

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MEMOIRE

présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

en mathématiques

Spécialité : Analyse : Équations aux dérivées partielles

Par

**TRAD Fatma Zohra**

**THÈME**

**EFFET D'UNE SURFACE RUGUEUSE  
EN PROPAGATION DES ONDES**

Soutenu publiquement, le 03/07/2012 devant le jury composé de :

Mr. <b>D. E. TENIOU</b>	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Président.
Mr. <b>K. LEMRABET</b>	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de MEMOIRE.
Mr. <b>M. S. MOULAY</b>	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr. <b>A. AINOUZ</b>	Chargé de cours	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.

# *Remerciements*

---

Dieu merci pour la patience et le courage que vous m'avez accordé tous le long de la préparation de ce modeste travail.

Mes sincères remerciement à Monsieur K.Lemrabet mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé et également pour la confiance qu'il ma accordée et pour sa patience. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur D. E. Teniou, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie vivement Messieurs M.S.Moulay, Professeur à l'U.S.T.H.B et A. Ainouz, Chargé de cours à l'U.S.T.H.B. qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je ne saurais oublier de remercier toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis (es), en particulier mes parents et mon mari, mes amis R.Bouraoui et T.Laadj et H.Boulaiki pour leur soutient tout au long de ce travail.

# Effet d'une surface rugueuse en propagation des ondes

## Résumé

Nous nous intéressons ici au problème de la diffraction d'une onde électromagnétique harmonique, par un obstacle bidimensionnel parfaitement conducteur, revêtu d'une couche mince rugueuse. Où l'on a considéré un matériau diélectrique homogène.

Le but poursuivi est d'étudier l'effet de cette couche en propagation des ondes, par la technique des échelles multiples. Il s'agit de tenir compte de l'effet des oscillations par des conditions d'impédance homogénéisées. Ces conditions tiennent compte de l'effet de la surface rugueuse.

**Mots-clés :** Ondes électromagnétiques, Condition de radiation, impédance, surface rugueuse, couche mince, homogénéisation.

# Table des matières

---

---

<b>Liste des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Électromagnétisme et équations de Maxwell</b>	<b>4</b>
1.1 Équations de Maxwell . . . . .	5
1.2 Lois de comportement dans les matériaux diélectriques . . . . .	6
1.3 Le problème de Maxwell en régime harmonique . . . . .	6
1.4 Les conditions aux limites . . . . .	7
1.5 Système de Maxwell vectoriel . . . . .	8
1.6 Ecriture en dimension 2 . . . . .	9
<b>2 Position du problème</b>	<b>10</b>
2.1 Description du modèle . . . . .	10
2.2 Condition de radiation . . . . .	12
2.2.1 Les harmoniques de Floquet . . . . .	13

2.2.2	Condition de radiation à l'infini . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Développement asymptotique à deux échelles</b>	<b>16</b>
3.1	Développement asymptotique raccordés . . . . .	17
3.2	Méthodes à échelles multiples . . . . .	18
3.2.1	Technique des échelles multiples de la théorie de l'homogénéisation . . . . .	18
3.3	Développement asymptotique à deux échelles . . . . .	19
3.3.1	La méthode de Vasi'elva . . . . .	19
3.4	Développement de la solution . . . . .	23
3.5	Développement de la condition aux limite de Neumann . . . . .	26
3.6	Détermination des premiers termes du développement . . . . .	28
3.6.1	Problème de Neumann sur la cellule de base . . . . .	28
3.6.2	Détermination de $\Pi^0$ et de $v^0$ . . . . .	32
3.6.3	Détermination de $\Pi^1$ et de $v^1$ (condition d'impédance) . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Étude de l'unicité</b>	<b>35</b>
4.1	Formulation variationnelle . . . . .	36
4.1.1	Opérateur de prolongement . . . . .	36
4.1.2	Décomposition de la forme bilinéaire . . . . .	38
4.1.3	L'opérateur de Steklov . . . . .	38
4.2	Alternative de Fredholm . . . . .	39
4.2.1	Alternative de Fredholm . . . . .	40
4.3	Théorème d'existence-unicité et stabilité. . . . .	40

4.3.1	Unicité pour le problème limite: . . . . .	40
4.3.2	Théorème de stabilité . . . . .	41
	<b>Conclusion générale</b>	<b>44</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>

# Liste des Figures

---

---

2.1	La surface à variations rapides . . . . .	12
2.2	Problème de diffraction . . . . .	13
3.1	Cellule de base . . . . .	23

# Introduction

---

L'étude de la diffraction d'ondes inspire beaucoup d'intérêt, notamment dans l'industrie. En effet, elle concerne de multiples domaines tels que les problèmes de compatibilité électromagnétique, les problèmes de la détection et de l'identification par un radar, et ceux de la diffraction par les sols rugueux, ou par la surface de la mer.

Lorsqu'on veut résoudre le problème de diffraction électromagnétique par des surfaces contenant deux échelles, l'une de l'ordre de la longueur d'onde et l'autre très petite, la discrétisation des détails à la petite échelle devient difficile. Il est alors recommandé d'ajouter les effets des rugosités à la condition d'impédance effective [3](IBC). La surface diffractée présente des variations rapides "localisées", de petite amplitude relativement à la longueur d'onde. Ces variations sont vues comme "petits détails". La "**surface rugueuse**" est le concept le plus approprié quand il s'agit des variations rapides s'étalant sur une grande partie de la surface.

La description de la rugosité et notamment la modélisation des sols rugueux, distingue deux types de surfaces : les surfaces périodiques à profil déterministe et les surfaces à profil aléatoire. Le premier type, les surfaces périodiques correspond généralement à des surfaces fabriquées. Dans le cas où la surface périodique est infinie, on peut restreindre l'étude sur une cellule de base[2]. L'étude du deuxième type, les surfaces rugueuses non périodiques est un problème beaucoup plus vaste[9]. Elle ne sera pas abordée dans ce travail.



Le problème se pose lorsque la surface est très rugueuse et comporte de nombreux détails très petits devant la longueur d'onde. L'accroissement du nombre d'inconnues rend alors difficile la résolution de ce type de problèmes par les méthodes intégrales.

Si la période de la structure est petite par rapport à la taille de la région dans laquelle le système va être étudié, on fait appel à l'analyse asymptotique afin d'obtenir un développement asymptotique de la solution en fonction du petit paramètre  $\delta$ . Or, cette démarche est préconisée pour obtenir du procédé de développement asymptotique le passage de la description microscopique à la description macroscopique du comportement du système.

Si la hauteur des rugosités est faible, le profil rugueux peut être considéré comme une couche mince. Et pour réduire la taille du problème traité, il est alors possible de traduire l'effet des oscillations par des conditions aux limites approchées[8]. Ces conditions sont obtenues à partir d'un développement asymptotique à deux échelles construit à l'aide d'une combinaison entre les techniques des développements asymptotiques raccordés et les échelles multiples.

Le problème présentement traité se rapporte au cas d'une surface comportant deux échelles de périodicité : la première caractérisant la taille de l'échantillon reproduit par périodicité, la deuxième caractérisant les oscillations rapides.

Notre but est de définir les conditions effectives qui permettent de prendre en compte des oscillations rapides. Les interactions à l'échelle des rugosités sont prises localement. Pour séparer les effets des rugosités des éventuels effets de bords et effets globaux, il suffit de considérer un échantillon de surface et de le reproduire par périodicité.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre est l'occasion pour définir et rappeler les équations de Maxwell qui régissent les phénomènes électromagnétiques.

Le deuxième chapitre est consacré à la description du modèle de résolution de l'équation de Helmholtz avec une condition aux limites de Neumann, et une condition de radiation à l'infini obtenue à partir du développement de Floquet.

Le troisième chapitre est réservé à la mise en œuvre des techniques d'homogénéisation afin de remplacer la rugosité ou les détails d'une surface par une condition aux limites équivalente.

Le quatrième chapitre traite les problèmes d'existence et d'unicité de la solution du problème de diffraction.

# Chapitre 1

## Électromagnétisme et équations de Maxwell

---

---

### Sommaire

---

1.1	Équations de Maxwell . . . . .	5
1.2	Lois de comportement dans les matériaux diélectriques . . . . .	6
1.3	Le problème de Maxwell en régime harmonique . . . . .	6
1.4	Les conditions aux limites . . . . .	7
1.5	Système de Maxwell vectoriel . . . . .	8
1.6	Écriture en dimension 2 . . . . .	9

---

Le but de ce chapitre préliminaire et introductif est de présenter brièvement le modèle physique motivant le travail mathématique de ce mémoire.

## 1.1 Équations de Maxwell

Une étude des phénomènes électromagnétiques consiste à déterminer à l'instant  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) et au point  $x \in \mathbb{R}^3$ , les quatre champs de vecteurs :

$E(x, t)$  (en  $V/m$ ),  $D(x, t)$  (en  $C/m^2$ ),  $H(x, t)$  (en  $A/m$ ) et  $B(x, t)$  (en  $T$ ) vérifiant :

- 1/ La loi de Faraday qui lie la force électromotrice à la variation de flux d'induction,
- 2/ Le théorème d'Ampère qui permet de calculer le champ magnétique engendré par un courant,
- 3/ La loi définissant la charge électrique et
- 4/ La loi de Gauss postulant l'absence de charge magnétique.

Les champs  $E$ ,  $D$ ,  $H$  et  $B$  représentent respectivement le champ et l'induction électrique, le champ et l'induction magnétique.

Les champs de vecteurs seront reliés à :

$$\left| \begin{array}{l} \rho(x, t) : \text{densité de charge électrique (coulomb/m}^3\text{)}, \\ J(x, t) : \text{densité de courant électrique (Ampères/m}^2\text{)}. \end{array} \right.$$

Les variations de ces diverses quantités sont régies par les équations de Maxwell :

$$\operatorname{rot} E(x, t) + \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} H(x, t) - \frac{\partial D(x, t)}{\partial t} = J(x, t), \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} B(x, t) = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} D(x, t) = \rho. \quad (1.4)$$

On notera que les densités  $\rho$  et  $J$  sont nécessairement reliées par la loi de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0. \quad (1.5)$$

(Prendre la divergence de (1.2), dériver (1.4) par rapport au temps et ajouter membre à membre les équations obtenues).

