



N° d'ordre : 05/2003-M/MT.

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE**

Thèse présentée pour

L'obtention du diplôme de : **Magister**

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Recherche Opérationnelle (Maths de Gestion)**

Par : **SALIHA OUATIKI**

Sujet

**SUR LE NOMBRE DOMATIQUE DU GRAPHE
REPRESENTATIF DES INTERVALLES D'UN POSET**

Soutenue le 22/04/2003, devant le jury suivant :

M. ABBAS	Professeur, USTHB	Président.
I. BOUCHEMAKH	Maître de conférence, USTHB	Directrice de thèse.
H. AIT-HADDADENE	Maître de conférence, USTHB	Examineur.
A. BERRACHEDI	Maître de conférence, USTHB	Examineur.
S. BOUROUBI	Chargé de Cours, USTHB	Examineur.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu, Madame I. Bouchemekh, pour ces précieux conseils, sa sympathie, son soutien et sa gentillesse sans limites.

Mes remerciements vont également à Monsieur M. Abbas qui me fera l'honneur de présider le jury.

Je prie Messieurs A. Berrachedi, H. Ait Haddadene et S. Bouroubi de trouver ici l'expression de ma vive gratitude pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce modeste travail.

Je tiens à remercier également Madame T. Haynes, professeur à East Tennessee State University pour l'aide qu'elle m'a apportée.

Sommaire

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : NOTIONS DE BASE	3
1.1 CONCEPTS GENERAUX SUR LES POSETS.....	3
1.2 CONCEPTS GENERAUX SUR LES HYPERGRAPHES.....	9
1.3 CONCEPTS GENERAUX SUR LES GRAPHS.....	12
1.4 HYPERGRAPHE DES INTERVALLES D'UN POSET.....	13
1.5 NOTION DE DOMINATION.....	14
CHAPITRE 2 : SURVEY SUR LE NOMBRE DOMATIQUE D'UN GRAPHE	16
2.1 MOTIVATION.....	16
2.2 NOMBRES DOMATIQUES.....	18
2.3 BORNES DU NOMBRE DOMATIQUE	20
2.4 CLASSES DE GRAPHS ET RESULTATS.....	28
2.5 CONJECTURES ET PROBLEMES OUVERTS.....	52
CHAPITRE 3 : OPERATIONS SUR LES POSETS ET LE NOMBRE	54
DOMATIQUE.	
3.1 DEFINITIONS.....	54
3.1.1 SOMME DIRECTE.....	55
3.1.2 SOMME LINEAIRE.....	55
3.1.3 PRODUIT DIRECTE.....	57
3.2 NOMBRE DOMATIQUE DE $G (P * Q)$	58
3.3 NOMBRE DOMATIQUE DE $G (P \times C_n)$	62
3.4 NOMBRE DOMATIQUE DU GRAPHE REPRESENTATIF DE.....	65
$(C_{n_1} \times C_{n_2})_{1,u}$.	

CHAPITRE 4 : COMPLEXITE ALGORITHMIQUE.....	81
4.1 INTRODUCTION.....	81
4.2 NOTIONS DE BASE.....	82
4.3 NP-COMPLETUDE DE QUELQUES PROBLEMES RELATIFS A.....	85
L'HYPERGRAPHE DES INTERVALLES D'UN POSET.	
4.4 NP-COMPLETUDE DU NOMBRE DOMATIQUE DANS.....	86
QUELQUES CLASSES DE GRAPHERS.	
4.5 NP-COMPLETUDE DU NOMBRE DOMATIQUE ET DU NOMBRE.....	89
DOMATIQUE TOTAL DANS LE GRAPHE REPRESENTATIF DES INTERVALLES D'UN POSET.	
CONCLUSION.....	93
REFERENCES.....	94

Dear Haynes;

I apologise contacting you once again for request if these conjectures are still open problem and if it exist some others?

Conjecture 1 [Chang]:

Every product $P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_r}$ is domatically full with some exceptions

Conjecture 2 [Zelinka]: for every graph G we have $d(G) \geq \frac{1}{2}\delta(G) + 1$

Conjecture 3 [Haynes]: let $n \geq 15$ with $n \notin \{16, 17, 20\}$ and let $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = K_n$ then

$$d_1 d_2 d_3 \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^3$$

- The characterisation of graphs G with $d(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
- The determination of graphs G with $d(G) = d(\overline{G}) = k$ for $11 \leq k < \frac{n}{2}$
 - Characterise connexe graphs G with $d(G), d(\overline{G}) = 2$.
 - Is it true that if $d(G) = d(\overline{G})$ then $\gamma(G) = \gamma(\overline{G})$?
 - Characterise regular graphs with $d(G) = d(\overline{G})$.
 - Characterise bipartite graphs with $d(G) = d(\overline{G})$.
- Characterisation of uniquely domatic graphs
- The compute of $\gamma(Q_n)$ et $d(Q_n)$ which still open though Zelinka have proved that $d(Q_n) = 2^k$ if $n = 2^k - 1$ ou 2^k .
- Characterisation of extremal graphs for the next theorem

Theorem: let $n \geq 3$ and let $G_1 + G_2 + \dots + G_t = K_n$ a t -factorisation of K_n then

$$t \leq \sum_{i=1}^t d(G_i) \leq n + t - 1$$

Best greetings

Preuve: D'abord on montre que le problème du nombre chromatique est NP-complet dans $G(P)$ pour $k = 3$.

Clairement le problème appartient à la classe NP.

En donnant un graphe $G = (V, E)$, on peut supposer sans perte de généralité que G n'est pas 1 ou 2 colorable.

Formons un nouveau poset $P = V \cup E \cup W$ où $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ et où l'ordre est donné de la manière suivante:

Pour $v \in V, e \in E, e < v$ ssi v est l'une des extrémités de e dans G

$w_i < v$, pour tout i .

Notons $G(P) = (V \cup E \cup W, \tilde{E}) = (\tilde{V}, \tilde{E})$ le graphe représentatif des intervalles de P .

Puisque $\min_{v \in V} \delta(v) = 2, d(\tilde{G}) \leq 3$

Nous montrons que G est 3-colorable ssi $d(G(P)) = 3$

Le problème de 3 coloration d'un graphe est NP-complet.

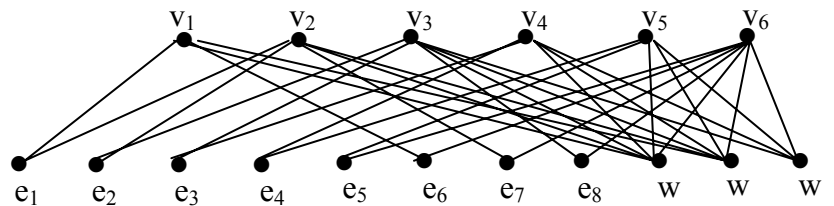
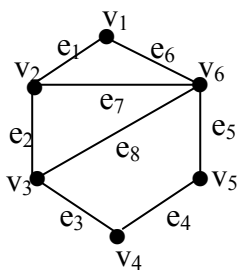
Supposons G 3 colorable, la 3 coloration de G induit une partition $V = V_1 + V_2 + V_3$ où V_i est l'ensemble des sommets colorés avec i et chaque V_i induit un ensemble indépendant dans G .

Nous formons la partition $\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3$ comme suit:

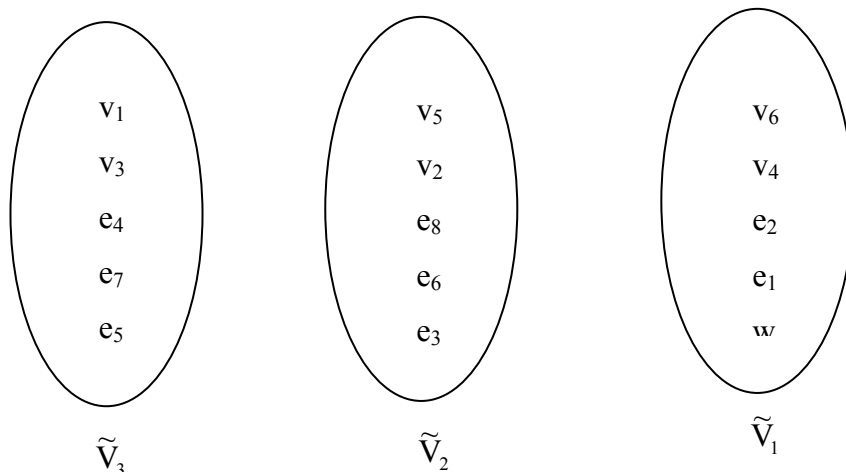
Si $v \in V_i$ alors $v \in \tilde{V}_i$

$e \in \tilde{V}_i$ si $e = (v, v')$ tel que $v \in V_j, v' \in V_k, k \neq j \neq i \neq k$.

Exemple:



$V_1 = \{v_6, v_4\}, V_2 = \{v_5, v_2\}, V_3 = \{v_1, v_3\}$



La partition $\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3$ est une partition domatique : chaque sommet de V est dominé par w_i et alors par \tilde{V}_i et d'après la définition de \tilde{V}_i , chaque e dans $E \setminus \{e \in \tilde{V}_i\}$ est adjacent à l'un des sommets v de \tilde{V}_i , ce qui veut dire que \tilde{V}_i est un ensemble dominant.

Réciproquement: donnons une partition domatique de trois ensembles de \tilde{V} , dans chaque triplet $\{i, j, k\}$, chacun de ses éléments est présenté dans un ensemble et alors dans une telle partition aucune arête e de E ne peut avoir ses deux extrémités dans le même ensemble, donc en ôtant les arêtes des ensembles dominants obtenus, on aura des ensembles stables. D'où la 3-coloration de G .

Le problème du nombre domatique pour un entier k fixé $k=3$ peut être réduit au problème du nombre domatique pour tout entier fixé $k>3$.

En donnant la graphe $G(P)=(V_1, V_2, E)$, on construit le graphe $G'(P)=(V_1+X_1, V_2+X_2, E+F)$ où $|X_1| = |X_2| = k - 3$, $F = V_1X_2 + V_2X_1 + X_1X_2$

Nous montrons que $d(G(P)) \geq 3$ ssi $d(G'(P)) \geq k$

\Rightarrow) il est évident que si $d(G(P)) \geq 3$ alors $d(G'(P)) \geq k$

\Leftarrow) soit C une k -coloration de G' tel que chaque classe de couleur est un ensemble dominant

soit S_i l'ensemble des couleurs qui ne sont pas représentées dans X_i , $i=1, 2$

notons que $|S_i| \geq 3$. Si $j \in S_1 \cap S_2$ alors $V_1^j + V_2^j$ est un ensemble dominant dans G .

si $j \in S_1 - S_2$, $k \in S_2 - S_1$ alors $V_1^j + V_2^j + V_1^k + V_2^k$ est dominant dans G : tous les sommets de V_1 sont dominés par $V_1^k + V_2^k$ et tous les sommets de V_2 sont dominés par $V_1^j + V_2^j$ et puisque $|S_i| \geq 3$, $i=1, 2$

$|S_1 \cap S_2| + \min\{|S_1 - S_2|, |S_2 - S_1|\} \geq 3$ et $V_1 + V_2$ peut être partitionné en au moins trois ensembles dominants.

Introduction

"Toute pensée originale, procède par images" disait Schopenhauer, et la théorie des graphes est basée sur l'image, elle regroupe un ensemble varié de problèmes qui peuvent être visualisés par des sommets représentant des individus, des situations, et des arêtes symbolisant les relations existantes entre les sommets.

La schématisation de n'importe quel problème, le simplifie et l'éclaircie, c'est l'une des caractéristiques attrayantes de la théorie des graphes qui est son inhérent caractère pictural qui contribue à sa compréhension. Maintes propriétés et procédures ont été pensées ou trouvées à partir d'un schéma avant d'être ensuite formalisées ou développées.

L'histoire de cette théorie met en relief la diversité des questions abordées. Le premier problème généralement cité remonte à Euler: "est-il possible de parcourir les rues de Königsberg en franchissant une et une seul fois chacun des sept ponts de la ville?". Jusqu'au milieu du vingtième siècle, la théorie des graphes s'est développée en liaison avec les problème de la physique et de la chimie, ce n'est qu'après 1945, qu'on vit apparaître des applications dans le domaine de la gestion, classées avec beaucoup d'autres sous le titre général de problèmes de " Recherche Opérationnelle".

Le thème abordé dans notre thèse, se rapporte à la domination, plus précisément au nombre domatique. Un ensemble dominant dans un graphe est un ensemble de sommets tel que tout sommet en dehors de cet ensemble est lié à au moins l'un de ses sommets et le nombre domatique est la taille maximum d'une partition des sommets du graphe en ensembles dominants.

L'histoire de domination remonte au dix-neuvième siècle, elle a vu le jour avec les jeux d'échec, ce n'est qu'en 1958, qu'elle est formalisée dans un contexte théorique par Claude Berge. Cependant, la notion du nombre domatique a été introduite pour la première fois par Cockayne et Hedetniemi, en 1977.

Notre thèse se base sur le nombre domatique du graphe représentatif des intervalles d'un ensemble partiellement ordonné (en abrégé poset) P ; c'est le graphe ayant les mêmes sommets que P et deux sommets sont adjacents si et seulement si ils appartiennent à un même intervalle de P .

Notre travail est développé comme suit:

Le premier chapitre est consacré à l'introduction de définitions nécessaires pour la compréhension de notre thèse. Nous y trouvons les concepts de poset et d'hypergraphe ainsi que la notion du graphe représentatif des intervalles d'un poset.

Dans le second chapitre, nous introduisons un survey sur la domination et quelques résultats sur le nombre domatique: ses bornes et les classes où il a été introduit.

Dans le troisième chapitre, nous établissons quelques résultats sur le nombre domatique du graphe représentatif des intervalles d'un poset qui est soit la somme directe soit la somme linéaire de deux autres posets. Nous nous intéressons par la suite au sous poset induit par l'union des niveaux consécutifs N_1, \dots, N_u , $0 \leq l \leq u \leq r(P)$ du produit de deux chaînes $C_{n_1} \times C_{n_2}$. Suivant les valeurs des entiers l, u, n_1, n_2 , la partition domatique maximale est exhibée.

Le quatrième chapitre, sera consacré à l'étude algorithmique. D'abord nous introduisons les notions de la complexité algorithmique, ensuite nous mentionnons quelques problèmes relatifs à l'hypergraphe des intervalles d'un poset où la NP-complétude est démontrée. Nous citons également des classes où la NP-complétude du nombre domatique est prouvée et nous terminons par démontrer que le problème du nombre domatique, et du nombre domatique total (autre paramètre de domination), dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset est NP-complet.

Chapitre 1

Notions de base

Dans ce premier chapitre, nous allons donner les notions et définitions de base, nécessaires pour aborder le thème de notre thèse. Après avoir donné les concepts de poset et d'hypergraphe, nous introduisons la notion de l'hypergraphe (resp. le graphe représentatif) des intervalles d'un poset et nous terminons par aborder le concept de domination dans lequel il sera introduit la notion du nombre domatique, objet cœur de notre thèse.

1.1 Concepts généraux sur les posets

- Un ensemble partiellement ordonné (P, \leq) , en abrégé *poset*, est un ensemble P où la relation " \leq " est réflexive, antisymétrique et transitive.
- Dans tout ce qui suivra, nous nous intéresserons uniquement au cas où P est fini.

Si $u \leq v$ et $u \neq v$ alors on écrit $u < v$.

- Si u et v sont dans P alors v *couvre* u dans P si $u < v$ et $\nexists w \in P$ tel que : $u < w < v$ et on note : $v \succ u$.
- En utilisant la relation de couverture, on peut obtenir une représentation graphique de P , dite *diagramme de Hasse* de P , comme suit :
 A chaque élément de P , on associe un point du plan représenté par un petit cercle.
 Si v couvre u alors u sera lié au point v par un segment de droite ascendant.

Exemple de Poset

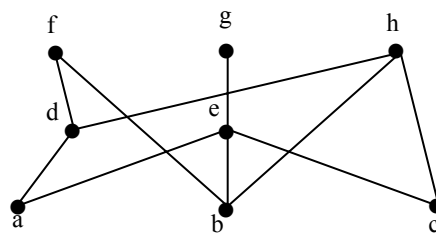


Figure 1

- Le *dual* de P , noté P^* est un poset ayant les mêmes sommets que P mais ordonnés par la relation d'ordre " \leq_{p^*} " définie par : $u \leq_{p^*} v \Leftrightarrow u \geq_p v$.

Soit A un sous ensemble de P .

- Un *minorant* (resp. *majorant*) de A dans P est un élément u de P tel que : $u \leq a$ (resp. $u \geq a$), $\forall a \in A$.

La *borne inférieure* (resp. *supérieure*) de A est le plus grand (resp. petit) des minorants (resp. majorants) de A , elle est notée $u \otimes v$ (resp. $u \square v$).

- On appelle *treillis* un poset dans lequel toute paire d'éléments possède une borne inférieure et une borne supérieure.

Exemple de treillis

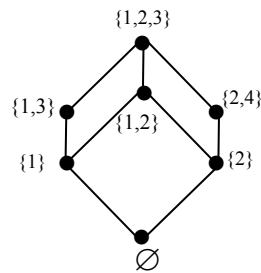


Figure 2

- On appelle *intervalle* de P , un sous ensemble I noté par $[p, q]$ de la forme $\{v \in P : p \leq v \leq q\}$. I est dit maximal si $\forall I'$ intervalle. En particulier si I est un intervalle maximal alors p est un élément minimal et q est un élément maximal.
- Deux posets P et Q sont dits *homomorphes* s'il existe une application φ de P dans Q vérifiant $x \leq_p y$ si et seulement si $\varphi(x) \leq_q \varphi(y)$. Ils sont dits *isomorphes* si et seulement si φ bijective, φ et φ^{-1} homomorphismes.
- Une *fonction rang* est une fonction r définie de P dans \mathbb{N} vérifiant $r(u) = 0$ si u est un élément minimal et $r(v) = r(u) + 1$ si $v \succ u$. S'il existe une telle fonction de rang, on dira que P est rangé ou gradué et la valeur $r(P) = \max_{x \in P} r(x)$ représente son rang.
- Si P est rangé, on définit son *niveau* i par $N_i(P) = \{u \in P : r(u) = i\}$.
Le nombre $W_i(P) = |N_i(P)|$ est appelé *i^{ème} nombre de Whitney*, $\forall i=0, \dots, r(P)$.

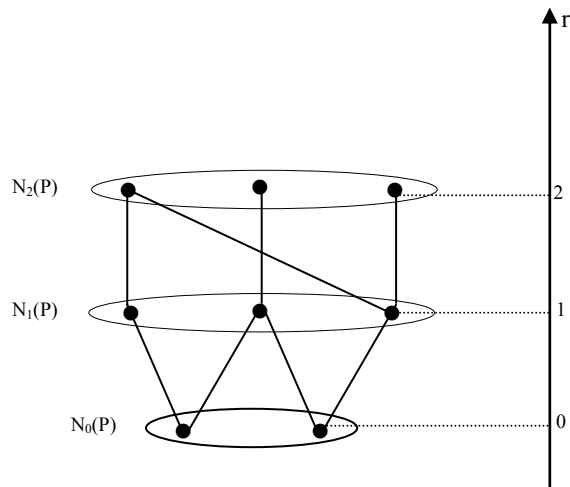


Figure 3

- Soit (P, \leq) un poset rangé. Pour un sous ensemble A du niveau N_i , on définit l'ombre supérieure (resp. inférieure) de A , par l'ensemble $R^+(A) = \{x \in N_{i+1} : x > a, \text{ pour un certain } a \in A\}$ (resp. l'ensemble $R^-(A) = \{x \in N_{i-1} : a > x, \text{ pour un certain } a \in A\}$)

Exemple

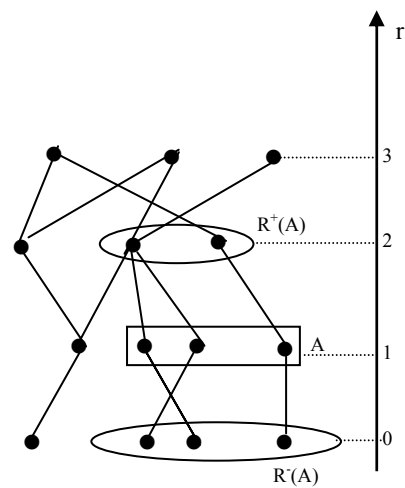


Figure 4

- Plus généralement, on note par $R_s^+(A)$ (resp. $R_s^-(A)$) l'ensemble $R_s^+(A) = \underbrace{R^+(R^+(\dots(R^+(A))\dots))}_{s \text{ fois}}$ (resp. $R_s^-(A) = \underbrace{R^-(R^-(\dots(R^-(A))\dots))}_{s \text{ fois}}$)
- Un sous ensemble C de P est dit *chaîne* de P , si pour toute paire d'éléments a, a' de C on a : $a \leq a'$ ou $a' \leq a$. Elle est notée par $C = (a_0 \prec \dots \prec a_k)$ et l'entier k représente sa longueur. Dans ce cas, on dit que C est saturée.
- Pour un poset rangé, nous noterons par $P_{l,u}$ le sous-poset induit par l'union de niveaux consécutifs $\bigcup_{i=l}^u N_i$ de P où l et u sont deux entiers tels que : $0 \leq l \leq u \leq r(P)$.

1.1.1 Exemple de posets classiques

Le treillis booléen

C'est le poset définie par $B_n = (\{0,1\}^n, \leq)$, où la relation d'ordre est telle que $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si $a_i \leq b_i, \forall i$.

B_n est appelé le treillis booléen, la figure 5 représente B_3 .

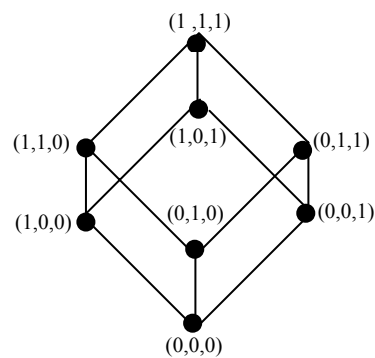


Figure 5

En considérant l'application $\varphi(\underline{a}) = \{i, a_i = 1\}$, on voit bien que $B_n = (\{0,1\}^n, \leq)$ et $(P(\{1, \dots, n\}), \subseteq)$ sont isomorphes, d'où la possibilité de définir le treillis booléen comme étant le treillis de tous les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ ordonnés par inclusion.

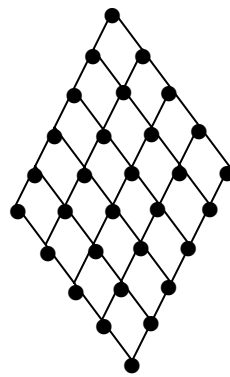
L'application qui à un élément de B_n associe sa cardinalité définit la fonction de rang sur B_n .

Le treillis $S(k_1, \dots, k_n)$

C'est l'ensemble de tous les n -uples $a = (a_1, \dots, a_n)$ tel que : $0 \leq a_i \leq k_i$, pour tout i , la relation d'ordre est telle que:

$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si $a_i \leq b_i$ pour tout i . C'est-à-dire $\underline{a} < \underline{b}$ si et seulement si $\exists j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $b_j - a_j = 1$ et $a_i = b_i, \forall i \neq j$.

En particulier, le treillis B_n est isomorphe à $S(1, \dots, 1)$.



S(4, 5)

Figure 6

$S(k_1, \dots, k_n)$ est rangé par la fonction de rang $r(a) = a_1 + \dots + a_n$ et son rang vaut: $k_1 + \dots + k_n$.

Les éléments du niveau i sont tous les n -uples dont la somme des composantes est égale à i .

1.2 Concepts généraux sur les hypergraphes

En 1960, Claude Berge [4] a généralisé le concept de graphes en vue d'aborder de nouveaux problèmes d'optimisation combinatoire. L'idée était d'étudier une famille d'ensembles avec la même optique, en l'appelant *hypergraphe*.

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini. Un hypergraphe sur X est une famille $\mathcal{H} = (E_1, \dots, E_m)$ de parties de X avec :

$$1) E_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, m$$

$$2) \bigcup_{i=1}^m E_i = X$$

Les éléments x_1, x_2, \dots, x_n de X sont les sommets et les ensembles E_1, \dots, E_m sont les arêtes de l'hypergraphe.

