répondue en traitement mathématique. Pour donner une interprétation significative de l'équation (2.4), nous définissons le taux de défaillance de second ordre (SRF) comme :

$$h_n^* = \log\left\{\frac{1}{1-h_n}\right\} \tag{2.5}$$

Puisque h_n est croissante (décroissante) en n, h_n^* l'est aussi, et par conséquent, la classe $D-IFR$ ($D-DFR$) définie en terme de h_n précédemment pourrait être définie ainsi en termes de h_n^*.

Nous présentons ici, une classification des distributions discrète de survie proposée par Dilip Roy et R.P. Gupta [17] basée sur le taux de défaillance de second ordre.

Définition 2.3 :

La fonction de probabilité p_n appartient à la classe de distribution discrète de survie $D-IFRA_1$ ($D-DFRA_1$) si le taux de défaillance moyen du second ordre (Mean Second Rate of Failure) $M(n)$ est croissante (décroissante) en n pour tout $n \in K-\{0\}$.

Cette classe $D-IFRA_1$ appelée aussi Star-Shaped Log Survival Function ($SSLSF$).

Définition 2.4 :

La fonction de probabilité p_n appartient à la classe de distribution discrète de survie $D-IFRA_2$ ($D-DFRA_2$) si le taux de défaillance en moyenne (Failure Rate Average) $A(n)$ est croissante (décroissante) en n pour tout $n \in K-\{0\}$.

Le résultat suivant fournit une définition équivalente pour les deux classes définies ci-dessus.

Proposition 4 : [17]

Une distribution discrète est $D-IFRA_1$ ($D-DFRA_1$) si et seulement si $M(n) \leq (\geq) h_n^*$, pour tout $n \in K-\{0,k\}$ et est $D-IFRA_2$ ($D-DFRA_2$) si et seulement si $A(n) \leq (\geq) h_n$, pour tout $n \in K-\{0,k\}$.

Preuve : Pour tout $n \in K - \{0, k\}$

$$p_n \in D-IFRA_1 \ (D-DFRA_1) \Leftrightarrow \Delta M(n) \geq (\leq) \ 0$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} h_i^* \ \geq (\leq) M(n)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{n+1}[nM(n) + h_n^*] \geq (\leq) \ M(n)$$

$$\Leftrightarrow nM(n) + h_n^* \geq (\leq) \ (n+1)M(n)$$

$$\Leftrightarrow h_n^* \geq (\leq) \ M(n)$$

De même, Pour tout $n \in K - \{0, k\}$

$$p_n \in D-IFRA_2 \ (D-DFRA_2) \Leftrightarrow \Delta A(n) \geq (\leq) \ 0$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} h_i \ \geq (\leq) A(n)$$

$$\Leftrightarrow h_n \geq (\leq) \ A(n). \qquad \square$$

Proposition 5 : [17]

Si une distribution discrète est $D-IFR$ $(D-DFR)$ alors elle est $D-IFRA_1$ $(D-DFRA_1)$ et $D-IFRA_2$ $(D-DFRA_2)$.

Preuve :

Si une distribution discrète est $D-IFR$, alors,

$$h_0 \leq ... \leq h_{n-1} \leq h_n \tag{2.6}$$

et

$$h_0^* \leq ... \leq h_{n-1}^* \leq h_n^* \tag{2.7}$$

A partir de l'équation (2.6), nous obtenons :

$$A(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} h_i \quad \leq \quad \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} h_n \quad = h_n \tag{2.8}$$

et de l'équation (2.7), nous obtenons :

$$M(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} h_i^* \quad \leq \quad \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} h_n^* \quad = h_n^* \tag{2.9}$$

D'où, à partir de la proposition (4), les inégalités (2.8) et (2.9) nous assurons les propriétés des classes $D - IFRA_1$ et $D - IFRA_2$. $\square$

Proposition 6 : [17]

Pour une série de r composants indépendants avec un taux de défaillance de second ordre h_i^*, $i = 1, 2, ..., r$, le taux de défaillance de second ordre pour un système en série est $\sum_{i=1}^{r} h_i^*$.

Preuve :

Soit N_i la durée de vie du ième composant avec une fonction de survie a_i, $i = 1, 2$.

Alors la durée de vie z du système en série est $Min(N_1, N_2)$ avec une fonction de survie $a_z = a_1 a_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} h_z &= -\frac{\Delta a_z}{a_z} \\ &= 1 - \{1 - h_1\}\{1 - h_2\} \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$h_z^* = h_1^* + h_2^*.$$

Ce résultat montre que si chaque composant du système en série est $D - IFR$ ($D - DFR$), alors le système est aussi $D - IFR$ ($D - DFR$), et son taux de défaillance du second ordre est donné par $\sum_{i=1}^{r} h_i^*$. $\square$

En terme de taux de défaillance de second ordre, la fonction de survie peut être exprimée comme :

$$a_n = e^{-\sum_{i=0}^{n-1} h_i^*} \tag{2.10}$$

Cette expression est analogue à la fonction de survie correspondant aux classes de distribution continue. De plus, nous pouvons définir la fonction de taux de défaillance cumulé $H_n = -\log a_n$ en termes de taux de défaillance cumulé de second ordre.

Proposition 7 : [17]

Si une distribution discrète est $D - IFRA_1$ alors, elle est nécessairement $D - IFRA_2$ mais l'inverse n'est pas vrai. De même, si une distribution discrète est $D - DFRA_2$ alors, elle est nécessairement $D - DFRA_1$ mais l'inverse n'est pas vrai.

Preuve :

Puisque une moyenne arithmétique est plus grande qu'une moyenne géométrique, nous avons :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\{1 - h_i\} \;\; \geq \;\; \left[\prod_{i=0}^{n-1}\{1 - h_i\}\right]^{\frac{1}{n}}$$

A partir de (2.3), (1.3) et (2.10), nous obtenons :

$$1 - A(n) \;\; \geq \;\; [a_n]^{\frac{1}{n}} \;\; = \;\; e^{-M(n)}$$

Si une distribution est $D - IFRA_1$, alors, nous avons à partir de la proposition 4 :

$$\begin{aligned} D - IFRA_1 &\Leftrightarrow M(n) \leq \; h_n^* \qquad \text{pour tout } n \in K - \{0, k\} \\ &\Leftrightarrow e^{-M(n)} \geq \; e^{-h_n^*} = 1 - h_n \\ &\Rightarrow 1 - A(n) \geq \; e^{-M(n)} \geq \; 1 - h_n \\ &\Leftrightarrow A(n) \leq \; h_n \\ &\Leftrightarrow D - IFRA_2 \end{aligned}$$

L'inverse n'est pas vrai.

Si de plus, une distribution est $D-DFRA_2$, nous avons à partir de la proposition (4) :

$$\begin{aligned} D-DFRA_2 &\Leftrightarrow A(n) \geq \ h_n \qquad \text{pour tout } n \in K-\{0,k\} \\ &\Leftrightarrow 1-A(n) \leq \ 1-h_n \\ &\Rightarrow e^{-M(n)} \leq \ 1-h_n \\ &\Leftrightarrow M(n) \geq \ -\log\{1-h_n\} = \ h_n^* \\ &\Leftrightarrow D-DFRA_1 \end{aligned}$$

L'inverse n'est pas vrai. $\square$

Proposition 8 : [17]

Une fonction de probabilité p_n appartient aux classes $D-IFRA_1$ et $D-DFRA_1$ ($D-IFRA_2$ et $D-DFRA_2$) si et seulement si elle admet la forme (1.8) de la proposition (2).

Preuve :

Si p_n appartient aux classes $D-IFRA_1$ et $D-DFRA_1$, alors, $M(n)$ est une constante pour tout $n \in K-\{0\}$. Donc, h_n^* et par conséquent, h_n est une constante pour tout $n \in K-\{k\}$.

Pour le reste de la démonstration, voir la preuve de la proposition (2).

De même, nous démontrons les hypothèses $D-IFRA_2$ et $D-DFRA_2$.

D'où, nous obtenons les relations d'inclusion des classes de distribution de survie établies dans cette section :

$$D-IFR \Rightarrow D-IFRA_1$$

$$D-IFR \Rightarrow D-IFRA_2$$

$$D-IFRA_1 \Rightarrow D-IFRA_2$$

Idem, pour les relations d'inclusion des classes duales ($D-DFR$ et $D-DFRA$).

$$D-DFR \Rightarrow D-DFRA_1$$

$$D-DFR \Rightarrow D-DFRA_2$$

$$D-DFRA_2 \Rightarrow D-DFRA_1$$

2.3.3 La classe $D-NBU$:

Il y a ici également deux définitions possibles pour la classe de distribution discrète de survie $D-NBU$:

- F est $D-NBU1$, si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\forall m \in \mathbb{N}_+$, $a_n a_m \geq a_{n+m}$;

- F est $D-NBU2$, si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\forall m \in \mathbb{N}_+$, $\sum_{i=1}^{n} h_i \leq \sum_{i=m+1}^{n+m} h_i$;

avec $a_n = \prod_{i=1}^{n}(1-h_i)$

Le résultat suivant montre qu'aucune de ses classes n'est inclue dans l'autre.

Proposition 9 :

$$D-NBU1 \nRightarrow D-NBU2 \quad \text{et} \quad D-NBU2 \nRightarrow D-NBU1$$

Preuve :

Cette proposition a été prouvée par deux contre exemples, proposés par Shaked et al [voir référence 34].

On considère la fonction de taux de défaillance définie par :

$$h_1 = 0.5$$
$$h_2 = 0.8$$
$$h_3 = 0.8$$
$$h_4 = 0.5$$
$$h_5 = 0.9$$

$$h_6 = 0.6$$
$$h_i = 0.99, \quad i = 7, 8, ...$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, $m \in \mathbb{N}_+$, nous pouvons vérifier que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - h_i) \geq \prod_{i=m+1}^{m+n}(1 - h_i)$$

Mais, $\sum_{i=1}^{3} h_i = 2.1 > 2.0 = \sum_{i=4}^{6} h_i$. $\square$

D'où,

$$D - NBU1 \nRightarrow D - NBU2$$

D'autre part, on considère la fonction de taux de défaillance définie par :

$$h_1 = 0.4$$
$$h_2 = 0.6$$
$$h_3 = 0.5$$
$$h_4 = 0.5$$
$$h_i = 0.99, \quad i = 5, 6, ...$$

Alors, la propriété $D - NBU2$ est vérifiée.

Or, $\prod_{i=1}^{2}(1 - h_i) = 0.24 < 0.25 = \prod_{i=3}^{4}(1 - h_i)$.

Donc, $D - NBU\ 1$ n'est pas vérifiée. $\square$

D'où :

$$D - NBU2 \nRightarrow D - NBU1$$

2.3.4 La classe $D - NBUE$:

Une variable aléatoire N, de fonction de survie a_n, est dite $D - NBUE$ ou encore neuve mieux qu'usagée en moyenne (New Better than Used in Expectation)si elle vérifie :

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \leq (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) a_k, \quad pour\ k = 0, 1, 2, ...$$

2.3.5 La classe $D - HNBUE$:

Soit N une variable aléatoire strictement positive à valeurs dans $\mathbb{N}(\mathbb{N}_+^*)$,

et soit $a_n = P(N > n)$ la fonction de survie.

Soient : $1 = \overline{Q_0} \geq \overline{Q_1} \geq \overline{Q_2} \geq ...$ la fonction de survie d'une distribution géométrique, avec une moyenne μ finie,

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{Q_j} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

c'est-à-dire,

$$\overline{Q_k} = (1 - \frac{1}{\mu})^k, \quad k \geq 0$$

Les distributions discrètes avec fonction de survie $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ...$ sont $D-HNBUE$ si,

$$\sum_{j=k}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=k}^{\infty} \overline{Q_j}, \quad pour\ k \geq 0$$

Cela conduit à la définition suivante.

<u>Définition 2.5</u> :

Une variable aléatoire N, de fonction de survie a_n, est dite $D - HNBUE$ ou encore $D - NBUE$ Harmoniquement (Harmonic New Better than Used in Expectation) si elle vérifie :

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \leq \mu(1 - \frac{1}{\mu})^k, \quad pour\ k = 0, 1, 2, ...$$

2.3.6 La classe $D - NBAFR$:

Une variable aléatoire N, de fonction de survie a_n, est dite $D - NBAFR$ ou encore neuve mieux qu'usagée en taux de défaillance moyen (New Better than Used in Average Failure Rate) si elle vérifie :

$$a_k \leq (a_1)^k, \quad pour\ k = 0, 1, 2, ...$$

2.3.7 La classe $D - NBUFR$:

Une variable aléatoire N, de fonction de survie a_n, est dite $D - NBUFR$ ou encore neuve mieux qu'usagée en taux de défaillance (New Better than Used in Failure Rate) si elle vérifie :

$$a_{n+1} \leq a_n a_1, \quad pour\ n = 0, 1, 2, ...$$

Les classes duales $D - NWU$, $D - NWUE$, $D - HNWUE$, $D - NWAFR$ et $D - NWUFR$ peuvent être définies en inversant les inégalités dans ces définitions.

Proposition 10 : [1]

$$D - IFRA_1 \Rightarrow D - NBU1$$

Preuve :

Une variable aléatoire N est dite $D - IFRA_1$ si :

$$M(n) = \frac{1}{n} \log \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \ \ est\ \ croissante.$$

Autrement dit :

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \text{ est décroissante en n.}$$

Ainsi, pour que N soit $D - NBU$, il suffit :

$$a_{n+m} \leq a_n a_m$$

On suppose que N est $D - IFRA_1$, dans le cas contraire,

$$\begin{aligned} a_{n+m} &> a_n a_m \\ &\geq a_m (a_m)^{\frac{n}{m}} \\ &= (a_m)^{1+\frac{n}{m}} = (a_m)^{\frac{(n+m)}{m}} \end{aligned}$$

Ou :

$$(a_{n+m})^{1/(n+m)} > (a_m)^{1/m}$$

Etant donné, $n+m>m$, cela signifie une contradiction.

car, pour $n \leq m$, nous avons :

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \geq (a_m)^{\frac{1}{m}}$$

Autrement dit, $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ est croissante en n, d'où,

$$D-IFRA_1 \Rightarrow D-NBU1 \qquad \square$$

Proposition 11 : [1]

$$D-NBU1 \Rightarrow D-NBUFR$$

Preuve :

Par définition, p_n est $D-NBU1$ si :

$$a_{n+m} \leq a_n a_m$$

Pour $m=1$,

$$a_{n+1} \leq a_n a_1$$

$\Rightarrow p_n$ est $D-NBUFR \qquad \square$.