**Remarque 1.1** Les champs  $E, B, D$  et  $H$  constituant le champs électromagnétique ainsi que la densité de courant  $J$  sont des fonctions vectorielles définies sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.2 Lois de comportement dans les matériaux diélectriques

Le système des équations de Maxwell ne tient pas compte du milieu matériel où il y a propagation. Ce qui le rend insuffisant à la détermination du champs électromagnétique. Il convient alors d'ajouter des relations qui préciseront les propriétés spécifiques du milieu étudié. Ces relations liant les champs et les inductions sont données par des lois dites de comportement caractéristique du milieu considéré. Les lois constitutives les plus simples pour un milieu homogène isotrope sont données par les relations<sup>(1)</sup> :

$$\begin{cases} D(x, t) = \varepsilon E(x, t), \\ B(x, t) = \mu H(x, t), \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  et  $\mu$  représentent respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du milieu de propagation.

## 1.3 Le problème de Maxwell en régime harmonique

Lorsque l'onde incidente oscille en chaque point  $x$  de façon sinusoïdale en fonction du temps à une fréquence  $f$  fixée, on dit que le système est en régime harmonique. Les ondes électromagnétiques sont dites alors monochromatiques et l'on a :

$$F(x, t) = \operatorname{Re}(F(x)e^{-i\omega t}).$$

où  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation correspondant à la fréquence  $f$  de l'onde considérée,  $F$  est l'une des grandeurs physiques  $B, H, E, D, J$  et  $\rho$ .

---

<sup>(1)</sup>un milieu dans lequel ces relations sont vérifiées, avec  $\mu$  et  $\varepsilon$  constantes, appelé milieu parfait.

La dépendance en  $t$  étant sous la forme d'un terme multiplicatif et les équations étant linéaires, elle peut être supprimée par linéarité.

Du fait que les équations (1.3), (1.4) peuvent être déduites des équations (1.1), (1.2) (en appliquant l'opérateur de divergence à l'équation (1.1)), on retrouve la condition de conservation du flux (1.3).

Les équations de Maxwell deviennent alors en l'absence de charges :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}E(x) - iw\mu H(x) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{rot}H(x) - iw\mu E(x) = J & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.6)$$

Nous désignons par  $\Omega$  le domaine extérieur où sont posées les équations et par  $\Gamma$  la frontière de l'objet considéré.

## 1.4 Les conditions aux limites

Nous désignerons la normale à la surface  $\Gamma$  par le vecteur  $\mathbf{n}$  et nous considérerons désormais uniquement des surfaces supposées parfaitement conductrices. Il faut donc ajouter la condition suivante sur la frontière :

$$E \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma,$$

Ces équations ne suffisent pas à déterminer de façon unique les champs  $E$  et  $H$ . Il faut donc ajouter une condition qui va traduire la propagation de l'énergie vers l'infini :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left\{ \sqrt{\mu} H(x) \times \frac{x}{|x|} - \sqrt{\epsilon} E(x) \right\} = 0.$$

Cette condition est appelée condition de Silver-Muller.

L'ensemble de ces équations nous donne le problème de Maxwell en régime harmonique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} E(x) - i\omega\mu H(x) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{rot} H(x) + i\omega\varepsilon E(x) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ E \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left\{ \sqrt{\mu} H(x) \times \frac{x}{|x|} - \sqrt{\varepsilon} E(x) \right\} = 0. \end{array} \right.$$

## 1.5 Système de Maxwell vectoriel

En fait, il est possible d'éliminer le champ  $H$  dans l'équation pour obtenir l'équation d'Helmholtz vectorielle :

$$\Delta E + k^2 E = 0,$$

où  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$  est le nombre d'onde. On définit la longueur d'onde par  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}$ <sup>(1)</sup>. La condition de radiation de Sommerfeld peut alors être utilisée de façon équivalente à la condition de Silver-Muller pour caractériser le rayonnement de l'énergie vers l'infini. Elle traduit le fait que chaque composante de  $E$  est une onde sortante :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left\{ \partial_{|x|} E(x) - ikE(x) \right\} = 0.$$

Etant donné que le champ total  $E^{tot}$  est égal à la superposition des champs incidents  $E^{inc}$  et diffractés  $E^{diff}$ , on obtient le problème de diffraction par un conducteur parfait c'est-à-dire le problème suivant pour  $E = E^{diff} = E^{tot} - E^{inc}$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta E + k^2 E = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot E = 0 & \text{dans } \Omega, \\ E \times \mathbf{n} = -E^{inc} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left\{ \partial_{|x|} E(x) - ikE(x) \right\} = 0. \end{array} \right.$$

<sup>(1)</sup>  $c = 3 * 10^8 m.s^{-1}$  vitesse de la lumière dans le vide.

## 1.6 Ecriture en dimension 2

Pour certaines polarisations particulières du champ électromagnétique, on peut réduire le système de Maxwell tridimensionnel et vectoriel à l'étude de l'équation d'Helmholtz scalaire en dimension deux, qui devient plus simple à manipuler [5] [9].

En effet, si le champ incident est invariant par translation le long de la direction d'invariance, la structure du problème est telle que toutes les grandeurs seront également invariantes selon cette direction. Nous prenons ici la surface invariante suivant l'axe des  $z$ .

Si le champ électrique incident est polarisé de telle façon que  $E$  soit parallèle à l'axe des  $z$ , c'est-à-dire le Mode **TE** (transverse électrique), alors la condition aux limites se réduit à une condition de Dirichlet.

En posant  $u = E_z$ , le problème 2D s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{1/2} \{ \partial_{|x|} (u - u^{inc}) - ik(u - u^{inc}) \} = 0. & \end{array} \right.$$

Si au contraire le champ magnétique a une polarisation transverse à la direction de propagation, le champ  $E$  est contenu dans le plan d'incidence, c'est -à- dire le Mode **TM** (pour transverse magnétique), alors une condition aux limites de type Neumann va traduire la condition de conducteur parfait.

En posant  $u = H_z$  nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{1/2} \{ \partial_{|x|} (u - u^{inc}) - ik(u - u^{inc}) \} = 0. & \end{array} \right.$$



# Chapitre 2

## Position du problème

---

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Description du modèle</b>	<b>10</b>
<b>2.2</b>	<b>Condition de radiation</b>	<b>12</b>
2.2.1	Les harmoniques de Floquet	13
2.2.2	Condition de radiation à l'infini	14

---

Dans ce chapitre, nous rappelons les équations régissant le phénomène et nous décrivons la surface en introduisant les différentes notations que nous allons utiliser par la suite. Le problème est écrit en dimension 2 avec la condition aux limites de Neumann, celui avec la condition de Cauchy a été traité dans [6] et [9].

### 2.1 Description du modèle

Nous considérons le cas d'un obstacle parfaitement conducteur recouvert d'une couche mince conductrice et rugueuse, caractérisée par une permittivité  $\varepsilon_\delta$  et une perméabilité  $\mu_\delta$ . Nous désignons

par  $\delta$  la taille du détail que comporte la surface (à l'échelle microscopique) et par  $\Omega$  le milieu de propagation dans lequel est placé l'obstacle métallique recouvert de la fine couche. Le milieu peut être éventuellement le vide caractérisé par une permittivité électrique  $\varepsilon_0$  et une perméabilité magnétique  $\mu_0$ .

La surface est illuminée par une onde incidente harmonique quasi-périodique  $u^{inc}$ , de pulsation  $\omega > 0$ , de période  $d$  par rapport à la variable  $x$ . Lorsque cette onde rencontre l'obstacle, elle génère une onde diffractée provoquée par ce dernier. Pour éliminer les effets des bords, nous prenons un échantillon, suffisamment étendu de cette surface et nous le reproduisons par périodicité.

Notre objectif est de connaître la nature de cette onde et d'en étudier l'effet de la surface rugueuse sur elle.

Cette surface est décrite par une fonction à deux échelles :

$$y = \gamma_\delta(x) := \delta s\left(x, \frac{x}{\delta}\right) = \delta s(x, \sigma)|_{\sigma=x/\delta},$$

où  $s$  est une fonction bipériodique, de période  $d$  en  $x$ , et  $L = \frac{d}{\delta}$  en  $\sigma$  ;  $x$  et  $\sigma$  représentent respectivement la variable lente et la variable rapide traduisant le fait que la surface possède des oscillations lentes de l'ordre de la longueur d'onde en  $x$ , et des oscillations rapides par rapport à la longueur d'onde, décrite par la variable  $\sigma$ . Implicitement la fonction  $s(x, \sigma)$  est supposée être suffisamment dérivable par rapport aux deux variables  $x$  et  $\sigma$ . Pour des raisons théoriques seulement, on suppose que  $N = \frac{L}{d}$  est un entier. Enfin, on note la fonction à deux échelles :

$$x \mapsto \gamma_\delta(x)$$

est périodique de période  $d$ .

Le petit paramètre  $\delta$  caractérise à la fois l'amplitude et la vitesse des oscillations rapides de la surface. Il est petit par rapport à la longueur d'onde. On suppose que  $\delta$  est très petit devant la longueur d'onde et donc destiné à tendre vers 0.

On s'intéresse à trouver une onde  $u^\delta$  vérifiant le problème:

$$\begin{cases} \Delta u^\delta + k^2 u^\delta = 0 \text{ dans } \Omega^\delta, \\ \frac{\partial u^\delta}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma^\delta, \\ \text{(C.R.) à l'infini sur } u^\delta - u^{inc}, \end{cases}$$

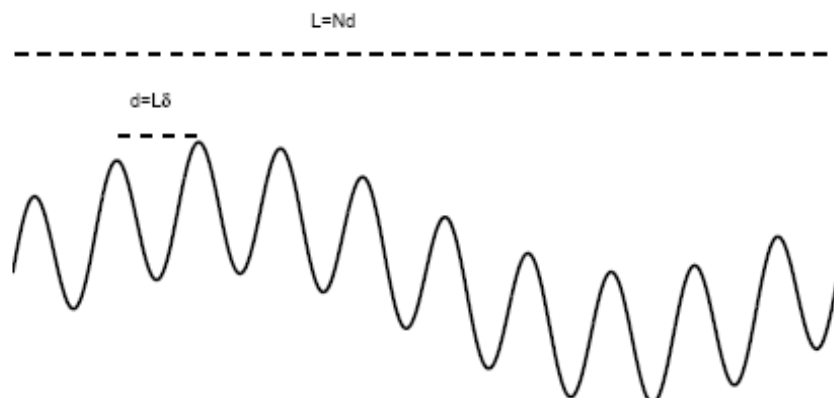


Figure 2.1: La surface à variations rapides

où

$$\Omega^\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < d, y > \gamma_\delta(x)\},$$

de frontière rugueuse

$$\Gamma^\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < d, y = \gamma_\delta(x)\}$$

## 2.2 Condition de radiation

S'il n'y a pas de contrainte par une condition aux limites appropriée, l'équation de Helmholtz admet deux solutions : l'une se propageant en s'éloignant de l'obstacle et l'autre se propageant vers lui. Pour assurer l'unicité de la solution, quelques types de condition de radiation (**C.R**) doivent être imposés tout au long de la frontière  $\Gamma$ . Cette condition (**C.R**) doit s'assurer que le champ diffracté se propage en s'éloignant de l'obstacle et, incorpore en même temps le champ incident dans la description du problème. La superposition des champs incident et diffracté mène au "**champ original**" dans la présence de l'obstacle.