- Un hypergraphe simple sur X (ou "*famille de Sperner*") est un hypergraphe $\mathcal{H} = (E_1, \dots, E_m)$ dont aucune arête n'en contient une autre, c'est à dire :

$$3) E_i \subset E_j \Rightarrow i = j.$$

Un graphe simple est un hypergraphe simple dont toutes les arêtes sont de cardinalité 2.

Deux sommets x et y de \mathcal{H} sont adjacents s'il existe une arête de E qui les contienne et deux arêtes sont dites adjacentes si leur intersection est non vide.

- Le *dual* d'un hypergraphe $\mathcal{H} = (E_1, \dots, E_m)$ est un hypergraphe $\mathcal{H}^* = (X_1, \dots, X_n)$ dont les sommets e_1, e_2, \dots, e_m sont des points correspondants respectivement aux arêtes de \mathcal{H} et dont les arêtes sont $X_i = \{e_j / E_j \ni x_i \text{ dans } \mathcal{H}\}$.

Exemple

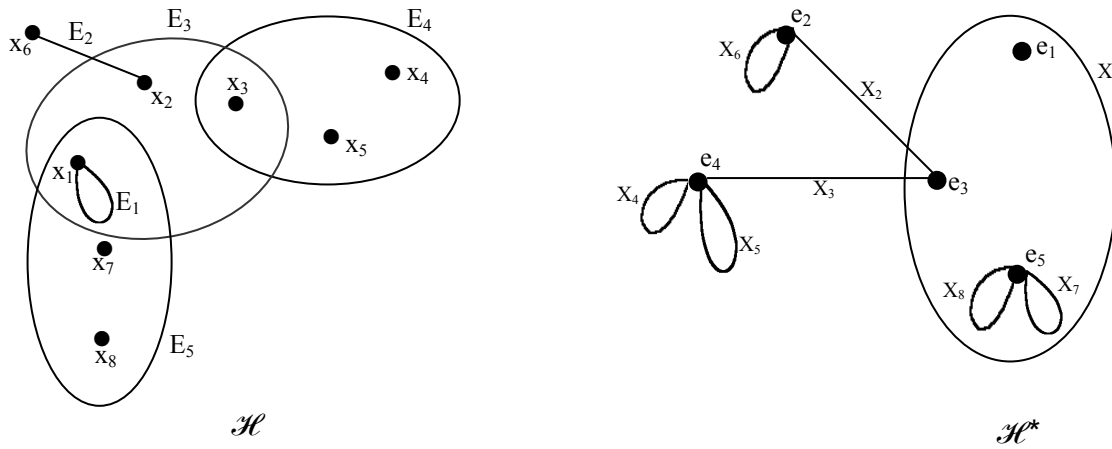


Figure 7

- Le *graphe représentatif des arêtes de l'hypergraphe* \mathcal{H} est un graphe simple noté $L(\mathcal{H})$ dont les sommets e_1, \dots, e_m représentent respectivement les ensembles E_1, \dots, E_m et deux sommets e_i et e_j sont adjacents dans $L(\mathcal{H})$ si et seulement si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ pour $i \neq j$.
- Comme pour un graphe, *l'ordre* de \mathcal{H} , noté par $n(\mathcal{H})$ est le nombre de ses sommets et le nombre d'arêtes de \mathcal{H} sera noté par $m(\mathcal{H})$. En outre, *le rang* de \mathcal{H} est $r(\mathcal{H}) = \max_j |E_j|$ et le degré minimum de \mathcal{H} sera désigné par $\delta(\mathcal{H}) = \min_{x \in X} d_{\mathcal{H}}(x)$.
- Dans l'hypergraphe \mathcal{H} , un sous ensemble A (resp. T) de X est appelé ensemble *stable* ou ensemble *indépendant* (resp. *recouvrement par sommets* ou ensemble *transversal*) de \mathcal{H} , si chaque arête de \mathcal{H} contient au plus un sommet de A (resp. au moins un sommet de T). Un sous ensemble \mathcal{M} (resp. \mathcal{R}) d'arêtes de \mathcal{H} est appelé *couplage* (resp. *recouvrement*).

recouvrement par arêtes de \mathcal{H} si chaque sommet de X appartient à au plus une arête de \mathcal{M} (resp. au moins une arête de \mathcal{R}).

- Une famille de sous-ensembles C de X est une *k-coloration* (forte) des sommets de \mathcal{H} si C est une partition de X en k ensembles stables A_1, \dots, A_k , chacun d'eux correspondant à une couleur. Un hypergraphe pour lequel il existe une k -coloration est dit k -colorable.

- Posons:

$$\alpha(\mathcal{H}) = \max \{ |A|, A \text{ est un ensemble stable de } \mathcal{H} \};$$

$$\tau(\mathcal{H}) = \min \{ |T|, T \text{ est un recouvrement par sommets de } \mathcal{H} \};$$

$$\nu(\mathcal{H}) = \max \{ |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \text{ est un couplage de } \mathcal{H} \};$$

$$\rho(\mathcal{H}) = \min \{ |\mathcal{R}|, \mathcal{R} \text{ est un recouvrement par arêtes de } \mathcal{H} \};$$

$$\chi(\mathcal{H}) = \min \{ |C|, C \text{ est une } k\text{-coloration de } \mathcal{H} \}.$$

Ces nombres sont appelés *nombre de stabilité*, *nombre de recouvrement par sommets*, *nombre de couplage*, *nombre de recouvrement par arêtes* et *nombre chromatique* de \mathcal{H} respectivement.

Notons que tout hypergraphe \mathcal{H} vérifie $\alpha(\mathcal{H}) \leq \rho(\mathcal{H})$ et $\nu(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H})$ puisque chaque arête d'un recouvrement par arêtes contient au maximum un élément d'un stable et chaque sommet d'un recouvrement par sommets appartient à au plus une arête d'un couplage.

- \mathcal{H} à la *propriété de König* si $\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H})$, et *duale de König* si $\alpha(\mathcal{H}) = \rho(\mathcal{H})$.

1.3 Concepts généraux sur les graphes

Soit $G = (V, E)$ est un graphe où V désigne l'ensemble de ses sommets et E désigne l'ensemble de ses arêtes.

- Pour deux sommets adjacents u et v de V , on notera brièvement l'arête $\{u, v\}$ par uv . On dira que les sommets u et v sont les extrémités de l'arête uv .
- Une *chaîne* de longueur p , est une séquence de sommets distincts v_0, v_1, \dots, v_p dans laquelle deux sommets successifs sont adjacents. Les sommets v_0 et v_p sont les extrémités de la chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple.
- Un *cycle* de longueur p dans G , est une chaîne simple v_0, v_1, \dots, v_p dans laquelle les deux extrémités coïncident ($v_0 = v_p$), il est dit élémentaire si tous ses sommets sont différents.
- Un *sommet isolé* dans un graphe non orienté est un sommet de degré zéro.
- Le *complémentaire* d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\bar{G} = (V, \bar{E})$ tel que: $\forall u, v \in V$ l'arête $uv \in \bar{E} \Leftrightarrow uv \notin E$.
- Un *sous-graphe* de $G = (V, E)$ est un graphe $G' = (V', E')$ où l'ensemble de ses sommets V' est un sous ensemble de V et l'ensemble de ses arêtes E' est un sous ensemble de E où toute arête de E' joint deux sommets de V' . Si toutes les arêtes de G qui relient les sommets de V' sont dans E' , on dira que G' est induit par V' et il est noté $G_{V'}$.
- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si pour tout sommet u et v de V , il existe une chaîne joignant le sommet u au sommet v . Dans le cas contraire, G sera dit non connexe et pourra s'écrire comme l'union disjointe de graphes connexes (appelés composantes connexes de G).

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *complet* si toute paire de sommets est liée par une arête. Si $|V| = n$, G est noté K_n .
- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *régulier* si tous les sommets ont le même degré.
- Un *arbre* est un graphe connexe, sans cycle.

- Un graphe *biparti*, $G = (X \cup Y, E)$ est un graphe dans lequel l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes X et Y de telle sorte que chaque arête ait ses deux extrémités dans deux classes différentes. Un graphe biparti complet, où $n_1 = |X|$ et $n_2 = |Y|$, est noté K_{n_1, n_2} .

1.4 Hypergraphe des intervalles d'un poset

Soit P un poset et \mathcal{I} l'ensemble de ses intervalles maximaux. L'hypergraphe $\mathcal{H}(P) = (P, \mathcal{I}(P))$ dont les sommets sont les éléments de P et dont les arêtes sont les intervalles maximaux de P est dit *l'hypergraphe des intervalles* de P .

Notons par $\mathcal{H}^*(P)$ son dual.

L'hypergraphe des intervalles d'un poset a été introduit par B. Voigt et I. Wegener [66] pour la détermination de l'invariant $\rho(\mathcal{H}(P))$ où P est un sous-poset du treillis booléen. La généralisation à un poset quelconque est réalisée par I. Bouchemakh dans [8], où elle s'est particulièrement intéressée à la propriété duale de König. Par la suite, les travaux établis par K. Engel [28] ont visé les deux paramètres τ et ν , et dans [13], la généralisation de la stabilité est étudiée. La k -stabilité est la taille maximum d'un ensemble k -stable où un ensemble A est dit k -stable si chaque intervalle maximal de P contient au plus k éléments de A . Elle proposa dans certains cas des valeurs exactes, dans d'autres cas des bornes. Enfin, l'étude du nombre chromatique qui est équivalente à l'étude des systèmes stables $P(t, k, n)$ est réalisée dans [12] où un système stable d'ordre n est une paire (Q, q) , où Q est un ensemble à n éléments et q est une collection de sous-ensembles à k éléments de Q appelés blocs, ayant la propriété que chaque sous-ensemble à t éléments de Q doit être un sous-ensemble d'au plus un bloc de q .

D'autres études pour l'hypergraphe des intervalles ont vu le jour pour d'autres classes de posets comme la classe des ordres d'intervalles [11], la classe des ordres série-parallèles [9], les ordres à chaînes symétriques spéciales [7], les ordres à chaînes semi symétriques spéciales [10], le treillis des faces du n-cube C_n [8, 55] et le treillis linéaire $L_n(q)$ [8, 29]. Toutes ces classes ont été traitées dans [7] où principalement l'étude était sur les propriétés de König et duale de König.

1.4.1 Graphe représentatif des intervalles d'un poset

Soit P un poset. Le *graphe représentatif des intervalles de P* , noté $G(P)$, est le graphe dont les sommets sont les éléments de P et deux sommets sont adjacents si et seulement si ils appartiennent à un même intervalle de P . Il s'agit en fait du graphe représentatif des arêtes de $\mathcal{H}^*(P)$.

Exemple

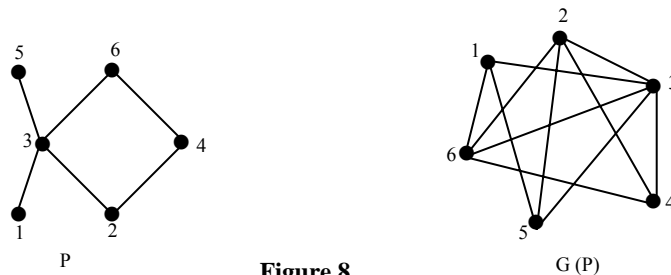


Figure 8

1.5 Notion de domination

- *Un ensemble dominant* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble D de V tel que pour tout $x \in V - D$, il existe $y \in D$ tel que y est adjacent à x .
- Un *sommet dominant* est un sommet qui forme un ensemble dominant, c'est-à-dire, un sommet qui est adjacent à tous les autres sommets.

- Une *partition domatique* est une partition des sommets de G en ensembles dominants.
- Le *nombre domatique* d'un graphe, noté $d(G)$ est le nombre maximum d'ensembles dominants dans une partition domatique du graphe, où d'une façon équivalente, le nombre maximum d'ensembles dominants disjoints deux à deux.
- Le nombre domatique peut être défini d'une façon équivalente par ce qu'on appelle la *coloration domatique*. Une coloration domatique d'un graphe G est une coloration des sommets de G avec la propriété que si x est un sommet arbitraire de G , alors pour chaque couleur différente de celle de x , il existe un sommet coloré avec cette couleur qui est adjacent à x (deux sommets portant la même couleur, peuvent être adjacents). Ainsi le nombre domatique de G est le nombre maximal de couleurs de la coloration domatique de G . L'équivalence entre les deux définitions du nombre domatique est évidente.
- Le *nombre de domination*, noté $\gamma(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant.
- Pour tout graphe $G = (V, E)$, il a été montré dans [20] que le nombre domatique $d(G) \leq \delta(G) + 1$ où $\delta(G) = \min_{x \in V} d(x)$. De là, on dit qu'un graphe G est *domatiquement plein* si $d(G) = \delta(G) + 1$.

Chapitre 2

Survey sur le nombre domatique d'un graphe

Dans ce chapitre, nous introduisons un bref historique sur la domination en général et sur le nombre domatique en particulier, nous donnons également des bornes du nombre domatique dans un graphe, les conditions sous lesquelles certaines bornes sont atteintes et enfin quelques classes de graphe où le nombre domatique est étudié.

2.1 Survey et motivation

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants dans les graphes commença aux environs des années 1060, le sujet a ses racines historiques datant avant 1862, quand Jaenish [23] étudia le problème de la détermination du nombre minimum de reines nécessaires pour dominer une table d'échecs ($n \times n$), il posa le problème suivant: " Quel est le nombre minimum de reines qui peuvent être placées sur un échiquier de telle sorte que chaque case, est soit occupée par une des reines ou elle est sur son champ de mouvement,(rappelons que le champ de mouvement de la reine sont toutes les cases qui se

trouvent sur la ligne, la colonne et la diagonale passant par celle-ci). Evidemment, ça revient à déterminer le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier.

Notons que d'autres variations de ce problème ont été formées en considérant différentes pièces d'échecs avec (ou) différentes tailles d'échiquiers [69].

En 1958, la domination est formalisée dans un contexte théorique dans la théorie des graphes, par C.Berge [4], où il définit pour la première fois le concept du nombre de domination d'un graphe bien qu'il le nomme le coefficient de Stabilité externe. En 1962, Ore [58] fut le premier à utiliser les termes "ensemble dominant" et la notation " $d(G)$ " bien qu'il l'a destine au nombre de domination.

L'un des paramètres importants de la domination dont l'étude a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs [18,16, 43, 3, 70-98] est le nombre domatique. Le vocable "domatique"(domatic) n'a aucun lien avec le même mot utilisé en cristallographie. Il a été créé des mots "domating" et "chromatic" de la même manière que le mot "smog" est composé à partir des vocables "smoke" et "fog". Le concept du nombre domatique est le même que celui du nombre chromatique, seulement, on utilise les ensembles dominants pour les définir au lieu d'ensembles stables.

La notion du nombre domatique a été introduite pour la première fois par Cockayne et Hedetniemi [20] en 1977. Leur papier "survey" semble avoir mis dans le mouvement l'étude moderne de la domination dans les graphes puisque après vingt ans, plus de 1200 papiers de recherche ont été publiés dans ce contexte et le nombre de papiers augmente régulièrement.

Le problème de partition domatique apparaît dans les réseaux de communication [21]. Le réseau est modélisé par un graphe non orienté où les arêtes représentent les lignes de communication et les sommets représentent les cités. Un groupe de transmission est un ensemble de cités qui activent comme des stations de transmission, c'est-à-dire qui peut transmettre des messages à chaque cité dans le réseau. Donc, un groupe de transmission dans le réseau de communication, est un ensemble dominant dans le graphe. Trouver le nombre maximum de groupes de transmission disjoints dans un réseau de communication est équivalent au problème de partition domatique dans le graphe correspondant.

2.2 Les nombres domatiques

Des concepts analogues à celui du nombre domatique sont très répandus dans la littérature, nous définissons quelques-uns alors que nous nous contentons de citer les autres.

En 1977, Cockayne et Hedetniemi ont défini le nombre domatique $d(G)$ du graphe $G = (V, E)$, trois ans plus tard, les mêmes auteurs avec Dawes [19] définissent *le nombre domatique total* $d_t(G)$ qui est le nombre maximum de classes de la partition de V en ensembles dominants totaux disjoints où un sous ensemble D de V est dit ensemble dominant total, si pour tout $x \in V(G)$, il existe $y \in D$, adjacent à x .

Le nombre domatique connexe $d_c(G)$, introduit en 1984 par Hedetniemi et Laskar [46] et étudié ensuite par Zelinka et autres [2, 42, 46, 78] est la cardinalité maximum de la partition de $V(G)$ en ensembles dominants connexes où l'on exige la connexité du graphe G .

Notons cependant que les sommets du cycle C_5 , ne peuvent être partitionnés en ensembles dominants stables mais s'il existe au moins une partition des sommets de V en ensembles dominants stables, on dit que G est idomatique et *le nombre idomatique* $id(G)$ est égal à la cardinalité maximum d'une telle partition. Ce nombre a été défini par Cockayne et Hedetniemi [20] et Zelinka [71].

Le nombre domatique par arêtes est le nombre maximum d'ensembles dominants par arêtes dans la partition de E où un ensemble D d'arêtes de E d'un graphe G est dit dominant si pour toute arête $e \in E \setminus D$, il existe une arête $f \in D$ adjacente à e . Ce nombre noté $ed(G)$ a été définis et étudié pour la première fois par Zelinka en 1983 [86].

Le nombre adomatique défini par Cockayne et Hedetniemi [20] et étudié par Zelinka dans [71], est égal au nombre minimum d'une partition de V en ensembles dominants S_i où aucun d'eux ne peut être partitionné en deux ensembles dominants, c'est-à-dire indivisible.

Nous trouvons dans la littérature d'autres invariants du nombre domatique dus à Zelinka, qu'on ne va pas définir :

Le nombre k -domatique [88]

Le nombre k -ply domatique [73]

Le nombre semi-domatique [72]

Le nombre antidomatique [80]

Le nombre domatique complémentaire (complementarily domatic) [79]

Le nombre adomatique total [93]

Le nombre adomatique par arête (edge-adomatic) [94]; et le nombre adomatique total par arête (total edge-adomatic) [87];

Le nombre domatique total par arête [87];

Le nombre domatique local [82].

Ou par d'autres auteurs :

Le nombre domatique couplé (paired domatic number) [45];

Le nombre domatique k -tuple (k -tuple domatic number) [39];

Le nombre codomatique [26].

2.2.1 Le nombre domatique dans les graphes orientés

Il est également possible de définir le nombre domatique pour un graphe orienté, ceci peut se faire de la même manière que pour les graphes non orientés, seulement il est nécessaire de donner la définition appropriée d'un ensemble dominant dans un tel graphe. Dans [72,96], B.Zelinka a transféré le concept du nombre domatique dans les graphes orientés en définissant deux généralisations du nombre domatique comme suit:

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Un sous ensemble D de V est dit *semidominant intérieur* (resp. *extérieur*) dans G si à chaque sommet $x \in V-D$, il existe un sommet $y \in D$ tel que l'arc \overrightarrow{xy} (resp. \overrightarrow{yx}) appartient à G .

Une *partition domatique intérieure* (resp. *extérieure*) est une partition de V en ensembles semidominants intérieurs (resp. extérieurs). Le nombre maximum de classes dans la partition semidomastique intérieure (resp. extérieure) dans une partition de G est dit *nombre semidomastique intérieure* (resp. *extérieure*), il est noté $d^-(G)$ (resp. $d^+(G)$).

Un ensemble dominant dans un graphe orienté G est défini comme un sous ensemble de V qui est à la fois semidominant intérieur et semidominant extérieur. En d'autres termes c'est un sous ensemble de sommets D de G avec la propriété que chaque sommet $x \in V-D$, il existe des sommets y et z de D (qui ne sont pas nécessairement différents) tel qu'il existe une arête de y vers x et une arête de x vers z .

Le nombre domatique $d(G)$ de G est le nombre maximum de classes dans une partition des sommets du graphe orienté en ensembles dominants.

2.3 Les bornes du nombre domatique

Maints travaux ont été entrepris pour déterminer des bornes pour le nombre domatique, ainsi que les conditions sous lesquelles, elles sont atteintes. Nous commençons par donner les valeurs exactes.

2.3.1 Les valeurs exactes

Nous introduisons d'abord deux résultats, le premier est réalisé en 1962 par Ore [58], alors que le second est conçu en 1984 par Chang [16] puis nous évoquons un ensemble de résultats de Kys [50] de 1985 et de Zelinka [81, 89, 78, 97] entre 1980 et 1992, à propos de l'existence d'un graphe G avec un nombre domatique bien déterminé sous certaines conditions.

Dans tout ce qui suit on considère un graphe $G = (V, E)$ simple et fini.

Théorème 2.1 [58], (1962) *Pour tout graphe G , $d(G) > 1$ si et seulement si G n'a aucun sommet isolé.*

Proposition 2.2 [16], (1984) *Si x est un sommet dominant d'un graphe G , alors $d(G) = d(G - x) + 1$.*

Théorème 2.3 [81], (1992) *Pour tout entier $k \neq 0$, il existe un graphe G dans lequel chaque sommet a un degré $\geq k$ et dont $d(G)=2$.*

Théorème 2.4 [50], (1985) *Pour toute séquence croissante d'entiers positifs a_0, a_1, \dots, a_n , il existe un graphe $G = (V, E)$ avec les sommets v_0, v_1, \dots, v_n tel que $d(G) = a_0$ et $d(G - v_1 - v_2 - \dots - v_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n$.*

Théorème 2.5 [50], (1985) *Pour toute séquence d'entiers $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n$ avec $a_i - a_{i+1} \leq 1$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, il existe un graphe $G = (V, E)$ avec les sommets v_0, v_1, \dots, v_n tel que $d(G) = a_0$ et $d(G - v_1 - v_2 - \dots - v_i) = a_i$.*

Théorème 2.6 [50], (1985) *Pour toute séquence d'entiers $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n$ et $a_i - a_{i+1} \leq 1$, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, il existe un graphe $G = (V, E)$ avec des arêtes e_1, \dots, e_n tel que $d(G) = a_0$ et $d(G - e_1 - e_2 - \dots - e_i) = a_i$.*

La *connectivité* d'un graphe G d'ordre n , notée $\kappa(G)$ est le cardinal du plus petit ensemble de sommets de G qui a la propriété de déconnecter le graphe. Analogiquement, l'arête connectivité, noté $\sigma(G)$ est le cardinal du plus petit ensemble d'arêtes *déconnectant* (ensemble d'arêtes dont la suppression déconnecte le graphe G s'il est connexe et augmente le nombre de composantes connexes s'il ne l'est pas).

Théorème 2.7 [89], (1981) *Soient p et q deux entiers positifs tels que $p < q$. Il existe un graphe G tel que $\kappa(G) = p$ et $d(G) = q$.*

Théorème 2.8 [89], (1981) *Soient p et q deux entiers positifs tel que $p < q$. Il existe un graphe G tel que $\sigma(G) = p$ et $d(G) = q$.*

Théorème 2.9 [89], (1981) *Soit h un entier positif. Il existe un graphe G tel que $\kappa(G) - d(G) = \sigma(G) - d(G) = h$.*

Un graphe G est dit *uniquement domatique* s'il existe exactement une et une seule partition de G avec $d(G)$ classes.

Dans [89], Zelinka a caractérisé les graphes uniquement domatique avec un nombre domatique égale à 2:

Lemme 2.10 [89], (1981) *Chaque graphe uniquement domatique avec un nombre domatique au moins deux est connexe.*

Théorème 2.11 [89], (1981) *Un graphe G avec un nombre domatique 2 est uniquement domatique si et seulement si G est l'étoile $K_{1,n}$ ou le graphe K_2 .*

De plus il a établi une relation entre le nombre domatique et le nombre domatique connexe ainsi qu'une autre relation entre le nombre domatique et le nombre adomatique:

Théorème 2.12 [78], (1986) *Pour un entier arbitraire q , il existe un graphe G tel que*

$$d(G) - d_c(G) = q .$$

On a $d(G) \geq ad(G)$ pour tout graphe G . Le théorème ci-dessous nous montre que la différence entre ces deux nombres peut être relativement grande:

Théorème 2.13 [97], (1980) *Pour chaque entier positif n , il existe un graphe G , pour lequel $d(G) - ad(G) = n$ et qui a la propriété que chaque partition de ses sommets en ensembles dominants indivisibles possède $d(G)$ ou $ad(G)$ éléments.*

Le théorème précédent est aussi une réponse négative à la question de Cockayne et Hedetniemi [20] qui s'énonce comme suit: "existe-il une partition des sommets de G en ensembles dominants indivisibles, de toutes les cardinalités entre $ad(G)$ et $d(G)$ ".