Proposition 12 : [1]

$$D-NBUFR \Rightarrow D-NBAFR$$

Preuve :

Nous avons p_n est $D-NBUFR$ si,

$$a_n \leq a_{n-1}a_1 \leq (a_1)^2 a_{n-2} \leq (a_1)^n$$

C'est à dire, si,

$$a_n \leq (a_1)^n$$

Ce qui signifie que p_n est $D-NBAFR$. $\square$

Enfin, nous obtenons une classification des lois non paramétriques discrètes sous forme de chaine d'implication suivante :

$$
\begin{array}{lllll}
D-IFR & \Rightarrow D-IFRA_1 & \Rightarrow D-NBU1 & \Rightarrow D-NBUFR & \Rightarrow D-NBAFR \\
 & \quad\Downarrow & & & \\
 & D-IFRA_2 & \Rightarrow D-NBU2 & &
\end{array}
$$

2.4 Comparaison des distributions non paramétriques avec la distribution Géométrique composée :

Une distribution discrète analogue à celle de la loi exponentielle en temps continu, est la distribution Géométrique.

Dans cette partie, nous décrivons les liens existants entre la distribution Géométrique composée et les différentes classes de lois non paramétriques discrètes, ensuite nous présentons une classification des classes établies que nous avons pu trouvées dans la littérature.

Nous allons, d'abord, insérer quelques résultats décrivant les propriétés les plus connues de la distribution Géométrique.

2.4.1 Caractérisation de la distribution Géométrique :

Nous avons vu déjà que la distribution Géométrique est caractérisée par la propriété d'absence de mémoire et la propriété de taux de défaillance constant.

Il existe, cependant, toute une théorie sur la célèbre propriété caractérisant la distribution Géométrique, il s'agit de la propriété d'indépendance.

Beaucoup d'auteurs ont discuté cette propriété caractéristique comme Henrik Cobbers et Udo Kamps (1998), Barry C. Arnold (1980), R. C. Srivastava (1986), Mynt Zijlstra (1983), Z. Govindarajulu (1980), Kong-Ming Chong (1977).

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et notons par $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq ... \leq X_{n,n}$ les statistiques d'ordre correspondantes.

Si X_1 suit une distribution Géométrique, c'est-à-dire, $P(X_1 = j) = p(1-p)^j$, pour tout $j \in \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ et $p \in (0,1)$, alors, $X_{1,n}$ et $(X_{2,n} - X_{1,n}, ..., X_{n,n} - X_{n-1,n})$ sont indépendantes.

Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant utilisé par Shanbhag (1977) :

Lemme 1 : Voir Barry C. Arnold [7]

Soit $\{(v_n, w_n) : n = 0, 1, ...\}$ une suite de vecteurs avec des composantes réelles non négatives tel que $v_n \neq 0$ pour $n \geq 1$ et $w_1 \neq 0$. Alors :

$$v_m = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+m} w_n, \qquad m = 0, 1, ...$$

si et seulement si, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n b^n = 1$ et $v_n = v_0 b^n, n = 1, 2, ...$ pour $b > 0$.

Caractérisation 1 :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, $n \geq 2$, des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et $p_i = P[X_1 = i]$, $q_i = P[X_1 > i]$, $i \in \mathbb{N}$ et $q_{-1} = 1$.

Théorème 1 :

Soit $X_1 \subseteq \mathbb{N}$, et $m \in \mathbb{N}$ un entier, p_0, p_{m+1}, p_{m+2} >0, et soit $q_j = q_0^{j+1}$, pour tout $0 \leq j \leq m$.

Si les événements $\{X_{1,n} = m + i\}$ et $\{X_{2,n} - X_{1,n} = j\}$ sont indépendants pour $i = j, j+1, j+2$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors,

$$P(X_1 = j) = p_0(1 - p_0)^j$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Preuve : Voir référence [27]

Théorème 2 :

Soit $X_1 \subseteq \mathbb{N}$, et $m \in \mathbb{N}$ un entier, $p_0 \in (0, 1)$, et soit $q_j = q_0^{j+1}$ pour tout $0 \leq j \leq m+1$. Si les événements,

$\{X_{1,n} = i\}$ et $\{X_{2,n} - X_{1,n} = m + 1\}$

sont indépendants pour $i = 0, 1$, et si,

$\{X_{1,n} = i\}$ et $\{X_{2,n} - X_{1,n} = m + j + 2\}$

sont indépendants pour $i = j, j+1, j+2$, et pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors,

$$P(X_1 = j) = p_0(1 - p_0)^j$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Preuve : Voir référence [27]

Caractérisation 2 :

La caractérisation suivante présentée par Barry C. Arnold (1980) (voir [7]), est décrite au moyen de la loi conditionnelle.

Théorème 1 :

La distribution conditionnelle de $(X_{k+1,n} - X_{k,n})$ sachant $(X_{k+1,n} - X_{k,n} > 0)$ est la même que la distribution non conditionnelle de $X_{1,n-k}$ pour le couple (k, n), $(1 \leq k < n)$, si et seulement si,

$$P(X_1 = j) = p(1-p)^{j-1}, j = 1, 2, ...$$

pour $p \in (0, 1)$.

Preuve : Voir référence [7]

Théorème 2 :

La variable aléatoire $(X_{2,n} - X_{1,n})$ et l'événement $[X_{1,n} = 1]$ sont indépendants et $P(X_i = 1)$, $P(X_i = 2)$ et $P(X_i > 2)$ sont strictement positive si et seulement si,

$$P(X_1 = j) = p(1-p)^{j-1}, j = 1, 2, ...$$

pour $p \in (0, 1)$.

Preuve : Voir référence [7]

Caractérisation 3 :

La propriété suivante caractérisant la distribution Géométrique en terme de l'indépendance des fonctions des statistiques d'ordres a été introduite par R. C. Srivastava (1986) (voir [42]).

Soient $X_1, ..., X_n; n \geq 2$, n observations indépendantes d'une variable aléatoire X de distribution Géométrique avec une probabilité :

$$p_j = p(1-p)^{(j-\alpha)/\beta}, \quad j = \alpha, \quad \alpha + \beta, \quad \alpha + 2\beta.$$

Soient $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq ... \leq X_{n,n}$ un échantillon de statistiques d'ordre.

Nous écrivons $R_n = X_{n,n} - X_{1,n}$ et $Z_n = \sum_{j=2}^{n}(X_{j,n} - X_{1,n})$.

Nous allons voir à travers cette caractérisation que :

(i) $X_{1,n}$ et R_n sont indépendantes ;

(ii) $X_{1,n}$ et Z_n sont indépendantes ;

si et seulement si X_i est de distribution Géométrique.

On suppose que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

Soit : $p_j = P(X = j)$, j=0, 1,...

Théorème 1 :

Soient $X_1, ..., X_n$, des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}^+$.

Supposons que $0 < p_i < 1$, $i = 0, 1$, et $P(X > 1) > 0$, alors :

$$P(X_{1,n} = i, R_n = j) = P(X_{1,n} = i)P(R_n = j); i = 0, 1, j = 0, 1, ...$$

si et seulement si,

$$p_j = p(1-p)^j, j = 0, 1, ..., 0 < p < 1.$$

Preuve : Voir référence [42]

Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent, nous admettons le théorème suivant :

Théorème 2 :

$$P(X_{1,n} = i, Z_n = j) = P(X_{1,n} = i)P(Z_n = j); i = 0, 1, j = 0, 1, ...$$

si et seulement si la distribution de la variable aléatoire X est une distribution Géométrique.

Preuve : Voir référence [42]

Théorème 3 :

Si $G(i) = q^{i-1}$ pour $i = 1, 2, ...,$ alors,

(i) $X_{i,n}$et l'événement $\{X_{k+1,n} - X_{k,n} \geq m\}$ sont mutuellement indépendants pour tout k $(1 \leq k \leq n-1)$ et tout $m \geq 1$.

(ii) $X_{i,n}$et l'événement $\{X_{k+1,n} - X_{k,n} = m\}$ sont mutuellement indépendants pour tout k $(1 \leq k \leq n-1)$ et tout $m \geq 1$.

Preuve : Voir référence [45]

Caractérisation 4 :

La caractérisation suivante introduite par Kong-Ming Chong (1977) (référence [29]), est présentée en terme de la moyenne de la partie positive d'une certaine valeur. Cette propriété caractéristique est un cas de la propriété d'absence de mémoire.

Théorème 1 :

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ positives, avec une moyenne finie, suit une distribution Géométrique si et seulement si, pour une constante $\alpha > 1$,

$$E[(X-m)^+]E[(X-n)^+] = \alpha E[(X-m-n)^+]$$

pour tout entier $m, n \geq 0$.

Preuve : Voir référence [29]

Théorème 2 :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, ...\}$ et supposons que X est non dégénérée en 0, $P(Y = 1) > 0$ et $P(X \geq Y) > 0$. Alors,

$$P(X = i) = (1-p)p^i, i = 0, 1, 2, ...$$

pour $p \in (0, 1)$ si et seulement si,

$$P(X \geq Y + i) = P(X \geq Y)P(X \geq i)$$

pour $i = 0, 1, 2, ...$

Preuve : Voir référence [35]

2.4.2 Distribution Géométrique Composée :

La loi Géométrique Composée présente une grande popularité de point de vue de la modélisation, car elle surgit naturellement dans des disciplines comme la théorie de fiabilité, théorie de ruine et les files d'attente.

Nous allons exploré plus loin le rôle de la loi Géométrique Composée comme une classe de distribution de fiabilité.

Définition de la distribution Géométrique Composée :

Une variable aléatoire de comptage N ou sa distribution $(p_n)_{n\geq 0}$, est dite discrète

Géométrique Composée $(D-CG)$ si la fonction génératrice admet la représentation :

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1-p}{1-pQ(z)}, \tag{3.1}$$

Où $0 < p < 1$ et $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ est une fonction génératrice.

On écrit, $N \in D-CG$ ou simplement N est $D-CG$.

Pour une commodité d'écriture, nous considérons dans ce qui suit $\overline{Q_n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k$ pour $n \geq 0$.

2.4.3 Distribution discrète totalement monotone :

Une variable aléatoire de comptage N ou sa distribution $(p_n)_{n\geq 0}$, est dite discrète **totalement monotone** $D-CM$ si :

$$(-1)^n \Delta^n p_k \geq 0, \;\; n \geq 0, \;\; k \geq 0$$

Où

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k, \quad \Delta^0 p_k = p_k, \quad et \quad \Delta^n = \Delta(\Delta^{n-1})$$

On écrit, $N \in D-CM$ ou simplement N est $D-CM$.

De même, une Distribution discrète $(p_n)_{n\geq 0}$ est $D-CM$ si et seulement si $(p_n)_{n\geq 0}$ est une mélange de distributions Géométriques, admettant,

$$p_n = \int_0^1 (1-p)p^n dB(p), \quad n \geq 0. \tag{3.2}$$

Où B est une distribution de probabilité sur [0, 1].

On peut citer l'exemple de la loi binomiale négative qui est considérée comme une distribution discrète totalement monotone, avec :

$$p_n = C_n^{n+\alpha-1}(1-q)^\alpha q^n, \quad n \geq 0 \ \ et \ \ 0 < \alpha < 1 \tag{3.3}$$

2.4.4 Distribution discrète Log-Convexe (Log-Concave) :

Une variable aléatoire de comptage N ou sa distribution $(p_n)_{n\geq 0}$, est dite discrète **log-convexe** $D-LCVX$ si :

$$p_n^2 \leq p_{n-1}p_{n+1}, \quad n \geq 1. \tag{3.4}$$

On écrit, $N \in D-LCVX$ ou simplement N est $D-LCVX$.

Il est facile de voir à partir de l'inégalité (3.4) que $(p_n)_{n\geq 0}$ est $D-LCVX$ si et seulement si p_{n+1}/p_n est non décroissante en n pour $n \geq 0$.

Si on inverse l'inégalité (3.4), $(p_n)_{n\geq 0}$ est dite discrète **log-concave** $D-LCAV$.

La classe $D-LCVX$ contient la classe $D-CM$.

$$D-CM \Rightarrow D-LCVX$$

Le sens de variation de taux de défaillance a une signification majeure puisqu'il indique l'usure (wear-out) du système (IFR) ou son rodage (burn-in) (DFR).

Il est souvent facile de déterminer la monotonie du taux de défaillance, étant donné son expression.

Quand ce n'est pas le cas, comme dans le temps continu, il suffit de voir si la distribution est ***log-concave*** ou ***log-convexe***.

Gupta, Gupta et Tripathi ont proposé des dépositions analogues pour les distributions discrètes avec $p_n \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

• La distribution est *log-concave* si et seulement si $\{\frac{p_{n+1}}{p_n}\}_{n\geq 1}$ est décroissante. Alors, le taux de défaillance est croissant(IFR) ;

• La distribution est *log-convexe* si et seulement si $\{\frac{p_{n+1}}{p_n}\}_{n\geq 1}$ est croissante. Alors, le taux de défaillance est décroissant(DFR) ;

•Si la suite $\{\frac{p_{n+1}}{p_n}\}_{n\geq 1}$ est *constante*, le taux de défaillance est constant et la distribution est géométrique.

Remarque :

Une fonction PF_2 est aussi appelée une fonction $log - concave$.

Dans la partie suivante, nous décrivons une classification des distributions discrètes non paramétriques comparées à la loi Géométrique composée, cette classification est introduite par Willmot et Cai (2001) (voir [24]).

2.4.5 Distribution $D - DFR$ ($D - IFR$) :

Une distribution discrète $(p_n)_{n\geq 0}$ d'une variable aléatoire de comptage N est dite

$D - DFR$ (discrete decreasing failure rate) si :

$$a_{n+1}/a_n \quad \text{est non décroissant en n pour } n \geq 0.$$

On notera $N \in D - DFR$ ou N est $D - DFR$.

Et si le rapport, a_{n+1}/a_n est non croissant en n pour $n \geq 0$, la distribution est dite $D - IFR$.

Ou bien,

$N \in D - IFR$ ($D - DFR$), si a_n est $log - concave$ ($log - convexe$) en $n \in \mathbb{N}$.

Le taux de défaillance discret peut être défini comme :

$$h_n = P(N = n/N \geq n) = \frac{p_n}{p_n + a_n}, \quad n \geq 0 \qquad (3.5)$$

Alors,il en résulte que :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - h_{n+1}, \quad n \geq 0 \tag{3.6}$$

Donc, si $(p_n)_{n\geq 0}$ est $D-DFR$, la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ est non croissante en n.