A noter que l'onde quasi-périodique est défini comme suit :

**Définition 2.1** Une fonction  $x \mapsto w(x)$  est dite  $\beta$ -quasi-périodique de période  $L$  si:

$$w(x + L) = e^{i\beta L} w(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

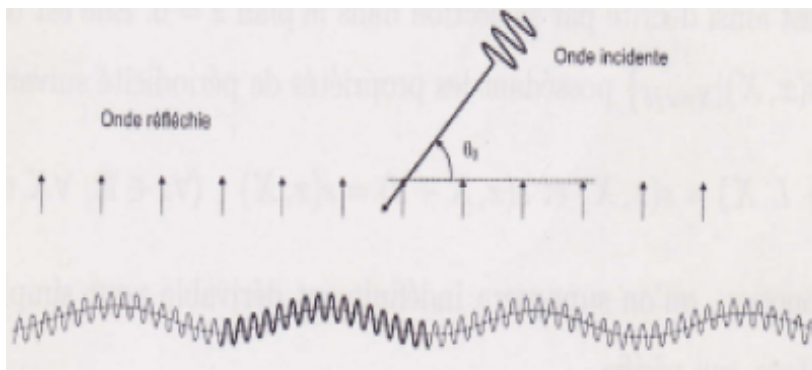


Figure 2.2: Problème de diffraction

### 2.2.1 Les harmoniques de Floquet

On veut déterminer la réponse électromagnétique de la surface rugueuse due à l'excitation par une onde plane de la forme :

$$u^{inc}(x, y) = u_0 e^{-ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)} \quad (1)$$

Cette onde plane uniforme est un cas spécial d'une excitation générale satisfaisant la condition de quasi périodicité, appelée encore la condition de Floquet [7] :

$$u^{inc}(x + d, y) = u^{inc}(x, y) e^{i\beta_m x},$$

où  $d$  est la dimension de la cellule élémentaire et  $\beta_m$  représente le changement de phase progressive d'une cellule élémentaire à la suivante.

La réponse électromagnétique à une telle excitation est exprimée comme superposition des harmoniques de Floquet [7] :

$$(u^\delta - u^{inc})(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m(y) e^{i\beta_m x},$$

où  $\beta_m = \beta + m \frac{2\pi}{L}$  et  $u_m(y) := \frac{1}{L} \int_0^L (u - u^{inc})(x, y) e^{-i\beta_m x} dx$ .

Si l'onde diffractée  $u^d = (u^\delta - u^{inc})$  vérifie l'équation de Helmholtz :

$$\Delta(u^\delta - u^{inc}) + k^2 (u - u^{inc}) = 0,$$

---

<sup>(1)</sup> $\theta_0$  : l'angle d'incidence.

on obtient :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} (\ddot{u}_m(y) + (k^2 - \beta_m^2)u_m(y)) e^{i\beta_m x} = 0$$

Les coefficients  $u_m(y)$  vérifient donc l'équation différentielle :

$$u''_m(y) + (k^2 - \beta_m^2)u_m(y) = 0$$

dont les solutions ont la forme générale :

$$u_m(y) = u_m^- e^{-iK_m y} + u_m^+ e^{iK_m y},$$

avec

$$K_m = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \beta_m^2}, & \text{si } |\beta_m| \leq k, \\ i\sqrt{\beta_m^2 - k^2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'onde diffractée  $u - u^{inc}$  apparaît donc comme la superposition d'ondes élémentaires  $u_m^\pm e^{\pm iK_m y} e^{i\beta_m x}$ .

Lorsque  $k^2 > \beta_m^2$ , les harmoniques de Floquet sont des ondes qui se propagent loin de la surface dans la direction contraire des  $y$ . Or, seule l'énergie portée par l'onde incidente peut venir de cette direction. La condition de radiation consiste alors à les éliminer. On parlera de modes propagatifs.

Lorsque  $k^2 < \beta_m^2$ , la racine carrée est prise pour assurer que les harmoniques se délabrent dans une direction loin de la surface, donc ils ne peuvent pas apparaître dans la décomposition de la solution. On parlera de modes évanescents.

### 2.2.2 Condition de radiation à l'infini

Nous allons maintenant exprimer la condition de radiation sortante dans le cas des surfaces périodiques. Pour  $y > H$ , on exprime le fait qu'il ne peut y avoir d'ondes diffractées rentrantes par la condition de radiation sortante : on ne garde donc que les ondes s'éloignant de la surface, soit :

$$u_m^- = 0$$

$$u_m(y) = u_m^+ e^{iK_m y} \text{ pour tout } n \quad -\infty < n < +\infty$$

Finalement les solutions prennent la forme :

$$(u^\delta - u^{inc})(x, y) = \sum_{m \in N_p} u_m e^{i\alpha_m y} e^{i\beta_m x} + \sum_{m \in N_e} u_m e^{-\alpha_m y} e^{i\beta_m x}, \quad \alpha_m = \sqrt{|k^2 - \beta_m^2|}$$

où  $N_p$  est l'ensemble des modes propagatifs et  $N_e$  est l'ensemble des modes évanescents.

Posons :

$$w(x, y) = e^{-i\beta x} (u(x, y) - u^{inc}(x, y)).$$

On peut tronquer le domaine où est posé le problème, en considérant le demi plan :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > H\},$$

où  $H$  est fixé tel que :

$$H > \delta\tau_{\min} \text{ et } \tau_{\min} := \inf \{\tau \in \mathbb{R} : \tau > s(x, \sigma), 0 < \sigma < L, 0 < x < d\}.$$

La condition de radiation à l'infini d'onde sortante s'écrit alors :

$$\partial_y(u - u^{inc})(\cdot, H) + S(u - u^{inc})(\cdot, H) = 0,$$

où  $S$  est l'opérateur de Steklov défini par :

$$Sw(x) := - \sum_{-\infty}^{+\infty} iK_m w_m e^{iK_m H} e^{i\beta_m x}, \quad w_m := \frac{1}{L} \int_0^L w(x) e^{-i\beta_m x} dx.$$

# Chapitre 3

## Développement asymptotique à deux échelles

---

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Développement asymptotique raccordés . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthodes à échelles multiples . . . . .</b>	<b>18</b>
3.2.1	Technique des échelles multiples de la théorie de l'homogénéisation . . . . .	18
<b>3.3</b>	<b>Développement asymptotique à deux échelles . . . . .</b>	<b>19</b>
3.3.1	La méthode de Vasi'elva . . . . .	19
<b>3.4</b>	<b>Développement de la solution . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>3.5</b>	<b>Développement de la condition aux limite de Neumann . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>3.6</b>	<b>Détermination des premiers termes du développement . . . . .</b>	<b>28</b>
3.6.1	Problème de Neumann sur la cellule de base . . . . .	28
3.6.2	Détermination de $\Pi^0$ et de $v^0$ . . . . .	32
3.6.3	Détermination de $\Pi^1$ et de $v^1$ (condition d'impédance) . . . . .	33

---

La technique d'homogénéisation, que nous allons présenter tout au long de ce travail utilise des "idées" de la méthode des échelles multiples. Cette méthode est utilisée pour traduire l'effet d'un petit paramètre qui est localement négligeable mais qui a un effet cumulatif sur de longues périodes de temps ou d'espace et devient alors à cette grande échelle non négligeable (exemple de pendule)[11].

### 3.1 Développement asymptotique raccordés

Les variations rapides de la surface (dépendance de la variable  $x/\delta$ ) vont engendrer un comportement de type couche limite au voisinage de la surface [1]. La technique des développements asymptotiques raccordés est utilisée pour décrire ce comportement. Il s'agit de traduire le fait que la forme de la solution imposée par les conditions aux limites s'écrit différemment selon que l'on se trouve dans une zone proche ou éloignée de ces dernières. On appelle **couche limite** la région de transition entre les deux solutions.

-En dehors de la couche limite la solution  $u^\delta$  a une forme ne dépendant que des variables lentes  $x$  et  $y$  :

$$u^\delta(x, y) = u^0(x, y) + \delta u^1(x, y) + \delta^2 u^2(x, y)$$

-A l'intérieur de la couche limite la solution  $u^\delta$  dépend aussi des variables rapides  $\sigma$  et  $\tau$  :

$$u^\delta(x, y) = w^0(x, \sigma, \tau) + \delta w^1(x, \sigma, \tau) + \delta^2 w^2(x, \sigma, \tau)$$

La transition se fait dans une région où les développements sont simultanément valables. D'où la notion de raccordement[11].

La difficulté de ce type d'approche vient du fait que les conditions de raccordement deviennent difficiles à écrire lorsque l'on passe à des développements asymptotiques d'ordre plus élevé [9].



## 3.2 Méthodes à échelles multiples

### 3.2.1 Technique des échelles multiples de la théorie de l'homogénéisation

Nous cherchons des solutions sous la forme d'un développement de la forme :

$$u^\delta(x) = u^0(z, y) + \delta u^1(z, y) + \delta^2 u^2(z, y) + \dots, \quad (3.1)$$

où les fonctions  $u^i(z, y)$  sont périodiques par rapport à  $y$  et où l'on a introduit les variables auxiliaires indépendantes :  $z = x$  et  $y = \frac{x}{\delta}$  d'où :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.2)$$

Pour plus de commodité, on remplace  $z$  par  $x$ , on écrit alors :

$$\begin{cases} u^\delta = u^0(x, y) + \delta u^1(x, y) + \delta^2 u^2(x, y) + \dots, \\ y = \frac{x}{\delta}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Comme dans le cas des échelles multiples, il convient de considérer (3.1) et (3.3) comme un développement en fonctions "localement périodique" au sens suivant : chaque  $u^i(x, \frac{x}{\delta})$  prend dans une période des valeurs très proches de celles prises dans une période contiguë, mais éventuellement très différentes de celles prises dans une période éloignée. En effet,  $z = x$  représente la variable lente et  $y = \frac{x}{\delta}$  définit la variable rapide.