Un exemple de graphe avec les propriétés décrites dans le théorème précédent est le graphe complet biparti $K_{n+2, n+2}$: $d(K_{n+2, n+2}) = n+2$; $ad(K_{n+2, n+2}) = 2$.

2.3.2 Les bornes simples

En 1977, Cockayne et Hedetniemi [20] ont conçu les premières bornes supérieures pour le nombre domatique:

Théorème 2.14 [20], (1977) *Pour tout graphe G d'ordre n ,*

a. $d(G) \leq \delta(G) + 1$.

b. $d(G) \leq \frac{n}{\gamma(G)}$.

Pour les bornes inférieures, le premier théorème qu'on citera est donné en 1972 par Jaeger et Payan [47], alors que le second du à Zelinka [74] date de 1983.

Théorème 2.15 [47], (1972) *Pour tout graphe G ; $d(G) \geq \gamma(\overline{G})$.*

Théorème 2.16 [75], (1983) *Pour tout graphe G , $d(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{n - \delta(G)} \right\rfloor$.*

En 1995, A. Majumder, A. Jas et S. Sur-Kolay [54], ont amélioré la première borne du théorème 2.14.

Théorème 2.17 [54], (1995) *Pour tout graphe $G = (V, E)$, le nombre domatique,*

$$d(G) \leq \min(\delta(G) + 1, \lfloor (|V| + |V_{n-1}|) / 2 \rfloor)$$

où V_{n-1} représente un sous ensemble de sommets de V qui sont de degré égal à $n - 1$.

On dit que deux sommets u et v d'un graphe connexe G sont à *distance* p si et seulement si la plus courte chaîne les reliant est de longueur p . le *diamètre* d'un graphe G est la distance maximum entre deux sommets de G .

En tenant compte du résultat de Ore (théorème 2.1), il suffit donc de caractériser les graphes G qui ont $d(G) \geq 3$. Un résultat partiel a été prouvé en 1972 par F. Jaeger et C. Payan [47].

Théorème 2.18 [47], (1972) *Si G a un diamètre inférieur ou égale à deux et chaque arête est dans un triangle alors $d(G) \geq 3$.*

C'est une condition suffisante qui n'est pas nécessaire, un exemple de graphe avec un nombre domotique 3 qui ne remplit pas cette condition est le cycle de longueur 6.

2.3.2.1 Les bornes du type Nordhaus-Gaddum

Les résultats du type Nordhaus-Gaddum représentent de très fortes bornes, de la somme ou le produit de paramètres d'un graphe et son complémentaire.

En 1956, le papier original [57] de Nordhaus et Gaddum apparut, dans lequel ils donnent des bornes de la somme et le produit du nombre chromatique du graphe et son complémentaire. Depuis lors, de tels résultats ont été donnés pour d'autres paramètres (voir [17]), ils ont inclus des résultats du nombre de domination [47,59], en particulier, nous verrons ceux qui sont relatifs au nombre domotique:

Théorème 2.19 [20], (1977) *Pour tout graphe G , $d(G) + d(\overline{G}) \leq n + 1$, et l'égalité est atteinte si et seulement si $G = K_n$ ou \overline{K}_n .*

Théorème 2.20 [24], (1999) *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$, $2 \leq d(G)$. $d(\overline{G}) \leq n^2/4$.*

Soient les k graphes $G_i = (V_i, E_i), i = 1, \dots, k$, tel que pour tout i, j dans $\{1, \dots, k\}$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, et $E_i \cap E_j = \emptyset$. L'union des graphes G_i est le graphe union noté $\bigcup_{i=1}^k G_i = (\bigcup_{i=1}^k V_i, \bigcup_{i=1}^k E_i)$. Si les G_i sont identiques, le graphe union est noté kG_1 .

Remarque les bornes du théorème 2.20 sont les meilleures possibles. En effet, 2 est la meilleure borne inférieure car si $G \simeq K_{1, n-1}$, $d(G) = 2$ et $n^2/4$ est la meilleure borne supérieure car le graphe biparti complet $G \simeq K_{s, s}$ d'ordre $n = 2s$, $d(G) = s$ et $d(\overline{G}) = d(2K_s) = s$, ce qui implique $d(G)d(\overline{G}) = s^2 = n^2/4$.

En 1999, Dunbar, Haynes et Henning [24], ont caractérisé les graphes atteignant cette borne supérieure. Ils ont procédé de la manière suivante:

Pour tout entier $k \geq 2$, ils définissent une famille \mathcal{G}_k de graphes comme suit:

Soit $I = \{1, 2, \dots, k\}$. Si $G \in \mathcal{G}_k$ alors les sommets du graphe G peuvent être indexés:

$u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k$ tels que pour tout $i \in I$, l'une des conditions suivantes est satisfaite:

C₁: Pour tout $l \in I - \{i\}$,

soit $u_i u_l, v_i v_l \in E(G)$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(\overline{G})$, soit $u_i u_l, v_i v_l \in E(\overline{G})$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(G)$,

C₂: Il existe un $j \in I - \{i\}$ tel que:

(i) Pour tout $l \in \{i, j\}$,

soit $u_i u_l, v_i v_l \in E(G)$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(\overline{G})$ soit $u_i u_l, v_i v_l \in E(\overline{G})$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(G)$;

(ii) $u_i u_j, u_i v_j, v_i u_j \in E(G)$ et $u_i v_i, u_j v_j, v_i v_j \in E(\overline{G})$;

(iii) Dans le graphe G ; $N(u_i) - V_{ij} = N(u_j) - V_{ij}$ et $N(v_i) - V_{ij} = N(v_j) - V_{ij}$

où $V_{ij} = \{u_i, u_j, v_i, v_j\}$

Théorème 2.21 [24], (1999) Pour tout graphe G , d'ordre pair $n \geq 4$, $d(G)d(\overline{G}) = n^2/4$ si et seulement si $G \simeq K_4$ ou $G \in \mathcal{G}_k$ pour tout entier $k \geq 2$.

Notons que le théorème 2.21 caractérise une sous classe de graphes ayant $d(G) = \lfloor n/2 \rfloor$

c'est à dire les graphes pour lesquels $d(G) = d(\overline{G}) = n/2$.

En prenant $G \approx K_{s,s}$ et $n = 2s$ alors G et \bar{G} n'ont pas de sommet isolé et $d(G) = d(\bar{G}) = s$ donc $d(G)+d(\bar{G}) = n$ et $d(G)d(\bar{G}) = n^2/4$, par conséquent les bornes supérieures dans les théorèmes 2.19 et 2.20 ne peuvent être améliorés en imposant la condition que G et \bar{G} n'ont pas de sommets isolés. Cependant, Dunbar, Haynes et Henning [24] ont pu améliorer les bornes supérieures pour les théorèmes 2.19 et 2.20 pour le cas des arbres:

Théorème 2.22 [24], (1999) *Pour tout arbre d'ordre $n \geq 2$,*

$$3 \leq d(T) + d(\bar{T}) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 2 \quad \text{et} \quad 2 \leq d(T)d(\bar{T}) \leq n.$$

Ces bornes sont les meilleurs possibles. Les égalités sur les bornes inférieures sont vérifiées si et seulement si $T \approx K_{1,n-1}$. Quant aux égalités sur les bornes supérieures, elles sont vérifiées si et seulement si $d(\bar{T}) = \lfloor n/2 \rfloor$ et, pour le produit, une condition supplémentaire est la parité de n .

Les bornes supérieures peuvent s'obtenir en considérant la double étoile $2K_{1,s-1}$ obtenue à partir de deux étoiles $K_{1,s-1}$ en joignant les deux sommets de degré maximum par une arête. Ainsi T est l'arbre d'ordre $n = 2s$ qui satisfait les égalités: $d(T) = 2$ et $d(\bar{T}) = s$, ainsi que $d(T)+d(\bar{T}) = n/2+2$ et $d(T)d(\bar{T}) = 2s$.

Une caractérisation des arbres T pour lesquels $d(\bar{T}) = \lfloor n/2 \rfloor$ est donnée par le théorème suivant:

Théorème 2.23 [24], (1999) *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$ alors,*

$$d(\bar{T}) = \lfloor n/2 \rfloor \quad \text{ssi} \quad \Delta(T) \leq \lceil n/2 \rceil.$$

2.3.2.2 Des bornes pour $\gamma(G) + d(G)$

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à la somme du nombre de domination d'un graphe et du nombre domatique, nous citons les résultats qui suivent:

Théorème 2.24 [20], (1977) *Pour tout graphe G d'ordre n , $\gamma(G) + d(G) \leq n + 1$, et l'égalité est vérifiée si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{K_n}$.*

Il y'a une variété d'autres résultats qui donnent des bornes supérieures en n et $n + 1$ pour la somme de deux paramètres de domination pour les graphes en général. Cependant il y'a une restriction qui est que si G et \overline{G} n'ont aucun sommet isolé, alors ceci suffit pour réduire considérablement la borne supérieure. Le résultat suivant dû à Harary et Haynes, améliore la borne de la somme dans le théorème 2.24 pour les graphes G et \overline{G} qui n'ont pas de sommets isolés.

Théorème 2.25 [40] *Si G et \overline{G} n'ont aucun sommet isolé alors: $\gamma(G) + d(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 2$ et l'on a l'égalité si et seulement si $\{\gamma(G), d(G)\} = \{\lfloor n/2 \rfloor, 2\}$*

En 2000, Cockayne, Haynes et Hedetniemi [3] ont déterminé des conditions sous lesquelles cette borne est atteinte:

Théorème 2.26 [3], (2000) *Soient G et \overline{G} deux graphes n'ayant aucun sommet isolé alors:*

$\gamma(G) + d(G) = \lfloor n/2 \rfloor + 2$ si et seulement si $\{\gamma(G), d(G)\} = \{\lfloor n/2 \rfloor, 2\}$ ou $n = 9$ et $\gamma(G) = d(G) = 3$.

2.3.2.3 Les bornes algorithmiques

Une très riche étude algorithmique à propos de l'approximation algorithmique du nombre domatique est traitée dans [33] par U. Feige, M.M. Halldorsson, et G. Kortsarz :

Théorème 2.27 [33], (2000) *Chaque graphe admet une partition domatique de taille $(\delta + 1)(1 - o(\log \log n / \log n)) / \log n$.*

Lemme 2.28 [33], (2000) *Chaque graphe admet une partition domatique de taille $(1/3 - o(1))\delta / \log \Delta$ où Δ est le degré maximum du graphe " $o(1)$ " est un terme qui tend vers zéro quand Δ tend vers l'infini.*

Théorème 2.29 [33], (2000) *Il existe une constante $a > 0$ tel que pour tout graphe G avec $\Delta \geq 3$, on a:*

$$d(G) \geq \left\lfloor \frac{\delta}{\log \Delta + a \log \log \Delta} \right\rfloor.$$

2.4 Classes de graphes et résultats

1. Les Graphes factorés

Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, considérons les k graphes $G_i = (V, E_i)$ où $E_i \cap E_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$. Les graphes G_1, \dots, G_k représentent une k -factorisation de $G = (V, E)$ si $\bigcup_{i=1}^k E_i = E$.

On note alors $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_k$.

On simplifie les notations en prenant $d_i = d(G_i)$, $\gamma_i = \gamma(G_i)$ et $\Delta_i = \Delta(G_i)$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

Un cas particulier de la 2-factorisation d'un graphe complet K_n est une simple factorisation de K_n par un graphe G et son complémentaire.

En 2000, Haynes [44] a considéré le nombre domatique et deux variations des inégalités du type Nordhaus-Gaddum, elle étend le concept du résultat $G_1 \oplus G_2 = K_n$ en prenant $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$. Elle établit des bornes supérieures et inférieures de la somme et le produit de d_1 et d_2 :

Théorème 1.1 [44], (2000) Soit $s \geq 2$ un entier et soit $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$ on a:
 $d_1 + d_2 \leq s + 2$.

Par ailleurs: $d_1 + d_2 = s + 2$ si et seulement si l'un des $G_i, i = 1, 2$ est isomorphe à sK_2 .

T. Haynes [44] a considéré le produit maximum de $d_1 d_2$, elle a donné trois lemmes pour établir la borne supérieur:

Lemme 1.2 [44], (2000) Soit $s \geq 2$ un entier et soit $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$. Si $\gamma_1 = 2$ alors:

$$d_1 d_2 \leq 2s.$$

En outre $d_1 d_2 = 2s$ si et seulement si l'un des $G_i, i = 1, 2$ est isomorphe à sK_2 .

Lemme 1.3 [44], (2000) Soit $s \geq 3$ un entier et soit $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$.

Si $\gamma_1 = 3$, alors $d_1 d_2 \leq 2s$.

Lemme 1.4 [44], (2000) Soit $s \geq 4$ un entier et soit $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$.

Si $\gamma_1 \geq 4$ alors $d_1 d_2 \leq \lfloor s/2 \rfloor^2$.

Dans [44], il est prouvé par des constructions que les bornes des lemmes 1.3 et 1.4 sont les meilleures possibles.

Une conséquence immédiate des lemmes précédents s'ensuit:

Théorème 1.5 [44], (2000) Soit $s \geq 2$ un entier et soit $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$ alors

$$d_1 d_2 \leq \begin{cases} 2s & \text{pour } s \leq 9, \\ \lfloor s/2 \rfloor^2 & \text{pour } s \geq 10. \end{cases}$$

T. Haynes a considéré une autre généralisation des résultats du type Nordhaus-Gaddum en examinant le graphe complet factoré en trois graphes disjoints. Cette direction a été suivie par Plesnik [61] qui a étendu les résultats de Nordhaus et Gaddum pour le nombre chromatique quand le graphe complet est factoré en plus de deux graphes.

Les bornes supérieures de la somme et le produit des nombres de domination $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ quand $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = K_n$ sont présentées dans [36].

T. Haynes a d'abord montré le résultat fort suivant:

Théorème 1.6 [44], (2000) Soit $n \geq 3$ un entier et soit $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_t = K_n$ une factorisation de K_n alors:

$$t \leq \sum_{i=1}^t d_i \leq n + t - 1.$$

En particulier si $t = 2$, on retrouve le résultat de Cockayne et Hedetniemi [20], écrit dans le théorème 2.19 page 24.

Le théorème suivant donne des bornes de la triple somme:

Corollaire 1.7 [44], (2000) Soit $n \geq 3$ un entier et soit $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = K_n$ on a

$$3 \leq d(G_1) + d(G_2) + d(G_3) \leq n + 2.$$

Pour le triple produit, T. Haynes [44] a énoncé les résultats suivants:

Lemme 1.8 [44], (2000) Si $\gamma_i = 1$ pour un certain i alors $d_1 d_2 d_3 \leq n$.

Pour n assez grand, elle obtient :

Théorème 1.9 [44], (2000) Soit $n \geq 27$ un entier impair avec $n \notin \{29, 35, 37, 53\}$ ou $n \geq 42$, pair avec $n \notin \{44, 50, 52, 56\}$.

Si $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = K_n$ alors $d_1 d_2 d_3 \leq \lfloor n/3 \rfloor^3$.

Théorème 1.10 [44], (2000) Si $\gamma_i \geq 3$, pour tout $i = 1, 2, 3$, alors $d_1 d_2 d_3 \leq \lfloor n/3 \rfloor^3$.

Lemme 1.11 [44], (2000) Si n est pair alors: $d_1 d_2 d_3 \leq \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor^2$.

Lemme 1.12 [44], (2000) Si n est impair alors $d_1 d_2 d_3 \leq \frac{n-1}{2} \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor^2$.

2. Les graphes ayant des sommets d'articulation

Un *ensemble d'articulation* du graphe G est un sous ensemble de sommets de G , dont la suppression déconnecte le graphe G s'il est connexe et augmente le nombre de ses composantes connexes s'il ne l'est pas. Si l'ensemble d'articulation est réduit à un seul sommet, alors ce sommet sera appelé sommet d'articulation.

En 1995, P. D. Vestergaard et B. Zelinka [66], ont considéré le cas où le graphe G est l'union de deux graphes G_1 et G_2 avec exactement un sommet en commun, où ce sommet représente un sommet d'articulation de G . Soient G'_1, G'_2 les graphes induits de G_1 et G_2 respectivement, obtenus par la suppression de ce sommet d'articulation.

Théorème 2.1 [66], (1995) Pour tout graphe G , on a:

1. $\min\{d(G_1), d(G_2)\} \leq d(G) \leq 1 + \min\{d(G'_1), d(G'_2)\}$.
2. Pour tout entier positif q , il existe un graphe G tel que: $d(G) = \min\{d(G_1), d(G_2)\} + q$.
3. Pour tout entier positif q , il existe un graphe G tel que: $d(G) = \min\{d(G'_1), d(G'_2)\} - q$.

Un *isthme* est une arête, dont la suppression déconnecte le graphe s'il est connexe et augmente le nombre de composantes connexes s'il ne l'est pas.

Par ailleurs, P. D. Vestergaard et B. Zelinka [66], ont considéré le cas où le graphe H est obtenu à travers deux graphes disjoints H_1 et H_2 en reliant un sommet a_1 de H_1 à un sommet a_2 de H_2 par une arête considérée comme un isthme. Notons par H'_1 (resp. H'_2) le graphe obtenu à partir de H_1 (resp. H_2) par la suppression de a_1 (resp. a_2).

Théorème 2.2 [66], (1995) *Les nombres domatiques de H, H_1, H_2 vérifient:*

$$\min \{d(H_1), d(H_2)\} \leq d(H) \leq 1 + \min \{d(H_1), d(H_2)\}.$$

Ils donnent également les conditions sous lesquelles, la borne supérieure est atteinte:

Théorème 2.3 [66], (1995) *Pour les graphes H, H_1, H_2 , l'égalité:*

$$d(H) = 1 + \min \{d(H_1), d(H_2)\}$$

est vérifiée si et seulement si la condition suivante est réalisée:

Pour chaque $i \in \{1, 2\}$ tel que $d(H_i) = \min \{d(H_1), d(H_2)\}$, il existe une partition $\{D_1^i, \dots, D_{d+1}^i\}$ (où $d = d(H_i)$) des sommets de H_i telle que D_1^i, \dots, D_d^i sont des ensembles dominants dans H_i et D_{d+1}^i est un ensemble dominant dans H'_i , mais pas dans H_i .

Théorème 2.4 [66], (1995) *Pour les graphes H, H_1 , si l'égalité $d(H) = 1 + d(H_1)$ est vérifiée alors il existe un sommet de H_1 qui n'est pas adjacent à a_1 avec la propriété suivante: si on joint ce sommet à a_1 par une arête, on obtient le graphe \tilde{H}_1 à partir de H_1 vérifiant $d(\tilde{H}_1) = d(H_1) + 1$.*

3. L'hypercube

L'hypercube, noté Q_n de dimension n est le graphe dont les sommets représentent les n -uplets de $\{0, 1\}^n$. Deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si ils diffèrent d'exactlyement d'une seule composante.

Théorème 3.1 [70], (1982) *Soit k un entier positif. L'hypercube de dimension $2^k - 1$ et L'hypercube de dimension 2^k ont tous les deux le nombre domatique égal à 2^k .*

En [97], il a été prouvé qu'un graphe régulier peut être domatiquement plein avec un nombre domatique d , seulement si d divise le nombre de sommets de ce graphe. L'hypercube Q_n a 2^n sommets et il est régulier de degré n , alors son nombre domatique est au plus égal à $n+1$, et il peut être égale à $n + 1$ seulement si $n + 1$ divise 2^n et ceci n'est possible que si $n = 2^k - 1$, pour un entier k strictement positif. La démonstration de ce théorème est basée sur ce principe et elle se fait par induction sur l'entier k .

En 1982, Zelinka [70] posa la conjecture suivante:

Conjecture 3.2 *Soit Q_n le graphe de l'hypercube où n est un entier positif tel que $n + 1$ n'est pas une puissance de 2, alors $d(Q_n) = n$.*

Trois ans plus tard, Peter Kys [50], réfuta la conjecture pour $n = 5$ en exhibant une partition domatique maximum de Q_5 en quatre ensembles dominants. (Voir figure 1)

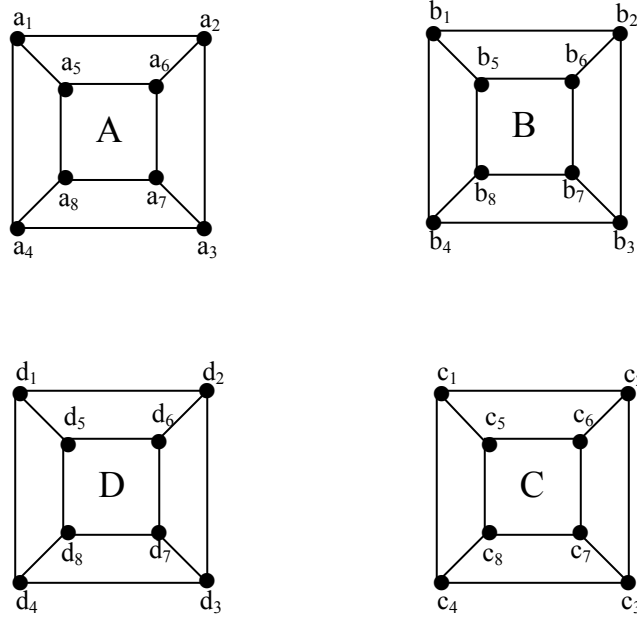


Figure 1

$A = \{a_i, i = 1, \dots, 8\}, B = \{b_i, i = 1, \dots, 8\}, C = \{c_i, i = 1, \dots, 8\}, D = \{d_i, i = 1, \dots, 8\}$ avec la propriété que les sous graphes induits $\langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle, \langle D \rangle$ sont des 3-cubes et $E(Q_5) = E(\langle A \rangle) \cup E(\langle B \rangle) \cup E(\langle C \rangle) \cup E(\langle D \rangle) \cup \{a_i b_i, i = 1, \dots, 8\} \cup \{b_i c_i, i = 1, \dots, 8\} \cup \{c_i d_i, i = 1, \dots, 8\} \cup \{d_i a_i, i = 1, \dots, 8\}$. En fait, il utilise la structure graphique de Q_5 par l'isomorphisme $Q_5 \cong Q_2 \times Q_3$. Il a montré que A, B, C, D sont des ensemble dominants.

Il conjecturait ensuite que la conjecture de Zelinka n'est pas vraie pour $n > 5$.

4. Les graphes union, les graphes somme et le produit de chaînes

Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes tel que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

L'union de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ et la somme ou le joint de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 + G_2$ qui consiste au graphe $G_1 \cup G_2$ avec toutes les arêtes joignant tout sommet de V_1 à tout sommet de V_2 .

Ces notions de graphes ont été introduits en 1984 par G.J.Chang [16] qui a établi les résultats suivants:

Proposition 4.1 [16], (1984) $d(G_1 \cup G_2) = \min\{d(G_1), d(G_2)\}$.

Théorème 4.2 [16], (1984) Soient $r \geq 2$ et G_1, \dots, G_r des graphes avec n_1, \dots, n_r sommets respectivement et sans sommet dominant.

Si $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$ et $n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} \geq n_r$ alors,

$$d(G_1 + G_2 + \dots + G_r) = \left\lfloor \frac{(n_1 + \dots + n_r)}{2} \right\rfloor$$

Définition [16], (1984) Une *partition m-domatique* du graphe $G = (V, E)$ est une collection D_1, D_2, \dots, D_k de k ensembles dominants, disjoints deux à deux tel que $|D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k| \leq m$. Le *nombre m-domatique* $d(G/m)$ de G est le nombre maximum k tel qu'une partition m-domatique existe. Notons que $d(G) = d(G/n)$ pour tout graphe G à n sommets.

Proposition 4.3 [16], (1984) Pour tout graphe G et tout entiers positifs m, m' tel que $m \leq m'$, on a: $d(G/m) \leq d(G/m')$.