Certains auteurs comme Klefsjö (1982), Shanthikumar (1988) ont utilisé cette définition qui n'implique pas h_0. D'autres comme Barlow et Proschan (1965),Rolski et al (1999) ont appliqué des définitions qui exigent que $(h_n)_{n\geq 0}$ soit croissante pour tout n, y compris $n = 0$.

Enfin, pour éviter une telle confusion, nous avons la définition suivante.

Définition 2.6 :

Une distribution discrète $(p_n)_{n\geq 0}$ d'une variable aléatoire de comptage N est dite

$DS-DFR$ (discrete strongly decreasing failure rate) si :

$$h_n \text{ est non croissante en n pour } n \geq 0$$

On note $N \in DS-DFR$ ou N est $DS-DFR$.

Cette classe peut être définie ainsi, en terme de la fonction de survie.

Définition 2.7 :

Une variable aléatoire de comptage N ou sa distribution est dite $DS-IFR$, si :

$$a_n = P[N \geq n] \text{ est } PF_2 \text{ en n,}$$

ou bien, si le rapport :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ est décroissant en n, pour } n \geq 0.$$

Et si le rapport est croissant, la distribution est dite $DS-DFR$.

Une autre définition de cette classe est trouvée dans la littérature est la suivante :

Définition 2.8 :

Une variable aléatoire de comptage N ou sa distribution est dite $DS-IFR$ ($DS-DFR$), si a_{n-1} est $log-concave$ ($log-convexe$) en $n \in \mathbb{N}$.

L'égalité (3.6) met en évidence l'inclusion de la classe $DS-DFR$ dans la classe $D-DFR$.

Utilisant (3.5) et (3.6), l'inégalité $p_1 \leq p_0(1-p_0)$ ou comme $a_1 \geq a_0^2$ sont vérifiées le fait que $h_0 \geq h_1$,

car,

$$h_0 \geq h_1 \Leftrightarrow \frac{p_0}{p_0+a_0} \geq \frac{p_1}{p_1+a_1}$$

$$\Leftrightarrow p_1(p_0+a_0) \leq p_0(p_1+a_1)$$

$$\Leftrightarrow p_1p_0 + p_1a_0 \leq p_0p_1 + p_0a_1$$

$$\Leftrightarrow p_1a_0 \leq p_0a_1$$

$$\Leftrightarrow p_1 \leq p_0(a_1/a_0), \text{ avec } a_0 = 1$$

$$\Leftrightarrow p_1 \leq p_0a_1$$

$$\Leftrightarrow p_1 \leq p_0(1-h_0), \text{ par définition}$$

$$\Leftrightarrow p_1 \leq p_0(1-p_0), \text{ par définition}$$

Cela signifie que si $(p_n)_{n\geq 0}$ est $D-DFR$ et $p_1 \leq p_0(1-p_0)$, alors, $(p_n)_{n\geq 0}$ est $DS-DFR$.

En outre, il en résulte de (3.5) que :

$$\frac{1}{h_n} = 1+\frac{a_n}{p_n} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_{n+k}}{p_n} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{p_{n+j+1}}{p_{n+j}}, \quad n \geq 0 \tag{3.7}$$

Duquel, il est clair que la classe $D-LCVX$ est une sous-classe de $DS-DFR$.

Car, nous avons par définition, N est $D-LCVX$ si le rapport $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ est croissant,

de plus, si le taux de défaillance h_n est décroissant, N est $DS-DFR$.

D'où, l'équation (3.7) est vérifiée, on peut conclure que :

$$D - LCVX \Rightarrow DS - DFR$$

Une autre classe de distribution discrète est exposée dans le paragraphe suivant par Cai et Kalashnikov (2000) (voir [24]), il s'agit de la classe $D - NWU$.

2.4.6 Distribution $D - NWU$:

Définition 2.9 :

Une distribution discrète $(p_n)_{n\geq 0}$ d'une variable aléatoire de comptage N est dite

$D - NWU$ (discrete new worse than used) si :

$$a_{m+n} \geq a_m a_n, \quad n \geq 0$$

On écrit : $N \in D - NWU$ ou simplement N est $D - NWU$.

Définition 2.10 :

Une distribution discrète $(p_n)_{n\geq 0}$ d'une variable aléatoire de comptage N est dite discrete strongly (weakly) new worse (better) than used si :

$$a_{m+n+1} \geq (\leq) a_m a_n, \quad m, n \geq 0$$

On écrit : $N \in DS - NWU$ $(DW - NBU)$ ou simplement N est $DS - NWU$ $(DW - NBU)$.

La classe $DS - NWU$ est une sous-classe de $D - NWU$.

Exemple :

La distribution Géométrique avec :

$$p_n = (1-q)q^n, \quad n \geq 0, \quad 0 < q < 1$$

est $DS - NWU$.

En fait, dans ce cas,

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-q)q^k = q^{n+1}$$

et

$$a_{m+n+1} = q^{m+n+2} = a_m a_n$$

2.4.7 Distribution $D - IMRL$:

La durée de vie moyenne résiduelle discrète peut être définie comme :

$$r_n = E(N - n/N > n) = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)p_n}{a_n} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}}{a_n}, \tag{3.8}$$

pour tout $n \geq 0$ et $a_n > 0$.

Définition 2.11 :

Une distribution discrète $(p_n)_{n\geq 0}$ d'une variable aléatoire de comptage N est dite

$D - IMRL$ (discrete increasing mean residual lifetime) si :

r_n est non décroissante en n pour $n \geq 0$

On notera $N \in D - IMRL$ ou N est $D - IMRL$.

Autrement dit,

N est dite $D - DMRL$ ($D - IMRL$) si $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ est $log - concave$ ($log - convexe$) en $n \in \mathbb{N}$.

Étant donné que (3.8) peut s'écrit comme :

$$r_n = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}}{a_n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{a_{n+j+1}}{a_{n+j}}$$

la classe de distribution $D - DFR$ est une sous-classe de $D - IMRL$.

Définition 2.12 :

Une variable aléatoire de comptage N ou sa distribution est dite $DS-DMRL$ ($DS-IMRL$) si $\sum_{k=n-1}^{\infty} a_k$ est *log − concave* (*log − convexe*) en $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème suivant décrit la propriété *log − concave* de la fonction discrète de la durée de vie moyenne résiduelle r_n, $r_n = E[N-n/N>n]$, où,

$$r_n = \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i, n \in \mathbb{N};$$

avec $a_i = p_i + p_{i+1} + ...$ et $v_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.1 : Voir *Bander Al-Zahrani* et *Jordan Stoyanov* [6].

La fonction discrète de la durée de vie moyenne résiduelle r_n, $n \in \mathbb{N}$, est *monotone décroissante* si et seulement si la fonction v_n, $n \in \mathbb{N}$, est *log − concave*.

Preuve :

Notons que $a_{n+1} = v_{n+1} - v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} v_n \;\; est \;\; log - concave &\Leftrightarrow v_{n+1}^2 \geq v_n v_{n+2}, \\ &\Leftrightarrow v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) \geq v_n(v_{n+2} - v_{n+1}), \\ &\Leftrightarrow v_{n+1}a_{n+1} \leq v_n a_{n+2}, \\ &\Leftrightarrow r_{n+1} \leq r_n, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

D'où, r_n, $n = 0, 1, 2, ...$, est *monotone décroissante.* □

Notons que la fonction de la classe duale $D-IMRL$ est *monotone croissante* si et seulement si la fonction v_n, $n \in \mathbb{N}$, est *log − convexe*.

2.5 Relations d'inclusion entre les classes de distribution discrète :

La classe de distribution Log-convexe $D - LCVX$ est une sous-classe de chacune des classes $DS - DFR$ et $D - CG$.

$$\begin{array}{ccc} D - LCVX & \Rightarrow & DS - DFR \\ \Downarrow & & \\ D - CG & & \end{array}$$

Donc, nous voulons savoir qu'elle est la nature de la relation existant entre ces deux dernières classes.

Le théorème suivant prouve une partie de la réponse à cette question.

Théorème 2.2 : [24]

Supposons que N est une $D-CG$ avec une fonction génératrice $P(z)$ définie en chapitre I :

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1-p}{1-pQ(z)}$$

et $Q(z)$ est une pgf d'une variable aléatoire $D - DFR$.

Alors, N est $DS - DFR$.

Preuve :

Notons d'abord qu'il peut être supposé sans perte de généralité que $Q(0) = 0$, c'est-à-dire (3.1) s'écrit comme :

$$P(z) = \frac{1-p}{1-pQ(z)} = \frac{1-a_0}{1-a_0 Q^*(z)} \qquad (3.9)$$

Où

$$0 < a_0 = \frac{p(1-q_0)}{1-pq_0} < 1 \qquad (3.10)$$

$$Q^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^* z^n = \frac{Q(z)-q_0}{1-q_0} \qquad (3.11)$$

Ceci implique que :

$$q_n^* = \frac{q_n}{1-q_0}, \quad n \geq 1. \tag{3.12}$$

Ainsi, $(q_n^*)_{n\geq 1}$ est $D-DFR$ puisque $(q_n)_{n\geq 0}$ est $D-DFR$ et le fait que $\overline{Q}_n = (1-q_0)\overline{Q}_n^*$,

où

$$\overline{Q}_n^* = \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k^*$$

Nous avons :

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1-P(z)}{1-z}, \quad |z| < z_0$$

Utilisons l'équation (3.9), nous obtenons :

$$A(z) = a_0 \left(\frac{1-K(z)}{1-z} \right) \tag{3.13}$$

Avec,

$$K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n = \frac{(1-a_0)Q^*(z)}{1-a_0 Q^*(z)} \tag{3.14}$$

D'où, comme $(q_n^*)_{n\geq 1}$ est $D-DFR$, il en résulte que $(k_n)_{n\geq 1}$ est $D-DFR$.

Cependant, celà implique que N est $D-DFR$, car $a_n = a_0 \sum_{m=n+1}^{\infty} k_m$ d'après (3.13).

Nous avons à partir de (3.9), $p_1 = a_0 q_1^* p_0$.

Par conséquent,

$$p_1 = p_0(1-p_0)q_1^* \leq p_0(1-p_0)$$

et par définition, N est $DS-DFR$. $\square$

L'exemple suivant montre qu'en général, la classe $D-CG$ n'est pas une sous-classe de $DS-DFR$.

Exemple 1 :

On considère $P(z) = \frac{1-p}{1-pz^2}$, $Q(z) = z^2$

Alors, $p_0 = P(N = 0) = P(0) = 1 - p$

$p_1 = P(N = 1) = 0$ et $p_2 > 0$

Donc, $a_0 = p$, $a_1 = p$ et $a_2 < a_1$, par conséquent,

$$\frac{a_2}{a_1} < 1 = \frac{a_1}{a_0}$$

Ce qui implique que N n'est ni $DS - DFR$ ni $D - DFR$.

On considère maintenant la classe de distribution $DS - DFR$ comme une sous-classe de $D - CG$.

La propriété suivante de la classe $D - CG$ est pertinente dans cet égard.

Proposition 13 : [24]

Si N est une classe de distribution $D - CG$, alors, $p_2 p_0 \geq p_1^2$

Preuve :

Il est facile de voir à partir de l'équation (3.1)que :

$$p_0 = (1 - p)/(1 - pq_0),$$

$$p_1 = pq_1 p_0/(1 - pq_0),$$

et

$$p_2 = p(q_1 p_1 + q_2 p_0)/(1 - pq_0) = (p_1^2/p_0) + q_2 p_1/q_1$$

Étant donné $q_2 \geq 0$, il en résulte que :

$$q_2 = q_1(p_2 p_0 - p_1^2)/(p_1 p_0) \qquad \square$$

Cette proposition implique qu'une distribution $DS-DFR$ avec $p_2p_0 < p_1^2$ n'est pas $D-CG$, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 2 :

On considère la suite $\{p_n^*\}_{n\geq 1}$ avec $p_0^* = 0$, et une suite $\{p_n\}_{n\geq 0}$ zéro-modifiée, où $p_n = (1-p_0)p_n^*$ pour $n \geq 1$.

Alors, si $p_1^* > 0$, $\{p_n^*\}_{n\geq 1}$ n'est pas $DS-DFR$ puisque $p_1^* > p_0^*(1-p_0^*) = 0$, par définition.

Mais, $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = (1-p_0)\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k^* = (1-p_0)a_n^*$,

Ce qui implique que $\{p_n^*\}_{n\geq 1}$ est $D-DFR$ si et seulement si $\{p_n\}_{n\geq 0}$ est $D-DFR$.

C'est le cas si,

$$\frac{p_{n+1}^*}{p_n^*} < \frac{p_{n+2}^*}{p_{n+1}^*}, \qquad n \geq 1 \tag{3.15}$$

Notons à partir de (3.7) que si $n \geq 1$, alors,

$$\frac{1}{h_n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{p_{n+j+1}}{p_{n+j}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{p_{n+j+1}^*}{p_{n+j}^*}$$

qui est strictement croissante.

En particulier, quand $n = 1$, nous avons à partir de (3.5) :

$$p_1^* = \frac{p_1^*}{p_1^* + a_1^*} = \frac{p_1}{p_1 + a_1} = h_1 > h_2 = \frac{p_2}{p_2 + a_2} = \frac{p_2^*}{a_1^*} = \frac{p_2^*}{1 - p_1^*},$$

c'est-à-dire,

$$p_2^* < p_1^*(1-p_1^*) \Leftrightarrow p_1^* + (p_2^*/p_1^*) < 1$$

Deux distributions vérifiant (3.15) sont :

• La distribution logarithmique : $p_n^* = q^n/\{-nlog(1-q)\}$ où $0 < q < 1$;

• et l'extension de la distribution binomiale négative tronquée :

$$p_n^* = \{\prod_{j=0}^{n-1}(r+j)\}(\beta/(1+\beta))^n/\{n!(\{1+\beta\}^r - 1)\}$$

Où, $\beta > 0$ et $-1 < r < 0$.