Dans de nombreux cas, le calcul montre que le premier terme du développement est indépendant de  $y$  [11].

Pour la clarté du travail, nous chercherons directement des développement avec  $u^0$  indépendante de  $y$ .

La structure de  $u^\delta$  est alors une fonction bipériodique "régulière" de  $x$  à laquelle on ajoute un terme petit (puisque portant le facteur  $\delta$ ) d'une fonction oscillante (puisque fonction de  $\frac{x}{\delta}$ ).

Cette méthode est utilisée généralement en introduisant un problème aux limites plus simple équivalent dont la solution donne le comportement de la solution exacte, hors couche limite, via

l'introduction d'une condition aux limites effectives [3]. Abboud et Ammari [1] ont appliqué cette méthode au cas d'un réseau d'inclusions métalliques dans une couche mince de diélectrique déposées sur un objet fermé.

Nous écrivons l'application de cette méthode au cas de la diffraction par les surfaces périodiques de petite période en dimension 2 pour le problème de Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u^\delta + k^2 u^\delta = 0 \text{ dans } \Omega^\delta, \\ \frac{\partial u^\delta}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma^\delta, \\ \text{(C.R.) à l'infini sur } u^\delta - u^{inc}, \end{array} \right.$$

La solution homogénéisée est

$$u^0(x, y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} u^\delta(x, y)$$

Cette solution vérifie le problème sans rugosités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u^0 + k^2 u^0 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \text{(C.R.) à l'infini sur } (u^0 - u^{inc}), \end{array} \right.$$

L'introduction des correcteurs consiste à rajouter les termes qui permettent de corriger d'un ordre l'erreur sur la condition à la limite ou sur l'équation des ondes. Ainsi, on construit étape par étape le développement asymptotique en introduisant le correcteur adapté à chaque ordre.

### 3.3 Développement asymptotique à deux échelles

Dans ce paragraphe nous adaptons les techniques développées dans [12] et utilisées dans [6] et [9] dans le cas d'une onde  $H$ -polarisée au cas d'une condition aux limites de type Neumann (onde  $E$ -polarisée).

#### 3.3.1 La méthode de Vasi'elva

Cette méthode est bien adaptée, non seulement pour les équation aux dérivées partielles elliptiques mais aussi pour celles hyperboliques et paraboliques. Elle consiste à supposer une forme

du développement qui sépare les variables lentes et les variables rapides du problème considéré, c'est-à-dire :

$$u^\delta(x, y) = v(x, y) + \Pi(\sigma, \tau) \left| \begin{array}{l} \sigma = \frac{x}{\delta} \\ \tau = \frac{y}{\delta} \end{array} \right.$$

L'avantage principale de cette méthode est sa simplicité : les fonctions limites sont définies comme solutions des équations différentielles ordinaires (**E.D.O**) où la distance dilatée le long de la normale à la frontière joue le rôle de la variable indépendante.

Si la frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  est une courbe "lisse", alors la normale à la frontière existe à tous les points de la frontière et les fonctions limites sont construites comme des solutions de quelques équations différentielles ordinaires avec des dérivées prises tout au long de ces normales.

Dans le cas où la frontière du domaine n'est plus lisse et contient des rugosités, la structure des solutions asymptotique devient plus compliquée à proximité de ces points de rugosités.

Pour illustrer cette méthode, nous reprenons l'exemple simple d'un problème de perturbation singulière [12].

Considérons le problème linéaire donné par

$$\begin{cases} A_\varepsilon : \varepsilon \frac{dx}{dt} = -ax + f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ x(0, \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

où  $a > 0$  est une constante et  $f(t)$  une fonction infiniment dérivable et  $\varepsilon > 0$  un paramètre destiné à tendre vers 0 .

Le problème  $A_0$  correspondant se réduit à l'équation algébrique:

$$0 = -ax + f(t),$$

qui donne

$$x = \frac{f(t)}{a} = x(t).$$

Essayons de construire un développement asymptotique de la solution du problème  $A_\varepsilon$  sous la forme d'une série en  $\varepsilon$  :

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^k x_k(t) + \dots \tag{3.4}$$

Substituons cette série dans l'équation  $A_\varepsilon$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{d}{dt} (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^{k-1} x_{k-1}(t) + \dots), \\ & = -a (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^k x_k(t) + \dots) + f(t). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de même ordre en  $\varepsilon$ , on obtient :

$$x_0 = \frac{f(t)}{a}, \tag{3.5}$$

$$x_1 = -\frac{1}{a} \frac{dx_0}{dt} = -\frac{f'(t)}{a^2}, \tag{3.6}$$

.....

$$x_k = -\frac{1}{a} \frac{dx_{k-1}}{dt} = \frac{(-1)^k f^{(k)}(t)}{a^{k+1}}, k = 2, 3, \dots \tag{3.7}$$

Notons que le terme  $x_0(t)$  de la série (3.4) coïncide avec la solution  $x(t)$  du problème  $A_0$ .

La série (3.4) satisfait formellement l'équation différentielle de  $A_\varepsilon$ , mais, en général, elle ne satisfait pas la condition initiale puisque nous définissons les termes de la série sans utiliser la condition initiale :

$$x(0, \varepsilon) = x^0.$$

Cependant, la série (3.4) ne peut pas être exposée comme le développement asymptotique de la solution du problème  $A_\varepsilon$ , au moins dans certains voisinages du point initial  $t = 0$ .

La série (3.4) serait-elle un développement asymptotique pour  $x(t, \varepsilon)$  en dehors du voisinage du point initial ?

Pour répondre à cette question, considérons la solution exacte du problème  $A_\varepsilon$  :

$$x(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{-a}{\varepsilon}(t-s)\right) f(s) ds.$$

En intégrant plusieurs fois par parties, on trouve :

$$x(t, \varepsilon) = \left[ \frac{f(t)}{a} - \varepsilon \frac{f'(t)}{a^2} \right],$$

$$+ \left[ -\frac{f(0)}{a} + \varepsilon \frac{f'(0)}{a^2} \right] \exp\left(-a\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

$$+ \frac{\varepsilon}{a^2} \int_0^t f''(s) \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) ds,$$

notons que :

$$\frac{\varepsilon}{a^2} \int_0^t f''(s) \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) ds = o(\varepsilon^2),$$

car :

$$\int_0^t \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) ds = \frac{\varepsilon}{a} \left(1 - \exp\left(-a\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) = o(\varepsilon).$$

Cependant, en tenant compte des formules (3.5), (3.6), (3.7), et en introduisant la nouvelle variable :

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

nous pouvons écrire :

$$x(t, \varepsilon) = [x_0(t) + \varepsilon x_1(t)],$$

$$+ [x_0(0) \exp(-at) - \varepsilon x_1(0) \exp(-a\tau)] + o(\varepsilon^2),$$

Introduisant maintenant la notation :

$$\Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau),$$

pour les termes dépendant de  $\tau$ .

Evidemment :

$$x_0(0) + \Pi_0(0) = 0,$$

et

$$x_1(0) + \Pi_1(0) = 0.$$

En continuant à intégrer par parties, et en tenant compte des expressions (3.5), (3.6), ... (3.7), nous obtenons finalement :

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (x_k(t) + \Pi_k(\tau)) + o(\varepsilon^{n+1}) \quad \text{pour } n \text{ arbitraire.}$$

### 3.4 Développement de la solution

La technique utilisée ici repose sur la méthode de Vasil'eva et sur celle des correcteurs.

Nous allons chercher la solution (Poirier) sous la forme suivante :

$$u^\delta(x, y) = v^\delta(x, y) + \Pi^\delta(x, \sigma, \tau) \left| \begin{array}{l} \sigma = \frac{x}{\delta} \\ \tau = \frac{y}{\delta} \end{array} \right., \quad (3.8)$$

où  $\Pi^\delta$  correcteur de la couche limite vérifie la condition aux limites de correcteur

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Pi^\delta(x, \sigma, \tau) = 0.$$

On suppose que  $\sigma \mapsto \Pi^\delta(x, \sigma, \tau)$  est périodique de période  $L$  et que  $x \mapsto \Pi^\delta(x, \sigma, \tau)$  est quasi-périodique de période  $d$ .

La variable  $x$  dans  $\Pi^\delta$  joue le rôle de paramètre par rapport aux variables rapides  $(\sigma, \tau)$  dans le problème local, définies dans la cellule de base  $D$  (dépendant de  $x$ ) :

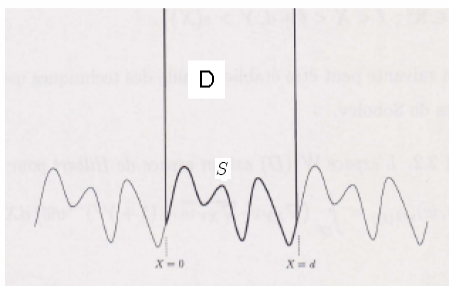


Figure 3.1: Cellule de base

$$D = \{(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2, 0 < \sigma < L; \tau > s(x, \sigma)\},$$

de frontière  $S$

$$S = \{(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2, 0 < \sigma < L; \tau = s(x, \sigma)\}.$$

La partie  $v^\delta$  décrit la réponse générale du champ incident et  $\Pi^\delta$  se trouve à proximité de la surface et possède des variations suffisamment rapides pour permettre à la solution de satisfaire les conditions aux limites.