Théorème 4.4 [16], (1984) Soient n_1 et n_2 deux entiers tels que $n_1 \leq n_2$ et $G_i = (V_i, E_i)$ un graphe à n_i sommets, sans sommet dominant pour $i = 1, 2$ on a :

$$d(G_1 + G_2/m) = \begin{cases} \lfloor m/2 \rfloor & \text{si } 0 \leq m \leq 2n_1, \\ n_1 + d(G_2/m - 2n_1) & \text{si } 2n_1 < m \leq n_1 + n_2. \end{cases}$$

Corollaire 4.5 [16], (1984) Soit r un entier tel que $r \geq 2$ et soient G_1, G_2, \dots, G_r des graphes avec n_1, n_2, \dots, n_r sommets respectivement, et sans sommet dominant. Si $n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} < n_r$, alors:

$$d(G_1 + G_2 + \dots + G_r) = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} + d(G_r/n_r - n_1 - \dots - n_{r-1}).$$

Corollaire 4.6 [16], (1984) Si $r \geq 2$ et $n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} < n_r$ alors:

$$d(\overline{K}_{n_1} + \overline{K}_{n_2} + \dots + \overline{K}_{n_r}) = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1}.$$

Cockayne et Hedetniemi ont donné le nombre domatique du joint d'un graphe complet K_n et du graphe G :

Théorème 4.7 [20], (1977) *Pour tout graphe G , $d(K_n + G) = n + d(G)$.*

Le produit de n chaînes $C_{n_1} \times C_{n_2} \times \dots \times C_{n_r}$ a $\prod_{i=1}^r (n_i + 1)$ sommets de la forme (a_1, \dots, a_r) où $0 \leq a_i \leq n_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Deux sommets (a_1, \dots, a_r) et (b_1, \dots, b_r) sont adjacents si et seulement si il existe un unique j tel que: $|b_j - a_j| = 1$ et $\forall i \neq j, a_i = b_i$.

G.J. Chang [16] a établi les résultats suivants:

Théorème 4.8 [16], (1984) *Si r et n sont deux entiers positifs et $(n_1, n_2, \dots, n_r) \in \{n, 2n\}$ alors:*

$$d(C_{n_1} \times C_{n_2} \times \dots \times C_{n_r}) \geq d(\underbrace{C_n \times C_n \times \dots \times C_n}_{r \text{ fois}})$$

Pour tout entier n , n et $2n - 1$ sont premiers entre eux, donc il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $m \geq n_0$, on peut écrire $m = rn + s(2n - 1)$ pour deux entiers positifs r et s . Le plus petit entier n_0 tel que l'égalité précédente est vérifiée est noté $M(n)$.

Théorème 4.9 [16], (1984) *Si r et n sont deux entiers positifs et $n_1, n_2, \dots, n_r \geq M(n+1) - 1$*

alors:

$$d(C_{n_1} \times C_{n_2} \times \dots \times C_{n_r}) \geq d(\underbrace{C_n \times C_n \times \dots \times C_n}_{r \text{ fois}})$$

5. Les graphes G ayant $d(G) = d(\overline{G})$

Des bornes supérieures et inférieures du produit du nombre domatique d'un graphe et de son complémentaire sont établis, en particulier, il est montré que $d(G)d(\overline{G}) \leq n^2 / 4$ (voir la partie 2.) et cette borne est la meilleure possible. Une conséquence de la caractérisation des graphes atteignant la borne supérieure est la caractérisation des graphes G ayant $d(G) = d(\overline{G}) = n/2$.

La précédente caractérisation mène au problème suivant: "Quel sont les graphes pour lesquels $d(G) = d(\overline{G})$?".

Il est facile de voir que: $d(G) = d(\overline{G}) = 1$ pour K_1 . La première observation de J.E. Dunbar, T.W. Haynes et M.A. Henning [25] en 1997, montre que K_1 est le seul graphe avec cette propriété:

Proposition 5.1 [25], (1997) *Pour tout graphe G , $d(G) = d(\overline{G}) = 1$ ssi $G \cong K_1$.*

Ils ont également caractérisé les graphes vérifiant $d(G) = d(\overline{G}) = 2$:

Lemme 5.2 [25], (1997) *Si $d(G) = d(\overline{G}) = 2$ alors $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) = 2$.*

La réciproque du lemme précédent n'est pas toujours vérifiée: la chaîne C_5 vérifie $\gamma(C_5) = \gamma(\overline{C_5}) = 2$ mais $d(C_5) = 2$ et $d(\overline{C_5}) = 3$. Par ailleurs, si $d(G) = d(\overline{G}) = k$, ne permet pas de dire que $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) = k$, puisque le cycle C_6 est un contre exemple immédiat.

Théorème 5.3 [25],(1997) *Un graphe non connexe G vérifie $d(G) = d(\overline{G}) = 2$ ssi $G \cong K_2 \cup K_p$ pour $p \geq 2$ ou $G \cong K_2 \cup K_p - e$ pour une arête quelconque e et $p \geq 3$.*

Toutefois, la caractérisation des graphes G ayant $d(G) = d(\overline{G})$ dans [25] a inclu les arbres et les cycles, les graphes bipartis réguliers et les graphes cubiques:

5.1 Les arbres et les cycles

Une arête e est dite *subdivisée* quand elle est supprimée et remplacée par une chaîne de longueur 2 connectant ses extrémités, le sommet interne de la chaîne devient un nouveau sommet.

Théorème 5.4 [25], (1997) *Un arbre T vérifie $d(T) = d(\overline{T})$ si et seulement si T est le trivial graphe K_1 , la chaîne C_4 ou l'étoile $K_{1,t}$, $t \geq 2$ avec exactement une arête subdivisée.*

Corollaire 5.5 [25], (1997) *La chaîne P_n vérifie $d(C_n) = d(\overline{C_n})$ ssi $n = 3$ ou $n = 4$.*

Théorème 5.6 [25], (1997) *le cycle C_n vérifie $d(C_n) = d(\overline{C_n})$ ssi $n = 4, 5, 6$.*

5.2 Les graphes bipartis

Il est évident de voir que pour un graphe complet biparti $G = K_{r,s}$ avec $1 \leq r \leq s$ on a $d(G) = d(\overline{G}) = r$.

Lemme 5.7 [25], (1997) *Si G est un graphe biparti régulier d'ordre $2t$, alors $d(\overline{G}) = t$.*

Dans un graphe G , On dit qu'un ensemble \mathcal{E} d'arêtes couvre G si chaque sommet dans G est incident à au moins une arête dans \mathcal{E} . Un ensemble d'arêtes qui couvre le graphe G est dit recouvrement d'arêtes ou simplement recouvrement de G . Un recouvrement dans lequel chaque sommet est de degré 1 est dit "1-facteur".

Théorème 5.8 [25], (1997) *Si G est un graphe régulier bipartite d'ordre $2t$, alors $d(G) = d(\overline{G})$ si et seulement si $G \cong K_{t,t}$ ou G est obtenu à partir de $K_{t,t}$ par la suppression des arêtes d'un 1-facteur.*

5.3 Les graphes cubiques

Nous appelons un graphe *cubique*, un graphe régulier de degré 3, une caractérisation des graphes cubiques est donnée dans la proposition suivante:

Proposition 5.9 [24], (1997) *Si G est un graphe cubique alors soit $G \cong K_4$ ou $\gamma(\overline{G}) = 2$.*

Citons à présent les résultats de J.E. Dunbar, T.W. Haynes et M.A. Henning [25], réalisés en 1997, relatifs à l'égalité $d(G) = d(\overline{G})$:

Lemme 5.10 [25], (1997) Si G est un graphe cubique d'ordre n et qui satisfait l'égalité $d(G) = d(\overline{G})$ alors $n \leq 12$.

Théorème 5.11 [25], (1997) Si G est un graphe cubique, d'ordre $n \geq 6$, alors

$$d(\overline{G}) = n/2 \text{ ou } d(\overline{G}) = n/2 - 1.$$

Notons qu'en 2000, J.E. Dunbar, T.W. Haynes et M.A. Henning [26], ont pu caractériser les graphes cubiques, satisfaisants $d(\overline{G}) = n/2 - 1$, ils ont d'abord montré que l'ordre n pour de tels graphes est relativement petit :

Lemme 5.12 [26], (2000) Si G est un graphe cubique d'ordre n , qui satisfait $d(\overline{G}) = n/2 - 1$ alors $n \leq 10$.

Le graphe G_1 de la figure 2 satisfait la relation $d(\overline{G}_1) = n/2$.

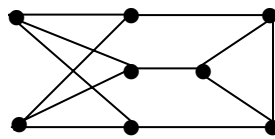


Figure 2

Théorème 5.13 [26], (2000) Si G est un graphe cubique d'ordre n , différent de K_4 et G_1 alors $d(\overline{G}) = n/2$.

Soient G_1, G_2, G_3, G_4 les graphes cubiques de la figure 3

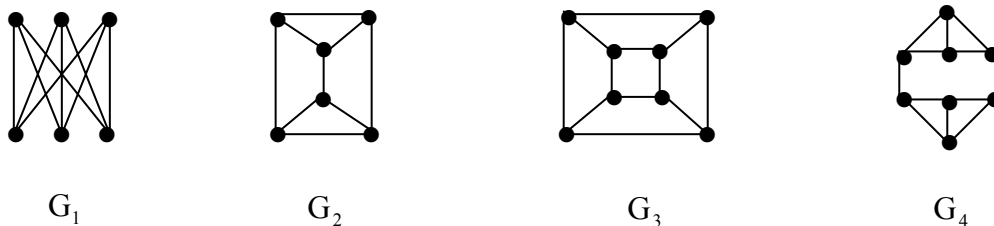


Figure 3

Théorème 5.14 [25], (1997) *Si G est un graphe cubique d'ordre n , alors $d(G) = d(\overline{G})$ si et seulement si $G \cong 2K_4$ ou $G \in \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$.*

Une conséquence immédiate du théorème précédent est:

Corollaire 5.15 [25], (1997) *Soit G un graphe cubique d'ordre n . Si $d(G) = d(\overline{G})$ alors $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) = 2$.*

6. Les graphes bipartis

Nous consacrons les résultats qui suivent à la liaison entre le nombre domatique et la bichromaticité qu'on va définir ci-après:

La *bichromaticité* est un invariant numérique qui est défini seulement pour les graphes connexes bipartis. Si $B = (C \cup D, E)$ est un graphe biparti connexe alors un homomorphisme bicomplet de B est un homomorphisme Φ de B dans un graphe complet biparti $K_{r,s}$ avec la propriété que si x et y sont dans C ou dans D alors $\Phi(x) = \Phi(y)$. La valeur maximale de $r + s$ pour tous les graphes complets bipartis $K_{r,s}$ qu'on peut trouver est dite la "bichromaticité de B ", elle est notée $\beta(B)$. La bichromaticité d'un graphe biparti connexe a été introduite en 1978, par F. Harary, D. Hsu et Z. Miller [41].

La *majorité* d'un graphe biparti $B = (C \cup D, E)$ est le nombre $\mu = \max(|C|, |D|)$.

En 1985, B. Zelinka [91] a étudié la relation existante entre la bichromaticité d'un graphe biparti connexe et le nombre domatique:

Lemme 6.1 [91], (1985) *Soit $B = (C \cup D, E)$ un graphe biparti connexe et soit \mathcal{P} une partition domatique de B , alors soit $\mathcal{P} = \{C, D\}$ soit $C \cap X \neq \emptyset, D \cap X \neq \emptyset$, pour tout X dans \mathcal{P} .*

Théorème 6.2 [91], (1985) *Pour chaque graphe biparti complet, nous avons:*

$$\beta(B) \geq \mu + \left\lceil \frac{1}{2} d(B) \right\rceil.$$

Remarque l'inégalité du théorème précédent ne peut être améliorée car si B est le cycle de longueur 6 alors $\mu = 3$, $d(B) = 3$ et $\beta(B) = \mu + \left\lceil \frac{1}{2} d(B) \right\rceil = 4$.

Corollaire 6.3 [91], (1985) *Pour chaque graphe biparti fini B avec $d(B) \geq 3$, nous avons:*

$$\beta(B) \geq \left\lceil \frac{3}{2} d(B) \right\rceil.$$

7. Les graphes domatiquement pleins

La propriété de la plénitude domatique a toujours été d'un grand intérêt pour la communauté de la théorie des graphes, une variété de classes de graphe a été étudiée. Afin d'exhiber cette propriété, nous citons les résultats qui suivent.

Dans ce qui suivra, nous aurons besoin des définitions suivantes:

On dit qu'un graphe G est *planaire* s'il est possible de le représenter sur le plan de telle sorte que les sommets soient des points distincts, les arêtes des courbes simples et que deux arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités. Nous appelons face d'un graphe planaire, toute région de plan limitée par des arêtes et telle que deux points arbitraires intérieures à cette région peuvent toujours être reliés par un trait continu ne rencontrant ni sommets, ni arêtes.

Un graphe *planaire extérieure* (outerplanar graph) est un graphe planaire qui contient une face avec la propriété que tous les sommets du graphe sont représentés sur ses frontières. Il est dit maximal, s'il est maximal pour cette propriété c'est-à-dire que si l'on lui rajoute une arête, il n'est plus planaire extérieure.

Les graphes qui sont connus être domatiquement pleins sont : les *graphe complets* K_n , leurs *complémentaires* \overline{K}_n , les *arbres*, les *graphes planaires extérieures maximaux*.

A présent, nous introduisons une série de graphes qui sont domatiquement pleins:

7.1 Les graphes k-critiques

Pour plusieurs invariants numériques d'un graphe, le concept d'un graphe critique relativement à un invariant donné est défini. Ceci a été le cas du nombre domatique.

En 1978, Cockayne [18] définit un graphe G comme étant un graphe *domatiquement k-critique* où simplement *k-critique* si $d(G) = k \geq 2$ et $d(G - e) < k$ pour toute arête $e \in E(G)$.

Remarque Il aurait été raisonnable de définir un concept analogue à la suppression d'arête en "supprimant un sommet" mais si l'on supprime un sommet d'un graphe, le nombre domatique du graphe peut augmenter, ou diminuer ou rester inchangé, par contre si l'on supprime une arête, le nombre domatique, soit il diminue ou il reste inchangé, il ne peut augmenter.

B. Zelinka [97], en 1980, a pu donner une caractérisation des graphes k-critique:

Théorème 7.1 [97], (1980) *Si G est un graphe k-critique alors l'ensemble de sommets $V(G)$ de G est l'union de k ensembles dominants disjoints deux à deux V_1, \dots, V_k avec la propriété que pour deux nombres arbitraires différents i, j de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$, le sous graphe $G_{i,j}$ de G induit par l'union $V_i \cup V_j$ est un graphe biparti avec les ensembles V_i, V_j et toutes ses composantes connexes sont des étoiles.*

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un graphe domatiquement plein est établis par B. Zelinka [97]:

Théorème 7.2 [97], (1980) *Un graphe G , domatiquement plein régulier d'ordre n avec un nombre domatique d existe si et seulement si d divise n . Un tel graphe est aussi domatiquement d -critique, sa structure est la suivante: l'ensemble de ses sommets $V(G)$ est l'union d'ensembles disjoints deux à deux V_1, \dots, V_d ou chacun d'eux contient n/d éléments avec la propriété que le sous graphe $G_{i,j}$ de G induit par $V_i \cup V_j$ (où i et j sont deux nombres arbitraires de l'ensemble $\{1, \dots, d\}$) est un graphe régulier de degré 1.*

En 1990, Rall [62] énonça le théorème suivant:

Théorème 7.3 [62], (1990) *Chaque graphe 2-critique ou 3-critique est domatiquement plein. Cependant, pour tout $k \geq 4$, il existe un graphe qui est k -critique mais qui n'est pas domatiquement plein.*

7.2 le produit de chaînes

La définition du produit de chaînes est déjà introduite dans 4.

En 1984, J.Chang [16] a essentiellement montré que tout produit de deux chaînes est domatiquement plein. Il est certainement clair que la chaîne C_n est domatiquement pleine pour tout $n \geq 2$. On peut vérifier aisément que chacun des produits $C_1 \times C_1$ et $C_3 \times C_1$ (ou $C_1 \times C_3$) à un nombre domatique égal à deux, mais ces produits ne sont pas domatiquement pleins.

Théorème 7.4 [16], (1984) *Si $n_1 \geq n_2 \geq 1$ alors $d(C_{n_1} \times C_{n_2}) = 3$ avec seulement deux exceptions, à savoir, $C_1 \times C_1$ et $C_3 \times C_1$.*

Théorème 7.5 [51], [95], (1983) *Si k est un entier positif et $r = 2^k - 1$, alors le produit $\underbrace{C_1 \times C_1 \times \cdots \times C_1}_{r \text{ fois}}$ est domatiquement plein.*

Le Corollaire qui suit découle du théorème précédent:

Corollaire 7.6 [51], [94], (1983) *Si k est un entier positif et $r = 2^k - 1$, alors le produit $C_{n_1} \times C_{n_2} \times \cdots \times C_{n_r}$ est domatiquement plein.*

7.3 Les graphes fortement triangulés et les graphes d'intervalles

Soit G un graphe non orienté. Un *voisinage fermé* du sommet v , noté $N[v]$ est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v , union le sommet v .

Un *ordre d'élimination fort* de G est un ordre v_1, \dots, v_n de V avec la propriété : Pour tout i, j, k et l si $v_k, v_l \in N[v_i]$ et $v_k \in N[v_j]$ alors $v_l \in N[v_j]$.

Un *graphe est fortement triangulé* (FT), s'il admet un ordre d'élimination fort. Les graphes FT ont été définis et caractérisés pour la première fois par Farber [31], où il a également donné un algorithme de reconnaissance en temps polynomial pour cette classe de graphe, il prouva le théorème suivant:

Théorème 7.7 [31], (1983) *Les graphes fortement triangulés sont domatiquement pleins.*

Une très riche étude algorithmique a été conçue pour cette classe de graphe, où l'on a exhibé un algorithme polynomial pour déterminer la partition domatique (voir [48]).

Une famille d'intervalles propre est une famille d'intervalles tel que aucun intervalle n'est proprement contenu à l'intérieur d'un autre intervalle.

Un graphe est dit *graphe d'intervalles propre* s'il y'a une correspondance entre les sommets du graphe et les intervalles du graphe d'intervalle tel que deux sommets du graphe sont adjacents si et seulement si les deux intervalles chevauchent. Comme les graphes d'intervalles sont des graphes fortement triangulés [37], alors ils sont domatiquement pleins.

7.4 Les graphes bloc-Cactus

Nous introduisons d'abord les définitions suivantes:

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *2-connexe* si et seulement si il est connexe d'ordre $n \geq 3$ et n'admet pas de sommet d'articulation.

Un *bloc* du graphe G est un ensemble A de sommets ($A \subseteq V$) qui engendre un sous graphe $G(A)$ connexe, sans sommet d'articulation et qui est maximal pour cette propriété, le sous graphe $G(A)$ est alors soit 2-connexe (si $|A| > 2$), soit un isthme de G (si $|A| = 2$), soit un sommet isolé (si $|A| = 1$).

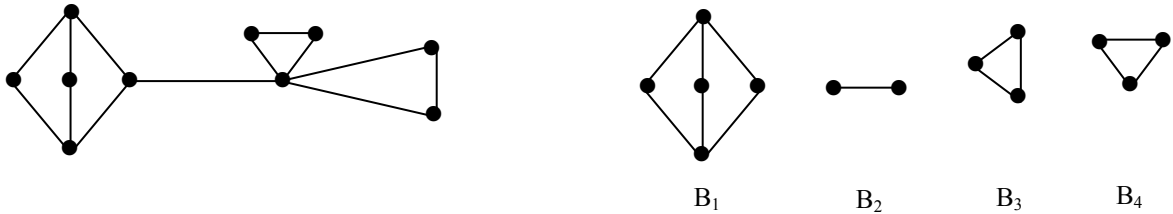


Figure 4 – un graphe et ses blocs-

Un *graphe bloc* est un graphe connexe dans lequel chaque bloc engendre un sous graphe complet.

On appelle *corde* d'un cycle élémentaire, une arête qui relie deux sommets non consécutifs de ce cycle.

Un *cactus* est un graphe connexe dont chaque bloc est constitué, soit par un isthme, soit par un cycle élémentaire sans corde.

Un cactus qui a un seul bloc sera nommé trivial, les autres seront dits non triviaux.

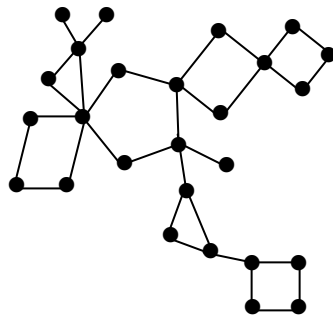


Figure 5 –cactus-

Un bloc d'un cactus non trivial qui contient seulement un sommet d'articulation de G , sera dit bloc terminal. Si un cycle C dans un cactus non trivial G ne forme pas un bloc terminal, alors il contient au moins deux sommets d'articulation de G ; de plus, il est l'union d'au moins deux chaînes simples disjointes où chacune de ces deux chaînes connecte deux sommets d'articulation de G . Soit $S(G)$ l'ensemble de ces chaînes.

Un graphe dont les blocs engendrent soit des sous graphes complets soit des cycles élémentaires sans cordes est dit *graphe bloc-cactus*.

Pour un cactus trivial, le nombre domatique est connu. Si un tel cactus consiste en une seule arête, alors évidemment le nombre domatique est égal à 2. Si un tel cactus G est un cycle alors $d(G) = 3$ si et seulement si la longueur de ce cycle est divisible par trois, dans le cas contraire $d(G) = 2$ (voir [20]). Il reste à considérer les cactus non triviaux dont l'étude est faite en 1986 par B. Zelinka [92]. Il est clair que les graphes cactus ne sont pas tous domatiquement pleins (considérons par exemple les cycles C_l avec l qui n'est pas divisible par 3). B. Zelinka [92] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un graphe cactus G avec $\delta(G) = 2$ soit domatiquement plein:

Théorème 7.8 [92], (1986) *Soit G un cactus fini, non trivial, les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *chaque bloc terminal de G est un cycle de longueur divisible par trois et pour tout cycle C de G ne formant pas un bloc terminal, l'ensemble $S(G)$ soit il contient au moins une chaîne de longueur 1, ou le nombre de chaînes de $S(G)$ avec des longueurs non divisible par 3 est différent de 1.*

(ii) *$d(G) = 3$ et il existe une partition domatique de G avec trois classes tel que chaque sommet est adjacent à au plus un sommet de la même classe et chaque arête joignant deux sommets de la même classe appartient à un cycle.*

Remarque il est prouvé dans [92] que si (i) n'est pas vérifiée, alors $d(G) = 2$.

Comme vu dans la section précédente, Farber [32] a montré que tous les graphes fortement triangulés sont domatiquement pleins et puisque les graphes blocs sont "fortement triangulés", ceci peut se voir par l'une des caractérisations de ces graphes dans [31], donc on déduit que les graphes blocs sont tous domatiquement pleins.

Ces résultats ont motivé B. Zelinka [64], à la recherche du nombre domatique des graphes "bloc-cactus" puisque cette classe généralise naturellement les graphes cactus et les graphes blocs.

B. Zelinka a montré entre autres que tous les graphes bloc-cactus avec un degré minimum $\delta(G) \geq 4$ sont domatiquement pleins:

Théorème 7.9 [64], (1998) *Soit G un graphe bloc-cactus connexe. Si $\delta(G) \geq 4$ ou si $\delta(G) = 2$ et G ne contient aucun cycle C_l de longueur $l \neq 0[3]$ comme bloc ou si $\delta(G) = 3$ et G ne contient le cycle C_5 comme bloc, alors G est domatiquement plein.*

Pour des graphes bloc-cactus avec un degré minimum 3, il a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'ils soient domatiquement pleins:

Théorème 7.10 [64], (1998) *Soit G un graphe bloc-cactus connexe avec $\delta(G) = 3$. Soient B_1, \dots, B_l des blocs de G qui sont des cycles de longueur 5 et soient F_1, \dots, F_r les*

composantes connexes de $G \left[\bigcup_{j=1}^l E(B_j) \right]$.

G est domatiquement plein si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, r$ l'une des trois conditions est vérifiée:

1. *Dans F_i , il existe un sommet x appartenant à au moins trois cycles B_j .*
2. *Dans F_i , il existe un sommet x appartenant à exactement deux cycles B_j avec $d(x) \geq 5$.*
3. *Dans F_i , il existe un sommet x appartenant à exactement un cycle B_j avec $d(x) \geq 4$.*

Théorème 7.11 [64], (1998) Soit G un graphe bloc-cactus connexe avec $\delta(G) = 3$. Si G n'est pas domatiquement plein, alors $d(G) = 3$.