Utilisons la définition : $p_n = (1 - p_0)p_n^*$,

La distribution $\{p_n\}_{n\geq 0}$ est alors $DS - DFR$ si,

$$p_1 \leq p_0(1 - p_0)$$

$$\Leftrightarrow p_1^* \leq p_0, \quad \text{par définition.}$$

En fait, $\{p_n\}_{n\geq 0}$ est $D - LCVX$ si,

$$\frac{p_2}{p_1} \geq \frac{p_1}{p_0}$$

d'après (3.15).

c'est équivalent à :

$$p_2^*/p_1^* \geq p_1^*(1 - p_0)/p_0$$

ce qui est équivalent à :

$$p_0 \geq p_1^*/\{p_1^* + (p_2^*/p_1^*)\}$$

Par conséquent, en inversant cette inégalité, ceci implique que la suite $\{p_n\}_{n\geq 0}$ est $DS - DFR$, mais pas $D - LCVX$ (ni $D - CG$ selon la proposition précédente) si,

$$p_1^* \leq p_0 < p_1^*/\{p_1^* + (p_2^*/p_1^*)\}$$

On considère une relation entre la classe de distribution $D-CG$ et la classe $DS-NWU$. Nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 2.13 :

Une variable aléatoire non négative X ou sa fonction de distribution :

$$F(x) = 1 - \overline{F}(x) = P(X \leq x)$$

est dite Decreasing Failure Rate ($D - DFR$) si :

$\overline{F}(x+y)/\overline{F}(x)$ est non décroissante en $x \geq 0$ pour tout $y \geq 0$ fixé.

Et est dite New Worse than Used ($D - NWU$) si :

$$\overline{F}(x+y) \geq \overline{F}(x)\overline{F}(y),\ x \geq 0,\ y \geq 0 \tag{3.16}$$

Théorème 2.3 : Voir référence [24]

Si N est une variable aléatoire discrète de comptage et N est $D - NWU$, alors N est $DS - NWU$.

Preuve :

Nous avons pour $n, m = 0, 1, 2, ...,$

$$a_{m+n+1} = P(N > m+n+1) \geq P(N > m + \frac{1}{2})P(N > n + \frac{1}{2})$$

$$= P(N > m).P(N > n) = a_m a_n. \qquad \square$$

Propriété 1 : Voir référence [20].

Si B est une distribution $D - NWU$ sur $[0, +\infty[$, alors, la distribution de mélange de poisson avec :

$$P_n = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!} dB(x),\ n \geq 0 \text{ et } \lambda \geq 0$$

est $DS - NWU$.

Preuve :

Pour un mélange de distribution de poisson, on sait que :

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^\infty \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!} dB(x) \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \frac{\lambda(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} dy dB(x) \\
&= \lambda \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!} \overline{B}(x) dx \\
&=^d \beta_{n+1}.
\end{aligned}$$

D'où, $\beta_{m+n} \geq \beta_m \beta_n$ pour tout $m > 0$ et $n > 0$ si B est $D - NWU$.

Ceci implique que pour tout $n \geq 0$ et $m \geq 0$,

$$a_{m+n+1} = \beta_{m+n+2} \geq \beta_{m+1}\beta_{n+1} = a_m a_n;$$

Par conséquent, la distribution de mélange de poisson est $DS - NWU$ si B est $D - NWU$. $\square$

Nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 : [24]

Si N est $D - CG$ alors N est $DS - NWU$.

Preuve :

Brown (1990) a démontré qu'une distribution géométrique composée est $D - NWU$.

Si $\{X_i\}_{i\geq 1}$est une suite de variables aléatoires non négatives indépendantes identiquement distribuées et N_0 suit une loi géométrique avec :

$$P(N_0 = k) = q^k p, \quad k \geq 0$$

et indépendante de $\{X_i\}$.

Alors, $Y_0 = \sum_{i=1}^{N_0} X_i$ est appelée une convolution géométrique de X .

On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Y_0 = S_{N_0}$.

Lemme 2 : Voir *Mark Brown* [32].

Y_0 est $D - NWU$.

Preuve :

Pour $t > 0$,

On définit $M_t = min\{k; S_k > t\}$.

Comme M_t est indépendant de N_0, il résulte de la propriété d'absence de mémoire d'une distribution géométrique que $(N_0 - M_t / N_0 \geq M_t) \sim N_0$.

En outre, puisque M est un temps d'arrêt,

$$\{X_{M_t+i}, i \geq 1\} \sim \{X_i, i \geq 1\}$$

Alors,

$$\left(\sum_{M_t+1}^{N_0} X_i / N_0 \geq M_t \right) \sim \sum_{i=1}^{N_0} X_i = Y_0 \tag{3.17}$$

Notons que les événements $\{Y_0 > t\}$ et $\{N_0 \geq M_t\}$ sont équivalents. Alors, leurs fonctions indicatrices sont égales,

$$I_{\{Y_0 > t\}} = I_{\{N_0 \geq M_t\}}.$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} (Y_0 - t) I_{\{Y_0 > t\}} &= \left[\{ (\textstyle\sum_{i=1}^{M_t} X_i) - t \} + \sum_{M_t+1}^{N_0} X_i \right] I_{\{Y_0 > t\}} \qquad (3.18) \\ &\geq \left(\textstyle\sum_{M_t+1}^{N_0} X_i \right) I_{\{N_0 \geq M_t\}} \end{aligned}$$

Ensuite, notons que pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(Y_0 > t + x) &= P\left((Y_0 - t) I_{\{Y_0 > t\}} > x \right) \\ &\geq P\left((\textstyle\sum_{M_t+1}^{N_0} X_i) I_{\{N_0 \geq M_t\}} > x \right), \quad \text{d'après (3.18)} \end{aligned}$$

$$= P\left(\sum_{M_t+1}^{N_0} X_i > x, N_0 \geq M_t\right)$$

$$= P\left(\sum_{M_t+1}^{N_0} X_i > x / N_0 \geq M_t\right) P\left(N_0 \geq M_t\right)$$

$$= P(Y_0 > x) P\left(N_0 \geq M_t\right) \quad \text{d'après (3.17)}$$

$$P(Y_0 > t + x) = P(Y_0 > x) P(Y_0 > t)$$

D'où, Y_0 est $D - NWU$. $\square$

2.6 Propriétés de la somme aléatoire S :

Cette section comprend quelques propriétés de la somme aléatoire S.
(Voir référence [23])

On suppose une suite de variables aléatoires $\{X_i\}, i \in \mathbb{N}^+$, non négatives et une variable aléatoire de comptage N qui sont mutuellement indépendantes.

On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$.

Ce modèle est apparu dans divers domaines des probabilités appliquées, spécialement dans l'actuariat et la théorie de la fiabilité. Par exemple, la durée de vie d'un système subissant des chocs peut être modélisée par une somme aléatoire S où N représente le nombre de chocs que le système peut supporter et X_i les intervalles d'inter-chocs.

Etant donnée une suite $\{X_i\}$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, Brown (1990) a montré que S est NWU, si N suit une loi géométrique. Cai et Kalashnikov (2000) ont généralisé ce résultat en montrant que $S \in NWU$, si $N \in DS{-}NWU$.

Willmot et al (2005) ont prouvé que $S \in NWUE$, si $S \in DS - NWUE$.

Notons par $B(x)$ la fonction de distribution de S, $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$.

$\overline{B_e}(x)$ est la fonction de distribution d'équilibre de survie de S.

De plus, nous avons :

$\bullet S = X_1 + X_2 + ... + X_k; k \in \mathbb{N}^+$.

$\bullet a_k(x) = P[X_1 + X_2 + ... + X_k > x], k \in \mathbb{N}, x \geq 0,$

$\bullet N(x) = sup\{k : X_1 + X_2 + ... + X_k \leq x\}, x \geq 0,$

On suppose ici que $a_0(x) = 0$, pour tout $x \geq 0$.

Proposition 14 : [23].

Pour tout $x \geq 0$, $\overline{B}(x) = E(a_{N(x)})$.

Preuve : Pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\overline{B}(x) &= P[S > x] \\
&= P[X_1 + X_2 + ... + X_k > x] \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} P[N = k]\overline{F}_k(x) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k[\overline{F}_{k+1}(x) - \overline{F}_k(x)], \text{ avec } P(N = k) = P(N \geq k) - P(N \geq k+1) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k P\{S_k \leq x < S_{k+1}\} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k P\{N(x) = k\} \\
&= E(a_{N(x)}). \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 2.4 : [23].

Si $N \in DS - NWUE$, les X_i, i=1,2,... sont des variables aléatoires discrètes et $\mu_i = \mu > 0$, i=1,2,..., alors, $S \in DS - NWUE$.

Par conséquent, si N est $D - CG$, alors N est $D - NWU$ et d'après le théorème précédent, si N est $D - NWU$, alors, elle est $DS - NWU$.

Proposition 15 : [20]

Une distribution discrète complètement monotone, c'est-à-dire, une distribution de mélange géométrique avec :

$$p_n = \int_0^1 (1-q)q^n dB(q), \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

est $DS - NWU$, où B une distribution de probabilité sur $[0, 1]$.

Preuve : Dans ce cas, nous avons :

$$a_n = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-q)q^k dB(q)$$

$$= \int_0^1 q^{n+1} dB(q),$$

et

$$a_{m+n+1} = \int_0^1 q^{m+n+2} dB(q),$$

et d'après l'inégalité de Lyapounov's :

$$E|X|^{\alpha} \leq |E|X|^{\beta}|^{\alpha/\beta}, \qquad 0 < \alpha \leq \beta$$

Nous avons :

$$a_{m+n+1} \geq \int_0^1 q^{m+1} dB(q) \int_0^1 q^{n+1} dB(q)$$

$$= a_m a_n. \qquad \square$$

D'où,

$$D - CM \Rightarrow DS - NWU$$

Nous démontrons maintenant qu'une classe de distribution $DS - DFR$, comme la classe $D - CG$, est une sous-classe de $DS - NWU$.

Théorème 2.5 : [24].

Si N est $DS - DFR$ alors N est $DS - NWU$.

Preuve :

Par définition, l'inégalité $h_0 \geq h_1$ peut être décrite comme $a_1 \geq a_0^2$. Aussi, puisque N est $DS - DFR$ et par conséquent elle est $D - DFR$, il est clair que a_{n+k}/a_n est croissante en $n \geq 0$ pour tout $k \geq 0$, car,

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} = \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{3.19}$$

Alors,

$$\frac{a_{m+n+1}}{a_n} = \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} \cdot \frac{a_{m+n}}{a_n} \geq \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_m}{a_0} = \frac{a_1}{a_0^2} a_m, \tag{3.20}$$

$$\frac{a_{m+n+1}}{a_n} \geq a_m, \tag{3.21}$$

En prenant dans l'inégalité (3.20),$m = n = 0$ et $n = 0$ en $\frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}}$ et $\frac{a_{m+n}}{a_n}$, respectivement. De plus, $\frac{a_{n+k}}{a_n}$ est croissante en $n \geq 0$.

D'où, l'inégalité (3.21) implique que N est $DS - NWU$. $\square$

Donc, ce théorème montre qu'une classe de distribution $DS - DFR$ est contenue dans la classe $DS - NWU$.

Comme la classe $DS - DFR$ est une sous classe de chacune des classes $D - DFR$ et $DS - NWU$, il est naturel d'explorer une relation entre ces deux dernières classes.

L'inégalité $a_{m+n+1} \geq a_m a_n$ avec $m = 0$ et $n = 0$, devient $a_1 \geq a_0^2$, ce qui est équivalent à $h_0 \geq h_1$ par définition.

Donc, toute distribution $D - DFR$ pour laquelle $a_1 < a_0^2$ (ou équivalent à $p_1 > p_0(1 - p_0)$) n'est pas $DS - NWU$.

D'où,

$$D - DFR \subset D - NWU, \quad D - DFR \nRightarrow DS - NWU$$

Exemple 3 :

Soit N_1 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec une probabilité :

$$p_n = P(N_1 = n) = (1 - q)q^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad 0 < q < 1;$$

Donc,

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-q)q^{k-1}$$

$$= q^n,$$

ainsi que, $a_{m+n} = a_m a_n$ et N_1 est $D - NWU$.

En outre, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ est une constante, ce qui implique que N_1 est $D - DFR$.

Mais, elle n'est pas $DS - NWU$, car,

$$a_{m+n+1} = q a_m a_n < a_m a_n$$

2.7 Caractérisation des distributions non paramétriques de survie en terme de la distribution d'équilibre :

Les distributions d'équilibre discrètes sont liées étroitement aux définitions de certaines classes de distributions discrètes.

Pour une fonction de distribution cumulée discrète (c.d.f),

$$F(n) = 1 - \overline{F}(n) = 1 - a_n = \sum_{i=0}^{n} f_i, \quad n \in \mathbb{N}$$

avec une moyenne finie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j > 0$, où, f est la densité de probabilité de F.

Le taux de défaillance associé est :

$$h_F(n) = \frac{P(N = n)}{P(N \geq n)} = \frac{f(n)}{f(n) + a_n}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $P(N \geq n) > 0$.

On définit une fonction de distribution d'équilibre cumulée discrète de F par :

$$F_e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{\sum_{j=0}^{\infty} a_j} & \text{si } n \in \mathbb{N}_+ \end{cases}$$

Par conséquent, une distribution d'équilibre discrète est zéro-tronquée et la densité de probabilité est donnée par :

$$f_e(n) = \frac{a_{n-1}}{\sum_{j=0}^{\infty} a_j}, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

Beaucoup de classes de distributions discrètes peuvent être définies en terme de la distribution d'équilibre discrète. En outre, une distribution d'équilibre discrète est apparue dans certaines applications comme l'actuariat et les files d'attente.

On considère les classes de distributions discrètes suivantes qui sont liées aux distributions d'équilibre discrètes.

<u>Définition 2.14</u> :

Une distribution discrète F est appelée "Discrete New Worse than Used dans l'ordre Convexe" ou $D-NWUC$ (Discrete New Better than Used dans l'ordre Convexe ou $D-NBUC$)si :

$$\sum_{i=n+m}^{\infty} a_i \geq (\leq) a_n \sum_{j=m}^{\infty} a_j, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

équivalent à :

$$\overline{F}_e(n+m) \geq (\leq) a_n \overline{F}_e(m) \qquad \text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}.$$

<u>Définition 2.15</u> :

Une distribution discrète F est appelée "Discrete New Worse than Used in Expectation" ou $D-NWUE$ (Discrete New Better than Used in Expectation ou $D-NBUE$)si :

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i \geq (\leq) a_n \sum_{j=0}^{\infty} a_j, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

équivalent à :

$$\overline{F}_e(n) \geq (\leq) a_n, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

<u>Définition 2.16</u> :

Une distribution discrète F est appelée "Discrete Strongly New Worse than Used dans l'ordre Convexe" ou $DS-NWUC$ (Discrete Weakly New Better than Used dans l'ordre Convexe" ou $DW-NBUC$) si :

$$\sum_{i=n+m+1}^{\infty} a_i \geq (\leq) a_n \sum_{j=m}^{\infty} a_j, \qquad \text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}$$

équivalent à :

$$\overline{F}_e(n+m+1) \geq (\leq) a_n \overline{F}_e(m) \qquad \text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}.$$

Définition 2.17 :

Une distribution discrète F est appelée "Discrete Strongly New Worse than Used in Expectation" ou $DS - NWUE$ (Discrete Weakly New Better than Used in Expectation ou $DW - NBUE$)si :

$$\textstyle\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \geq (\leq) a_n \sum_{j=0}^{\infty} a_j, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

équivalent à :

$$\overline{F}_e(n+1) \geq (\leq) a_n, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

D'autres classes qui peuvent être définies en terme de distribution d'équilibre discrète sont $DS - DMRL$ (Discrete Strongly decreasing Mean Residual Lifetime) et $D - DMRL$.