Nous écrivons le développement asymptotique en  $\delta$

$$u^\delta(x, y) = (v^0(x, y) + \Pi^0(x, \sigma, \tau)) \left| \begin{array}{l} \sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta \end{array} \right. ,$$

$$+ \delta (v^1(x, y) + \Pi^1(x, \sigma, \tau)) \left| \begin{array}{l} \sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta \end{array} \right. ,$$

$$+ \dots, ,$$

et nous l'injectons dans l'équation des ondes

$$\Delta u^\delta + k^2 u^\delta = 0.$$

En annulant les coefficients des puissances de  $\delta$ , et les termes impliquant des termes à indices négatifs on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^{-2}(\Delta_{\sigma,\tau}\Pi^0) + \delta^{-1}(\Delta_{\sigma,\tau}\Pi^1 + 2\partial_x\partial_\sigma\Pi^0) + \\ \sum_{n \geq 2} \delta^{n-2}(\Delta_{\sigma,\tau}\Pi^n + 2\partial_x\partial_\sigma\Pi^{n-1} + \partial_x^2\Pi^{n-2} + k^2\Pi^{n-2} + \Delta v^{n-2} + k^2v^{n-2}) = 0. \end{array} \right.$$

L'intérêt de ce type de développement vient de son aptitude à décrire de façon aisée la condition aux limites :

$$\partial_n u^\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\delta.$$

Précisons que :

$$\Delta \Pi^\delta = (\delta^{-2}\Delta_{\sigma,\tau} + 2\delta^{-1}\partial_x\partial_\sigma + \partial_x^2) \Pi^\delta,$$

puisque :

$$\left. \partial_x^2 \Pi^\delta(x, \sigma, \tau) \right|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta}} = \left( \partial_x^2 \Pi^\delta + 2\delta^{-1} \partial_x \partial_\sigma \Pi^\delta + \delta^{-2} \partial_\sigma^2 \Pi^\delta \right) (x, \sigma, \tau) \Big|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta}},$$

et

$$\left. \partial_y^2 \Pi^\delta(x, \sigma, \tau) \right|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta}} = \delta^{-2} \partial_\tau^2 \Pi^\delta(x, \sigma, \tau) \Big|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta}}.$$

On tire alors :

$$\Delta_{\sigma, \tau} \Pi^n + 2\partial_x \partial_\sigma \Pi^{n-1} + \partial_x^2 \Pi^{n-2} + k^2 \Pi^{n-2} + \Delta v^{n-2} + k^2 v^{n-2} = 0.$$

En faisant tendre  $\tau$  vers  $\infty$  on obtient :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \partial_{x, \sigma, \tau}^\alpha \Pi^\delta(x, \sigma, \tau) = 0,$$

ce qui permet de découpler l'équation sur  $v^n$  de celle sur  $\Pi^n, \Pi^{n-1}$  et  $\Pi^{n-2}$  :

$$\begin{cases} \Delta_{\sigma, \tau} \Pi^0 = 0 \text{ dans } D, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Pi^0(x, \sigma, \tau) = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \Delta_{\sigma, \tau} \Pi^1 + 2\partial_x \partial_\sigma \Pi^0 = 0 \text{ dans } D, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Pi^1(x, \sigma, \tau) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} \Delta_{\sigma, \tau} \Pi^n + 2\partial_x \partial_\sigma \Pi^{n-1} + \partial_x^2 \Pi^{n-2} + k^2 \Pi^{n-2} = 0 \text{ dans } D, \quad n \geq 2, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Pi^n(x, \sigma, \tau) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \Delta v^{n-2} + k^2 v^{n-2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \text{CR sur } v^n \quad n \geq 2, \\ \text{et CR sur } v^0 - v^{inc} \text{ quand } n = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

avec

$$\Omega = \Omega^{\delta=0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < d, y > 0\},$$

définit la surface plane, sans rugosités.



### 3.5 Développement de la condition aux limite de Neumann

La frontière  $\Gamma^\delta$  du domaine  $\Omega^\delta$ , étant définie par :

$$\Gamma^\delta = \left\{ (x, y) \in R^2, 0 \leq x \leq d, y = \delta.s \left( x, \frac{x}{\delta} \right) \right\},$$

est donnée par la courbe:

$$y = \gamma_\delta(x) = \delta.s \left( x, \frac{x}{\delta} \right) = \delta.s(x, \sigma) \Big|_{\sigma=\frac{x}{\delta}}.$$

La direction de la normale à  $\Gamma^\delta$  est donnée par le vecteur normal  $\eta = \left( \delta \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \sigma}, -1 \right)$ .

La condition de Neumann est donnée par :

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma^\delta} = 0,$$

ce qui est équivalent à écrire :

$$\left( \delta \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \left( x, \frac{x}{\delta} \right) + \frac{\partial s}{\partial \sigma} \left( x, \frac{x}{\delta} \right) \right) \partial_x u^\delta \left( x, \delta.s \left( x, \frac{x}{\delta} \right) \right),$$

$$-\partial_y u^\delta \left( x, \delta.s \left( x, \frac{x}{\delta} \right) \right) = 0.$$

En injectant dans cette condition aux limites le développement (3.8) de la solution  $u^\delta$ , et en tenant compte du fait que :

$$\partial_x \Pi^\delta(x, \sigma, \tau) \Big|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta}} = (\partial_x \Pi^\delta + \delta^{-1} \partial_\sigma \Pi^\delta)(x, \sigma, \tau) \Big|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta}},$$

$$\partial_y \Pi^\delta(x, \sigma, \tau) \Big|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta}} = \delta^{-1} \partial_\tau \Pi^\delta(x, \sigma, \tau) \Big|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta}}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
 & \left( \delta \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \sigma} \right) \left( \sum_{n \geq 0} \delta^n (\partial_x v^n + \partial_x \Pi^n + \delta^{-1} \partial_\sigma \Pi^n) \right) \Bigg|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta = s(x, \sigma)}} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \delta^n (\partial_y v^n + \delta^{-1} \partial_\tau \Pi^n)(x, \sigma, \tau) \Bigg|_{\substack{\sigma = x/\delta \\ \tau = y/\delta = s(x, \sigma)}} .
 \end{aligned}$$

Pour calculer  $\partial_x v^n$  et  $\partial_y v^n$  en  $(x, y = \delta.s(x, \sigma))$ , nous écrivons le développement de Taylor par rapport à  $y$  au voisinage de  $(x, 0)$ .

$$\partial_x v^n(x, \delta s(x, x/\delta)) = \partial_x v^n(x, 0) + \sum_{k=1}^{k=M} \delta^k \frac{(s(x, x/\delta))^k}{k!} \partial_y^k \partial_x v^n(x, 0) + \mathcal{O}(\delta^{M+1}),$$

$$\partial_y v^n(x, \delta s(x, x/\delta)) = \partial_y v^n(x, 0) + \sum_{k=1}^{k=M} \delta^k \frac{(s(x, x/\delta))^k}{k!} \partial_y^{k+1} v^n(x, 0) + \mathcal{O}(\delta^{M+1}).$$

En injectant dans la condition aux de Neumann, et en identifiant les coefficients de même puissance en  $\delta$ , on obtient les conditions aux limites vérifiées pour :

$$0 \leq x \leq d, \quad y = 0; \tag{3.13}$$

$$0 \leq \sigma \leq L, \tau = s(x, \sigma),$$

$$\left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_\sigma \Pi^0 - \partial_\tau \Pi^0 \right) = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} \partial_\sigma \Pi^0 + \frac{\partial s}{\partial \sigma} (\partial_x v^0 + \partial_x \Pi^0) - \partial_y v^0 + \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_\sigma \Pi^1 - \partial_\tau \Pi^1 \right) = 0, \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial s}{\partial x} (\partial_\sigma \Pi^1 + \partial_x v^0 + \partial_x \Pi^0) + \frac{\partial s}{\partial \sigma} (\partial_x v^1 + s \partial_y \partial_x v^0 + \partial_x \Pi^1) \\
 & - s \partial_y^2 v^0 - \partial_y v^1 + \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_\sigma \Pi^2 - \partial_\tau \Pi^2 \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial s}{\partial x} (\partial_\sigma \Pi^{n+2} + \partial_x v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{s^k}{k!} \partial_y^k \partial_x v^{n+1-k} + \partial_x \Pi^{n+1}) \\
& + \frac{\partial s}{\partial \sigma} (\partial_x v^{n+2} + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{s^k}{k!} \partial_y^k \partial_x v^{n+2-k} + \partial_x \Pi^{n+2}) \\
& + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{s^k}{k!} \partial_y^{k+1} v^{n+2-k} - \partial_y v^2 + \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_\sigma \Pi^{n+3} - \partial_\tau \Pi^{n+3} \right) = 0, \quad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

On fait remarquer que le vecteur  $\left( \frac{\partial s}{\partial \sigma}(x, \sigma), -1 \right)$  est un vecteur parallèle à la normale à la courbe

$$\sigma \longmapsto s(x, \sigma),$$

définissant le bord  $S$ .

Ces conditions aux limites couplent les inconnues  $v^n$  et  $\Pi^n$ .

## 3.6 Détermination des premiers termes du développement

### 3.6.1 Problème de Neumann sur la cellule de base

Nous utilisons le théorème suivant pour expliciter le calcul de chacun des termes du développement asymptotique.

Nous rappelons que le domaine où est posée l'équation aux dérivées partielles du problème en variables rapides est la cellule de base définie par

$$D = \{(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \sigma \leq L, y \geq s(x, \sigma)\},$$

de frontière

$$S = \{(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \sigma \leq L, y = s(x, \sigma)\}.$$

#### Théorème d'existence-unicité

Nous énonçons tout d'abord ces deux lemmes préliminaires qui vont être utilisés dans la preuve du théorème 3.3

**Lemme 3.1** [9] Inégalité de Hardy : Soit  $h_{\min} \geq 0$ , pour toute fonction  $w \in D([h_{\min}, +\infty[)$ , on a :

$$\int_{h_{\min}}^{+\infty} \frac{|w(\tau)|^2}{1+\tau^2} d\tau \leq 4 \int_{h_{\min}}^{+\infty} |w'(\tau)|^2 d\tau$$

**Lemme 3.2** [9] Soit

$$s(\sigma) \langle h_{\min}, \forall \sigma \in [0, L]$$

Alors : il existe une constante  $C$  indépendante de  $v \in W_{per}^1(D)$ , vérifiant :

$$\text{supp}(v) \subset \{(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2; \tau \geq h_{\min}\}$$

telle que :

$$\|v\|_{W_{per}^1(D)} \leq C \cdot |v|_{1,D}$$

**Théorème 3.3** Soit  $F \in C^\infty(D)$  une fonction périodique de période  $L$  par rapport à  $\sigma$  et vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta^{m-1} F = 0, \\ |F(\sigma, \tau)| \leq C \cdot e^{-\gamma\tau}, \end{cases}$$

et soit  $G \in C^\infty(\mathbb{R})$  une fonction périodique de période  $L$ .