Le résultat pour les graphes bloc-cactus avec un degré minimum 2 est donné par le théorème qui vient ci-après:

Théorème 7.12 [64], (1998) Soit G un graphe bloc-cactus connexe tel que $\delta(G) = 2$. Soient B_1, \dots, B_l les blocs de G qui sont des cycles C_{l_i} de longueur $l_i \neq 0[3]$ et soit $S_i, i = 1, \dots, l$, l'ensemble de tous les sommets d'articulation de G dans $V(B_i)$. S_i intersecte B_i en des chaînes \mathcal{P}_i pour $i = 1, \dots, l$. G est domatiquement plein si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, l$, au moins l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

1. l'ensemble \mathcal{P}_i contient une chaîne de longueur une.

2. $|\{P: P \in \mathcal{P}_i, (|V(P)| - 1) \neq 0[3]\}| \neq 1$, c'est-à-dire que le nombre de chaînes dans \mathcal{P}_i de longueur $k \neq 0[3]$ est différent de 1.

Puisque pour chaque graphe connexe G avec un degré minimum 2, il y a uniquement deux possibilités pour le nombre domatique, donc tous les graphes bloc-cactus connexes qui ne satisfont pas les conditions du théorème précédent ont un nombre domatique égal à 2.

7.5 Caractérisation des graphes réguliers domatiquement pleins

On introduit d'abord les définitions suivantes:

Une coloration d'un graphe est une attribution des couleurs à chaque sommet du graphe tel que deux sommets adjacents ne peuvent avoir la même couleur. L'ensemble des sommets avec la même couleur est un stable et il est nommé classe de couleur.

Une n -coloration de G est une partition de $V(G)$ en n classes de couleurs. Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le nombre minimum n pour lequel G a une n -coloration. Un graphe G est dit n -colorable si $\chi(G) \leq n$.

Si $\chi(G) = n$ et chaque n -coloration de G induit la même partition de $V(G)$ alors G est dit uniquement n -colorable ou simplement uniquement colorable.

Les notions uniquement domatique et distance dans un graphe sont données dans la section 2.3.1.

B. Zelinka a établi le résultat suivant:

Théorème 7.13 [98] *Soit G un graphe régulier, domatiquement plein et soit G^2 le graphe avec le même ensemble de sommets de G dans lequel deux sommets différents sont adjacents si et seulement si leurs distance dans G est au plus deux, alors:*

Le nombre domatique de G est égal au nombre chromatique de G^2 et chaque partition domatique de G avec $d(G)$ classes détermine une coloration des sommets de G^2 et vice versa.

Corollaire 7.14 [98] *Soient G et G^2 les graphes décrits dans le théorème précédent, alors:*

G est uniquement domatique si et seulement si G^2 est uniquement colorable.

Bien que le problème de la caractérisation des graphes uniquement domatique reste un problème ouvert, le théorème précédent et son corollaire le résolvent, pour une petite classe de graphes qui sont les graphes réguliers domatiquement pleins.

7.5.1 Les graphes réguliers connexes

Un hypergraphe est dit linéaire si chaque paire d'arêtes s'intersectent en au plus un sommet.

Un graphe simple est linéaire.

En 1990, B. Zelinka [74] a caractérisé les graphes réguliers connexes en utilisant le concept de recouvrement multiple. Le concept d'un recouvrement double d'un graphe a été introduit par D.A. Waller [68], et B. Zelinka l'a généralisé.

Soit G un graphe et k un entier. A chaque sommet $v \in V(G)$, on associe un ensemble $S(v)$ de telle manière que: $|S(v)| = k$ pour tout $v \in V(G)$ et $S(v_1) \cap S(v_2) = \emptyset$ pour $v_1 \neq v_2$. Soit

H le graphe construit à partir des sommets $S = \bigcup_{v \in V(G)} S(v)$ ayant la structure suivante:

- (1) Chaque ensemble $S(v)$ est un stable de H .
- (2) Si v_1, v_2 sont des sommets adjacents de G , alors $S(v_1) \cup S(v_2)$ induit un sous graphe linéaire de H .
- (3) Si v_1, v_2 sont des sommets non adjacents dans G , alors $S(v_1) \cup S(v_2)$ est un stable dans H .

H est alors appelé un k -recouvrement de G . Si $k=1$, l'unique k -recouvrement de G est G lui-même. Les k -recouvrements de G pour tout k , sont dits recouvrements multiples de G .

B. Zelinka a énoncé le théorème suivant:

Théorème 7.15 [74], (1990) *Soit G un graphe connexe régulier de degré r , alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *G est domatiquement plein.*
- (ii) *G est un recouvrement multiple du graphe complet K_r .*

B. Zelinka a également établi une autre caractérisation des graphes réguliers connexes domatiquement pleins en utilisant la notion de graphe domatiquement plein par arêtes:

Le nombre domatique par arête est noté $ed(G)$, un graphe G est dit domatiquement plein par arête si $ed(G) = \delta_e(G) + 1$ où $\delta_e(G)$ est le degré minimum par arête (le degré d'une arête est le nombre d'arêtes qui ont une extrémité en commun avec cette arête).

Théorème 7.16 [74], (1990) Soit G un graphe connexe régulier. Soit H le graphe obtenu à partir de G en insérant un sommet dans chaque arête, alors nous avons:

Le graphe G est domatiquement plein si et seulement si H est domatiquement plein par arêtes.

8. Les graphes de permutation

Soit Π_n l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, \dots, n\}$ et soit $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n)) \in \Pi_n$ une permutation. Si $\pi(i) = k$, on dit que la position de k dans la permutation π est i c'est-à-dire $\pi^{-1}(k) = i$. Chaque permutation π définit ce qu'on appelle un graphe inversion ou graphe de permutation $G(\pi) = (\{1, 2, \dots, n\}, E(\pi))$, où $ij \in E(\pi)$ si et seulement si $i < j$ et $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(j)$. La figure 6 illustre un graphe de permutation. Notons que si on trace des arêtes entre chaque entier i et sa position dans π , on crée n arêtes, chacune avec un entier qui lui est associé. De cette manière, deux sommets i et j sont adjacents dans $G(\pi)$ si et seulement si les arêtes correspondantes à ces entiers s'intersectent.

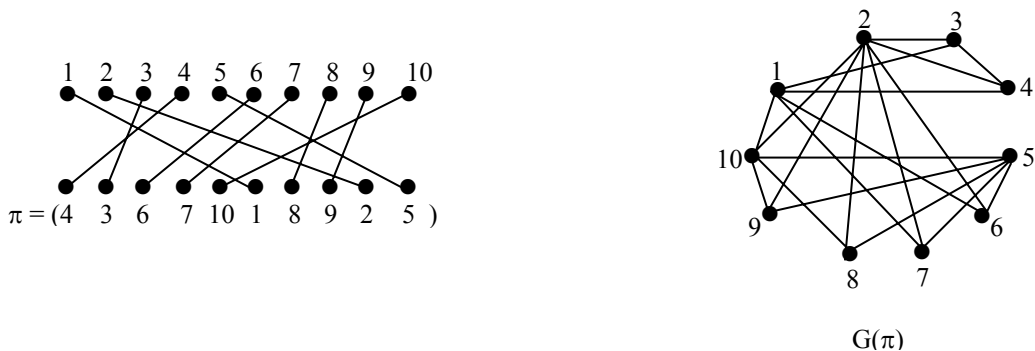


Figure 6 – un graphe de permutation-

En 1995, A. Majumder, A. Jas et S. sur-kolay [54], ont étudié les conditions pour lesquelles un graphe de permutation n'est pas domatiquement plein. Nous citons :

Théorème 8.1 [54], (1995) *Tout graphe de permutation régulier de degré pair n'est pas domatiquement plein.*

2.5 Conjectures et problèmes ouverts

Conjecture 1 [16], (1984):

Tout produit $C_{n_1} \times C_{n_2} \times \dots \times C_{n_r}$ est domatiquement plein avec quelques exceptions.

Conjecture 2 [88], (1981): Pour tout graphe G , nous avons: $d(G) \geq \frac{1}{2} \delta(G) + 1$.

Conjecture 3 [44], (2000): Soit $n \geq 15$ un entier avec $n \notin \{16, 17, 20\}$ et soit $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = K_n$, alors:

$$d_1 d_2 d_3 \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^3.$$

Les problèmes ouverts posés dans la littérature sont:

- [24], (1999): La caractérisation des graphes G ayant $d(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
- [25], (1997): La détermination des graphes G avec $d(G) = d(\overline{G}) = k$ pour $11 \leq k < \frac{n}{2}$.
 - Caractériser les graphes connexes G ayant $d(G).d(\overline{G}) = 2$.
 - Est-il vrai que si $d(G) = d(\overline{G})$ alors $\gamma(G) = \gamma(\overline{G})$?
 - Caractériser les graphes réguliers ayant $d(G) = d(\overline{G})$.
 - Caractériser les graphes bipartis ayant $d(G) = d(\overline{G})$.

- [75], (1983): Caractérisation des graphes uniquement domatiques.
- [52], (1988): Le calcul de $\gamma(Q_n)$ et $d(Q_n)$ reste toujours un problème ouvert. Zelinka a prouvé seulement que $d(Q_n) = 2^k$ si $n = 2^k - 1$ ou 2^k [69].
- [44], (2000): Caractérisation des graphes extrémaux qui atteignent la borne supérieure du théorème 1.6 cité dans la page 30. Rappelons-le:

Théorème: Soit $n \geq 3$ un entier et soit $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_t = K_n$ une t -factorisation de K_n , alors:

$$t \leq \sum_{i=1}^t d(G_i) \leq n + t - 1.$$

Chapitre 3

Opérations sur les posets et le nombre domatique

Dans ce présent chapitre, nous nous intéressons au nombre domatique du graphe représentatif des intervalles d'un poset. Nous rappelons d'abord la définition de quelques opérations qui peuvent être définis sur deux ou plusieurs posets et nous établissons quelques résultats sur le nombre domatique de $G(P)$ où P est obtenu à partir de deux autres posets par le biais de ces opérations.

3.1 Définitions

Plusieurs opérations peuvent être définis sur deux ou plusieurs posets et diverses propriétés sont établis, voir par exemple [7, 5, 65, 15, 14, 30], cependant, nous ne mentionnons ici que quelques unes:

3.1.1. Somme directe

La somme directe ou union disjointe de deux posets P et Q est le poset $P + Q$ sur l'union $P \cup Q$ tel que: $x \leq y$ dans $P+Q$ si $x, y \in P$ et $x \leq_P y$ ou $x, y \in Q$ et $x \leq_Q y$. La somme directe de P avec lui-même n fois est notée par nP .

Exemple

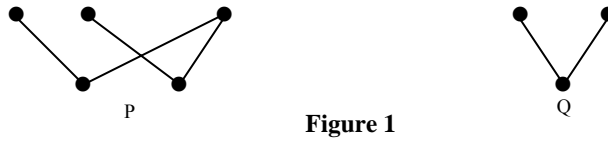


Figure 1

La figure 2 représente le diagramme de Hasse de $P + Q$.

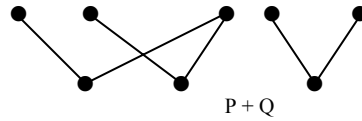


Figure 2

3.1.2. Somme linéaire

La somme linéaire de deux posets P et Q est le poset $P \oplus Q$ sur l'union $P \cup Q$ tel que $x \leq y$ dans $P \oplus Q$ si $x, y \in Q$ et $x \leq_Q y$ ou $x \in P$ et $y \in Q$ ou $x, y \in P$ et $x \leq_P y$.

Notons qu'une chaîne à n sommets est isomorphe à $1 \oplus \dots \oplus 1$, n fois. Le diagramme de Hasse de $P \oplus Q$, se fait en traçant celui P , puis au dessus de lui, celui de Q et on relie tout sommet maximal de P à tout sommet minimal de Q .

Exemple

En considérant les posets de la figure 1, nous obtenons le poset suivant:

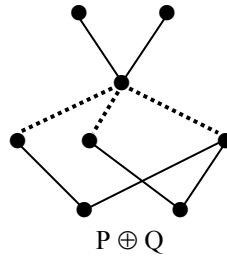


Figure 3

3.1.2.1 Poset série –parallèle

Ce sont ceux construits à partir des singletons, en utilisant seulement la somme directe (+) et la somme linéaire (\oplus), ce qui revient à dire que P peut être décomposé en singletons en utilisant que ces deux opérations. Ils sont caractérisés par le fait de ne pas contenir de sous-poset isomorphe à N où N est le sous-ensemble à quatre éléments $\{x, y, z, t\}$ tel que les seules relations de comparabilités sont $x < y > z < t$.

Le poset de la figure 4 est un poset série-parallèle, il peut être écrit comme suit :

$$(1+1) \oplus (((1 \oplus 1) + (1 \oplus 1)) \oplus (1+1)) + (1 \oplus 1 \oplus 1).$$

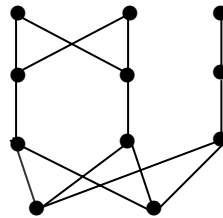


Figure 4

3.1.2.2 Remarque

Si P est connexe, alors chaque élément maximal est au dessus de chaque élément minimal car s'il existe un plus court "zig-zag" joignant un élément maximal x à un élément minimal y : $x = p_0 > p_1 < p_2 > \dots > p_k = y$, ceci contredit le fait que P ne contient pas de sous-poset isomorphe à \mathbb{N} et par conséquent $x > y$.

3.1.3 Produit direct

Le produit direct (ou cartésien) de deux posets P et Q est le poset $P \times Q$ sur l'ensemble $\{(x, y) : x \in P \text{ et } y \in Q\}$ tel que: $(x, y) \leq (x', y')$ dans $P \times Q$ si $x \leq_P x'$ et $y \leq_Q y'$. Le produit direct de P avec lui-même n fois est noté par P^n .

Le diagramme de Hasse de $P \times Q$ se fait en traçant des copies de P autant qu'il y'a de sommets dans Q et deux sommets dans deux copies différentes sont liés dans $P \times Q$, si les sommets correspondants dans Q sont liés.

Exemple

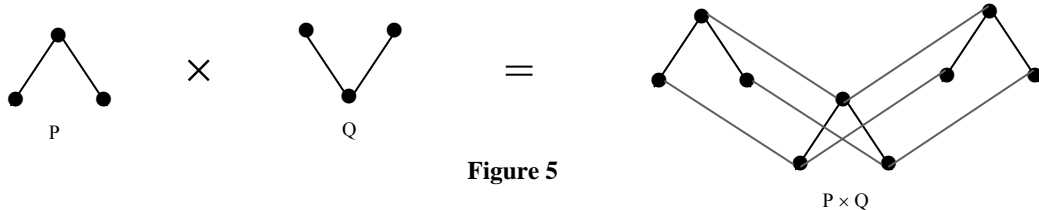


Figure 5

3.1.3.1 Cas particulier: Produit de chaînes

Soit r un entier, considérons les r chaînes $C_{n_i} = (0 < 1 < \dots < n_i), i \in \{0, \dots, r\}$. Le produit de ces chaînes $C_{n_1} \times C_{n_2} \times \dots \times C_{n_r}$ est un poset à $\prod_{i=1}^r (n_i + 1)$ sommets de la forme: (a_1, \dots, a_r) où $0 \leq a_i \leq n_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Le sommet (b_1, \dots, b_r) couvre le sommet (a_1, \dots, a_r) si et seulement si il existe un unique indice j tel que $b_j - a_j = 1$ et $\forall i \neq j, a_i = b_i$.

3.1.3.2 Remarque

L'isomorphisme entre $S(k_1, \dots, k_n)$ et $\prod_{i=1}^n C_{k_i}$, lui confère le nom de produit de chaînes

(voir Figure 6)

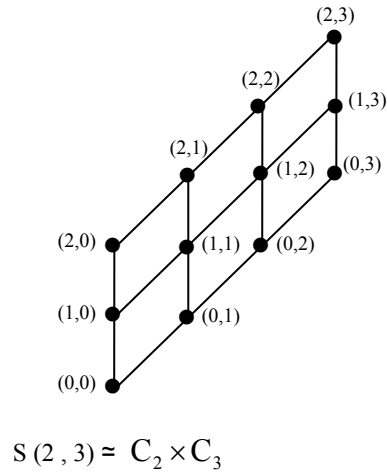


Figure 6

3.2 Le nombre domatique de $G(P * Q)$

Plusieurs posets s'obtiennent à partir des opérations mentionnées ci-dessus tel que le treillis booléen qui est isomorphe au produit direct de n chaînes de longueur une, les posets série-parallèles, le treillis des faces du n -cube C_n qui est isomorphe au produit de n sous posets [29], le treillis de Shuffles $W_{m,n}$ [38].

D'où l'intérêt d'étudier certaines propriétés sur ces opérations.

Proposition 1 Soient P et Q deux posets. Nous avons $d(G(P + Q)) = \min \{d(G(P)), d(G(Q))\}$

Preuve

Soit D un sous ensemble de sommets du graphe $G(P + Q)$.

Montrons d'abord que l'ensemble D est un ensemble dominant de $G(P + Q)$ si et seulement si D s'écrit sous la forme $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 (resp. D_2) est un ensemble dominant de $G(P)$ (resp. $G(Q)$).

Il est clair que si D_1 est un ensemble dominant de $G(P)$ et D_2 ensemble dominant de $G(Q)$ alors $D_1 \cup D_2$ est un ensemble dominant de $G(P + Q)$

Réciproquement, soit D un ensemble dominant de $G(P + Q)$. Comme $P \cap Q = \emptyset$ alors

D domine $G(P)$ et $G(Q)$ donc D s'écrit $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 (resp. D_2) est un ensemble dominant de $G(P)$ (resp. $G(Q)$).

Par suite $d(G(P+Q)) \leq \min \{d(G(P)), d(G(Q))\}$. (1)

Inversement:

Soient $D_1, D_2, \dots, D_{d(G(P))}$ (resp. $D'_1, D'_2, \dots, D'_{d(G(Q))}$) une partition domotique de $G(P)$ (resp. $G(Q)$) où nous supposons sans perte de généralité que $d(G(P)) \leq d(G(Q))$, alors

$(\bigcup_{i>d(G(P))} D'_i \cup D_1 \cup D'_1) \cup \{D_i \cup D'_i, i = 2, \dots, d(G(P))\}$ constitue une partition domotique de $G(P+Q)$.

D'où: $d(G(P+Q)) \geq \min \{d(G(P)), d(G(Q))\}$ (2)

De (1) et (2), nous obtenons, $d(G(P + Q)) = \min \{d(G(P)), d(G(Q))\}$ ■

Proposition 2 Soient P et Q deux posets. Nous avons $d(G(P \oplus Q)) \geq d(G(P)) + d(G(Q))$.

Preuve

Il suffit de montrer que chaque ensemble dominant de $G(P)$ (resp. de $G(Q)$) est un ensemble dominant de $G(P \oplus Q)$.

1. Soit D un ensemble dominant de $G(P)$ et $y \in V(G(Q))$.

Si y est un sommet minimal du poset Q alors par l'opération \oplus , y couvre tous les sommets maximal de P et par conséquent, dans $G(P \oplus Q)$ tout sommet minimal de Q est adjacent à tous les sommets de P .

Si y n'est pas un sommet minimal du poset Q , alors il existe une chaîne dans le diagramme de Hasse de Q reliant y à un sommet minimal qui lui-même est relié par une chaîne à tous les sommets de P dans le diagramme de Hasse de $P \oplus Q$ c'est-à-dire que dans $G(P \oplus Q)$, y est adjacent à tous les sommets de P , et particulièrement à ceux de D .

D'où D est un ensemble dominant de $G(P \oplus Q)$.

2. Si D un ensemble dominant de $G(Q)$ et x un sommet de P alors:

Si x est un sommet maximal du poset P , donc il est couvert par tous les sommets minimaux de Q dans $P \oplus Q$ et par conséquent dans $G(P \oplus Q)$, il est adjacent à tous les sommets de Q (en particulier à ceux de D). Sinon x sera lié par une chaîne dans le diagramme de Hasse de P à un sommet maximal de P qui lui-même est relié par une chaîne à tous les sommets de Q . Ainsi dans $G(P \oplus Q)$, x est adjacent à tout sommet de Q et en particulier à ceux de D c'est-à-dire D est un ensemble dominant de $G(P \oplus Q)$.

De 1 et 2, on conclut que si \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}') est une partition domotique de $G(P)$ (resp. $G(Q)$) alors $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ est une partition domotique de $G(P \oplus Q)$ ■

Exemple

Nous pouvons vérifier aisément dans l'exemple de la figure 7 que $d(G(P)) = |\{5,7\}, \{9,1\}, \{6,8\}, \{2,3,4\}| = 4$ et $d(G(Q)) = |\{a\}, \{b,c\}| = 2$ et $d(G(P \oplus Q)) = |\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{5,3\}, \{4,2\}, \{6,1\}| = 9$

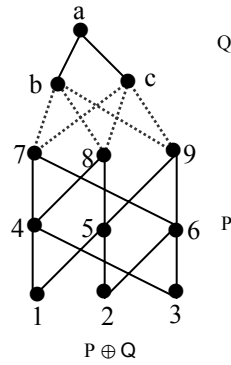


Figure 7

Conséquences

Conséquence 1 Si P et Q sont deux posets rangés alors nous avons: $\forall l, u$ tel que $0 \leq l \leq u \leq r(P) + r(Q) + 1$,

$$d(G(P \oplus Q)_{l,u}) \geq d(G(P_{l,r(P)})) + d(G(Q_{0,u-r(P)-1})).$$

Preuve Découle immédiatement de la proposition 2. ■

Conséquence 2

1. Si Q est un ordre série- parallèle connexe alors :

$d(G(P \oplus Q)) \geq d(G(P)) + |\text{Min}(Q)| + d(G(Q_0))$ où Q_0 est un sous poset induit par $Q - \text{Min}(Q)$ et $\text{Min}(Q)$ est l'ensemble des éléments minimaux de Q .

2. Si P est un ordre série- parallèle connexe alors :

$d(G(P \oplus Q)) \geq d(G(Q)) + |\text{Max}(P)| + d(G(P_r))$ où P_r est un sous poset induit par $P - \text{Max}(P)$ et $\text{Max}(P)$ est l'ensemble des éléments maximaux de P .

Preuve

1. Si Q est un ordre série-parallèle connexe alors, chaque sommet de $\text{Min}(Q)$ est un sommet dominant dans $G(P \oplus Q)$. En effet, si $x \in \text{Min}(Q)$, alors par l'opération \oplus , x couvre dans le diagramme de Hasse de P tous les éléments maximaux de P et par suite dans $G(P \oplus Q)$, x est adjacent à tous les éléments minimaux de P . D'autre part, comme Q est un ordre série parallèle et de plus connexe, alors tout élément minimal de Q est au dessous de tout élément maximal de Q c'est-à-dire il existe toujours une chaîne dans le diagramme de Hasse de Q qui lie x à un élément maximal de Q . Par suite, x appartient à tous les intervalles maximaux de $P \oplus Q$. Dans le graphe $G(P \oplus Q)$, ça signifie que x est adjacent à tous les autres sommets de Q et donc il est dominant. Ainsi en gardant, la partition domotique de P , à laquelle on rajoute $|\text{Min}(Q)|$, il va y rester Q_0 , dont le nombre domotique est donné par $d(G(Q_0))$. D'ou le résultat.
2. Le raisonnement est similaire à 1. ■

3.3 Le nombre domotique de $G(C_n \times P)$

Proposition 3 Soient P un poset et C_n une chaîne de longueur n . Nous avons:

$$d(G(C_n \times P)) \geq (n+1) d(G(P)).$$

Preuve

Soit $C_n = (a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_n)$ une chaîne de longueur n et $P_i = a_i P = \{(a_i, x), x \in P\}$ une copie de P .

Montrons que si D est un ensemble dominant de $G(P)$, alors $a_i D = \{(a_i, x), x \in D\}$ est un ensemble dominant de $G(C_n \times P)$, $\forall i = 0, \dots, n$.

Soit $(a_j, x) \in (C_n \times P) - a_i D$. Nous distinguons trois cas:

1^{er} cas: $j = i$

$(a_j, x) \notin a_i D$ signifie que $x \notin D$. comme D est un ensemble dominant de $G(P)$, nous déduisons l'existence d'un élément $y \in D$ tel que x est adjacent à y dans $G(P)$. Par suite x et y sont dans le même intervalle de P et ainsi (a_i, x) et (a_i, y) sont dans le même intervalle de P_i , d'où l'adjacence de ces deux couples dans $G(C_n \times P)$.