Définition 2.18 :

Une distribution discrète F est appelée "Discrete Strongly Decreasing Mean Residual Lifetime" ou $DS - DMRL$ si sa durée de vie moyenne résiduelle :

$$r_F(n) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i / a_n$$

est non croissante pour $n \in \mathbb{N}$ et $a_n > 0$.

La classe $DS - DMRL$ est une sous-classe de $D - DMRL$.

Nous avons aussi la classe de distribution $DS - HNWUE$ ($DW - HNBUE$) qui peut être caractérisée en termes des ordres stochastiques. [23]

D'abord, nous introduisons les définitions des ordres stochastiques utiles pour définir la classe de distribution de survie.

Définition 2.19 :

Soient N et M deux variables aléatoires non négatives, alors, $N \leq_{st} M$ si et seulement si :

$$E(f(N)) \leq E(f(M))$$

pour toute fonction réelle non décroissante.

<u>Définition 2.20</u> :

Soient N et M deux variables aléatoires non négatives, alors, $N \leq_{icx} M$ si et seulement si :

$$E(f(N)) \leq E(f(M))$$

pour toute fonction réelle convexe non décroissante.

Citons maintenant la définition de la classe $DS - HNWUE$.

<u>Définition 2.21</u> :

Soit N une variable aléatoire discrète avec une fonction de survie a_n, $n \in \mathbb{N}$, et une moyenne μ_N telle que :

$$\mu_N = E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Si $0 < \mu_N < \infty$, notons par N_e la variable aléatoire d'équilibre non négative qui a une fonction de survie $\overline{F_e}(n)$, telle que :

$$\overline{F_e}(n) = P[N_e > n] = \frac{1}{\mu_N} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+j}, n \in \mathbb{N}$$

De plus, soit $M \sim G(1/(1+\mu))$, alors,

$N \in DS - HNWUE(DW - HNBUE)$ si et seulement si :

$\overline{F_e}(n) \geq (\leq) \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou bien si,

$N_e \geq_{st} (\leq_{st}) M$, ou si,

$N \geq_{icx} (\leq_{icx}) M$.

Ainsi, une autre définition pour cette classe est la suivante.

<u>Définition 2.23</u> :

N est dite $DS - HNWUE$ $(DW - HNBUE)$, si

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \geq (\leq) \mu \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k, \forall k \in \mathbb{N},$$

où, $\mu = E(N)$.

<u>**Proposition 16**</u> : Voir référence [44].

$$DW - NBUE(DS - NWUE) \Rightarrow DW - HNBUE(DS - HNWUE)$$

<u>**Preuve**</u> : Par définition, nous avons :

N est $DW - NBUE$ $(DS - NWUE)$ si,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq (\geq) a_n \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

De plus, N est $DW - HNBUE$ $(DS - HNWUE)$ si,

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq (\geq) \mu \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^n$$

avec, $\mu = E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

La première inégalité peut s'écrire comme :

$$\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} \leq (\geq) \frac{\mu}{1+\mu}$$

Donc,

$$\frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{\mu} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sum_{j=k}^{\infty} a_j}{\sum_{j=k-1}^{\infty} a_j} \leq (\geq) \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^n, \forall k \in \mathbb{N}$$

Ce qui implique que N est $DW - HNBUE$ $(DS - HNWUE)$. $\square$

Utilisons les définitions des classes $D - HNBUE$, $DW - HNBUE$, $DS - HNWUE$ et $D - HNWUE$, nous avons la classification suivante,

$$D - HNBUE \Rightarrow DW - HNBUE$$

et

$$DS - HNWUE \Rightarrow D - HNWUE$$

Lemme 3 : [30].

F est $DS - DMRL$ ($D - DMRL$) si et seulement si sa distribution d'équilibre F_e est $DS - IFR$ ($D - IFR$).

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}_-$,

nous avons par définition F est $DS - DMRL$ si $r_F(n)$ est décroissante, alors :

$$\frac{1}{r_F(n)} = \frac{a_n}{\sum_{i=n}^{\infty} a_i}$$

$$= \frac{f_e(n+1)}{\overline{F}_e(n)}$$

La fonction $\overline{F}_e(n)$ peut s'écrit comme $f_e(n+1) + \overline{F}_e(n+1)$, donc,

$$\frac{1}{r_F(n)} = \frac{f_e(n+1)}{f_e(n+1)+\overline{F}_e(n+1)}$$

$$= h_{F_e}(n+1)$$

Ainsi, $r_F(n)$ est non croissante pour $n \in \mathbb{N}_-$ ($\mathbb{N}$) si et seulement si h_{F_e} est non décroissante pour $n \in \mathbb{N}_+$ ($\mathbb{N}$).

Par conséquent, F est $DS - DMRL$ ($D - DMRL$) si et seulement si sa distribution d'équilibre F_e est $DS - IFR$ ($D - IFR$). $\square$

De même, nous avons le résultat suivant pour la classe $D - IMRL$.

Lemme 4 : [30]

F est $D - IMRL$ si et seulement si sa distribution d'équilibre F_e est $D - DFR$.

Remarque :

Une distribution zéro-tronquée ne peut pas être $DS - DFR$, étant donné que la distribution n'a pas de densité, car nous avons par définition, N est $DS - DFR$ si h_n est décroissante avec $h_n = \frac{f_n}{f_n+a_n}$.

Par conséquent, les relations d'inclusion entre $DS-DFR$, $D-DFR$ et $DS-NWU$ sont considérées seulement pour les distributions qui ne sont pas zéro-tronquée.

La classe de distribution $DS-DFR$ est une sous-classe appropriée de la classe $DS-NWU$, et la classe $D-IFR$ est une sous-classe propre de la classe $D-DMRL$.

A titre d'exemple, nous montrons que la classe $D-IMRL$ est une sous-classe de $D-NWUC$.

Pour ce faire, soit F une distribution $D-IMRL$; alors, F_e est $D-DFR \subset D-NWU$.

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_n}{\overline{F}_e(n)\sum_{i=0}^{\infty} a_i} = \frac{f_e(n+1)}{\overline{F}_e(n)} = 1 - \frac{\overline{F}_e(n+1)}{\overline{F}_e(n)} \leq 1 - \overline{F}_e(1) = F_e(1) = \frac{a_0}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i} \tag{4.1}$$

équivalent à,

$$a_n \leq \overline{F}_e(n) a_0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

Par conséquent,

$$\overline{F_e}(n+m) \geq \overline{F}_e(n)\overline{F}_e(m) \geq \overline{F}_e(n)\overline{F}_e(m)a_0 \geq a_n \overline{F}_e(m), \quad n, m \in \mathbb{N} \tag{4.3}$$

D'où, F est $D-NWUC$.

Il est facile de voir que la seconde inégalité dans (4.3) peut être inversée que si F est $D-DMRL$ et zéro-tronquée ou $a_0 = 1$.

Ainsi, en inversant les inégalités dans (4.1) et (4.3), on peut conclure que toute distribution zéro-tronquée de la classe $D-DMRL$ forme une sous-classe de $D-NBUC$.

2.8 Classification :

Le diagramme suivant présente les relations entre les classes de distributions discrètes établies (une implication prescrit l'appartenance d'une classe à l'autre et la flèche indique que l'inclusion d'une classe dans l'autre exige une condition supplémentaire que la distribution soit zéro-tronquée) :

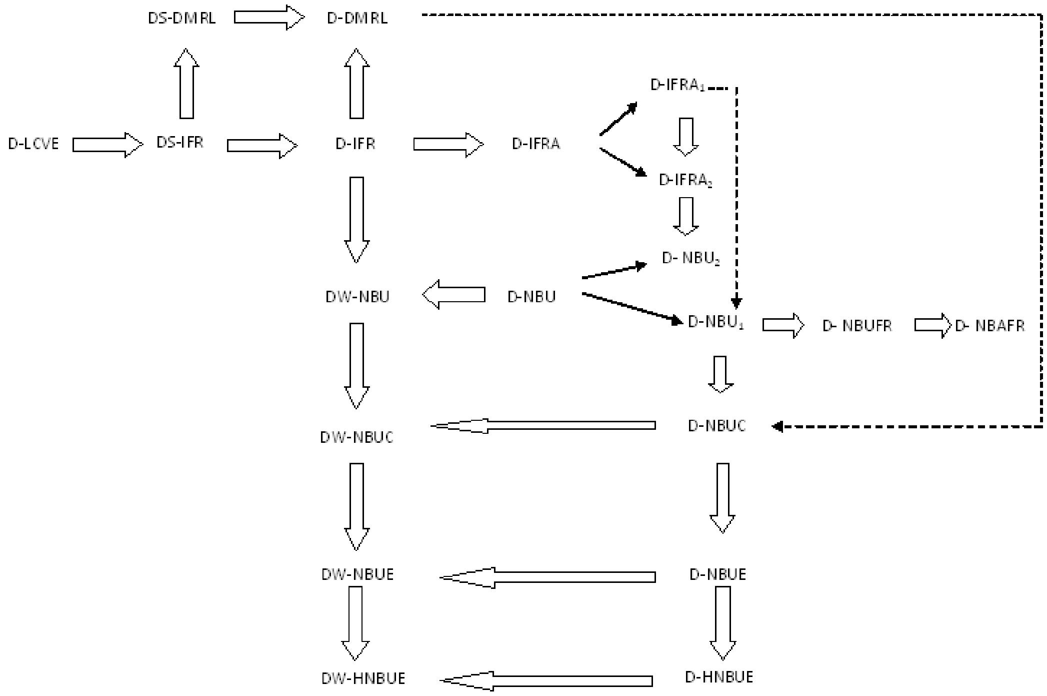

FIG. 2.1 – Classification des lois non paramétriques discrètes

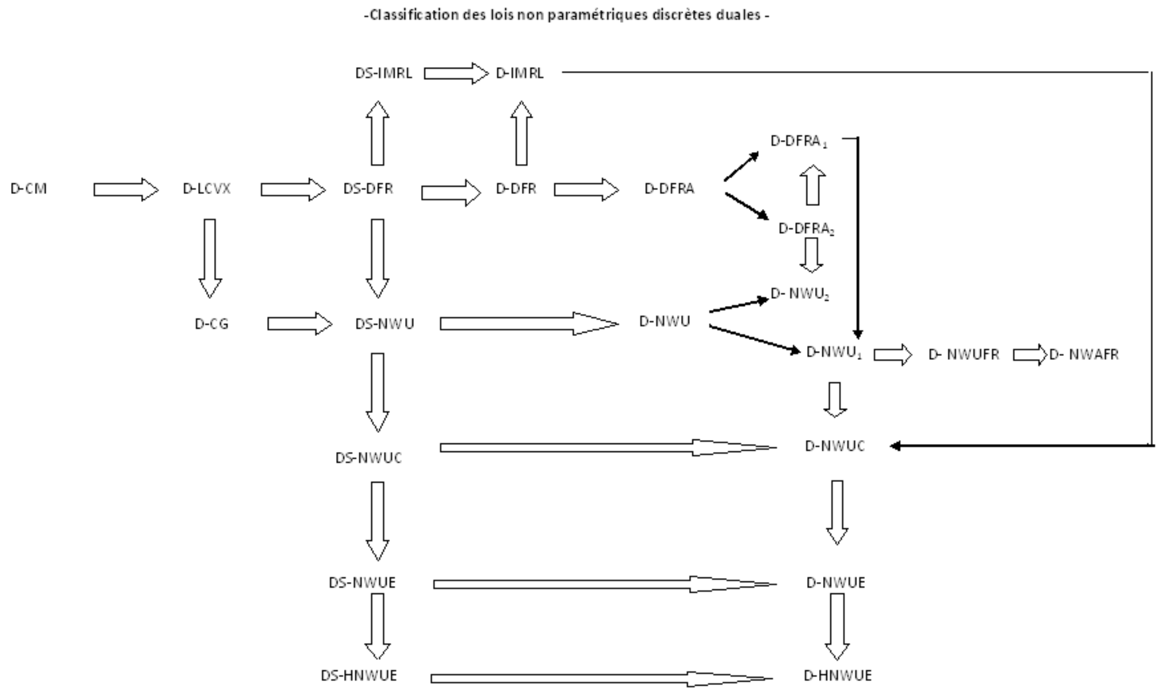

Fig. 2.2 – Classification des lois non paramétriques discrètes duales

Chapitre III

Conservation des classes de lois non paramétriques discrètes

Chapitre 3

Conservation des classes de lois non paramétriques discrètes

Ce chapitre est consacré aux propriétés de conservation des classes de lois non paramétriques discrètes par des opérations de fiabilité les plus utilisées.

Il y a deux opérations importantes associées aux distributions non paramétriques discrètes dans le cadre de modéliser la probabilité en assurance, finance, fiabilité, files d'attente et bien d'autres domaines : ***Convolution*** et ***Mélange***.

Le problème qui se pose est de savoir si la classe est conservée ou non par ces deux opérations.

Nous allons présenté certaines démonstrations des principaux théorèmes de conservation des classes de distributions non paramétriques que nous avons pu établir au cours de ce mémoire. Voir référence [30].

Définition 3.1 :

Soit **C** une classe de distribution non paramétrique discrète $(D-IFR, D-NBU, ...)$.

La classe **C** est dite fermée ou stable par l'opération de la fiabilité $*$ (ou que la propriété **C** est conservée), si

$$F \in \mathbf{C}, G \in \mathbf{C} \Rightarrow F * G \in \mathbf{C}.$$

3.1 Conservation des classes par Convolution :

Dans ce qui suit, nous démontrons la conservation de certaines classes de distribution discrète par convolution.

Soulignons d'abord que, F est $D-IFR$ ($D-DFR$) si et seulement si :

$$[a_{n+1}]^2 \geq (\leq) a_n a_{n+2}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Théorème 3.1.1 : [30]

Soient F_1 et F_2 deux fonctions de distribution $D-IFR$, alors,
leur convolution $F = F_1 * F_2$ n'est pas nécessairement $D-IFR$.