-On suppose que  $F$  et  $G$  satisfont la condition de compatibilité :

$$\int_D F d\sigma d\tau = \int_0^L G(\sigma) d\sigma.$$

Alors le problème aux limites de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \Delta \Pi = F, \\ \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \cdot \partial_\sigma \Pi - \partial_\tau \Pi \right) (\sigma, s(\sigma)) = G(\sigma), \end{cases}$$

admet une solution unique (à une constante près)  $\Pi^\infty$ , satisfaisant :

$$|\Pi(\sigma, \tau) - \Pi^\infty| \leq C \cdot e^{-\gamma\tau},$$

où  $C$  et  $\gamma$  sont des constantes positives indépendantes de  $\sigma$  et  $\tau$ .

**Preuve.** La démonstration va se faire en plusieurs étapes. Nous allons d'abord établir le cadre variationnel qui permettra de montrer l'existence d'une solution dans un espace de Sobolev avec poids. A partir des résultats de régularité elliptique, nous en déduisons que  $\Pi \in C^\infty(D)$ , puis, en utilisant les hypothèses sur le second membre  $F$ , nous montrons à l'aide du développement en série de Fourier et d'estimations elliptique à l'intérieur, que  $\Pi$  admet le bon comportement lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ . Le domaine  $D$  où est définie la variable rapide n'est pas borné dans la direction de la variable  $\tau$ . Le problème n'admet donc pas de formulation variationnelle conduisant à une forme coercive dans les espaces de Sobolev usuels (ici  $H^1(D)$ ). Pour avoir le bon cadre variationnel qui assure l'existence d'une solution, il suffit de remarquer que si  $\Pi$  est borné à l'infini, il appartient à l'espace avec poids  $W_{per}^1(D)$  défini par:

$$W_{per}^1(D) = \left\{ v \in L_{loc}^2(D), \sigma \longrightarrow v(\sigma, \tau) \text{ périodique, } \frac{v}{\sqrt{1+\tau^2}} \in L^2(D), \nabla v \in (L^2(D))^2 \right\}.$$

muni de la norme canonique:

$$\|u\|_{W_{per}^1(D)} = \left( |lu|_{0,D}^2 + |\nabla u|_{0,D}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$l(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$$

et où l'on a considéré l'espace  $L_{loc}^2(D)$  défini par :

$$L_{loc}^2(D) = \{v \in D'(D) \text{ tel que } \varphi v \in L^2(D), \forall \varphi \in D'(R^2)\}.$$

La notation  $|\cdot|_{j,D}$  indique la semi-norme usuelle :

$$|v|_{j,D}^2 = \sum_{|\alpha|=j} \int_D |\partial^\alpha v|^2 dD.$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés de coercivité de la semi-norme  $|u|_{1,D} = |\nabla u|_{0,D}$ . ■

Les estimations de coercivité vont être obtenues à l'aide d'un argument de compacité donné par le lemme de Peetre Tartar.

**Lemme 3.4** [9]Peetre Tartar Soit  $E$  un espace de Banach.  $F_1$  et  $F_2$  deux sous-espaces normés. Si  $A_1, A_2$  désignent deux opérateurs linéaires:

$$A_1 : E \longrightarrow F_1 \text{ et } A_2 : E \longrightarrow F_2,$$

vérifiant:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 \text{ est un opérateur compact.} \\ \exists C : \|v\|_E \leq \{ \|A_1 v\|_{F_1} + \|A_2 v\|_{F_2} \}; \forall v \in E. \end{array} \right.$$

Alors : la semi-norme  $\|A_1(\cdot)\|_{F_1}$  est équivalente à la norme quotient sur  $E/\text{Ker}(A_1)$ , i.e.

$$\exists C : \inf_{p \in \text{Ker}(A_1)} \|v + p\|_E \leq C \cdot \|A_1(v)\|_{F_1}; \forall v \in E$$

**Proposition 3.5** La norme  $|v|_{1,D}$  est une équivalente à celle induite par  $W_{per}^1(D)$ .

**Preuve.** Clairement il s'agit de démontrer qu'il existe une constante  $c$  telle que

$$\|v\|_{W_{per}^1(D)} \leq c |v|_{1,D} \quad \forall v \in W_{per}^1(D)$$

■

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème d'existence-unicité de la solution sur l'espace avec poids.

**Théorème 3.6** Soit  $F \in (W_{per}^1(D))'$  et  $G \in H^{1/2}(S)$ ; alors le problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_{per}^1(D) \\ \Delta u = F \text{ dans } D \\ \partial_n u|_S = G \end{array} \right. \quad (3.18)$$

admet une solution et une seule.

**Preuve.** Le problème (3.18) admet la formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in W_{per}^1(D) \text{ tel que } \forall v \in W_{per}^1(D) \\ a(u, v) = L(v) \end{array} \right.$$

■

### 3.6.2 Détermination de $\Pi^0$ et de $v^0$

#### Détermination de $\Pi^0$

On sait d'après les équations qui précèdent, que pour tout  $x$  dans l'intervalle  $]0, d[$ ,  $\Pi^0(x, \cdot, \cdot)$  est solution du problème aux limites de Neumann suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\sigma, \tau} \Pi^0 = 0 \text{ dans } D, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Pi^0(x, \cdot, \tau) = 0, \\ \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_{\sigma} \Pi^0 - \partial_{\tau} \Pi^0 \right) = 0 \text{ sur } S. \end{array} \right.$$

La solution du problème est  $\Pi^0 = 0$ .

#### Détermination de $v^0$

L'équation liant  $\Pi^0$  et  $\Pi^1$  donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\sigma, \tau} \Pi^1 = 0 \text{ dans } D \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Pi^1(x, \sigma, \tau) = 0 \end{array} \right. ,$$

d'où l'on déduit par intégration et d'après la condition de compatibilité :

$$0 = \int_D \Delta_{\sigma, \tau} \Pi^1 d\sigma d\tau = \int_S \frac{\partial \Pi^1}{\partial n_S} dS = \int_0^L \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_{\sigma} \Pi^1 - \partial_{\tau} \Pi^1 \right) (x, \sigma, s(x, \sigma)) d\sigma. \quad (3.19)$$

La condition aux limites liant  $\Pi^0$ ,  $\Pi^1$  et  $v^0$  permet d'écrire

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_x v^0 - \partial_y v^0 + \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_{\sigma} \Pi^1 - \partial_{\tau} \Pi^1 \right) = 0, \quad (3.20)$$

et par conséquent en intégrant sur  $]0, L[$  et en tenant compte de la condition de compatibilité sur  $\Pi^1$  il vient :

$$\int_0^L \left[ \frac{\partial s}{\partial \sigma} (x, \sigma) \partial_x v^0(x, 0) - \partial_y v^0(x, 0) \right] d\sigma = 0.$$

L'hypothèse de périodicité de la fonction  $\sigma \mapsto s(x, \sigma)$  donne alors :

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial s}{\partial \sigma} (x, \sigma) \partial_x v^0(x, 0) d\sigma &= \partial_x v^0(x, 0) \int_0^L \frac{\partial s}{\partial \sigma} (x, \sigma) d\sigma \\ &= \partial_x v^0(x, 0) [s(x, \sigma)]_0^L = 0, \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\partial_y v^0 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

En utilisant l'équation (3.12) on voit donc que  $v^0$  est solution du problème de Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v^0 + k^2 v^0 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_y v^0 = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \text{CR sur } v^0 - v^{inc}. \end{array} \right. .$$

Par conséquent, la rugosité de la surface n'est pas "vue" à l'ordre le plus faible.

### 3.6.3 Détermination de $\Pi^1$ et de $v^1$ (condition d'impédance)

**Détermination de  $\Pi^1$ .**

La condition aux limites montre que pour tout  $x$  dans  $]0, d[$ ;  $\Pi^1(x, \cdot, \cdot)$  est solution du problème de Neumann en variables rapides suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\sigma, \tau} \Pi^1(x, \cdot, \cdot) = 0 \text{ dans } D, \\ \frac{\partial s}{\partial \sigma}(x, \cdot) \partial_\sigma \Pi^1(x, \cdot, \cdot) - \partial_\tau \Pi^1(x, \cdot, \cdot) = \\ - \frac{\partial s}{\partial \sigma}(x, \cdot) \partial_x v^0(x, 0) + \partial_y v^0(x, 0) = - \frac{\partial s}{\partial \sigma}(x, \cdot) \partial_x v^0(x, 0) \text{ sur } S, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Pi^1(x, \cdot, \tau) = 0. \end{array} \right.$$

La condition de compatibilité sur  $\Pi^1$  :

$$0 = \int_D \Delta_{\sigma, \tau} \Pi^1 d\sigma d\tau = \int_S \frac{\partial \Pi^1}{\partial n_S} dS$$



est vérifiée.

En effet

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial \Pi^1}{\partial n_S} dS &= \int_0^L \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_\sigma \Pi^1 - \partial_\tau \Pi^1 \right) (x, \sigma, s(x, \sigma)) d\sigma \\ &= - \int_0^L \left[ \frac{\partial s}{\partial \sigma} (s, \sigma) \partial_x v^0(x, 0) - \partial_y v^0(x, 0) \right] d\sigma \\ &= -L \partial_y v^0(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

On cherche la solution  $\Pi^1(x, \cdot, \cdot)$  sous la forme :

$$\Pi^1(x, \sigma, \tau) = A_{1,0}^{1,0}(x, \sigma, \tau) \partial_x v^0(x, 0).$$

$A_{1,0}^{1,0}(x, \sigma, \tau)$  est alors solution du problème de Neumann :

$$\begin{cases} \Delta_{\sigma, \tau} A_{1,0}^{1,0}(x, \cdot, \cdot) = 0 \text{ dans } D, \\ \frac{\partial s}{\partial \sigma}(x, \cdot) \partial_\sigma A_{1,0}^{1,0}(x, \cdot, \cdot) - \partial_\tau A_{1,0}^{1,0}(x, \cdot, \cdot) = -\frac{\partial s}{\partial \sigma}(x, \cdot) \text{ sur } S, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} A_{1,0}^{1,0}(x, \cdot, \tau) = 0, \end{cases}$$

qui admet une unique solution  $A_{1,0}^{1,0}(x, \cdot, \cdot)$  dans l'espace avec poids :

$$W_{per}^1(D) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{D}'(D); \frac{\varphi}{\sqrt{1+\tau^2}} \in L^2(D), \\ \partial_\sigma \varphi, \partial_\tau \varphi \in L^2(D) \text{ et } \varphi|_{\sigma=0} = \varphi|_{\sigma=L} \end{array} \right\}.$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{W_{per}^1(D)} = \left( \left| \frac{u}{\sqrt{1+\tau^2}} \right|_{0,D}^2 + |\nabla u|_{0,D}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

# Chapitre 4

## Étude de l'unicité

---

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Formulation variationnelle</b> . . . . .	<b>36</b>
4.1.1	Opérateur de prolongement . . . . .	36
4.1.2	Décomposition de la forme bilinéaire . . . . .	38
4.1.3	L'opérateur de Steklov . . . . .	38
<b>4.2</b>	<b>Alternative de Fredholm</b> . . . . .	<b>39</b>
4.2.1	Alternative de Fredholm . . . . .	40
<b>4.3</b>	<b>Théorème d'existence-unicité et stabilité.</b> . . . . .	<b>40</b>
4.3.1	Unicité pour le problème limite: . . . . .	40
4.3.2	Théorème de stabilité . . . . .	41

---

## 4.1 Formulation variationnelle

On a le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u^\delta + k^2 u^\delta = 0 \text{ dans } \Omega^\delta, \\ \frac{\partial u^\delta}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma^\delta, \\ \partial_y(u - u^{inc}) + S(u - u^{inc}) = 0. \end{array} \right.$$

On commence par se ramener à un domaine borné pour pouvoir utiliser l'opérateur de Helmholtz comme la somme d'un opérateur elliptique et d'une perturbation compacte.