2^{ème} cas: $j \neq i$ et $x \notin D$.

$x \notin D$ implique qu'il existe $y \in D$ tel que x et y sont dans un même intervalle maximal $[p, q]$ de P .

Si $i < j$ nous avons $(a_i, p) < (a_j, p) < (a_j, x)$, $(a_j, y) < (a_j, q)$, c'est-à-dire (a_j, x) et (a_j, y) sont dans l'intervalle $[(a_i, p), (a_j, q)]$ de $C_n \times P$.

Si $j \leq i$: le raisonnement est similaire à $i < j$.

3^{ème} cas: $j \neq i$ et $x \in D$.

Si $i < j$ alors $(a_i, x) < (a_j, x)$ et si $j < i$ alors $(a_j, x) < (a_i, x)$.

Ainsi (a_i, x) et (a_j, x) sont dans un même intervalle de $C_n \times P$. ■

Exemple Considérons le poset P et la chaîne C_n de la figure 8.



Figure 8

Nous obtenons le poset de la figure 9 où nous notons brièvement le couple (a_j, x_i) par a_jx_i .

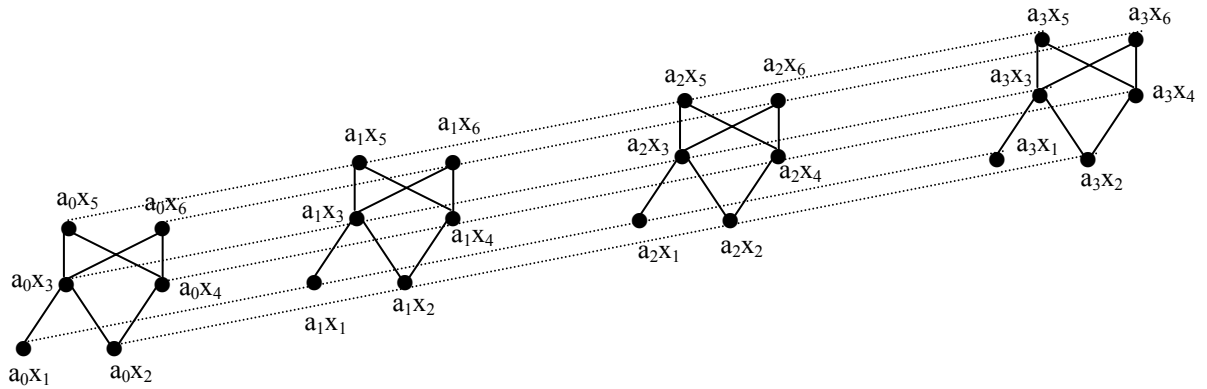


Figure 9

Nous avons $d(G(P)) = |\{x_1, x_4\}, \{x_5, x_2\}, \{x_3, x_6\}| = 3$ et $d(G(C_3)) = 4$ et les ensembles dominants du poset $G(C_3 \times P)$ de la figure 9 sont donnés par:

- $\{(a_0, x_4), (a_0, x_1)\}, \{(a_1, x_1), (a_2, x_5)\}, \{(a_0, x_2), (a_0, x_6)\},$
- $\{(a_1, x_4), (a_0, x_5)\}, \{(a_2, x_1), (a_3, x_6)\}, \{(a_1, x_2), (a_3, x_1)\},$
- $\{(a_2, x_4), (a_2, x_6)\}, \{(a_3, x_2), (a_1, x_6)\}, \{(a_2, x_2), (a_3, x_5)\},$
- $\{(a_3, x_4), (a_1, x_5)\}, \{(a_0, x_3)\}, \{(a_1, x_3)\}, \{(a_2, x_3)\}, \{(a_3, x_3)\}.$

Donc $d(G(C_3 \times P)) = 14 > d(G(P)) \times d(G(C_3)) = 12$.

Théorème 1 Soient P un poset et C_n une chaîne. Si $G(P)$ est domatiquement plein alors:

$$d(G(C_n \times P)) = (n + 1)d(G(P))$$

Preuve

De la proposition 3 nous avons $d(G(C_n \times P)) \geq (n + 1) d(G(P))$

Montrons l'autre inégalité.

Tout graphe G vérifie la relation $d(G) \leq \delta(G) + 1$ et en particulier pour $G(C_n \times P)$.

Montrons d'abord que $\delta(G(C_n \times P)) = (\delta(G(P)) + 1)(\delta(G(C_n)) + 1) - 1$.

Notons que $G(C_n) \simeq K_{n+1}$ et que $d(G(C_n)) = n+1$.

Nous avons $\forall x \in V(G(P)), \forall i = 0, \dots, n, \deg_{G(C_n \times P)}(a_i x) = (n+1)\deg_{G(P)}(x) + n$, ce qui implique que $\delta(G(C_n \times P)) = (n+1)\delta(G(P)) + n = (\delta(G(P))+1)(n+1) - 1 = (\delta(G(P))+1)(\delta(G(C_n))+1) - 1$. Donc $d(G(P \times C_n)) \leq (\delta(G(P)) + 1)(n+1)$

Comme $G(P)$ domatiquement plein alors $d(G(P)) = \delta(G(P)) + 1$

D'où $d(G(C_n \times P)) \leq (n+1)d(G(P))$.

Nous déduisons alors que $d(G(C_n \times P)) = (n+1)d(G(P))$. ■

3.4 Le nombre domatique du graphe représentatif de $(C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u}$

Soit $P = C_{n_1} \times C_{n_2}$ le produit direct de deux chaînes de longueur respectivement n_1 et n_2 .

Nous allons nous intéresser au sous poset induit par l'union des niveaux consécutifs $P_{l,u} = N_l \cup \dots \cup N_u$ de P , $0 \leq l \leq u \leq n_1 + n_2$ et nous déterminerons alors le nombre domatique du graphe représentatif de ses intervalles maximaux $G_{l,u} = G(P_{l,u})$.

Par l'isomorphisme existant entre $C_{n_1} \times C_{n_2}$ et $C_{n_2} \times C_{n_1}$, nous pouvons supposer sans perte de généralité dans tout ce qui suit que $n_1 \leq n_2$.

Proposition 4 *Si $l \leq u - n_2$ alors l'intervalle $D = [l, l), (u - n_2, u - n_1]$ représente l'ensemble des sommets dominants de $G_{l,u}$.*

Preuve

Soit A (resp. B) l'ensemble des éléments minimaux (resp. maximaux) de $(C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u}$.

A et B sont de la forme :

$$A = \{(i, l - i), 0 \leq i \leq l\},$$

$$B = \{(n_1-k, u-n_1+k), 0 \leq k \leq n_1+n_2-u\}.$$

Considérons \mathfrak{I} l'ensemble des intervalles maximaux de $(C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u}$.

Notons que $\bigcap_{I \in \mathfrak{I}} I \neq \emptyset$. En effet,

$(i, l-i) < (l, l)$, pour tout i , $0 \leq i \leq l$ et ceci veut dire que (l, l) est lié par une chaîne à tout élément minimal de $(C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u}$.

De même que $(l, l) < (n_1-k, u-n_1+k)$ pour tout k , $0 \leq k \leq n_1+n_2-u$ car $l \leq u-n_2 \leq n_1-k$ et $l \leq u-n_2 \leq u-n_1 \leq u-n_1+k$ c'est à dire que (l, l) est lié par une chaîne à tout élément maximal de $(C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u}$.

Ainsi le couple (l, l) appartient à tous les intervalles maximaux de $P_{l,u}$ c'est-à-dire que

$$(l, l) \in \bigcap_{I \in \mathfrak{I}} I.$$

Montrons que $\bigcap_{I \in \mathfrak{I}} I$ représente l'ensemble des sommets dominants de $G_{l,u}$ et il vaut exactement D.

Soit $x \in \bigcap_{I \in \mathfrak{I}} I$. Chaque sommet de $G_{l,u}$ appartient à un intervalle maximal de $P_{l,u}$, donc dans

$G_{l,u}$, x est adjacent à tous les autres sommets, ce qui veut dire que x est un sommet dominant. Inversement, si x est un sommet dominant de $G_{l,u}$, alors il est adjacent à tous sommets de $G_{l,u}$ et comme chaque sommet est dans un intervalle maximal de P , alors x appartient à tout intervalle maximal et ainsi $x \in \bigcap_{I \in \mathfrak{I}} I$.

Reste à prouver que $\bigcap_{I \in \mathfrak{I}} I = D$

" \subset ": Si $(x, y) \in \bigcap_{I \in \mathfrak{I}} I$, alors (x, y) est lié par une chaîne dans $P_{l,u}$ à tous les éléments maximaux, ainsi qu'à tous les éléments minimaux.

Par suite, $(x,y) \geq (i, l - i)$, pour tout i , $0 \leq i \leq l$ et donc, $(x,y) \geq (\max_{i=0\dots l} i, \max_{i=0\dots l} (l-i))$, ce qui conduit à $(x,y) \geq (l,l)$.

D'autre part, $(x,y) \leq (n_1 - k, u-n_1+k)$, pour tout k , $0 \leq k \leq n_1+n_2-u$ et donc $(x,y) \leq (\min_k(n_1 - k), \min_k(u - n_1 + k))$ qui produit $(x,y) \leq (u - n_2, u - n_1)$.

Nous obtenons donc $(x, y) \in D$.

" \supset " Montrons que: $D \subseteq (\bigcap_i I_i)_{l,u}$.

Si $(x, y) \in D$ alors $(l, l) \leq (x, y) \leq (u-n_2, u-n_1)$.

Comme $(l, l) \geq (i, l-i)$, pour tout i , $0 \leq i \leq l$ et $(u-n_2, u-n_1) \leq (n_1-k, u-n_1+k)$, pour tout k , $0 \leq k \leq n_1+n_2-u$, nous pouvons dire que (x, y) est lié par une chaîne à tout élément de A et par une autre chaîne à tout élément de B.

D'où $(x, y) \in \bigcap_{I \in \mathfrak{S}} I$. Ce qui achève la démonstration. ■

Exemple

Dans les exemples qui suivent nous noterons brièvement le couple (i, j) par ij .

Soit $P = C_3 \times C_5$

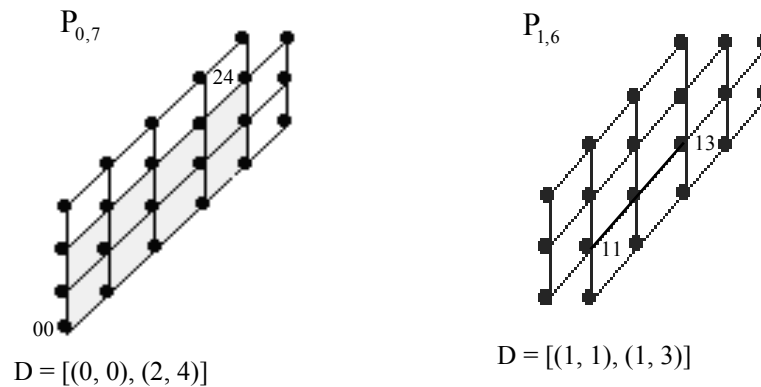


Figure 10

Lemme 1

L'intervalle $[(i, j), (i', j')]$ est isomorphe au produit $C_{i'-i} \times C_{j'-j}$, $\forall i, i', j, j' \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq i'$ et $j \leq j'$.

Preuve

Soient $(i, j), (i', j') \in \mathbb{N}^2$ tels que $i \leq i'$ et $j \leq j'$ et soit l'application

$$\begin{aligned} \psi : [(i, j), (i', j')] &\rightarrow C_{i'-i} \times C_{j'-j} \\ (m, n) &\mapsto (m - i, n - j) \end{aligned}$$

Nous avons $(m, n) \leq (m', n') \Leftrightarrow m \leq m'$ et $n \leq n'$

$$\Leftrightarrow m - i \leq m' - i \text{ et } n - j \leq n' - j$$

$$\Leftrightarrow (m - i, n - j) \leq (m' - i, n' - j)$$

$$\Leftrightarrow \psi(m, n) \leq \psi(m', n').$$

1. ψ injective car $\psi(m, n) = \psi(m', n') \Leftrightarrow (m - i, n - j) = (m' - i, n' - j)$

$$\Leftrightarrow (m, n) = (m', n').$$

2. Soit $(x, y) \in C_{i'-i} \times C_{j'-j}$. Posons $(m, n) = (x + i, y + j)$.

Nous avons :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq i' - i \\ 0 \leq y \leq j' - j \end{cases} \Rightarrow (x + i, y + j) = (m, n) \in [(i, j), (i', j')].$$

Et $\psi(m, n) = \psi(x + i, y + j) = (x, y)$ d'où la surjectivité de ψ .

De 1), 2), 3), on conclut que ψ est un isomorphisme. ■

Exemple

Soit $P = C_3 \times C_5$ et $I = [(0, 1), (3, 4)]$.

Dans $P_{1,7}$, I est bien isomorphe à $C_3 \times C_3$.

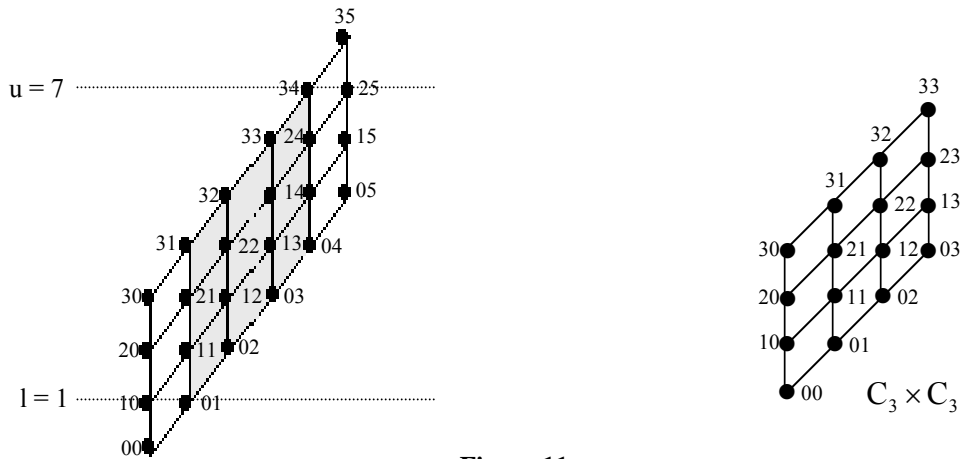


Figure 11

Théorème 2

Si ($u > n_2$ et $l \geq n_1$) ou $u \leq n_2$, nous avons $d(G_{l,u}) = u - l + 1$.

Preuve

Condition nécessaire « \leq » :

$$\text{On a } d(G_{l,u}) \leq \delta(G_{l,u}) + 1 = \begin{cases} \deg_{G_{l,u}}(n_1, l - n_1) + 1 & \text{si } u > n_2 \text{ et } l \geq n_1. \\ \deg_{G_{l,u}}(0, u) + 1 & \text{si } u \leq n_2. \end{cases}$$

$$\text{Si } u > n_2 \text{ et } l \geq n_1, \deg_{G_{l,u}}(n_1, l - n_1) = |\{(m, n) \in P_{l,u} : m = n_1 \text{ et } n > l - n_1\}|$$

$$= |\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : l \leq m+n \leq u, m = n_1, n > l - n_1\}|$$

$$= | \{n \in \mathbb{N} : l - n_1 < n \leq u - n_1\} |$$

$$= u - l.$$

Et si $u \leq n_2$, $\deg_{G_{l,u}}(0, u) = | \{(m, n) \in P_{l,u} : m = 0 \text{ et } n < u\} |$

$$= | \{(m, n) \in \mathbb{N}^2, l \leq m+n \leq u, m = 0, n < u\} |$$

$$= | \{n \in \mathbb{N} : l \leq n < u\} |$$

$$= u - l.$$

Exemple

On reprend le poset $P = C_3 \times C_5$ de l'exemple précédent et on considère le sous poset $P_{4,7}$.

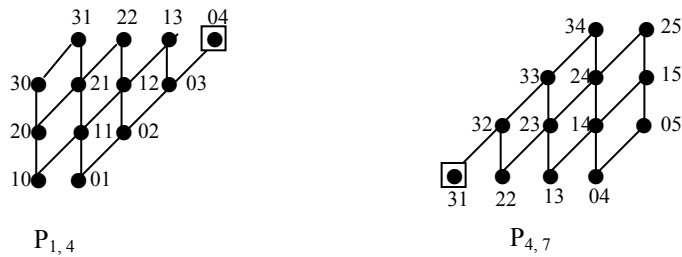


Figure 11

Condition suffisante « \geq » :

L'autre inégalité provient du fait que chaque niveau N_i , $l \leq i \leq u$ représente un ensemble dominant de $G_{l,u}$, donc la famille $\{N_i, l \leq i \leq u\}$ est une partition domotique de $G_{l,u}$ de cardinalité $u - l + 1$. D'où l'égalité. ■

Théorème 3

Pour tout l, u tel que $l < n_1$ et $u > n_2$, nous avons :

$$d(G_{l,u}) = \begin{cases} (u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1) & \text{si } l + u \leq n_1 + n_2 \\ (u - n_1 + 1)(n_1 - l + 1) & \text{si } l + u > n_1 + n_2. \end{cases}$$

Preuve

Condition nécessaire « \leq » :

Examinons d'abord le cas où $l + u \leq n_1 + n_2$.

Nous avons $d(G_{l,u}) \leq \delta(G_{l,u}) + 1 = \deg_{G_{l,u}}(0, n_2) + 1$

Comme $\deg_{G_{l,u}}(0, n_2) = |\{(m, n) \in P_{l,u} : 0 \leq m \leq u - n_2, l \leq n \leq n_2\}| - 1$ et d'après le lemme 1, $\{(m, n) \in P_{l,u} : 0 \leq m \leq u - n_2, l \leq n \leq n_2\} = [(0, l), (u - n_2, n_2)]$ qui est isomorphe à $C_{u-n_2} \times C_{n_2-l}$, nous obtenons $\deg_{G_{l,u}}(0, n_2) = |C_{u-n_2} \times C_{n_2-l}| - 1 = (u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1) - 1$.

Par suite $d(G_{l,u}) \leq (u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1)$.

Pour le cas où $l + u \geq n_1 + n_2$, nous avons par un raisonnement similaire, $d(G_{l,u}) \leq \delta(G_{l,u}) + 1 = \deg_{G_{l,u}}(n_1, 0) + 1$ et

$$\begin{aligned} \deg_{G_{l,u}}(n_1, 0) &= |\{(m, n) \in P_{l,u} : l \leq m \leq n_1 \text{ et } 0 \leq n \leq u - n_1\}| - 1 \\ &= |[(l, 0), (n_1, u - n_1)]| - 1 = |C_{n_1-l} \times C_{u-n_1}| - 1 = (n_1 - l + 1)(u - n_1 + 1) - 1. \end{aligned}$$

D'où $d(G_{l,u}) \leq (n_1 - l + 1)(u - n_1 + 1)$.

Exemple

Soit $P = C_3 \times C_5$.

Dans ces exemples, $\deg(0, 5) = \delta(G_{2,6}) = 7$ et $\deg(3, 0) = \delta(G_{2,7}) = 9$.

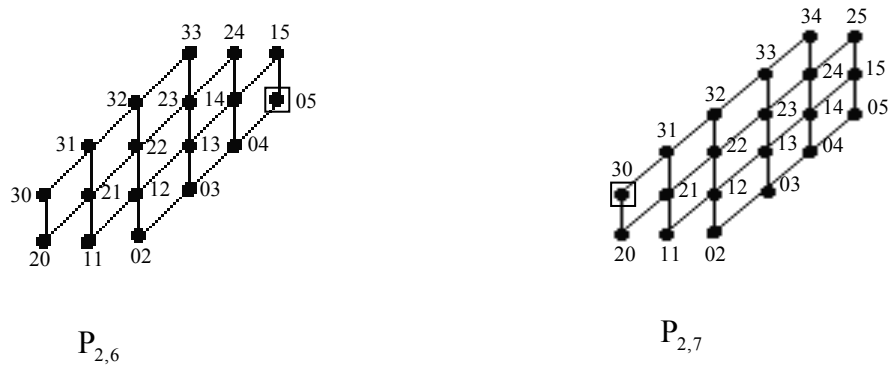


Figure 12

Condition suffisante « \geq » :

Supposons d'abord que: $l+u \leq n_1+n_2$.

D'après le lemme 3, on a: $d(G_{l,u}) \leq (u - n_2+1)(n_2 - l+1)$.

Pour l'autre inégalité, il suffit de prouver que les $(u - n_2+1)(n_2 - l+1)$ ensembles D_j^i définis ci-dessous, forment une partition domatique.

$$\text{Pour } i \in \{0, \dots, u-l\}, \text{ posons } J_i = \begin{cases} \{0, \dots, i\} & \text{si } i \leq u - n_2 - 1, \\ \{0, \dots, u - n_2\} & \text{si } u - n_2 \leq i \leq n_2 - l, \\ \{0, \dots, u - l - i\} & \text{si } n_2 - l + 1 \leq i \leq u - l, \end{cases}$$

et considérons les sous ensembles D_j^i suivants:

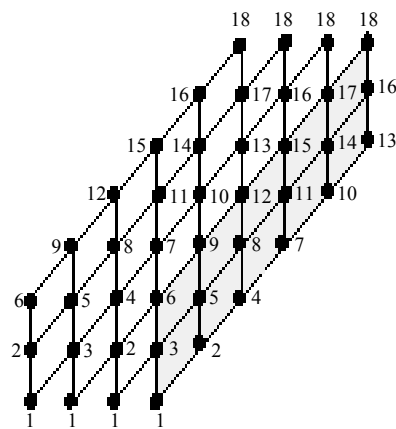
- pour $i = 0, \dots, u - n_2 - 1$ et $j \in J_i$ posons: $D_j^i = \{(k, l + i - k), k \equiv j[i + 1]\}$
- pour $i = u - n_2, \dots, n_2 - l$ et $j \in J_i$ posons: $D_j^i = \{(k, l + i - k), k \equiv j[u - n_2 + 1]\}$
- pour $i = n_2 - l + 1, \dots, u - l$ et $j \in J_i$, posons:

$$D_j^i = \{(i - n_2 + l + k, n_2 - k), k \equiv j[u - (i + l - 1)]\}$$

Pour $i = 0, \dots, u - l$, $D_j^i \subset N_{i+1}$ et $\{D_j^i, j \in J_i\}$ forme une partition de N_{i+1} .

Afin d'illustrer ces ensembles D_j^i sur un diagramme de Hasse, nous attribuons à chaque élément de l'intervalle $[(0, l), (u - n_2, n_2)]$ une couleur de telle sorte que deux sommets différents auront deux couleurs différentes. Nous obtenons alors exactement $(u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1)$ couleurs différentes. Plus précisément, si $i \in \{0, \dots, u - n_2 - 1\}$, nous aurons $(u - n_2)(u - n_2 + 1)/2$ couleurs, si $i \in \{u - n_2, \dots, n_2 - l\}$, nous aurons $(2n_2 - l - u + 1)(u - n_2 + 1)$ couleurs et si $i \in \{n_2 - l + 1, \dots, u - l\}$, nous aurons $(u - n_2)(u - n_2 + 1)/2$ couleurs. Pour compléter la coloration de $P_{l,u}$, nous procédons comme suit:

En allant de droite à gauche (sur le niveau N_{l+i}), nous attribuons successivement au premier sommet non coloré, la couleur du premier sommet de droite (du même niveau) coloré, puis au deuxième sommet non coloré, la couleur du deuxième sommet de droite coloré et ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les sommets de ce niveau. Enfin les sommets de même couleur représentent les ensembles D_j^i (voir Figure 14).



$$(C_5 \times C_8)_{3,10}$$

Figure 14

Montrons que les ensembles D_j^i forment une partition domatique.