Preuve :

Soit f_i la densité de probabilité de F_i, telle que :

$f_i(0) = \frac{x}{x+1}$, $f_i(1) = 0$ et $f_i(2) = \frac{1}{x+1}$, $\quad x \in \mathbb{N}_+, \quad i = 1, 2$

Les deux fonctions F_1 et F_2 sont $D-IFR$.

Comme la densité de $F = F_1 * F_2$ est telle que :

$$f_n = \begin{cases} \frac{x^2}{(x+1)^2}, & \text{n} = 0, \\ \frac{2x}{(x+1)^2}, & \text{n} = 2, \\ \frac{1}{(x+1)^2}, & \text{n} = 4, \\ 0 \quad , & \text{n} = 1,3 \quad ou \quad n \geq 5 \end{cases}$$

nous avons,

$$a_n = \begin{cases} \frac{2x+1}{(x+1)^2}, & \text{n} = 0, 1, \\ \frac{1}{(x+1)^2}, & \text{n} = 2, 3, \\ 0 \quad , & \text{n} \geq 4 \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$[a_2]^2 = \frac{1}{(x+1)^4} < a_1 a_3 = \frac{2x+1}{(x+1)^4}$$

Par conséquent, F n'est pas $D-IFR$ d'après (1.1). $\square$

Théorème 3.1.2 : [30]

Soient F_1 et F_2 deux fonctions de distribution $DS-IFR$, alors,
leur convolution $F = F_1 * F_2$ est aussi $DS - IFR$.

Théorème 3.1.3 : [30]

Soient F_1 et F_2 deux fonctions de distribution $D-IFRA$, alors,
leur convolution $F = F_1 * F_2$ est aussi $D - IFRA$.

Preuve :

La démonstration est analogue à celle donnée dans le cas continu par Block et Savits (1976), en appliquant la définition suivante (Voir référence [28]) :

Définition 3.2 :

Soit F une fonction de distribution tel que $F(0^+) = 0$. F est dite une distribution $IFRA$ si et seulement si pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$ et $n \geq 0$,

$$\overline{F}(\alpha n) \geq \overline{F}^{\alpha}(n)$$

Plus précisément, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $m = \alpha n$.

Alors, la définition de la classe de distribution $D - IFRA$ peut être équivalente à :

$$\overline{F}_i(n) \leq [\overline{F}_i(\alpha n)]^{1/\alpha}$$

Théorème 3.1.4 : [30]

Soient F_1 et F_2 deux fonctions de distribution $D-DMRL$, alors,
leur convolution $F = F_1 * F_2$ n'est pas nécessairement $D - DMRL$.

Preuve : Pour $i = 1, 2$, soit :

$$a_n(i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad \text{n} = 0, 1, 2 \\ 0 & , \quad \text{n} \geq 3 \end{cases}$$

Alors,

$$\sum_{j=n}^{\infty} a_j(i) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \text{n} = 0, \\ 1, & \text{n} = 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{n} = 2, \\ 0, & \text{n} \geq 3 \end{cases}$$

Ce qui implique que F_i, $i = 1, 2$, sont $D - DMRL$.

Néanmoins, leur convolution $F = F_1 * F_2$ n'est pas $D - DMRL$ car il est facile de voir que $r_F(2) = 2 < r_F(3) = 3$, où

$$r_F(n) = \sum_{j=n}^{\infty} a_j / a_n$$

En outre, nous pouvons montrer que la convolution d'une distribution $DS - DMRL$ et une distribution $DS - IFR$ est encore $DS - DMRL$.

Théorème 3.1.5 : [30]

Soit F_1 une distribution $DS - DMRL$ et F_2 une distribution $DS - IFR$, alors, leur convolution $F = F_1 * F_2$ est $DS - DMRL$.

Preuve :

Soit $F_{1,e}$ désigne la fonction de distribution d'équilibre cumulée de F_1.
Nous avons donc,

$$a_n = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_{n-i}(1) f_2(i), \qquad n \in \mathbb{N}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{F}_e(n) = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{\sum_{j=0}^{\infty} a_j} &= \frac{1}{\mu} \textstyle\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{k-i}(1) f_2(i) \\ &= \frac{1}{\mu} \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-i}(1) f_2(i) \\ &= \frac{1}{\mu} \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=n-i}^{\infty} a_k(1) f_2(i) \\ &= \frac{\mu_1}{\mu} \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \overline{F}_{1,e}(n-i) f_2(i), \qquad n \in \mathbb{N} \qquad (1.2) \end{aligned}$$

où f_2 est la densité de F_2, $\mu = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$ et $\mu_1 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(1)$.

Notons que $\sum_{i=0}^{\infty} \overline{F}_{1,e}(n-i)f_2(i)$ est la fonction de survie de la convolution des deux fonctions de distributions discrètes $F_{1,e}$ et F_2.

Par définition, F_1 est $DS-DMRL$ si et seulement si sa distribution d'équilibre $F_{1,e}$ est $DS-IFR$, d'une part.D'autre part, d'après le théorème (3.1.2), la convolution de deux distributions $DS-IFR$ est encore $DS-IFR$.

Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} \overline{F}_{1,e}(n-i)f_2(i)$, $n \in \mathbb{N}$, est la fonction de survie d'une distribution $DS-IFR$ et donc, $\overline{F}_e(x)$ est la fonction de survie d'une distribution $DS-IFR$, ce qui implique que F est $DS-DMRL$. $\square$

Une distribution $D-DMRL$ zéro-tronquée est $DS-DMRL$, d'où, il en résulte du théorème précédent le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1 : [30]

Soit F_1 une distribution $D-DMRL$ zéro-tronquée et F_2 une distribution $DS-IFR$, alors, leur convolution $F(n) = F_1 * F_2(n)$, $n \in \mathbb{N}$, est $DS-DMRL$ et donc, elle est $D-DMRL$.

Théorème 3.1.6 : [30]

Soient F_1 et F_2 deux fonctions de distribution $DW-NBU$, alors,
leur convolution $F = F_1 * F_2$ est aussi $DW-NBU$.

Preuve :

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, notons que :

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(1)f_2(i) + a_n(2) \tag{1.3}$$

De plus, la fonction de survie a_{n+m+1} peut être introduite d'une manière plus facile.

$a_{n+m+1} = \sum_{i=0}^{n} a_{n+m+1-i}(1)f_2(i) + \sum_{i=n+1}^{n+m+1} a_{n+m+1-i}(1)f_2(i) + a_{n+m+1}(2)$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_{n+m+1-i}(1) f_2(i) + \sum_{j=0}^{m} a_{m-j}(1) f_2(n+1+j) + \sum_{j=m+1}^{\infty} f_2(n+1+j)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_{n+m+1-i}(1) f_2(i)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}(1) f_2(n+1+j)}_{S_2} \tag{1.4}$$

D'une part, pour le premier terme, nous avons :

$S_1 \leq a_m(1) \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(1) f_2(i)$, car, F_1 est une fonction de la classe $D-NBU$.

$$= a_m(1)\left[a_n - a_n(2)\right], \tag{1.5}$$

à partir de (1.3).

D'autre part, utilisant la sommation par partie et l'équation (1.3), le second terme de l'équation (1.4) donne :

$S_2 = \sum_{j=0}^{\infty} f_2(n+1+j) a_m(1) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} f_2(n+1+i)\left[a_{m-j-1}(1) - a_{m-j}(1)\right]$

$= a_n(2) a_m(1) + \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+1+j}(2) f_1(m-j)$

$\leq a_n(2) a_m(1) + a_n(2) \sum_{j=0}^{\infty} a_j(2) f_1(m-j)$, car, F_2 est $D-NBU$

$= a_n(2) a_m(1) + a_n(2) \sum_{i=0}^{m} a_{m-i}(2) f_1(i)$

$= a_n(2) a_m(1) + a_n(2)\left[a_m - a_m(1)\right]$, d'après (1.3).

Finalement, pour $n, m \in \mathbb{N}$, nous remplacons les sommes S_1 et S_2 dans (1.4), nous obtenons à partir des équations (1.3) et (1.4) :

$$a_{n+m+1} \leq a_m(1)\left[a_n - a_n(2)\right] + a_n(2)a_m(1) + a_n(2)\left[a_m - a_m(1)\right]$$

$$= a_n a_m - \left[a_m - a_m(1)\right]\left[a_n - a_n(2)\right]$$

$$\leq a_n a_m$$

ce qui signifie que F est $DW - NBU$ $\square$.

En utilisant les mêmes arguments que ceux du théorème (3.1.6), nous obtenons le théorème suivant sur la conservation de la classe $D - NBU$ par convolution.

Théorème 3.1.7 : [30]

Soient F_1 et F_2 deux fonctions de distribution $D - NBU$, alors,
leur convolution $F = F_1 * F_2$ est aussi $D - NBU$.

Théorème 3.1.8 : [30]

Si F_1 et F_2 deux fonctions de distribution $D - NBUC$, alors,
leur convolution $F = F_1 * F_2$ est $D - NBUC$.

Preuve :

Nous utilisons l'idée apportée par Hu et Xie (2002) pour montrer la conservation de la classe $D - NBUC$ par convolution.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, alors, nous appliquons l'équation,

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n-i}(1) f_2(i)$$

nous avons :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+m+i} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+m+i-j}(1) f_2(j)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_{n+m+i-j}(1) f_2(j) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} a_{n+m+i-j}(1) f_2(j)$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} f_2(j) \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+m+i-j}(1)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m+i-j}(1) f_2(n+j)}_{S_2}$$

qui peut être bornée :

$S_1 \leq a_m(1) \sum_{j=0}^{n-1} f_2(j) \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i-j}(1)$

$$\leq a_m \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_{n+i-j}(1) f_2(j) \tag{1.6}$$

et

$S_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \Big\{ a_{n-1}(2) a_{m+i}(1) + \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j}(2) [a_{m+i-j-1}(1) - a_{m+i-j}(1)] \Big\}$

$= a_{n-1}(2) \sum_{i=m}^{\infty} a_i(1) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j}(2) f_1(m+i-j)$

$= a_{n-1}(2) \sum_{i=m}^{\infty} a_i(1) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m+i} a_{n+m+i-j}(2) f_1(j)$

$$= \underbrace{a_{n-1}(2) \sum_{i=m}^{\infty} a_i(1)}_{S_{21}} + \underbrace{\sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=j-m}^{\infty} a_{n+m+i-j}(2) f_1(j)}_{S_{22}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+m+i-j}(2) f_1(j)}_{S_{23}} \tag{1.7}$$

En outre, soit μ_1 la moyenne de la distribution F_1, nous avons :

$S_{21} \leq a_{n-1}(2) \mu_1 a_m(1)$

$\leq \mu_1 a_m a_{n-1}(2),$

$S_{22} = \sum_{j=m+1}^{\infty} f_1(j) \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i}(2)$

$= a_m(1) \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i}(2),$

$S_{23} \leq \sum_{j=0}^{m} f_1(j)\left[a_{m-j}(2)\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i}(2)\right]$

$= \left[\sum_{j=0}^{m} a_{m-j}(2)f_1(j)\right]\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i}(2)$

$= [a_m - a_m(1)]\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i}(2)$

d'où,

$$S_2 \leq \mu_1 a_m a_{n-1}(2) + a_m \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i}(2) \tag{1.8}$$

La combinaison des équations (1.6) et (1.8), montre que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+m+i} \leq a_m \left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} a_{n+i-j}(1)f_2(j) + \mu_1 a_{n-1}(2) + \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i}(2)\right]$$

Enfin, exécuter l'équation (1.7) avec $m = 0$, nous obtenons :

$a_m \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i} = a_m \left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} a_{n+i-j}(1)f_2(j) + \mu_1 a_{n-1}(2) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} a_{n+i-j}(2)f_1(j)\right]$

$= a_m \left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} a_{n+i-j}(1)f_2(j) + \mu_1 a_{n-1}(2) + \sum_{j=0}^{\infty} f_1(j)\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i}(2)\right]$

$\geq \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+m+i},$

ce qui signifie que F est $D - NBUC$. $\square$

<u>Corollaire 3.1.2</u> : [30]

Si F_1 et F_2 sont deux fonctions de distribution $DW - NBUC$, alors,
leur convolution $F = F_1 * F_2$ est aussi $DW - NBUC$.

Pour démontrer ce corollaire, on doit suivre les mêmes étapes que celles du théorème (3.1.8) La seule différence est que l'indice i doit être remplacé par (i+1) dans la première sommation dans la preuve du théorème (3.1.8).

Remplacant n par 0 dans la preuve du théorème (3.1.8), nous obtenons immédiatement le résultat de la conservation de classe $D - NBUE$ par convolution selon la définition.

Corollaire 3.1.3 : [30]

Soient F_1 et F_2 deux fonctions de distribution $D-NBUE$, alors, leur convolution $F = F_1 * F_2$ est aussi $D-NBUE$.

Corollaire 3.1.4 : [30]

Si F_1 et F_2 sont deux fonctions de distribution $DW-NBUE$, alors, leur convolution $F = F_1 * F_2$ est aussi $DW-NBUE$.

Théorème 3.1.9 : [30]

Si F_1 et F_2 sont deux fonctions de distribution $D-HNBUE$, alors, leur convolution $F = F_1 * F_2$ est aussi $D-HNBUE$.

Preuve : Pour démontrer ce théorème,

Nous considérons deux variables aléatoires de comptage N_1 et N_2 avec fonction de distribution cumulée F_1 et F_2 respectivement, et de moyennes μ_1 et μ_2.

Par définition, F_1 est $D-HNBUE$, si et seulement si :

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i(1) \leq \mu_1(1-\frac{1}{\mu_1})^n = \sum_{i=n}^{\infty} \overline{G}_1(i),$$

où, $G_1(i) = 1 - \overline{G}_1(i)$ est la fonction de distribution cumulée d'une variable aléatoire Z_1 géométrique, zéro-tronquée, avec une moyenne μ_1.

Ainsi, d'après le théorème 3.A.1(a) introduit par Shaked et Shanthikumar (2007), N_1 est plus petit que Z_1 dans l'ordre convexe, nous écrivons $N_1 \leq_{cx} Z_1$.

Alors, par définition de l'ordre convexe,

$$N_1/\mu_1 \leq_{cx} Z$$

où Z est une variable aléatoire de distribution Géométrique, zéro-tronquée, avec une moyenne 1.

De même, nous avons :

$$N_2/\mu_2 \leq_{cx} Z$$

De plus, l'ordre convexe est conservé par convolution [voir Shaked et Shanthikumar, 2007].