On considère l'espace :

$$V^\delta := H_{\#}^1(\Omega_H^\delta) := \{v \in H^1(\Omega_H^\delta) : v|_{y=L} = e^{i\beta L} v|_{y=0}\}.$$

On pose :

$$a^\delta(u, v) = \int_{\Omega_H^\delta} (\nabla u \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) d\Omega_H^\delta + \langle Su, \bar{v} \rangle_{-1/2, 1/2},$$

où le crochet  $\langle Su, \bar{v} \rangle$  désigne la dualité entre l'espace  $H_{\#}^{\frac{1}{2}}(]0, L[)$  et son dual  $H_{\#}^{-\frac{1}{2}}(]0, L[)$ .

Le problème aux limites de Neumann pour l'équation de Helmholtz se formule de façon équivalente sur le domaine tronqué  $\Omega_H^\delta$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\delta \in V^\delta, \forall v \in V^\delta, \\ a^\delta(u^\delta, v) = \frac{1}{L} \int_0^L (\partial_y u^{inc} + S u^{inc}) \bar{v}(x, H) dx. \end{array} \right.$$

### 4.1.1 Opérateur de prolongement

L'établissement de la propriété de stabilité nécessite de travailler sur un domaine fixe par rapport au paramètre  $\delta$ , pour cela on va prolonger la solution  $u^\delta$  définie sur le domaine  $\Omega_H^\delta$  variant en fonction de  $\delta$ , en une fonction définie sur le domaine fixe défini comme suit :

$$\Omega_H := \Omega_H^{\delta=0} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < d, 0 < y < H\},$$

de frontière :

$$\Gamma^0 = \Gamma^{\delta=0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < d, y = 0\},$$

qui présente une surface plane.

**Théorème 4.1** *Pour tout  $\delta > 0$  il existe un opérateur de prolongement linéaire continue*

$$\begin{aligned} q^\delta : H_{\#}^1(\Omega_H^\delta) &\rightarrow H_{\#}^1(\Omega_H) \\ v &\longrightarrow q^\delta v. \end{aligned}$$

De plus il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que :

$$\|q^\delta v\|_{H_{\#}^1(\Omega_H)} \leq C \|v\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)}, \quad \forall v \in H_{\#}^1(\Omega_H^\delta).$$

**Preuve.** : Le problème se pose au voisinage de la frontière  $\Gamma^\delta$ . On se ramène par troncature au prolongement d'une fonction à support dans un voisinage de  $\Gamma^\delta$ . Le changement de variable:

$$\begin{cases} \Phi^\delta : ]0, d[ \times \mathbb{R} &\rightarrow ]0, d[ \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \Phi^\delta(x, y) = (x, y - \delta s(x, \frac{x}{\delta})), \end{cases}$$

ramène la frontière rugueuse  $\Gamma^\delta$  de  $\Omega_H^\delta$  à la frontière plane  $\Gamma = \Gamma^{\delta=0}$  de  $\Omega_H$ .

Soit alors  $e > \delta \tau_{\min}$  et  $q$  est un opérateur de prolongement continue de  $H_{\#}^1(]0, d[ \times ]0, e[)$  dans  $H_{\#}^1(]0, d[ \times ]-e, e[)$ .

On définit alors l'opérateur de prolongement  $q^\delta$  en posant :

$$(q^\delta v)(x, y) = [q(v \circ \Phi^\delta)] (\Phi^\delta(x, y))^{-1}.$$

La matrice jacobienne de  $\Phi^\delta$  donnée par :

$$D\Phi^\delta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\delta \frac{\partial s}{\partial x}(x, \frac{x}{\delta}) - \frac{\partial s}{\partial \sigma} s(x, \frac{x}{\delta}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible et ses coefficients (ainsi que les coefficients de son inverse) sont uniformément bornés dans  $L^\infty(]0, d[ \times \mathbb{R})$ . On en déduit alors l'existence de  $C > 0$  telle que :

$$\|q^\delta v\|_{H_{\#}^1(\Omega_H)} \leq C \|q^\delta v\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)}, \quad \forall v \in H_{\#}^1(\Omega_H^\delta).$$

■

### 4.1.2 Décomposition de la forme bilinéaire

La forme bilinéaire  $a^\delta(.,.)$  se décompose en deux parties :

- sa partie positive:

$$a_+^\delta(u, v) = \int_{\Omega_H^\delta} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy,$$

- un reste:

$$r^\delta(u, v) = - \int_{\Omega_H^\delta} k^2 uv \, dx dy.$$

Remarquons que  $r^\delta(u, v)$  est négatif, pour tout  $v \in V^\delta$ , et par conséquent on n'a pas la coercivité pour ce type de problèmes.

**Proposition 4.2**  $\exists \alpha > 0$  une constante indépendante de  $\delta$  telle que :

$$\operatorname{Re} a_+^\delta(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)}^2 \text{ pour tout } v \in V^\delta$$

### 4.1.3 L'opérateur de Steklov

L'opérateur  $S$  est défini par :

$$Sw(x) := - \sum_{-\infty}^{+\infty} iK_m w_m e^{iK_m H} e^{i\beta_m x},$$

où  $w_m$  : est le coefficient du développement de Floquet de  $w(., H)$ , défini par :

$$w_m := \frac{1}{L} \int_0^L w(x) e^{-i\beta_m x} dx.$$

On a :

$$\langle Sw, w \rangle_{-1/2, 1/2} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_0^L -iK_m w_m e^{iK_m H} e^{i\beta_m x} w_m e^{iK_m H} e^{i\beta_m x} dx.$$

Comme :

$$K_m = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \beta_m^2}, & \text{si } \beta_m \leq k, \\ i\sqrt{\beta_m^2 - k^2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La partie réelle de  $\langle Sw, w \rangle_{-1/2, 1/2}$  correspond aux  $K_m$  imaginaires purs; i.e : pour  $\beta_m \geq k$ .

On aura donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle Sw, w \rangle_{-1/2, 1/2} &= \sum_{m \geq m_0} \operatorname{Re} \int_0^L -iK_m w_m e^{iK_m H} e^{i\beta_m x} w_m e^{iK_m H} e^{i\beta_m x} dx \\ &= L \sum_{m \geq m_0} \sqrt{\beta_m^2 - k^2} |w_m|^2 \end{aligned}$$

où  $m_0 = \min \{m \in \mathbf{Z} : \beta_m^2 - k^2 > 0\}$ .

## 4.2 Alternative de Fredholm

Le but de cette partie est de réduire la question de l'existence-unicité d'une solution du problème [10]:

$$\begin{cases} u^\delta \in V^\delta, \forall v \in V^\delta, \\ a^\delta(u^\delta, v) = \frac{1}{L} \int_0^L (\partial_y u^{inc} + S u^{inc}) \bar{v}(x, H) dx. \end{cases}$$

à l'unicité de sa solution grâce à l'alternative de Fredholm.

Considérons alors pour  $u$  donné dans l'espace  $V^\delta$ , le problème :

$$\begin{cases} w^\delta \in V^\delta, \forall v \in V^\delta, \\ a_+^\delta(w^\delta, v) + \langle S w^\delta(\cdot, H), v(\cdot, H) \rangle_{-1/2, 1/2} = a^\delta(u, v), \end{cases}$$

et l'application linéaire :

$$\Lambda_\delta : V^\delta \longrightarrow V^\delta$$

$$u \longmapsto \Lambda_\delta u = w^\delta.$$

**Proposition 4.3**  $\Lambda_\delta$  est bien définie, est uniformément bornée .i.e.:  $\exists c > 0$  une constante indépendante de  $\delta$  telle que :

$$\|\Lambda_\delta u\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)} \leq c \|u\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)}, \forall v \in V^\delta.$$

**Preuve.** En effet: on a

$$\operatorname{Re} a_+^\delta(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)}^2,$$

d'autre part :

$$\operatorname{Re}\langle Sv, v \rangle_{-1/2, 1/2} = L \sum_{m \geq m_0} \sqrt{\beta_m^2 - k^2} |v_m|^2 \geq 0,$$

$$|a^\delta(u, v)| \leq c \|u\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)} \|v\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)},$$

et donc :

$$\alpha \|\Lambda_\delta u\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)}^2 \leq c \|u\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)} \cdot \|\Lambda_\delta u\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)}.$$

Il en résulte :

$$\alpha \|\Lambda_\delta\|_{L(V^\delta, V^\delta)} \leq c.$$

■

#### 4.2.1 Alternative de Fredholm

En utilisant le lemme de Lax-Milgram , on peut définir [10] [3] l'opérateur  $T^\delta$  de  $V^\delta$  dans  $V^\delta$ , en posant pour tout  $u \in V^\delta$ ,  $T^\delta u = p^\delta$ , où  $p^\delta$  est l'unique solution du problème suivant:

$$\begin{cases} p^\delta \in V^\delta, \forall v \in V^\delta, \\ a_+^\delta(p^\delta, v) + \langle Sp^\delta, v \rangle_{-1/2, 1/2} = r^\delta(u, v). \end{cases}$$

Il découle de compacité locale de l'espace  $H^1$  dans  $L^2$  et de la compacité de l'opérateur  $S$  de  $H^{\frac{1}{2}}$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}$ .