Si $(m, n) \in \mathfrak{R} = \left(\bigcup_{s=1}^{u-1-i} \mathfrak{R}_s^+(D_j^i) \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^i \mathfrak{R}_s^-(D_j^i) \right)$, alors il existe une chaîne reliant (m, n) à un élément de D_j^i et par suite ces deux sommets sont adjacents dans $G_{l,u}$. Sinon $(m, n) \notin \mathfrak{R}$ et alors nous distinguons trois cas:

1^{er} cas: $i \in \{0, \dots, u - n_2 - 1\}$ et $j \in J_i$

Soit (m, n) un élément de $(C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u}$ et $(m, n) \notin D_j^i$

Si $(m, n) \notin \mathfrak{R}$ alors il existe un entier k tel que:

$(m, n) \in [(k+1, l-k), (k+i, l+i-k-1)]$ (voir Figure 15).

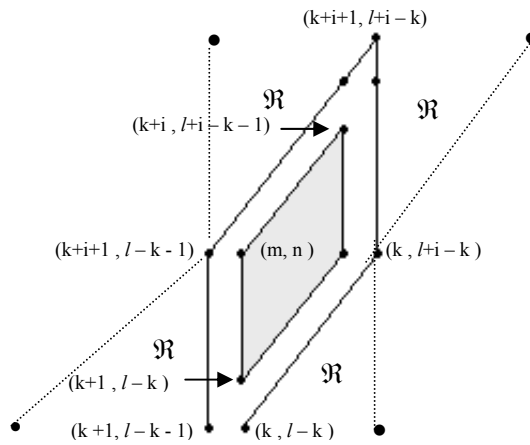


Figure 15

Par suite, $k+1 \leq m \leq k+i < k+i+1$ et $l-k \leq n \leq l+i-k-1$ c'est-à-dire (m, n) et $(k, l+i-k) \in [(k, l-k), (k+i+1, l+i-k)]$

(Nous avons aussi (m, n) et $(k+i+1, l-k-1) \in [(k+1, l-k-1), (k+i+1, l+i-k)]$.)

Comme $r((k+i+1, l+i-k)) = k+i+1+l+i-k = l+2i+1$

$$\leq l+2(u-n_2-1)+1 = l+2u-2n_2-1$$

$$\leq n_1 + n_2 + u - 2n_2 - 1 = n_1 - n_2 + u - 1 \leq u - 1 < u,$$

et $r(k, l - k) = l$, nous concluons que l'intervalle contenant (m, n) et $(k, l + i - k)$ est bien dans $P_{l,u}$.

2^{ème} cas: $i = u - n_2, \dots, n_2 - l$ et $j \in J_1$.

Nous supposons ici trois sous cas:

1^{er} sous cas: $u - n_2 + 1 < i \leq n_2 - l - 1$.

Soit $(m, n) \in (C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u}$ et $(m, n) \notin D_j^i$

Si $(m, n) \notin \mathfrak{R}$ alors il existe un entier k tel que:

$(m, n) \in [(k + 1, l + i - k - u + n_2), (k + u - n_2, l + i - k - 1)]$ (voir Figure 16).

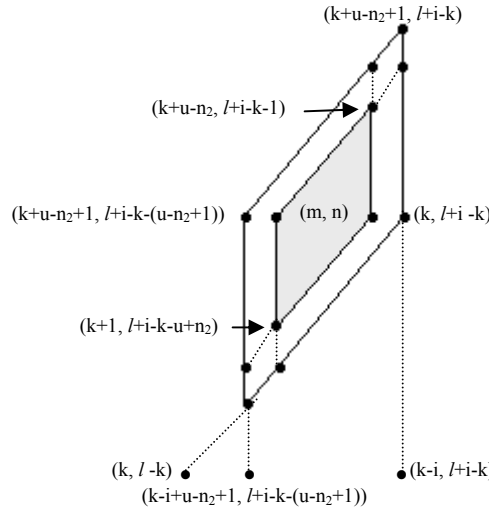


Figure 16

Par suite $k < k+1 \leq m \leq k+u-n_2$ et $l+i-k-u+n_2 \leq n \leq l+i-k-1 < l+i-k$.

Donc (m, n) et $(k, l + i - k) \in [(k, l + i - k - (u - n_2 + 1)), (k + u - n_2, l + i - k)]$.

(De même que (m, n) et $(k + u - n_2 + 1, l + i - k - (u - n_2 + 1)) \in [(k + 1, l + i - k - (u - n_2 + 1)), (k + u - n_2 + 1, l + i - k - 1)]$)

Nous avons: $r(k+u-n_2, l+i-k) = u-n_2+l+i$ or,

$$\begin{aligned} i \leq n_2 - l - 1 &\Rightarrow i - n_2 + l + 1 \leq 0 \\ &\Rightarrow i - n_2 + l + 1 + u - 2 \leq u - 2 < u \\ &\Leftrightarrow u - n_2 + l + i - 1 < u \end{aligned}$$

et $r(k, l+i-k-(u-n_2+1)) = l+i-u+n_2-1 > l$ puisque $i > u-n_2+1$. Nous concluons que l'intervalle contenant (m, n) et $(k, l+i-k)$ est bien dans $P_{l,u}$.

2^{ème} sous cas: $i = u - n_2$

Supposons $(m, n) \notin \mathfrak{R}$ c'est-à-dire $(m, n) \in [(k+1, l-k), (k+u-n_2, l+u-n_2-k-1)]$ (voir Figure 17).

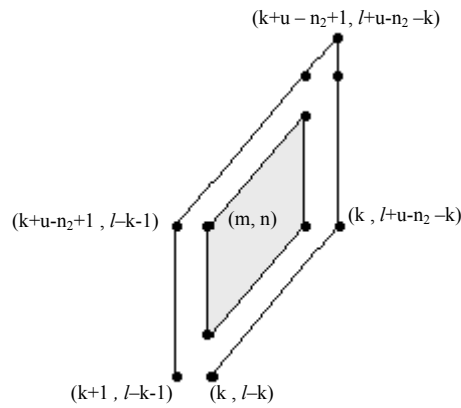


Figure 17

Dans ce cas (m, n) et $(k, l+u-n_2-k) \in [(k, l-k), (k+u-n_2+1, l+u-n_2-k)]$.

En effet $k < k+1 \leq m \leq k+u-n_2 < k+u-n_2+1$,

$$\text{et } l-k \leq n \leq l+u-n_2-k-1 < l+u-n_2-k.$$

Nous avons $r(k, l-k) = l$, $r(k+u-n_2+1, l+u-n_2-k) = l+2(u-n_2)+1 \leq u$ si et seulement si $l+u \leq 2n_2-1$.

Si $l+u \leq n_1+n_2-1$ alors $l+u \leq 2n_2-1$.

Si $l+u = n_1+n_2$, alors $l+i = n_1$ et pour tout k , $r(k+u-n_2+1, l+u-n_2-k) = n_1-n_2+u+1$ et alors (m, n) et $(k+u-n_2+1, l-k-1) \in [(k+1, l-k-1), (k+u-n_2+1, l+i-k-1)]$ si $n_1 = n_2$ et $r(k+u-n_2+1, l+u-n_2-k) \leq u$, si $n_1 \neq n_2$. Nous concluons que l'intervalle contenant

(m, n) et $(k, l+u-n_2-k)$ est bien dans $P_{l,u}$.

3^{ème} sous cas: $i = u - n_2 + 1$.

Si $(m, n) \notin \mathcal{R}$, alors (m, n) et $(k, l+i-k) \in [(k, l-k+1), (k+u-n_2, l+i-k)]$ (voir Figure 18).

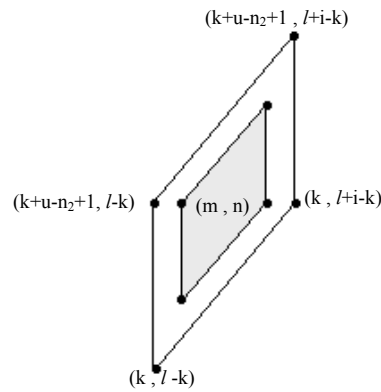


Figure 18

Nous avons $i = u - n_2 + 1 \leq n_2 - l$ si et seulement si $u+l \leq 2n_2 - 1$.

De plus, $r(k+u-n_2, l+i-k) = l+2(u-n_2)+1 \leq u$ si et seulement si $u+l \leq 2n_2 - 1$, ce qui est le cas. Nous avons aussi $r(k, l-k+1) = l+1 > l$. Nous concluons alors que l'intervalle contenant (m, n) et $(k, l+i-k)$ est bien dans $P_{l,u}$.

4^{ème} sous cas: $i = n_2 - l$.

Si $(m, n) \notin \mathfrak{R}$ alors il existe un entier k tel que: (m, n) et $(k+u-n_2+1, l+i-k-(u-n_2+1)) \in [(k, l+i-k-(u-n_2+1)), (k+u-l-i-1, l+i-k+1)]$ (voir Figure 19).

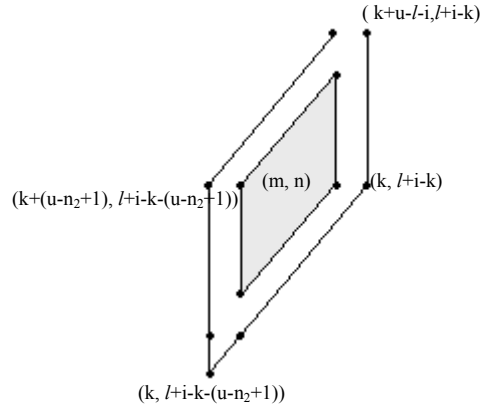


Figure 19

Nous avons $r(k, l+i-k-(u-n_2+1)) = l+i-(u-n_2+1) \geq l$ et $r(k+u-l-i-1, l+i-k+1) = u$.

Nous concluons que l'intervalle contenant (m, n) et $(k+u-n_2+1, l+i-k-(u-n_2+1))$ est bien dans $P_{l,u}$.

3^{ème} cas: $i = n_2 - l + 1, \dots, u - l$ et $j \in J_1$.

Si $(m, n) \notin \mathfrak{R}$ alors il existe un entier k tel que: (m, n) et $(k+u-n_2+1, n_2-k-(u-(i+l-1))) \in [(i-n_2+l+k, n_2-k-u+i+l-1), (u+k-n_2+1, n_2-k-1)]$ (voir Figure 20).

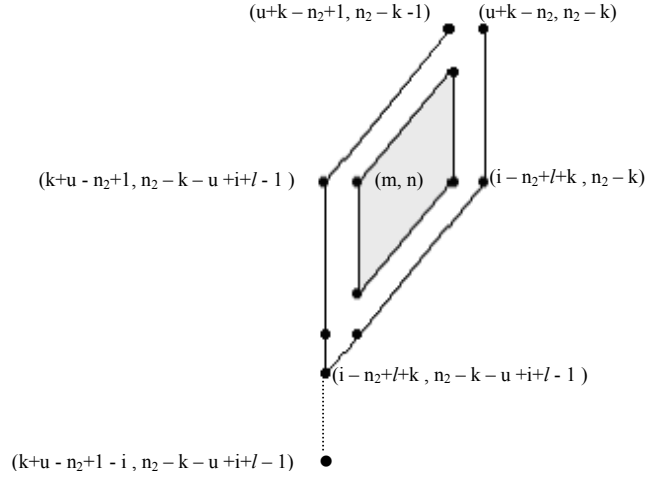


Figure 20

Nous avons $r(u+k - n_2+1, n_2 - k - 1) = u$ et comme $i - n_2 + l+k \geq k+u - n_2+1 - i$ si et seulement si $2i + l \geq u+1$, nous obtenons :

$$i \geq n_2 - l + 1 \Rightarrow 2i \geq n_2 - l + 1 + i \geq n_2 - l + 1 + n_2 - l + 1 = 2(n_2 - l + 1)$$

$$\Rightarrow 2i + l \geq 2(n_2 + 1) - l \geq 2 + u + l - l = u + 2 \text{ (car } 2 + u + l \leq 2 + 2n_2)$$

$$\geq u + 1 > u.$$

Ce qui implique que $\text{rg}(i - n_2 + l+k, n_2 - k - u + i + l - 1) = 2l + 2i - u - 1 > l$.

Nous concluons que l'intervalle contenant (m, n) et $(k+u-n_2+1, n_2-k-(u-(i+l-1)))$ est bien dans $P_{l,u}$.

Maintenant si $l+u \geq n_1+n_2$, la preuve sera similaire à la précédente car nous pouvons se ramener au cas où $l+u \leq n_1+n_2$ en passant au dual de P (voir Figure 21). ■



Figure 21

Remarque

Si D_j^i est un ensemble dominant de $(C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u}$ tel que $l + u \leq n_1 + n_2$ et $l < n_1$ et $u > n_2$, définis dans la preuve du théorème 3, alors l'ensemble des intervalles maximaux contenant les sommets de D_j^i n'est pas forcément \mathfrak{I} (voir Figure 22).

En prenant $D = \{(0,5), (2,3), (4,1)\}$, nous remarquons que l'intervalle $[(1,2), (1,8)]$ ne contient aucun sommet de D .

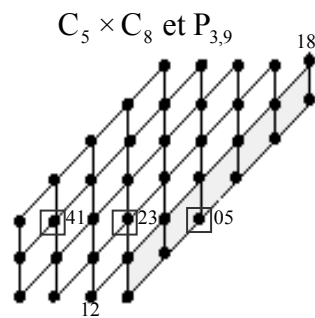


Figure 22

Chapitre 4

Complexité algorithmique

4.1 Introduction

L'un des aspects les plus importants à étudier quand on a affaire à un nouveau problème d'optimisation combinatoire, est la complexité algorithmique. Pouvoir déterminer un algorithme efficace pour résoudre le problème en question est l'idéal qu'on puisse atteindre car le fait de dire qu'un algorithme est fini peut être d'un intérêt nul sur le plan opérationnel puisqu'en énumérant toutes les solutions réalisables possibles, ceci conduit certainement à la solution optimale en un temps fini mais rarement raisonnable d'où l'intérêt d'algorithme "efficace"(ou "bon").

Vu que le problème du nombre domotique dans un graphe est NP-complet, notre vif intérêt est porté à prouver sa NP-complétude dans la classe des graphes représentatifs des intervalles d'un poset de même que la NP-complétude est prouvée pour un autre nombre domotique qui est aussi important que le nombre domotique et qui a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs [1, 24,36,39,43,78,84,90] qui est le nombre domotique total, introduit par E.J.Cockayne, S.T.Hedetniemi et R.M.Dawes [19].

L'objet de ce chapitre est de donner d'abord un sens précis aux termes d'algorithmes efficaces, de problèmes d'optimisation combinatoires faciles et difficiles, en d'autres termes, aborder la théorie de la "complexité algorithmique", ensuite de donner quelques classes importantes de graphes où la NP-complétude du nombre domatique a été prouvée sans toutefois oublier de mentionner les classes de graphes où le problème a été résolu en temps polynomial. Nous introduisons également des résultats relatifs à la NP-complétude de quelques problèmes dans la classe des hypergraphes d'intervalles et enfin nous prouvons que le problème du nombre domatique ainsi que le problème du nombre domatique total dans notre classe de graphe est NP-complet.

4.2 Notions de base

Notons que c'est Stephen Cook [22] et Richard Karp [49], qui ont indépendamment jeté les fondements de la théorie de la complexité des problèmes après un travail préliminaire de Jack Edmonds [27].

Définition 1 Un "algorithme" de résolution d'un problème P donné est une procédure décomposable en opérations élémentaires transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple du problème P en une chaîne de caractères représentant les résultats de P .

Définition 2 A toute instance I d'un problème P , nous pouvons attacher un nombre $\mu(I)$, qui mesure la longueur des données de cette instance et que nous appelons la taille de cette instance I .

Définition 3 Un algorithme est dit "polynomial" si le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un exemple de taille n , est borné par un polynôme en n . Un algorithme est considéré comme "efficace" si et seulement si il est polynomial.

Définition 4 Si A est un algorithme de résolution d'un problème P et I est une instance de ce dernier, alors au couple (A, I) , nous associons un entier $\tau(A, I)$ représentant le nombre d'opérations élémentaires (addition, multiplication, comparaison, affectation) effectuées

par un algorithme A dans la résolution de l'instance I du problème P. le plus grand nombre $\tau(A, I)$ sur l'ensemble de toutes les instances ayant la même taille est appelé *complexité* de l'algorithme A.

4.2.1 Les problèmes de la classe P

Définition 5 Un problème est dit appartenir à la classe "P" s'il peut être résolu par un algorithme polynomial. Nous dirons que les problèmes de la classe P sont "faciles".

4.2.2 La classe des problèmes NP

Définition 6 Un problème de reconnaissance est un problème dont les résultats ne peuvent prendre que l'une des deux valeurs vrai ou faux.

Les problèmes de reconnaissance ne peuvent être identifiés à des problèmes d'optimisation combinatoire (dans un problème d'optimisation combinatoire, on demande d'exhiber $s \in S$ qui minimise -ou qui maximise- $f(s)$ ce qui n'est pas le cas dans les problèmes de reconnaissance). Par contre, à tout problème d'optimisation combinatoire $\min_{s \in S} f(s)$ (resp. $\max_{s \in S} f(s)$), et un nombre a , nous associons un problème de reconnaissance défini comme suit: existe-t-il un élément $\hat{s} \in S$ tel que $f(\hat{s}) \leq a$? (resp. $f(\hat{s}) \geq a$).

Exemple Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n et a un entier, $a \leq n$. Existe-t-il une partition domotique de q ensembles dominants, telle que $q \geq a$ est le problème de reconnaissance associé au problème de la partition domotique maximal.

Remarque Le problème de reconnaissance est au moins aussi facile que le problème d'optimisation combinatoire auquel il est associé. En d'autres termes, si le problème de reconnaissance est difficile, il en est de même pour le problème d'optimisation combinatoire.

Définition 7 Les algorithmes non déterministes, sont des algorithmes contenant une instruction "choix", qui opérant sur un ensemble fini, choisit un élément de cet ensemble sans spécifier comment ce choix est fait. Ils sont caractérisés par le fait que s'il existe une manière (au moins) d'effectuer le choix qui conduise à la réponse vrai, c'est suivant cette manière que le choix est fait. Plus précisément, les choix successifs seront effectués de telle sorte qu'on arrive à la réponse VRAI en un minimum de temps.

Définition 8 Un problème appartient à la classe NP [non determinist polynomial], s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe.

Remarque Les algorithmes "ordinaires" sont un cas particulier des algorithmes non déterministes, donc un problème de reconnaissance qui peut être résolu par un algorithme polynomial appartient à la classe NP et il s'ensuit que $P \subset NP$.

4.2.3 La classe des problèmes NP-complets

L'inclusion stricte $P \subset NP$ reste à ce jour une conjecture très difficile. Elle découle du fait qu'il existe des problèmes qu'on ne sait pas montrer s'il existe ou non un algorithme polynomial pour les résoudre. Cette inaptitude qui ne signifie guère l'inexistence de tels algorithmes. Cependant il existe une large classe de problèmes qui sont "équivalents" du point de vue que si l'un d'eux est "facile" alors il en est de même pour tous les autres problèmes de la classe NP.

Pour illustrer cette équivalence, introduisons le sens de réduction polynomiale.

Définition 9 Un problème P_1 se réduit polynomialement au problème P_2 si et seulement si il existe un algorithme de résolution pour P_1 faisant appel à la résolution de P_2 et si cet algorithme est polynomial lorsque la résolution de P_2 est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Définition 10 Un problème P de la classe NP est dit NP -complet si et seulement si tout problème de la classe NP se réduit polynomialement à P .

De là, il apparaît que les problèmes NP -complets sont plus difficiles que ceux de la classe P si toutefois la conjecture $P \neq NP$ est vraie.

La notion de NP -complétude, ne peut s'appliquer qu'aux problèmes de reconnaissance. Le théorème qui suit donne le schéma général du type de raisonnement utilisé pratiquement (grâce à la transitivité de la réduction polynomiale) pour montrer qu'un problème est NP -complet.

Théorème 4.2 *Si le problème P est NP -complet et si on peut mettre en évidence une réduction polynomiale de P à un problème P' de la classe NP , alors P' est NP -complet.*

4.3 NP -complétude de quelques problèmes relatifs à l'hypergraphe des intervalles d'un poset

Soit $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles d'un poset rangé P et soit k un entier. On définit les problèmes de reconnaissance suivants:

" $\alpha(\mathcal{H}(P)) \geq k ; k \leq |P|$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe un ensemble stable de cardinalité $\geq k$, (stable maximum).

" $\rho(\mathcal{H}(P)) \leq k ; k \leq |N_0| |N_{r(P)}|$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe un recouvrement par arêtes, de cardinalité $\leq k$ (recouvrement par arêtes minimum).

" $v(\mathcal{H}(P)) \geq k; k \leq \min\{|N_0|, |N_{r(P)}|\}$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe un couplage de cardinalité $\geq k$, (couplage maximum).

" $\tau(\mathcal{H}(P)) \leq k; k \leq |P|$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe un recouvrement par sommets de cardinalité $\leq k$, (recouvrement par sommets minimum).

" $\gamma(\mathcal{H}(P)) \leq k; k \leq |P|$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe une coloration des sommets de P , de cardinalité $\leq k$ (coloration minimum).

Théorème [7] *Les problèmes de reconnaissance $\alpha(\mathcal{H}(P)) \geq k$, $\rho(\mathcal{H}(P)) \leq k$, $v(\mathcal{H}(P)) \geq k$, $\tau(\mathcal{H}(P)) \leq k$ et $\gamma(\mathcal{H}(P)) \leq k$ où P et k sont donnés, sont NP-complets.*

4.4 NP-complétude du nombre domatique dans quelques classes de graphes

Nous citons d'abord quelques classes de graphes où le problème du nombre domatique à été résolu en temps polynomial, puis nous énonçons des classes de graphes où la NP-complétude est prouvée:

4.4.1 Les graphes d'intervalles et les graphes fortement triangulés

Les définitions des graphes d'intervalles et les graphes fortement triangulés (FT) sont donnés dans le chapitre 2, page 44.

Rao et Rangan [63] ont établi un algorithme polynomial qui détermine la partition domatique pour les graphes d'intervalles. Plus tard, Peng et Chang [60] ont décrit un algorithme polynomial qui construit une partition domatique dans les graphes fortement triangulés et dont la définition est donnée dans le chapitre 2, en donnant un ordre d'élimination fort pour de tels graphes. Un algorithme plus simple que ceux mentionnés précédemment est développé en [48], qui résout le problème de partition domatique pour les graphes FT et par conséquent les graphes d'intervalles puisqu'ils sont FT.

Le problème du nombre domatique est NP-complet pour les graphes en général [35]. Bonuccelli a prouvé qu'il est NP-complet pour les graphes arc-circulaire [6], qui sont les graphes pour lesquels il existe une correspondance entre leurs sommets et les arêtes d'un cercle tel que deux sommets quelconques sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans le cercle chevauchent, et lorsque aucune arête du cercle n'est proprement incluse dans une autre arête, ils sont dits graphes arc-circulaires propres, pour lesquels, il décrit un algorithme en $O(|V|^2 \log|V|)$.

4.4.2 NP-complétude dans quelques classes de graphes parfaits

Soit $G = (V, E)$ un graphe, on définit les nombres:

$\alpha(G)$: nombre de stabilité, c'est-à-dire cardinalité d'un stable maximum de G .

$\theta(G)$: nombre minimum de sous-ensembles $Y \subseteq V$ dont l'union est V et tels que G_Y soit un graphe complet (on dit aussi une clique).

$\chi(G)$: nombre chromatique.

$\omega(G)$: la cardinalité d'une clique maximum de G .

Théorème [53] Lovasz *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes et caractérisent les graphes dits "Parfaits":*

(i) $\alpha(G_Y) = \theta(G_Y), \forall Y \subseteq X$

(ii) $\omega(G_Y) = \chi(G_Y), \forall Y \subseteq X$.

4.4.2.1 Les graphes scindés

Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe scindé s'il existe une partition de l'ensemble des sommets $V = V' + V''$ où V' induit une clique dans G , V'' induit un ensemble stable et $+$ est l'union d'ensembles disjoints, non vides.

Théorème [48] *Le problème du nombre domatique $d(G) \geq k$ dans les graphes scindés est NP-complet pour tout $k \geq 3$.*

4.4.2.2 Les graphes triangulés

Un graphe est dit triangulé si tout cycle de longueur au moins quatre, contient une corde.

Un graphe est dit *co-triangulé* si son complémentaire est triangulé.