Même raisonnement que celui cité dans le théorème (2.1) donné par Pellerey (2000) s'applique pour $m = 2$, et on conclut que F est $D - HNBUE$ $\quad\square$.

3.2 Conservation des classes par Mélange :

Cette section traite la conservation des classes de distributions non paramétriques discrètes par mélange.

Toutefois, certains résultats de la conservation par mélange nécessitent une hypothèse supplémentaire que les distributions ne se croisent pas.

Théorème 3.2.1 : [30]

La classe $D-DFR$ est conservée par mélange.

Preuve :

Soit $F(n)$ une distribution de mélange telle que :

$$F(n)=\sum_{i=0}^{\infty} F_i(n)g(i),$$

où g une fonction de probabilité et F_i une distribution $D-DFR$, avec $i \in \mathbb{N}$.

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\left[a_{n+2}(i)a_n(i)\right]^{1/2} g(i)\right\}^2 \leq \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+2}(i)g(i)\right\}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_n(i)g(i)\right\}$$

Cependant, les $F_i(n)$, $i \in \mathbb{N}$, sont $D-DFR$.

Ainsi, en utilisant la définition de la classe $D-DFR$, nous avons :

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+1}(i)g(i)\right\}^2 &\leq \left\{\sum_{i=0}^{\infty}\left[a_{n+2}(i)a_n(i)\right]^{1/2} g(i)\right\}^2\\ &\leq \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+2}(i)g(i)\right\}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_n(i)g(i)\right\}\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+1}(i)g(i)}{\sum_{i=0}^{\infty} a_n(i)g(i)} \leq \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+2}(i)g(i)}{\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+1}(i)g(i)}$$

c'est-à-dire, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

Ce qui implique que F est $D - DFR$. $\square$

Corollaire 3.2.1 : [30]

La classe $DS - DFR$ est conservée par mélange.

Preuve :

Pour $n \in \mathbb{N}_+$, les conditions pour la définition de la classe $DS - DFR$ coincide avec celles données pour la définition de la classe $D - DFR$.

Donc, nous avons besoin seulement de montrer que :

$$[a_0]^2 \leq a_1$$

D'abord, notons que d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $h(i) = a_n(i)$ et $l(i) \equiv 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=0}^{\infty} h(i)l(i)g(i)\right]^2 &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_n(i)g(i)\right]^2 \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} [a_n(i)]^2 g(i) \\
&= \left[\sum_{i=0}^{\infty} h^2(i)g(i)\right]\left[\sum_{i=0}^{\infty} l^2(i)g(i)\right]
\end{aligned}$$

De plus, nous savons que :

$$[a_0(i)]^2 \leq a_1(i), \quad i \in \mathbb{N}$$

car, F_i est $DS - DFR$.

Ainsi,

$$[a_0]^2 = [\sum_{i=0}^{\infty} a_0(i)g(i)]^2$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} [a_0(i)]^2 g(i)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} a_1(i)g(i)$$

$$= a_1. \qquad \square$$

Théorème 3.2.2 : [30]

La classe $D - DFRA$ est conservée par mélange.

Preuve :

Soit $a_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_n(i)g(i)$, $n \in \mathbb{N}$,

avec g une fonction de probabilité et F_i est $D - DFRA$, $i \in \mathbb{N}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$.

Il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $m = \alpha n$.

Alors, la définition de la classe de distribution $D - DFRA$ peut être équivalente à :

$$a_n(i) \geq [a_{\alpha n}(i)]^{1/\alpha}$$

Par conséquent,

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_n(i)g(i)$$

$$\geq \sum_{i=0}^{\infty} [a_{\alpha n}(i)]^{1/\alpha} g(i)$$

$$\geq [\sum_{i=0}^{\infty} a_{\alpha n}(i)g(i)]^{1/\alpha}$$

$$= [a_{\alpha n}]^{1/\alpha}$$

d'après l'inégalité de Jensen's. $\square$

Théorème 3.2.3 : [30]

La classe $D-IMRL$ est conservée par mélange.

Preuve :

Soit $a_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_n(i)g(i)$,

où $F_i(n)$ sont $D-IMRL$, $i \in \mathbb{N}$, et g est une fonction de probabilité.

On sait que :

$$f_e(n+1) = \frac{a_n}{\sum_{j=0}^{\infty} a_j} = \frac{a_n}{\mu}$$

alors,

$$\begin{aligned} f_e(n+1) &= \tfrac{a_n}{\mu} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{a_n(i)}{\mu_i} \left[\tfrac{\mu_i}{\mu} g(i)\right] \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} f_{i,e}(n+1)h(i) \end{aligned} \tag{1.9}$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

où μ et μ_i sont les espérances de F et F_i respectivement,

$f_e(m)$, $m \in \mathbb{N}_+$, est la densité de probabilité d'équilibre de F,

et $f_{i,e}(m)$, $m \in \mathbb{N}_+$, $i \in \mathbb{N}$, sont les densités d'équilibre de F_i,

et $h(i) = \mu_i g(i)/\mu$, $i \in \mathbb{N}$, est la densité de probabilité correspondant à l'équation (1.9).

Nous avons :

$$\overline{F}_e(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{F}_{i,e}(m)h(i), m \in \mathbb{N}_+$$

De plus, nous avons par définition, F_i est $D-IMRL$ si et seulement si, sa distribution d'équilibre $F_{i,e}$ est $D-DFR$.

D'autre part, la classe $D-DFR$ est conservée par mélange d'après le théorème (3.2.1).

Par conséquent, F_e est aussi $D-DFR$, ce qui implique que F est $D-IMRL$. $\square$

Théorème 3.2.4 : [30]

La classe $D-HNWUE$ est conservée par mélange.

Preuve :

Soit $F_i(n)$, $i \in \mathbb{N}$, $D-HNWUE$ et $F(n) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(n)g(i)$,

où $g(i)$, $i \in \mathbb{N}$, est une densité de probabilité. Alors,

$$\mu_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(i) > 1, \qquad i \in \mathbb{N}$$

et

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n > 1$$

En utilisant la formule de Taylor pour une fonction à deux variables, nous pouvons montrer que $\xi(s,t) = s^{1-n}(t-1)^n$, $s > 0$, $t > 1$, $n \in \mathbb{N}$, est une fonction réelle convexe.

Alors, appliquant l'inégalité de Jensen's à deux dimensions, nous avons :

$$\xi\left(E\{S\}, E\{T\}\right) \leq E\left\{\xi(S,T)\right\}, \tag{1.10}$$

où S et T sont deux variables aléatoires identiquement distribuées avec une distribution conjointe définie par :

$$P\{S=\mu_i, T=\mu_j\} = \begin{cases} g(i) & , \ \mathrm{i}=j \\ 0 & , \ sinon \end{cases}$$

et avec une distribution marginale définie par :

$$P\{S=\mu_i\} = g(i), i \in \mathbb{N},$$

Par conséquent, utilisant l'inégalité (1.10), nous obtenons :

$$\begin{aligned}(E(S))^{1-n}(E(T)-1)^n &= (E(S))^{1-n}(E(T-1))^n \\ &\leq E\left(S^{1-n}(T-1)^n\right)\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i g(i)\right]^{1-n}\left[\sum_{j=0}^{\infty}(\mu_j-1)g(j)\right]^n \leq \sum_{i=0}^{\infty}\mu_i^{1-n}(\mu_i-1)^n g(i)$$

ou bien :

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i g(i)\right]\left[1-\frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j g(j)}\right]^n \leq \sum_{i=0}^{\infty}\mu_i\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)^n g(i) \tag{1.11}$$

D'où le résultat désiré, car nous avons :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j=n}^{\infty}a_j &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\left[\sum_{j=n}^{\infty}a_j(i)\right]g(i) \\ &\geq \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)^n g(i) \\ &\geq \left[\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i g(i)\right]\left[1-\frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j g(j)}\right]^n \\ &= \mu\left(1-\tfrac{1}{\mu}\right)^n\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (1.11). □

Pour démontrer la conservation par mélange des classes de distributions non paramétriques discrètes suivantes, nous avons besoin d'une condition supplémentaire importante à propos des fonctions croisées (dites crossing functions en anglais).

Définition 3.3 :

Soient $f_a : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ et $f_b : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{C} \neq \emptyset$. Alors, f_a et f_b se croisent sur $\mathbf{C}$ si pour $n \in \mathbf{C}$, $f_a(n) = f_b(n)$.

Puisque les fonctions de distributions discrètes cumulées sont continues à droite, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 3.4 :

Soient $f_a : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ et $f_b : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues à droite et $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{C} \neq \emptyset$. Alors, f_a et f_b se croisent sur $\mathbf{C}$ s'il existe $n \in \mathbf{C}$ tel que :

$$\lim_{s \to n^-} f_a(s) \geq (\leq) \lim_{s \to n^-} f_b(s)$$

et

$$f_a(n) \leq (\geq) f_b(n)$$

Théorème 3.2.5 : [30]

Soit F un mélange de distributions F_i, $i \in \mathbb{N}$, avec toute distribution F_i est $D-NWU$ et deux distributions F_i, F_j ne se croisent pas sur $\mathbb{N}$. Alors, F est $D-NWU$.

Preuve :

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, et g une fonction de probabilité de mélange. D'après l'inégalité de Chebyshev's, nous avons pour $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n a_m &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_n(i) g(i)\right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_m(j) g(j)\right] \\ &\leq \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_n(i) a_m(i) g(i) \\ &\leq \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_{n+m}(i) g(i), \text{ car } F_i \text{ est } D-NWU \\ &= a_{n+m}, \end{aligned}$$

ce qui implique que F est $D-NWU$. $\square$

Corollaire 3.2.2 : [30]

Soit F un mélange de distributions F_i, $i \in \mathbb{N}$, avec toute distribution F_i est $DS-NWU$ et deux distributions F_i, F_j ne se croisent pas sur $\mathbb{N}$. Alors, F est $DS-NWU$.

Théorème 3.2.6 : [30]

Soit F un mélange de distributions F_i, $i \in \mathbb{N}$, avec toute distribution F_i est $D-NWUC$ et deux distributions F_i, F_j ne se croisent pas sur $\mathbb{N}$. Alors, F est $D-NWUC$.

Preuve :

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, et g une fonction de probabilité de mélange.

Appliquons l'inégalité de Chebyshev's, nous obtenons pour $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n \sum_{j=m}^{\infty} a_j &= \left[\sum_{l=0}^{\infty} a_n(l) g(l)\right] \left[\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_j(l) g(l)\right] \\ &= \left[\textstyle\sum_{l=0}^{\infty} a_n(l) g(l)\right] \left\{\textstyle\sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{j=m}^{\infty} a_j(l)\right] g(l)\right\} \\ &\leq \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \left[a_n(i) \sum_{j=m}^{\infty} a_j(i)\right] g(i) \\ &\leq \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=n+m}^{\infty} a_j(i) g(i) \\ &= \textstyle\sum_{j=n+m}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_j(i) g(i) \\ &= \textstyle\sum_{j=n+m}^{\infty} a_j. \qquad \square \end{aligned}$$

Corollaire 3.2.3 : [30]

Si F est un mélange de distributions F_i, $i \in \mathbb{N}$, avec toute distribution F_i est

$DS-NWUC$ et deux distributions F_i, F_j ne se croisent pas sur $\mathbb{N}$, alors, F est aussi $DS-NWUC$.

Preuve :

La preuve de ce corollaire est similaire à celle du théorème (3.2.6), seulement nous prenons $n + m + 1$ au lieu de $n + m$.

Corollaire 3.2.4 : [30]

Soit F un mélange de distributions F_i, $i \in \mathbb{N}$, avec toute distribution F_i est $D-NWUE$ et deux distributions F_i, F_j ne se croisent pas sur $\mathbb{N}$. Alors, F est $D-NWUE$.

Preuve :

Pour démontrer ce corollaire, prenons $m = 0$ dans la preuve du théorème (3.2.6).

Idem, utilisons l'inégalité de Chebyshev's, nous pouvons montrer le résultat suivant.

Corollaire 3.2.5 : [30]

Si F est un mélange de distributions F_i, $i \in \mathbb{N}$, avec toute distribution F_i est

$DS-NWUE$ et deux distributions F_i, F_j ne se croisent pas sur $\mathbb{N}$, alors, F est aussi $DS-NWUE$.

Nous allons présenter maintenant la conservation des classes de distributions $D-CM$ et $D-LCVX$ par mélange introduite par Kristina Sendova (2008). Voir référence [31].

Proposition 3.1 :

La classe de distribution $D-CM$ est conservée par mélange.

Preuve :

Soit g une fonction de distribution discrète, avec des valeurs positives $\mathbb{N}_+$.

Employons la définition de la classe $D-CM$ prouvée par Van Harn (1978), nous avons pour $j = 1, 2, ...,$ la fonction f_j appartenant à la classe $D-CM$, si et seulement si,

$$f_j(n) = \int_0^1 (1-p)p^n dB_j(p), \quad n \in \mathbb{N},$$

où B_j est une distribution sur $[0, 1)$.

Alors, la fonction de mélange $f(n) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(n)g(j)$ satisfie

$$f(n) = \int_0^1 (1-p)p^n d\left[\sum_{j=1}^{\infty} g(j)B_j(p)\right], \quad n \in \mathbb{N},$$

où le mélange $\sum_{j=1}^{\infty} g(j)B_j(p)$ est aussi une distribution de probabilité sur $[0, 1)$. $\square$

Lemme 5 :

Une combinaison linéaire de deux fonctions appartenant à la classe de distribution $D-LCVX$ est une fonction de la même classe.

Preuve :

Soient $f_1(n)$ et $f_2(n)$ deux fonctions de probabilités dans la classe $D-LCVX$.