**Proposition 4.4** *L'application  $\Lambda_\delta$  prend la forme  $\Lambda_\delta = I + T^\delta$  où  $I = I_{V^\delta}$  est l'application identité de l'espace  $V^\delta$ .*

### 4.3 Théorème d'existence-unicité et stabilité.

#### 4.3.1 Unicité pour le problème limite:

En faisant tendre le petit paramètre  $\delta$  vers 0, la solution  $u^\delta$  va converger vers une limite  $u^0$  solution du problème (sans rugosité):

$$\begin{cases} u^0 \in V^0, \forall v \in V^0; \\ a^0(u^0, v) = \int_0^L (\partial_y u^{inc} + Su^{inc})(\cdot, H) v(\cdot, H) dx, \end{cases}$$

avec:

$$a^0(u, v) = \int_{\Omega_H^0} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) dx dy + \langle Su^0, v \rangle_{-1/2, 1/2}.$$

La condition aux limites vérifiée par  $u^0$  sur la surface plane  $\Gamma^0$  est:

$$\partial_n u^0 = 0.$$

Cette condition ne tient pas compte de l'effet de rugosité de la surface considérée.

### 4.3.2 Théorème de stabilité

On veut montrer maintenant le résultat de stabilité qui permet l'estimation de l'erreur.

**Propriété de stabilité:**

**Lemme 4.5** *Il existe  $\delta_0 > 0$  et une constante  $\gamma > 0$  indépendante de  $\delta$  tels que pour tout  $\delta_0 \geq \delta > 0$ , on ait :*

$$\gamma \|u^\delta\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)} \leq \|p^\delta\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)}.$$

pour tout  $u^\delta \in V^\delta$

**Preuve.** La preuve de cette estimation se fait par l'absurde grâce au prolongement uniforme et au fait que  $a^\delta - a_0^\delta$  est perturbation compacte de  $a_0^\delta$ .

Si on suppose que l'estimation est fautive, alors il existe une suite  $(u^\delta)_{\delta > 0}$  vérifiant :

$$u^\delta \in V^\delta \text{ et } \|u^\delta\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)} = 1,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|p^\delta\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)} = 0,$$

$p^\delta$  est la solution du problème variationnel suivant

$$a_0^\delta(p^\delta, v) = a^\delta(u^\delta, v), \forall v \in V^\delta.$$



.La suite  $(q^\delta u^\delta)_{\delta>0}$  des prolongements à  $\Omega_H$  de  $(u^\delta)_{\delta>0}$  est alors bornée dans  $H_{\#}^1(\Omega_H)$  et admet une sous-suite qu'on note toujours  $(q^\delta u^\delta)_{\delta>0}$  qui converge faiblement vers une limite  $w$  dans  $H_{\#}^1(\Omega_H)$ .

On considère alors la forme bilinéaire  $a$  définie sur  $H_{\#}^1(\Omega_H)$ , indépendante de  $\delta$

$$a(u, v) = \int_{\Omega_H} (\nabla u \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) d\Omega_H + \langle Su, \bar{v} \rangle, \quad \forall u, v \in H_{\#}^1(\Omega_H)$$

et la forme bilinéaire

$$b^\delta(u, v) = \int_{\Omega_H \setminus \Omega_H^\delta} (\nabla u \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) d\Omega_H^\delta, \quad \forall u, v \in H_{\#}^1(\Omega_H).$$

On peut alors écrire

$$a(q^\delta u^\delta, v) = a^\delta(u^\delta, v|_{\Omega_H^\delta}) + b^\delta(q^\delta u^\delta, v), \quad \forall v \in H_{\#}^1(\Omega_H).$$

L'hypothèse

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|p^\delta\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)} = 0$$

implique que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} a^\delta(u^\delta, v|_{\Omega_H^\delta}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} a_0^\delta(p^\delta, v|_{\Omega_H^\delta}) = 0.$$

Comme la mesure de  $\Omega_H \setminus \Omega_H^\delta$  tend vers 0 quand  $\delta \rightarrow 0$  on a aussi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} b^\delta(q^\delta u^\delta, v) = 0,$$

et par conséquent

$$a(w, v) = \lim_{\delta \rightarrow 0} a^\delta(q^\delta u^\delta, v) = 0, \quad \forall v \in H_{\#}^1(\Omega_H),$$

ce qui donne  $w = 0$  grâce à l'unicité de la solution du problème de Neumann pour l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_H$  avec une onde incidente nulle.

La compacité de l'injection de  $H_{\#}^1(\Omega_H)$  dans  $L_{\#}^2(\Omega_H)$  entraîne alors que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_H} k^2 |q^\delta u^\delta|^2 d\Omega_H = 0,$$

et donc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_H^\delta} k^2 |u^\delta|^2 d\Omega_H^\delta = 0,$$

de même la compacité de l'opérateur:

$$S - S_0 : H_{\#}^{\frac{1}{2}}(]0, L[) \longrightarrow H_{\#}^{-\frac{1}{2}}(]0, L[).$$

implique que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle (S - S_0)u^\delta, \bar{u}^\delta \rangle = 0,$$

et par conséquent:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (a^\delta - a_0^\delta)(u^\delta, u^\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_H^\delta} k^2 |u^\delta|^2 d\Omega_H^\delta + \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle (S - S_0)u^\delta, \bar{u}^\delta \rangle = 0.$$

On en déduit alors que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} a_0^\delta(u^\delta, u^\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\{a_0^\delta(u^\delta, u^\delta) - a^\delta(u^\delta, u^\delta)\} + a_0^\delta(p^\delta, u^\delta)] = 0,$$

puisque

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} a_0^\delta(p^\delta, u^\delta) = 0.$$

Et ceci contredit le fait que  $\|u^\delta\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)} = 1$  et que  $a_0^\delta$  est coercive sur  $H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)$ . ■

**Théorème 4.6** *La solution du problème :*

$$\begin{cases} u^\delta \in V^\delta, \forall v \in V^\delta, \\ a^\delta(u^\delta, v) = \int_{\Omega_H^\delta} (f^\delta \bar{v} - g_1^\delta \overline{\partial_x v} - g_2^\delta \overline{\partial_y v}) d\Omega_H^\delta + \int_{\Gamma^\delta} h^\delta \bar{v} d\Gamma^\delta \end{cases}$$

vérifie l'estimation suivante

$$\|u^\delta\|_{H_{\#}^1(\Omega_H^\delta)} \leq C \left\{ \|f^\delta\|_{L_{\#}^2(\Omega_H^\delta)} + \|g_1^\delta\|_{L_{\#}^2(\Omega_H^\delta)} + \|g_2^\delta\|_{L_{\#}^2(\Omega_H^\delta)} + \|h^\delta\|_{L^2(\Gamma^\delta)} \right\}.$$

**Preuve.** Le résultat est clair pour  $\delta \geq \delta_0 > 0$ .

Il est également évident lorsque la forme  $a^\delta$  est remplacée par sa partie coercive  $a_0^\delta$ , définie par

$$a_0^\delta(u, v) = \int_{\Omega_H^\delta} \nabla u \nabla \bar{v} d\Omega_H^\delta + \langle S_0 u, \bar{v} \rangle,$$

où l'opérateur  $S_0$  est défini en ôtant de l'expression de  $S$  les modes qui se propagent i.e :

$$Su(x, H) := - \sum_{|\beta_m| > k} iK_m u_m e^{i\beta_m x}.$$

■

# Conclusion générale

---

Poirier, Bendali et Borderies ont utilisé dans [8] et [9] une méthode qui repose sur la technique des échelles multiples de la théorie de l'homogénéisation et sur le développement asymptotique raccordé, dans l'étude de l'équation de Helmholtz avec condition aux limites de type Cauchy. Dans ce travail nous avons étudié le problème en prenant les conditions aux limites de type Neumann.

La théorie de l'homogénéisation a été utilisée pour obtenir des conditions aux limites équivalentes. Ces conditions ont été obtenues à partir d'un développement asymptotique à deux échelles. En utilisant l'approche de Vasi'elva, nous avons explicité une méthode permettant de systématiser la construction du développement asymptotique à un ordre quelconque.

# Bibliographie

---

- [1] **Abboud T. and Ammari H.** Diffraction at a curved grating: TM and TE cases, homogenization. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 1996. [17](#), [19](#)
- [2] **Bensoussan. A, Lions J. L., and Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. North Holland, Amsterdam, 1978. [1](#)
- [3] **Bendali A. and Lemrabet K.** The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 56(6) : 1664 1693, avril 1996. [1](#), [19](#), [40](#)
- [4] **Dautray R. and Lions J. L.** Modèles physiques. Masson editor, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Volume 1. Paris 1987.
- [5] **Laadj T.** Approximation de l'opérateur d'impédance de couches minces superposées. Thèse de Magister, U.S.T.H.B, décembre 2004. [9](#)
- [6] **Lemrabet K.** Modélisation de l'effet d'une surface rugueuse sur la diffraction d'une onde harmonique, Laboratoire AMNEDP, Faculté des mathématiques, U.S.T.H.B 1999. [10](#), [19](#)
- [7] **Peterson A.F., Ray S.L. and Mittra R.** *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory, IEEE Press and Oxford University Press, New-York, 1998. [13](#)

- [8] **Poirier R., Bendali A. and Borderies P.** Impédance Boundary Conditions for the scattering of Time-Harmonic Waves by Rapidly Varying surfaces, 2002, jEE'02, Toulouse. [2](#), [44](#)
- [9] **Poirier R.** Thèse INSA, Modélisation électromagnétique des effets de rugosité surfacique, Toulouse 2000. [1](#), [9](#), [10](#), [17](#), [19](#), [29](#), [30](#), [44](#)
- [10] **Telmeçani M.** Modélisation de l'effet de couches minces sur la diffraction des ondes harmoniques. Thèse de Magister, U.S.T.H.B, mai 1997. [39](#), [40](#)
- [11] **Sanchez-Hubert J. et Sanchez-Palencia E.** Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation, Masson editor ; 1992. [17](#), [18](#)
- [12] **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. and Kalachev L.V.** The boundary function Method for singular perturbation problems. Pheladelphia: SIAM Studies in applied Mathematics, 1995.

[19](#), [20](#)