Pour ces classes de graphes qui contiennent les graphes scindés [37], ils ont conclu [48]:

Corollaire [48] *Le problème du nombre domatique est NP-complet pour les graphes triangulés et co-triangulés.*

4.4.2.3 Les graphes bipartis

Théorème [48] *Le problème du nombre domatique $d(G) \geq k$ est NP-complet pour les graphes bipartis pour tout entier fixé $k \geq 3$.*

Un graphe de *comparabilité* est un graphe non orienté, où ses arêtes peuvent être orientés transitivement. Notons que tout graphe biparti est un graphe de comparabilité. Kaplan et Shamir [48] ont pu déduire que:

Corollaire [48] *Le problème du nombre domatique $d(G) \geq k$ est NP-complet pour les graphes de comparabilité pour tout entier fixé $k \geq 3$.*

Un graphe de comparabilité qui a exactement deux orientations transitives est dit uniquement partiellement ordonné (UPO). Et tout graphe biparti connexe est un UPO. En [48], ils ont établis le résultat suivant :

Corollaire [48] *Le problème du nombre domatique $d(G) \geq k$ est NP-complet pour les graphes UPO, pour tout entier fixé $k \geq 3$.*

4.5 NP-complétude du nombre domatique et du nombre domatique total pour les graphes représentatifs des intervalles d'un poset

Comme nous l'avions mentionné dans 4.4.2.3, le problème du nombre domatique $d(G) \geq k$ est NP-complet pour les graphes bipartis pour tout entier fixé $k \geq 3$. Ainsi en se donnant un graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$, nous construisons un poset P sur deux niveaux N_0 et N_1 où $N_0 = X$ et $N_1 = Y$ avec l'ordre défini par: pour $y \in Y$ et $x \in X$, $y \succ x$ si et seulement si l'arête xy est dans E . Dans ce cas $G(P) = P \cong G$. Nous concluons alors que:

Théorème 1 *Le problème du nombre domatique $d(G(P)) \geq k$, dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset P est NP-complet, pour tout $k \geq 3$.*

Maintenant, le type de raisonnement que nous allons utiliser pour montrer la NP-complétude du problème du nombre domatique total pour les graphes représentatifs des intervalles de P , est la réduction polynomiale mentionnée dans le théorème 4.1.

Rappelons la définition d'un ensemble dominant total:

Un sous ensemble D de V est dit ensemble dominant total, si pour tout $x \in V$, il existe $y \in D$, tel que x est adjacent à y . Le nombre maximum de classes de la partition de V en ensembles dominants totaux disjoints, est dit le nombre domatique total et est noté $d_t(G)$.

Théorème 2 *Le problème du nombre domatique total $d_t(G(P)) \geq k$ dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset P est NP-complet.*

Preuve

Soit (P, \leq) un poset, le problème de reconnaissance associé au problème du nombre domotique total dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset appartient à la classe NP, car en se donnant un entier k et une famille de sous-ensembles \mathcal{D} de $G(P)$ tel que $|\mathcal{D}| \leq |P| - 1$, on sait vérifier en temps polynomial si un sous ensemble D de \mathcal{D} est un ensemble dominant total de $G(P)$, il suffit de vérifier pour tout sommet de P qu'il existe un sommet dans D qu'il lui soit adjacent, donc au plus $|P| - 1$ fois, et si l'on vérifie pour chaque ensemble de \mathcal{D} , on aura au plus $|P| (|P| - 1)$. De même qu'on sait vérifier en temps polynomial si $D \cap D' = \emptyset$ pour tout ensemble D et D' de \mathcal{D} , il suffit de le vérifier $|D| |D'|$ fois, une valeur qui ne dépasse pas $|P|^2 / 4$. Il reste à vérifier que chaque sommet de P est dans l'un des ensembles de \mathcal{D} et ceci se fait en au plus $|P|$ fois.

Nous prouvons la NP-complétude par une réduction polynomiale du problème du nombre domotique dans un graphe quelconque au problème du nombre domotique total dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset.

Il est connu (voir [35]) que le problème de reconnaissance $d(G) \geq k$ est NP-complet pour les graphes quelconques.

Soit $G = (V, E)$ un graphe, notons les sommets de G par v_1, \dots, v_n et les arêtes par e_1, \dots, e_m

Nous associons à G le poset $P = V \cup V'$ où $V' = \{v'_i, v_i \in V\}$ (copie de V) et où l'ordre est donné de la manière suivante:

Pour $v_i \in V, v'_j \in V'$ on a $v_i < v'_j$ ssi v_i est adjacent à v_j dans G ou $i = j$.

Par exemple si $G = (V, E)$ est le graphe illustré dans la figure 1, nous obtenons le poset de la figure 2.

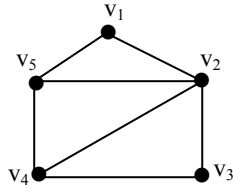


Figure 1

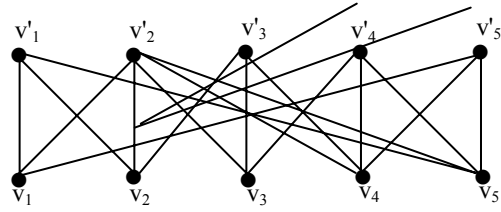


Figure 2

Soit $G(P) = (V \cup V', \tilde{E})$ le graphe représentatif des intervalles de P .

Montrons que $d(G) = d_t(G(P))$

Si $\{D_1, \dots, D_q\}$ est une partition domatique de G , alors $\{(D_i \cup D'_i), i = 1, \dots, q\}$ est une partition domatique totale de $G(P)$. En effet, comme D_i est un ensemble dominant de G , nous avons :

$\forall x \in V/D_i, \exists y \in D_i$ tel que $(x, y) \in E$ et par conséquent, $\forall x' \in (V'/D'_i), \exists y \in D_i$ tel que $y < x'$ et $\forall x \in (V/D_i), \exists y' \in D'_i$ tel que $x < y'$. Par suite, y et x' (resp. x et y') sont adjacents dans $G(P)$.

De même, $\forall x \in D_i, (\text{resp. } x' \in D'_i), x < x'$, nous avons alors $\forall x \in D_i, \exists x' \in D'_i$ (resp. $\forall x' \in D'_i, \exists x \in D$) tel que x et x' sont adjacents dans $G(P)$.

Donc, $\forall x \in V \cup V', \exists y \in (D_i \cup D'_i)$ tel que $(x, y) \in \tilde{E}$.

Par conséquent, tout élément de $V \cup V'$ est adjacent à un élément de $D_i \cup D'_i$ dans $G(P)$ et par suite $D_i \cup D'_i$ est un ensemble dominant total de $G(P)$ et $\{(D_i \cup D'_i), i = 1, \dots, q\}$ est une partition domatique totale de $G(P)$.

Réciproquement, soit une partition domatique $\{D_i, i = 1, \dots, q\}$ de q ensembles dominants totaux de $G(P)$.

Comme $G(P)$ est un graphe biparti, alors: $\forall k = 1, \dots, q, D_k = D_{i_k} \cup D'_{j_k}$ $D_{i_k} \subset V$ et $D'_{j_k} \subset V'$

Nous avons q ensembles dominants totaux, alors nous avons nécessairement une partition de q ensembles de V et une partition de q ensembles de V' où $\forall k = 1, \dots, q, D_{i_k} \neq \emptyset$ et $D'_{j_k} \neq \emptyset$.

Montrons que D_{j_k} est un ensemble dominant de G .

Comme $D_{i_k} \cup D'_{j_k}$ est un ensemble dominant total de $G(P)$, alors $\forall x \in V \cup V'$, $\exists y \in (D_{i_k} \cup D'_{j_k})$ tel que $xy \in \tilde{E}$, ce qui implique étant donné que $G(P)$ est biparti, que: $\forall x \in V, \exists y \in D'_{j_k}$ tel que $xy \in \tilde{E}$ donc, $\forall x \in V - D_{j_k}, \exists y \in D'_{j_k}$ tel que $x < y$ c'est-à-dire dans G , x et y sont adjacents et $y \in D_{j_k}$ et par suite D_{j_k} est un ensemble dominant de G .

Par un raisonnement similaire, nous pouvons prouver que D_{i_k} est un ensemble dominant de G .

Par conséquent, nous obtenons une partition domotique formée de q ensembles dominants D_{j_k} , $k = 1, \dots, q$, de G . ■

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au nombre domotique dans la classe des graphes représentatifs des intervalles d'un poset.

En premier lieu, nous avons étudié les opérations sur les posets, nous nous sommes intéressés d'abord à $d(G(P * Q))$ où l'opération $*$ est respectivement la somme directe et la somme linéaire. Une valeur exacte est donnée pour la première opération alors que pour la seconde, nous avons établie une borne inférieure. Quant au produit de deux posets, notre étude s'est restreinte au produit d'un poset par une chaîne où nous avons donné la valeur exacte de $d(G(P \times C_n))$ sous une certaine condition.

En second lieu et sur la lumière des travaux de Chang [16] qui s'est intéressé au nombre domotique du produit de deux chaînes, nous avons pensé à l'étude du nombre domotique du graphe représentatif du sous poset induit par l'union des niveaux consécutifs $N_1 \cup \dots \cup N_u$ du produit de deux chaînes $C_{n_1} \times C_{n_2}$. Suivant les valeurs des entiers l, u, n_1, n_2 , la partition domotique maximale est exhibée.

En dernier lieu, nous nous sommes orientés vers la complexité algorithmique et nous avons montré la NP-complétude du nombre domotique et du nombre domotique total (autre paramètre de domination aussi important que le nombre domotique) dans la classe des graphes représentatifs des intervalles d'un poset.

Comme perspectives, nous proposons l'étude des problèmes suivants:

- Reconnaissance des graphes représentatifs des intervalles d'un poset.
- Trouver le nombre domotique $d(G(\prod_{i=1}^r C_{n_i})_{l,u})$, ce qui peut être une généralisation de nos résultats.
- Déterminer $d(G(P * Q)_{l,u})$ où $*$ est le produit direct, produit linéaire, produit direct par rangés,...
- Caractériser les posets pour lesquels $G(P)$ est domotiquement plein.

Références

- [1] S. Arumugam, A. Thuraiswamy; total domatic number of a graph. Submitted to bulletin of the institute of combinatorics and its applications.
- [2] S. Arumugam, and J. P. Joseph, On the connected domatic number of a graph. *J. Ramanujan Math. Soc.* **9**, 69-77 (1994).
- [3] X. Baogen, E. J. Cockayne, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, Z. Shangchao; Extremal graphs for inequalities involving domination parameters. *Discrete Mathematics* **216**, 1-10 (2000).
- [4] C. Berge, Theory of graphs and its applications. Methuen, London, (1958).
- [5] S.L. Bezrukov and K. Engel. Properties of graded posets preserved by some operation. In R. L. Graham and J. Nešetřil, editors, *Mathematics of Paul Erdos*, Springer-Verlag, Berlin. *Algorithmes Comb.* **14**: 79-85 (1985).
- [6] M. A Bonucelli. Dominating sets and domatic number in circulaire arc graphs. *In discreet Applied Mathematics* **12**, 203-213, (1985).
- [7] I. Bouchemakh, Sur quelques problèmes extrémaux dans les ordres partiels finis, Thèse de doctorat, USTHB, Algérie, (2001).
- [8] I. Bouchemakh, Stabilité et recouvrement par intervalles dans les ordres partiels finis. Thèse de magister, USTHB, Algérie, (1991).
- [9] I. Bouchemakh. On théorème König and dual König properties of the order interval hypergraphs of series-parallel posets. *Rostock. Math. Kolloq.*, **56**: 3-8, (2002).
- [10] I. Bouchemakh and k. Engel. Interval stability and interval covering property in finite posets. *Order*, **9**: 163-175 (1992).

- [11] I. Bouchemakh and k. Engel. The order-interval hypergraph of a finite poset and the könig property. *Discrete Math.*, **170**: 51-61 (1997).
- [12] I. Bouchemakh. On the chromatic number of order-interval hypergraph. *Rostock. Math. Kolloq.*, **54**: 81-89 (2000).
- [13] I. Bouchemakh. On the k-independence number in the Boolean lattice. A paraître dans MMR.
- [14] N. G. de Bruijn, C.A.V.E. Tengbergen, and D.Kruyswijk. On the set of divisors of a number. *Nieuw Arch. Wiskunde*, **23**: 191-193 (1951).
- [15] E. R Canfield. A Sperner property preserved by product. *Linear and Multilinear Algebra*, **9**:151-157 (1980).
- [16] G. J. Chang, The domatic number problem, *Discrete Mathematics* **125**, 115-122, (1984) North-Holland.
- [17] G. Chartrand and J. Mitchem, Graphical theorems of the Nordhaus-Gaddum class, In: *Recent Trends in Graph Theory*, Lecture Notes in Math. **186**, Springer-Verlag, Berlin 55-61, (1971).
- [18] E. J. Cockayne. Domination in undirected graphs- a survey. In Y. Alavi and D. R. Lick, editors, *Theory and Applications of Graphs in America's Bicentennial Year*, 141-147. Springer-Verlag, Berlin, (1978).
- [19] E. J. Cockayne, R.M. Dawes, S. T. Hedetniemi: Total domination in graphs. *Networks* **10**, 211-219 (1980).
- [20] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi: Towards a theory of domination on graphs. *Networks* **7**, 247-261 (1977).
- [21] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi. Optimal domination in graphs. *IEEE Transactions on circuits and systems*, **22** (11): 855-857 (1975).

- [22] S. A. Cook. The Complexity of theorem-proving procedures. Proc.3rd Ann. ACM Symp. On Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New york, 151-158 (1971).
- [23] C.F. De Jaenisch, Applications de l'analyse mathématique dans les jeux des Echecs. Petrograd (1862).J.E.
- [24] Dunbar, Teresa W. Haynes, Michael A. Henning; Nordhaus-Gaddum type results for the domatic number of a graph. In Graph Theory, Combinatorics, and Applications, John Wiley & Sons, Inc. Vol. **1**, 303-312 (1999)
- [25] J. E .Dunbar, Teresa W. Haynes, Michael A. Henning; the domatic number of a graph and its complement. Congressus Numerantium **126**, 53-63 (1997).
- [26] J. E .Dunbar, Teresa W. Haynes, Michael A. Henning; the codomatic number of cubic graph. The journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing (JCMCC) **32**,139-147 (2000).
- [27] J. Edmonds; Paths, trees and flowers; Cand. J. Math. 17; 449-467 (1965).
- [28] K. Engel. Interval packing and covering in the Booléen lattice. *Comb. Probab. Comput.*,**5**: 373-384 (1996).
- [29] K. Engel, H.-D. O. F. Gronau,"Sperner theory in partially ordered sets". BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, (1985).
- [30] K. Engel. Optimal representations of partially ordered sets and a limit Sperner theorem. European J. Combin., **7**: 287-302.
- [31] M. Farber. Characterisations of strongly Chordal graphs. Discrete Math., **43**:173-189, (1983).
- [32] M. Farber. Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs, Discrete Appl. Math. **7**, 115-130, (1984).
- [33] U. Feige, M.M. Halldorsson, G. Kortsarz; approximating the domatic number. 32nd Ann. Symposium, On theory of Computing (STOC 2000), May 2000.

- [34] P. C. Fishburn. Intransitive indifference with unequal indifference intervals. *J. Math. Psych*, **7**: 144 – 149 (1970).
- [35] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computer and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness* (Freeman. San Francisco. CA. 1979).
- [36] W. Goddard, M.A. Henning, and H. C. Swart, Some Nordhaus-Gaddum type result, *J. Graph Theory* **16**, 221-231 (1992).
- [37] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic press, New work, (1980).
- [38] C. Green, "Posets of Shuffles". *J. Combin. Theory Ser. A* **47**, 191-206 (1988).
- [39] F. Harary; T. w. Haynes; The k-tuple domatic number of a graph. *Math. Slovaca*, **48**, No. **2**, 161-166 (1998).
- [40] F. Harary; T. w. Haynes; the double domatic number of a graph. *Math Slovaca*, to appear.
- [41] F. Harary; D. Hsu, Z. Miller, The bichromaticity of a tree. In *theory and applications of graphs*, proc. Michigan 1976, ed. By Y. Alavi and D.R. Lick. Springer Verlag Berlin-Heidelberg- New York (1978).
- [42] B. L. Hartnell, D.F.Rall, connected domatic number in planar graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol **51**, 173-179 (2001).
- [43] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater; *fundamentals of domination in graphs*. Marcel Dekker, (1998).
- [44] T. W. Haynes, M. A. Henning, The domatic numbers of factors of graphs. *ARS. Combinatoria* **56**, 161-173 (2000).
- [45] T. W. Haynes, P.J. Slater. Paired-domination and the paired-domatic number. *Congressus Numerantium* **109**, 65-72 (1995).

- [46] S. T. Hedetniemi and R. C. Laszlar. Connected domination in graphs. In B. Bollobas, editor, *Graph Theory and Combinatorics*, pages 209-218. Academic Press, London, (1984).
- [47] F. Jaeger and C. Payan, relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple. *C. R. Acad. Sci. Paris, A*, **274**, 728-730 (1972).
- [48] H. Kaplan, R. Shamir, The Domatic Number Problem on Some Perfect Graph Families. In *Information procesi et seulement sing letters* **49**, 51-56, (1994).
- [49] R. M. Karp; Reducibility among Combinatorial problems; in R.E. Miller and J. W. Thatcher (eds.); *complexity of Computer Computations*; Plenum Press; New York; 85-103 (1972).
- [50] P. Kyš, Remarks on domatic number. *Acta. Math. Univ. Comenian* **46/47** (1985/1986).
- [51] J.M. Laborde, sur le nombre domatique du n-cube et une conjecture de Zelinka, *European J. Combin.* **8** 175-177 (1987).
- [52] S. Liang, on three conjectures of B. Zelinka in graph theory. *Kexue Tongbao*; vol.33 No.12, june (1988).
- [53] L. Lovasz, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture; *Discrete Mathematics* **2**, 253-267 (1972).
- [54] A. Majumder, A. Jas, S. Sur-Kolay, Efficient domatic partitioning of split and permutation graphs. Jadavpur University, Calcutta, India, Final year B. E. Project: (1995/1996).
- [55] N. Metropolis, G.-C. Rota, "on the lattice of faces of n-cube". *Bull. Amer. Math. Soc.* **84**, 284-286 (1978).
- [56] R. H. Möhring. Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs. In: I. Rival, ed., *Graphs and Orders* (D. Reidel, Dordrecht), 41-101 (1985).

- [57] E. A. Nordhaus and J.W. Gaddum, On complementary graphs. *Amer. Math. Monthly* **63**, 175-177 (1956).
- [58] O. Ore, *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **38**, Providence (1962).
- [59] C. Payan and N. H. Xuong, Domination-balanced graphs, *J. Graph Theory* **2**, 9-17 (1978).
- [60] S. L. Peng and M.S. Chang. A simple linear time algorithm for the domatic partition problem on strongly chordal graphs. *Inform. Process. Lett.*, **43**: 297-300, (1992).
- [61] J. Plesnik, Bounds on chromatic numbers of multiple factors of a complete graph, *J. Graph Theory* **2**, 9-17 (1978).
- [62] D. F. Rall. Domatically critical and domatically full graphs. *Discrete Math.*, **86**: 81-87, (1990).
- [63] A. S. Rao and C. P. Rangan. Linear algorithm for domatic number problem on interval graphs. *Inform. Process. Lett.*, **33**: 29-33, (1989).
- [64] D. Rautenbach, L. Volkmann; the domatic number of block-cactus graphs. *Discrete Mathematics* **187** 185-193 (1998).
- [65] A. Sali. Constructions of ranked posets. *Discrete Math.*, **70**: 77-83 (1988).
- [66] P. D. Vestergaard, , B. Zelinka,; Cut-vertices and Domination in Graphs, *Mathematica Bohemica*, No 2, **120**, 135-143 (1995).
- [67] B. Voigt and I. Wegener. A remark on minimal polynomials of Boolean functions. In E. Borger, H. Kleine Buning, and M. M. Richter, editors, *CLS 88 Proc. 2nd Workshop Computer, Science, logic, Duisburg 1988*, vol. **385** of lecture Notes in Comput. Sci., 372-383, Springer-Verlag, Berlin, New York (1989).
- [68] Waller, D. A.: Double covers of graphs. *Bull. Austral. Math. Soc.* **14**, 233-248 (1976).

- [69] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom. Challenging mathematical problems with elementary solutions. In Volume 1: Combinatorial Analysis and Probability Theory. San Francisco, (1964). Holden-Day.
- [70] B. Zelinka, Domatic numbers of cube graphs, *Math. Slovaca* **32**, No.2, 117-119, (1982).
- [71] B. Zelinka, Adomatic and idiomatic numbers of graphs. *Math. Slovaca* **33**, No 1, 99-103, (1983).
- [72] B. Zelinka, Semidomatic numbers of directed graphs. *Math. Slovaca* **34**, No.4, 371-374, (1984).
- [73] B. Zelinka, on k-play domatic numbers of graphs. *Math. Slovaca* **34**, No.3, 313-318, (1984).
- [74] B. Zelinka, Edge domatically full graphs. *Math. Slovaca* **40**, No.4, 359-365, (1990).
- [75] B. Zelinka, domatic number and degrees of vertices of a graph. *Math. Slovaca* **33**, No.2, 145-147, (1983).
- [76] B. Zelinka, domatic number and bichromaticity of a graph. In *Lecture Notes in Mathematics, Graph Theory Lagow*, 1981. Springer, Berlin, **1018**, 278-285 (1983).
- [77] B. Zelinka, Total domatic number and degrees of vertices of a graph. *Math Slovaca* **39**, No. 1, 7-11, (1989).
- [78] B. Zelinka, Connected domatic number of a graph. *Math. Slovaca* **36**, No4, 387-392, (1986).
- [79] B. Zelinka, Complementarily domatic number of a graph. *Math. Slovaca* **38**, No. 1. (1988).
- [80] B. Zelinka, Anti domatic number of a graph. *Archivum Mathematicum (BRNO)*. Tomus **33**, 191-195 (1997).

- [81] B. Zelinka, Domatic number of a graph and its variants (extended abstract). Fourth Czechoslovakian Symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity, Elsevier Science Publishers, (ed. J. Nešetřil and M. Fiedler editors); (1992).
- [82] B. Zelinka, Location domatic number of a graph. *Mathematica Bohemica* **123** No. 1, 67-71 (1998).
- [83] B. Zelinka, Cut vertices and domination in graphs. *Mathematica Bohemica* **120** No. 2, 135-143 (1995).
- [84] B. Zelinka, Total domatic number of Cacti; *Math. Slovaca* **38**, No.3, 207-214, (1988).
- [85] B. Zelinka, on domatic numbers of graphs. *Math. Slovaca* **31**, No.1, 91-95, (1981).
- [86] B. Zelinka, Edge domatic numbers of Cacti. *Mathematica Bohemica*; **116** No.1, 91-95 (1991).
- [87] B. Zelinka, Total edge-domatic number. *Mathematica Bohemica*; **116** No.1, 96-100 (1991).
- [88] B. Zelinka, On k-domatic numbers of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **33**, 108 (1983), Praha.
- [89] B. Zelinka, some remarks on domatic numbers of graphs. *Časopis pro pěstování matematiky*, roč. **106** (1981), Praha.
- [90] B. Zelinka, regular totally domatically full graphs; *discrete mathematics* **86** 71-79 (1990).
- [91] B. Zelinka, bichromaticity and domatic number of a bipartite graph. *Časopis pro pěstování matematiky*. Vydává Matematický ústav, Praha. Svazek 110* PRAHA 31.5.1985*ČÍSLO 2.
- [92] B. Zelinka, domatic number and linear arboricity of Cacti. *Math. Slovaca* **36**, No.1, 49-54, (1986).

- [93] B. Zelinka, adomatic and total adomatic numbers of graphs. Manuscript, (1995).
- [94] B. Zelinka, edge-adomatic numbers of graphs. Manuscript, (1995).
- [95] B. Zelinka, domatic number and bichromaticity of a graph, Graph Theory Lagow 1981, Lecture Notes in Mathematics 1018, 278-285 (Springer, Berlin, 1983).
- [96] B. Zelinka, domatic numbers of directed graphs. Czech. Math. J., à paraître.
- [97] B. Zelinka, Domatically critical graphs, Czech. Math.J., **30**, 486-489 (1980).
- [98] B. Zelinka, Uniquely domatic regular domatically full graphs, Czech. Math. J., à paraître.