D'après la définition de la classe $D-LCVX$, nous avons,

$$f_1^2(n) \leq f_1(n-1)f_1(n+1) \tag{1.12}$$

$$f_2^2(n) \leq f_2(n-1)f_2(n+1) \tag{1.13}$$

Soit $f(n)$ une fonction de mélange de $f_1(n)$ et $f_2(n)$, qui est définie comme,

$$f(n) = \alpha f_1(n) + \beta f_2(n)$$

avec $\alpha + \beta = 1$. Nous allons montrer que :

$$f^2(n) \leq f(n-1)f(n+1) \tag{1.14}$$

Utilisons la définition de la fonction $f(n)$ dans cette dernière inégalité, nous obtenons d'une part :

$$f^2(n) = (\alpha f_1(n) + \beta f_2(n))^2$$

$$= \alpha^2 f_1^2(n) + \beta^2 f_2^2(n) + 2\alpha\beta f_1(n)f_2(n).$$

D'autre part, nous avons :

$$f(n-1)f(n+1) = (\alpha f_1(n-1) + \beta f_2(n-1))(\alpha f_1(n+1) + \beta f_2(n+1))$$

$$= \alpha^2 f_1(n-1)f_1(n+1) + \beta^2 f_2(n-1)f_2(n+1)$$

$$+\alpha\beta f_1(n-1)f_2(n+1) + \alpha\beta f_1(n+1)f_2(n-1).$$

Utilisons la propriété spécifiée par les inégalités (1.12) et (1.13), nous avons :

$$\alpha^2 f_1^2(n) + \beta^2 f_2^2(n) \leq \alpha^2 f_1(n-1)f_1(n+1) + \beta^2 f_2(n-1)f_2(n+1).$$

Pour montrer l'inégalité (1.14), nous avons besoin seulement de monter que :

$$2\alpha\beta f_1(n)f_2(n) \leq \alpha\beta f_1(n-1)f_2(n+1) + \alpha\beta f_1(n+1)f_2(n-1),$$

qui peut être simplifié à :

$$f_1(n-1)f_2(n+1)-2f_1(n)f_2(n)+f_1(n+1)f_2(n-1) \geq 0. \tag{1.15}$$

Utilisons les inégalités (1.12) et (1.13), nous obtenons :

$$-2f_1(n)f_2(n) \geq -2\sqrt{f_1(n-1)f_1(n+1)}\sqrt{f_2(n-1)f_2(n+1)},$$

Donc, l'inégalité (1.15) peut être exprimée comme :

$$f_1(n-1)f_2(n+1) - 2f_1(n)f_2(n) + f_1(n+1)f_2(n-1)$$

$$\geq f_1(n-1)f_2(n+1)-2\sqrt{f_1(n-1)f_1(n+1)}\sqrt{f_2(n-1)f_2(n+1)}+f_1(n+1)f_2(n-1)$$

$$= \left(\sqrt{f_1(n-1)f_2(n+1)} - \sqrt{f_1(n+1)f_2(n-1)}\right)^2$$

$$\geq 0$$

D'où, l'inégalité (1.14) est vérifiée pour tout $\alpha + \beta = 1$.

Idem pour la classe de distribution $D - LCVE$. $\square$

Proposition 3.2 :

La classe de distribution $D - LCVX$ est conservée par mélange.

Nous présentons maintenant un tableau récapitulatif résumant les principaux résultats de conservation des classes de lois non paramétriques discrètes par les deux opérations de la fiabilité étudiées au cours de ce mémoire [30].

Classe	Conservée par
D-CM	N'est pas conservée par convolution
D-LCVE	Convolution
D-CG	N'est pas conservée par convolution
DS-IFR	Convolution
D-IFR	N'est pas conservée par convolution
D-NBU	Convolution
D-IFRA	Convolution
DW-NBU	Convolution
D-DMRL	N'est pas conservée par convolution
D-NBUC	Convolution
DW-NBUC	Convolution
D-NBUE	Convolution
DW-NBUE	Convolution
D-HNBUE	Convolution

TAB. 3.1 – Conservation des classes de lois non paramétriques discrètes par convolution

Classe	Conservée par
D-CM	N'est pas conservée par mélange
D-LCVX	N'est pas conservée par mélange
D-CG	N'est pas conservée par mélange
DS-DFR	Mélange
D-DFR	Mélange
DS-NWU	Mélange (no crossing)
D-DFRA	Mélange
D-NWU	Mélange (no crossing)
D-IMRL	Mélange
DS-NWUC	Mélange (no crossing)
D-NWUC	Mélange (no crossing)
DS-NWUE	Mélange (no crossing)
D-NWUE	Mélange (no crossing)
D-HNWUE	Mélange

TAB. 3.2 – Conservation des classes de lois non paramétriques discrètes par mélange

Conclusion

L'objectif de la théorie de fiabilité réside dans le fait qu'on peut modéliser beaucoup de problèmes dans divers domaines : Économie, Files d'attente, Théorie de la décision, Gestion de stock, ..., à travers l'application des lois non paramétriques.
L'utilisation des lois non paramétriques en théorie de fiabilité a l'avantage de connaitre l'appartenance d'un équipement à une classe de "*vieillissement*" de la loi de fiabilité. Celà permet une aide à la décision sur le niveau des stocks de pièces de rechange, type de maintenance (correctif ou préventif) et éventuellement le mode d'intervention, redondance, etc...

Notre étude nous a permis d'explorer les liens existant entre les différentes classes de lois non paramétriques discrètes que nous avons pu trouver dans la documentation consulté.

Nous avons mis en évidence la stabilité de certaines lois par rapport aux principales opérations de fiabilité : *convolution* et *mélange*.

Cette recherche met en évidence l'utilité d'étudier la propriété de **log-concavité** ou **log-convexité** d'une fonction, car dans plusieurs domaines tels que l'économie, la science politique, la biologie et l'actuariat, la fonction de distribution n'a pas de forme explicite comme celle du taux de défaillance ou la durée de vie moyenne résiduelle. Cependant, il est important d'établir une hypothèse bien précise sur la distribution à étudier.

Au cours de cette recherche, nous avons constaté que les définitions données pour la propriété du taux de défaillance sont similaires dans les deux cas discret et continu.
Cette propriété est importante, dont nous avons rencontré qu'il y a un problème sérieux dans la définition de la classe $IFRA$, cette classe admet deux définitions différentes ($IFRA1$ et $IFRA2$) qui sont équivalentes dans le cas continu, mais qui ne le sont pas dans le cas discret.

Cette différence réside dans le fait que le taux de défaillance est borné dans le cas discret, majoré par 1, car c'est une probabilité conditionnelle, par contre, dans le cas continu, il n'est pas borné, c'est un taux de probabilité conditionnelle.

Alors, une nouvelle définition alternative a été fournie pour le taux de défaillance adressée aux problèmes mentionnés ci-dessus. Il s'agit du taux de défaillance de second ordre, pour lequel on aura l'équivalence entre les deux définitions ($IFRA1$ et $IFRA2$), ainsi, il y aura un seul concept pour la classe $IFRA$.

Pour conclure, nous mentionnons qu'il est important de choisir un modèle approprié pour étudier les données de fiabilité. Si le phénomène étudié est tel que le taux de défaillance est une constante, la distribution Géométrique est adéquate. Mais, si le système observé est en phase de "*vieillesse*" (*ageing*), quelle distribution devrait être choisie ?

Bracquemond et Gaudoin (2002) ont donné deux critères :

Critère 1 :

(i) La simplicité de l'expression de la fonction de fiabilité.

(ii) La flexibilité ou la possibilité de décrire les diverses situations.

(iii) L'interprétation des paramètres.

Critère 2 :

La qualité des estimateurs des paramètres dans un modèle.

Il existe des bornes pour la probabilité de survie, les propriétés mises en évidence par cette classification permettrait d'établir des estimations par inégalités et bornes (par certaines classes de distribution) pour des processus décrits par des sommes aléatoires (en particulier, Géométrique), et ceci pourrait élaborer une direction de recherche permettant d'achever notre étude.

Même si la classification est analogue, dans la plupart des cas pour le continu et le discret, les démonstrations sont différentes, cette étude nous a permis de faire apparaitre la différence entre les deux cas et mieux comprendre certains résultats.

Bibliographie

[1] Abdul Khalique ; *On Discrete Failure-Time Distributions* ; **Reliability Engineering and System Safety 25, 99 - 107, (1989)**.

[2] Aissani A ; *Modèles stochastiques de la théorie de fiabilité* ; **Office des Publications Universitaires, Alger, 1992**.

[3] Alain Pagès, Michel Gondran ; *Fiabilité des systèmes* ; **Afnor**.

[4] Alan RUEGG ; *Processus stochastiques, avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité* ; **Presses polytechniques romandes (1989)**.

[5] Albert W. Marshall, Ingram Olkin ; *Life Distributions Structure of Nonparametric, Semiparametric, and Parametric Families* ; **Springer (2007)**.

[6] Bander Al-Zahrani, Jordan Stoyanov ; *On Some Properties of Life Distributions with Increasing Elasticity and Log-concavity* ; **Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, (2008), N°48, 2349 - 2361**.

[7] Barry C. Arnold ; *Two characterizations of the geometric distribution* ; **J. Appl. Prob. 17, 570 - 573 (1980)**.

[8] Bengt Klefsjö ; *The HNBUE and HNWUE classes of life distributions* ; **Naval Research Logistics Quarterly, vol. 29, N° 2, pp 331 - 344 (1982)**.

[9] Bernard bercu, Djalil Chafaï ; *Modélisation stochastiques et simulation* ; **Dunod (2007)**.

[10] B. V. Gnedenko, Yu. K. Belyayev, A. D. Solovyev ; *Mathematical methods of reliability theory* ; **Academic press, INC (1969)**.

[11] Chin-Diew Lai, Min Xie ; *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability* ; **Springer (2006)**.

[12] Christiane Cocozza-Thivent ; *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes* ; **Springer (1997)**.

[13] Cyril Bracquemond, Olivier Gaudoin ; *A survey on discrete lifetime distributions* ; **International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 10, N°. 1 (2003) 69 - 98**.

[14] Cyril Bracquemond, Olivier Gaudoin ; *The empirical failure rate of discrete reliability data* ; **Institut National Polytechnique de Grenoble, Laboratoire IMAG-LMC, France**.

[15] Cyril Bracquemond, Olivier Gaudoin, Dilip Roy, Min Xie ; *On some discrete notions of aging* ; **Institut National Polytechnique de Grenoble, Laboratoire IMAG-LMC, France, July 27, 2001**.

[16] Dilip Roy ; *On classifications of multivariate life distributions in the discrete setup* ; **Microelectron. Reliab, Vol. 37, N°. 2, pp. 361 - 366, (1997)**.

[17] Dilip Roy, R.P. Gupta ; *Classifications of discrete lives* ; **Microelectron. Reliab, Vol. 32, N°. 10, pp. 1459 - 1473, (1992)**.

[18] Dilip Roy, R.P. Gupta ; *Characterizations and model selections through reliability measures in the discrete case* ; **Statistics and Probability Letters 43 (1999) 197 - 206**.

[19] Dominique Foata ; *Processus stochastique, processus de poisson, chaine de Markov et martingales* ; **Dunod**.

[20] Jun Cai, Vladimir Kalashnikov ; *NWU property of a class of random sums* ; **J. Appl. Prob. 37, 283 - 289 (2000)**.

[21] Jean-Louis BON ; *Fiabilité des systèmes* ; **Masson, Paris (1995)**.

[22] Jun Cai, Gordon E. Willmot ; *Monotonicity and aging properties of random sums* ; **Statistics and Probability Letters 73 (2005) 381 – 392**.

[23] Gang Li, Kan Cheng, Xiaoyue Jiang ; *Negative ageing property of random sum* ; **Statistics and Probability Letters 76 (2006) 737 – 742**.

[24] Gordon E. Willmot, Jun Cai ; *Aging and other distributional properties of discrete compound geometric distributions* ; **Insurance : Mathematics and Economics 28 (2001) 361 – 379**.

[25] Gordon E. Willmot, Xiaodong Lin ; *Lundberg bounds on the tails of compound distributions* ; **J. Appl. Prob. 31, 743 - 756 (1994)**.

[26] Gordon E. Willmot, X. Sheldon Lin ; *Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications* ; **Springer (2001)**.

[27] Henrik Cobbers, Udo Kamps ; *A note on characterizations of the geometric distribution* ; **Journal of Statistical Planning and Inference 67, 187 - 190, (1998)**.

[28] Henry W. Block et T. H. Savits ; *The IFRA closure problem* ; **The Annals of Probability, Vol.4, N°6, 1030 - 1032, 1976**.

[29] Kong-Ming Chong ; *On characterizations of the Exponential and Geometric distributions by Expectations* ; **Journal of American Statistical Association, Volume 72, Number 357, March 1977**.

[30] Kristina P. Pavlova, Jun Cai, Gordon E. Willmot ; *The preservation of classes of discrete distributions under convolution and mixing* ; **Insurance : Mathematics and Economics 38 (2006) 391 – 405**.

[31] Kristina Sendova ; *Preservation under mixing of the D-CM, the D-LCVX, and the D-CG classes of probability distributions under mixing* ; **Actuarial Research Group Seminar Notes, University of Western Ontario (2008)**.

[32] Mark Brown ; *Error bounds for Exponential approximations of Geometric convolutions* ; **The annals of probability, vol 18, N°3 (1990) 1388 – 1402**.

[33] Moshe Shaked, J. George Shanthikumar ; *Stochastic Orders* ; **Springer (2007)**.

[34] Moshe Shaked, J. George Shanthikumar et Jose Benigno Valdez-torres ; *Discrete hazard rate functions* ; **Computers Ops Res. Vol. 22, N° 4, pp. 391 - 402. 1995**.

[35] Mynt Zijlstra ; *Characterizations of the Geometric distribution by distributional properties* ; **J. Appl. Prob. 20, 843 - 850 (1983)**.

[36] M. J. Crowder, A. C. Kimber, R. L. Smith, T. J. Sweeting ; *Statistical analysis of reliability data* ; **Chapman and Hall / CRC, 1991**.

[37] M. Sreehari, M. S. ; *A characterization of the Geometric distribution* ; **J. Appl. Prob. 20, 209 - 212 (1983)**.

[38] Olivier Gaudoin, James Ledoux ; *Modélisation aléatoire en fiabilité des logiciels* ; **Lavoisier, 2007**.

[39] Patrick Bogaert ; *Probabilités pour scientifiques et ingénieurs : Introduction au calcul des probabilités* ; **Boeck Université**.

[40] Patrick Roger ; *Probabilités, statistiques et processus stochastiques* ; **Collection Synthex**.

[41] Paul. S ; *Thèmes de probabilités et statistiques* ; **Dunod, 1999**.

[42] R. C. Srivastava ; *On characterizations of the Geometric distribution by independence of functions of order statistics* ; **J. Appl. Prob. 23, 227 - 232 (1986)**.

[43] TaChen Liang, ; *A note on characterizing Geometric distributions* ; **Wayne State University. March 1990**.

[44] Taizhong Hu, Min Ma, Asok K. Nanda ; *Moment inequalities for discrete ageing families* ; **December 2002**.

[45] Z. Govindarajulu ; *Characterization of the Geometric distribution using properties of order statistics* ; **Journal of Statistical Planning and Inference 4, 237 - 247, (1980)**.